# “Valuación de BORHIs: Modelo de Prepago”

**Jannet García Morell**

**Director: Dr. Daniel Hernández Hernández.**

**Marzo 2009**

# Contenido

# Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico recibido durante dos años para la realización de mis estudios de maestría.

Al Centro de Investigación en Matemáticas A. C. por el financiamiento para la conclusión de esta tesina.

Al Dr. Daniel por su comprensión, apoyo y transmisión de conocimientos.

A los profesores del área de Probabilidad y Estadística del CIMAT por su enseñanza y consejos.

A Marco A. Fuentes de Ma.Castillo por haber propuesto el proyecto y haber aportado información.
Al personal de SHF que aportó información.

A mi familia por su apoyo incondicional y su cariño.

Y a aquellas personas especiales que con sus palabras de aliento hicieron posible la culminación de mi grado.

# Introducción

Han pasado un poco más de 5 años desde la primera colocación, en el mercado de valores mexicano, de una emisión de títulos garantizados por hipotecas y aún no existe en el medio financiero un método concensuado para la valuación de éstos, lo que convierte esta área rica en investigación.

Los principales factores de incertidumbre que intervienen en la valuación de un bono respaldado por hipotecas (BORHI) son el incumplimiento y el prepago, factores heredados de la cartera hipotecaria que lo respalda.

En México, debido a los controles exigidos por las autoridades, las administradoras de los créditos hipotecarios registran de manera más eficiente la información relacionada con el incumplimiento que la información relacionada con los prepagos, por lo que se tiene mayor facilidad para realizar estudios de incumplimiento que de prepago.

Ejemplos de estudios de incumplimiento son los que Sociedad Hipotecaria Federal ha publicado en su página electrónica (ref. [6],[7],[8] y [9]) y los que recientemente Standard and Poor´s llevó a cabo para desarrollar un modelo de riesgo crediticio diseñado específicamente para el mercado mexicano de bonos con garantía hipotecaria (ref. [13]). El modelo de Standard and Poor´s evalúa el riesgo de incumplimiento y la severidad de la pérdida esperada basado en análisis estadísticos sobre el incumplimiento de las hipotecas otorgadas a diversos deudores y en otros factores tales como las recuperaciones históricas de los créditos incumplidos, los cambios en los valores de bienes raíces para diferentes rangos de precios a lo largo del tiempo, los costos de ejecución de hipotecas vencidas, y el impacto potencial de los diferentes escenarios de estrés económico sobre los niveles de incumplimiento y recuperación. Está basado en el modelo de Evaluación de Crédito y Estimación de Pérdidas (Loan Evaluation & Estimate of Loss) que se usa en el mercado estadounidense.

En esta tesina se formula, para el mercado financiero mexicano, un modelo de prepago para una cartera hipotecaria y una metodología para su incorporación a la estructura de un BORHI, con la finalidad de valuar este instrumento. Además, de manera implícita sugiere a las administradoras de créditos hipotecarios una forma de registrar la información concerniente a prepagos para implementar con mayor facilidad un modelo de prepago de su cartera.

Por otro lado, debido a que se decidió sacrificar lo sofisticado del modelo a cambio de desarrollar uno que pudiese llevarse fácilmente a la práctica, esta tesina se puede considerar como base para una línea de investigación que busque desarrollar modelos que involucren técnicas más avanzadas para la valuación de BORHIs.

En publicaciones por Salomon Smith Barney (ref. [4] y [19]), institución que ha sido uno de los principales participantes del mercado secundario de hipotecas en Estados Unidos y centro de investigación en la materia, se exponen varios modelos para el prepago en los títulos garantizados por hipotecas. Entre los modelos más sencillos están el que mantiene constante la tasa de prepago y el modelo que consiste en una curva determinista llamada PSA (Public Securities Association) que es una convención introducida a mediados de los 80´s para reflejar el "comportamiento típico" de prepago conforme transcurre la edad de los créditos. Modelos más complejos se basan en la alta correlación que existe en Estados Unidos entre las tasas de prepago y las tasas de interés.

De estos modelos, el que se ha adoptado por algunas instituciones mexicanas, como SHF (ref. [10]), es la curva PSA. Al ser un modelo determinista deja totalmente de lado la incertidumbre que caracteriza al prepago y tipifica el comportamiento de la cartera de créditos de acuerdo a lo observado en el mercado norteamericano.

Con respecto a los modelos de prepago que se basan en el comportamiento de las tasas de interés, todavía no es posible aplicarlos al mercado mexicano, ya que los altos costos de refinanciamiento de un crédito hipotecario no permiten que estos modelos puedan funcionar. Sin embargo, como en un futuro se espera que dichos costos bajen, sería conveniente ir investigando y desarrollando modelos de prepago que a su vez dependan de un modelo de tasas de interés. Algunos modelos estocásticos de tasas de interés que se podrían combinar con la metodología aquí planteada se encuentran en la referencia [3].

Una vez modelado el prepago de una cartera hipotecaria, es necesario estudiar los efectos que tiene éste sobre los flujos de efectivo de la cartera y del bono que se respalda. Un libro para empezar este estudio es la referencia [5], en donde se explican los modelos sencillos de prepago y se realizan análisis de flujos de efectivo de la cartera hipotecaria y del bono que respalda bajo varios escenarios de prepago.

Respecto al contenido de este trabajo, se tienen cinco partes. La primera parte es una introducción al mundo de los BORHIs, en ella se busca que el lector se familiarice con el lenguaje y conceptos clave involucrados con los títulos garantizados por hipotecas. Se explica de manera breve y concisa el proceso de bursatilización de hipotecas, se mencionan las características de las emisiones vigentes de BORHIs y se explican los riesgos de los mismos.

En el segundo capítulo se desarrolla un modelo conjunto de tasas de prepago total y tasas de prepago parcial de una cartera hipotecaria con dependencia en observaciones pasadas. Paralelamente, el modelo se implementa a los datos históricos de una cartera subyacente a una emisión vigente de BORHIs. También se proporciona el método para simular conjuntamente tasas de prepago total y parcial.

En el tercer capítulo se da una metodología para la valuación de un BORHI bajo el supuesto de no incumplimiento y con una estructura de fideicomiso passthrough. Para ello, se modela estocásticamente el principal programado de toda la cartera condicionado a las tasas de prepago total y parcial. Con las distribuciones condicionales de este modelo se simula el principal programado que, junto con la simulación de tasas de prepago, sirve para simular trayectorias de flujos de efectivo heredadas a los BORHIs. La valuación se realiza vía Método de Montecarlo.

La cuarta parte consta de los resultados, las conclusiones y las posibles extensiones. Y el último capítulo se compone de los tres Apéndices, en el primer apéndice se encuentra el Glosario; en el segundo apéndice se enuncia la teoría bajo la cual se desarrollan y simulan los modelos de prepago y de principal programado; y en el tercer apéndice está el programa en R con el que se realiza la aplicación de todo lo expuesto a lo largo del trabajo.

# Capítulo 1

# Bonos Respaldados por Hipotecas

El principal objetivo de este primer capítulo es introducir al lector al mundo de los BORHIs. A las personas que están familiarizadas con todo lo que conlleva una emisión de BORHIs se les sugiere omitir la lectura de este capítulo y comenzar directamente con el estudio del modelo para las tasas de prepago de una cartera hipotecaria.

Primeramente se dan los antecedentes históricos nacionales bajo los cuales nacieron los BORHIs, seguido de la definición de tres conceptos clave para explicar con plenitud lo que es un BORHI, los cuales son: hipoteca, crédito hipotecario y bursatilización. También como parte introductoria al mundo de los BORHIs se explican las garantías con las que debe contar una emisión de los mismos.

Con base en el material mencionado se da la definición de un BORHI y se presentan las características de las emisiones vigentes, incluyendo las estructuras de fideicomiso.

Por último, se explican los riesgos implícitos de un BORHI siendo los más importantes para su valuación el riesgo de prepago y el riesgo de incumplimiento.

## 1.1 Antecedentes históricos

La política de vivienda en México en el sexenio presidencial 2000-2006 fue marcada por la apertura de la Comisión Nacional de Fomento a la Vivienda (CONAFOVI), como un órgano desconcentrado de la Secretaría de Desarrollo Social, el Consejo Nacional de Vivienda (CONAVI), un foro de consulta y asesoría al Ejecutivo Federal, en el que los participantes analizan y opinan sobre el Programa Sectorial de Vivienda y proponen los cambios necesarios, y la creación de la Sociedad Hipotecaria Federal (SHF) como banco eje de segundo piso.

La meta sexenal de otorgar tres millones de créditos para la compra de vivienda nueva se logró gracias a instituciones como INFONAVIT (Instituto del Fondo Nacional de la Vivienda para los Trabajadores), FOVISSSTE (Fondo de la Vivienda del Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado), SHF y FONHAPO (Fideicomiso Fondo Nacional de Habitaciones Populares) entre otras, además de la participación de las SOFOLES Hipotecarias (Sociedades Financieras de Objeto Limitado enfocadas al sector vivienda) y bancos comerciales.

Por otro lado, los factores en la demanda de vivienda que contribuyeron a que el sector creciera aceleradamente fueron el déficit de vivienda y la estructura joven de la pirámide poblacional.

