

MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS NO ESTÁNDAR PARA LA
ECUACIÓN DE LANGEVIN

SAÚL DÍAZ INFANTE VELASCO



Maestría en ciencias con especialidad en matemáticas aplicadas

Cimat

Mayo 2011

*We have seen that computer programming is an art,
because it applies accumulated knowledge to the world,
because it requires skill and ingenuity, and especially
because it produces objects of beauty.*

Donald E. Knuth [35]

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca recibida para realizar mis estudios de Maestría. Al Centro de Investigación en Matemáticas A.C. (Cimat) por el apoyo económico brindado para seguir con mis estudios.

Por dedicarme el tiempo necesario para llevar a cabo este trabajo de tesis, por sus acertados comentarios y dirección, agradezco a la Dr. Silvia Jerez Galiano. Por fungir como como sinodales de esta tesis, por sus enseñanzas y guía, expreso mi agradecimiento al Dr. Jesús Adrian Espinola Rocha y al Dr. Ramón Castañeda Priego.

A mis maestros: Raúl Quiroga, Berta Gamboa, Marcos Capistrán, Silvia Jerez, Francisco Javier Solis, Renato Iturriaga, Adrian Espinola, Fernando Galaz Fontes y Stephanie Dunbar, por todo lo que han dejado en mí.

ÍNDICE GENERAL

| | |
|---|------|
| Índice de figuras | vii |
| Índice de tablas | viii |
| 1 INTRODUCCIÓN | 1 |
| 1.1 Presentación del problema de interés científico | 1 |
| 1.2 Objetivos | 4 |
| 1.3 Metodología | 5 |
| 2 ELEMENTOS DE PROBABILIDAD | 7 |
| 2.1 Espacios de probabilidad | 7 |
| 2.2 Vectores aleatorios | 9 |
| 2.2.1 Independencia | 10 |
| 2.2.2 Momentos de vectores aleatorios | 11 |
| 2.3 Convergencia | 13 |
| 2.4 Procesos estocásticos | 16 |
| 2.4.1 Variación simple y cuadrática de un proceso | 17 |
| 2.4.2 Momentos, covarianza e incrementos de un proceso estocástico . | 18 |
| 2.5 Martingalas | 18 |
| 2.5.1 Filtraciones | 18 |
| 2.6 Movimiento Browniano | 22 |
| 2.6.1 Definición | 23 |
| 2.6.2 Función de probabilidad de transición | 24 |
| 2.6.3 Propiedades del proceso estocástico | 24 |
| 2.6.4 Propiedades de las trayectorias | 25 |
| 3 SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS | 27 |
| 3.1 Integración estocástica | 27 |
| 3.1.1 Fórmula de Itô | 32 |
| 3.2 Ecuaciones diferenciales estocásticas | 33 |
| 3.2.1 Movimiento Browniano Geométrico | 34 |
| 3.2.2 Proceso de Ornstein-Uhlenbeck | 36 |
| 3.3 Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales estocásticas. | 36 |
| 3.3.1 Método de Euler-Mayurama | 37 |
| 3.3.2 Método Estocástico de Runge Kutta (SRKII) | 38 |
| 3.4 Convergencia y estabilidad del esquema Euler-Mayurama | 40 |
| 3.4.1 Convergencia en los sentidos fuerte y débil | 40 |
| 3.4.2 Estabilidad lineal | 43 |
| 4 ESQUEMAS EN DIFERENCIAS FINITAS NO ESTÁNDAR (EDFNE) | 51 |
| 4.1 Esquema en diferencias finitas no estándar (EDFNS) | 52 |
| 4.2 Construcción de EDFNS | 59 |
| 4.2.1 Esquema en diferencias finitas Mickens (EDFM) (alternativa 1) . | 60 |
| 4.2.2 Promedio de Steklov (alternativa 2) | 61 |
| 4.2.3 Ejemplos | 62 |
| 5 CONSTRUCCIÓN DEL ESQUEMA EULER-MAYURAMA-MICKENS (EMM) | 71 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 5.1 | Construcción del esquema Euler-Mayurama-Mickens | 71 |
| 5.2 | Estudio de estabilidad de EMM | 75 |
| 5.2.1 | Estabilidad en el caso de ruido multiplicativo. | 75 |
| 5.2.2 | Convergencia en el caso de ruido multiplicativo | 77 |
| 5.2.3 | Estabilidad en el caso de ruido aditivo | 79 |
| 6 | RESULTADOS | 81 |
| 6.1 | Construcción del método EMM para la ecuación del Langevin | 81 |
| 6.2 | Propiedades teóricas de un esquema EMM para el potencial $U = -\frac{1}{4}x^4$ | 82 |
| 6.3 | Cantidades Físicas de interes | 83 |
| 6.3.1 | Propiedades dinámicas | 84 |
| 6.4 | Validación | 85 |
| 7 | CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS | 91 |
| 7.1 | Conclusiones y perspectivas | 91 |
| 7.2 | Trabajos de oportunidad y posibles direcciones | 92 |
| I | APÉNDICE | 93 |
| A | ELEMENTOS DE PROBABILIDAD | 95 |
| A.1 | Variables aleatorias | 95 |
| A.2 | Distribución normal | 100 |
| A.2.1 | Desigualdades importantes | 101 |
| | BIBLIOGRAFÍA | 105 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | | |
|-----------|---|----|
| Figura 1 | Esquema de simulación dinámica Browniana (DB). | 5 |
| Figura 2 | Relación entre los tipos de convergencia | 15 |
| Figura 3 | Realización de movimiento Browniano | 17 |
| Figura 4 | Movimiento Browniano | 22 |
| Figura 5 | Trayectoria de un proceso simple. | 30 |
| Figura 6 | Extensión de la integral estocástica | 31 |
| Figura 7 | Solución de (3.17) con $\mu = 1, \lambda = \frac{1}{3}$ | 35 |
| Figura 8 | Proceso de Ornstein-Uhlenbeck con $X_0 = 10, \alpha = 1, \beta = 1$ | 37 |
| Figura 9 | Comparación de la solución exacta con la aproximación esquema Euler-Mayurama (EM) para (3.17) | 38 |
| Figura 10 | Comparación de la solución exacta de (3.30) con la obtenida por el esquema Runge-Kutta estocástica de dos etapas (SRKII). | 39 |
| Figura 11 | Gráfica del error en sentido fuerte para el método EM, la línea punteada representa la pendiente de referencia | 41 |
| Figura 12 | Gráfica de error en sentido débil, la línea punteada tiene pendiente 1. | 43 |
| Figura 13 | Región de estabilidad del esquema EM para la ecuación de prueba. | 46 |
| Figura 14 | Solución numérica de (3.57) con el esquema EM usando diferentes tamaños de paso Δt | 48 |
| Figura 15 | Naturaleza de las soluciones para la ecuación logística. | 52 |
| Figura 16 | Solución, a partir del esquema numérico (4.3) para la ecuación logística, con $y_0 = 0.1$, tamaño de paso $h = 0.1$ y 2000 iteraciones en $[0, 200]$ | 53 |
| Figura 17 | Solución numérica con el esquema centrado no local (4.14), con $y_0 = 0.25, h = 0.1$ en $[0, 5]$ | 55 |
| Figura 18 | Comparación de los esquemas (4.52). | 63 |
| Figura 19 | Comparación del esquema (4.58) y (4.56) con tamaño de paso h y distinto número de iteraciones. | 65 |
| Figura 20 | Implementación del esquema (4.60). | 65 |
| Figura 21 | Comparación de la solución numérica bajo el esquema (4.63) con la solución exacta y el esquema (4.65), con $y_0 = 1$ y tamaños de paso h | 67 |
| Figura 22 | Región de estabilidad para el método de Euler. | 68 |
| Figura 23 | Región de estabilidad lineal para el método de Euler asociado a el esquema (4.69) | 69 |
| Figura 24 | Comparación del esquema (5.11) y el EM para la solución de (5.11), con condición inicial $X_0 = 1$, y con distintos tamaños de paso Δt | 73 |

| | | |
|-----------|---|-----|
| Figura 25 | Comparación del esquema (5.16) con el método EM, ambos para la ecuación diferencial estocástica (EDE) (5.13), con $X_0 = 1$ y distintos tamaños de paso Δt | 74 |
| Figura 26 | Comparación de los esquemas esquema Euler-Mayurama-Mickens (EMM) y SRKII para (5.17), con $X_0 = 1$ y un tamaño de paso $\Delta t = 0.0625$ | 75 |
| Figura 27 | Región de estabilidad para la ecuación (5.21) y el método EMM. | 77 |
| Figura 28 | Comparación de la estabilidad en media cuadrática para los esquemas EMM y EM de la ecuación (5.27) con $X_0 = 1$, en $[0, 1000]$ y distintos tamaños de paso Δt | 77 |
| Figura 29 | Comparación del error en sentido fuerte a tiempo fina $T = 1$ y una recta con pendiente de referencia $\frac{1}{2}$ | 78 |
| Figura 30 | Desplazamientos sucesivos de una partícula. Entre cada desplazamiento existe un diferencia de un paso en el tiempo Δt | 85 |
| Figura 31 | Gráficas del coeficiente de auto-difusión obtenidas con los métodos esquema convencional de dinámica Browniana (CBD), EMM y SRKII para resolver (6.7) sobre 5×10^6 pasos temporales y diferentes tamaños de paso h | 86 |
| Figura 32 | Región a tiempo corto del coeficiente de auto-difusión obtenido a partir de los métodos EM, SRKII, y EMM con diferentes tamaño de pasos. | 87 |
| Figura 33 | Comparación de los esquemas EM, EMM y SRKII en el cálculo del coeficiente de auto-difusión al incrementar Δt | 88 |
| Figura 34 | Comparación de los esquemas EM, EMM y SRKII en el cálculo del coeficiente de auto-difusión al incrementar Δt a 0.3. | 88 |
| Figura 35 | Funciones de distribución de variable discrtea y continua. | 96 |
| Figura 36 | Distribución normal de parámetros μ, σ^2 | 100 |
| Figura 37 | Comparación sobre los efectos de los parámetros. | 100 |
| Figura 38 | Distribución normal acumulada | 101 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | | |
|---------|---|----|
| Tabla 1 | Tipos de convergencia. | 14 |
| Tabla 2 | Error en sentido fuerte con varios tamaños de paso. Los promedios se tomaron sobre 50 000 realizaciones de la solución numérica | 78 |
| Tabla 3 | Desplazamientos relativos de una partícula durante un intervalo temporal de $5\Delta t$ | 85 |
| Tabla 4 | Tiempo de ejecución (TE) para resolver la ecuación (6.1) y error relativo para tamaños relativamente pequeños. | 87 |
| Tabla 5 | Tiempo de ejecución (TE) para resolver la ecuación (6.1) y error relativo para tamaños relativamente grandes. | 89 |

| | | |
|---------|---|-----|
| Tabla 6 | Tiempo de ejecución (TE) para resolver la ecuación (6.1) y error relativo de los esquemas EM , EMM , SRKII para el cálculo del coeficiente de auto-difusión con un tamaño de paso $h = 0.3$ | 89 |
| Tabla 7 | Desigualdades importantes | 102 |

ACRÓNIMOS

- EDO ecuación diferencial ordinaria
- EDE ecuación diferencial estocástica
- EMM esquema Euler-Mayurama-Mickens ver [sección 5.1](#)
- EM esquema Euler-Mayurama ver [subsección 3.3.1](#)
- EDFNE esquema en diferencias finitas no estándar
- MDFNE Método en diferencias finitas no estándar
- PVI problema de valor inicial
- SRKII esquema Runge-Kutta estocástica de dos etapas ver [subsección 3.3.2](#)
- RKII esquema Runge-Kutta de dos etapas
- DB dinámica Browniana
- DCM desplazamiento cuadrático medio ver [sección 6.3](#)
- IH interacciones hidrodinámicas
- CBD esquema convencional de dinámica Browniana

INTRODUCCIÓN

Hoy en día, el investigador que se dedica al estudio de sistemas coloidales puede estudiar sus propiedades a partir de tres herramientas básicas:

1. el experimento
2. la teoría
3. la simulación computacional

Dichas herramientas se complementan entre sí, dando lugar a una mejor descripción y comprensión de la naturaleza del sistema bajo investigación. Sin embargo los algoritmos de simulación demandan muchos recursos y costo de cómputo. En este sentido buscamos mejorar los esquemas numéricos involucrados en la técnica de dinámica Browniana. Con el fin de presentar el problema que nos planteamos con este trabajo de tesis, y como lograremos nuestra propuesta de solución, dividimos el capítulo en tres secciones: (i) presentación del problema de interés científico, (ii) objetivos y (iii) metodología.

1.1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA DE INTERÉS CIENTÍFICO

Actualmente, los sistemas coloidales son de gran interés industrial debido a que muchos productos que usamos de manera cotidiana quedan dentro de esta categoría, esto ha provocado que diferentes sectores de la industria, enfoquen sus esfuerzos a la investigación de sus propiedades dinámicas y estructurales, con el fin de mejorar la calidad en sus productos. No obstante, los sistemas coloidales son modelos recurridos por científicos de varias áreas, como la física, química, biología y biofísica, por citar solo algunas. Quizá, esta combinación de interés práctico y científico, es lo que ha motivado a quienes los investigan, pues se pueden estudiar a partir del experimento, la teoría y la simulación computacional.

Lineas arriba, al hablar de sistemas coloidales, nos referimos a aquellos sistemas con las siguientes características: (i) están formados por partículas (coloides) suspendidas (o dispersas) en un medio huésped denominado solvente. De tal manera, que los coloides son partículas de tamaño y masa, mucho mayor que las partículas que componen al solvente y (ii) presentan movimiento Browniano, es decir un movimiento térmico azaroso provocado por las múltiples colisiones que ocurren entre los coloides y las partículas del solvente.

Por otra parte, la simulación computacional, permite estudiar propiedades que son difíciles o imposibles de medir experimentalmente, tales como la energía libre o el potencial químico de un sistema. Además, hace accesible investigar condiciones que experimentalmente son muy difíciles de alcanzar, por ejemplo, los niveles altos o bajos de temperatura y presión. Por ello y otras razones, esta herramienta juega un papel importante en la retroalimentación con hipótesis, teorías y experimentos.

Una de las condiciones necesarias para trabajar con simulación, es que el sistema coloidal se encuentre en equilibrio termodinámico [23]. Además, si se conoce el potencial de interacción, entonces las propiedades dinámicas y estructurales del sistema quedan determinadas, por como interaccionan las partículas. Esto permite predecir y controlar el comportamiento de una suspensión coloidal. Es importante señalar que los potenciales de interacción pueden escogerse con anticipación de acuerdo al sistema real que se desea modelar, además de que se tiene la posibilidad de seleccionar desde potenciales de largo alcance puramente repulsivos hasta potenciales atractivos de muy corto alcance [15].

En el método de interés, el de dinámica Browniana (DB), no se consideran las partículas del solvente en la simulación, en su lugar, se trabaja con los efectos sobre el soluto (partículas coloidales), los cuales están representados por una combinación de fuerzas aleatorias y términos relacionados con la fricción. Con esto, se calculan las trayectorias en espacio fase para un colección de partículas que individualmente obedecen una ecuación de Langevin. Por ejemplo, considerando una partícula en una dimensión espacial, la descripción de Langevin es la siguiente:

$$\frac{dX}{dt} = \beta DF + D^{\frac{1}{2}} \xi, \quad (1.1)$$

donde

| | |
|---------------------------|---|
| X | posición a tiempo t . |
| D | coeficiente de difusión. |
| $\beta = \frac{1}{k_B T}$ | k_B la constante de Boltzmann, T temperatura. |
| ξ | ruido Gaussiano. |
| $F = -\frac{dU}{dx}$ | es la fuerza en un potencial U . |

Si se quiere generalizar al estudio del movimiento a N partículas en tres dimensiones espaciales, entonces se hace uso de $3N$ ecuaciones de Langevin acopladas

$$\frac{dr_{ij}}{dt} = \frac{D}{k_B T} F_{ij} + D^{\frac{1}{2}} \xi_{ij} \quad (1.2)$$

dónde

| | |
|-----------------|--|
| $i = 1 \dots N$ | etiqueta las partículas |
| $j = 1, 2, 3$ | etiqueta a las componentes del vector de posición para la partícula i en \mathbb{R}^3 , $r_i = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3})$ |
| D | constante de auto-difusión de partícula libre |
| F_{ij} | representa la fuerza total de la partícula i , debida a la interacción con las otras partículas en la dirección j , en un potencial aditivo a pares $V(r)$ y dada por $F_{ij} = -\nabla_i U(r^N) = -\nabla \sum_{i \neq j} V(r_i - r_j)$ |

El conjunto de ecuaciones en (1.2) constituye la descripción estocástica de N partículas que evolucionan en tiempo y espacio. Así, la fuerza sobre cada partícula Browniana consta de los siguientes términos: una *fuerza sistemática debida al potencial de interacción* más cualquier otra fuerza externa que pudiera estar presente y una *fuerza aleatoria* que tiende a incrementar la energía de la partícula ¹

La ecuación de Langevin ha resultado un punto de partida para entender los mecanismos difusivos en suspensiones coloidales [10]. Sin embargo, encontrar soluciones analíticas a la ecuación de Langevin es prácticamente imposible, lo cual justifica el uso de métodos numéricos para EDEs. En una simulación, es de interés el desplazamiento de las partículas. En esta dirección Ermack y McCammon presentan en [12] el método que hoy se conoce como el CBD, el cual para la ecuación (1.1) se puede escribir como [6]:

$$x(\Delta t) = x_0 + \frac{D}{\Gamma} F \Delta t + \Gamma_0. \quad (1.3)$$

En la ecuación (1.3), el término Γ_0 representa un desplazamiento aleatorio con una función de distribución Normal de media cero y varianza $\langle \Gamma_i(\Delta t) \Gamma_j(\Delta t) \rangle = 2D\Delta t$. El algoritmo es simple de implementar pues su estructura es similar a la de un Euler clásico para una ecuación diferencial ordinaria (EDO). Sin embargo, su implementación implica utilizar pequeños pasos de tiempo, dando como resultado, una simulación costosa computacionalmente, que involucra pocas partículas y una descripción de la dinámica en pequeñas regiones temporales. De esta forma, aquellas cantidades físicas que dependen explícitamente del tiempo, como el desplazamiento cuadrático medio, sólo pueden ser exploradas en escalas de tiempo relativamente pequeñas. La intención de nuestro trabajo va encaminada a la posibilidad de desarrollar algoritmos que mejoren este escenario, particularmente algoritmos que nos permitan realizar simulaciones en escalas temporales más grandes. Esto último, es de particular importancia para el estudio de la dinámica coloidal, ya que ésta presenta un comportamiento no-monótono en el tiempo y, dependiendo de las condiciones físicas, quedan caracterizadas sus propiedades dinámicas.

Por lo tanto una de las características deseables para los métodos empleados en la simulación es que *sean estables para tamaños de pasos lo suficientemente grandes Δt y a la vez tengan una forma simple, de tal manera que no representen un costo significativo de*

¹ En las formulaciones (1.1), (1.2) y (1.3) no se consideran las interacciones hidrodinámicas.

computo en el cálculo de cada iteración. Es pertinente mencionar que no existe un único método para discretizar la ecuación de Langevin. En esta dirección se han propuesto diferentes algoritmos alternativos al originalmente desarrollado por Ermak y McCammon (véase [7]), sin embargo, éstos no han sido generalmente usados para estudiar las propiedades físicas de coloides y polímeros. Una de las razones, según Branka y Heyes, se debe a que estos algoritmos arrojan resultados muy similares a los obtenidos a través del CBD. No obstante, la conclusión principal de Branka y Heyes es que el mejor algoritmo, en términos de precisión para determinar cantidades físicas, es el esquema Runge-Kutta estocástica de dos etapas (SRKII) adaptado para DB. Sin embargo, observamos que uno de los inconvenientes de este método, es que su estructura demanda un costo computacional significativo en cada iteración, dando como resultado una relación costo-precisión no tan diferente al CBD, véase [22].

A grandes rasgos el algoritmo de simulación de dinámica Browniana contempla los siguientes pasos.

PASO 1 (INICIALIZACIÓN). Las posiciones al comienzo de la simulación deben asignarse para cada una de las partículas de tal forma que satisfagan las condiciones de periodicidad o estructura del sistema en estudio.

PASO 2 (CÁLCULO DE FUERZAS).

Cuando se determina que la distancia relativa entre partículas r_{ij} satisface los requerimientos de un radio de corte $r_{ij} < r_c$, se procede a calcular la fuerza y energía potencial entre dichas partículas.

PASO 3 (ACTUALIZACIÓN DE LAS POSICIONES). Al haber determinado las condiciones iniciales para la simulación, se requiere actualizar el sistema en el tiempo, en este caso, la variación de las posiciones se modelan a partir de la ecuación de Langevin (1.2). Para ello, se resuelve numéricamente la ecuación de Langevin considerando un esquema en diferencias.

PASO 4 (PROMEDIO DE LAS CANTIDADES DE INTERÉS). Después de haber llevado a cabo los pasos anteriores, se genera una serie en el tiempo de valores para las posiciones y las correspondientes fuerzas, obteniendo la evolución del sistema con respecto al tiempo. Con esta información las propiedades estructurales y dinámicas del sistema son muestreadas para un número de iteraciones fijo, acumulando datos para calcular luego la estadística de interés.

La figura 1 muestra una forma esquemática de los pasos que se siguen en la simulación de la dinámica Browniana de partículas.

1.2 OBJETIVOS

Nuestro trabajo está enfocado en construir un algoritmo que eficiente la obtención del PASO 3 de la simulación de dinámica Browniana. Es deseable que los esquemas que se resuelven numéricamente la ecuación de Langevin (1.2) sean estables a tamaños de paso Δt lo suficientemente grande, y además conserven cierta simplicidad para ahorrar recursos de computo. La situación mencionada se presenta en diversos contextos y aplicaciones del análisis numérico. En años recientes ha surgido interés por diseñar esquemas en diferencias finitas que solventen o mejoren este escenario.

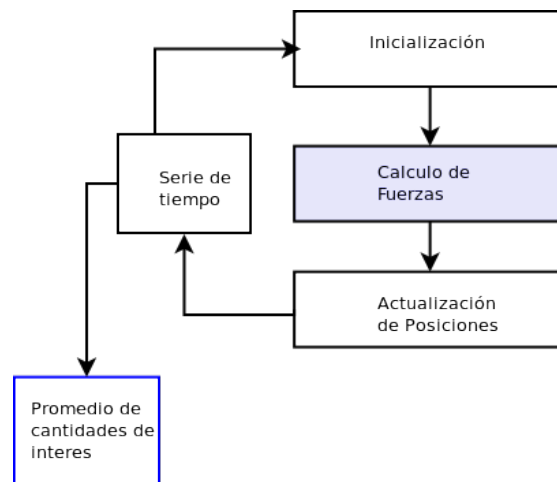


Figura 1: Esquema de simulación DB.

En esta dirección, se ha construido la formulación no estándar de esquemas en diferencias finitas, la cual busca conservar y reproducir de forma correcta las propiedades cualitativas de los modelos que se aproximan ver [47].

En concreto, el trabajo de esta tesis está diseñado bajo la siguiente hipótesis: *Al aplicar la formulación de los esquemas en diferencias no estándar para resolver la ecuación de Langevin (1.1), o (1.2) se obtiene un esquema numérico con mejores propiedades de estabilidad y de simplicidad algebraica similar al esquema convencional de dinámica Browniana (CBD).*

1.3 METODOLOGÍA

Con intención de verificar nuestra propuesta, se ha organizado la tesis en siete capítulos con intención de cubrir los requisitos teóricos y prácticos necesarios para responder a nuestra hipótesis.

- En el [capítulo 2](#) se trabaja con elementos de los espacios de probabilidad, variables aleatorias procesos estocásticos que necesitaremos para el estudio numérico de las EDEs.
- Es evidente la necesidad de estudiar la estructura y propiedades teóricas de los esquemas numéricos para EDEs, lo cual se lleva a cabo en el [capítulo 3](#).
- La parte medular de este trabajo es la aplicación de la formulación no estándar, en el [capítulo 4](#), se construyen y analizan los esquemas numéricos para EDOs de interés.
- En el [capítulo 5](#) aplicaremos la formulación no estándar a la solución numérica de EDEs para construir nuestro esquema.
- En el [capítulo 6](#) se expondrán las evidencias que determinaran la veracidad de nuestra hipótesis.
- Por ultimo en el [capítulo 7](#) comentaremos los logros de este trabajo y en base a esto daremos perspectivas y posibles direcciones en las que se podría continuar.

ELEMENTOS DE PROBABILIDAD

Este capítulo está pensado para presentar los conceptos necesarios referentes a la teoría de probabilidad para lograr los objetivos de esta tesis. Gran parte de lo expuesto aquí es material común en los cursos de Probabilidad, como referencia principal seguimos [53]. El capítulo está dividido en 6 secciones. En la [sección 2.1](#) se estudia el espacio de probabilidad y los elementos necesarios de la medida de Borel. La [sección 2.2](#) trata de forma general las variables aleatorias en su forma vectorial. Exponemos los tipos comunes de convergencia en [sección 2.3](#). La [sección 2.4](#) trata de los procesos estocásticos, en la [sección 2.5](#) se menciona la estructura de martingala con el fin de cerrar con el movimiento Browniano en la [sección 2.6](#).

2.1 ESPACIOS DE PROBABILIDAD

La teoría de la probabilidad se encarga del estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios. Un experimento aleatorio se caracteriza por arrojar distintos resultados cuando se le repite bajo las mismas condiciones iniciales. Por muy diversas razones, es necesario aceptar que no es posible predecir el resultado de un experimento particular aún cuando se le haya efectuado con anterioridad varias veces bajo las mismas condiciones iniciales, y en consecuencia, se considera aleatorio. Bajo estas circunstancias, la teoría de la probabilidad tiene el objetivo de modelar matemáticamente cualquier experimento aleatorio de interés. Un modelo para describir los experimentos aleatorios es el espacio de probabilidad. Este modelo consiste de una terna ordenada, denotada usualmente por (Ω, \mathcal{A}, P) , en donde Ω es un conjunto arbitrario, \mathcal{A} es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω , y P es una medida de probabilidad definida sobre \mathcal{A} .

Se explica a continuación cada uno de estos elementos.

ESPACIO MUESTRAL El conjunto Ω es llamado espacio muestral, tiene como objetivo agrupar a todos los posibles resultados del experimento aleatorio en cuestión. Sin embargo no es imprescindible darle esta interpretación, y por esto matemáticamente se trata como un conjunto arbitrario.

σ -ÁLGEBRA. Es una colección no vacía \mathcal{A} de subconjuntos de Ω que satisface:

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- (ii) $A^c \in \mathcal{A}, \quad \forall A \in \mathcal{A}$.
- (iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \quad \forall A_i \in \mathcal{A}$.

A los elementos de una σ -álgebra se les nombra eventos, sucesos, o conjuntos medibles. En particular, un evento es simple o elemental si consta de a lo más un elemento de la colección, y compuesto cuando consta de dos o más elementos.

MEDIDA DE PROBABILIDAD. Una función $P : \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$ definida sobre una σ -álgebra \mathcal{A} es una *medida de probabilidad* si:

- i) $P(\Omega) = 1$.
- ii) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ cuando A_1, A_2, \dots son elementos de \mathcal{A} que cumplen con $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. El número $P(A)$ representa una forma de medir la posibilidad de observar la ocurrencia del evento A , al efectuar una vez el experimento aleatorio.

Formalmente se enuncia la siguiente definición.

Definición 1 (Espacio de Probabilidad). Un espacio de probabilidad es una terna (Ω, \mathcal{A}, P) , en donde Ω es un conjunto arbitrario, \mathcal{A} es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω , y P es una medida de probabilidad definida sobre \mathcal{A} .

A continuación se estudia un caso particular de σ -álgebra que se necesita para otras definiciones.

CONJUNTOS DE BOREL A continuación se estudia una medida de uso habitual en los espacios de probabilidad. Para esto se ve la necesidad de enunciar los siguientes conceptos y resultados referentes a las σ -álgebras.

Proposición 1. Sea \mathcal{A} una σ -álgebra sobre un conjunto Ω . Entonces:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- (ii) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
- (iii) Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A - B \in \mathcal{A}$ y $A \Delta B \in \mathcal{A}$. Aquí las operaciones “-” y “ Δ ” se entienden como:

$$A - B := A \cap B^c \quad \text{y} \quad A \Delta B := (A - B) \cup (B - A).$$

La primera conclusión de este resultado es una consecuencia directa de la definición, las dos restantes se demuestran considerando las leyes de De Morgan. La demostración detallada se puede consultar en [18].

Proposición 2. La intersección arbitraria de σ -álgebras es una σ -álgebra.

Definición 2 (Espacio Medible.). Sea \mathcal{A} una σ -álgebra de un conjunto Ω . Al par ordenado (Ω, \mathcal{A}) se le nombra *espacio medible*.

Definición 3 (σ -álgebra generada). Sea \mathcal{C} una colección no vacía de subconjuntos de Ω . La σ -álgebra generada por \mathcal{C} , denotada por $\sigma(\mathcal{C})$, es la colección

$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap \{ \mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \}$$

Es decir, la colección $\sigma(\mathcal{C})$ es la intersección de todas aquellas σ -álgebras que contienen a \mathcal{C} . Resulta que esta es la mínima σ -álgebra que contiene a la colección \mathcal{C} . Por otro lado, considerando a todos los intervalos abiertos (a, b) de \mathbb{R} , con $a \leq b$. Resulta que dicha colección forma una σ -álgebra a la que se conoce como *σ -álgebra de Borel* de \mathbb{R} y se le denota por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, formalmente se tiene la siguiente definición.

Definición 4 (σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}).

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a \leq b\}.$$

A los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se les llama *conjuntos de Borel*. Esto permite asociar la σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ con \mathbb{R} y obtener un espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Se muestran a continuación algunos elementos explícitos de esta σ -álgebra.

Definición 5. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La σ -álgebra de Borel de A , denotada por $\mathcal{B}(A)$ o por $A \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$, esta definida como:

$$\mathcal{B}(A) = \{A \cap B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

2.2 VECTORES ALEATORIOS

En esta sección se generaliza el concepto de variable aleatoria (ver apéndice A.1). Se toma como base un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) .

Definición 6 (Vector aleatorio). Un vector aleatorio es una función $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ tal que para todo conjunto $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se cumple que la imagen inversa $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Luego, dado que un vector aleatorio es una función de Ω en \mathbb{R}^n , tiene sentido considerar sus funciones componente, i.e., $X = (X_1, \dots, X_n)$, resulta que cada función componente es una variable aleatoria. Formalmente se enuncia el siguiente resultado:

Proposición 3. Una función $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ es un vector aleatorio, si y sólo si, cada una de sus funciones componente es una variable aleatoria.

Todo vector aleatorio induce una medida de probabilidad, en \mathbb{R}^n , esta medida de probabilidad se estudia a partir de una función de probabilidad conjunta, cuya definición se sigue a continuación.

Definición 7 (Función de distribución conjunta). Una función $F : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$ es una función de distribución si cumple las primeras cuatro propiedades del Teorema 13¹ y además, para cualesquiera números reales $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n$.

$$\sum_{x_i \in \{a_i, b_i\}} (-1)^{\#a} F(x_1, \dots, x_n) \leq 0$$

en donde $\#a$ es el número de veces que alguna de las variables x_i toma el valor a_i en la evaluación de la función F .

La suma que aparece en esta definición corresponde a la probabilidad en el caso discreto del evento

$$(a_1 < X_1 \leq b_1, \dots, a_n < X_n \leq b_n),$$

y se tiene como condición que este número sea no negativo. En el caso unidimensional, algunos vectores tienen asociada una función llamada de probabilidad o de densidad, y la cual se define a continuación para el caso continuo y discreto para \mathbb{R}^2 .

¹ Ver apéndice

Definición 8 ((Función de probabilidad conjunta). Sea (X, Y) un vector aleatorio discreto, su función de probabilidad conjunta $f : \mathbb{R}^2 \mapsto [0, 1]$ esta definida por

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

La función de probabilidad conjunta cumple con las siguientes propiedades:

- (a) $f(x, y) \geq 0$
- (b) $\sum_{x, y} f(x, y) = 1$

Recíprocamente, toda función no negativa $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \mapsto [0, 1]$ que sea estrictamente positiva en un conjunto discreto de \mathbb{R}^2 y que sume uno, es una *función de probabilidad conjunta*. La correspondiente función de distribución se puede calcular a partir de la función de probabilidad como sigue:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} f(u, v).$$

2.2.1 Independencia

Ahora tiene sentido definir el importante concepto de independencia de variables aleatorias. Primero se define tal concepto para dos variables aleatorias, para después generalizar a n variables.

Definición 9 (Independencia de dos variables aleatorias). Sean X y Y variables aleatorias. Se dice que son independientes, si para cada par de conjuntos de Borel A, B de \mathbb{R} , se satisface

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B). \quad (2.1)$$

En términos de la función de distribución la independencia de dos variables aleatorias se puede expresar a partir del siguiente resultado:

Proposición 4. *Las variables aleatorias X y Y son independientes si, y sólo si, para cada (x, y) en \mathbb{R}^2 se satisface la igualdad*

$$F_{X, Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

A partir de lo anterior resulta natural las siguientes generalizaciones.

Definición 10 (Independencia de varias variables aleatorias). Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias; estas se dicen independientes si para cualesquiera conjuntos de Borel A_1, \dots, A_n de \mathbb{R} , se cumple:

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n).$$

Más aún, una colección infinita de variables aleatorias es independiente si cualquier subconjunto finito de ella lo es.

Sean las variables X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes, tomando conjuntos de Borel adecuados en la definición (10), puede comprobarse que cualquier subconjunto de estas variables también son independientes. Esta es la idea del siguiente resultado.

Proposición 5. Sean X y Y variables aleatorias independientes, y sean g y h dos funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} , Borel medibles. Entonces las variables aleatorias $g(X)$ y $h(Y)$ también son independientes.

La definición de independencia de dos variables aleatorias puede extenderse al caso de dos vectores aleatorios de cualquier dimensión de la forma siguiente.

Definición 11 (vectores aleatorios independientes). Se dice que los vectores $X = (X_1, \dots, X_n)$ y $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ son independientes, si para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, y cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, se cumple la igualdad

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B). \quad (2.2)$$

2.2.2 Momentos de vectores aleatorios

ESPERANZA Sean (X, Y) un vector aleatorio y $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ una función Borel medible, entonces $\varphi(X, Y)$ es una variable aleatoria, se considera el problema de encontrar su esperanza. Usando directamente la definición, la esperanza de $\varphi(X, Y)$ se calcula con

$$\mathbb{E}(\varphi(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\varphi(X, Y)}(x).$$

Sin embargo, en la expresión anterior es necesario conocer la distribución de $\varphi(X, Y)$. El siguiente resultado proporciona una herramienta alternativa para el cálculo del valor esperado:

Proposición 6. Sean (X, Y) un vector aleatorio, y $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ una función Borel medible tal que la variable aleatoria $\varphi(X, Y)$ es de esperanza finita. Entonces

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) dF_{X, Y}(x, y).$$

Proposición 7. Sean X y Y variables aleatorias independientes, y g, h dos funciones Borel medibles tales que $g(X)$ y $h(Y)$ son de esperanza finita. Entonces

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y)).$$

En particular, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

COVARIANZA Ahora se define y estudia la covarianza entre dos variables aleatorias.