Las áreas que se necesitaban reformar a principios del sexenio para el desarrollo hipotecario en México eran:

- La producción de créditos, incrementando la transparencia y estableciendo mayor homogeneidad en la concesión de los mismos.

- Los esquemas de las garantías, a través de una mejora en los avalúos y una reforma del sistema de los registros de la propiedad y la práctica notarial.

- Los mecanismos legales de recuperación de los créditos vencidos, a través de la ejecución de las garantías, lo que exigió reformas en las leyes procesales y sobre todo una voluntad de los gobiernos de los estados de apoyar la ejecución de las decisiones judiciales.

- El desarrollo del mercado secundario, a través de la emisión de títulos garantizados por hipotecas.

Derivado de las decisiones que se tomaron para el desarrollo del mercado secundario de hipotecas nacieron dos nuevos tipos de Certificado Bursátil, los Bonos Respaldados por Hipotecas (BORHIs) y los Certificados de Vivienda de INFONAVIT (CEDEVIs). Los primeros respaldados por créditos originados por una SOFOL Hipotecaria, una SOFOM (Sociedad Financiera de Objeto Múltiple) ó un banco comercial y los segundos respaldados con cartera de INFONAVIT.

En diciembre del 2003, las SOFOLES *Hipotecaria Su Casita* y *GMAC* colocaron en el mercado de valores la primera emisión de BORHIs en México, por un monto de aproximadamente 595 millones de pesos. A septiembre de 2008, se han realizado 44 emisiones de BORHIs con un monto total colocado de casi 50,000 millones de pesos presentando un saldo insoluto de poco menos de 43,000 millones de pesos, de acuerdo con datos de la SHF.

## 1.2 Conceptos para definir un BORHI

Un bono es un certificado de deuda que representa el derecho a percibir un flujo de pagos periódicos en un futuro a cambio de entregar en el momento de su adquisición una cantidad de dinero que es el precio del bono. Un bono se caracteriza por su valor nominal, moneda, fecha de vencimiento, tasa de interés ó cupón, periodicidad de pago tanto de intereses como de capital y por sus garantías.

La definición de un BORHI comprende fundamentalmente tres conceptos:

a) **Hipoteca.** Derecho que se constituye mediante contrato y que sirve para garantizar una deuda u obligación sobre un bien (generalmente un inmueble). En el supuesto de que hubiere un contrato de crédito entre un banco como acreditante y un acreditado y el segundo incumpliese con sus obligaciones, la hipoteca garantiza al acreditante el pago del crédito mediante el remate judicial del bien, previa demanda y sentencia condenatoria en contra del acreditado.

b) **Crédito Hipotecario.** Crédito con garantía hipotecaria. Los créditos hipotecarios destinados a la compra de una vivienda quedan determinados por su monto, plazo, tasa de interés y tipo de amortización que normalmente es mensual. Con estas características el acreditante calcula el pago que el acreditado debe hacer mensualmente y el cual incluye tanto pago de interés como pago a capital (principal programado), de tal manera que cada mes la suma de ambos conceptos sea la misma. La Figura 1 muestra un ejemplo de los pagos de un crédito hipotecario para vivienda denominado en UDIS a 15 años.

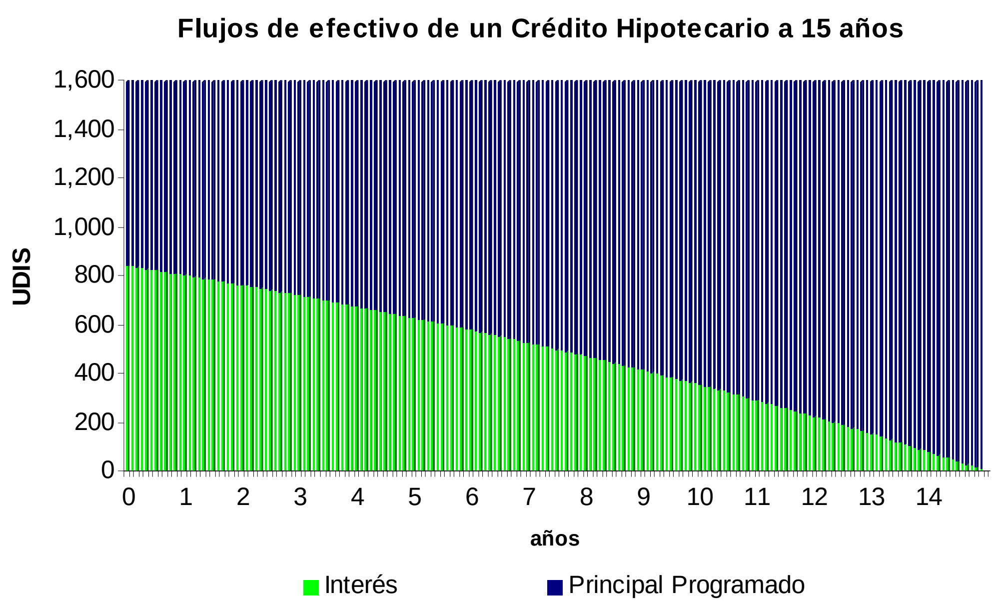


Figura 1

Se observa claramente que conforme transcurre la vida del crédito el pago de interés va disminuyendo y el pago de principal programado va aumentando. Esto se debe a que mes con mes el pago de principal programado disminuye el saldo del crédito y por ende disminuye también el interés de la deuda. El pago de principal programado es la diferencia entre el pago nivelado y el pago de interés, por tanto mes con mes el principal programado aumenta.

A los pagos mensuales nivelados se les suma comisiones de administración y primas de seguros de vida y de daños.

c) **Bursatilización.** Procedimiento que tiene como finalidad la captación de recursos del público inversionista mediante la emisión de títulos de deuda teniendo como respaldo los flujos de efectivo de un conjunto de créditos con características similares. El nombre de bursatilización se desprende del hecho de hacer bursátiles los activos de una entidad crediticia.

En el caso de México, los títulos de deuda respaldados por créditos para vivienda con garantía hipotecaria son Certificados Bursátiles de dos tipos BORHIs ó CEDEVIs. Como ya se mencionó, los primeros están respaldados por créditos originados por las SOFOLES Hipotecarias y los segundos respaldados con cartera del INFONAVIT.

Dos figuras importantes en la bursatilización de créditos que respaldan a los BORHIs son las siguientes:

- **Sociedad Hipotecaria Federal, S.N.C. (SHF)** es una institución financiera perteneciente a la Banca de Desarrollo. Fue creada en 2001 con el fin de propiciar el acceso a la vivienda de calidad a los mexicanos que la demandan, estableciendo las condiciones para que se destinen recursos públicos y privados a la oferta de créditos hipotecarios. Mediante el otorgamiento de créditos y garantías, SHF promueve la construcción y adquisición de viviendas preferentemente de interés social y nivel medio.

- Las **SOFOLES Hipotecarias** son instituciones financieras autorizadas y supervisadas por el Gobierno de la República que, con el apoyo de Sociedad Hipotecaria Federal (SHF) y con recursos propios, ofrecen créditos hipotecarios para la adquisición de una vivienda.

El siguiente esquema representa el procedimiento de bursatilización de créditos originados por las SOFOLES Hipotecarias en México:

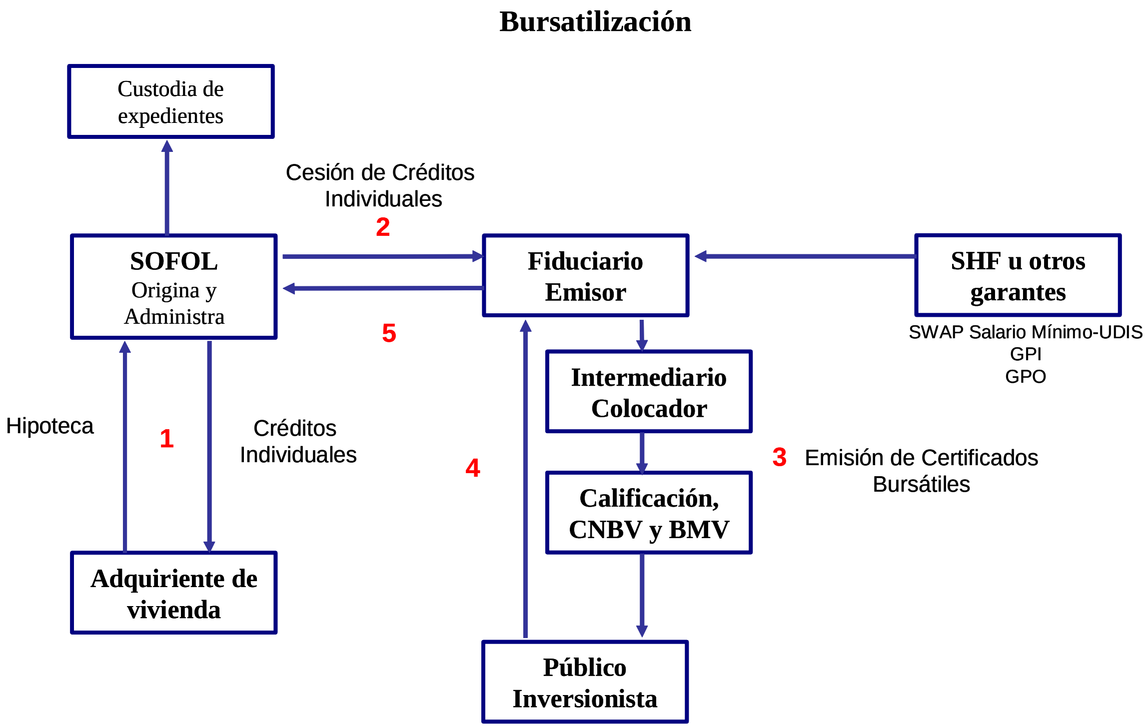


Figura 2

Los números en la Figura 2 marcan las diferentes etapas del procedimiento:

1. La SOFOL origina créditos hipotecarios para los adquirientes de vivienda y se encarga de su administración, la cual consiste en la cobranza, registro de pagos y adeudos, y seguimiento del proceso legal en caso de incumplimiento por parte del acreditado. Cuando tiene una cartera de créditos suficientemente grande y desea financiar más créditos hipotecarios sin la necesidad de hacer más aportaciones a capital propio, reúne un conjunto de créditos hipotecarios con características similares incluyendo la característica de un buen desempeño desde la originación. Debido a que la bursatilización de créditos hipotecarios en México comenzó a desarrollarse hace pocos años, sólo es permitido bursatilizar créditos con un buen desempeño. En otros países como Estados Unidos donde las bursatilizaciones comenzaron hace más de 30 años se permitió, hasta su actual crisis, bursatilizar créditos hipotecarios de muy alto riesgo crediticio.

2. Se pacta una cesión de derechos entre la SOFOL y una entidad financiera sobre el conjunto de créditos seleccionado, de tal manera que la

SOFOL se libera de la obligación de mantener en su capital la parte que corresponde a dicho conjunto de créditos. La entidad financiera actúa como fiduciario del fondo que constituye con el conjunto de créditos.

3. El fiduciario también desempeña el papel de emisor. Mediante un intermediario colocador el fiduciario ofrece al mercado primario Certificados Bursátiles, en este caso, BORHIs. Previo a su emisión los Certificados Bursátiles tienen que ser calificados con máximo grado a nivel local por al menos dos Calificadoras Oficiales; ser autorizados por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores; y ser registrados en la Bolsa Mexicana de Valores.

Cabe hacer notar que las tasas de interés que paga este tipo de deuda, respaldada con créditos con un buen comportamiento, son menores a las que una Sofol ó SHF pagarían por un financiamiento directo del mercado debido a que el riesgo de incumplimiento se reduce, lo que se traduce en tasas de interés más bajas para los créditos hipotecarios.

4. El fiduciario emisor recibe el dinero de la venta de los Certificados Bursátiles y descuenta sus gastos y los del intermediario colocador.

5. La SOFOL recibe el monto colocado menos los gastos del punto anterior como compensación de la cesión de derechos. En ese momento la SOFOL es capaz de propiciar nueva originación de créditos porque el nuevo requerimiento de capital lo puede cubrir con la liberación de capital correspondiente al conjunto de créditos bursatilizado.

Mientras los créditos seleccionados para su bursatilización no sean liquidados por los adquirientes de vivienda, la SOFOL los administra y se hace cargo de la custodia de los expedientes correspondientes.

Con respecto a las **garantías** que deben estar implícitas en las emisiones de BORHIs se distinguen tres:

**Swap Salario Mínimo-UDIS**.

Es una garantía ofrecida por SHF a los intermediarios financieros para cubrir caídas del salario mínimo en términos reales. La garantía permite que los deudores paguen en términos del salario mínimo un crédito hipotecario denominado en UDIS. Es requerida para contratar la GPI con SHF.

**GPI Garantía de Pago por Incumplimiento**.

Es el seguro de crédito hipotecario a través del cual SHF garantiza al beneficiario del crédito hipotecario el pago de las pérdidas hasta por cierto porcentaje en caso de presentarse un incumplimiento del acreditado. Los porcentajes que SHF cubre van desde el 5% al 35% del saldo insoluto más intereses no pagados. Seguros adicionales de crédito hipotecario pueden ser contratados a través de terceros como Genworth Financial.

**GPO Garantía de Pago Oportuno**.

Es una garantía por parte de SHF para que los tenedores de los Certificados Bursátiles reciban oportunamente el pago de capital e intereses devengados en caso de que hubiese un incumplimiento sobre los activos subyacentes. Cabe mencionar que la cobertura sólo es sobre un porcentaje ya sea del saldo inicial de la emisión, del saldo insoluto ó en su defecto sobre un monto congelado.

Es una herramienta financiera para que las emisiones alcancen la calificación requerida. Existen emisiones que en lugar de tener la garantía GPO utilizan una estructura *preferente-subordinado*, más adelante se desarrollará el tema de la estructuración de los fideicomisos en México.

Esta garantía está siendo reemplazada por una "garantía financiera" que el fiduciario contrata con aseguradoras del sector privado.

Las primas de las dos primeras garantías se cargan en la mensualidad del crédito hipotecario garantizado y la segunda se considera como un gasto del fiduciario-emisor.

Otra manera en que se puede dar garantía a los tenedores de los BORHIs sobre el pago de intereses y capital es a través del aforo (conocido también como sobrecolateral) con o sin "turbo". Una emisión presenta un aforo cuando el monto de principal de créditos bursatilizados es mayor que el principal de los bonos emitidos, siendo la diferencia de estos montos lo que se utiliza como respaldo de la garantía. Entre mayor sea el aforo, mejor es la calidad crediticia de los bonos preferentes.

El aforo se expresa como porcentaje del saldo de la cartera subyacente, siendo el fiduciario el encargado de alcanzar y mantener el nivel de aforo objetivo. Una herramienta que se utiliza para cumplir con este objetivo es el turbo. El turbo se refiere al uso del diferencial entre el interés pagado en los créditos hipotecarios que respaldan la emisión y el interés pagado por los BORHIs para pagar principal a los tenedores de los bonos.

Por último, el Full-Wrap es una garantía financiera al 100% que un tercero otorga a la emisión, por lo general se acompaña de un bono subordinado.

Por todo el desarrollo de esta sección, se sostiene que la bursatilización de créditos hipotecarios para vivienda es una opción bastante atractiva de ingeniería financiera que facilita una mayor y más sostenible captación de recursos a largo plazo para el sector de la vivienda y que propicia una reducción en las tasas de interés de los créditos hipotecarios. Además, permite una distribución de los riesgos inherentes a la originación y administración de los créditos.

## 1.3 Definición de BORHI

Después de la sección anterior ya se tienen las condiciones necesarias para que la definición de un BORHI pueda ser explicada con plenitud.

Un Bono Respaldado por Hipotecas (BORHI) es un Certificado Bursátil producto de una bursatilización de un conjunto de créditos hipotecarios para vivienda originados por una SOFOL, SOFOM ó un banco comercial. Es un instrumento financiero de largo plazo, denominado en udis o en pesos y que paga mensualmente tanto intereses a una tasa fija como principal, sin ser el segundo una obligación excepto en la fecha de vencimiento.

En la siguiente sección aparecen de manera más específica las características de todos los BORHIs que han sido emitidos hasta septiembre de 2008.

En cumplimiento al compromiso adquirido por SHF para impulsar el desarrollo y estandarización del Mercado Secundario de Hipotecas, todo BORHI deberá certificarse como tal ante SHF bajo los requisitos del Boletín Informativo "Certificados Bursátiles Respaldados por Hipotecas (BORHIs)" que puede consultarse en la página web de dicha institución.

En resumen, el Boletín menciona los siguientes requisitos:

- La emisión debe realizarse a través de una oferta pública con base en la afectación en fideicomiso de créditos con garantía hipotecaria.

- Contar con al menos dos calificaciones crediticias equivalentes al grado de inversión más alto en la escala nacional.

- Transferencia de pagos de interés y principal de los créditos bajo el mismo concepto y de forma directa a los BORHIs, siempre y cuando se respete la prelación de flujos establecida en el prospecto de colocación.

- Designar un custodio de la documentación relativa a los créditos que respaldan la emisión.

- Designar un administrador sustituto.

- La cartera debe cumplir con los criterios de elegibilidad establecidos por SHF como son el nivel de LTV (loan to value), el seguro de crédito hipotecario, expedientes completos y debidamente integrados, no estar en cartera vencida, que la finalidad del crédito sea la adquisición de una vivienda, etc.

## 1.4 Características de los BORHIs

Las características de los BORHIs que se presentan en esta sección se refieren a las emisiones desde diciembre del 2003, cuando fue la primera emisión, hasta septiembre de 2008 con la emisión respaldada con cartera de HSBC, de acuerdo con la Fuente de Información Estadística Hipotecaria creada por SHF para centralizar la información proveniente de los participantes en el esquema de bursatilización de cartera hipotecaria.

En dicho periodo, se realizaron 44 colocaciones distribuidas por años como lo muestra la Tabla 1:

| No. Colocaciones de BORHIs | |
|---|---|
| **Año** | **No. Colocaciones** |
| 2003 | 1 |
| 2004 | 3 |
| 2005 | 5 |
| 2006 | 14 |
| 2007 | 15 |
| sep-2008 | 6 |
| **2003 - sep-2008** | **44** |

Tabla 1

A continuación se presenta una breve descripción de las colocaciones de BORHIs que se realizaron entre 2003 y septiembre de 2008:

a) **Estructuras**.

Con base en el reporte de cobranza que recibe mensualmente del administrador de la cartera bursatilizada, el fiduciario determina los montos totales de pagos recibidos de los deudores de los créditos hipotecarios por concepto de intereses y de principal. Después, con base a las reglas y prelación de la distribución que establece el Contrato de Fideicomiso, realiza entre otros pagos los relacionados con los intereses y el principal de los certificados bursátiles. Básicamente, las reglas y prelación de distribución de pagos de estos dos conceptos determinan lo que se conoce como la estructura de la emisión.

Las emisiones de BORHIs, hasta septiembre de 2008, presentan cuatro estructuras:

1) Passthrough. Los inversionistas reciben en igual proporción todos los pagos de intereses y de principal del conjunto de hipotecas.

2) Preferente - Subordinado. Mensualmente se pagan los intereses del bono preferente (serie A) y después los del bono subordinado (serie B). Posteriormente, se paga principal del bono preferente y después principal del bono subordinado. Los bonos subordinados son parte del capital del fideicomiso.

3) Secuencial. En esta estructura existen dos series A1 y A2. El pago de intereses es en igual proporción a las dos series y todos los pagos de principal, incluyendo prepagos, son adjudicados a los bonos A1. Cuando la serie A1 es liquidada entonces se empieza a amortizar la serie A2.

4) Secuencial - Subordinado. Esta estructura es la combinación de la segunda y tercera estructuras. Las series preferentes que amortizan secuencialmente son A1 y A2, en ese orden, y la serie B es la subordinada.

De las 44 emisiones que se realizaron en el periodo mencionado 22 presentan una estructura passthrough; 18 emisiones tienen series A y B; 3 emisiones tienen series A1, A2 y B; y sola una emisión tiene series A1 y A2.

Para una explicación más detallada de las estructuras se pueden consultar las referencias [5] Capítulo 4 y [20].

b) **Denominación y número de emisiones por año**.

Todas las emisiones han sido emitidas en udis ó en pesos; en la Tabla 2 se presenta la distribución de las emisiones por año de cada denominación:

| **No. Colocaciones de BORHIs** | | | |
|---|---|---|---|
| **Año** | **udis** | **pesos** | **total** |
| 2003 | 1 | 0 | 1 |
| 2004 | 3 | 0 | 3 |
| 2005 | 5 | 0 | 5 |
| 2006 | 11 | 3 | 14 |
| 2007 | 9 | 6 | 15 |
| sep-2008 | 2 | 4 | 6 |
| **2003 - sep-2008** | **31** | **13** | **44** |

Tabla 2

Casi tres cuartas partes de las emisiones están denominadas en UDIS, se observa que el número de emisiones con esta denominación fue creciendo hasta llegar a un máximo en 2006 de 11 emisiones. Las emisiones en pesos comenzaron hasta 2006 y alcanzaron el máximo en 2007 con 6 emisiones.

En el periodo observado de 2008 se presentó una brusca disminución en el número de emisiones tanto en pesos como en udis, debido a que el nerviosismo de los inversionistas generado por la crisis hipotecaria que vive Estados Unidos ha dificultado la colocación de BORHIs.

c) **Montos Colocados**.

Para el análisis de los montos colocados de BORHIs se cuenta con la Figura 3:

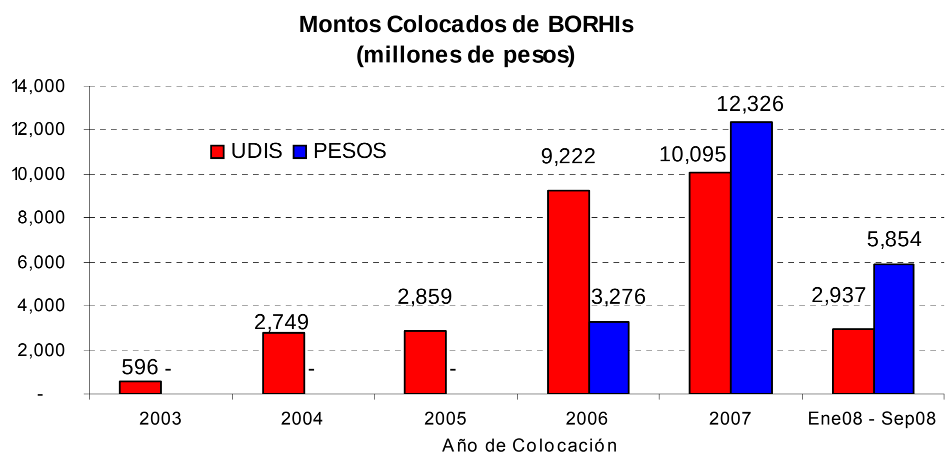


Figura 3

Los montos colocados en udis tuvieron un crecimiento notable en 2006 triplicándose prácticamente el monto colocado respecto al año anterior. En 2007, las colocaciones en udis y en pesos llegaron a su valor máximo de 10,095 y 12,326 millones de pesos respectivamente. De enero a septiembre de 2008, como consecuencia de la disminución del número de emisiones, los montos colocados tanto en udis como en pesos presentaron bajas por más del 50% con respecto a los montos colocados en 2007. El monto total colocado de 2003 a septiembre de 2008 fue de 49,912 millones de pesos, de los cuales el 57% corresponde a emisiones denominadas en udis y 43% a emisiones denominadas en pesos.

c) **Plazos de las emisiones**.

En la Tabla 3 se presenta para cada año el plazo de las emisiones ponderado según el monto colocado:

| Plazos BORHIs | |
|---|---|
| **Año** | **Plazo ponderado (años)** |
| 2003 | 16.00 |
| 2004 | 29.87 |
| 2005 | 29.44 |
| 2006 | 25.76 |
| 2007 | 23.88 |
| sep-2008 | 23.04 |
| **2003 - sep-2008** | **24.76** |

Tabla 3

Los plazos ponderados al momento de la colocación van desde 16 años hasta 29.87años. A partir de 2005 los plazos han disminuido por casi 7 años, desde 29.87 años en 2004 a 23.04 años en 2008. Durante todo el periodo estudiado el plazo promedio ponderado es de 24.76 años.

c) **Edad promedio de las carteras bursatilizadas al momento de las colocaciones**.

Para cada emisión se cuenta con la edad promedio de la cartera bursatilizada. La Tabla 4 muestra por año la edad promedio ponderada por monto colocado:

| Edad promedio ponderada de cartera bursatilizada | |
|---|---|
| **Año** | **Edad (años)** |
| 2003 | 2.22 |
| 2004 | 2.15 |
| 2005 | 2.87 |
| 2006 | 2.91 |
| 2007 | 1.84 |
| sep-2008 | 1.62 |
| **2003 - sep-2008** | **2.15** |

Tabla 4

De 2003 a 2006 la edad promedio ponderada estuvo por arriba de los dos años, de hecho alcanzó su máximo en 2006. La disminución de la edad promedio ponderada en 2007 se debió en parte a que los bancos comerciales comenzaron a bursatilizar carteras hipotecarias más jóvenes. Además, la SOFOL "Su Casita" bursatilizó cartera en tres ocasiones con las edades promedio más bajas de 2007.

El mínimo y el máximo de la edad promedio ponderada se presentaron en 2008 y 2006 con 1.62 años y 2.91 años respectivamente.

## 1.5 Riesgos de los BORHIs

- **Riesgo emisor**.

Se refiere a la posibilidad de que el emisor de los certificados bursátiles no tenga la capacidad de realizar los pagos de la deuda en los términos planteados inicialmente. El análisis de este riesgo se enfoca a la situación de la propia entidad financiera, a sus flujos esperados, al entorno económico en que se desenvuelve y a las expectativas que determinan su mercado.

En México, las calificaciones de riesgo según emisor son otorgadas por tres entidades: Standard & Poor's, Moody's México y Fitch México. La calificación asignada permite que el ahorrador reciba la tasa de interés justa por el riesgo que está adquiriendo. De esta manera, tiene la posibilidad de incrementar el rendimiento de su inversión aprovechando las sobretasas que pagan las emisoras con baja calificación; o por el contrario, es capaz de sacrificar parte de su rendimiento a cambio de mantener activos con un elevado nivel de seguridad ó de solvencia del emisor.

- **Riesgo del administrador de los créditos hipotecarios**.

Se refiere a la posibilidad de que el administrador de los créditos hipotecarios que respaldan la emisión no se desempeñe adecuadamente en la administración y cobranza de los mismos. Como consecuencia, el patrimonio del fideicomiso contará con menos recursos líquidos, afectando en forma negativa la capacidad de pagar las cantidades adecuadas bajo los certificados bursátiles.

El contrato de administración no prevé penas convencionales en caso de que el administrador incumpla con sus obligaciones bajo el mismo, sin embargo, éste sería responsable de los daños que resulten de dichos incumplimientos.

La buena calificación del administrador de los activos y la existencia de un buen administrador sustituto indican un alto control de este riesgo.

- **Riesgo de mercado**.

El riesgo de mercado es la pérdida ante movimientos adversos en las variables del mercado que afectan los precios de los certificados bursátiles. Hasta el momento los BORHIs han sido colocados a largo plazo con tasas de cupón fijas, en consecuencia sus precios presentan variaciones fuertes frente a los cambios en las tasas de interés.