Definición 12 (Covarianza). Sean X, Y variables aleatorias de esperanza finita $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), \mathbb{E}(XY)$. La covarianza de X y Y , denotada por $\mathbf{cov}(X, Y)$, es el número

$$\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))].$$

En el siguiente resultado se enuncian algunas propiedades de la covarianza.

Proposición 8. Sean X, Y variables aleatorias como en la definición (12) y α una constante. Entonces:

- (i) $\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- (ii) $\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbf{cov}(Y, X)$.

- (iii) $\mathbf{cov}(X, X) = \mathbf{var}(X)$.
 (iv) $\mathbf{cov}(\alpha, Y) = 0$.
 (v) $\mathbf{cov}(\alpha X, Y) = \alpha \cdot \mathbf{cov}(X, Y)$.
 (vi) $\mathbf{cov}(X_1 + X_2, Y) = \mathbf{cov}(X_1, Y) + \mathbf{cov}(X_2, Y)$.
 (vii) Si X, Y son independientes entonces $\mathbf{cov}(X, Y) = 0$.
 (viii) En general, $\mathbf{cov}(X, Y) = 0$ no implica independencia.

El coeficiente de correlación de dos variables aleatorias es un número real que mide el grado de dependencia lineal que existe entre ellas. Su definición es la siguiente.

Definición 13 (Coeficiente de correlación). Sean X y Y variables aleatorias de covarianza y varianza finita. El coeficiente de correlación denotado por $\rho(X, Y)$, se define por el número

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{var}(X)\mathbf{var}(Y)}}.$$

En el siguiente resultado resume algunas de sus propiedades:

Proposición 9. Sean X, Y variables aleatorias como en la definición anterior. El coeficiente de correlación satisface las siguientes propiedades:

- a) Si X y Y son independientes, entonces $\rho(X, Y) = 0$,
 b) $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$,
 c) $|\rho(X, Y)| = 1$, si y sólo si, existen constantes a y b tales que, con probabilidad uno, $Y = aX + b$, con $a > 0$ si $\rho(X, Y) = 1$, y $a < 0$ si $\rho(X, Y) = -1$.

Los conceptos de esperanza y varianza para una variable aleatoria pueden extenderse al caso de vectores aleatorios de cualquier dimensión de la siguiente forma.

Definición 14 (Esperanza y varianza de un vector). Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio donde cada coordenada tiene esperanza finita, se define la esperanza de X como el vector en \mathbb{R}^n ,

$$\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n)).$$

Si cada coordenada del vector aleatorio tiene segundo momento finito, entonces la varianza de X se define como la matriz cuadrada

$$\mathbf{var}(X) = \begin{pmatrix} \mathbf{var}(X_1) & \mathbf{cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathbf{cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{cov}(X_n, X_1) & \mathbf{cov}(X_n, X_2) & \cdots & \mathbf{var}(X_n) \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Las propiedades más importantes de la matriz de varianza se resumen en el siguiente resultado.

Proposición 10. Sea X un vector aleatorio, entonces la matriz $\mathbf{var}(X)$ es simétrica y definida positiva.

2.3 CONVERGENCIA

En esta sección se estudian distintas formas en que una sucesión infinita de variables aleatorias puede converger de manera general. En la mayoría de las situaciones consideradas, se supone la existencia de espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) en donde una sucesión infinita de variables aleatorias X_1, X_2, \dots , queda bien definida. Esta sección es de particular importancia, pues aquí se estudian los elementos necesarios para tratar las propiedades teóricas de un esquema numérico para EDEs.

TIPOS DE CONVERGENCIA En las siguientes definiciones se considera una sucesión de variables aleatorias. Al evaluar cada variable aleatoria en un elemento fijo $\omega \in \Omega$ se obtiene una sucesión de números

$$X_1(\omega), X_2(\omega), \dots \quad (2.3)$$

A continuación se escribe el primer resultado referente a la convergencia

Definición 15 (Convergencia puntual). La sucesión de variables aleatorias (2.3) converge puntualmente a X si para cada $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

Sin embargo en algunas situaciones la convergencia puntual resulta ser una condición muy fuerte, pues se pide la convergencia de la sucesión evaluada en todos y cada uno de los elementos del espacio muestral Ω . Si se pide que la convergencia se verifique en todo el espacio Ω a excepción de un subconjunto de medida cero. Se obtiene la convergencia casi segura.

Definición 16 (Convergencia casi segura). Sea una sucesión de variables aleatorias, como en (2.3), dicha sucesión converge casi seguramente a la variable aleatoria X , si y sólo si

$$P\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1.$$

Esto significa que para algunos valores de ω , la sucesión numérica $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$ pueda no converger, sin embargo dicho subconjunto de Ω debe ser de medida cero. Para indicar la convergencia casi segura se escribe $X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} X$, o bien, $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ c.s.. Un tipo de convergencia aún menos restrictiva que las dos anteriores es la siguiente.

Definición 17 (Convergencia en probabilidad). Se dice que esta sucesión converge en probabilidad, si para cada $\varepsilon > 0$ se satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = 0.$$

Para denotar la convergencia en probabilidad se escribe $X_n \xrightarrow{P} X$. Ahora considerando los primeros momentos de una sucesión de variables aleatorias y si se usa el valor esperado para determinar la cercanía entre dos variables aleatorias se obtiene la convergencia en media.

| CONVERGENCIA | DEFINICIÓN |
|---------------------|---|
| puntual | $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$. |
| casi segura | $P(X_n \rightarrow X) = 1$. |
| en media | $\mathbb{E}(X_n - X) \rightarrow 0$. |
| en media cuadrática | $\mathbb{E}(X_n - X ^2) \rightarrow 0$. |
| en probabilidad | $P(X_n - X > \varepsilon) \rightarrow 0$. |
| en distribución | $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en puntos de x donde F_X es continua. |

Tabla 1: Tipos de convergencia.

Definición 18 (Convergencia en media). La sucesión de variables aleatorias integrables (2.3) converge en media a la variable aleatoria integrable X si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0.$$

Este tipo de convergencia también recupera la convergencia en L^1 y se le denota por $X_n \xrightarrow{L^1} X$. Nuevamente usando el concepto de esperanza pero ahora aplicado al segundo momento se tiene la convergencia en media cuadrática. Más adelante se enuncia un resultado que establece una implicación entre estos dos tipos de convergencia.

Definición 19 (Convergencia en media cuadrática). Sean la sucesión (2.3) y X una variable aleatoria, ambas con segundo momento finito. La sucesión converge en media cuadrática a X , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^2) = 0.$$

A este tipo de convergencia también se le llama convergencia en L^2 , y se le denota por $X_n \xrightarrow{L^2} X$. En general, bajo ciertas condiciones se puede definir la convergencia en L^k para $k \in \mathbb{N}$ con

$$\mathbb{E}(|X_n - X|^k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Resulta que mientras sea mayor k más restrictiva es este tipo de convergencia. Por último se considera el tipo de convergencia menos restrictiva de todas las mencionadas. En contextos más generales se le llama también convergencia débil.

Definición 20 (Convergencia en distribución). La sucesión de variables aleatorias (2.3) converge en distribución a X , si para todo punto x donde la función de distribución asociada a la variable aleatoria $F_X(x)$ es continua, se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

Si este es el caso se escribe $X_n \xrightarrow{d} X$ o $F_{X_n} \xrightarrow{d} F_X$. En la [Tabla 1](#) se resumen todas las definiciones anteriores.

RELACIONES ENTRE LOS TIPOS DE CONVERGENCIA Ahora se establecen algunas relaciones generales entre los tipos de convergencia de variables aleatorias mencionados en los párrafos pasados. En la [figura 2](#) se ilustran de manera gráfica estas relaciones. En este diagrama, la contención se interpreta como implicación, por ejemplo,

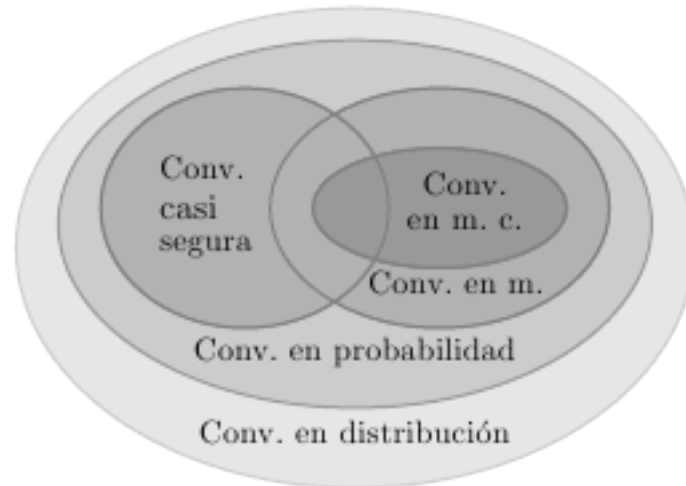


Figura 2: Relación entre los tipos de convergencia

la convergencia casi segura implica la convergencia en probabilidad, y ésta a su vez implica la convergencia en distribución.

Proposición 11. *Convergencia casi segura implica convergencia en probabilidad.*

El recíproco de la proposición anterior es, en general, es falso, es decir, la convergencia en probabilidad no implica necesariamente la convergencia casi segura.

Proposición 12. *Convergencia en L^2 implica convergencia en L^1 .*

Proposición 13. *Convergencia en media implica convergencia en probabilidad.*

Proposición 14. *Convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución.*

La demostración de estos resultados se puede consultar en [17].

RESULTADOS IMPORTANTES SOBRE CONVERGENCIA Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias integrables. Suponiendo que la sucesión converge a X c.s.. Resulta natural preguntar si la sucesión de reales $\mathbb{E}(X_n)$ converge a $\mathbb{E}(X)$. Tal convergencia sería equivalente a intercambiar los operadores de límite y valor esperado; esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n)$$

En esta sección se estudian dos resultados que establecen condiciones bajo las cuales es válido este intercambio.

Teorema 1 (de convergencia monótona). *Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias integrales tales que*

$$0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots$$

si esta sucesión converge casi seguramente a una variables aleatoria X , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n)$$

El siguiente resultado establece otro tipo de condición suficiente para obtener la misma conclusión.

Teorema 2 (de convergencia dominada). *Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias para la cual existe otra variable aleatoria integrable Y tal que $|X_n| \leq Y$ para todo $n \geq 1$. Si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad \text{c.s.},$$

entonces X_n, X son integrables y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X).$$

Nos interesa lo presentado en esta subsección, pues son conceptos base para entender la convergencia de los métodos para EDEs.

2.4 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

En esta sección se estudia la estructura de proceso estocástico en la cual se basa gran parte de este trabajo y en particular, se le da sentido a lo que mas adelante se define como movimiento Browniano.

Como punto de partida se considera un sistema que puede caracterizarse por estar en cualquiera de los estados de un conjunto previamente especificado. Además, si se supone que el sistema evoluciona de un estado a otro a lo largo del tiempo de acuerdo a una cierta ley de movimiento; donde X_t representa el estado del sistema al tiempo t . Y si dicho sistema evoluciona por algún mecanismo azaroso, entonces se puede considerar que X_t es una variable aleatoria para cada valor del índice t . Este sirve como modelo para representar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo. Formalmente, la definición de proceso estocástico toma como base un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Así con el argumento anterior en mente; se enuncia la siguiente definición.

Definición 21 (Proceso estocástico). Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T , llamado espacio paramétrico con valores en un conjunto S llamado espacio de estados.

Un proceso estocástico puede considerarse como una función de dos variables

$$X : T \times \Omega \rightarrow S,$$

tal que a la pareja (t, ω) se le asocia el estado $X(t, \omega)$, lo cual también puede escribirse como $X_t(\omega)$. Por otra parte, para cada valor de t en T , el mapeo

$$\omega \rightarrow X_t(\omega),$$

es una variable aleatoria, mientras que para cada ω en Ω fijo, la función

$$t \rightarrow X_t(\omega),$$

se le nombra trayectoria o realización del proceso. Es decir, a cada ω del espacio muestral le corresponde una trayectoria del proceso. En la [figura 3](#) se muestra la gráfica de una realización, para un proceso estocástico conocido como movimiento Browniano.

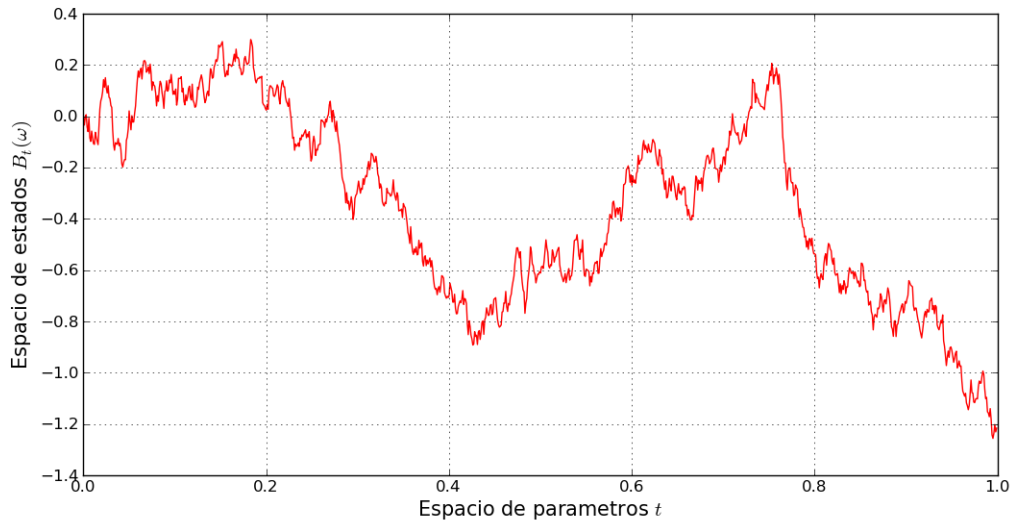


Figura 3: Realización de movimiento Browniano

2.4.1 Variación simple y cuadrática de un proceso

Sea X_t un proceso estocástico continuo. La noción de *variación total o de primer orden* de un proceso $V_t(X_t)$ esta relacionada con la diferenciabilidad de sus trayectorias. Sea

$$\Pi_n = \Pi_n([0, t]) = \{0 = t_0 < t_1 \cdots < t_i \cdots t_n = t, \}$$

una partición del intervalo $[0, t]$ en n subintervalos. Se denota por

$$\|\Pi_n\| = \max_{j=0, \dots, n-1} (t_{j+1} - t_j),$$

a la norma de la partición. Así la variación de X_t queda definida por

$$V_t(X) = p - \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} |X(t_{k+1}) - X(t_k)|. \quad (2.4)$$

Si X es diferenciable entonces $V_t(X) = \int_0^t X'(u) du$. Si además, $V_t(X) < \infty$ entonces se dice que X_t es de *variación acotada* en $[0, t]$. Más aún si esto es verdadero para todo $t \geq 0$, entonces se dice que X_t es de *variación acotada*. La variación cuadrática de X_t al tiempo se denota por $[X, X]_t$ y su definición es

$$[X, X]_t = p - \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} |X(t_{k+1}) - X(t_k)|^2. \quad (2.5)$$

El limite mencionado existe para procesos X con trayectorias continuas. La variación cuadrática también se suele expresar como

$$\langle X, X \rangle_t = p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k+1}^{2^n} (X_{t \wedge k/2^n} - X_{t \wedge (k-1)/2^n})^2,$$

aquí el símbolo “ \wedge ” se entiende como $a \wedge b = \min(a, b)$. Resulta que si un proceso X_t es diferenciable, entonces tiene variación cuadrática igual a cero. Más aún la variación total y la variación cuadrática se relacionan bajo la siguiente desigualdad

$$\sum_{k=0}^{n-1} |X(t_{k+1}) - X(t_k)| \geq \frac{\sum_{k=0}^{n-1} |X(t_{k+1}) - X(t_k)|^2}{\max |X(t_{k+1}) - X(t_k)|}.$$

Entonces, si X_t es un proceso con trayectorias continuas y de variación cuadrática finita esto implica que la variación total de X_t sea infinita. Es importante hacer notar que tanto $V_t(X)$ como $[X, X]_t$ son procesos estocásticos.

2.4.2 Momentos, covarianza e incrementos de un proceso estocástico

El valor esperado y la varianza de un proceso estocástico se definen como

$$\mathbb{E}(X_t) = \int_{\Omega} X(t, \omega) dP(\omega), \quad t \in [0, T],$$

y

$$\mathbf{var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t - \mathbb{E}(X_t))^2, \quad t \in [0, T].$$

Suponiendo X_t finito para todo tiempo $t \in [0, t]$. El k -ésimo momento de X_t , $k \geq 1$ es denotado como $\mathbb{E}(X_t^k)$. Estos números están bien definidos sólo si las variables aleatorias involucradas son integrables. La función de covarianza de un proceso a dos tiempos esta definida por

$$\mathbf{cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_s - \mathbb{E}(X_s))].$$

A la diferencia $X_t - X_s$ se le nombra *incremento* del proceso del tiempo s a t .

Estas cantidades son usadas para describir y elegir a un proceso estocástico en particular, en el momento de elegir un proceso estocástico adecuado como modelo. En la práctica es común encontrar modelos con características particulares de incrementos o covarianza.

2.5 MARTINGALAS

Existen varias acepciones para el término martingala. Por nombrar una, consideramos como martingala a un tipo de proceso estocástico $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ que satisface

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = x_n.$$

Para su estudio es necesario el concepto de Filtración.

2.5.1 Filtraciones

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad para modelar un cierto experimento aleatorio. Como se dijo en la [Definición 2.1](#), la σ -álgebra \mathcal{A} es la estructura que agrupa a los

eventos del experimento aleatorio a los cuales se les puede calcular su probabilidad. Ahora se consideran dos sub σ -álgebras \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 tales que $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$. Entonces \mathcal{A}_2 contiene más información que \mathcal{A}_1 en el sentido de que, en general, un mayor número de conjuntos son considerados como eventos. Más generalmente, puede considerarse una sucesión no decreciente de sub σ -álgebras

$$\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots$$

Este tipo de estructuras surgen de manera natural, por ejemplo, para un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n\}$. Estas consideraciones sobre sucesiones no decrecientes de σ -álgebras llevan a la definición de filtración.

Definición 22 (Filtración). Una filtración es una colección de σ -álgebras $\{\mathcal{A}_n\}_{n \geq 1}$ tal que $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_m$, para todo $n < m$. En particular, la filtración natural o canónica de un proceso $\{X_n\}$ es aquella sucesión de σ -álgebras definidas por

$$\mathcal{A}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}, \quad n \geq 1.$$

A tiempo continuo las definiciones de estos conceptos son análogas: Una filtración es una colección no numerable de sub σ -álgebras $\{\mathcal{A}_t\}_{t \geq 0}$ tal que $\mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}_t$, para $0 \leq s \leq t$. La filtración natural o canónica de un proceso a tiempo continuo $\{X_t : t \geq 0\}$ es la colección de σ -álgebras $\{\mathcal{A}_t\}_{t \geq 0}$ dadas por $\mathcal{A}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$, esto es, \mathcal{A}_t es la mínima σ -álgebra que hace que cada una de las variables X_s , para valores de s en el intervalo $[0, t]$, sean medibles. A la σ -álgebra \mathcal{A}_t se le denomina la historia del proceso al tiempo t .

Definición 23 (Proceso adaptado). Un proceso X_n es adaptado a una filtración \mathcal{A}_n si la variable X_n es \mathcal{A}_n -medible, para cada $n \geq 1$.

De la [sección A.1](#) se sabe que X_n es \mathcal{A} -medible por ser variable aleatoria. La condición de adaptabilidad requiere que X_n sea también una variable aleatoria respecto de la sub σ -álgebra \mathcal{A}_n . Resulta de forma natural que todo proceso es adaptado a su filtración canónica, y puede demostrarse que esta filtración es la filtración más pequeña respecto de la cual el proceso es adaptado. Es necesario considerar el siguiente caso.

Definición 24 (Proceso predecible). Se dice que el proceso $X_n : n \geq 1$ es predecible respecto de la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n \geq 0}$ si para cada $n \geq 1$, la variable X_n es \mathcal{A}_{n-1} -medible.

\mathcal{A}_{n-1} -medible.

Resulta que todo proceso predecible es adaptado. La definición de adaptabilidad es la misma en el caso de procesos a tiempo continuo, y se pueden definir además las siguientes dos σ -álgebras

$$\mathcal{A}_\infty = \left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{A}_t \right)$$

$$\mathcal{A}_{t+} = \left(\bigcap_{s > t} \mathcal{A}_s \right)$$

Así, una filtración es continua por la derecha si $\mathcal{A}_{t+} = \mathcal{A}_t$. Si \mathcal{A}_t es una filtración continua por la derecha y la σ -álgebra inicial \mathcal{A}_0 contiene a todos los subconjuntos de medida cero de \mathcal{A}_0 , entonces la filtración se llama estándar. Algunos cálculos requieren

suponer estas hipótesis. Antes de definir formalmente el concepto de martingala es necesario considerar el *concepto de esperanza condicional*. La probabilidad de que ocurra un evento A dado el evento B se define como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{para } P(B) > 0,$$

en este sentido se introduce la función de distribución condicional de una variable aleatoria X respecto al evento B como:

$$F_X(x|B) = \frac{P(X \leq x \cap B)}{P(B)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

y el valor esperado respecto a esta distribución condicional es

$$\mathbb{E}(X|B) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_B)}{P(B)},$$

aquí se entiende a $\mathbf{1}_B$ como la función indicadora de B , es decir,

$$\mathbf{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in B \\ 0, & \text{otros caso} \end{cases}. \quad (2.6)$$

En particular para variables aleatorias discretas, el valor esperado toma la forma

$$\mathbb{E}(X|B) = \sum_i x_i \frac{P(\{\omega : X(\omega) = x_i\})}{P(B)} = \sum_i x_i P(X = x_i|B).$$

Luego, para variables aleatorias continuas con densidad de probabilidad f_X , se tiene

$$\mathbb{E}(X|B) = \frac{1}{P(B)} \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{1}_B(x) f_X(x) dx = \frac{1}{P(B)} \int_B x f_X(x) dx.$$

Ahora con las ideas expuestas, tiene sentido hacer formal la definición de martingala.

Definición 25 (Martingala). Se dice que un proceso X_n es una martingala respecto de una filtración \mathcal{A}_n si cumplen las siguiente tres condiciones:

- (i) Es integrable.
- (ii) Es adaptado a la filtración.
- (iii) Para cualesquiera $n < m$. $\mathbb{E}(X_m|\mathcal{A}_n) = X_n$, c.s.

Cuando en lugar de (iii) se cumple que $\mathbb{E}(X_m|\mathcal{A}_n) \geq X_n$, entonces el proceso es una *submartingala*, y si $\mathbb{E}(X_m|\mathcal{A}_n) \leq X_n$, entonces es una *supermartingala*.

El resultado más importante de esta sección se refiere a dar condiciones necesarias para asegurar la convergencia de una submartingala.

Teorema 3 (de convergencia de submartingalas de Doob). Sea $\{X_n\}$ una submartingala tal que $\sup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n| < \infty$. Entonces existe una variable aleatoria integrable X tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad \text{c.s.}$$

Como toda martingala es una submartingala, y toda supermartingala se convierte en una submartingala a través de un cambio de signo, se tiene que el teorema anterior es válido en cualquiera de los tres casos. Es decir, toda martingala, submartingala o supermartingala acotada en la forma en la que indica el enunciado del teorema, es convergente casi seguramente, y su límite es una variable aleatoria integrable.

Ahora se enuncia el resultado más importante, trata de que toda martingala que cumple la condición de ser uniformemente integrable puede escribirse en términos de una esperanza condicional. Antes de enunciar el resultado se explica la condición de inalterabilidad uniforme para un proceso.

INTEGRABILIDAD UNIFORME Una variable aleatoria es integrable si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $M > 0$ tal que

$$\int_{|X|>M} |X|dP < \varepsilon. \quad (2.7)$$

Considerando ahora una sucesión de variables aleatorias integrables X_1, X_2, \dots , resulta que para cada ε existe una sucesión $\{M_n\} \in \mathbb{R}$ tal que $M_n > 0$ y

$$\int_{|X_n|>M_n} |X|dP < \varepsilon. \quad (2.8)$$

Entonces si la sucesión $\{M_n\}$, es acotada superiormente, se dice que la variable X es *uniformemente integrable*. Es claro que la integrabilidad uniforme es más fuerte que la integrabilidad simple. Formalmente se tiene la siguiente definición.

Definición 26 (integrabilidad uniforme). Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias integrables, esta sucesión es uniformemente integrable si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $M > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\int_{|X_n|>M} |X|dP < \varepsilon.$$

Resulta que una condición suficiente para que se cumpla la integrabilidad uniforme esta dada por el siguiente resultado.

Proposición 15. *Si un proceso de variables aleatorias integrables convergente en media, entonces dicho proceso es uniformemente integrable.*

El siguiente resultado es un recíproco de la proposición (15), sólo hay que añadir la condición de que el proceso sea una submartingala, en particular, una martingala.

Proposición 16. *Si una submartingala es uniformemente integrable entonces converge en media.*

Para terminar con lo referente a martingalas se enuncia el resultado de representación.

Teorema 4 (de representación de martingalas). *Sea X_n una martingala uniformemente integrable, con filtración natural \mathcal{A}_n y sea la variable aleatoria X , su límite en media. Entonces*

$$X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{A}_n).$$

La variable $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{A}_n)$ puede interpretarse como una aproximación de la variable desconocida X cuando se cuenta con la información dada por la σ -álgebra \mathcal{A}_n .

Conforme n crece, la información acerca de X aumenta a través de la filtración, y en el límite se obtiene o reconstruye X . En el contexto físico, el movimiento Browniano caracteriza los sistemas coloidales, sin embargo una forma para modelarlo matemáticamente es mediante procesos estocásticos. Así pues, resulta que una de las propiedades de dichos proceso es la de satisfacer la definición de martingala. En esta dirección van encaminados los conceptos y resultados que hemos presentado en esta sección.

2.6 MOVIMIENTO BROWNIANO

Fue Robert Brown el primer en observar que las partículas de polen suspendidas en una solución presentaban un movimiento azaroso con trayectorias irregulares. La [figura 4](#) ilustra este fenómeno.

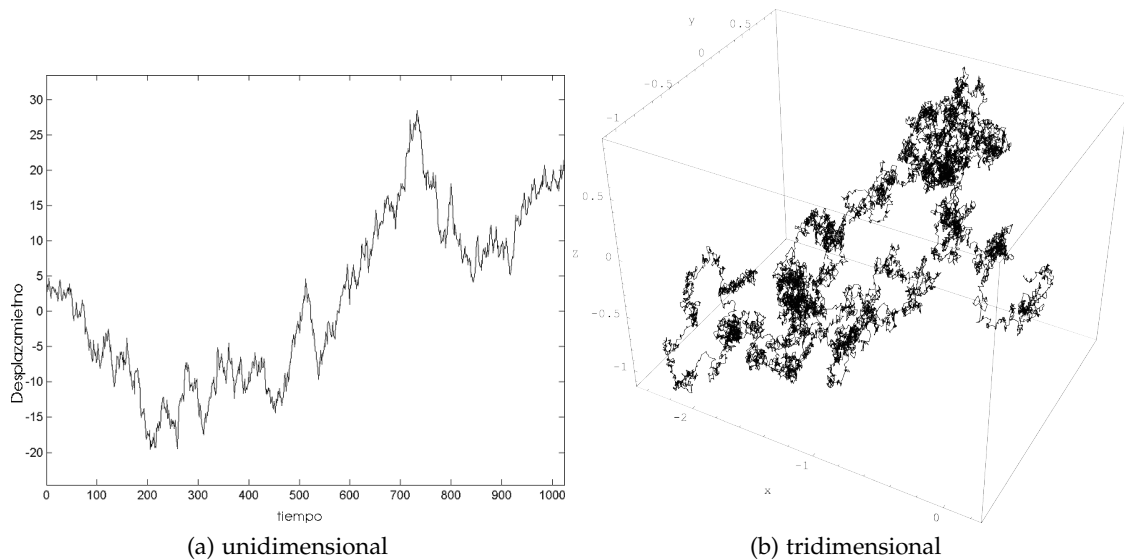


Figura 4: Movimiento Browniano

En este fenómeno, las partículas que se nombran “brownianas”, en comparación con respecto a las moléculas del fluido, son mucho mayores en tamaño y masa. La ley de Stokes, daría una primera aproximación para la descripción de este fenómeno. Considerando que una partícula sumergida en un fluido esta influenciada por una fuerza de fricción,

$$F_c = -\alpha v \quad (2.9)$$

donde F_c es la fuerza de fricción, α es una constante de difusión del medio y v la velocidad de la partícula. Así en ausencia de fuerzas externas y definiendo la fuerza en términos de masa y aceleración, la ecuación (2.9) se lee como

$$m\dot{v} + \alpha v = 0$$

y dividiendo por la masa m

$$\dot{v} + \gamma v = 0 \quad \gamma = \frac{\alpha}{m}. \quad (2.10)$$

Resolviendo (2.10) para una velocidad inicial $v_0 = v(0)$ resulta que v_0 decrece exponencialmente a cero con en un tiempo que se llama de relajación $\tau = \frac{1}{\gamma}$, en símbolos:

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = v_0 \exp(-\gamma t)$$

La física detrás de las fuerzas de fricción es que las moléculas del fluido colisionan con las partículas suspendidas. Por esto, parte de la cantidad de movimiento de las partículas en suspensión es transferido al fluido y en consecuencia la velocidad de la partícula decrece a cero. La ecuación en (2.10) es determinista, pues la solución queda completamente determinada a partir de la condición inicial v_0 . Sin embargo, la ecuación (2.10) es valida solo si la masa de la partícula es lo suficientemente grande para despreciar las fluctuaciones en su velocidad debido a efectos térmicos. En Mecánica Estadística, el teorema de equipartición formula que

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T, \quad (2.11)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura. O lo que es lo mismo, la energía media de la partícula depende en forma lineal de la temperatura. El argumento anterior muestra la perspectiva de la mecánica estadística para este fenómeno. En la literatura se suele nombrar como proceso estocástico de Wiener al objeto matemático usado, para modelar este fenómeno. En las secciones siguientes se formaliza esta idea.

2.6.1 Definición

La estructura de proceso estocástico a tiempo continuo $\{B_t : t \geq 0\}$, ha resultado adecuada para modelar este tipo de fenómenos. La variable B_t puede representar la posición de la partícula al tiempo t . La definición formal, en el caso unidimensional es la siguiente.

Definición 27 (Movimiento Browniano unidimensional). Un movimiento Browniano unidimensional de parámetro σ^2 es un proceso estocástico $B_t : t \geq 0$ con valores en \mathbb{R} que cumple las siguientes propiedades:

- (B1) $B_0 = 0$ c.s.
- (B2) Las trayectorias $t \mapsto B_t$ son continuas.
- (B3) El proceso tiene incrementos independientes.
- (B4) La variable aleatoria $B_t - B_s$ tiene distribución $N(0, \sigma^2(t-s))$, para cualesquiera tiempos $0 \leq s < t$.
- (B5) Para cualesquiera tiempos $0 < t_1 < \dots < t_n$, y para cualesquiera conjuntos de Borel A_1, \dots, A_n de \mathbb{R} , se cumple que

$$P(B_{t_1} \in A_1, \dots, B_{t_n} \in A_n) = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1) \dots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (2.12)$$

donde,

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2 t}\right).$$

2.6.2 Función de probabilidad de transición

La probabilidad de que un movimiento Browniano que inicia en x se encuentre en el conjunto A después de t unidades de tiempo es

$$p(t, x, A) = \int_A p(t, x, y) dy.$$

La condición de que el movimiento Browniano inicie en el origen no es absolutamente necesaria. Pueden considerarse trayectorias Brownianas que inicien en un punto x cualquiera a través del proceso $x + B_t$, el cual se denota por B_t^x para enfatizar la posición de origen. Integrando se muestra que la probabilidad de transición $p(t, x, y)$ cumple la ecuación de Chapman- Kolmogorov,

$$p(t + s, x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, x, u)p(s, u, y) du,$$

y también la ecuación de difusión,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

2.6.3 Propiedades del proceso estocástico

En el movimiento Browniano estándar cada variable aleatoria B_t tiene distribución $N(0, t)$ y por lo tanto $\mathbb{E}(B_t) = 0$ y $\text{var}(B_t) = \mathbb{E}(B_t^2) = t$. En particular $\mathbb{E}(B_t - B_s)^2 = t - s$, para $0 \leq s < t$. Una de las propiedades importantes de un movimiento Browniano es la de ser un proceso de Markov.

PROCESO DE MARKOV Suponiendo conocido el estado presente del sistema, y si los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema; entonces para cualesquiera estados:

$$\underbrace{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}}_{\text{(pasado)}}, \underbrace{x_n}_{\text{(presente)}}, \underbrace{x_{n+1}}_{\text{(futuro)},}$$

se cumple la igualdad

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

Esta condición se conoce como propiedad de Markov y se tiene el siguiente resultado.

Proposición 17. *El movimiento Browniano es un proceso de Markov.*

Más aún, una consecuencia del hecho de que los incrementos de este proceso son independientes, se refleja en las siguientes proposiciones referentes a martingalas .

Proposición 18. *El movimiento Browniano es una martingala continua.*

Teorema 5 (de caracterización de Paul Lévy). *Un proceso $X_t : t \geq 0$ es un movimiento Browniano si y sólo si, tiene trayectorias continuas, empieza en cero, y tanto X_t como $X_t^2 - t$ son martingalas.*

2.6.4 Propiedades de las trayectorias

Considerando un movimiento Browniano B_t y las definiciones de variación simple y cuadrática de la sección (2.4.1) se tienen los siguientes resultados.

Proposición 19 (Variación del movimiento Browniano). *La variación de primer orden para un movimiento Browniano es infinita casi seguramente; i. e.*

$$V_t(B) = \infty \quad \text{c.s.}$$

Proposición 20. *La variación cuadrática de una trayectoria del movimiento Browniano sobre el intervalo $[a, b]$ es la longitud del intervalo, es decir*

$$[B_t, B_t]_t = (b - a) \quad \text{en el sentido } L^2(P).$$

Proposición 21. *Con probabilidad uno, el movimiento Browniano B_t no es diferenciable en ningún $t \geq 0$.*

Las trayectorias Brownianas son entonces ejemplos de funciones, consideradas extrañas, que son continuas pero no diferenciables en ningún punto.

3

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

En la actualidad, el estudio de los esquemas en diferencias para EDOs, ha dado lugar a una teoría basta y robusta [27]. Por ello, resulta natural observar varios de los elementos de esta área, en la construcción y estudio de los esquemas numéricos para ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs). Con esto en mente, organizamos el capítulo con el fin de exponer los métodos numéricos que serán base para el objetivo de este trabajo. En virtud de justificar la construcción de los algoritmos, en la [sección 3.1](#), se discute la construcción de la integral estocástica de Itô a partir de la extensión de espacios L^2 y se enuncia la fórmula de Itô, en la [sección 3.2](#) tratamos las EDEs usando las herramientas mencionadas, se tiene como resultado importante, el teorema de existencia y unicidad para su solución y se estudian dos procesos estocásticos que serán de interés, en el tratamiento de las propiedades teóricas de los esquemas numéricos. En la [sección 3.3](#) exponemos los esquemas numéricos mencionados y cerramos el capítulo en la [sección 3.4](#) con el estudio de convergencia y estabilidad de uno de ellos.

3.1 INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA

El objetivo de esta parte es discutir la construcción de la integral estocástica de un proceso X_t respecto del movimiento Browniano, en el sentido de Itô es decir, una integral de la forma

$$\int_0^T X_t dB_t.$$

Este tipo de integrales no tienen significado si se quiere entender trayectoria por trayectoria, i. e., como si fuera una integral de Riemann-Stieltjes de una función respecto de una función integradora, pues en este caso la función integradora es una trayectoria del movimiento Browniano, y esta no es de variación acotada ([Proposición 19](#)). La justificación para desear definir este tipo de integrales será evidente al momento de formular los esquemas numéricos. La construcción será guiada por las características necesarias de los espacios en cuestión y la naturaleza de los procesos estocásticos, en esta dirección primero partimos de las condiciones respecto a una variable aleatoria para después extenderlo a procesos.

PRIMERAS HIPÓTESIS Se consideran como elementos iniciales un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , y un movimiento Browniano estándar unidimensional $\{B_t\}$, junto con su filtración natural $\{\mathcal{A}_t\}$. Sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico con espacio parametral en el intervalo $[0, T]$, y $T > 0$ fijo, que visto como una función $X : \Omega \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}$, dicho proceso se asume $\mathcal{A}_T \otimes \mathcal{B}[0, T]$ -medible, aquí el término $\mathcal{A}_T \otimes \mathcal{B}[0, T]$ se entiende como la mínima σ -álgebra generada por el espacio producto $\mathcal{A}_T \otimes \mathcal{B}[0, T]$ (ver [subsección 2.5.1](#)). Además se supone que el proceso es adaptado, esto es, para cada t en el intervalo $[0, T]$, la variable aleatoria X_t es medible respecto de \mathcal{A}_t . Con estos elementos, es necesario pedirle a los procesos que sean acotados para todo tiempo t , además es deseable trabajar en un espacio con la estructura necesaria de tal manera que se garantice, el poder aproximar cualquiera de sus elementos por sucesiones del mismo espacio, pues esto justifica el desarrollo de los esquemas. En este sentido consideramos los espacios L^2 .

EL ESPACIO $L^2(P)$. Se denota por $L^2(P)$ al espacio *vectorial de variables aleatorias* X que son cuadrado integrables, es decir el espacio de todas las variables X tales que

$$\|X\|_{L^2(P)} = \mathbb{E}(|X|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Resulta que la función $\|\cdot\|_{L^2(P)} = \mathbb{E}(|\cdot|^2)^{\frac{1}{2}}$ define una norma en $L^2(P)$, i.e., una función real valuada definida sobre este espacio lineal que cumple las siguientes cuatro condiciones:

- (i) $\|X\| \geq 0$.
- (ii) $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0$ c.s.
- (iii) $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.
- (iv) $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$, α constante.

Con esta norma, el espacio $L^2(P)$ es un espacio de Banach, es decir, un espacio completo. Esto significa que toda sucesión de Cauchy en $L^2(P)$ convergente dentro de $L^2(P)$. A la convergencia referente a esta norma se le llama *convergencia en $L^2(P)$* , o *convergencia en media cuadrática*. Por ejemplo, para un $t \in [0, T]$ fijo, la variable aleatoria B_t del movimiento Browniano pertenece a este espacio pues

$$\|B_t\|_{L^2(P)} = \mathbb{E}(|B_t|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{t} < \infty.$$

Entonces, considerando procesos X_t los cuales satisfacen las características de los elementos de los $L^2(P)$ para cada t fijo, es posible extender la estructura de L^2 a un espacio de procesos.

EL ESPACIO $L^2(P \times dt)$. Sea $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$, un proceso que satisface

$$\|X\|_{L^2(P \times dt)} = \left[\mathbb{E} \left(\int_0^T |X|^2 dt \right) \right]^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (3.1)$$

Resulta nuevamente que el conjunto de todos los X que cumplen (3.1), forman un espacio es de Banach bajo la función $\|\cdot\|_{L^2(P \times dt)}$ como norma. Luego, el *proceso*

estocástico del movimiento Browniano $B = \{B_t : t \geq 0\}$ pertenece también a este espacio pues

$$\begin{aligned} \|B\|_{L^2(\mathcal{P} \times dt)} &= \left(\mathbb{E} \left(\int_0^T |B_t|^2 dt \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^T \mathbb{E}(|B_t|^2) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^T t dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{T}{\sqrt{2}} < \infty. \end{aligned}$$

EL ESPACIO DE PROCESOS SIMPLES. En analogía respecto a la integral de Riemann, primero consideramos procesos a los que llamaremos “simples” para aproximar la integral estocástica, para después de esto definir la integral como un límite. Así, una primera vista a la integral de Itô, se hace a través de espacios que cumplen la siguiente definición.

Definición 28 (proceso estocástico simple). Sea $0 = t_0 < t_1 \cdots t_n = T$ una partición del intervalo $[0, T]$. Un *proceso estocástico simple* X_t es de la forma:

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)} \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t), \tag{3.2}$$

en donde $X^{(0)}, \dots, X^{(n-1)}$ es una colección de variables aleatorias cuadrado integrables y adaptadas a la filtración $\{\mathcal{A}_{t_k}\}_{k=0}^{n-1}$.

Entonces un *proceso simple* es constante a trozos con trayectorias continuas por la derecha y con límite por la izquierda. Las condiciones mencionadas en la definición (28) garantizan que el proceso es adaptado y que tiene trayectorias cuadrado integrables. Una realización de este tipo de procesos se muestra en la [figura 5](#). Se denota por \mathcal{H}_0^2 a la colección de todos los procesos simples y se puede probar que esta colección forma un espacio vectorial.

INTEGRAL PARA PROCESOS SIMPLES. Esta es una definición intuitiva de integral y establece simplemente que si el integrando es constante en algún subintervalo, la integral debe ser la constante multiplicada por el incremento del movimiento Browniano hecho en ese intervalo, es decir, esta integral es el análogo a las sumas de Riemann.

Definición 29 (integral estocástica de Itô de un proceso simple). Sea X un proceso que satisface la definición (28). La integral estocástica de Itô de un proceso simple X , respecto del movimiento Browniano, denotada por $I(X)$, se define como la *variable aleatoria*

$$I(X) = \int_0^T X_s dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

De la definición anterior resultan las propiedades siguientes referentes a $I(X)$.

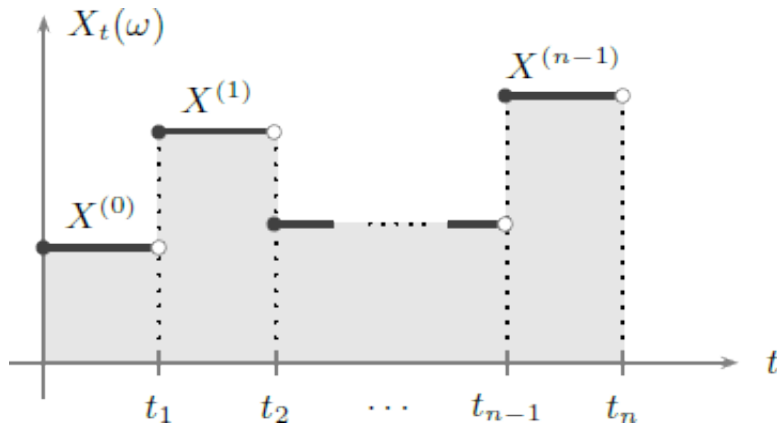


Figura 5: Trayectoria de un proceso simple.

- (i) La variable aleatoria $I(X)$ es integrable pues las variables $X^{(k)}$ y $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$ son independientes, por lo que cada sumando tiene esperanza cero, y por lo tanto la esperanza de la integral es nula.
- (ii) Además $I(X)$ es cuadrado integrable y cumple con lo que se conoce como isometría de Itô

$$\|I(X)\|_{L^2(P)} = \|X\|_{L^2(P \times dt)}, \tag{3.3}$$

esta igualdad establece que tanto el *proceso simple* X como la *variable aleatoria* $I(X)$ tienen la misma norma en sus respectivos espacios. Así, la integral estocástica asigna a cada elemento del espacio \mathcal{H}_0^2 una variable aleatoria en el espacio $L^2(P)$. De esta forma se tiene la transformación lineal $I : \mathcal{H}_0^2 \mapsto L^2(P)$, que por la isometría de Itô, resulta ser continua.

EXTENSIÓN POR APROXIMACIÓN. Ahora se extiende la integral estocástica a procesos más generales. Sea \mathcal{H}^2 el conjunto de todos los procesos X_t medibles y adaptados, tales que

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T |X_t|^2 dt \right) < \infty.$$

Este conjunto \mathcal{H}^2 resulta ser un subespacio lineal cerrado de $L^2(P \times dt)$. En particular, todo proceso simple es un elemento de \mathcal{H}^2 y por lo tanto, se tiene

$$\mathcal{H}_0^2 \subset \mathcal{H}^2 \subset L^2(P \times dt),$$

más aún, resulta que \mathcal{H}_0^2 es *denso* en \mathcal{H}^2 respecto a la norma de $L^2(P \times dt)$, es decir, para todo proceso $X \in \mathcal{H}^2$ existe una sucesión de procesos $X^k \in \mathcal{H}_0^2$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|X^k - X\|_{L^2(P \times dt)} = 0,$$

en este sentido se hace la siguiente definición.

Definición 30 (Integral estocástica). Sea X un proceso en \mathcal{H}^2 , y sea $\{X_k\}$ una sucesión de procesos en \mathcal{H}_0^2 que aproxima a X . Se define la integral estocástica de X como:

$$I(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(X_k),$$

en donde el límite debe entenderse dentro del espacio $L^2(P)$, es decir, se trata de la convergencia en media cuadrática de una sucesión de variables aleatorias (definición (19)).

Lo anterior significa que la variable aleatoria $I(X)$ es un elemento de $L^2(P)$ y es tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|I(X) - I(X^{(k)})\|_{L^2(P)} = 0$. Esto da sentido al diseño de algoritmos numéricos para EDEs. De manera gráfica la extensión se ilustra en la figura 6. Todo lo anterior tiene sentido por el siguiente resultado.

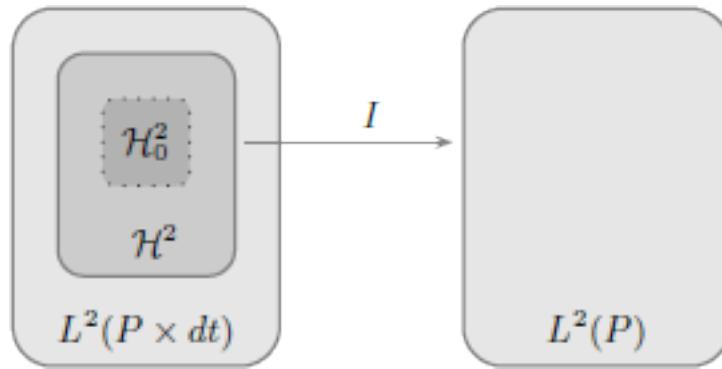


Figura 6: Extensión de la integral estocástica

Proposición 22 (Isometría de Itô). Sea X un proceso estocástico en \mathcal{H}^2 , entonces:

$$\|I(X)\|_{L^2(P)} = \|X\|_{L^2(P \times dt)}.$$

LA INTEGRAL COMO UN PROCESO. Ahora se hace otra extensión. Para cada $t \in [0, T]$ y para cualquier $X \in \mathcal{H}^2$ se define el *proceso*

$$I_t(X) = \int_0^T X_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dB_s = \int_0^t X_s dB_s,$$

esto permite ver la integral estocástica como un *proceso* en vez de como una *variable aleatoria*. Es claro que tal proceso no es necesariamente continuo, sin embargo resulta que existe una versión continua de él. Más aún esa versión es una martingala respecto de la filtración natural del movimiento Browniano [34].

Proposición 23. Sea $X_t \in L^2(P)$, entonces la integral $\int_0^T X_s dB_s$ tiene una versión con trayectorias continuas.

EXTENSIÓN POR LOCALIDAD Mediante lo que se conoce como *localización*, es posible extender la Integral de Itô a espacios menos restrictivos. En este caso se consideran todos los procesos que cumplen

$$P \left(\int_0^T |X_t|^2 dt < \infty \right) = 1. \quad (3.4)$$

El conjunto de todos los procesos que satisfacen esta condición forman un espacio al que se denota por \mathcal{L}_{loc}^2 , resulta que \mathcal{H}^2 es denso en este espacio. Esto se traduce a que existe una sucesión creciente de tiempos de paro $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ tales que $\tau_n \nearrow T$ si $n \rightarrow \infty$. Así la integral estocástica se define como el limite

$$\int_0^t X_s dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T X_s \mathbf{1}_{\tau \geq t}(\omega) \mathbf{1}_{[0, T]}(s) dB_s.$$

Las siguientes son propiedades importantes referentes a la construcción.

- (i) La integral $I_t : \mathcal{L}_{loc}^2 \rightarrow L^2(P)$ es lineal, i.e. para cualesquiera procesos $X_s, Y_s \in \mathcal{L}_{loc}^2$ y c constante

$$\int_0^t (cX_s + Y_s) dB_s = c \int_0^t X_s dB_s + \int_0^t Y_s dB_s, \quad \text{c.s.}$$

- (ii) Es de esperanza cero, es decir

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t X_s dB_s \right) = 0, \quad \text{c.s.}$$

- (iii) Si la integral se restringe a \mathcal{H}^2 se cumple la isometría de Itô, i.e.,

$$\mathbb{E} \left| \int_0^t X_s dB_s \right|^2 = \mathbb{E} \left(\int_0^t |X_s|^2 dB_s \right).$$

En general para procesos en \mathcal{L}_{loc}^2 , estos procesos dejan de ser martingalas, para convertirse en martingalas locales.

- (iv) Existe una versión continua de la integral estocástica.

3.1.1 Fórmula de Itô

En el cálculo determinista, se estudia la existencia y convergencia de la integral de Riemann pero pocas veces se usa su definición para evaluar la integral de ciertas funciones, pues se cuenta con resultados para obviar este cálculo. Uno de los resultados importantes referente a esta teoría es la regla de la cadena. Existe un resultado estocástico análogo a la regla de la cadena, el cual se conoce como fórmula de Itô. En esta dirección, se hace uso de las siguientes definiciones.

Definición 31 (Proceso de Itô unidimensional). Sea B_t un movimiento Browniano unidimensional en (Ω, \mathcal{A}, P) , un proceso de Itô (unidimensional), es un proceso X_t sobre (Ω, \mathcal{A}, P) de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, \omega) ds + \int_0^t \sigma(s, \omega) dB_s \quad (3.5)$$

donde $\sigma \in L^2(P \times dt)$ es un proceso tal que

$$P \left(\int_0^T \sigma(s, \omega)^2 ds < \infty \quad \text{para todo } t \geq 0 \right) = 1. \quad (3.6)$$

También se asume que b es un proceso adaptado a su filtración natural y además

$$P\left(\int_0^t |b(s, \omega)| ds < \infty \text{ para todo } t \geq 0\right) = 1. \quad (3.7)$$

Observación 1. Este proceso también se puede escribir en su forma diferencial como

$$dX_t = bdt + \sigma dB_t. \quad (3.8)$$

Teorema 6 (Formula unidimensional de Itô). *Sea X_t un proceso de Itô dado por*

$$dX_t = bdt + \sigma dB_t.$$

Sea $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Entonces $Y_t = g(t, X_t)$ es nuevamente un proceso de Itô y

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2, \quad (3.9)$$

$(dX_t)^2$ se evalúa considerando

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0 \quad dB_t \cdot dB_t = dt \quad (3.10)$$

3.2 ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

Habiendo definido el concepto de proceso de Itô, resulta natural preguntarse cómo encontrar un proceso X_t que satisfaga la ecuación

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_t)ds + \int_0^t \sigma(s, X_t)dB_s, \quad (3.11)$$

donde la primera integral se entiende en el sentido de Riemann y la restante como una integral estocástica de Itô. La forma diferencial de la ecuación (3.11) es

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad (3.12)$$

y se conoce como *ecuación diferencial estocástica (EDE)*.

Definición 32 (Ecuación diferencial estocástica unidimensional). Sean $b(\cdot, \cdot), \sigma(\cdot, \cdot)$ funciones de $[0, T] \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R} . Una ecuación diferencial estocástica (unidimensional) en el sentido de Itô es de la forma

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

definida para valores de t en el intervalo $[0, T]$ y con condición inicial a la variable aleatoria X_0 , la cual se asume \mathcal{A}_0 -medible e independiente del movimiento Browniano.

Observación 2. Obviamente los elementos conocidos de la ecuación (3.12) son las funciones b, σ y la variable aleatoria inicial X_0 . La incógnita a buscar es el proceso X_t . Usualmente en la literatura a la función b se le llama coeficiente de tendencia (*drift* en inglés) y a σ coeficiente de difusión.

En esta dirección, el proceso solución X_t puede entenderse como el estado de un sistema que evoluciona de forma determinista, gobernado por una parte no aleatoria (la tendencia), pero perturbado por un ruido dado por la integral estocástica (la difusión). A X_t se le nombra *proceso de difusión*.

Observación 3. Por otra parte, igual que en la teoría de EDO, se tienen resultados para determinar existencia y unicidad. El siguiente resultado proporciona condiciones de regularidad para b, σ y X_0 que garanticen existencia y unicidad de solución para la ecuación (3.12) en dimensión finita n .

Teorema 7 (Existencia y unicidad). Sea $T > 0$ y $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ funciones medibles que satisfacen

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \quad (3.13)$$

para alguna constante C , ($|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{i,j}|$) y tales que

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \quad (3.14)$$

para alguna constante D . Sea Z una variable aleatoria independiente de la σ -álgebra \mathcal{A}_∞ generada por el movimiento Browniano $B_s(\omega)$, $s \geq 0$ y tal que

$$\mathbb{E}(|Z|^2) < \infty.$$

Entonces la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, X_0 = Z \quad (3.15)$$

tiene solución única t -continua, $X_t(\omega)$, con la propiedad de ser adaptada a la filtración \mathcal{A}_t^Z generada por Z y $B_s(\cdot)$, $s \leq t$, además

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T |X_t|^2 dt \right) < \infty. \quad (3.16)$$

La condición en (3.13) garantiza que la solución $X_t(\omega)$ no explote, es decir, $|X_t(\omega)|$ no tienda a ∞ en tiempo finito. La condición en (3.15) garantiza que la solución de (3.12) sea única (la demostración se puede consultar en [50]). Cuando una EDE satisface las condiciones de este teorema, se dice que tiene *solución fuerte*. Para fijar ideas, se estudian dos modelos sencillos que servirán de base para el estudio de la convergencia y estabilidad de los métodos propuestos en este trabajo.

3.2.1 Movimiento Browniano Geométrico

Este modelo es de uso común en finanzas, se aplica para representar el precio fluctuante de algunos bienes.

Definición 33 (Movimiento Browniano Geométrico). Sean μ, λ dos constantes, y $x_0 > 0$. El movimiento Browniano geométrico es el proceso solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu X_t dt + \lambda X_t dB_t \quad X_0 = x_0. \quad (3.17)$$

Esta ecuación puede entenderse como sigue. En ausencia del término estocástico, la ecuación se reduce a $dX_t = \mu X_t dt$. De la teoría de EDOs, la solución determinista es $X_t = x_0 \exp(\mu t)$. En el contexto de finanzas, para $\mu > 0$, esta función representa

el comportamiento en el tiempo de un capital inicial positivo x_0 que crece de manera continua y determinista a una tasa efectiva del $100\mu\%$. Sin embargo, la parte estocástica corresponde a la volatilidad de una inversión con riesgo sujeta a las fluctuaciones del mercado. El modelo supone que dicha variabilidad es proporcional al valor de la inversión. Es claro que los coeficientes de esta ecuación satisfacen las condiciones del teorema de existencia y unicidad (7). Cabe añadir que este modelo sirve como ecuación de prueba para estudiar la convergencia y estabilidad de los métodos numéricos para EDEs con ruido multiplicativo ¹

[8],[26], [55]. Una de las razones de esto se debe a que el movimiento Browniano geométrico, tiene forma analítica, la cual se enuncia como resultado.

Proposición 24. La solución de la ecuación (3.17) es

$$X_t = x_0 \exp \left(\left[\mu - \frac{1}{2}\lambda^2 \right] t + \lambda B_t \right). \quad (3.18)$$

La demostración se basa en aplicar la formula de Itô (6) a la función

$$f(t, x) = \exp \left(\lambda x + \left(\mu - \frac{1}{2}\lambda^2 \right) t \right)$$

y evaluarla en el movimiento Browniano B_t .

Ya que se cuenta una forma analítica del movimiento Browniano geométrico, es natural considerar sus momentos.

Proposición 25. Sea X_t un movimiento Browniano geométrico. Entonces

- (i) $\mathbb{E}(X_t) = x_0 \exp(\mu t)$.
- (ii) $\text{var}(X_t) = x_0^2 \exp(2\mu t)(\exp(\lambda^2 t) - 1)$.
- (iii) $\text{cov}(X_t, X_s) = x_0^2 \exp(\mu(t+s))(\exp(\lambda^2 s) - 1)$, $0 \leq s < t$.

La demostración de este resultado puede consultarse en [52]. En la figura 7 se muestra una realización del Movimiento Browniano geométrico y su respectivo valor esperado.

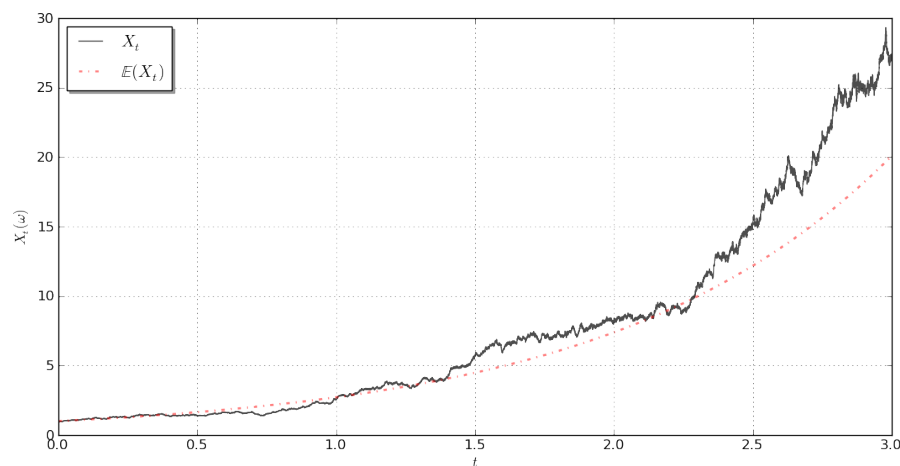


Figura 7: Solución de (3.17) con $\mu = 1, \lambda = \frac{1}{3}$.

¹ Se dice que la ecuación (3.12) es de *ruido multiplicativo* si σ depende del proceso X_t .

3.2.2 *Proceso de Ornstein-Uhlenbeck*

Este proceso modela la velocidad del movimiento difusivo de una partícula en pequeños intervalos de tiempo, bajo la influencia de una fuerza de fricción y despreciando la interacción con un potencial.

Definición 34 (Proceso de Ornstein-Uhlenbeck). Sean α y β dos constantes positivas. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck es la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = x_0. \quad (3.19)$$

A la ecuación en (3.19), se le considera el ejemplo más antiguo de EDE [39], dicha ecuación lleva el nombre de ecuación de Langevin. En los capítulos siguientes se presenta la motivación principal de este trabajo de tesis: una aplicación referente a este modelo en simulación de Dinámica Browniana. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck X_t se entiende como la velocidad de la partícula al tiempo t , la parte determinista $-\alpha X_t$ corresponde a la fuerza de fricción, y el término βdB_t es un ruido blanco [57]. Es pertinente mencionar que este modelo se usa para analizar la estabilidad de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales estocásticas con ruido aditivo ²[21]. El siguiente resultado proporciona la forma analítica del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Proposición 26. *La solución de la ecuación (3.19) esta dada por*

$$X_t = x_0 \exp(-\alpha t) + \beta \int_0^t \exp(-\alpha(t-s)) dB_s. \quad (3.20)$$

Proposición 27. *Sea X_t un proceso de proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Entonces:*

- (i) $\mathbb{E}(X_t) = X_0 \exp(-\alpha t)$.
- (ii) $\text{var}(X_t) = \frac{\beta^2}{2\alpha} (1 - \exp(-2\alpha t))$.
- (iii) $\text{cov}(X_t, X_s) = \frac{\beta^2}{2\alpha} (1 - \exp(-2\alpha \min\{t, s\}))$.

Los resultados referentes a los momentos para el movimiento Browniano geométrico y el proceso de Ornstein-Uhlenbeck se pueden consultar en [30]. En la figura 8 se muestra una trayectoria del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Dada la naturaleza de la integración estocástica, las solución de una EDE pocas veces tiene forma analítica. Es por esto que surge el interés de contar con métodos para su solución numérica. En la siguiente sección se da una introducción a métodos clásicos que sirven de base para este trabajo.

3.3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS.

Dado que se tiene una basta y robusta teoría para la solución numérica de EDOs, resulta natural extender los esquemas en diferencias finitas al contexto estocástico. En esta dirección se exponen dos métodos numéricos que resultan de extender un método determinista y que se han empleado en simulación de DB.

² La ecuación (3.12) es de ruido aditivo si σ es una función independiente del proceso X_t , i. e., $\sigma = \sigma(t)$.

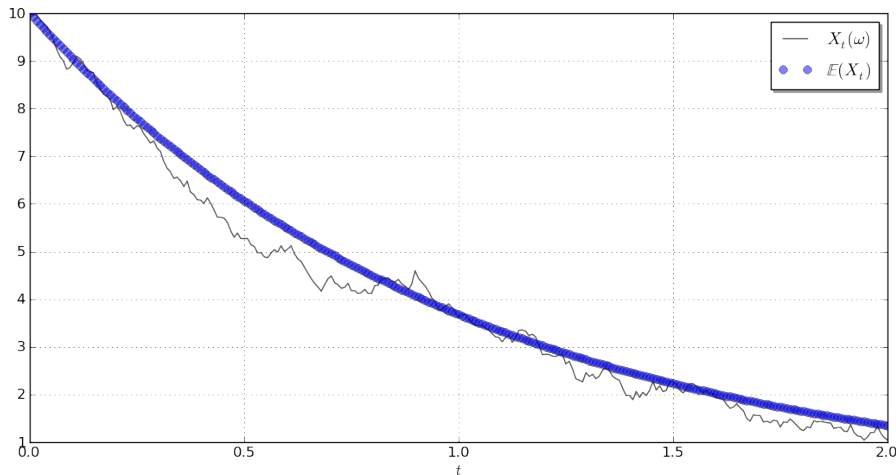


Figura 8: Proceso de Ornstein-Uhlenbeck con $X_0 = 10, \alpha = 1, \beta = 1$

3.3.1 Método de Euler-Mayurama

Sean f, g funciones que cumplan la hipótesis del [Teorema 7](#). Consideramos una ecuación que no depende del tiempo de forma explícita, i. e., una [EDE](#) autónoma

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0. \quad (3.21)$$

En su forma integral

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dB_s, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.22)$$

Sea X la solución fuerte de la ecuación anterior. Para construir el método de Euler-Mayurama [EM](#) se considera el intervalo $[0, T]$ y se discretiza con un paso $\Delta t = \frac{T}{N}$ para algún natural N . Así los puntos que dividen al intervalo $[0, T]$ se representa con $t_j = j\Delta t, \quad j = 0 \dots N$ y la aproximación a $X(t_j)$ con X_j . Por lo tanto, al tiempo t_j , se debe cumplir que

$$X(t_j) = X(t_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(X(s))ds + \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(X(s))dB_s. \quad (3.23)$$

Entonces, dependiendo de como se aproxima [\(3.23\)](#) para cada t_j se obtiene un método distinto. Si se usa

$$X_{j+1} = X_j + f(X_j)\Delta t + g(X_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}), \quad \text{donde } X_{j+1} \text{ aproxima a } X(t_{j+1}), \quad (3.24)$$

se obtiene el método de *Euler-Mayurama* ([EM](#)). Es claro a partir de [\(3.24\)](#), que para $g \equiv 0$ se recupera el método determinista de Euler. La [figura 9](#) ilustra los resultados obtenidos con el esquema Euler-Mayurama para la ecuación [\(3.17\)](#).

Además del Euler-Mayurama existen versiones estocásticas de los métodos “clásicos”, tales como los Runge-Kutta y los derivados de la expansión en serie de Taylor. Siguiendo un orden análogo al determinista, para hacer referencia a la versión estocástica de un método de Runge-Kutta, se introduce a continuación la expansión estocástica en serie de Taylor.

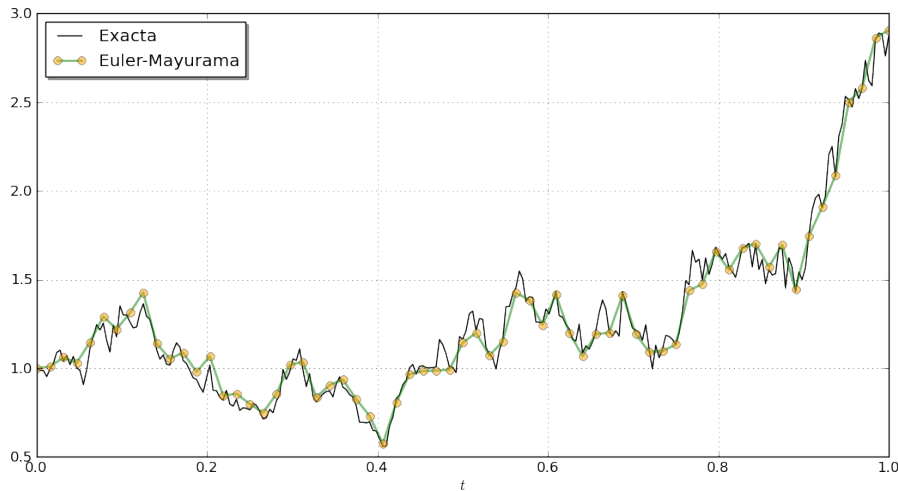


Figura 9: Comparación de la solución exacta con la aproximación EM para (3.17)

3.3.2 Método Estocástico de Runge Kutta (SRKII)

En esta sección se introduce un algoritmo de Runge Kutta de dos etapas en su versión estocástica. El interés reside en la comparación de los resultados obtenidos de este Runge-Kutta, con el esquema que se propone en la tesis. Sea una ecuación de ruido aditivo [20].

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t) + \sigma W_t, \quad (3.25)$$

donde el término σW_t es un ruido blanco Gaussiano que satisface

- (i) $\langle W_t \rangle = 0$
- (ii) $\langle W_{t'}, W_t \rangle = 2D\delta(t' - t) \quad 0 \leq t \leq t'$.

Aquí δ representa la función delta de Dirac y D es una constante. La ecuación (3.25) se entiende en el sentido de Itô como

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s) ds + \int_0^t \sigma dW_s \quad (3.26)$$

o en forma diferencial

$$dX_t = f(X_t) dt + \sigma dB_t. \quad (3.27)$$

Para pasar de (3.25) a (3.27), simplemente se reemplaza el término de ruido blanco W_t por $\frac{dB}{dt}$ y se multiplica por dt . En la literatura usualmente W_t representa un proceso de Wiener y B_t el movimiento Browniano, ambos objetos significan lo mismo aunque W_t se acostumbra para denotar un proceso estocástico y B_t el fenómeno físico.

EXTENSIÓN DEL MÉTODO DE RUNGE KUTTA. En la literatura, los métodos de Runge Kutta son un estándar para integrar ecuaciones diferenciales ordinarias (véase por ejemplo [13]). Con el propósito de extender uno de estos métodos al contexto estocás-

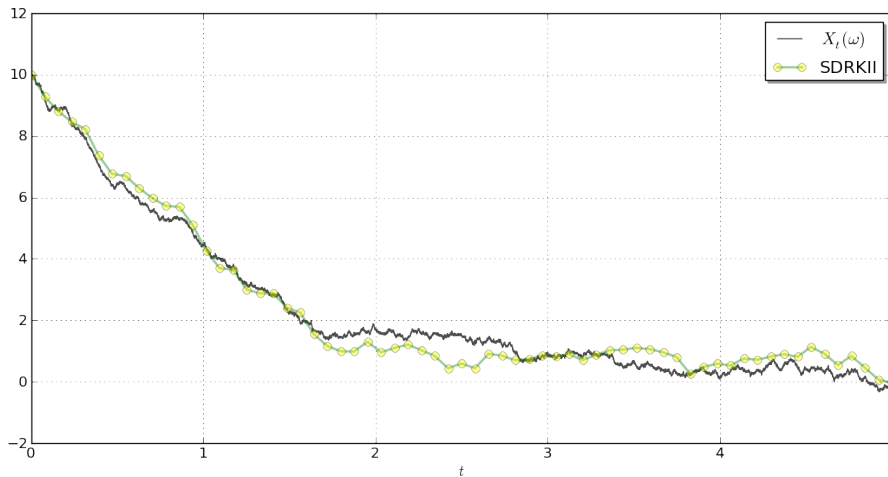


Figura 10: Comparación de la solución exacta de (3.30) con la obtenida por el SRKII.

tico, se considera la ecuación determinista $\frac{dx}{dt} = F(x)$ y el esquema Runge-Kutta de dos etapas (RKII) de segundo orden

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2}\Delta t(F_1 + F_2), \\ F_1 &= F(x_n), \\ F_2 &= F(x_n + \Delta t F_1). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Intuitivamente, se intentaría aplicar el esquema RKII para integrar la ecuación (3.27). Sin embargo esto no tendría sentido pues el movimiento Browniano es de variación infinita. Así pues, es necesario modificar el esquema en (3.28) para que funcione con la parte estocástica. En [29] este problema lo resuelven a partir de la expansión estocástica de Taylor de la ecuación (3.27), dando como resultado el siguiente esquema

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2}\Delta t(F_1 + F_2) + (2D\Delta t)^{\frac{1}{2}}\psi \\ F_1 &= f(x_n). \\ F_2 &= f(x_n + \Delta t F_1 + (2D\Delta t)^{\frac{1}{2}}\psi), \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde $\langle \psi \rangle = 0$, $\langle \psi^2 \rangle = 1$. Honeycutt muestra en [29], que estas ultimas son condiciones suficientes, aunque usualmente se asume que ψ es de distribución normal estándar. En la figura 10 se ilustra la solución numérica obtenida con (3.29) para la ecuación

$$dX_t = -10X_t dt + dB_t, \quad X_0 = 10. \quad (3.30)$$

3.4 CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD DEL ESQUEMA EULER-MAYURAMA

3.4.1 *Convergencia en los sentidos fuerte y débil*

Bajo las condiciones del teorema de existencia y unicidad para EDEs, sean $X(t)$ el proceso solución de (3.22) y X_n una aproximación X . Con el fin de hacer una definición precisa de convergencia, es necesario decidir como medir la cercanía entre $X(t_n)$ y X_n . En esta dirección, ya que tanto X como X_n son variables aleatorias para un $t_n \in \{t_0, \dots, t_N\}$ fijo, resulta natural medir su diferencia a partir del valor esperado, esto conlleva al concepto de orden de convergencia fuerte.