- **Riesgo de liquidez**.

Este riesgo se refiere a la capacidad de operación que tiene cada BORHI en el mercado secundario, es decir, se refiere a la facilidad con que se puede comprar o vender un BORHI antes de su fecha de vencimiento.

La madurez de un mercado secundario de un instrumento de deuda está en función de la estructura de demanda por el instrumento. Cuando la demanda es constante, la operación se vuelve más dinámica.

En el caso de los BORHIs existen demandantes naturales como son las Siefores y las aseguradoras que le otorgan liquidez a estos instrumentos. Además, la SHF creó la figura de formador de mercado para darles mayor liquidez a estos instrumentos.

Sin embargo, por factores como la falta de estandarización de los BORHIs, la complejidad para valuar estos instrumentos, y la desconfianza de los inversionistas derivada de la crisis hipotecaria de Estados Unidos, no se han cumplido los niveles de liquidez necesarios para que el mercado secundario de BORHIs comience a madurar.

- **Riesgo de incumplimiento**.

Como todo instrumento de deuda, los BORHIs enfrentan un riesgo de crédito que puede tener como consecuencia el incumplimiento de los pagos de interés o de principal, vinculado a la morosidad de los créditos hipotecarios que respaldan las emisiones. Históricamente se ha observado que una morosidad de seis o más pagos vencidos en un crédito hipotecario se puede considerar como una morosidad que el acreditado difícilmente supera.

- **Riesgo de prepago**.

El riesgo de prepago es la posibilidad de que la amortización del BORHI se produzca a un ritmo más acelerado que el previsto y que el inversionista incurra en un costo de oportunidad por tener que reinvertir los recursos prepagados a tasas de interés más bajas que las proporcionadas por el certificado bursátil. En el segundo capítulo de este trabajo se estudia con mayor profundidad el prepago en la cartera subyacente de un BORHI y se propone un modelo para tal evento.

- **Riesgo de pago de los Seguros**.

De conformidad con los términos de los créditos hipotecarios y del Contrato de Administración, el administrador debe de contratar y mantener pólizas de seguros que cubran los riesgos de muerte e incapacidad total y permanente de los deudores hipotecarios, así como cobertura de daños con respecto a los inmuebles hipotecados. Los tenedores de los certificados bursátiles deben tomar en cuenta el riesgo de que las aseguradoras no paguen el monto total de cualquier reclamación que por cualquiera de dichos conceptos le formule el administrador, incluyendo que las aseguradoras consideren procedente dicha reclamación, el monto del pago correspondiente y que apliquen limitaciones a las coberturas o a las condiciones para su pago.

- **Riesgo de ejecución de garantías**.

Las ejecuciones tanto del seguro de crédito hipotecario como de la garantía financiera para la emisión (GPI y GPO para SHF) están sujetas a que el fiduciario esté al corriente en el pago de la prima ó comisiones a favor de la aseguradora.

Los términos y condiciones que se indican en el seguro de crédito señalan que la garantía será ejercida una vez que el procedimiento para la recuperación del crédito hipotecario incumplido ha concluido, es decir, hasta que la pérdida es realizada de forma definitiva. En consecuencia, no se conoce con certeza el tiempo que pueda transcurrir entre la fecha en que un crédito hipotecario es incumplido y la fecha en que la garantía sea efectivamente ejercida, lo que puede afectar adversamente el patrimonio fideicomitido (ver Glosario).

Con respecto a la ejecución de la garantía financiera para la emisión, los tenedores de los certificados bursátiles no podrán requerir directamente a la aseguradora que cumpla con sus obligaciones de pago. El ejercicio de esta garantía requiere que el propio fiduciario emisor, con la anticipación señalada en el contrato que regule dicha garantía y siguiendo el procedimiento que corresponda, lo solicite directamente al otorgante a efecto de contar con los recursos necesarios para pagar a los tenedores el principal e intereses.

El incumplimiento por parte del fiduciario en solicitar oportunamente los recursos o del otorgante de la garantía financiera en entregar los recursos solicitados puede afectar adversamente los derechos de los tenedores de los certificados bursátiles.

- **Riesgo por factores económicos o políticos**.

La totalidad de los deudores hipotecarios se ubican en México, por tanto, el desempeño de los créditos hipotecarios y el pago de los certificados bursátiles dependen, entre otros factores, del desempeño de la economía del país, incluyendo el nivel de crecimiento en la actividad económica y de la generación y estabilidad del empleo. Eventos políticos, económicos o sociales adversos que pudieran afectar la capacidad de pago de los deudores hipotecarios pueden también afectar de forma negativa el valor de las garantías y la capacidad de pagar las cantidades adeudadas bajo los certificados bursátiles.

Nota:Las referencias [11] a la [20], con excepción de la referencia [13], sirvieron como documentos de investigación para el Capítulo 1.

# Capítulo 2

# Modelo de prepago

En el capítulo anterior se menciona que uno de los principales factores de riesgo implícito en un BORHI es el riesgo de prepago, de ahí la importancia de modelar las tasas de prepago de una cartera hipotecaria y desarrollar una metodología para incorporarlas en la valuación de un BORHI. De hecho en este trabajo, el modelo de las tasas de prepago se presenta como la parte central de la valuación de un BORHI.

Cabe mencionar que, en realidad, la parte central de la valuación la comparten las tasas de incumplimiento y las tasas de prepago. Sin embargo, se decidió enfocar la valuación solamente a la parte de las tasas de prepago debido a que el fenómeno de aceleración de amortización en una cartera hipotecaria había sido poco estudiado en comparación con el fenómeno de incumplimiento.

El desarrollo del capítulo lleva de manera paralela la teoría y aplicación de la misma a una emisión de BORHIs, comienza con las definiciones de prepago total y prepago parcial e inmediatamente se presenta la convención para medir mensualmente las tasas de cambio en dichos fenómenos.

La parte medular de éste capítulo es modelar conjuntamente las tasas de prepago total y prepago parcial como una Cadena de Markov de orden r. El espacio de estados de la cadena se determina en base a un análisis de las tasas históricas y la estimación de la matriz de transición se realiza convirtiendo la cadena de orden r a una cadena de orden 1 y estimando para ésta la matriz de transición. El orden de la cadena se toma en base a pruebas de hipótesis del orden de dependencia.

Por último, se presenta un método para simular conjuntamente las tasas de prepago total y prepago parcial.

El programa que replica toda la metodología desarrollada en este capítulo y el siguiente se presenta en el Apéndice A.3.

## 2.1 Definición de prepago

Recordemos que en la originación de un crédito hipotecario se fija el pago nivelado que el deudor hipotecario pagará mensualmente durante toda la vida del crédito, dicho pago comprende tanto intereses como principal programado. Cuando el deudor hipotecario paga en un mes un monto mayor al pago nivelado se dice que el acreditado está prepagando su deuda.

En base a lo anterior, se puede definir el prepago de un crédito hipotecario como la diferencia entre el pago realizado y el pago nivelado, siempre y cuando el pago realizado sea mayor al pago nivelado. Si con esa diferencia el deudor liquida su crédito, entonces se dice que el prepago es total. De lo contrario, se dice que el prepago es parcial ya que sólo está disminuyendo su deuda.

En el análisis de un sólo crédito es clara la manera en que los prepagos totales y parciales afectan el principal programado en los meses siguientes. El prepago total disminuye en 100% tanto el principal programado como los intereses de los siguientes períodos, como lo muestra la Figura 4.

En contraste, el prepago parcial aumenta el principal programado y disminuye los intereses de los meses subsecuentes. La Figura 5 compara un esquema de pagos antes y después de un prepago parcial. La curva en negro representa la distribución de intereses y principal en el pago nivelado siguiendo el esquema sin prepago. Las barras verdes y azules ejemplifican la distribución de intereses y principal en el pago nivelado con un prepago parcial a los 2 años.