Definición 35 (orden de convergencia fuerte). Sea X_n una aproximación a tiempo discreto de un proceso estocástico continuo en el tiempo X . Se dice que X_n converge en sentido fuerte a X , con orden γ , si para cualesquiera $t_n = n\Delta t \in [0, T]$ fijo y Δt suficientemente pequeño, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mathbb{E}(|X_n - X(t_n)|) \leq C\Delta t^\gamma. \quad (3.31)$$

Notemos que, conforme a esta definición, al considerar esquema EM para (3.22), con $g \equiv 0$ y X_0 constante

$$|X_n - X(\tau)| \leq C\Delta t^\gamma,$$

se recupera la definición de orden de convergencia para EDOs (véase e. g., [13]).

Definición 36 (error en sentido fuerte). Sean X, X_n como en la definición Definición 35 al número

$$\epsilon_{\Delta t}^{\text{fuerte}} := \mathbb{E}(|X_L - X(T)|), \quad T = L\Delta t \quad (3.32)$$

se le nombra *error a tiempo final L en sentido fuerte*.

Para fijar ideas consideremos lo siguiente. De [55] se sabe que el método EM, tiene orden de convergencia fuerte $\gamma = \frac{1}{2}$. Entonces, de acuerdo a las definiciones (35) y (36) existe una constante $C > 0$ tal que

$$\epsilon_{\Delta t}^{\text{fuerte}} \leq C(\Delta t)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.33)$$

para Δt lo suficientemente pequeño. Con el fin de mostrar la existencia de la constante C en (3.33) se procede como sigue. Usando el esquema EM, calculamos 1000 realizaciones de la solución numérica de la EDE

$$dX_t = 2X_t dt + X_t dX_t, \quad X_0 = 1 \quad (3.34)$$

en intervalo $[0, 1]$ y con cinco diferentes tamaños de paso

$$\Delta t = 2^{-p}\delta t, \quad p = 0, 1, \dots, 4.$$

Se obtiene el valor esperado de $\epsilon_{\Delta t}^\gamma$ sobre la muestra de las 1000 evaluaciones de la solución numérica de (3.34) a tiempo final $T = 1$ para cada Δt . Con esto logramos 5 datos que aproximan al error en sentido fuerte. En la figura figura 11 se gráfica la estimación

de $\epsilon_{\Delta t}^\gamma$ respecto al tamaño de paso que obtuvimos, en escala logarítmica y comparamos dicha gráfica con una recta de pendiente $\frac{1}{2}$. A simple vista ambas gráficas tienen la misma pendiente, lo cual nos dice que el error que acabamos de mencionar, decae conforme el tamaño de paso decrece a una razón de $\frac{1}{2}$, es decir aproximadamente el orden de convergencia es $\frac{1}{2}$. Para verificar esta afirmación consideremos lo siguiente. Asumiendo como verdadero (3.33) y aplicando logaritmo se obtiene

$$\log \epsilon_{\Delta t}^{\text{fuerte}} \leq \log(C(\Delta t)^{\frac{1}{2}}). \quad (3.35)$$

Entonces, por la naturaleza de la función log, y suponiendo para Δt adecuado, el error debería ser pequeño, por lo tanto

$$\log \epsilon_{\Delta t}^{\text{fuerte}} \approx \log C + \frac{1}{2} \log \Delta t. \quad (3.36)$$

Con el fin de mostrar la existencia de C en (3.36), se ajusta por mínimos cuadrados los datos obtenidos para la figura 11, respecto a $\log C$ y una q . Del ajuste de mínimos cuadrados resulta que $\log C = 1.66445910$ y $q = 0.53849735$ con un residuo de 0.0344242492048 . Claramente q es cercano a $\gamma = \frac{1}{2}$ y el residuo se aproxima 0, lo cual es consistente con el orden convergencia del método.

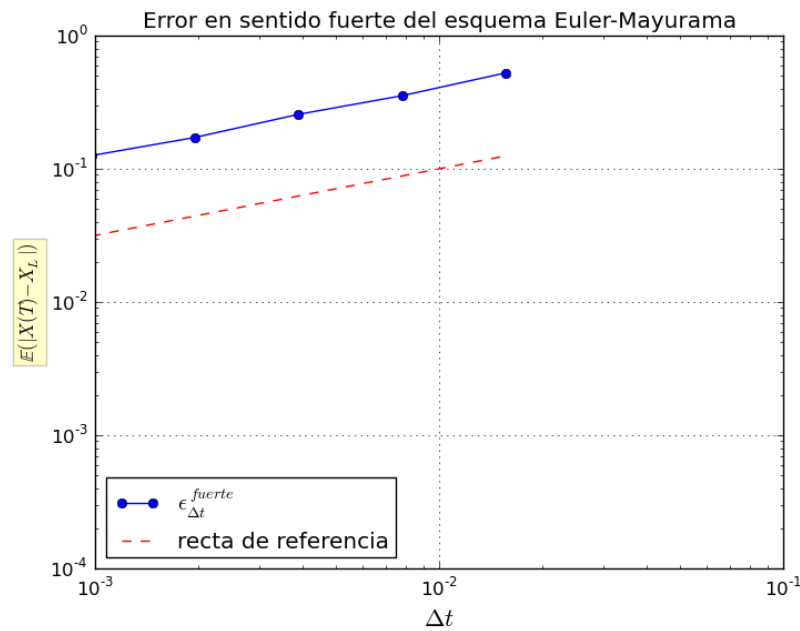


Figura 11: Gráfica del error en sentido fuerte para el método EM, la línea punteada representa la pendiente de referencia

Para este escenario, implícitamente se asumen como despreciables (i) al error de muestreo, el cual aparece al aproximar $\mathbb{E}(X)$ por $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_L^{(k)} - X(T)|$ (k se refiere a cada trayectoria), (ii) el sesgo debido al generado de números aleatorios y (iii) al error de redondeo, propios de la aritmética en coma flotante. En la práctica, el más significativo es el error de redondeo. Cabe mencionar que el error de muestreo decae como $\frac{1}{\sqrt{M}}$,

donde M es el número de trayectorias. De [37] se sabe que conforme Δt disminuye, aumenta la falta de independencia provocada por el generador de números aleatorios, esto normalmente degrada el calculo antes de convertirse en un error redondeo significativo.

Por otra parte, aunque en la definición de convergencia fuerte (3.31) se involucra un valor esperado, surgen implicaciones al aplicar el método sobre cada trayectoria. Esto se puede entender a partir de la desigualdad de Markov (ver apéndice A.2.1). Así, tomando $\varepsilon = \Delta t^{\frac{1}{4}}$ conforme a (A.3), se tiene

$$\begin{aligned} P(|X_n - X(t_n)| \geq \Delta t^{\frac{1}{4}}) &\leq \frac{\mathbb{E}|X_n - X(t_n)|}{(\Delta t)^{\frac{1}{4}}} \leq \frac{C\Delta t^{\frac{1}{2}}}{\Delta t^{\frac{1}{4}}} \\ &\leq C\Delta t^{\frac{1}{4}}, \quad \text{o equivalentemente} \\ P(|X_n - X(t_n)| \leq \Delta t^{\frac{1}{4}}) &\geq 1 - C\Delta t^{\frac{1}{4}}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

por lo tanto, si $\Delta t \rightarrow 0$ en (3.37), entonces la probabilidad de que el error sea pequeño tiende a 1. En resumen el orden de convergencia γ significa la razón a la cual la esperanza del error en sentido fuerte, decae a cero conforme $\Delta t \rightarrow 0$. Cabe mencionar que otros autores utilizan la media cuadrática en lugar del valor esperado (ver [21],[28]) para definir los conceptos relacionados con la convergencia. Por otro lado es posible considerar un tipo de convergencia menos restrictivo y medir la cercanía entre $X(t_n), X_n$ por la diferencia

$$|\mathbb{E}[p(X)] - \mathbb{E}[p(X(t_n))]|,$$

donde p es una función de crecimiento polinomial. Esto conduce a la siguiente definición.

Definición 37 (Orden de convergencia débil). Sean X_n, X como en la Definición 35, X_n converge en sentido débil a X con orden β , si para cualesquiera $t_n = n\Delta t \in [0, T]$ fijo y una función p de clase $C^{2(\beta+1)}$ con *crecimiento polinomial*, existe una constante $C > 0$ tal que

$$|\mathbb{E}[p(X_n)] - \mathbb{E}[p(X(t_n))]| \leq C\Delta t^\beta \quad (3.38)$$

En esta dirección definimos el error en sentido débil.

Definición 38 (error en sentido débil). Sean X_n, X como en la Definición 35, al numero

$$\epsilon_{\Delta t}^{\text{debil}} := |\mathbb{E}X_L - \mathbb{E}X(T)|, \quad \text{donde } T = L\Delta t, \quad (3.39)$$

se le nombra *error a tiempo final L en sentido débil*.

Para fijar ideas, se estudia con $p = x$. De la literatura, se sabe que para el esquema EM $\beta = 1$ [25], entonces de la Definición 38 resulta inmediato que

$$\epsilon_{\Delta t}^{\text{debil}} \leq C\Delta t,$$

para Δt lo suficientemente pequeño. Imitando el mismo argumento que usamos para el orden de convergencia fuerte. Con el fin de comparar, usamos el esquema EM para resolver numéricamente la ecuación

$$dX_t = 2X_t + 0.1dB_t, \quad X_0 = 1, \quad (3.40)$$

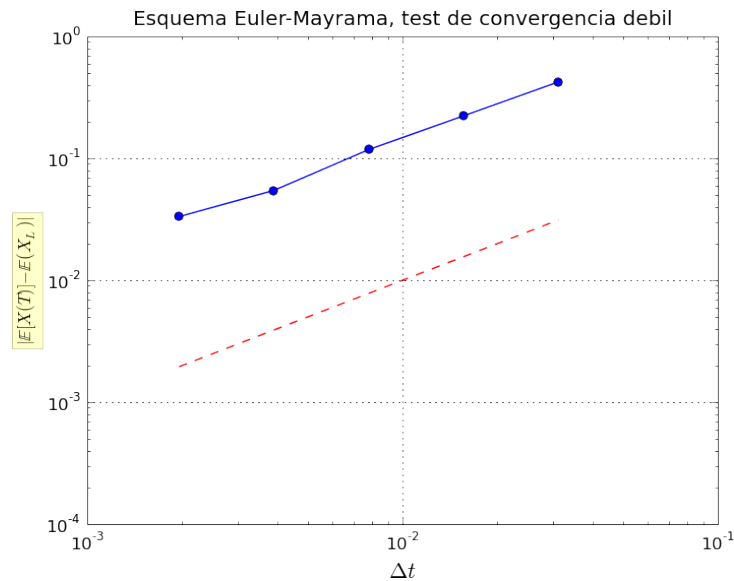


Figura 12: Gráfica de error en sentido débil, la línea punteada tiene pendiente 1.

para la que se conocen su solución exacta y sus primeros momentos, gracias a las proposiciones (??) y (25). Las medias de la solución numérica, que se involucran en (38) se estiman sobre un muestreo 50 000 del proceso X_n , discretizado con cinco distintos tamaños de pasos temporal

$$\Delta t = 2^{p-10}, \quad p \in \{1 \dots 5\}.$$

Luego, con el fin de comparar, de la proposición 25 se tiene que el valor esperado de la solución a tiempo final T

$$\mathbb{E}X(T) = \exp(\mu T) = \exp(2T). \quad (3.41)$$

La figura 12 muestra como varia el error en sentido débil a medida que $\Delta t \rightarrow 0$.

Por ultimo se verifica el orden de convergencia β con el mismo ajuste de mínimos cuadrados existencia de la constantes C que satisfagan obteniendo $\log C = 2.388\ 036\ 30$, $q = 0.937\ 675\ 10$ con un residuo de $0.115\ 755\ 620\ 888$. A simple vista, se verifica el comportamiento esperado para el orden de convergencia débil.

Observación 4. Usualmente los esquemas para solución fuerte tienen un orden de convergencia débil mayor que su orden de convergencia fuerte, pues este ultimo sentido es mas restrictivo.

3.4.2 Estabilidad lineal

Los conceptos de convergencia fuerte y débil, se refieren a la precisión de un método numérico, referida a un intervalo finito $[0, T]$ y para tamaños pequeños de paso Δt . Sin embargo, existen aplicaciones en las que se tiene interés por el comportamiento de una ecuación diferencial estocástica referente al limite cuando $t \rightarrow \infty$. En este contexto las estimaciones para la convergencia son irrelevantes, pues generalmente la constante C en la definiciones involucradas crece de forma no acotada respecto a T .

En el contexto determinista de las ecuaciones diferenciales ordinarias se tiene una teoría cualitativa robusta para tratar su estabilidad [51], [49], [3]. Esto permite analizar el comportamiento de un método numérico en el límite cuando $t \rightarrow \infty$, respecto a tamaños de paso temporal fijos Δt . Para llevar a cabo este análisis, usualmente se aplica el método en cuestión a problemas con alguna característica cualitativa de interés y se analiza la capacidad del método para reproducir dicha característica. Aunque se han analizado una gran variedad de tipos de problemas, quizá el más relevante es el *problema lineal de prueba*

$$\frac{dX}{dt} = \lambda X, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad X(0) = x_0, \quad (3.42)$$

el cual es un estándar para analizar la estabilidad lineal de los esquemas numéricos (véase por ejemplo [27]). Para EDEs, es posible diseñar una teoría análoga a la estabilidad lineal (A – estabilidad) a partir de las ecuaciones

$$dX_t = \mu X_t dt + \lambda X_t dB_t, \quad X_0 = x_0 \quad (3.43)$$

$$dX_t = \mu X_t dt + \lambda dB_t, \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C} \quad (3.44)$$

cada una corresponde a un tipo de ruido.

Observación 5. Recordemos que en

$$dX_t = f(t, X_t) dt + g(t, X_t) dB_t, \quad (3.45)$$

si f es no nula y g es una función que depende de X_t , se dice que (3.45) es de ruido *multiplicativo*, de lo contrario, diremos que (3.45) es de *ruido aditivo*.

Resulta evidente en (3.43) y (3.44), recuperar una ecuación determinista si $\lambda = 0$ y x_0 es una constante y por consiguiente la estabilidad lineal de este problema es determinista. En la literatura se suele usar el término “estable” para decir que la solución de (3.42) $X(t) = x_0 \exp(\lambda t)$ satisface $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$, lo que es equivalente a cumplir $\text{Re}(\lambda) < 0$. En esta dirección, resulta natural extender las ideas deterministas al caso estocástico, en dicho contexto es necesario precisar el significado de $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$, pues en este sentido, los procesos estocásticos son elementos de espacios de dimensión infinita, y por consiguiente no se tiene una equivalencia entre normas [19]. Veamos primeramente la estabilidad para EDEs con ruido multiplicativo.

ESTABILIDAD LINEAL CASO MULTIPLICATIVO En la práctica, una forma usual de precisar la noción de estabilidad, es a partir de la media cuadrática. Formalmente se hace la siguiente definición.

Definición 39. Dadas f, g funciones que satisfacen las condiciones del teorema de existencia y unicidad. Sea X_t la solución fuerte, de la ecuación autónoma

$$dX_t = f(X_t) dt + g(X_t) dB_t, \quad X_0 \neq 0,$$

con probabilidad 1. Se dice que X_t es una solución estable en media cuadrática o *MC-estable*, si y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_t|^2) = 0. \quad (3.46)$$

Lema 1. La solución de la ecuación de prueba (3.43) es estable en media cuadrática si y sólo si

$$2\text{Re}(\mu) + |\lambda|^2 < 0. \quad (3.47)$$

Demostración. De [2] se sabe que $Y(t) = \mathbb{E}(|X_t|^2) = \exp[2\text{Re}(\mu) + |\sigma|^2]t$ es solución de la EDO

$$\begin{aligned} dY &= (2\text{Re}(\mu) + |\sigma|^2)Ydt, & t \in [0, T], \\ Y(0) &= 1, \end{aligned}$$

entonces al determinar las condiciones de la estabilidad lineal para μ, λ se obtiene la implicación directa. Recíprocamente, si se satisface (3.47) la conclusión es clara. \square

De esto resulta natural preguntar, ¿que condiciones deben satisfacer los parámetros de la ecuación de prueba (3.43), para que un método número reproduzca correctamente sus propiedades de estabilidad?

Para fijar ideas, consideramos el esquema EM para la ecuación (3.43)

$$X_{j+1} = X_j + \mu X_j \Delta t + \lambda X_j \Delta B_j \quad (3.48)$$

donde

$$\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \quad (3.49)$$

Considerando que para un tamaño de paso fijo Δt , el proceso de movimiento Browniano se discretiza para cada j con

$$B_j = \Delta t^{\frac{1}{2}} V_j \quad (3.50)$$

donde V_k, V_l son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar para $k, l = \{1, \dots, N\}$, $k \neq l$. Entonces sustituyendo (3.50) en (3.48) resulta

$$X_{j+1} = (1 + \Delta t \mu + \Delta t^{\frac{1}{2}} \lambda V_j) X_j. \quad (3.51)$$

Para hacer la notación mas manejable se definen

$$a := 1 + \Delta t \mu, \quad b := \Delta t^{\frac{1}{2}} \lambda, \quad (3.52)$$

reescribiendo (3.51) resulta

$$X_{j+1} = (a + b V_j) X_j. \quad (3.53)$$

Veamos el siguiente resultado.

Lema 2. Sean a, b como en (3.52), entonces de acuerdo a la ecuación (3.53)

$$\mathbb{E}(|X_{j+1}|^2) = (|a|^2 + |b|^2) \mathbb{E}(X_j)$$

Demostración. Asumiendo a, b como constantes complejas, se tiene por propiedades del modulo

$$\begin{aligned} |X_{j+1}^2| &= X_{j+1} \overline{X_{j+1}}, \quad \text{conforme a (3.53),} \\ &= (a + bV_j)(\bar{a} + \bar{b}V_j)|X_j|^2 \\ &= (|a|^2 + (a\bar{b} + \bar{a}b)V_j + |b|^2V_j^2)|X_j|^2 \end{aligned}$$

al calcular la media de $|X_{j+1}|^2$, las propiedades del valor esperado, la independencia entre X_j, V_j y dado que $V_j \sim N(0, 1)$ implican que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_{j+1}|^2) &= (|a|^2 + (a\bar{b} + \bar{a}b)\mathbb{E}(V_j) + |b|^2\mathbb{E}(V_j^2))\mathbb{E}(|X_j|^2) \\ &= (|a|^2 + |b|^2)\mathbb{E}(|X_j|^2). \end{aligned}$$

□

Luego, al aplicar iterativamente el [Lema 2](#) a (3.53)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_{j+1}|^2) &= (|1 + \Delta t\mu|^2 + |\Delta t\lambda|^2)^2 \mathbb{E}(|X_{j-1}|^2) \\ &\vdots \\ &= (|1 + \Delta t\mu|^2 + |\lambda|^2)^{j+1} \mathbb{E}(|X_0|^2), \end{aligned} \tag{3.54}$$

se tiene que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_j|^2) = 0 \Leftrightarrow |1 + \Delta t\mu|^2 + |\Delta t\lambda|^2 < 1. \tag{3.55}$$

Suponiendo μ, λ como reales, el argumento anterior se puede ilustrar con la [figura 13](#).

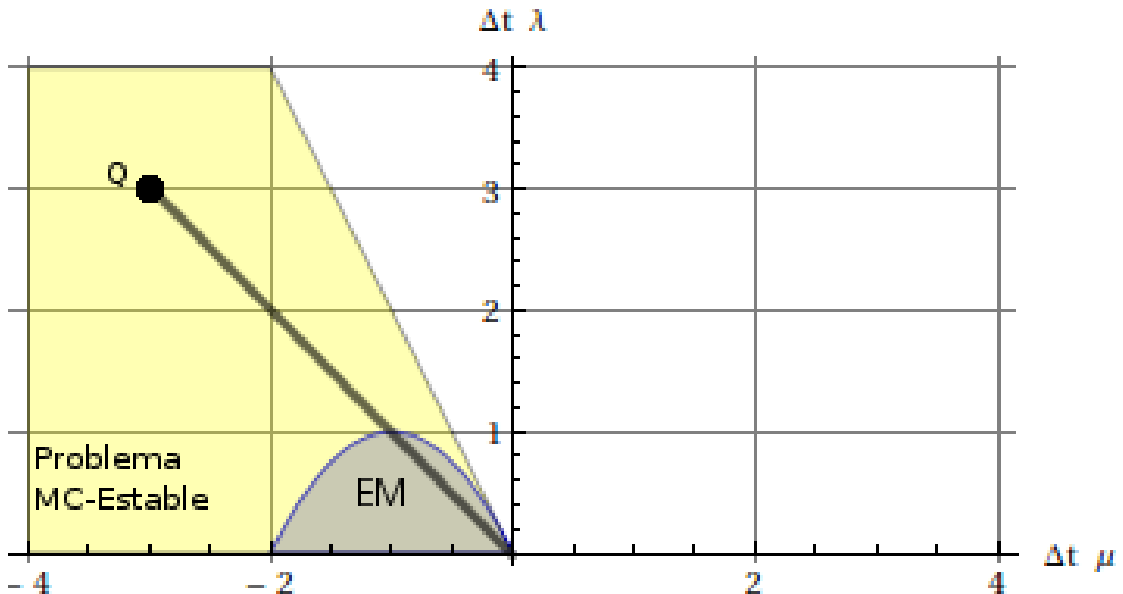


Figura 13: Región de estabilidad del esquema EM para la ecuación de prueba.

Luego, sean $\tilde{Y}_j = \mathbb{E}(|X_j|^2)$ y $\mathcal{R}(a, b) = |a|^2 + |b|^2$ conforme a (3.53). Entonces de acuerdo al [Lema 2](#) $\tilde{Y}_{j+1} = \mathcal{R}(a, b)\tilde{Y}_j$, donde a \mathcal{R} , se le conoce como la *función de*

estabilidad del esquema EM. Como consecuencia inmediata se tiene $\tilde{Y}_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \iff |\mathcal{R}(a, b)| < 1$. Lo que lleva a la siguiente definición.

Definición 40 (Dominio de Estabilidad). Dado un método numérico, sea \mathcal{R} su función de estabilidad, al conjunto

$$\mathfrak{R} := \{(a, b) : |\mathcal{R}(a, b)| < 1\}$$

se le nombra *dominio de estabilidad* del método.

La figura 13 es una representación gráfica del *dominio de estabilidad* para el esquema EM. En dicha figura el eje x representa $\Delta t \mu$ y el eje y , $\Delta t \lambda^2$. De acuerdo al Lema 1 se tiene que, $2\text{Re}(\mu) + |\lambda|^2 < 0$, al hacer $x := \Delta t \mu$, $y := \Delta t |\lambda|^2$, se obtiene la desigualdad $2x + y < 0$, la cual representa el área bajo la recta $y < -2x$, dicha región es el conjunto de todos los puntos donde la solución de la ecuación de prueba (3.43) es MC-estable. Al hacer las mismas sustituciones en la función de estabilidad del esquema EM

$$\mathcal{R}(\Delta t, \mu, \lambda) = |1 + \Delta t \mu|^2 + |\Delta t \lambda|^2 \quad (3.56)$$

resulta la desigualdad $y^2 < -x(x + 2)$, es decir, el área bajo la parábola $-x(x + 2)$ dicho conjunto es el dominio de estabilidad del esquema EM.

Entonces dados los parámetros μ, λ , el punto $Q(\Delta t \mu, \Delta t \lambda^2)$ tiene coordenadas que corresponde a la estabilidad reproducida por el esquema numérico con $\Delta t = 1$. En dado caso que el problema continuo sea MC-estable y Q quede fuera del dominio de estabilidad del método, al hacer más pequeño el tamaño de paso Δt , Q se mueve a lo largo de la recta que pasa por Q y el origen en dirección a $(0, 0)$.

Con el fin de ilustrar el argumento anterior, se usa el método EM con tres tamaños de paso para la ecuación

$$dX_t = -3X_t dt + \sqrt{3}X_t dB_t, \quad X_0 = 1. \quad (3.57)$$

Claramente, conforme a la condición para la estabilidad del método EM (3.55) con $\Delta t = 1$ y estos parámetros, el método EM no es estable y las correspondientes coordenadas (μ, λ^2) quedan fuera de la región de estabilidad. Esto significa que para tiempos lo suficientemente grandes $\mathbb{E}[|X_t|^2]$ tiende a infinito, por ello en la figura 14 vemos que la gráfica etiquetada con $\Delta t = 1$ a la iteración 600 $\mathbb{E}[|X_t|^2]$ es mayor que 10×10^{261} . Sin embargo de acuerdo al Lema 1, el problema sí es estable. Entonces, para que el método reproduzca correctamente esta cualidad, se hace más pequeño Δt hasta que el punto correspondiente a los parámetros quede dentro de la región de estabilidad, lo cual se logra con $\Delta t = \frac{1}{4}$, pues el punto de intersección de la recta al origen que pasa por $(-3, 3)$ y la parábola $-x(x + 2)$ es $(-1, 1)$.

En general, la capacidad que tienen un método numérico para reproducir correctamente la estabilidad de una EDE dada, se puede estudiar a partir de la correspondiente función de estabilidad. En [8],[26], [55] reportan las funciones y dominios de estabilidad para otros esquemas.

Ahora veamos el caso con ruido aditivo.

ESTABILIDAD LINEAL CASO ADITIVO Los resultados que presentamos a continuación fueron tomados de [54], nos interesa particularmente las demostraciones que aquí se presentan pues las usaremos en el capítulo 5.

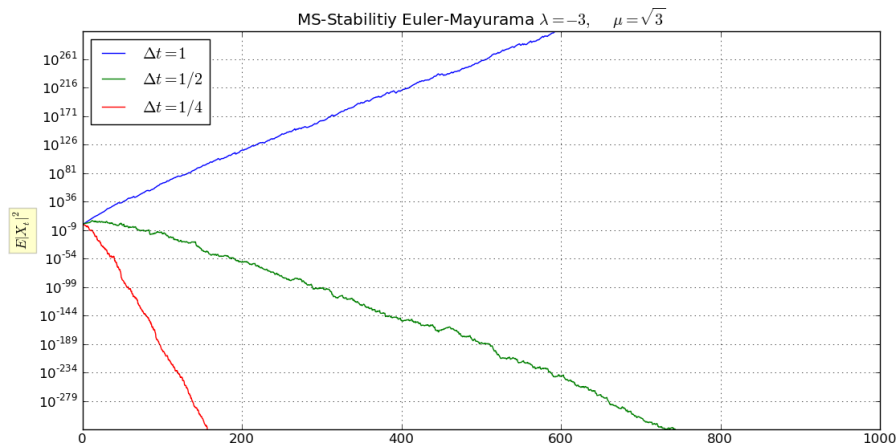


Figura 14: Solución numérica de (3.57) con el esquema EM usando diferentes tamaños de paso Δt .

Se estudia la estabilidad del esquema EM para la ecuación de prueba

$$dX_t = \mu X_t dt + \lambda dB_t, \quad X_0 = x_0, \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.58)$$

La solución exacta de (3.58) ver [50] esta dada por

$$X_t = \exp(\mu t) X_0 + \lambda \int_0^t \exp(\mu(t-s)) dB_s. \quad (3.59)$$

A partir de las propiedades de la integral de Itô conforme a (3.59) se cumple que

$$\mathbb{E}(X_t) = \exp(\mu t) \mathbb{E}(X_0), \quad \mathbb{E}(|X_t|^2) = \exp(2\operatorname{Re}(\mu)t) \mathbb{E}(|X_0|^2) - \frac{|\lambda|^2}{2\operatorname{Re}(\mu)t} (1 - \exp(2\operatorname{Re}(\mu)t)). \quad (3.60)$$

En [39] se prueba que cuando $t \rightarrow \infty$ y $\operatorname{Re}(\mu) < 0$ entonces

$$(i) \mathbb{E}(X_t) \rightarrow 0$$

$$(ii) \mathbb{E}(|X_t|^2) \rightarrow -\frac{|\lambda|^2}{2\operatorname{Re}(\mu)}.$$

Consideremos el esquema EM para la ecuación (3.58) que viene dado por

$$X_{j+1} = (1 + \mu\Delta t)X_j + \lambda\Delta B_j, \quad (3.61)$$

donde $\Delta B_j = \sqrt{\Delta t}V_j$ con $V_j \sim N(0, 1)$. Al calcular el valor esperado de X_{j+1} (5.29) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{j+1}) &= (1 + \mu\Delta t)\mathbb{E}(X_j) + \sqrt{\Delta t}\lambda\mathbb{E}(V_j) \\ &= (1 + \mu \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\Delta t)\mathbb{E}(X_j). \quad (3.63)$$

Entonces iterando (5.30) para $X_j, X_{j-1} \dots X_0$ se obtiene

$$\mathbb{E}(X_{j+1}) = (1 + \mu\Delta t)^{j+1} \mathbb{E}(X_0). \quad (3.64)$$

Definición 41 (Esquema estable en media). Dado un esquema numérico para la ecuación de prueba (3.58). Se dice que el esquema es *estable en media* si la solución numérica que regresa satisface

$$\mathbb{E}(X_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \quad (3.65)$$

De este argumento se tiene el siguiente resultado.

Teorema 8. *El esquema EM para la ecuación de prueba (3.58) es estable en media si $|1 + \mu\Delta t| < 1$.*

Demostración. Basta notar que de (3.64) y la Definición 41 se obtienen la conclusión del enunciado. \square

Observación 6. Es importante mencionar que este resultado da las mismas condiciones para el Euler clásico. En general, las condiciones de estabilidad para el caso aditivo están determinadas por su correspondiente parte deterministas ver([21]).

La siguiente defunción es análoga al concepto MC- estabilidad, en base a esté último se determina la A-estabilidad de los esquemas numéricos para EDEs con ruido aditivo y es la propiedad que buscamos conservar al emplear la formulación no estándar.

Definición 42 (consistencia asintótica en media cuadrática). Dado un método numérico para la ecuación de prueba (3.58), el esquema se dice asintóticamente consistente en media cuadrática, si la solución numérica X_j que produce satisface

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ j \rightarrow \infty}} \mathbb{E}(|X_j|^2) = -\frac{|\lambda|^2}{2\text{Re}(\mu)}. \quad (3.66)$$

El argumento anterior justifica el siguiente resultado

Teorema 9. *Si un método Euler-Mayurama para (3.58) es estable en media, i.e., satisface $|1 + \mu\Delta t| < 1$, entonces el esquema es asintóticamente consistente en media cuadrática.*

Demostración. Consideremos la media cuadrática de la solución numérica con el método EMM (5.29), se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_{j+1}|^2) &= \mathbb{E}(|X_{j+1}| \overline{|X_{j+1}|}) \\ &= |1 + \mu\Delta t|^2 \mathbb{E}(|X_j|^2) + |\lambda|^2 \Delta t. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Para simplificar la expresión, definimos $\alpha = |1 + \mu\Delta t|$. Iterando (3.67) para $\{X_j, X_{j-1}, \dots, X_1\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_{j+1}|^2) &= \alpha^2 (\alpha^2 \mathbb{E}(|X_{j-1}|^2) + |\lambda|^2 \Delta t) + |\lambda|^2 \Delta t \\ &= \alpha^4 \mathbb{E}(|X_{j-1}|^2) + (\alpha^2 + 1) |\lambda|^2 \Delta t \\ &\vdots \\ &= \alpha^{2(j+1)} \mathbb{E}(|X_0|^2) + \underbrace{(\alpha^{2j} + \dots + \alpha^2 + 1)}_{\text{serie geométrica para } \alpha^2} |\lambda|^2 \Delta t \\ &= \alpha^{2(j+1)} \mathbb{E}(|X_0|^2) + \frac{\alpha^{2(j+1)} - 1}{\alpha^2 - 1} |\lambda|^2 \Delta t. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Desarrollando $|1 + \mu\Delta t|^2 = 1 + 2\mathbf{Re}(\mu)\Delta t + |\mu|^2\Delta t^2$, conforme a (3.68) se tiene

$$|1 + \mu\Delta t|^{2(j+1)}\mathbb{E}(|X_0|^2) + \frac{|1 + \mu\Delta t|^{2(j+1)} - 1}{(2\mathbf{Re}(\mu) + |\mu|^2\Delta t)\Delta t}|\lambda|^2\Delta t. \quad (3.69)$$

Para que el método EM (5.29) de la EDE (3.58) sea estable en media se sigue

$$\mathbb{E}(|X_j|^2) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{-|\lambda|^2}{(2\mathbf{Re}(\mu) + |\mu|^2\Delta t)}. \quad (3.70)$$

Entonces de (3.70)

$$\frac{-|\lambda|^2}{(2\mathbf{Re}(\mu) + |\mu|^2\Delta t)} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{|\lambda|^2}{2\mathbf{Re}(\mu)}. \quad (3.71)$$

□

 ESQUEMAS EN DIFERENCIAS FINITAS NO ESTÁNDAR (EDFNE)

En años reciente, se ha incrementado el interés por desarrollar esquemas en diferencias finitas para EDOs más confiables y eficientes [9, 38, 45]. En esta dirección, un área emergente en métodos numéricos, tiene que ver con el preservar propiedades cualitativas de la solución exacta, por ejemplo en [11] y [56] reportan que los esquemas Runge Kutta, reproducen bifurcaciones, comportamiento caótico y soluciones espurias. En los esquemas en diferencias finitas no estándar (EDFNEs), uno de los principales objetivos es conservar las propiedades dinámicas de la solución exacta. De hecho, existe un conjunto de EDFNEs que ha sido aplicado en problemas de física e ingeniería, obteniendo buenos resultados [1, 16, 33, 36, 47, 58].

Considerando la ecuación $\frac{dy}{dt} = F(t, y, y_0, \lambda)$, la idea básica para construir un esquema, es aproximar la derivada con $\frac{y_{k+1} - y_k}{\phi(h)}$, siendo h el paso de tamaño uniforme, ϕ una función denominador que satisface $\phi(h) = h + \mathcal{O}(h^2)$. Además, los términos no lineales de la parte derecha se aproximan de forma no local. Es importante mencionar que, en el límite para $t = hk$ fijo la generalización de la derivada discreta se reduce a la derivada convencional, i. e.,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{y_{k+1} - y_k}{\phi(h)} = \frac{dy}{dt}.$$

Sin embargo, para una $h > 0$ fija, dado un valor de k , la generalización de la derivada discreta difiere de la de su análogo estándar. La función ϕ puede entenderse como una regularización del paso h .

La génesis de dicha formulación se debe a los trabajos presentados por Ronald Mickens, ver [43, 44, 46]. Mickens introduce los métodos no estándar que producen aproximaciones exactas y por consiguiente, con las mismas propiedades cualitativas de la solución analítica. Sin embargo, aunque estos métodos son una gran idea, dada una EDO arbitraria no es claro como construir un EDFNE, pues esto equivale a resolver de forma exacta cualquier EDO. Un avance relevante en esta dirección son las reglas de formulación creadas por Mickens [47], al aplicarlas, en general producen una solución numérica precisa y con mejores propiedades que los esquemas convencionales.

Es por ello, que en esta tesis se busca adaptar la formulación no estándar en los algoritmos de dinámica Browniana [7]. Lo anterior se justifica en que los esquemas que se usan en el área, presentan inestabilidad numérica, en un contexto estocástico. Es importante mencionar que hasta la fecha, no hemos encontrado publicaciones que

reporten la aplicación de esquemas en diferencias finitas no estándar para la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas.

En torno a lo mencionado, organizamos el capítulo en dos secciones: la [sección 4.1](#) trata de forma general los elementos de la formulación no estándar y se discuten las alternativas para la construcción de EDFNE reportadas en [41] y [45]. En la [sección 4.2](#) a manera de ejemplo, se siguen las alternativas mencionadas para construir esquemas no estándar que nos servirán mas adelante.

4.1 ESQUEMA EN DIFERENCIAS FINITAS NO ESTÁNDAR (EDFNS)

Para motivar esta sección, se considera al siguiente ejemplo. En la literatura de EDOs es común encontrar la ecuación logística [5] para modelar la dinámica de poblaciones limitadas

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - y), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

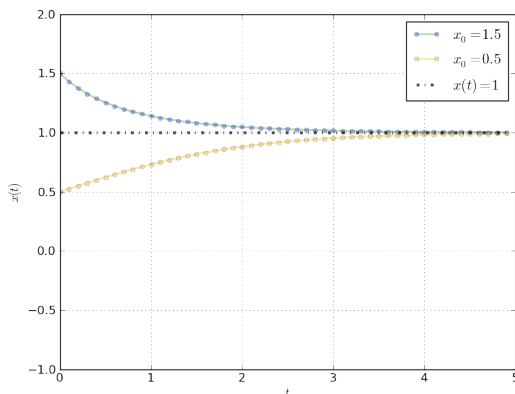
Su solución se puede obtener aplicando el método de separación de variables,

$$y(t) = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0) \exp(-t)}. \quad (4.2)$$

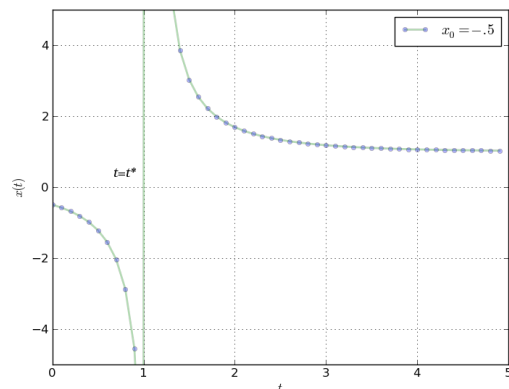
Claramente, de $f(y) = y(1 - y)$ se infiere que $\{0, 1\}$ son los puntos fijos de (4.1). Si $y_0 > 0$, la solución tiende al punto fijo $y(t) = 1$. De lo contrario, si $y_0 < 0$, la solución tiende a la singularidad en

$$t = t^* = \log \left(\frac{1 + |y_0|}{|y_0|} \right),$$

para tiempo $t > t^*$ la solución decrece en forma monótona al punto fijo $y(t) = 1$. Luego, $y(t) = 0$ es inestable y $y(t) = 1$ estable. En la [figura 15](#) se ilustra el comportamiento general de las soluciones.



(a) Si $y_0 > 0$ la solución tiende a $y(t) = 1$.



(b) Si $y_0 < 0$ la solución tiende a una singularidad.

Figura 15: Naturaleza de las soluciones para la ecuación logística.

Usando la diferencia centrada, es posible aproximar la ecuación (4.1) con el método de Euler clásico en el intervalo $[0, T]$

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = y_k(1 - y_k), \quad (4.3)$$

La figura 16 muestra la gráfica de la solución numérica con este esquema. Considerando que los puntos fijos de la ecuación en diferencias (4.3) son $\bar{y}^{(0)} = 0, \bar{y}^{(1)} = 1$, a partir de una perturbación lineal para cada uno de estos, se estudia la estabilidad. En esta dirección se define

$$\hat{y}_k = \bar{y}^{(0)} + \epsilon_k, \quad |\epsilon_k| \ll 1. \quad (4.4)$$

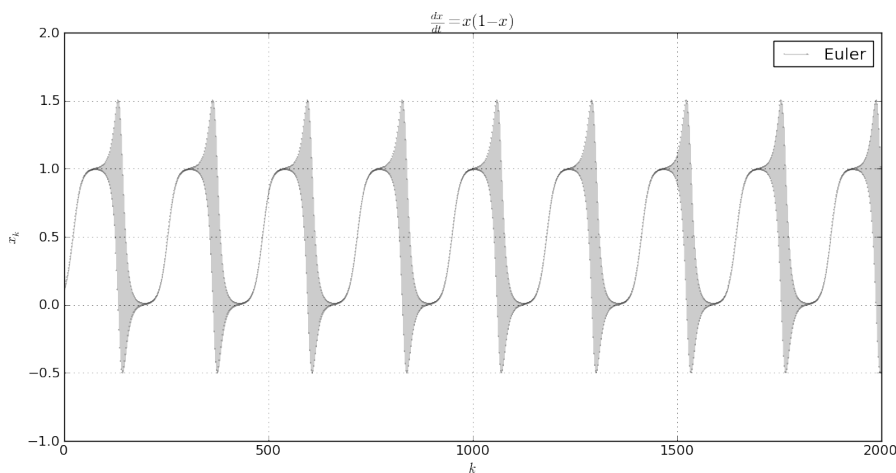


Figura 16: Solución, a partir del esquema numérico (4.3) para la ecuación logística, con $y_0 = 0.1$, tamaño de paso $h = 0.1$ y 2000 iteraciones en $[0, 200]$.

Sustituyendo en la ecuación en diferencias del esquema (4.3) y conservando solo los términos a primer orden, resulta

$$\frac{\epsilon_{k+1} - \epsilon_{k-1}}{2h} = \epsilon_k. \quad (4.5)$$

Para resolver esta ecuación se usa el cambio de variable $\epsilon_k \rightarrow r^k$, de aquí se obtiene la ecuación característica

$$r^2 - 2hr - 1 = 0. \quad (4.6)$$

Por lo tanto, del principio de superposición y las raíces de (4.6) la solución de (4.5) es

$$\epsilon_k = A(r_+)^k + B(r_-)^k, \quad (4.7)$$

con constantes A, B arbitrarias pero pequeñas y $r_{\pm} = h \pm \sqrt{1 + h^2}$. Así en la solución de (4.7) resulta, que el primer término es exponencial creciente y el segundo término oscila con una amplitud exponencial decreciente. El mismo análisis se realiza por el punto fijo $\bar{y}^{(1)}$,

$$\hat{y}_k = \bar{y}^{(1)} + \eta_k, \quad |\eta_k| \ll 1. \quad (4.8)$$

Luego, la ecuación de perturbación lineal para η_k

$$\frac{\eta_{k+1} - \eta_{k-1}}{2h} = -\eta_k. \quad (4.9)$$

Imitando el argumento anterior, la solución de (4.9) resulta

$$\eta_k = C(s_+)^k + D(s_-)^k, \quad (4.10)$$

con C, D constantes arbitrarias pequeñas y $s_{\pm}(h) = -h \pm \sqrt{1 + h^2}$. Por lo tanto, el primer término en (4.10) decrece exponencialmente, mientras el segundo término oscila con amplitud exponencial creciente. Considerando todo estos resultados juntos, se sigue que el esquema en diferencia centrada (4.3) tiene los mismos puntos fijos que la ecuación logística. Sin embargo, el punto fijo $y(t) = 0$ es linealmente estable y $y(t) = 1$ es inestable, pero para la ecuación en diferencias ambos puntos fijos son linealmente inestables, esto muestra que el esquema numérico no es capaz de reproducir la dinámica de la ecuación logística.

Lo mostrado en la figura 16 se explica como sigue. Para una condición inicial y_0 con $0 < y_0 < 1$, los valores de y_k crecen exponencialmente aproximándose cada vez más al punto fijo $\bar{y}_k^{(1)} = 1$, después y_k comienza oscilar con amplitud creciente entorno a $\bar{y}^{(1)}$ hasta entrar en una vecindad del punto fijo $\bar{y}^{(0)} = 0$. Luego, la exponencial inicial decrece a $\bar{y}^0 = 0$ y nuevamente y_k comienza crecer hacia el punto fijo $\bar{y}^{(1)} = 1$. En resumen, la conclusión más importante es que el esquema en diferencia centrada

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = f(y_k) \quad (4.11)$$

para la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad (4.12)$$

hace que todos los puntos fijos sean inestables. Por consiguiente, este esquema no es eficiente para (4.1). En su lugar modificamos el esquema (4.3) como sigue. Considerando la ecuación en diferencias

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = y_{k-1}(1 - y_{k+1}), \quad (4.13)$$

y usando el cambio de variable $y_k = \frac{1}{x_k}$, se tiene la siguiente ecuación en diferencias

$$x_{k+1} - \left(\frac{1}{1+2h} \right) x_{k-1} = \frac{2h}{1+2h}. \quad (4.14)$$

Al resolver la ecuación (4.14) se obtiene

$$x_k = 1 + [A + B(-1)^k](1 + 2h)^{-\frac{k}{2}},$$

donde A, B son constantes arbitrarias. Por lo tanto, con el cambio de variable tenemos

$$y_k = \frac{1}{[A + B(-1)^k](1 + 2h)^{-\frac{k}{2}}}.$$

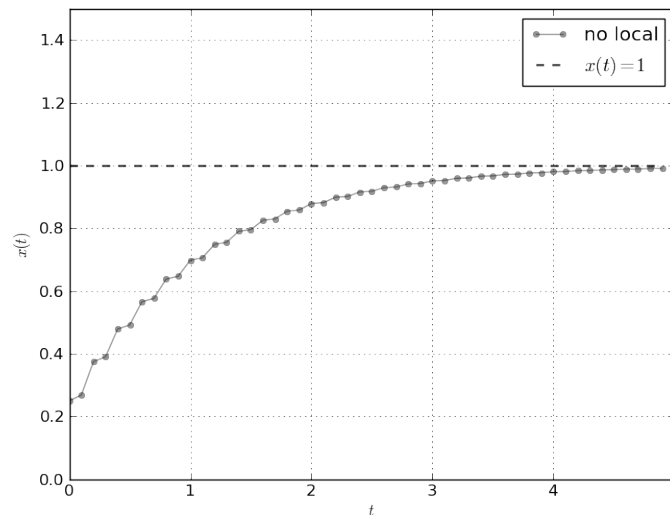


Figura 17: Solución numérica con el esquema centrado no local (4.14), con $y_0 = 0.25$, $h = 0.1$ en $[0, 5]$

Luego, para y_0 tal que $0 < y_0 < 1$ y y_1 con $y_1 = y_0 + hy_0(1 - y_0)$, la solución de (4.13) se comporta como en la figura 17. A excepción de las oscilaciones de pequeña amplitud en torno a la solución exacta la gráfica muestra como este nuevo esquema reproduce en general, las mismas propiedades cualitativas de la ecuación logística,

Ahora se considera el esquema de Euler usando diferencia hacia adelante

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = y_k(1 - x_k). \quad (4.15)$$

Esta ecuación en diferencias de primer orden, tienen dos puntos fijos $\bar{y}^0 = 0, \bar{y}^1 = 1$. Perturbando de forma lineal, entorno a estos puntos como en (4.4) y (4.9), se tiene

$$\epsilon_k = \epsilon_0(1 + h)^k, \quad (4.16)$$

$$\eta_k = \eta_0(1 - h)^k. \quad (4.17)$$

De aquí se sigue que \bar{y}^0 es inestable para todo $h > 0$, lo cual es congruente con el modelo original. Sin embargo, la estabilidad lineal para \bar{y}^1 depende de h . Por ejemplo, si :

- (i) $0 < h < 1$: $\bar{y}^{(1)}$ es linealmente estable, y la perturbación decrece exponencialmente.
- (ii) $1 < h < 2$: $\bar{y}^{(1)}$ es linealmente estable y la perturbación decrece exponencialmente con oscilaciones.
- (iii) $h > 2$: $\bar{y}^{(1)}$ es linealmente inestable y la perturbación oscila con amplitud exponencial creciente.

En conclusión, el esquema (4.3) reproduce correctamente la estabilidad lineal de la ecuación logística solo para tamaños de paso en el intervalo $0 < h < 1$. Para este intervalo, las propiedades cualitativas son las mismas y por consiguiente no existen inestabilidades numéricas.

Ahora con el fin de generalizar formalmente los conceptos, se considera la ecuación escalar

$$\frac{dy}{dt} = f(y, \lambda), \quad (4.18)$$

donde λ es un vector de n parámetros. Resulta que el esquema más general en diferencias finitas no estándar de primer orden para (4.18) toma la forma

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\phi(h, \lambda)} = F(y_k, y_{k+1}, \lambda, h). \quad (4.19)$$

La derivada discreta en esta ecuación es una generalización de

$$\frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{y_{k+1} - y_k}{h}, \quad (4.20)$$

y la función ϕ en (4.19) cumple $\phi(h, \lambda) = h + \mathcal{O}(h^2)$, para λ fijo $h \rightarrow 0$. Dicha forma discreta de la derivada se basa en la definición clásica [40], la cual también se puede escribir como

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t + \psi_1(h)) - y(t)}{\psi_2(h)}, \quad (4.21)$$

donde

$$\psi_i(h) = h + \mathcal{O}(h^2), \quad h \rightarrow 0, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (4.22)$$

Las siguientes funciones son ejemplos que satisfacen (4.21):

- i) $\psi(h) = h$,
- ii) $\psi(h) = \sin(h)$,
- iii) $\psi(h) = \exp h - 1$,
- iv) $\psi(h) = \frac{1 - \exp(-\lambda h)}{\lambda}$.

Observación 7. Es importante notar que en el límite, cuando $h \rightarrow 0$, se obtiene la definición clásica de derivada, pues para cualquier ψ con las propiedades mencionadas

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t + \psi_1(h)) - y(t)}{\psi_2(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t + h) - y(t)}{h} \quad (4.23)$$

Sin embargo para h "finita", estas derivadas discretas difieren en general, de la derivada discreta convencional (4.20).

ESQUEMAS EXACTOS DE DIFERENCIAS FINITAS Mickens en [42] introdujo por primera vez los esquemas no estándar, su construcción se derivó de obtener esquemas exactos. Veamos que se quiere decir con esto. Sea una ecuación general de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, \lambda), \quad y(t_0) = y_0, \quad (4.24)$$

donde $f(y, t, \lambda)$ satisface las hipótesis del teorema de existencia y unicidad para la solución de EDOs en intervalos $0 \leq t \leq T$, $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ respectivamente. Entonces la solución existe y puede escribirse como

$$y(t) = \phi(\lambda, y_0, t_0, t) \quad \text{con } y_0 = \phi(\lambda, y_0, t_0, t_0). \quad (4.25)$$

En base a lo mencionado, se considera el modelo discreto de (4.24)

$$y_{k+1} = g(\lambda, h, y_k, t_k), \quad t_k = hk. \quad (4.26)$$

Cuya solución se puede escribir en la forma

$$y_k = \psi(\lambda, h, y_0, t_0, t_k), \quad \text{con } y_0 = \psi(\lambda, h, y_0, t_0, t_0). \quad (4.27)$$

Definición 43. Las ecuaciones (4.24) y (4.26) tienen la misma *solución general* si y sólo si

$$y_k = y(t_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

y para todo valor de h .

Definición 44 (Esquema en diferencias exacto). Un esquema en diferencias se dice exacto, si su solución general y la de la EDO asociada, son equivalentes en el sentido de la definición anterior.

Las definiciones mencionadas dan significado a unos de los resultados importante para los esquemas no estándar.

Teorema 10. *A cada ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, \lambda), \quad y(t_0) = y_0,$$

le corresponde un esquema de diferencia finita dado por

$$y_{k+1} = \phi(\lambda, y_k, t_k, t_{k+1}),$$

donde ϕ es como en (4.25).

La demostración (ver [49]) se basa en la propiedad de grupo de las soluciones

$$y(t+h) = \phi(\lambda, y(t), t, t+h) \quad (4.28)$$

y en hacer la sustitución correspondiente para obtener

$$y_{k+1} = \phi(\lambda, y_k, t_k, t_{k+1}).$$

Observación 8. i) Si todas las soluciones de (4.24) están definidas para todo tiempo T entonces (4.28) se cumple para toda h y toda t . De lo contrario la propiedad de grupo se satisface para valores de h y t , donde tenga sentido.

ii) El teorema 10 es un resultado de existencia y en general no se cuenta con “la única guía” sobre como construir los esquema exactos. Sin embargo existen trabajos que mencionan técnicas de construcción, por ejemplo [41],[48],[56].

iii) La implicación más importante (en el contexto computacional) del teorema 10, es la equivalencia entre la solución del esquema en diferencias y la solución del problema original, en una malla con tamaño de paso h fijo pero arbitrario.

iv) El resultado es valido para sistemas de EDOs acopladas y de primer orden.

EJEMPLOS DE ESQUEMAS EXACTOS En esta parte se usa el [Teorema 10](#) en modo reverso para construir esquemas exactos en diferencias. Para fijar ideas, sigamos con el ejemplo de la ecuación logística.

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 y - \lambda_2 y^2, \quad y(t_0) = y_0, \quad (4.29)$$

donde λ_1, λ_2 son constantes. La solución al problema de valor inicial de (4.29) esta dada por

$$y(t) = \frac{\lambda_1 y_0}{(\lambda_1 - \lambda_2 y_0) \exp(-\lambda_1(t - t_0)) + \lambda_2 y_0} \quad (4.30)$$

Luego, en la solución (4.30) hacemos las sustituciones

$$\begin{aligned} y(t) &\rightarrow y_{k+1}, \\ y_0 &\rightarrow y_k, \\ t_0 &\rightarrow t_k, \\ t &\rightarrow t_{k+1}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

resultado el siguiente esquema exacto

$$y_{k+1} = \frac{\lambda_1 y_k}{(\lambda_1 - \lambda_2 y_k) \exp(-\lambda_1(h)) + \lambda_2 y_k} \quad (4.32)$$

Bajo manipulaciones algebraicas

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\left(\frac{\exp(\lambda_1 h) - 1}{\lambda_1}\right)} = \lambda_1 y_k - \lambda_2 y_{k+1} y_k. \quad (4.33)$$

Notemos que en el ejemplo, se usa la solución exacta de (4.29) para construir (4.33). En general la construcción de esquemas exactos implica el conocimiento de la solución analítica, sin embargo, es posible construir esquemas con mejores propiedades. En este sentido, basándose en estudios numéricos y analíticos de esquemas en diferencias finitas exactos, Ronald Mickens presenta en [45] las siguientes reglas para la construcción de modelos discretos exactos:

- Regla 1. Como vemos en el ejemplo, los *ordenes* de las derivadas discretas deben ser exáctamente los mismos que los *ordenes* de las derivadas correspondientes en la [EDO](#).
- Regla 2. La función en el *denominador* de la derivada discreta debe ser en general, definida en términos de funciones con más estructura, de tal forma que se involucren tanto el tamaño de paso como los parámetros propios de la [EDO](#).
- Regla 3. Los *términos no lineales* en general, se deben trabajar de forma no local sobre la malla.
- Regla 4. Las *soluciones especiales* de la [EDO](#), deberán de ser también soluciones especiales de la ecuación en diferencias.
- Regla 5. Las ecuaciones en diferencias finitas no deberán de tener soluciones que no correspondan exactamente con las correspondientes soluciones de la [EDO](#).

Una de las ventajas que aparece de forma natural en estos modelos, es que los problemas referentes a la convergencia, consistencia y estabilidad exacta desaparecen. Sin embargo, para una EDO arbitraria, es esencialmente imposible construir un modelo exacto, pues esto sería equivalente a conocer la solución de cualquier EDO. Por otra parte, al aplicar algunas de las reglas mencionadas, se pueden construir esquemas con mejores propiedades. En esta dirección se enuncia la definición dada en [31].

Definición 45 (Esquema en diferencias finitas no estándar). Dada una EDO de primer orden $\frac{dy}{dt} = f(y, \lambda)$, a la ecuación en diferencias $y_{k+1} = F(h, \lambda, y_0)$, se le nombra esquema en diferencias finitas no estándar si cumple al menos una de las siguientes condiciones:

- (i) En las derivadas discretas que aparecen en la formulación del método, el denominador h se reemplaza por una función no negativa ϕ tal que $\phi(h) \rightarrow h + \mathcal{O}(h^2)$ conforme $h \rightarrow 0$.
- (ii) Los términos no lineales que aparecen en $f(y)$ se trabajan de forma no local sobre la malla.

Lo anterior da lugar a un concepto relacionado con las propiedades de un esquema en diferencias basado con la formulación no estándar.

Definición 46 (Consistencia dinámica). Considerando

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, \lambda), \quad (4.34)$$

donde λ representa los parámetros que definen al modelo en (4.34) y el esquema en diferencias siguiente

$$y_{k+1} = F(y_k, t_k, h, \lambda). \quad (4.35)$$

Si la ecuación diferencial o inclusive sus soluciones tienen la propiedad P , el modelo discreto en (4.35), es *consistente* con la dinámica de (4.34) si este o inclusive sus soluciones reproducen correctamente la propiedad P . En la práctica, para sistemas que aparecen en problemas de ciencia y tecnología, son particularmente importantes las siguientes propiedades [47]:

- positividad
- acotamiento
- monotonía
- puntos fijos y su correspondiente estabilidad
- variables dependientes de valor entero

4.2 CONSTRUCCIÓN DE EDFNS

En esta sección se muestran dos alternativas para la construcción de esquemas en diferencias finitas no estándar para EDOs escalares autónomas y de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad (4.36)$$

donde se asume que $f(y) = 0$ solo tiene ceros simples. Con el interés de construir esquemas que no tengan inestabilidades numéricas.

Se presenta uno de los resultados fuertes de los esquemas tipo Mickens, el cual prueba la existencia de esquemas finitos que reproducen correctamente la estabilidad lineal de la ecuación (4.66) para cualquier tamaño de paso h . Nos interesa especialmente la prueba, pues involucra la construcción de tales esquemas y es un proceso que se sigue en la construcción de algoritmos no estándar.

4.2.1 Esquema en diferencias finitas Mickens (EDFM) (alternativa 1)

Denotando los puntos fijos de (4.66) por $\{\bar{y}^{(i)}; i = 1, 2, \dots, I\}$, donde I no necesariamente es acotado. Se sabe que los puntos fijos son solución de $f(\bar{y}) = 0$. Se define R_i y R^* como

$$R_i := \frac{df(\bar{y}^{(i)})}{dy}, \quad (4.37)$$

$$R^* := \max\{|R_i|, i = 1, \dots, I\}, \quad (4.38)$$

y del análisis de estabilidad lineal aplicado al i -ésimo punto fijo se tienen lo siguiente [45]:

- (i) Si $R_i > 0$, el punto fijo $y(t) = \bar{y}^{(i)}$ es linealmente estable.
- (ii) Si $R_i < 0$, el punto fijo $y(t) = \bar{y}^{(i)}$ es linealmente inestable.

Ahora consideramos el siguiente esquema en diferencias para la ecuación (4.66)

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\left(\frac{\phi(hR^*)}{R^*}\right)} = f(y_k), \quad (4.39)$$

donde ϕ cumple:

- (i) $\phi(z) = z + \mathcal{O}(z^2)$, $z \rightarrow 0$,
- (ii) $0 < \phi(z) < 1$, $z > 0$.

Teorema 11. El esquema en diferencias (4.39) tiene puntos fijos con exactamente la misma estabilidad lineal que (4.66) para todo $h > 0$.

Demostración. Sea $y_k = \bar{y}^{(i)} + \epsilon_k$, para $0 < \epsilon_k \ll 1$, la perturbación lineal entorno al i -ésimo punto fijo. Para estudiar la estabilidad lineal, se sustituye la perturbación en el esquema (4.39) obteniendo

$$\frac{(\bar{y}^{(i)} + \epsilon_{k+1}) - (\bar{y}^{(i)} + \epsilon_k)}{\frac{\phi(hR^*)}{R^*}} = f(\bar{y}^{(i)} + \epsilon_k),$$

y conservando solo el orden lineal en la serie de perturbación de f se tiene

$$\frac{\epsilon_{k+1} - \epsilon_k}{\frac{\phi(hR^*)}{R^*}} = R_i \epsilon_k,$$

bajo manipulaciones algebraicas la ecuación anterior la reescribimos como

$$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k \left(1 + \left(\frac{R_i}{R^*} \right) \phi(hR^*) \right). \quad (4.40)$$

Usando (4.40) de forma iterada resulta

$$\epsilon_{k+1} = \epsilon_0 \left(1 + \left(\frac{R_i}{R^*} \right) \phi(hR^*) \right)^k \quad (4.41)$$

y llegamos a que para determinar la estabilidad basta estudiar el límite de (4.41) cuando $k \rightarrow \infty$. Recordemos que, para $R_i > 0$ resulta que este es un punto fijo linealmente inestable. Veamos la estabilidad de $\bar{y}^{(i)}$ para (4.39), si $R_i > 0$ ya que ϕ, R^* y h son positivos tenemos que

$$1 + \left(\frac{R_i}{R^*} \right) \phi(hR^*) > 1, \quad \forall h > 0. \quad (4.42)$$

Entonces cuando $k \rightarrow \infty$ en (4.41), llegamos a que $y_k = \bar{y}^{(i)}$ también es inestable. Ahora, si $R_i < 0$, tenemos que, $0 \leq \frac{|R_i|}{R^*} \phi(hR^*) < 1$ y ya que $0 < \phi(hR^*) < 1$, por consiguiente $0 \leq 1 + \left(\frac{R_i}{R^*} \right) \phi(hR^*) < 1$, por lo tanto $y_k = \bar{y}^{(i)}$ es un punto fijo estable para toda h . \square

Dicho resultado esta relacionado con el hecho de que las inestabilidades numéricas más elementales aparecen cuando para algún punto fijo de (4.66), el correspondiente punto fijo de la ecuación en diferencias tiene estabilidad opuesta. Sin embargo, la construcción anterior muestra la necesidad de una derivada discreta más general para lograr que un esquema reproduzca correctamente la estabilidad lineal. En este sentido el esquema (4.39) involucra la siguiente *función denominador*

$$D(h, R^*) \equiv \frac{\phi(hR^*)}{R^*} \quad (4.43)$$

con ϕ, R^* están dados por las condiciones (i) y (ii). Esta forma reemplaza la h como función denominador en los esquemas estándar.

Observación 9. La función denominador $D(h, R^*)$ puede considerarse como una regularización h' del tamaño de paso h , i.e.,

$$h \approx h' = D(h, R^*).$$

Observación 10. Es necesario hacer énfasis en que a excepción de las condiciones en (i) y (ii) para la función ϕ ésta resulta arbitraria en cada caso.

Para ilustrar el uso de los resultados expuestos en esta parte, mas adelante se construye un esquema exacto bajo esta técnica para la ecuación de prueba.

4.2.2 Promedio de Steklov (alternativa 2)

Sea la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad y(0) = y_0 \quad (4.44)$$

tal que la función f es el producto de dos funciones independientes, i. e.,

$$f(y, t) = f_1(y)f_2(t), \quad (4.45)$$

En esta sección damos una forma alternativa de obtener ϕ , (ver [41]). Usando el siguiente promedio especial de Steklov para f

$$f(y(t)) \approx \left(\frac{1}{y_{k+1} - y_k} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{du}{f(u)} \right)^{-1}, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad y_k = y(t_k), \quad t_k = kh. \quad (4.46)$$

Bajo la aproximación (4.46) el esquema toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{y_{k+1} - y_k}{h} &= \varphi(y_k, t_k), & \varphi &= \varphi_1(y_k)\varphi_2(t_k), \\ & & k &= 0, 1, \dots \\ & & y(0) &= y_0, \end{aligned} \quad (4.47)$$

con φ_1, φ_2 definidas como sigue

$$\varphi_1(y_k) = \left(\frac{1}{y_{k+1} - y_k} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{du}{f_1(u)} \right)^{-1}, \quad \varphi_2(t_k) = \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_2(t) dt. \quad (4.48)$$

Observación 11. Resulta que los esquemas construidos con esta formulación siempre resultan explícitos, más aún, los ejemplos que se trabajan en la siguiente sección con esta herramienta, resultan en esquemas que modelan los términos no lineales de forma no local. Esto último es una característica de los esquemas no estándar.

4.2.3 Ejemplos

En esta sección se aplican la dos alternativas expuestas anteriormente con el fin de ilustrar lo mencionado y comparar ambas formulaciones para la construcción de esquemas no estándar.

Ejemplo 1. Considerando la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad \lambda > 0. \quad (4.49)$$

Su solución es $y(t) = y_0 \exp(-\lambda t)$. Nos interesa este ejemplo en particular pues sentará las bases al momento de estudiar la convergencia y estabilidad del esquema estocástico no estándar que se propone en el siguiente capítulo.

Proponemos el método de Euler asociado a (4.49)

$$y_{k+1} = y_k(1 - \lambda h). \quad (4.50)$$

A partir de su expansión en serie de Taylor $(1 - \lambda h) \approx \exp(-\lambda h)$ para h lo suficientemente pequeña, i. e., $0 < h \ll 1$. entonces en este contexto se pueden hacer las siguientes aproximaciones

$$\begin{aligned} 1 - \lambda h &\approx \exp(-\lambda h) \\ \lambda h &\approx 1 - \exp(-\lambda h) \\ h &\approx \frac{1 - \exp(-\lambda h)}{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Con esto queda definida $\phi(h, \lambda) = \frac{1 - \exp(-\lambda h)}{\lambda}$. Luego, de remplazando el denominador bajo la [Definición 44](#) resulta el esquema exacto

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\frac{1 - \exp(-\lambda h)}{\lambda}} = -\lambda y_k. \quad (4.52)$$

La [figura 18](#) muestra los resultados obtenidos por este esquema para una condición inicial $y_0 = 2, \lambda = -1$ y diferentes tamaños de paso h para compararlos con el método de Euler clásico. En las gráficas se puede observar que la solución numérica que se obtiene usando el esquema (4.52) coincide en forma exacta con la solución analítica de $\frac{dy}{dt} = -y$ para los diferentes tamaños de paso h , mientras que el esquema clásico aproxima correctamente la solución solo para $h = .01$.

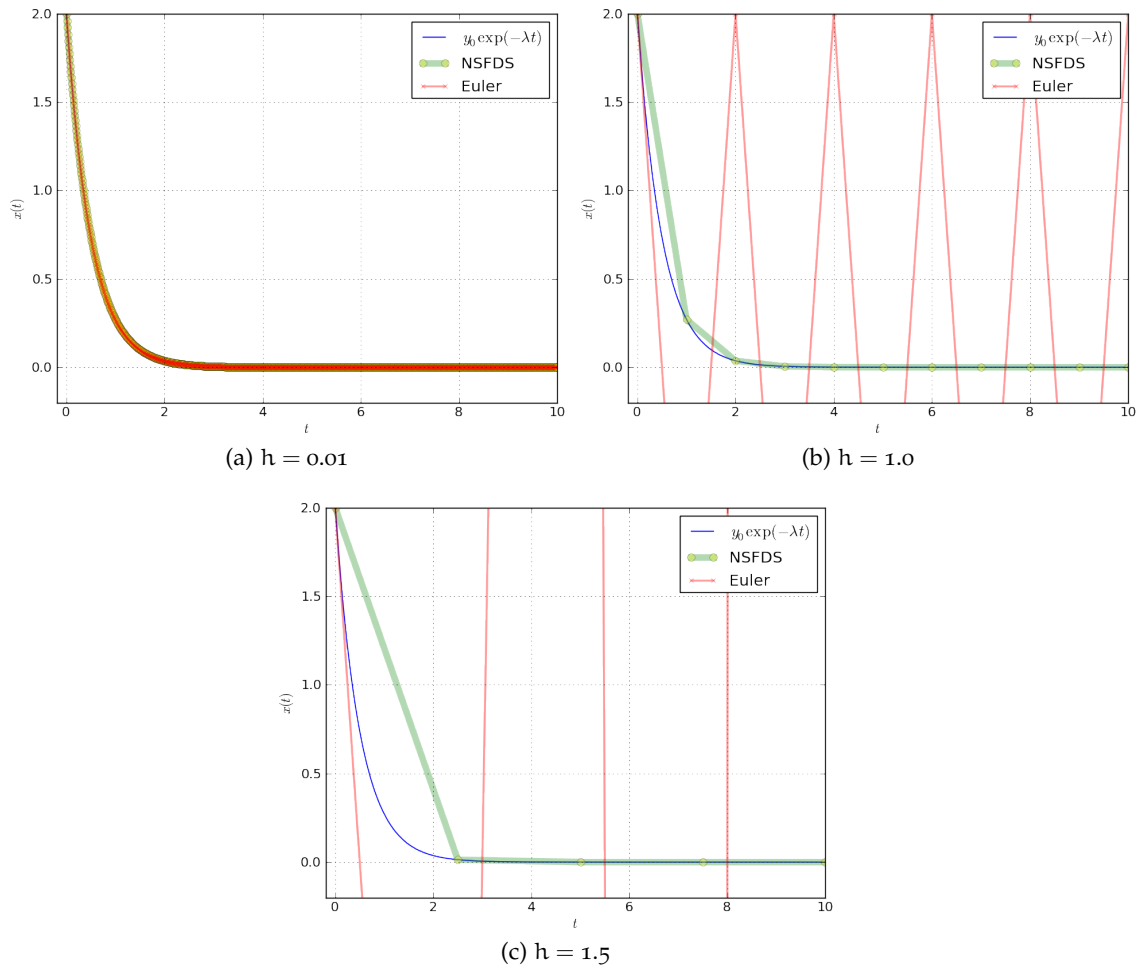


Figura 18: Comparación de los esquemas (4.52)

Ahora aplicando la formulación de la alternativa 2, se obtiene el esquema

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \left(-\frac{1}{y_{k+1} - y_k} \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{y_{k+1}}{y_k} \right) \right)^{-1}, \quad y(0) = y_0. \quad (4.53)$$

Bajo manipulaciones algebraicas tenemos,

$$y_{k+1} = y_k \exp(-\lambda h), \quad (4.54)$$

lo cual es congruente con la solución general de (4.49).

Observación 12. Ambas formulaciones son equivalente en el sentido de la [Definición 43](#), pues bajo manipulaciones algebraicas, en ambos casos se llega (4.54). Sin embargo la naturaleza de cada formulaciones es completamente distinta.

Ejemplo 2. Ahora se construyen los esquemas no estándar, para la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = y^2, \quad y(0) = 1. \quad (4.55)$$

La solución general de este problema de valor inicial es

$$y(t) = \frac{1}{1-t}. \quad (4.56)$$

Este ejemplo es de particular importancia, pues se extenderá (4.55) a su forma estocástica, la cual nos servirá como ecuación de prueba. Conforme a las reglas propuestas por Mickens, se modela el término no lineal de forma no local, i. e.,

$$y^2 = y_k y_{k+1}. \quad (4.57)$$

Observación 13. La forma de trabajar los términos no lineales en (4.57), no es única, por ejemplo en [31] además de (4.57) se trabaja con:

- $y_k^2 = \alpha y_k^2 + (1 - \alpha) y_k y_{k+1}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$
- $y_k^2 = \frac{y_k (y_{k-1} y_{k+1})}{2}.$

Estas relaciones producen esquemas que conservar la monotonía de la solución analítica.

Luego, para el denominador de la derivada discreta se usa nuevamente la función $\phi(z) = 1 - \exp(-z)$, así el EDFNE resultante es

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{1 - \exp(-h)} = y_k y_{k+1}. \quad (4.58)$$

La [figura 19](#) muestra como se comporta el esquema en comparación con la solución exacta. El método reproduce en general la dinámica de la EDO, sin embargo conforme mas se acerca a la singularidad se pierde precisión.