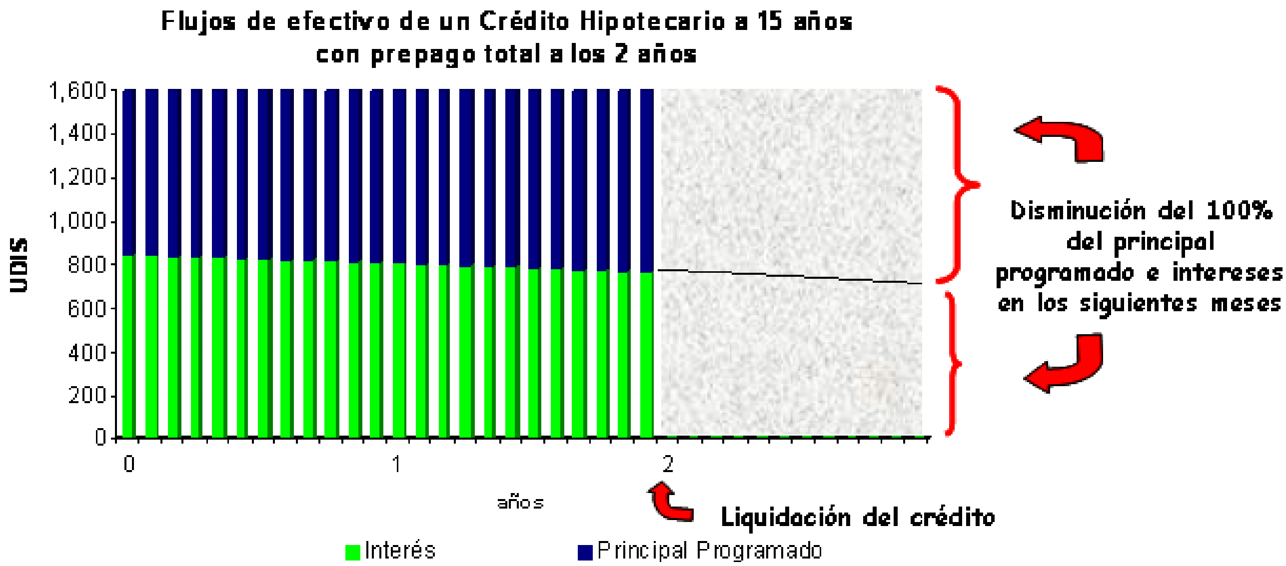


Figura 4

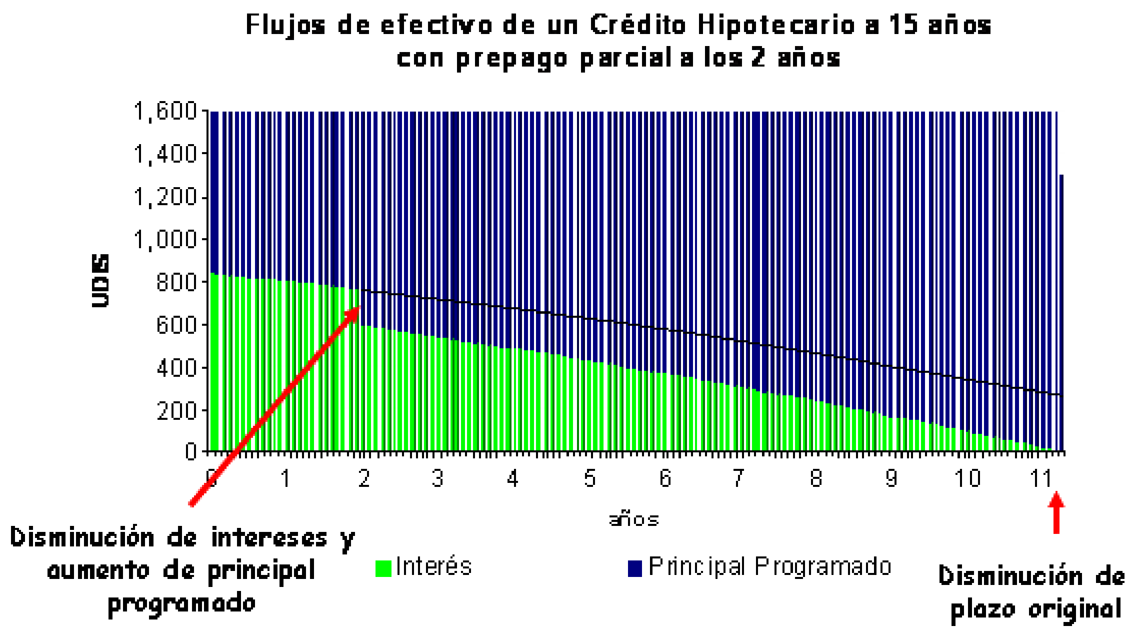


Figura 5

Tanto los prepagos totales como los prepagos parciales producen una aceleración de la amortización en el crédito hipotecario y en consecuencia la liquidación de la deuda es en un plazo más corto que el plazo convenido originalmente.

Debido a los efectos inversos que los prepagos totales y parciales tienen en el principal programado de los siguientes meses es necesario registrarlos y analizarlos por separado, necesidad que es aún más importante si se quiere analizar el prepago de toda una cartera hipotecaria.

Por otro lado, la amortización de un BORHI está totalmente en función de la amortización de la cartera que lo respalda. Si existe una aceleración de la amortización de la cartera subyacente, entonces el BORHI amortizará más rápido de lo esperado. Por tanto, los prepagos totales y parciales de la cartera bursatilizada influirán en la velocidad de amortización de los certificados bursátiles según la estructura del fideicomiso.

## 2.2 Medición de prepago de una cartera hipotecaria

A pesar de conocer los efectos de los prepagos parciales y totales en el principal programado de un crédito hipotecario, existe la incertidumbre del tiempo en que ocurrirán y de los montos que se prepagarán. Esta incertidumbre se hace todavía más grande cuando se estudia el prepago de toda una cartera hipotecaria.

Para analizar los prepagos históricos de una cartera hipotecaria se tienen por convención las siguientes mediciones:

- **SMM Single Monthly Mortality Rate**:

$$SMM_t = \frac{Monto\ \Pr epagado_t}{Saldo\, Inicial_t - Pago\, de\ \Pr incipal\ \Pr ogramado_t}$$

Se interpreta como la tasa mensual de prepago en el mes $t$. La fórmula nos dice que la tasa de prepago mensual es la proporción del monto prepagado con respecto al saldo que se puede liquidar después de descontar el pago de principal programado.

- **CPR Conditional Prepayment Rate**:

$$CPR_t = 1 - (1 - SMM_t)^{12}$$

Se interpreta como la tasa anualizada de prepago del mes $t$ bajo el supuesto de que el $SMM_t$ permanece constante durante todo un año.

Tan sólo para diferenciar las mediciones de prepago total y prepago parcial se definen las siguientes tasas:

$$SMM_t^T = \frac{Monto\, de\, \Pr epagos\, Totales_t}{Saldo\, Inicial_t - Pago\, de\, \Pr incipal\, \Pr ogramado_t} \quad ,$$

$$SMM_t^P = \frac{Monto\, de\, \Pr epagos\, Parciales_t}{Saldo\, Inicial_t - Pago\, de\, \Pr incipal\, \Pr ogramado_t} \quad ,$$

y sus respectivas tasas anualizadas

$$CPR_t^T = 1 - (1 - SMM_t^T)^{12} \tag{2.1}$$

y

$$CPR_t^P = 1 - (1 - SMM_t^P)^{12}. \tag{2.2}$$

En este trabajo las tasas de prepago se manejan multiplicadas por 100.

## 2.3 Modelo de prepago

En esta sección se desarrolla de manera paralela la teoría concerniente al modelo de prepago de una cartera hipotecaria y la aplicación de la misma a los datos históricos de prepagos de la cartera subyacente a la emisión de BORHIs con serie MXMACCB04U. Los datos consisten en 28 parejas de tasas anualizadas de prepago total y prepago parcial desde julio de 2006 hasta octubre de 2008. En la página electrónica de GMAC RFC se puede encontrar la información para el cálculo del histórico de tasas anualizadas de prepago total y prepago parcial.

Si se analiza un solo crédito es comprensible pensar que el prepago que está por realizarse depende de los prepagos de meses anteriores. Por ejemplo, si el crédito ha presentado un nivel constante de prepago es muy probable que el siguiente mes se registre un prepago con ese mismo nivel. Otro ejemplo se presenta cuando el crédito sólo ha tenido registrados prepagos muy esporádicos con niveles bajos, entonces se pensaría que el siguiente mes el prepago estará en un nivel bajo. Otro caso podría ser cuando el crédito tenga registrada en el último mes una tasa de prepago muy alta con respecto a los meses anteriores, entonces lo más probable es que al siguiente mes la tasa de prepago estará alrededor de los niveles presentados hasta el penúltimo mes.

Para analizar las tasas de prepago de una cartera hipotecaria se tienen que agrupar los comportamientos de todos los créditos sin perder la dependencia con el pasado, de ahí que sea razonable pensar que las tasas de prepago de una cartera se puedan modelar como una Cadena de Markov que tal vez no sólo dependa de un mes anterior sino de varios meses atrás.

Un modelo de prepago de una cartera hipotecaria quedaría determinado con la matriz de transición de la Cadena de Markov de tasas de prepago $\left(CPR_t^T, CPR_t^P\right)_{t=1,2,\ldots,N}$ con espacio de estados $E = [0, 100] \times [0, 100]$, donde $N$ es el tiempo en que el saldo insoluto final de la cartera es cero.

Para simplificar este modelo conviene transformar la cadena de tasas de prepago $\left(CPR_t^T, CPR_t^P\right)_{t=1,2,\ldots,N}$ en una Cadena de Markov univariada ergódica de orden r con espacio de estados finito discreto, es decir, transformándola en una Cadena de Markov $(X_t)_{t=1,2,\ldots,N}$ con espacio de estados $E' = \{1, 2, ..., m\}$, con todos sus estados recurrentes, aperiódicos y con una sola clase de comunicación tal que

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} &= a_{n+1} \mid X_n = a_n, X_{n-1} = a_{n-1}, ..., X_{n-r+1} = a_{n-r+1}, ..., X_0 = a_0] \\ &= P[X_{n+1} = a_{n+1} \mid X_n = a_n, X_{n-1} = a_{n-1}, ..., X_{n-r+1} = a_{n-r+1}], \end{aligned}$$

igualdad que nos indica que la probabilidad del estado actual dado el pasado sólo depende de los r estados anteriores.

Cabe mencionar que cualquier transformación de la cadena debe buscar que ésta sea ergódica, propiedad que se tiene que verificar una vez realizada la transformación. Más adelante se indica como podría llevarse a cabo dicha verificación.