Usando la alternativa 2, del promedio de Steklov

$$y^2(t) \approx \left(\frac{1}{y_{k+1} - y_k} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{du}{u^2} \right) = y_k y_{k+1}, \quad (4.59)$$

y se obtiene el esquema no estándar

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = y_k y_{k+1}. \quad (4.60)$$

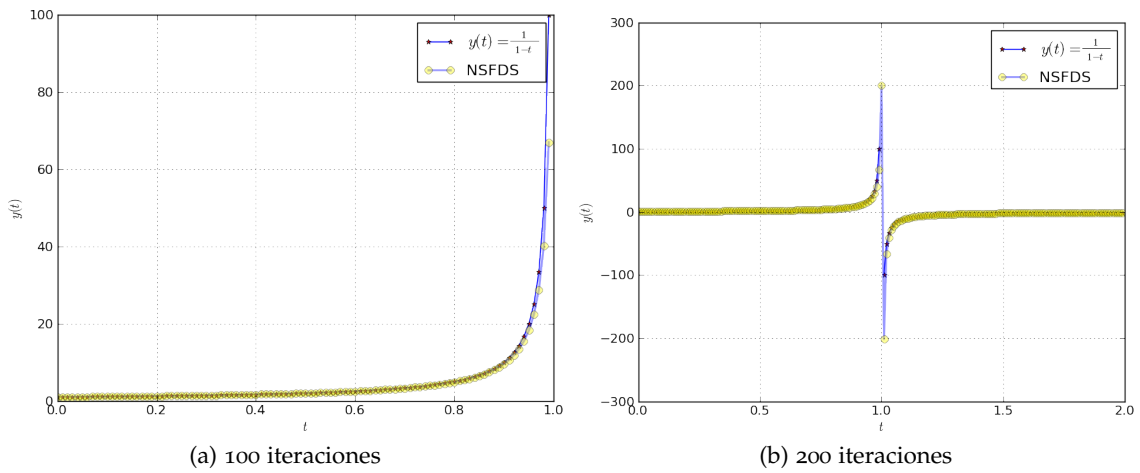


Figura 19: Comparación del esquema (4.58) y (4.56) con tamaño de paso h y distinto numero de iteraciones.

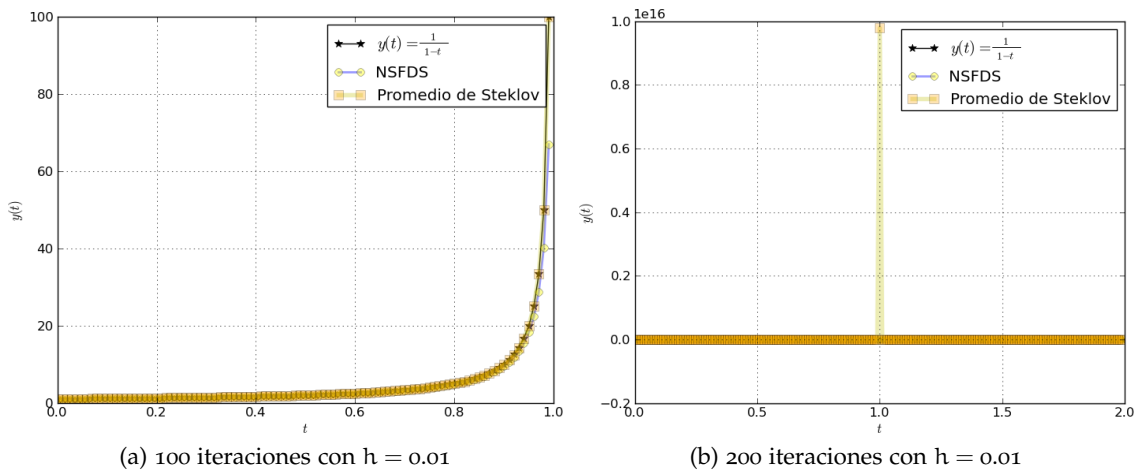


Figura 20: Implementación del esquema (4.60).

Observemos que en el lado derecho de (4.60) se llega a la misma discretización no local de (4.57). La solución que se obtiene con este esquema se compara el esquema muestra en la figura 20. En la figura se observa que al aproximarse a la singularidad, el esquema con esta alternativa es más preciso que (4.58), sin embargo este esquema no reproduce la dinámica en torno a la singularidad en $t = 1$.

Observación 14. A partir de las ecuaciones (4.58) y (4.60), se obtiene respectivamente para y_{k+1} dos esquemas explícitos no estándar

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 - y_k(1 - \exp(-h))}, \quad y_{k+1} = \frac{y_k}{1 - hy_k}$$

esto muestra por qué la segunda alternativa regresa un método con inestabilidad numérica, cerca de $t^* = 1$ ya que la función denominador en (4.60) no satisface las condiciones que enunciamos para ϕ en la pagina 60.

Lo anterior indica que el uso de una regularización para la función denominador en la derivada discreta, tiene mayor influencia en la dinámica del esquema discreto que

el tratamiento no local de los términos no lineales. Obviamente, al involucrar estos dos elementos en un mismo esquema, sería natural esperar mejores resultados. Como es el caso de (4.58).

Ejemplo 3. Este ejemplo nos interesa, pues a partir del esquema que se desarrolla aquí, se construye el método no estándar estocástico que se propone para la simulación de coloides [6].

La ecuación a resolver es

$$\frac{dy}{dt} = -y^3, \quad y(0) = y_0. \quad (4.61)$$

La solución es

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1 + 2y_0^2 t}}. \quad (4.62)$$

A partir de las herramientas de la alternativa 2, se construye el esquema conforme a (4.47), (4.48), resultando en

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = -2 \frac{y_{k+1}^2 y_k^2}{y_{k+1} + y_k}. \quad (4.63)$$

Cabe mencionar, que este mismo método se reporta en [56] para esta misma ecuación pero bajo la alternativa 1.

Observación 15. El esquema (4.63) se puede escribir como

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\phi(h)} = -\frac{y_{k+1}^2 y_k^2}{y_{k+1} + y_k}, \quad (4.64)$$

con $\phi(h) = 2h$. Más aún, este esquema modela el término cubico $-y^3$ de forma no local. Así conforme a la Definición 45, este es un EDFNE. Sin embargo observemos que bajo manipulaciones algebraicas (4.63) se puede escribir como

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{\sqrt{1 + 2y_k^2 h}},$$

que bajo las mismas sustituciones de (4.31) se llega a la solución exacta (4.62). En este contexto el esquema es exacto.

En la figura 21 comparamos las solución numérica con es esquema no estándar (4.64) con la solución exacta (4.62) y el método de Euler Clásico,

$$y_{k+1} = y_k - y_k^3 h, \quad (4.65)$$

con $y_0 = 1$ y distintos tamaños de paso. A simple vista las gráficas indican que el esquema (4.63) no presenta inestabilidades y que la solución numérica coincide con la solución analítica, aún con tamaños de paso relativamente grandes ($h > 1$). por otro lado, como era de esperarse, el método de Euler sólo funciona con pasos pequeños ($h \ll 1$), lo cual confirma nuestra afirmación. En esta parte no consideramos la construcción de la alternativa 1, pues la EDO en cuestión tienen un punto fijo $\bar{y}^{(1)}$ de multiplicad 3 (ver pag. 67).

Dada la utilidad que le daremos a esta construcción, vemos pertinente estudiar sus propiedades de estabilidad, pues haremos una extensión del mismo análisis al esquema no estándar estocástico, que trataremos mas adelante (véase [21]). En esta dirección, recordamos lo elementos básicos de la estabilidad lineal.

La función \mathcal{R} es conocida como la función de estabilidad asociada al método. De (4.67) es claro que $y_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ si y sólo si $|\mathcal{R}(h, \lambda)| < 1$. Al conjunto $S := \{z \in \mathbb{C} : |\mathcal{R}(z)| < 1\}$ se le conoce como región de estabilidad del método.

Si $\mathbb{C}^- \subseteq S$, entonces se dice que el método es A-estable. En otras palabras un método es A-estable, si y solo si, para cualquier valor del parámetro λ en (4.66) tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, implica para el método dado que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0, \forall h > 0. \tag{4.68}$$

De lo anterior resulta fácil demostrar que la región S para el método de Euler es un disco de radio 1 en \mathbb{C} y centrado en $z = -1$.

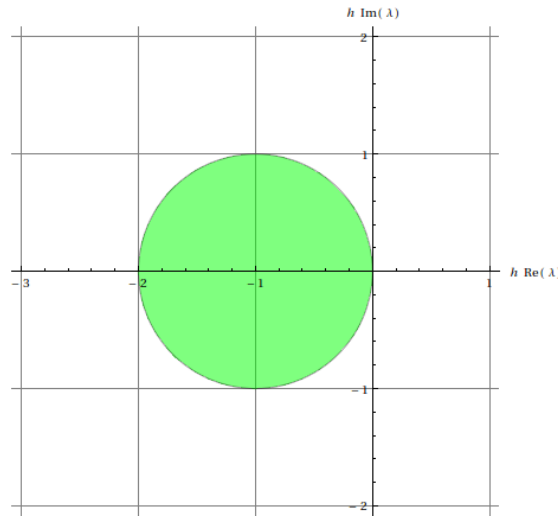


Figura 22: Región de estabilidad para el método de Euler.

Al introducir el parámetro $\lambda \in \mathbb{C}$ en (4.61) obtenemos $\frac{dy}{dt} = -\lambda y^3$. En principio al considerar que el esquema en cuestión es exacto y lo mostrado en la figura 21 sería de esperar que la región de estabilidad del esquema no estándar contenga a la correspondiente región del método de Euler.

En base a las ideas anteriores, estudiamos la estabilidad absoluta de una generalización del esquema (4.64). Partimos de la relación de recurrencia

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{\sqrt{1 + 2\lambda y_k^2 h}}. \tag{4.69}$$

Por la no linealidad del lado derecho en (4.69), consideramos la expansión en serie de Taylor para $g(y_k) = \frac{y_k}{\sqrt{1 + 2\lambda y_k^2 h}}$ entorno al origen

$$g(y_k) = y_k - h\lambda y_k^3 + \mathcal{O}(y^4) \tag{4.70}$$

Truncando a primer orden respecto a h se tiene

$$g(y_k) \approx y_k(1 - \bar{h}y_k^3), \quad \bar{h} = h\lambda. \tag{4.71}$$

Notemos que (4.71) es la ecuación de recurrencia en el método de Euler para (4.61). Esto sugiere que la estabilidad del Método de Euler asociado ya está implícita en el esquema no estándar. Veamos como es esta región de estabilidad.

Como h, λ son fijas y y_0 es dada, en busca de un patrón, iteramos el lado derecho de (4.71) y expresamos todo en términos de \bar{h}, y_0 ,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 (1 - \bar{h}y_0^2) \\ y_2 &= \underbrace{y_0 (1 - \bar{h}y_0^2)}_{\text{anterior}} \left(\underbrace{1 - \bar{h}y_0^2 (1 - \bar{h}y_0^2)^2}_{1 - \bar{h}(\text{anterior})^2} \right) \\ y_3 &= y_0 (1 - \bar{h}y_0^2) \left(1 - \bar{h}y_0^2 (1 - \bar{h}y_0^2)^2 \right) \left(1 - \bar{h}y_0^2 (1 - \bar{h}y_0^2)^2 (1 - \bar{h}y_0^2 (1 - \bar{h}y_0^2)^2)^2 \right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

lo cual corresponde a una recurrencia de la forma $y_{j+1} = y_j(1 - \bar{h}y_j^2)$, vemos que el factor $(1 - \bar{h}y_0^2)$ y potencial de él, está "encajado" en cada término de la recurrencia anterior, esto nos dice que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0 \Leftrightarrow |1 - h\lambda y_0^2| < 1. \quad (4.72)$$

Entonces la función de A-estabilidad para el esquema no estándar es $\mathcal{R}(h\lambda) = 1 - h\lambda y_0^2$. En la figura mostramos la región de estabilidad para (4.63).

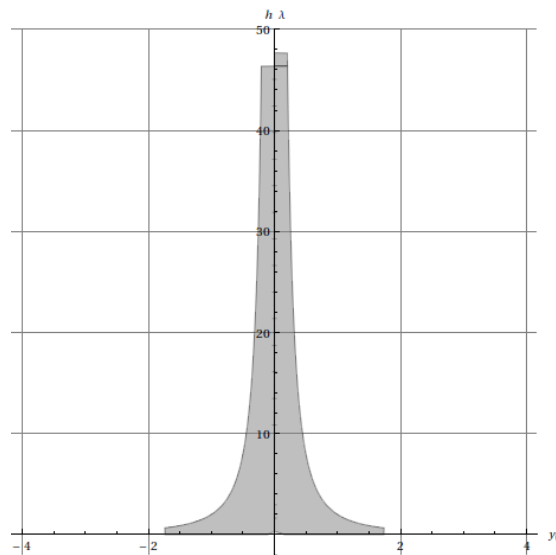


Figura 23: Región de estabilidad lineal para el método de Euler asociado a el esquema (4.69)

Observación 16. Las condiciones de estabilidad absoluta proporcionan una región donde se asegura que el método en cuestión reproduce de forma correcta el comportamiento de la solución exacta cuando $t \rightarrow \infty$. Sin embargo es una región que pide condiciones relativamente fuertes en comparación con otros conceptos de estabilidad,

por ejemplo el de cero-estabilidad o el de estabilidad relativa (véase [38]). La región que hemos presentado corresponde al método de Euler que está implícito en (4.69) esto significa que la región de \mathcal{A} -estabilidad para (4.69) es por lo menos, la presentada.

CONSTRUCCIÓN DEL ESQUEMA EULER-MAYURAMA-MICKENS (EMM)

En este capítulo se construyen métodos numéricos no estándar para ecuaciones diferenciales estocásticas de prueba y se realiza un análisis teórico y numérico de las propiedades de estabilidad y convergencia de dichos métodos. Estudiando la construcción de métodos estándar para EDEs, observamos que la mayoría aproximan la parte determinista de la EDE de la misma forma que los esquemas para EDOs. Es por ello que resulta natural trabajar la parte determinista de las ecuaciones diferenciales estocásticas usando la formulación no estándar para aproximar la EDO asociada a la EDE.

En la [sección 5.1](#) se adapta el método propuesto para las ecuaciones de prueba

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (5.1)$$

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t. \quad (5.2)$$

Así en [sección 5.2](#) se estudia la convergencia y estabilidad del método logrado, a partir de lo expuesto en la [sección 3.4](#).

5.1 CONSTRUCCIÓN DEL ESQUEMA EULER-MAYURAMA-MICKENS

En esta sección se combinan las técnicas observadas en los capítulos 3 y 4, con el fin de construir esquemas que tengan mejores propiedades de estabilidad. En lo que sigue, se considera como ecuación general a resolver, a la EDE autónoma

$$dX_t = \underbrace{f(X_t)dt}_{\text{arrastre}} + \underbrace{g(X_t)dB_t}_{\text{difusión}}, \quad X_0 = x_0 \quad (5.3)$$

la cual se entiende en el sentido de Itô, con f y g tales que satisfacen las hipótesis del [Teorema 7](#) (existencia y unicidad para EDEs), la condición inicial X_0 se supone constante y no nula.

Bajo el objetivo de mejorar la eficiencia del esquema EM dado en (3.24), mediante una discretización no estándar al método obtenido lo llamaremos esquema Euler-Mayurama-Mickens (EMM). Veamos pues la construcción.

Recordando la ecuación del esquema EM

$$X_{j+1} = \underbrace{X_j + f(X_j)\Delta t}_{\text{arrastre}} + \underbrace{g(X_j)\Delta B_j}_{\text{difusión}} \quad (5.4)$$

si consideramos el termino etiquetado con difusión como nulo, se recupera el esquema de Euler determinista

$$X_{j+1} = X_j + f(X_j)\Delta t. \quad (5.5)$$

Entonces, como primer paso para el desarrollo del esquema Euler-Mayurama-Mickens, resolvemos bajo una discretización no estándar la EDO asociada a la EDE (5.3)

$$dX_t = f(X_t)dt, \quad X_0 = x_0, \quad (5.6)$$

y el esquema en diferencias no estándar siguiente

$$X_{j+1} = \phi(X_j, t_j, t_{j+1}), \quad X_0 = \phi(x_0, t_0, t_0), \quad (5.7)$$

se determina de acuerdo a las reglas de formulación vistas en el capítulo anterior.

Observación 17. Dependiendo de la forma que tome f , y el camino que se siga con las reglas de la formulación no estándar, se obtendrá diferentes esquemas para resolver la parte del "arrastre" en la ecuación (5.3).

Presentamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4. Con lo mencionado, se construye un esquema EMM para la ecuación

$$dX_t = \underbrace{\mu X_t dt}_{\text{arrastre}} + \lambda X_t dB_t, \quad X_0 = x_0. \quad (5.8)$$

Nos interesa esta ecuación, porque tenemos la solución exacta a partir de las proposición ??, lo cual nos servirá para estudiar la convergencia y estabilidad como en el capítulo 3. Considerando solo la parte determinista, construimos un EDFNE para

$$dX_t = \mu X_t, \quad X_0 = x_0, \quad \mu > 0 \quad (5.9)$$

Ya hemos construido el algoritmo no estándar en cuestión, procediendo como en (4.52) y (4.53) para (5.9) se obtiene

$$X_{j+1} = X_j(1 + \mu\phi(\Delta t)), \quad (5.10)$$

entonces, reemplazando el termino de arrastre de la ecuación (5.4) por (5.10), el esquema EMM para resolver (5.8) es

$$X_{j+1} = X_j(1 + \mu\phi(\Delta t))\Delta t + \lambda X_j \Delta B_j. \quad (5.11)$$

En la figura 24 se comparan la implementación de (5.11) con el correspondiente EM y la solución exacta de la ecuación

$$dX_t = X_t dt + \frac{\sqrt{3}}{3} X_t dB_t, \quad X_0 = 1, \quad (5.12)$$

con $\phi(\Delta t) = \frac{1 - \exp(-\mu\Delta t)}{\mu}$ y distintos tamaños de Δt . Las gráficas muestran que para tamaños grandes de Δt , a diferencia del método EM, el esquema EMM reproduce correctamente la estabilidad, sin embargo, para Δt menores que 1.0 los esquemas se comportan de forma similar.

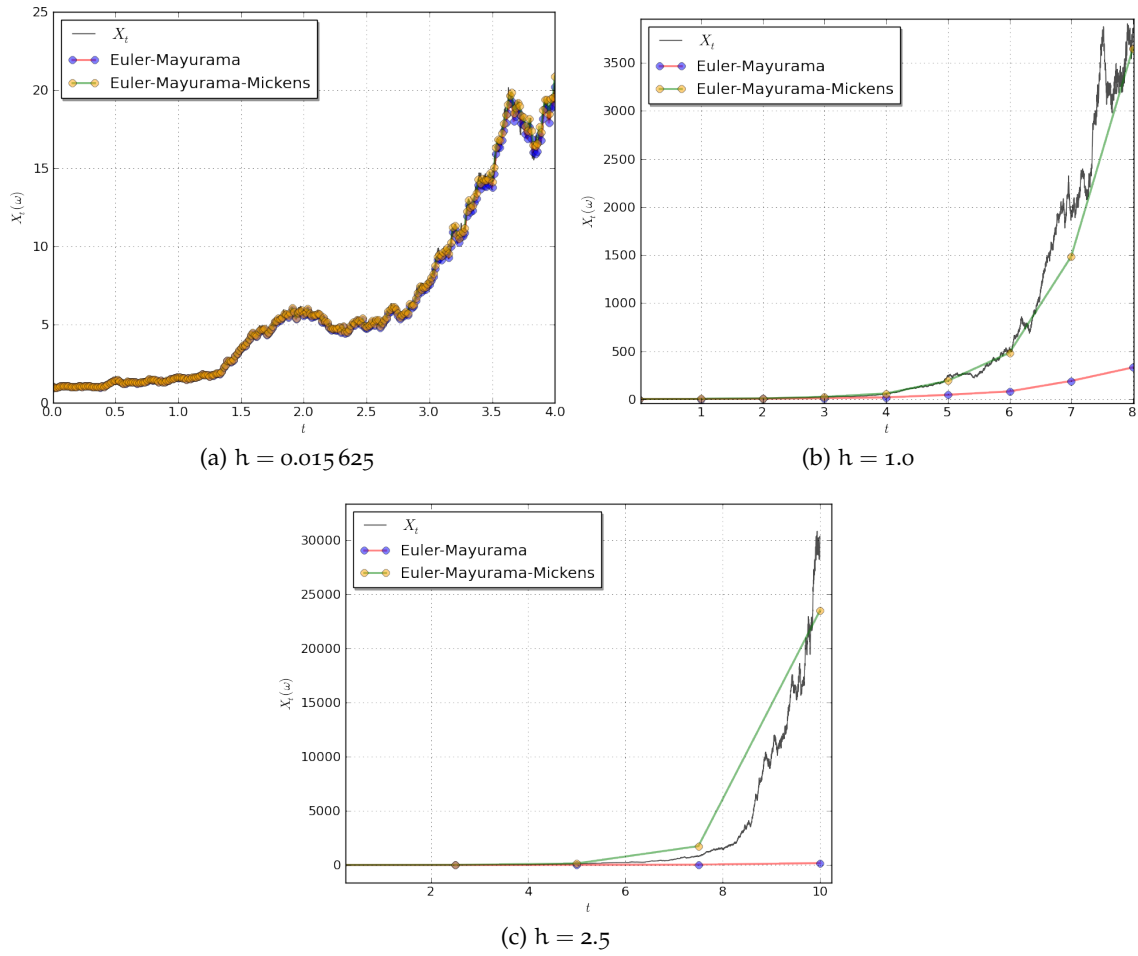


Figura 24: Comparación del esquema (5.11) y el EM para la solución de (5.11), con condición inicial $X_0 = 1$, y con distintos tamaños de paso Δt .

Observación 18. En la figura 24 cada gráfica se obtuvo de realizaciones distintas del movimiento Browniano, lo cual explica las diferentes escalas e intervalos de tiempo.

Ejemplo 5. Consideramos ahora otro ejemplo con solución exacta y para el cual ya tenemos la parte determinista resuelta. La ecuación a trabajar es

$$dX_t = -X_t^2 dt + X_t dB_t \tag{5.13}$$

Para resolver (5.13) se sigue un análogo a la técnica de factor integrante para EDOs [50]. Sea $F_t = \exp(-B_t + \frac{1}{2}t)$, se define $Y_t = F_t X_t$, entonces $f(t, X_t) = X_t^2$ implica

$$f(t, F_t^{-1} Y_t) = \exp(2B_t - \frac{1}{2} Y_t)^2,$$

por lo tanto, ahora se resuelve $dY_t = F_t f(t, X_t) dt$, con $X_t = F_t^{-1} Y_t$. La cual resulta ser una ecuación ordinaria respecto a Y_t para cada ω fijo en $Y_t = Y_t(t, \omega)$, y su solución es

$$X_t = F_t^{-1} \left((X_0 F_0)^{-1} - \int_0^t \exp(B_s - \frac{1}{2} s ds) \right)^{-1}, \quad F_0 = \exp(-B_0). \tag{5.14}$$

Ahora, reescribimos (4.58) despejando X_{j+1}

$$X_{j+1} = \frac{X_j}{1 + \phi(\Delta t)X_j}, \quad (5.15)$$

entonces reemplazando el término de arrastre en (5.4), por (5.15), resulta el esquema EMM

$$X_{j+1} = \frac{X_j}{1 + \phi(\Delta t)X_j} \Delta t + X_j \Delta B_j. \quad (5.16)$$

La figura 25 muestra el comportamiento del esquema (5.16) con $\phi(\Delta t) = 1 - \exp(-\Delta t)$, frente a la solución exacta de (5.13) y una condición inicial $y_0 = 10.0$, como se observa el esquema EMM reproduce mejor la dinámica de la ecuación de prueba que el método EM.

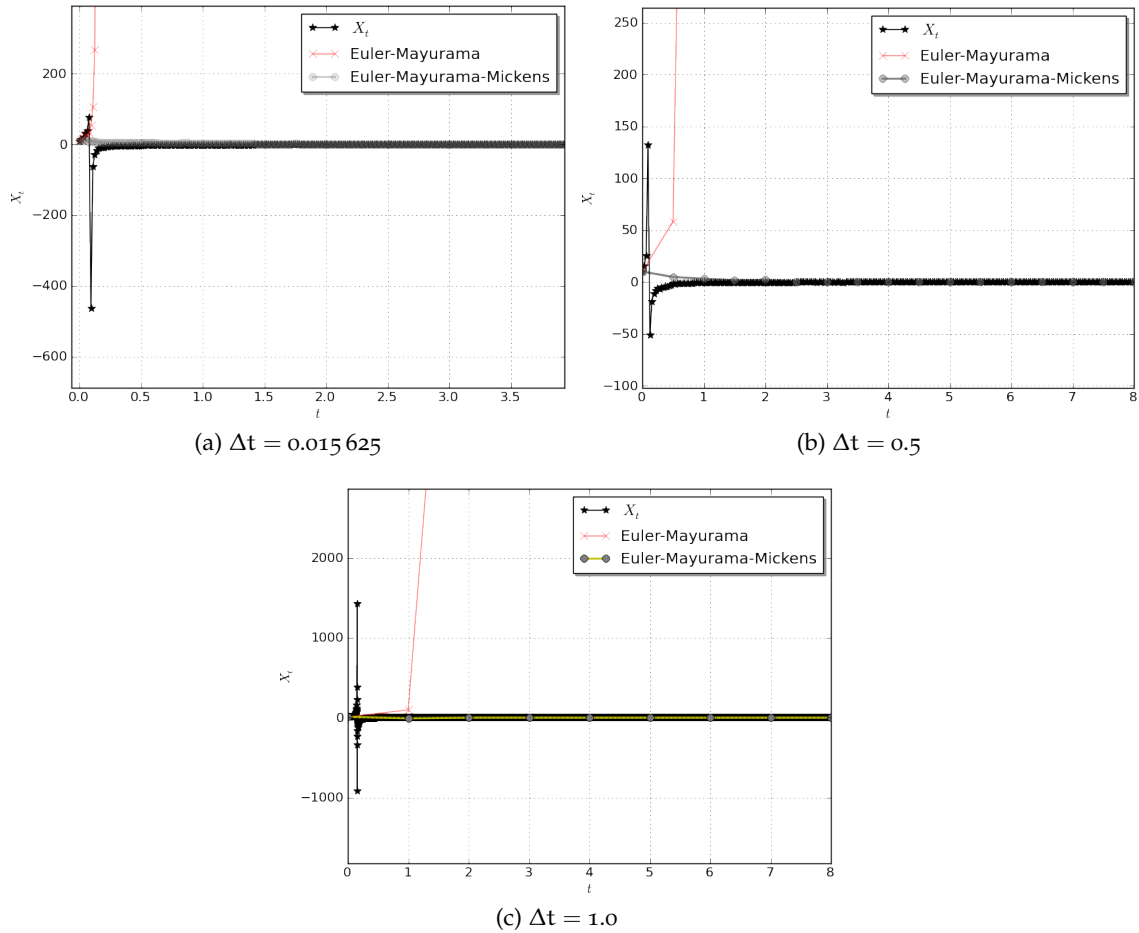


Figura 25: Comparación del esquema (5.16) con el método EM, ambos para la EDE (5.13), con $X_0 = 1$ y distintos tamaños de paso Δt .

Ejemplo 6. Consideramos una ecuación con ruido aditivo con el mismo término de arrastre que en

$$dX_t = -X_t^3 dt + dB_t. \quad (5.17)$$

Al igual que en el ejemplo 4, primero resolvemos numéricamente la parte determinista de acuerdo a las reglas de la formulación no estándar. Recordamos que en el ejemplo 3 ya está logrado el EDFNE. Bajo manipulaciones algebraicas se obtiene

$$\frac{X_{j+1} - X_j}{\phi(h)} = -\frac{X_{j+1}^2 X_j^2}{X_{j+1} + X_j}, \quad (5.18)$$

despejando X_{j+1} , de (5.18) se tiene

$$X_{j+1} = \frac{X_j}{\sqrt{1 + \phi(\Delta t) X_j^2}}. \quad (5.19)$$

Entonces reemplazando el término de arrastre en el método EM, (5.4), resulta el esquema EMM para (5.17)

$$X_{j+1} = \frac{X_j}{\sqrt{1 + \phi(\Delta t) X_j^2}} \Delta t + \Delta B_j. \quad (5.20)$$

Para examinar el comportamiento de este esquema, en la figura 26 se compara con el esquema SRKII adaptado a (5.17). Dado que no contamos con solución analítica para (5.17) el fin de la comparación es solo para mostrar el comportamiento similar de ambos esquemas.

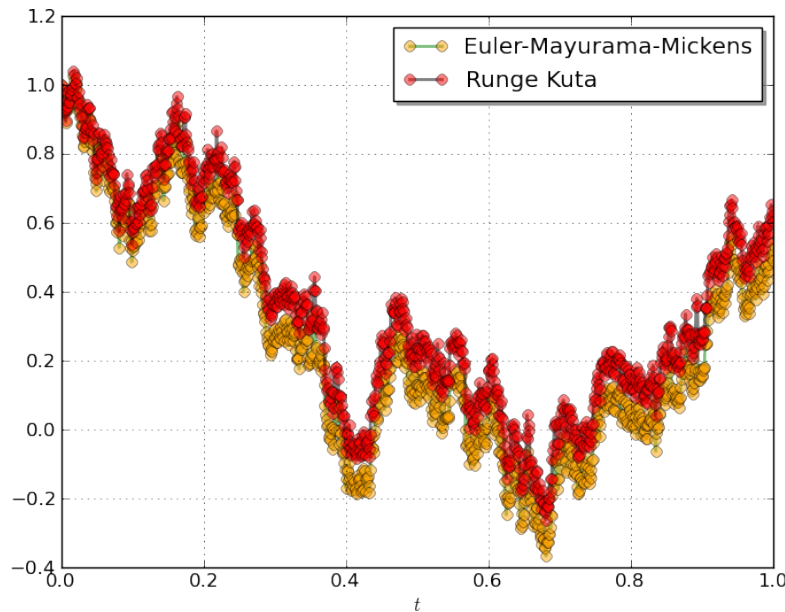


Figura 26: Comparación de los esquemas EMM y SRKII para (5.17), con $X_0 = 1$ y un tamaño de paso $\Delta t = 0.0625$.

5.2 ESTUDIO DE ESTABILIDAD DE EMM

5.2.1 Estabilidad en el caso de ruido multiplicativo.

Ahora estudiamos la estabilidad del método EMM en base a lo propuesto en la sección 3.4. En este estudio es necesario hacer la diferencia entre el tipo de ruido en la

ecuación estocástica. Es por ello que en este apartado realizamos el análisis para el caso multiplicativo.

$$dX_t = \mu X_t dt + \lambda X_t dB_t, \quad X_0 = x_0 \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C} \quad (5.21)$$

nos interesa conocer para que valores de los parámetros μ, λ el método numérico **EMM** reproduce correctamente la estabilidad de (5.21). En el capítulo 3 se obtuvo que (5.21) es estable si

$$2\text{Re}(\mu) + |\lambda|^2 < 0.$$

Por otra parte al aplicar el esquema (5.11) a (5.21) se tiene que

$$\begin{aligned} X_{j+1} &= X_j + (\mu X_j \phi(\Delta t)) + \lambda X_j \Delta B_j \\ &= (1 + \mu \phi(\Delta t) + \lambda \Delta t^{\frac{1}{2}} V_j) X_j. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Por claridad del estudio se definen

$$a := 1 + \mu \phi(\Delta t), \quad b := \lambda \Delta t^{\frac{1}{2}} \quad \text{y } V_j \sim N(0, 1). \quad (5.23)$$

Entonces de acuerdo a (5.22),

$$X_{j+1} = (a + b V_j) X_j, \quad (5.24)$$

luego el **Lema 2** implica que

$$\mathbb{E}(|X_j|^2) = (|a|^2 + |b|^2)^j \mathbb{E}(|X_0|^2). \quad (5.25)$$

Entonces, dados μ, λ el esquema **EMM** regresara una solución estable, si y solo si,

$$|1 + \mu \phi(\Delta t)|^2 + |\lambda|^2 (\Delta t) < 1. \quad (5.26)$$

Suponiendo μ, λ como reales y $\phi(\Delta t) = 1 - \exp(-\Delta t)$, en la **figura 27** se muestra la región de MC-estabilidad para el método **EMM**. Además, en la misma figura se presenta la región de estabilidad de la ecuación estocástica (5.21). En esta figura las coordenadas (x, y) representan $(\phi(\Delta t)\mu, \Delta t\lambda)$. Es familiar notar que para el método **EM** la región de estabilidad sea un círculo, pues en el caso determinista pasa lo mismo el esquema **EMM** tiene una región de estabilidad que incluye la región de la ecuación de prueba (5.21). Por otra parte, considerando

$$dX_t = -3X_t dt + \sqrt{3}X_t dB_t, \quad X_0 = 1, \quad (5.27)$$

en la **figura 28** se puede observar que el esquema **EMM** sí reproduce la estabilidad en media cuadrática para los tres tamaños de paso, lo cual es congruente con la **figura 27**. Recordemos que la solución de una **EDE** X_t es estable en media cuadrática si $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_t|^2) = 0$.

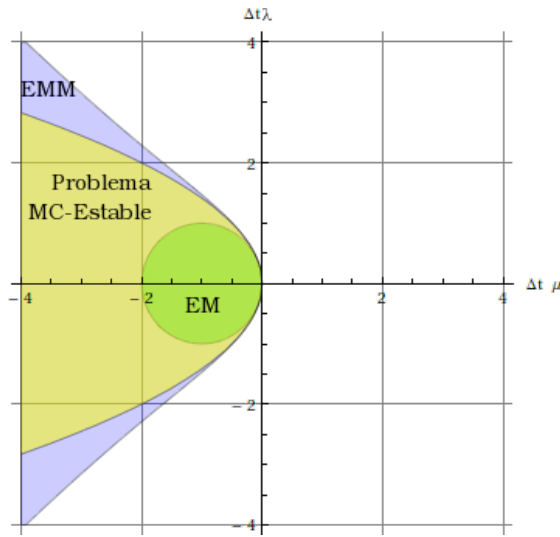


Figura 27: Región de estabilidad para la ecuación (5.21) y el método EMM.

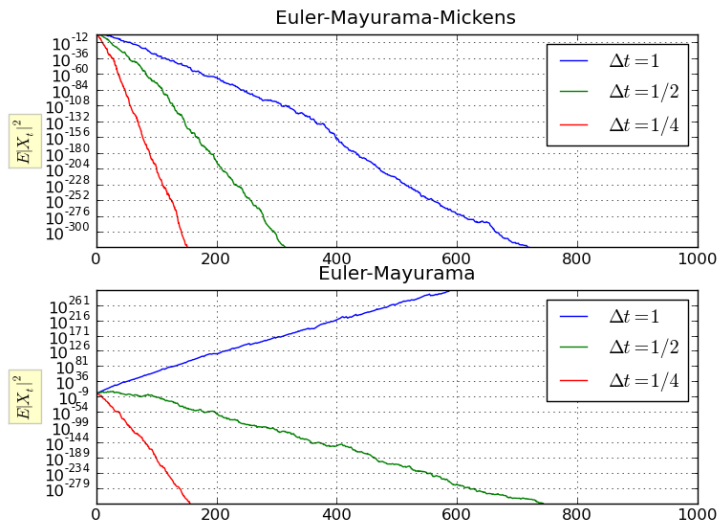


Figura 28: Comparación de la estabilidad en media cuadrática para los esquemas EMM y EM de la ecuación (5.27) con $X_0 = 1$, en $[0, 1000]$ y distintos tamaños de paso Δt .

5.2.2 Convergencia en el caso de ruido multiplicativo

Para examinar el orden de convergencia, procedemos como en la sección 3.4. Trabajamos con

$$dX_t = 2X_t dt + X_t dB_t, \quad X_0 = 1. \tag{5.28}$$

Dado que conocemos la solución exacta de (5.28) podemos calcular el valor esperado del error a tiempo final T para diferentes tamaños de paso temporal Δt y ajustar por mínimos cuadrados una curva que nos de idea de la razón con la que se gana

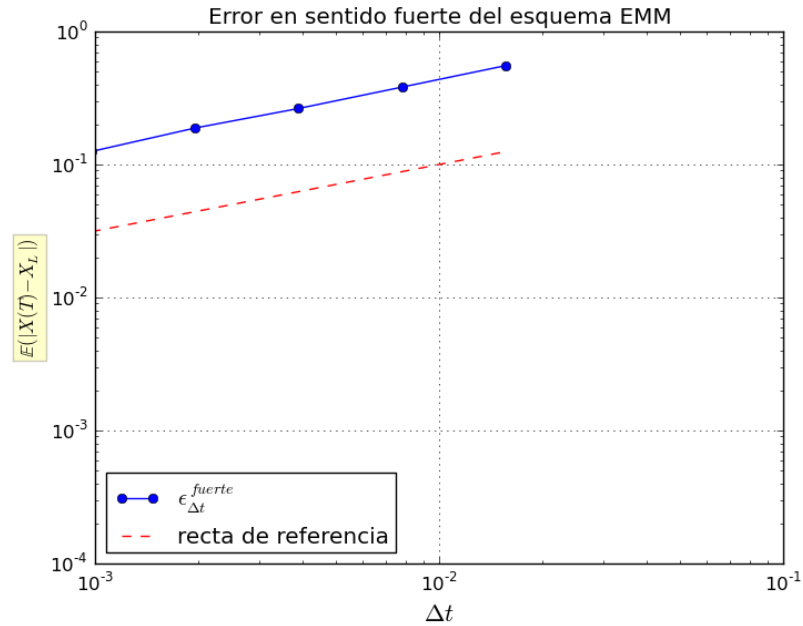


Figura 29: Comparación del error en sentido fuerte a tiempo fina $T = 1$ y una recta con pendiente de referencia $\frac{1}{2}$

| Δt | $\mathbb{E} X(T) - X_L $ |
|--------------|--------------------------|
| 0.000 976 56 | 0.133 214 27 |
| 0.001 953 12 | 0.183 897 67 |
| 0.003 906 25 | 0.243 614 71 |
| 0.007 812 50 | 0.340 933 73 |
| 0.015 625 00 | 0.492 523 29 |

Tabla 2: Error en sentido fuerte con varios tamaños de paso. Los promedios se tomaron sobre 50 000 realizaciones de la solución numérica

precisión. Recordemos que la solución numérica X_n que se obtienen con un método dado, converge a la solución X con un orden fuerte γ , si para cualesquiera $t_n = n\Delta t \in [0, T]$, $n = 1 \dots N$ fijo, y Δt suficientemente pequeño existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mathbb{E}(|X_n - X(t_n)|) \leq C\Delta t^\gamma.$$

Dado que el esquema EMM se deriva de un EM esperamos que tengan los mismos ordenes de convergencia. En la figura 29 se muestra la gráfica de error correspondiente a la Tabla 2. Para observar el orden de convergencia fuerte del esquema EMM para (5.28), se asume que el error cumple una relación exponencial $\epsilon_{\Delta t}^{\text{fuerte}} = C(\Delta t)^q$ y se muestra la existencia de C, q a partir del ajuste de mínimos cuadrados.

Al hacer el ajuste para los datos de la [Tabla 2](#) se obtuvo $\log C = 1.20485544$, $q = 0.46634748$ y un residuo de 0.0474662651542 , lo cual es congruente con el argumento anterior.

5.2.3 Estabilidad en el caso de ruido aditivo

Consideremos el esquema [EMM](#) para la ecuación [\(3.58\)](#) dado por

$$X_{j+1} = (1 + \mu\phi(\Delta t))X_j + \lambda\Delta B_j, \quad (5.29)$$

donde $\Delta B_j = \sqrt{\Delta t}V_j$ con $V_j \sim N(0, 1)$. Al calcular el valor esperado de X_{j+1} [\(5.29\)](#)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{j+1}) &= (1 + \mu\phi(\Delta t))\mathbb{E}(X_j) + \sqrt{\Delta t}\lambda\mathbb{E}(V_j) \\ &= (1 + \mu\phi(\Delta t))\mathbb{E}(X_j). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Entonces iterando [\(5.30\)](#) para $X_j, X_{j-1} \dots X_0$

$$\mathbb{E}(X_{j+1}) = (1 + \mu\phi(\Delta t))^{j+1}\mathbb{E}(X_0). \quad (5.31)$$

Bajo la [Definición 41](#) y adaptando el [Teorema 8](#), formulamos el siguiente resultado.

Proposición 28. *El esquema [EMM](#) para la ecuación de prueba [\(3.58\)](#) es estable en media si*

$$|1 + \mu\phi(\Delta t)| < 1. \quad (5.32)$$

Demostración. Notemos que si $\phi(\Delta t) = \Delta t$, de acuerdo al [Teorema 8](#), se recupera la misma condición de estabilidad para el método de Euler determinista. La prueba es usar la [Definición 41](#) y el resultado mencionado a [\(5.29\)](#). \square

Siguiendo la [Definición 42](#) bajo el [Teorema 9](#) enunciamos el siguiente resultado.

Proposición 29. *Si un método Euler-Mayurama-Mickens para [\(3.58\)](#) es estable en media, i. e., satisface $|1 + \mu\phi(\Delta t)| < 1$, entonces el esquema es asintóticamente consistente en media cuadrática.*

Demostración. Consideremos la media cuadrática de la solución numérica con el método [EMM](#) [\(5.29\)](#), se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_{j+1}|^2) &= \mathbb{E}(|X_{j+1}| \overline{|X_{j+1}|}) \\ &= |1 + \mu\phi(\Delta t)|^2 \mathbb{E}(|X_j|^2) + |\lambda|^2 \Delta t. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Para simplificar la expresión, definimos $\alpha = |1 + \mu\phi(\Delta t)|$. Iteramos [\(5.33\)](#) para $\{X_j, X_{j-1}, \dots, X_1\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_{j+1}|^2) &= \alpha^2(\alpha^2 \mathbb{E}(|X_{j-1}|^2) + |\lambda|^2 \Delta t) + |\lambda|^2 \Delta t \\ &= \alpha^4 \mathbb{E}(|X_{j-1}|^2) + (\alpha^2 + 1)|\lambda|^2 \Delta t \\ &\vdots \\ &= \alpha^{2(j+1)} \mathbb{E}(|X_0|^2) + \underbrace{(\alpha^{2j} + \dots + \alpha^2 + 1)}_{\text{serie geométrica para } \alpha^2} |\lambda|^2 \Delta t \\ &= \alpha^{2(j+1)} \mathbb{E}(|X_0|^2) + \frac{\alpha^{2(j+1)} - 1}{\alpha^2 - 1} |\lambda|^2 \Delta t. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Desarrollando $|1 + \mu\phi(\Delta t)|^2 = 1 + 2\text{Re}(\mu)\phi(\Delta t) + |\mu|^2\phi(\Delta t)^2$, conforme a (5.34)

$$|1 + \mu\phi(\Delta t)|^{2(j+1)}\mathbb{E}(|X_0|^2) + \frac{|1 + \mu\phi(\Delta t)|^{2(j+1)} - 1}{(2\text{Re}(\mu) + |\mu|^2\phi(\Delta t))\phi(\Delta t)}|\lambda|^2\Delta t. \quad (5.35)$$

Entonces el método EM (5.29) es estable en media para la la (3.58) si

$$\mathbb{E}(|X_j|^2) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{-|\lambda|^2\Delta t}{(2\text{Re}(\mu) + |\mu|^2\phi(\Delta t))\phi(\Delta t)}. \quad (5.36)$$

Dado que para $\Delta t \rightarrow 0$, se cumple $\phi(\Delta t) = \Delta t + O(\Delta t)^2$ de (5.36)

$$\frac{-|\lambda|^2\Delta t}{(2\text{Re}(\mu) + |\mu|^2\phi(\Delta t))\phi(\Delta t)} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{|\lambda|^2}{2\text{Re}(\mu)}. \quad (5.37)$$

□

Veamos la estabilidad de un esquema particular EM para (5.29). Sean $\mu < 0$ y $\phi(\Delta t) = \frac{\exp(\mu\Delta t) - 1}{\mu}$ en el método mencionado. Entonces $\forall \Delta t > 0$ se cumple

$$\left| 1 + \mu \left(\frac{\exp(\mu\Delta t) - 1}{\mu} \right) \right| < 1 \\ |\exp(\mu\Delta t)| < 1, \quad (5.38)$$

ya que la función exponencial es positiva en \mathbb{R} se sigue

$$\exp(\mu\Delta t) < 1 \\ \mu\Delta t < \log(1) = 0, \quad (5.39)$$

por lo tanto, de acuerdo al Teorema 9 el esquema EMM para este caso particular es asintóticamente consistente en media cuadrática para todo $\Delta t > 0$. Esto nos sugiere hacer la siguiente conjetura: Sean S_{EM} , S_{EMM} las regiones de estabilidad de los esquemas EM, EMM respectivamente, dada una EDE de ruido aditivo que satisfaga las condiciones del teorema de existencia y unicidad, entonces las regiones mencionadas cumplen con

$$S_{EM} \subseteq S_{EMM} \quad (5.40)$$

Observación 19. En este apartado hemos omitido el análisis del orden de convergencia débil de las EDEs con ruido multiplicativo y los dos correspondientes ordenes de convergencia para EDEs con ruido aditivo. La principal razón de esto último yace en que, resultan inmediatos de lo expuesto. Con esto nos referimos a que el esquema EMM tienen un orden de convergencia débil $\beta = 1$ y que ambos órdenes quedan invariantes al considerar EDEs aditivas.

 RESULTADOS

En este capítulo adaptamos el método [EMM Ecuación 5.20](#) para la ecuación de Langevin [\(1.1\)](#), la cual modela el movimiento de una partícula coloidal suspendida en un solvente. Se estudian las propiedades teóricas del método [EMM](#) desarrollado para un potencial $U(x) = \frac{kx^4}{4}$ y finalmente cerramos el capítulo presentando los resultados que obtuvimos con este nuevo método, siguiendo la metodología de validación empleada en el trabajo de Branka y Heyes [\[6\]](#).

6.1 CONSTRUCCIÓN DEL MÉTODO EMM PARA LA ECUACIÓN DEL LANGEVIN

Recordemos la ecuación de Langevin que modela el coluido de una sola partícula en una dimensión

$$\frac{dX_t}{dt} = \beta DF + D^{\frac{1}{2}} \xi, \quad X_0 = x_0. \quad (6.1)$$

donde $\beta = \frac{1}{k_B T}$, (k_B es la constante Boltzmann), T es la temperatura, $F = -\frac{dU}{dx}$ es la fuerza que actúa sobre la partícula, D es la constante de difusión y ξ es un ruido blanco Gaussiano. Para usar la notación del [capítulo 5](#) reescribimos [\(6.1\)](#) como

$$dX_t = \beta DF dt + D^{\frac{1}{2}} dB_t \quad (6.2)$$

dada la naturaleza de ξ aquí hemos usado $\xi dt = dB_t$. Bajo los pasos de construcción de [EDFNE](#) de la [sección 5.1](#) primero construimos un [MDFNE](#) para el problema problema de valor inicial ([PVI](#)) determinista

$$\frac{dX_t}{dt} = \beta DF, \quad X_0 = x_0. \quad (6.3)$$

La forma del potencial U determina la formulación del algoritmo no estándar siguiente

$$\frac{X_{j+1} - X_j}{\phi(\Delta t)} = G(X_j, \lambda, \Delta t) \quad (6.4)$$

donde λ engloba los parámetros involucrados en [\(6.3\)](#) y G resulta de aplicar alguna de las alternativas usadas en el capítulo 5 (esquemas tipo Mickens o promedio de Steklov). Por lo tanto el [EMM](#) general para la ecuación de Langevin [\(6.1\)](#) toma la forma

$$X_{j+1} = X_j + \phi(\Delta t)G(X_j, \lambda, \Delta t) + D^{\frac{1}{2}} dB_t \quad (6.5)$$

Ahora si consideramos un potencial de la forma $U(x) = -\frac{kx^4}{4}$ y al sustituirlo en (6.2) se sigue

$$dX_t = -k\beta DX_t^3 dt + D^{\frac{1}{2}} dB_t, \quad (6.6)$$

el esquema EMM resultante a partir del promedio de Steklov es para (6.6) es (ver ejemplo 6).

$$X_{j+1} = \frac{X_j}{\sqrt{1 + 2k\beta D\Delta t X_j^2}} \Delta t + \Delta B_j. \quad (6.7)$$

6.2 PROPIEDADES TEÓRICAS DE UN ESQUEMA EMM PARA EL POTENCIAL $U = -\frac{1}{4}x^4$

El esquema no estándar (6.7), lo hemos construido a partir de la formulación general del método EM. En general la formulación no estándar deja invariante el orden de convergencia propiedad, por esto mismo esperamos que el esquema no estándar (6.7) gane precisión a la misma velocidad que el correspondiente EM.

Por otra parte recordemos que en la pag. 67 estudiamos la estabilidad lineal de la EDO asociada a la ecuación de Langevin (6.6) y construimos un esquema no estándar para esta parte, el cual resulto exacto. En esta dirección esperamos que el esquema EMM (6.7) sea mas estable que el correspondiente EM.

De acuerdo a el trabajo [21] adaptamos la siguiente definición.

Definición 47. Un algoritmo EMM para la ecuación de prueba (3.58) es A -estable si su correspondiente función de estabilidad \mathcal{R} mapea a cada $z \in \mathbb{C}^-$ en el disco unitario complejo.

Teorema 12. El método EMM es A -estable si y sólo si, lo es su componente determinista.

Demostración. Para fijar notación, sea

$$dX_t = f(X_t)dt + \gamma dB_t \quad X_0 = x_0 \quad (6.8)$$

con γ, x_0 constantes complejas. Siguiendo la construcción del esquema EMM, supon- gamos que

$$\frac{X_{k+1} - X_k}{\phi(\Delta t)} = \Phi(X_k, \lambda, \Delta t), \quad (6.9)$$

es el esquema no estándar que resuelve $\frac{dX_t}{dt} = f(X_t)$ y como hipótesis directa, que dicho esquema es A -estable. Reescribiendo (6.9)

$$X_{k+1} = \phi(\Delta t)\Phi(X_k, \lambda, \Delta t) + X_k, \quad (6.10)$$

y por consiguiente

$$X_{j+1} = \phi(\Delta t)\Phi(X_j, \lambda, \Delta t) + X_j + \gamma\Delta B_j \quad (6.11)$$

es el esquema [EMM](#) que resuelve (6.8). Para simplificar notación definamos

$$A(X_k) = \phi(\Delta t)\Phi(X_k, \lambda, \Delta t) + X_k. \quad (6.12)$$

Entonces reescribiendo (6.11)

$$X_{j+1} = A(X_j) + \gamma\Delta B_j. \quad (6.13)$$

De [2] sabemos que una condición necesaria para que la solución de (6.8) X_t sea asintóticamente estable en media cuadrática, es que sea estable en media, es decir $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_t) = 0$. En este contexto, al calcular la media de (6.13) se tiene

$$\mathbb{E}(X_{j+1}) = \mathbb{E}(A(X_j)) + \gamma\mathbb{E}(B_j), \quad (6.14)$$

que por propiedades del movimiento Browniano resulta en

$$\mathbb{E}(X_{j+1}) = \mathbb{E}(A(X_j)). \quad (6.15)$$

Notemos que $A(X_k)$ es determinista, y que el término de difusión es independiente de X_j , por lo tanto de la hipótesis directa se tiene la conclusión. Recíprocamente, su pongamos que el esquema [EMM](#) (6.13) para la ecuación (6.8) es A -estable. Entonces, de acuerdo al método [EMM](#)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_j|^2) = 0. \quad (6.16)$$

Sin embargo, recordemos que la convergencia en media cuadrática implica la convergencia en media (ver [Proposición 12](#)) entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_j|) = \lim_{j \rightarrow \infty} A(X_j) = 0. \quad (6.17)$$

Por lo tanto, la componente determinista del esquema [EMM](#) (6.13) es A -estable. \square

En [21], bajo este mismo argumento se menciona que en general, la estabilidad de un método numérico para una [EDE](#) con ruido aditivo esta determinada por su componente determinista. En base a esto, podemos afirmar que la estabilidad del [EMM](#) estará determinada por el esquema no estándar correspondiente al término de arrastre, y que en comparación con el método [EM](#), el [EMM](#) es más estable.

Más aún, recordemos que el método [EMM](#) (6.7) resuelve la parte determinista de la ecuación de Langevin (6.6) de manera exacta. Esto nos hace afirmar que, el [EMM](#) trabajará con tamaños de paso Δt para los cuales el esquema [EM](#) se comporta de forma inestable. Veamos pues si estas afirmaciones son ciertas.

6.3 CANTIDADES FÍSICAS DE INTERES

La investigación de propiedades físicas en suspensiones coloidales en sus versiones dimensionales 1D, 2D y 3D, ha sido un campo de investigación de interés en las partes científica e industrial, pues el entender y manipular las propiedades mencionadas, da lugar a una gran gama de posibles aplicaciones científicas y tecnológicas. Sin embargo, debido a los alcances de este trabajo solo hablaremos de las propiedades dinámicas para dejar como trabajo futuro a las propiedades estructurales.

6.3.1 Propiedades dinámicas

Una de las cantidades de mayor interés para suspensiones coloidales homogéneas de partículas interactuantes es el coeficiente de difusión a tiempos largos, el cual caracteriza la movilidad de las partículas. En base a este coeficiente es posible deducir si el sistema se encuentra en un estado líquido o cristalino. Sin embargo, la cantidad más simple que caracteriza el movimiento de una sola partícula Browniana es su desplazamiento cuadrático medio (DCM), al que se suele representar por $W(t)$ y definido como

$$W(t) = \langle |r(t) - r(t_0 = 0)|^2 \rangle, \quad (6.18)$$

donde $r(t)$ es el vector de posición de la partícula Browniana a un cierto tiempo t . Para el caso de suspensiones coloidales con partículas interactuantes se debe tener cuidado con las diferentes escalas de tiempos asociadas al sistema. Para tiempos muy pequeños $W(t) \sim t^2$, mientras que para tiempos largos, $W(t) \sim t$, donde la dependencia lineal es el resultado de muchas colisiones estadísticamente independientes del coloide con las moléculas del solvente en el cual está inmerso. Para calcular las propiedades dinámicas del sistema se usa el método de dinámica Browniana a un escala difusiva caracterizada por el coeficiente de difusión a tiempos largos D_s^l . Es importante notar que el coeficiente de difusión es una cantidad macroscópica, mientras que $W(t)$ tiene una interpretación de carácter microscópico: *es el desplazamiento relativo al cuadrado que en promedio recorre una partícula "etiquetada" durante un cierto intervalo de tiempo*. El desplazamiento cuadrático medio puede calcularse en una simulación a través de la siguiente expresión, [14, 23]

$$W(t) = \langle r^2(t) \rangle = \frac{1}{NN_0} \sum_{i=1}^N \sum_{t_0=1}^{N_0} |r_i(t_0 + t) - r_i(t_0)|^2, \quad (6.19)$$

donde el promedio se lleva a cabo sobre las N partículas y sobre todos los orígenes temporales N_0 contenidos en el intervalo de tiempo total t_{max} , de tal forma que se logre el mejor muestreo para el desplazamiento cuadrático medio para la distancia recorrida por la partícula durante el tiempo total t_{max} . A continuación se hace énfasis en algunos detalles del cálculo que no son evidentes en (6.19).

Consideremos una sola partícula que tiene como coordenadas iniciales $r_{t_0} = (x_0, y_0)$ a un tiempo $t = 0$ y desplazamientos sucesivos como se muestra en la figura 30. Para calcular $W(t)$ para ésta partícula, primero se debe tener en cuenta la suma sobre todos los desplazamientos relativos que involucren una separación de un paso en el tiempo Δt después de esto, debemos contar los desplazamientos para $2\Delta t$ y así sucesivamente, hasta cubrir todo el rango dado por el tiempo máximo $t_{max} = 5\Delta t$.

Para ordenar la información sea $r(t_i) = r_i$, entonces de lo anterior se construye Tabla 3. De esta tabla se observa que la cantidad de información para calcular el valor esperado de la contribución en tiempos largos es mucho menor que en los tiempos iniciales e intermedios, por lo cual, para estos tiempos siempre se tiene una mala estadística. Por esto es deseable que los esquemas que se apliquen para integrar las ecuaciones de Langevin sean estables a tiempos largos, pues esto se traduce a un costo computacional menor.

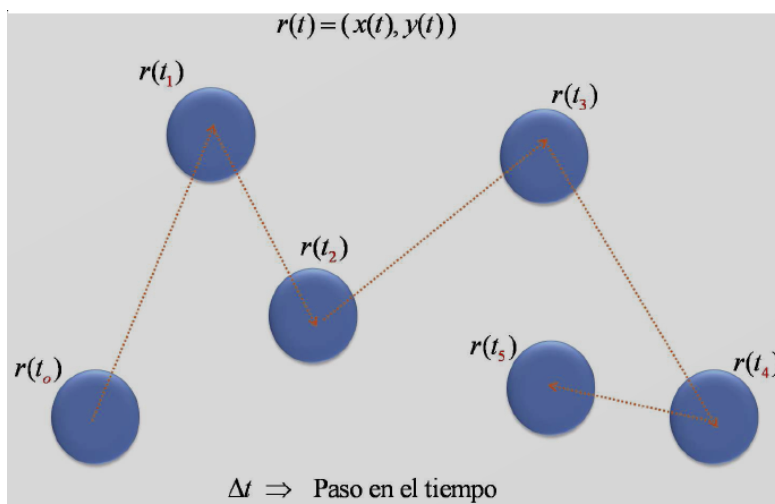


Figura 30: Desplazamientos sucesivos de una partícula. Entre cada desplazamiento existe un diferencia de un paso en el tiempo Δt .

| Δt | $2\Delta t$ | $3\Delta t$ | $4\Delta t$ | $5\Delta t$ |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $r_1 - r_0$ | $r_2 - r_0$ | $r_3 - r_0$ | $r_4 - r_0$ | $r_5 - r_0$ |
| $r_2 - r_1$ | $r_3 - r_1$ | $r_4 - r_1$ | $r_5 - r_1$ | |
| $r_3 - r_2$ | $r_4 - r_2$ | $r_5 - r_2$ | | |
| $r_4 - r_3$ | $r_5 - r_3$ | | | |
| $r_5 - r_4$ | | | | |

Tabla 3: Desplazamientos relativos de una partícula durante un intervalo temporal de $5\Delta t$

Por lo tanto, en la simulación se deben sumar los desplazamientos relativos $r_t - r_{t_0}$ al cuadrado para cada una de las columnas de [Tabla 3](#). Obviamente, es deseable contar con la cantidad suficiente de incrementos temporales Δt para calcular $W(t)$. Es necesario observar que por claridad sólo consideramos una partícula, en el caso de tener más, se debe realizar el procedimiento anterior para las N partículas.

6.4 VALIDACIÓN

Para validar el esquema logrado en este trabajo, seguimos la metodología empleada en el trabajo [\[6\]](#). Consideramos una partícula browniana sometida en un potencial externo $U = \frac{kx^4}{4}$ (como el de la sección anterior), se resuelve numéricamente la ecuación de Langevin [\(6.1\)](#) en una dimensión, empleando los esquemas [CBD \[12\]](#), [SRKII \[29\]](#) y el esquema [EMM](#) dado por [\(6.7\)](#). Para validar nuestro esquema, calculamos el coeficiente de auto-difusión normalizado sobre la simulación de 1×10^5 pasos temporales y comparamos los resultados con los esquemas [EM](#) y [SRKII](#). En lo que sigue usaremos

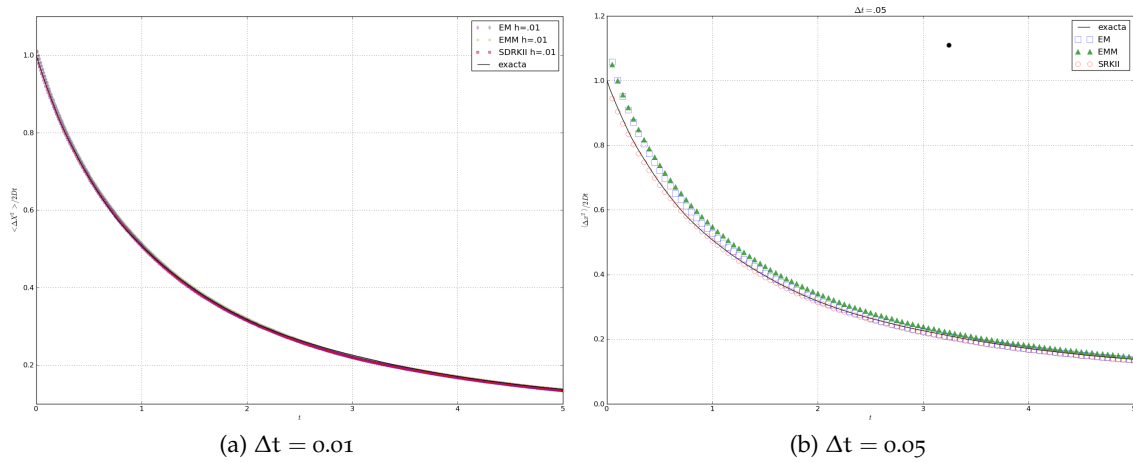


Figura 31: Gráficas del coeficiente de auto-difusión obtenidas con los métodos **CBD**, **EMM** y **SRKII** para resolver (6.7) sobre 5×10^6 pasos temporales y diferentes tamaños de paso h

de forma indistinta **EM** y **CBD** para referirnos al método de Euler-Mayurama, el cual se emplea para obtener el **CBD**.

Siguiendo la referencia [6] en los cálculos, de acuerdo a (6.1) se tomo $k = 1, T = 1$ y $D = 1$. Con el fin de estudiar el comportamiento de nuestro método no estándar, obtuvimos el coeficiente de auto-difusión para diferentes paso de tiempo empleando nuestro esquema, el **CBD** y el **SRKII**. En la figura 31 se muestran las gráficas obtenidas usando tamaños de paso relativamente pequeños, $\Delta t = 0.01$ y 0.05 . La gráfica etiquetada con “exacta” se calculó con un tamaño de paso $\Delta t = .001$ y sobre 5×10^6 pasos temporales usando el esquema **SRKII**. En general, para tamaños de paso pequeño nuestro método se comporta muy similar al **EM**. Además, a tiempos cortos, en figura 32 se puede ver que conforme disminuye el tamaño de paso, nuestro método al igual que el **EM** aproxima mejor el **DCM**. Sin embargo en esta región el **SRKII** es más preciso. Dicho comportamiento es el mismo que se reporta en [6].

Por otra parte, como se puede observar en la figura 33, al incrementar el tamaño de paso observamos que con $\Delta t = 0.2$ el esquema **EM** deja de funcionar, a diferencia de los esquemas **SRKII** y **EMM**. Luego, al aumentar el tamaño de paso a $\Delta t = 0.3$ como se observa en figura 34 lo mismo pasa con el **SRKII**, pero nuestro esquema aún representa la dinámica.

Con el fin de examinar la calidad de nuestra aproximación en el calculo del coeficiente de auto-difusión, se obtuvo el error relativo para cada método, usando la norma infinito y considerando diferentes tamaños de paso. También recuperemos el tiempo que tarda cada método en resolver la ecuación (6.1) con los parámetros mencionados.

Como puede verse, en la Tabla 4 a tiempos cortos nuestro esquema consume más tiempo de computo que el método **EM** pero menos que esquema **SRKII**. A partir del error relativo, observamos que nuestro método es ligeramente más preciso que el **EM**, sin embargo el método de mejor precisión es el **SRKII**.

| Método | TE | $\frac{\ X_n - X\ }{\ X\ }$ (%) | Método | TE | $\frac{\ X_n - X\ }{\ X\ }$ (%) |
|--------|-------|---------------------------------|--------|-------|---------------------------------|
| EM | 4.60 | 1.82047883 | EM | 4.86 | 10.1936 |
| EMM | 10.33 | 1.82049472 | EMM | 9.32 | 9.4302 |
| SRKII | 12.67 | 0.59685005 | SRKII | 12.61 | 1.3404 |

(a) $\Delta t = .01$ (b) $\Delta t = .05$

Tabla 4: Tiempo de ejecución (TE) para resolver la ecuación (6.1) y error relativo para tamaños relativamente pequeños.

En concreto, esto muestra que el esquema que hemos logrado con la formulación no estándar es una mejora del método EM, pues es casi igual de preciso. Sin embargo hemos mostrado con estas evidencias, que nuestro esquema es más estable que los métodos EM y SRKII correspondientes a la ecuación (6.6), pues trabaja tamaños de paso Δt para los cuales ambos métodos dejan de funcionar. Al incrementar el tamaño de paso, podemos observar en la Tabla 5, que para un tamaño de paso $h = 0.1$ los métodos se comportan de forma similar a lo ya descrito, pero a otra escala. Sin embargo, al tomar un tamaño de paso de 0.2 el esquema EM deja de funcionar.

Por ultimo, como podemos constatar a partir de la Tabla 6 para un tamaño de paso 0.3 el esquema SRKII deja de funcionar.

Observación 20. Es importante hacer énfasis en lo siguiente. El coeficiente de auto-difusión es una cantidad física que caracteriza la estructura dinámica de una suspensión coloidal. Expertos en esta área, han presentado interés por el comportamiento de esta cantidad a escalas de tiempos largos. Por otra parte, como podemos observar en la Tabla 6 el error relativo que calculamos en apariencia excesivo. Sin embargo podemos afirmar que lo que realmente pasa, es que nuestro método no estándar converge con un orden similar al EM y por consiguiente se tendrá una buena aproximación hasta después de 10 o 15 incrementos temporales (véase [6]). Lo que si podemos concluir

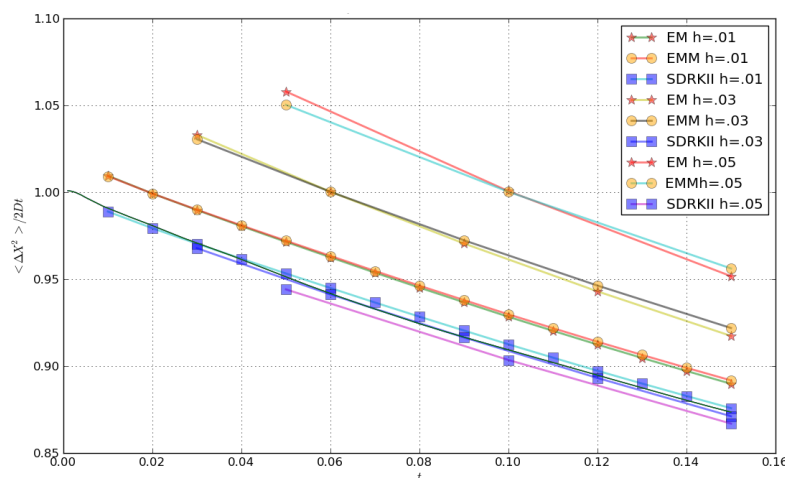


Figura 32: Región a tiempo corto del coeficiente de auto-difusión obtenido a partir de los métodos EM, SRKII, y EMM con diferentes tamaño de pasos.

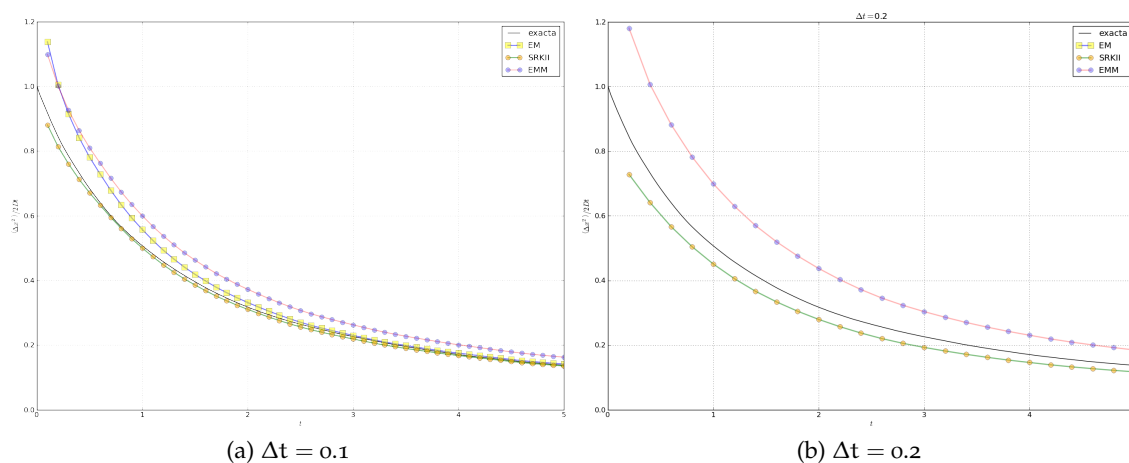


Figura 33: Comparación de los esquemas EM, EMM y SRKII en el cálculo del coeficiente de auto-difusión al incrementar Δt

a partir de los resultados aquí mostrados, es que nuestro algoritmo trabaja de forma similar al CBD pero de forma más estable.