El orden de dependencia de la Cadena de Markov se establece en base a los resultados de una o varias pruebas de hipótesis en las que se utilizan los datos históricos de prepagos totales y prepagos parciales (ver Apéndice A2 resultado 2).

Primero se realiza la prueba de hipótesis $H_0(1)$ $vs$ $H_1(2)$, donde $H_0(1)$ representa la hipótesis nula "La Cadena de Markov es de orden 1" y $H_1(2)$ representa la hipótesis alternativa "La Cadena de Markov es de orden 2". Si no existe evidencia para rechazar $H_0(1)$ entonces la Cadena de Markov se tomará de orden 1, en caso contrario se lleva a cabo la prueba de hipótesis $H_0(2)$ $vs$ $H_1(3)$. Y así sucesivamente hasta que no exista evidencia para rechazar alguna $H_0(r)$, lo que indicaría que la Cadena de Markov es de orden r.

Con la finalidad de transformar la cadena $(CPR_t^T, CPR_t^P)_{t=1,2,...,N}$ de la emisión MXMACCB04U en una Cadena de Markov univariada de orden 1, se utilizaron las parejas $(CPR_t^T, CPR_t^P)_{t=1,2,...,28}$ en el siguiente procedimiento:

1) Se dividieron por separado los rangos de las tasas de prepago total y prepago parcial de manera que en todos los intervalos perteneciera al menos una tasa de prepago en algún $t \in \{1, 2, ..., 28\}$. En las Figuras 6 y 7 se muestran las series $(CPR_t^T)_{t=1,2,...,28}$ y $(CPR_t^P)_{t=1,2,...,28}$ con sus respectivos intervalos:

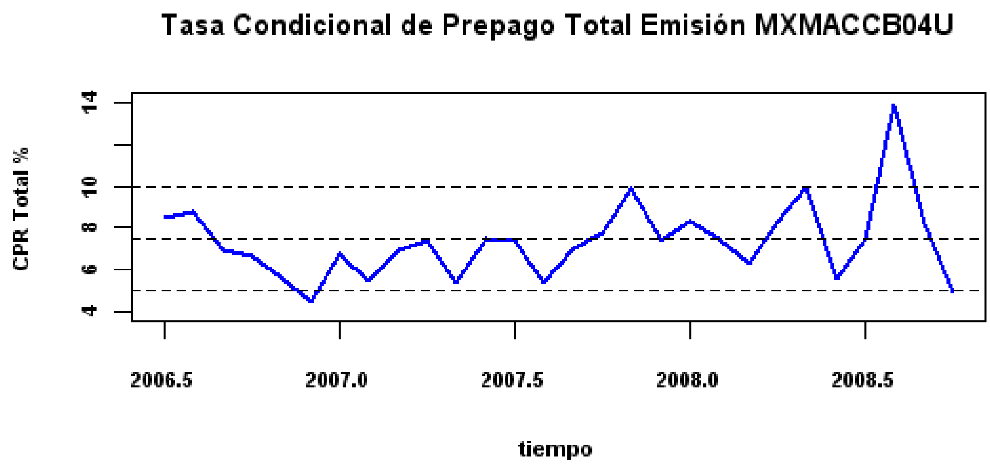


Figura 6

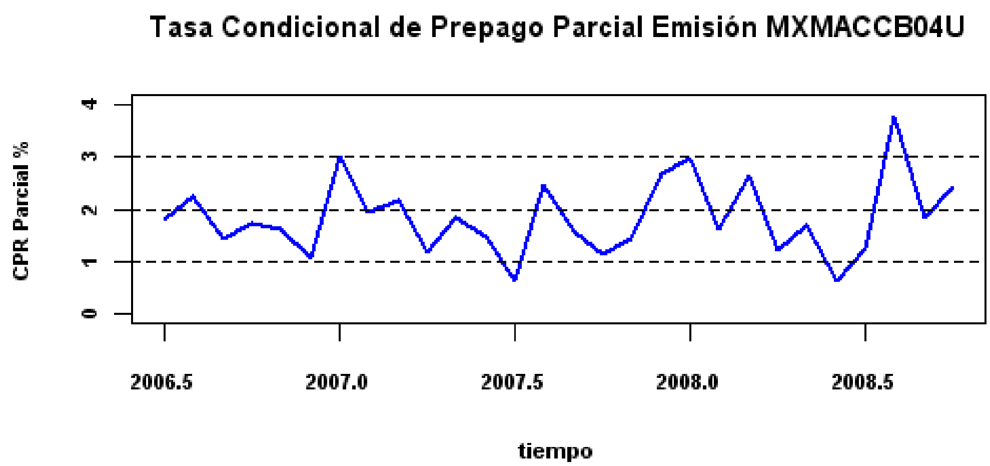


Figura 7

En la Tabla 5 se pueden encontrar las parejas de tasas de prepago.

| Prepago Total | | Prepago Parcial | |
|---|---|---|---|
| Estado | CPR % | Estado | CPR % |
| 1 | [0,5) | 1 | [0,1) |
| 2 | [5,7.5) | 2 | [1,2) |
| 3 | [7.5,10) | 3 | [2,3) |
| 4 | [10,100) | 4 | [3,100) |

Tabla 5

2) Se asignaron 4 estados de prepago total y 4 estados de prepago parcial en base a los intervalos propuestos, de manera que a cada pareja $(CPR_t^T, CPR_t^P)$ se le asignó una pareja de estados $(e_t^T, e_t^P)$ de acuerdo con la Tabla 5.

3) A las 16 parejas de estados $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),...,(4,4)$ se les enumeró en ese orden para convertirlas en los estados $1,2,3,4,5,...,16$ y de manera conjunta se calcularon sus frecuencias:

| Edo | PT | PP | Frecuencia |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 1 |
| 4 | 1 | 4 | 0 |
| 5 | 2 | 1 | 2 |
| 6 | 2 | 2 | 7 |
| 7 | 2 | 3 | 4 |
| 8 | 2 | 4 | 1 |
| 9 | 3 | 1 | 0 |
| 10 | 3 | 2 | 9 |
| 11 | 3 | 3 | 2 |
| 12 | 3 | 4 | 0 |
| 13 | 4 | 1 | 0 |
| 14 | 4 | 2 | 0 |
| 15 | 4 | 3 | 0 |
| 16 | 4 | 4 | 1 |

Tabla 6

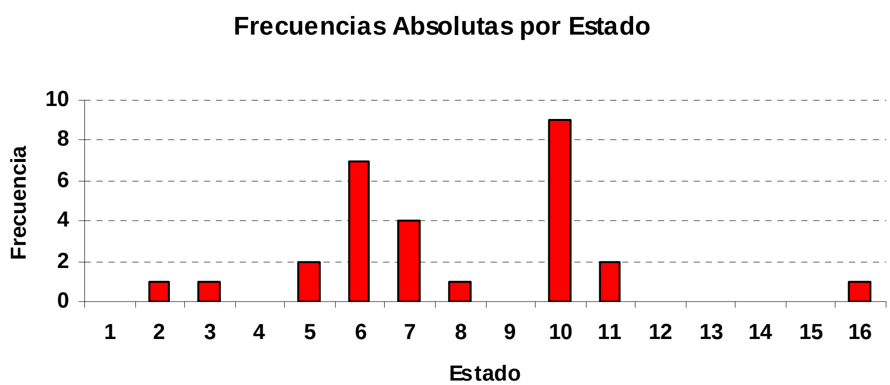


Figura 8

Los estados con mayor frecuencia son los que originalmente están relacionados conjuntamente con una tasa de prepago total entre 5% y 10% y una tasa de prepago parcial entre $1\%$ y $3\%$. También hay que notar que 7 estados tienen frecuencia cero, y que por tanto hay que redefinir el espacio de estados de tal manera que todos los estados tengan frecuencias positivas. Si la reasignación de estados no se lleva a cabo la cadena de Markov que se está construyendo no es ergódica.

4) Se reasignaron los estados dejando sólo a los que presentaron frecuencias positivas:

| Edo | PT | PP | Frecuencia |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 2 | 2 | 7 |
| 5 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 2 | 4 | 1 |
| 7 | 3 | 2 | 9 |
| 8 | 3 | 3 | 2 |
| 9 | 4 | 4 | 1 |

Tabla 7

Al seleccionar solamente los estados con frecuencias positivas se auxilia a construir una Cadena de Markov ergódica.

5) De acuerdo a la Tabla 7 se convirtieron las parejas $(e_t^T, e_t^P)$ en estados $e_t$ que toman valores del 1 al 9. La trayectoria transformada $(e_t)_{t=1,2,\ldots,28}$ resultó como sigue:

7 8 4 4 4 1 6 4 5 4 4 7 3 5 4 7 7 5 8 7 5 7 7 3 7 9 7 2

6) Con base en los pasos 1)-5) se definió a $(X_t)_{t=1,2,\ldots,N}$ como la transformación de la cadena $\left(CPR_t^T, CPR_t^P\right)_{t=1,2,\ldots,N}$ con espacio de estados $E' = \{1, 2, ..., 9\}$.