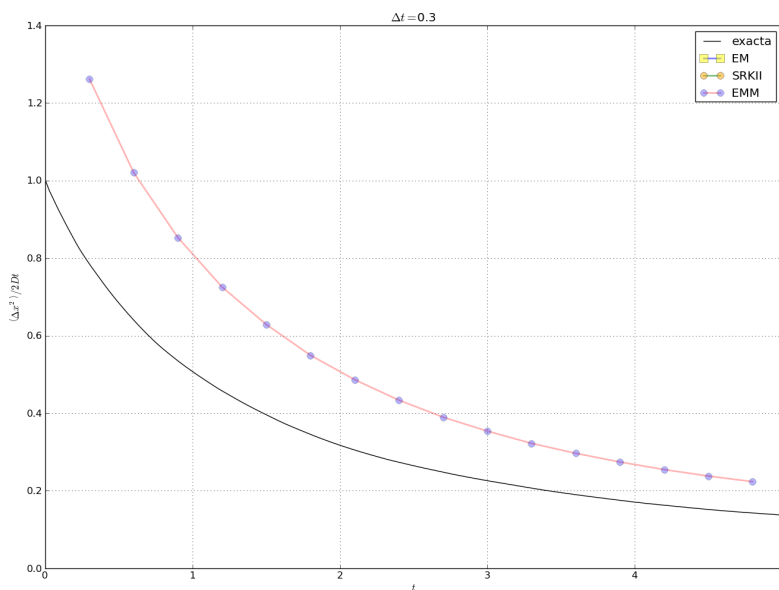


Figura 34: Comparación de los esquemas EM, EMM y SRKII en el cálculo del coeficiente de auto-difusión al incrementar Δt a 0.3.

| Método | TE | $\frac{\ X_n - X\ }{\ X\ }$ (%) | Método | TE | $\frac{\ X_n - X\ }{\ X\ }$ (%) |
|--------|-------|---------------------------------|--------|-------|---------------------------------|
| EM | 4.60 | 22.183 822 45 | EM | 4.86 | -nan |
| EMM | 10.33 | 18.146 358 56 | EMM | 9.32 | 33.578 878 13 |
| SRKII | 12.67 | 4.043 170 86 | SRKII | 12.61 | 11.658 120 13 |

(a) $\Delta t = .1$ (b) $\Delta t = .2$

Tabla 5: Tiempo de ejecución (TE) para resolver la ecuación (6.1) y error relativo para tamaños relativamente grandes.

| Método | TE | $\frac{\ X_n - X\ }{\ X\ }$ (%) |
|--------|-------|---------------------------------|
| EM | 4.88 | -nan |
| EMM | 10.42 | 347.470 285 52 |
| SRKII | 14.08 | -nan |

Tabla 6: Tiempo de ejecución (TE) para resolver la ecuación (6.1) y error relativo de los esquemas EM, EMM, SRKII para el cálculo del coeficiente de auto-difusión con un tamaño de paso $h = 0.3$.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Este trabajo de tesis cierra con conclusiones y perspectivas, referentes a los resultados que hemos obtenido al aplicar la formulación no estándar en la solución numérica de EDEs y al MDFNE construido para la simulación de la dinámica Browniana. Enunciamos en este apartado lo que consideramos importante y que nos queda por hacer. Por último, terminamos con posibles direcciones en las que podemos encaminar este trabajo.

7.1 CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Hemos construido bajo las reglas de discretización no estándar, un Método en diferencias finitas no estándar (MDFNE) al que llamamos EMM, en base a este esquema escribimos lo siguiente:

- (i). De acuerdo a lo expuesto en el capítulo 5, para una EDE dada, vemos que los esquemas construidos bajo las reglas de discretización no estándar que vimos en la sección 4.1, con la alternativa 1 o 2, tienen mejores propiedades de estabilidad que el método EM correspondiente.
- (ii). En base a los resultados del capítulo 6 y en comentarios de expertos en el tema de dinámica Browniana, podemos concluir que sí tiene sentido aplicar la formulación no estándar en la simulación DB, pues con tamaños de paso pequeño, los esquemas logrados se comportan de forma similar al método CBD y trabajan con tamaños de paso más grande. El esquema logrado en la sección 6.3 conserva una forma algebraica que computacionalmente es menos costosa que el esquema SRKII. En base a esto esperamos que dichos algoritmos permitan el cálculo de cantidades dinámicas como el DCM a escalas de tiempo mayor.

En base a esto último surgen de forma natural las siguientes perspectivas:

Hemos observado que la construcción del método EMM se “complica” dependiendo de la estructura que tenga la función f en $dx_t = f(x_t)dt + g(x_t)dB_t$. Una alternativa a considerar, es expandir f en su serie de Taylor y truncar a cierto orden. Otra tiene que ver con una generalización de esta serie, a la cual se conoce como expansión de Burman-Lagrange (véase [32]).

Respecto al algoritmo EMM para DB solo hemos probado el esquema mencionado, considerado el cálculo del coeficiente de auto-difusión y bajo condiciones muy idea-

lizadas, sin embargo, expertos en el área ven necesario probar nuestro esquema para el cálculo de cantidades estáticas, tales como factor de estructura $s(q)$ y función de distribución radial $g(r)$. Además es indispensable incorporar más partículas, al menos otra dimensión espacial y otros potenciales, en esta dirección es de particular interés el potencial de tipo Yukawa, [24].

7.2 TRABAJOS DE OPORTUNIDAD Y POSIBLES DIRECCIONES

Bajo la formulación no estándar también se obtienen buenos resultados en los esquemas numéricos para ecuaciones diferenciales parciales [47], por ello, basándonos en lo logrado por esta tesis, vemos, como oportunidad de trabajo aplicar la formulación no estándar a la solución numérica de EDEs en derivados parciales.

Respecto a la simulación de dinámica Browniana, una de las alternativas para describir la dinámica del coloide se logra con las ecuaciones de Langevin, otra alternativa para la modelación usa la ecuación de Fokker-Planck,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x) \right] W, \quad (7.1)$$

donde W es la distribución de probabilidad a encontrar, $D^{(1)}, D^{(2)}$ son coeficientes de difusión, x es una variable espacial y t representa el tiempo. Al resolver (7.1) se obtiene una distribución de probabilidad con momentos que describen la dinámica del coloide. De hecho D. L. Ermak [12] demuestra que ambas formulaciones son equivalentes en sentido débil, es decir respecto a los momentos de la distribución. En este contexto vemos como posible trabajo explorar la simulación en base a la ecuación Fokker-Planck.

Bajo este mismo sentido de equivalencia tenemos interés por modelar el transporte en medios porosos y así obtener las ecuaciones de transporte del tipo Langevin, ver [4].

Recordemos que la dinámica Browniana se basa en el proceso estocástico llamado movimiento Browniano este se puede entender como el límite de una caminata aleatoria. El trabajo que acabamos de citar, propone varias formulaciones, que pensamos podría darle dirección a nuestros intereses, uno de los resultados importantes aquí reportados son las ecuaciones de la semi-dinámica de V-Langevin, estas resultan de generalizar de forma continua una caminata aleatoria.

Para terminar, recordemos la hipótesis en la que basamos este trabajo: *Al aplicar la formulación de los esquemas en diferencias no estándar para resolver la ecuación de Langevin (1.1), o (1.2) se obtiene un esquema numérico con mejores propiedades de estabilidad y de simplicidad algebraica similar al esquema convencional de dinámica Browniana (CBD).*

Bajo la evidencia aquí mostrada, dicha hipótesis es verdadera.

Parte I

APÉNDICE



ELEMENTOS DE PROBABILIDAD

A.1 VARIABLES ALEATORIAS

Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , una variable aleatoria X se define como una función medible :

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}.$$

Aquí el adjetivo “medible” se refiere a que siempre es posible calcular la probabilidad relacionada con una variable aleatoria X . En forma más precisa, si se considera la media de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y la imagen inversa de X (suponiendo que existe) X^{-1} . Entonces X es medible si y sólo si

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \exists B \in \mathcal{A} : \quad X^{-1}(A) = B,$$

i.e, siempre que sea posible medir el conjunto de valores que toma X usando la media de probabilidad P del conjunto Ω , esto se traduce a:

$$\begin{aligned} P(X \in A) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) \\ &= P(\omega \in \Omega : \omega \in X^{-1}(A)) \\ &= P(B). \end{aligned}$$

Lo anterior $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{A}$. Todo lo dicho se resume en la siguiente definición.

Definición 48 (Variable aleatoria.). Sea \mathcal{A} una σ -álgebra, una variable aleatoria real, es una función $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tal que para cualquier conjunto de Borel B , se cumple que el conjunto $X^{-1}(B)$ es un elemento de \mathcal{A} .

Ahora, sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria fija. Se considera una función

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto P(X \leq x) = P(X(\omega) \in (-\infty, x]). \end{aligned}$$

Resulta que toda variable aleatoria tiene asociada una función de esta forma. A dicha función se le nombra función de distribución.

Definición 49 (Función de distribución). La función de distribución de una variable aleatoria X es la función $F(x) : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$, definida por:

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Algunas de las propiedades de las funciones de distribución se enuncian en el siguiente resultado.

Teorema 13. Sea $F(x)$ la función de distribución de una variable aleatoria X . Entonces:

- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
- (iii) Si $x_1 \leq x_2$, entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$.
- (iv) $F(x)$ es continua por la derecha, i.e. $F(x+) = F(x)$.

Las funciones de distribución son de interés, pues contienen toda la información de una variable aleatoria y la correspondiente medida de probabilidad. En la figura (35) se muestra a manera de ejemplo la gráfica de los dos tipos de distribuciones que comúnmente aparecen en la literatura. La gráfica de la izquierda en la figura (35) corresponde a la función de distribución de una variable aleatoria discreta, y la gráfica de la derecha muestra el comportamiento de una función de distribución continua. La

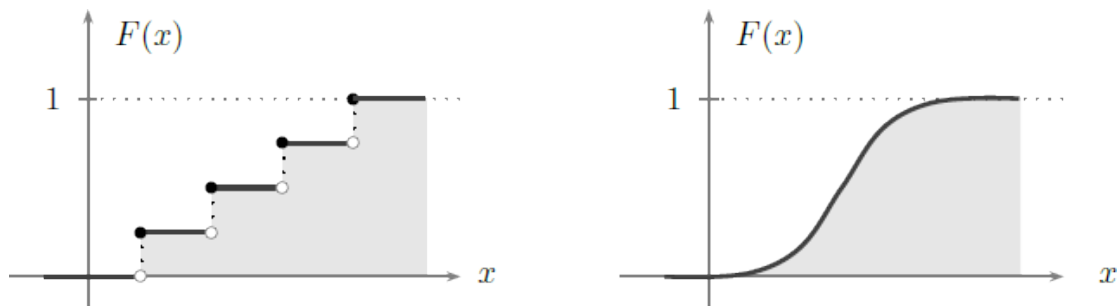


Figura 35: Funciones de distribución de variable discreta y continua.

continuidad de una función distribución es deseable pero no necesaria. El siguientes resultados permiten calcular probabilidades a partir de la función de distribución.

Teorema 14. Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F(x)$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Entonces:

- i. $P(X < a) = F(a-)$.
- ii. $P(X = a) = F(a) - F(a-)$.
- iii. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.
- iv. $P(a < X < b) = F(b-) - F(a)$
- v. $P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-)$.

Como se mencionó antes, la función de distribución de una variable aleatoria no necesariamente es continua, y por esto se consideran los límites laterales.

Tipos de variables aleatorias

Las variables aleatorias se clasifican dependiendo del carácter de su función de distribución. Al menos existen tres tipos: discretas, continuas, y mezclas de las dos anteriores. En esta sección se considera su definición.

Definición 50 (Variable aleatoria discreta). Una variable aleatoria X es discreta si su función de distribución $F(x)$ es constante a trozos. Sean x_1, x_2, \dots los puntos de discontinuidad de $F(x)$. En cada uno de estos puntos el tamaño de la discontinuidad es $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i^-) > 0$. A la función $f(x)$ que indica estos incrementos se le llama función de probabilidad de X , y se define como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} P(x = X) & x = x_1, x_2, \dots \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Así la función de distribución se calcula a partir de:

$$F(x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

En este caso se dice que la función de distribución es discreta. Resulta que la función de probabilidad $f(x)$ siempre existe. Por su definición, la función de probabilidad es no negativa y suma uno, i.e. $\sum_i f(x_i) = 1$. Recíprocamente una función definida como en (A.1) que satisfaga estas dos propiedades es una función de probabilidad. Ahora se considera el caso continuo.

Definición 51 (Variable aleatoria continua). Una variable aleatoria X es continua si su correspondiente función de distribución es una función continua.

En este caso, se consideran a su vez el tipo *absolutamente continuo*. Es decir, si existe una función no negativa e integrable f tal que para cualquier valor de x se satisface:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (\text{A.2})$$

En tal caso a f se le nombra *función de densidad* de X . Aún cuando exista una función no negativa e integrable f que cumpla (A.2) ésta puede no ser única, pues basta modificarla en un punto para que sea distinta y seguir cumpliendo (A.2). Sin embargo las probabilidades que regresan son las mismas y en este sentido se consideran equivalentes. Además es evidente a partir de su definición que F es no negativa y que la integral en todo \mathbb{R} es uno. Recíprocamente, toda función f no negativa que satisfaga

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) du = 1$$

es una función de densidad. Si X es absolutamente continua con función de distribución $F(x)$ y función de densidad continua $f(x)$, entonces el teorema fundamental del cálculo implica que, a partir de (A.2),

$$F'(x) = f(x).$$

Además, la probabilidad de que X tome un valor en el intervalo (a, b) es el área bajo la función de densidad sobre dicho intervalo. Una variable aleatoria continua es *singular*, si $F'(x) = 0$ casi seguramente, a F también se le nombra singular. En párrafo anterior, el término "casi seguramente" se refiere a que la igualdad se cumple en todos los puntos x , excepto en un conjunto cuya medida de Lebesgue es cero. En esta sección se estudian algunas características numéricas asociadas a variables aleatorias. En particular, se definen los conceptos de valor esperado, varianza y más generalmente los momentos de una variable aleatoria.

Definición 52 (Valor esperado). Si X es una variable aleatoria continua y F es su distribución de probabilidad el valor esperado de X se define como:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x dF(x).$$

Si la distribución F es absolutamente continua $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$ y la integral se entiende en el sentido de Riemann; en otro caso la integral ocurre con dP o dF y la integral se entiende en el sentido de Lebesgue.

En la definición anterior se asume que la integral es absolutamente convergente, i.e.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) < \infty.$$

Y se dice que X es integrable o de valor esperado acotado. Cuando X es una variable aleatoria discreta; el valor esperado se define como:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega).$$

En el siguiente resultado se resumen algunas propiedades del valor esperado.

Proposición 30 (Propiedades del valor esperado). Sean X y Y variables aleatorias integrables, y sea c una constante. Entonces

- i) $\mathbb{E}(c) = c$.
- ii) $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$.
- iii) Si $X \geq 0$, entonces $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- iv) Si $X \leq Y$, entonces $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
- v) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

En general es posible calcular esperanzas de funciones de variables aleatorias, es decir, si X es una variable aleatoria y $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función Borel medible, entonces $g(X)$ es una variable aleatoria y el problema es encontrar su esperanza. Usando la definición (52) la esperanza de $g(X)$ se calcula como:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{g(X)}(x)$$

pero para esto, es necesario contar con la distribución de $g(X)$. Sin embargo, en general encontrar dicha distribución no es fácil. El siguiente resultado proporciona una forma de calcular la esperanza de $g(X)$ sin conocer directamente su distribución.

Teorema 15. Sea X una variable aleatoria y $F_X(x)$ su función de distribución. Considerando $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función Borel medible con esperanza finita. Entonces

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_X(x).$$

Ahora se considera otro momento importante, la varianza. Sea X una variable aleatoria; su varianza es una medida del grado de dispersión de los diferentes valores tomados por la variable, su definición es la siguiente.

Definición 53 (Varianza). Sea X una variable aleatoria integrable y $\mathbb{E}(X)$ su esperanza. La varianza de X se denota por $\mathbf{var}(X)$ y en términos del valor esperado se define como:

$$\mathbf{var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2.$$

Si X es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $f(x)$ y esperanza finita μ , la varianza de X se calcula a partir de :

$$\mathbf{var}(X) = \sum_x (x - \mu)^2 f(x).$$

Si X es una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad $f(x)$ y esperanza finita μ ; la varianza de X se obtiene con:

$$\mathbf{var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

Una notación común para la varianza es σ^2 ; y a su raíz cuadrada σ se le nombra *desviación estándar*. Es importante hacer notar que la varianza puede ser infinita e incluso puede no existir.

Se enuncia a continuación algunas propiedades de la varianza.

Proposición 31 (Propiedades de la varianza). Sean X, Y variables aleatorias integrables y c una constante, entonces:

- (i) $\mathbf{var}(X) \geq 0$.
- (ii) $\mathbf{var}(c) = 0$.
- (iii) $\mathbf{var}(cX) = c^2 \mathbf{var}(X)$.
- (iv) $\mathbf{var}(X + c) = \mathbf{var}(X)$.
- (v) $\mathbf{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$
- (vi) En general $\mathbf{var}(X + Y) \neq \mathbf{var}(X) + \mathbf{var}(Y)$

El valor esperado y la varianza de una variable aleatoria X son sus primeros momentos. Estos son números que representan características de la función de probabilidad asociada. Bajo ciertas condiciones el conjunto de momentos determina de manera única a una distribución de probabilidad. Se hace la siguiente definición.

Definición 54 (Momentos). Sea X una variable aleatoria con valor esperado μ , $n \in \mathbb{N}$. Asumiendo existencia se consideran los siguientes números:

- (i) $\mathbb{E}(X^n)$ el n -ésimo momento.
- (ii) $\mathbb{E}(|X|^n)$ n -ésimo momento absoluto.
- (iii) $\mathbb{E}((X - \mu)^n)$ n -ésimo momento central.
- (iv) $\mathbb{E}(|X - \mu|^n)$ n -ésimo momento central absoluto.
- (v) $\mathbb{E}(X(X-1) \cdots (X-n+1))$ n -ésimo momento factorial.

A.2 DISTRIBUCIÓN NORMAL

Se dice que la variable aleatoria continua X tiene distribución normal o Gaussiana si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

en donde $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ son parámetros. En este caso se escribe $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Resulta que $\mathbb{E}(X) = \mu$, y $\text{var}(X) = \sigma^2$. En la [figura 36](#) se muestra el significado geométrico de los parámetros.

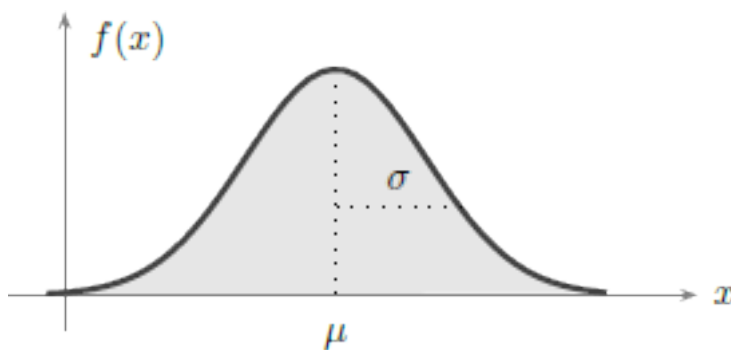


Figura 36: Distribución normal de parámetros μ, σ^2

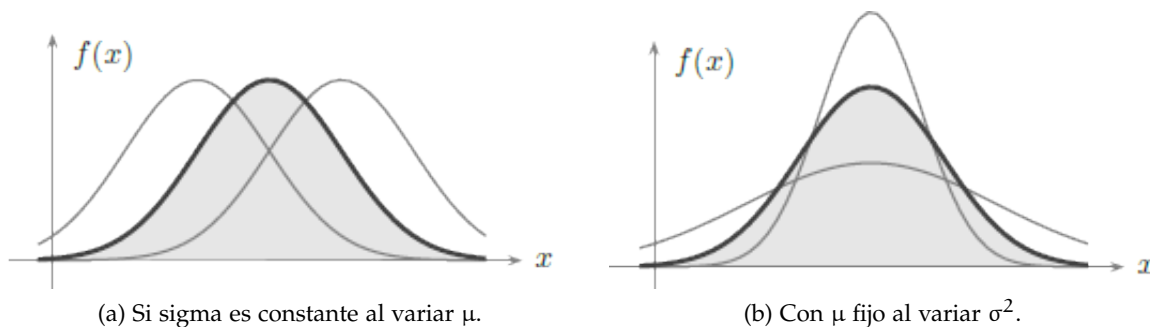
En particular si X tiene una distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ se dice que la distribución es normal estándar. En este caso particular, la función de densidad se reduce a :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right).$$

Es posible transformar una variable aleatoria normal no estándar en una estándar mediante la siguiente transformación.

Proposición 32.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$



(a) Si sigma es constante al variar μ .

(b) Con μ fijo al variar σ^2 .

Figura 37: Comparación sobre los efectos de los parámetros.

Comúnmente se usa la letra Z para denotar una variable aleatoria con distribución normal estándar. En particular la función $\Phi(x)$ denota la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar, i.e.

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

En la figura (38) se muestra un esquema de la función de distribución

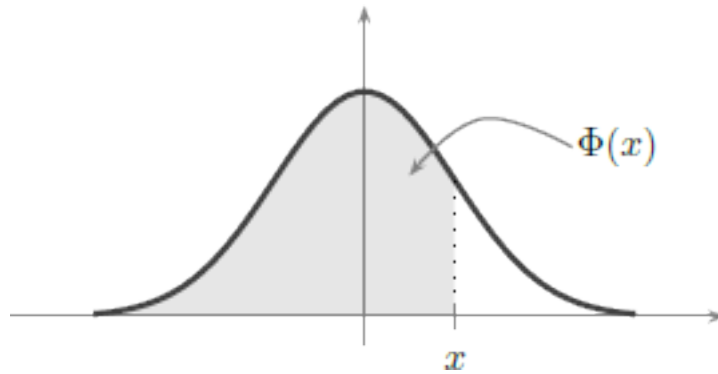


Figura 38: Distribución normal acumulada

Ahora se estudian dos de los teoremas más importantes en probabilidad: la ley de los grandes números y el teorema del límite central. Antes de ello se revisan algunas desigualdades de interés general.

A.2.1 Desigualdades importantes

Proposición 33 (Desigualdad de Markov). Sea $X \geq 0$ una variable aleatoria con esperanza finita entonces para cualquier $\varepsilon > 0$

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}. \quad (\text{A.3})$$

Proposición 34 (Desigualdad de Chebyshev). Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza finita σ^2 . Entonces para todo $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

En palabras, esta desigualdad dice que la probabilidad de que X difiera de su media en más de ε está acotada superiormente por la varianza entre ε^2 . A este resultado se le conoce también con el nombre de desigualdad de Chebyshev-Bienaymé.

Proposición 35 (Desigualdad de Chebyshev extendida). Sean X una variable aleatoria, y $g \geq 0$ una función no decreciente tal que $g(X)$ es una variable aleatoria con esperanza finita. Entonces para todo $\varepsilon > 0$,

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(g(X))}{g(\varepsilon)}.$$

Proposición 36 (Desigualdad de Kolmogorov). Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes de media cero y segundo momento finito. Entonces para todo $\varepsilon > 0$

$$P\left(\max_k \{X_1 + \dots + X_k\} \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{var}(X_k).$$

Cuando $n = 1$ la desigualdad de Kolmogorov se reduce a la desigualdad de Chebyshev. En resumen se tiene la siguiente tabla.

| AUTOR | DESIGUALDADES |
|-------------|--|
| Markov: | $P(X > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon} \text{ Para } X > 0.$ $P(X > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}.$ $P(X > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X ^n)}{\varepsilon^n}.$ |
| Chebyshev: | $P(X - \mu \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$ $P(X > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(g(X))}{g(\varepsilon)}, g(x) \geq 0 \text{ no decreciente.}$ |
| Kolmogorov: | $P\left(\max_k \{X_1 + \dots + X_k\} \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{var}(X_k).$ |

Tabla 7: Desigualdades importantes

Ley de los grandes números

Este resultado establece que, bajo ciertas condiciones, el promedio de variables aleatorias converge a una constante cuando el número de sumandos tiende a infinito. Se enuncian dos versiones de esta afirmación, las cuales se distinguen por el tipo de convergencia. La ley débil establece la convergencia en probabilidad y la ley fuerte dice que la convergencia es casi segura. Así, la ley fuerte implica la ley débil.

Teorema 16 (de Bernoulli, ley débil de los grandes números). Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ . Entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu.$$

Teorema 17 (Ley fuerte de los grandes números). Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ . Entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\text{c.s.}} \mu.$$

Teorema del limite central

Este resultado es de amplio uso en estadística y otras ramas de aplicación de la probabilidad. Existen muchas versiones y generalizaciones de este teorema. Un caso particular de este resultado lleva el nombre de A. de Moivre y de P. S. Laplace.

Teorema 18 (de De Moivre-Laplace). *Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes tal que cada una de ellas tiene distribución Bernoulli con parámetro $p \in (0, 1)$. Para cualesquiera números reales $a < b$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(a < \frac{X_1 + \dots + X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx.$$

En palabras este resultado establece que la variable aleatoria

$$\frac{(X_1 + \dots + X_n - np)}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

converge en distribución a una variable aleatoria normal estándar. Este teorema fue descubierto por A. de Moivre alrededor de 1733 en el caso cuando las variables aleatorias tienen distribución Bernoulli con $p = \frac{1}{2}$. Años después P. S. Laplace demostró su validez para valores arbitrarios de $p \in (0, 1)$. El teorema de de Moivre-Laplace es una caso particular del siguiente resultado fundamental.

Teorema 19 (del limite central). *Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que para cada natural n , $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ y $\mathbf{var}(X_n) = \sigma^2 < \infty$. Entonces*

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Este teorema fue demostrado rigurosamente por A. M. Lyapunov alrededor de 1901. Es importante notar que no hay ninguna hipótesis adicional sobre la distribución de las variables de la sucesión, es decir, sólo se requiere la existencia de la media y la varianza.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A.J. Arenas, J.A. Morano, and J.C. Cortés. Non-standard numerical method for a mathematical model of rsv epidemiological transmission. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(3):670–678, 2008. (Citado en la pag. 51.)
- [2] L. Arnold. *Stochastic differential equations: theory and applications*. Wiley-Interscience, 1974. ISBN 0471033596. (Citado en las pag. 45 y 83.)
- [3] V.I. Arnold. *Ordinary differential equations*. Springer Verlag, 2006. ISBN 3540345639. (Citado en la pag. 44.)
- [4] R. Balescu. V-langevin equations, continuous time random walks and fractional diffusion. *Chaos, Solitons & Fractals*, 34(1):62–80, 2007. (Citado en la pag. 92.)
- [5] W.E. Boyce, R.C. DiPrima, and D. Mitrea. *Elementary differential equations and boundary value problems*. Wiley New York:, 1992. ISBN 0471509981. (Citado en la pag. 52.)
- [6] A.C. Brańka and D.M. Heyes. Algorithms for Brownian dynamics simulation. *Physical Review E*, 58(2):2611, 1998. (Citado en las pag. 3, 66, 81, 85, 86, y 87.)
- [7] A.C. Brańka and D.M. Heyes. Algorithms for Brownian dynamics computer simulations: Multivariable case. *Physical Review E*, 60(2):2381, 1999. (Citado en las pag. 4 y 51.)
- [8] K. Burrage and T. Tian. A note on the stability properties of the Euler methods for solving stochastic differential equations. *New Zealand Journal of Mathematics*, 29:115–127, 2010. ISSN 1171-6096. (Citado en las pag. 35 y 47.)
- [9] J.C. Butcher and J. Wiley. *Numerical methods for ordinary differential equations*. Wiley Online Library, 2008. (Citado en la pag. 51.)
- [10] R. Castañeda. *Estructura e interacciones efectivas en suspensiones coloidales*. PhD thesis, CINVESTAV-IPN, 2003. (Citado en la pag. 3.)
- [11] B. Chen and F. Solis. Discretizations of nonlinear differential equations using explicit finite order methods. *Journal of computational and applied mathematics*, 90(2):171–183, 1998. (Citado en la pag. 51.)
- [12] J. A. McCammon D. L. Ermak. Brownian dynamics with hydrodynamic interactions. *J. Chern. Phys.*, 69(4), August 1978. (Citado en las pag. 3, 85, y 92.)
- [13] G. Dahlquist. *Numerical Methods in Scientific Computing: Volume 1*. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 2008. ISBN 0898716446. (Citado en las pag. 38 y 40.)
- [14] P. Demontis. *Molecular Dynamics simulations of reactive and diffusive processes in different zeolite structures*. PhD thesis, Universit’a degli Studi di Sassari Dipartimento di Chimica. (Citado en la pag. 84.)

- [15] J. K. G. Dhont, G. Gompper, G. Nägele, D. Richter, and R. G. Winkler. Soft matter from synthetic to biological materials lecture notes of 39th iff spring school 2008., 2008. (Citado en la pag. 2.)
- [16] D.T. Dimitrov and H.V. Kojouharov. Nonstandard finite-difference methods for predator-prey models with general functional response. *Mathematics and Computers in Simulation*, 78(1):1–11, 2008. (Citado en la pag. 51.)
- [17] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications, Vols. 1 and 2*. Wiley, New York, 1971. (Citado en la pag. 15.)
- [18] F. Galaz. *Medida e integral de Lebesgue en \mathbb{R}^N* . oxford, 2002. ISBN 9706137033. (Citado en la pag. 8.)
- [19] F. Galaz. *Elementos de análisis Funcional*. Cimat A.C., 2006. ISBN 9685733074. (Citado en la pag. 44.)
- [20] C.W. Gardiner. *Handbook of stochastic methods*. Springer Berlin, 1985. ISBN 3540156070. (Citado en la pag. 38.)
- [21] D. B. Hernandez and R. Spigler. A-stability of Runge-Kutta methods for systems with additive noise. *BIT Numerical Mathematics*, 32(4):620–633, 1992. ISSN 0006-3835. (Citado en las pag. 36, 42, 49, 66, 82, y 83.)
- [22] P. A. I. Hernández. Aplicación de algoritmos de dinámica browniana lineales y no-lineales en el tiempo para el estudio de sistemas coloidales bi-dimensionales, 2010. (Citado en la pag. 4.)
- [23] S. Herrera. *Suspensiones coloidales en presencia de campos externos*. PhD thesis, IFUG, 2008. (Citado en las pag. 2 y 84.)
- [24] S. Herrera, A. Zamudio, and R. Castañeda. Ordering and single-file diffusion in colloidal systems. *The Journal of chemical physics*, 133:114902, 2010. (Citado en la pag. 92.)
- [25] D. J. Higham. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*, 43(3):525–546, September 2001. URL <http://www.jstor.org/stable/3649798>. (Citado en la pag. 42.)
- [26] D. J. Higham. Mean-square and asymptotic stability of the stochastic theta method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(3):753–769, 2001. (Citado en las pag. 35 y 47.)
- [27] D. J. Higham. *Accuracy and stability of numerical algorithms*. Society for Industrial Mathematics, 2002. ISBN 0898715210. (Citado en las pag. 27 y 44.)
- [28] D. J. Higham, X. Mao, and A. M. Stuart. Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(3):1041–1063, 2003. ISSN 0036-1429. (Citado en la pag. 42.)
- [29] R. L. Honeycutt. Stochastic runge-kutta algorithms. I. White noise. *Physical Review A*, 45(2):600–603, 1992. ISSN 1050-2947. (Citado en las pag. 39 y 85.)
- [30] S. M. Iacus. *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations With R Examples*. Springer, first edition, 2008. ISBN 9780387758381. (Citado en la pag. 36.)
- [31] E.A. Ibijola, J. M. S. Lubuma, and O.A. Ade. On nonstandard finite difference schemes for initial value problems in ordinary differential equations. *International*

- Journal of Physical Sciences*, 3(2):059–064, 2008. ISSN 1992-1950. (Citado en las pag. 59 y 64.)
- [32] S. Jerez. Nonstandard lagrange-burman methods for the numerical integration of differential equations. *Journal of Difference Equations and Applications.*, 2011. Article accepted for publication. (Citado en la pag. 91.)
- [33] L. Jódar, R.J. Villanueva, A.J. Arenas, and G.C. González. Nonstandard numerical methods for a mathematical model for influenza disease. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79(3):622–633, 2008. (Citado en la pag. 51.)
- [34] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer, 1998. ISBN 0387976558. (Citado en la pag. 31.)
- [35] D. E. Knuth. Computer Programming as an Art. *Communications of the ACM*, 17(12):667–673, December 1974. (Citado en la pag. iii.)
- [36] H.V. Kojouharov and B.D. Welfert. Generalized nonstandard numerical methods for nonlinear advection-diffusion-reaction equations. *Large-Scale Scientific Computing*, pages 83–103, 2004. (Citado en la pag. 51.)
- [37] Y. Komori, Y. Saito, and T. Mitsui. Some issues in discrete approximate solution for stochastic differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 28(10-12):269–278, 1994. ISSN 0898-1221. (Citado en la pag. 42.)
- [38] R.J. LeVeque. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. (Citado en las pag. 51 y 70.)
- [39] X. Mao. *Stochastic differential equations and applications*. Horwood Pub Ltd, 1997. ISBN 1898563268. (Citado en las pag. 36 y 48.)
- [40] J.E. Marsden and M. J. Hoffman. *Elementary classical analysis*. WH Freeman, 1993. (Citado en la pag. 56.)
- [41] P. Matus, U. Irkhin, and M. Lapinska. Exact difference schemes for time-dependent problems. *Computational Methods In Applied Mathematics*, 5(4):422, 2005. ISSN 1609-4840. (Citado en las pag. 52, 57, y 62.)
- [42] R. E. Mickens. Difference equation models of differential equations having zero local truncation error, in differential equations. *Differential Equations*, pages 445–449, 1984. (Citado en la pag. 56.)
- [43] R. E. Mickens. Difference equation models of differential equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 11:528–530, 1988. (Citado en la pag. 51.)
- [44] R. E. Mickens. Exact solutions to a finite-difference model of a nonlinear reaction-advection equation: Implications for numerical analysis. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 5(4):313–325, 1989. (Citado en la pag. 51.)
- [45] R. E. Mickens. *Nonstandard finite difference models of differential equations*. World Scientific Pub Co Inc, 1994. ISBN 9810214588. (Citado en las pag. 51, 52, 58, y 60.)
- [46] R. E. Mickens. *Applications of nonstandard finite difference schemes*. World Scientific Pub Co Inc, 2000. (Citado en la pag. 51.)
- [47] R. E. Mickens. *Advances s in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*. World Scientific, 2005. (Citado en las pag. 5, 51, 59, y 92.)

- [48] R. E. Mickens. Calculation of denominator functions for nonstandard finite difference schemes for differential equations satisfying a positivity condition. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 23(3):672–691, 2007. ISSN 1098-2426. (Citado en la pag. 57.)
- [49] V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov. *Qualitative theory of differential equations*. Dover Pubns, 1989. ISBN 0486659542. (Citado en las pag. 44 y 57.)
- [50] B. K. Øksendal. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer, fifth edition, 1998. ISBN 9783540047582. (Citado en las pag. 34, 48, y 73.)
- [51] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*. Springer Verlag, 2001. ISBN 0387951164. (Citado en la pag. 44.)
- [52] L. Rincón. *Introducción a los procesos estocásticos*, 2007. (Citado en la pag. 35.)
- [53] L. Rincón. *Curso intermedio de PROBABILIDAD*. UNAM, Facultad de Ciencias, 2007. ISBN 9703242693. (Citado en la pag. 7.)
- [54] Y. Saito. Stability analysis of numerical methods for stochastic systems with additive noise. (Citado en la pag. 47.)
- [55] Y. Saito and T. Mitsui. Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(6):2254–2267, 1996. ISSN 0036-1429. (Citado en las pag. 35, 40, y 47.)
- [56] F.J. Solis and B. Chen. Nonstandard discrete approximations preserving stability properties of continuous mathematical models. *Mathematical and computer modeling*, 40(5-6):481–490, 2004. ISSN 0895-7177. (Citado en las pag. 51, 57, y 66.)
- [57] R. Toral. Ruido, más ruido, por favor. *Revista Española de Física*, 16(1), 2002. (Citado en la pag. 36.)
- [58] R.J. Villanueva, A.J. Arenas, and G. González. A nonstandard dynamically consistent numerical scheme applied to obesity dynamics. *Journal of Applied Mathematics*, 2008. (Citado en la pag. 51.)