7) Se realizó la prueba de hipótesis $H_0(1)$ $vs$ $H_1(2)$, donde $H_0(1)$ representa la hipótesis nula "La Cadena de Markov $(X_t)_{t=1,2,\ldots,N}$ es de orden 1". El valor del estadístico de prueba es $43.52$, mientras que el cuantil $.90$ de una variable aleatoria ji-cuadrada con 576 grados de libertad es de $619.90$, por tanto no existe evidencia para rechazar $H_0(1)$ (ver Apéndice A2 resultado 2).

Si se presenta el caso de que el orden de dependencia de la Cadena de Markov $(X_t)_{t=1,2,\ldots,N}$ es mayor que uno, entonces se debe hacer otra transformación para obtener una Cadena de Markov de orden 1. (ver Apéndice A2 primera parte del resultado 2).

Una vez que se tiene una Cadena de Markov de orden 1 se procede a estimar su matriz de transición. Por la naturaleza del problema se decidió utilizar una estimación no paramétrica que consiste en calcular los estimadores de máxima verosimilitud de cada entrada de la matriz de transición. Por el resultado 1 del Apéndice 2, cada entrada de la matriz de transición queda determinada por

$$\widehat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i},$$

donde $n_{ij}$ es la frecuencia de transición del estado $i$ al estado $j$ y $n_i = \sum_j n_{ij}$.

La ergodicidad es una hipótesis bajo la cual trabaja el resultado 1 del Apéndice 2, es necesaria para asegurar que exista la distribución estacionaria límite de la Cadena de Markov y así las estimaciones $\widehat{p}_{ij}$ sean válidas para cualquier tamaño de muestra.

Al calcular esta estimación con los datos de la trayectoria transformada $(e_t)_{t=1,2,\ldots,28}$ de la emisión MXMACCB04U se obtuvo la siguiente matriz $P$:

**MATRIZ DE TRANSICIÓN ESTIMADA PARA LA CADENA DE MARKOV**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| **2** | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| **3** | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.5000 | 0.0000 | 0.5000 | 0.0000 | 0.0000 |
| **4** | 0.1429 | 0.0000 | 0.0000 | 0.4286 | 0.1429 | 0.0000 | 0.2857 | 0.0000 | 0.0000 |
| **5** | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.5000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.2500 | 0.2500 | 0.0000 |
| **6** | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| **7** | 0.0000 | 0.1111 | 0.2222 | 0.0000 | 0.2222 | 0.0000 | 0.2222 | 0.1111 | 0.1111 |
| **8** | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.5000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.5000 | 0.0000 | 0.0000 |
| **9** | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Tabla 8

Si se analiza detenidamente la trayectoria $(e_t)_{t=1,2,\ldots,28}$ se observa que el estado 2 sólo aparece al final y en consecuencia no se sabe con certeza a que estado transita. La repercusión de este hecho es que los estimadores de máxima verosimilitud para el segundo renglón de la matriz de transición no se pueden calcular. Lo que se hizo para resolver este pequeño problema fue encontrar la pareja $(CPR_t^T, CPR_t^P)$ que en distancia estuviera más cercana a la última pareja $(CPR_{28}^T, CPR_{28}^P)$ y se heredó la transición.

Por otra parte, se hizo un análisis de las propiedades de los estados para verificar que efectivamente la Cadena de Markov $(X_t)_{t=1,2,\ldots,N}$ fuese ergódica. La Figura 9 es un auxiliar en dicho análisis:

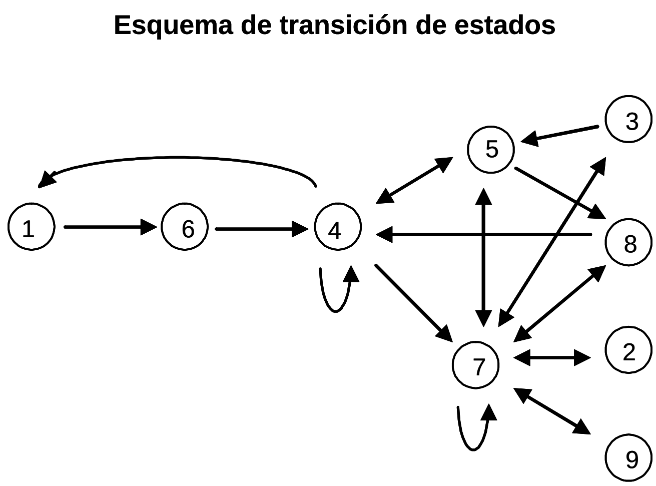


Figura 9

De acuerdo a la matriz de transición estimada se cumple que:

a) El estado 7 se comunica con los estados 2,3,5,8 y 9.

b) A partir del estado 1 se tienen los siguientes accesos

$$1 \longrightarrow 6 \longrightarrow 4 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 1$$

c) Por a) y b) existe una sola clase de comunicación.

d) De b) se tienen que el estado 1 es recurrente.

e) Como la propiedad de recurrencia es de clase, entonces por c) y d) todos los estados son recurrentes.

f) El estado 4 es aperiódico pues el mínimo común divisor del conjunto $\left\{n \geqslant 1 : P_{4,4}^{(n)} > 0\right\}$ es igual a 1 porque $P_{4,4} > 0$.

g) Como la propiedad de aperiodicidad es de clase, entonces por c) y f) todos los estados son aperiódicos.

Por lo tanto, la Cadena de Markov $(X_t)_{t=1,2,...,N}$ es ergódica.

## 2.4 Simulación de tasas de prepago

En esta sección se mencionará un método para simular tasas de prepago de una cartera hipotecaria, que junto con el material que se presenta en el Capítulo 3 sirve para calcular el precio de un BORHI.

De acuerdo a la sección anterior, el modelo de prepago se dio en base a una Cadena de Markov $(X_t)_{t=1,2,...,N}$ con espacio de estados $E' = \{1, 2, ..., m\}$ y matriz de transición $P$. Entonces, para simular tasas de prepago sólo es necesario partir del último dato conocido, digamos de $X_n = e_n$, y usar el resultado 3 del Apéndice A2 para simular una trayectoria de la cadena $(X_t)_{t=n+1,n+2,...,N}$ .

Ya que se haya simulado la trayectoria de la cadena $(X_t)_{t=n+1,n+2,...,N}$ es necesario transformarla a una trayectoria de tasas de prepago y después a flujos de efectivo.

Sea $(e_t)_{t=n+1,n+2,...,N}$ la trayectoria simulada de $(X_t)_{t=n+1,n+2,...,N}$ . Bajo el procedimiento siguiente se convierte la trayectoria $(e_t)_{t=n+1,n+2,...,N}$ en una trayectoria de la cadena $\left(CPR_t^T, CPR_t^P\right)_{t=n+1n+,2,...,N}$ :

a) Convertir cada $e_t$ en una pareja de estados de prepago total y prepago parcial $(e_t^T, e_t^P)$. Para los datos analizados en este trabajo la conversión se hizo de acuerdo a la Tabla 7.

b) Asociar por separado a cada $e_t^T$ y $e_t^P$ el promedio, el mínimo ó el máximo, según convenga, del intervalo que los definió en un principio. Por ejemplo, para los datos analizados la asociación se derivó de la Tabla 5 como sigue:

| Prepago Total | | | Prepago Parcial | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Estado | CPR % | Asociación % | Estado | CPR % | Asociación % |
| 1 | [0,5) | 5.00 | 1 | [0,1) | 0.05 |
| 2 | [5,7.5) | 6.25 | 2 | [1,2) | 1.50 |
| 3 | [7.5,10) | 8.75 | 3 | [2,3) | 2.50 |
| 4 | [10,100) | 10.00 | 4 | [3,100) | 3.50 |

Tabla 9

Es necesario hacer este procedimiento de simulación junto con el procedimiento para simular las tasas de cambio del principal programado (ver Capítulo 3), ya que solamente con el segundo procedimiento se conocerá el tiempo $N$ en que el saldo insoluto final de la cartera subyacente es cero. Además, las tasas de prepago obtenidas en el inciso b) se convierten en flujos de efectivo $FPT_t$ y $FPP_t$, se obtienen despejando de las ecuaciones 2.1 y 2.2 los conceptos de Monto de Prepagos Totales y Monto de Prepagos Parciales respectivamente, ecuaciones que requieren del principal programado en el período.

En el Apéndice A3 se encuentra la programación de todo lo que se desarrollo en este capítulo, en especial se encuentra la programación de la simulación de tasas de prepago.

# Capítulo 3

# Valuación de BORHIs

Este capítulo retoma el modelo de prepago de una cartera hipotecaria, visto en el segundo capítulo, con la finalidad de completar la metodología para la valuación de un BORHI bajo el supuesto de no incumplimiento y con una estructura de fideicomiso passthrough.

Una vez que se han modelado las tasas de prepago de una cartera hipotecaria el siguiente paso para valuar un BORHI es modelar las tasas de cambio del principal programado. En la primera sección se explican las ventajas y desventajas de modelar el principal programado de una cartera hipotecaria con base en información histórica agregada y desagregada; se modelan las tasas de cambio del principal programado de manera estocástica empleando información agregada; y se menciona un método para simularlas.

En la segunda sección se desarrolla un algoritmo para valuar un BORHI bajo el Método de Montecarlo y se aplica al caso estudiado de la emisión MXMACCB04U. Los resultados de la aplicación son muy satisfactorios, en este caso, el algoritmo es estable, converge y el programa requiere muy poco tiempo para calcular la valuación.

## 3.1 Modelo del Principal Programado de una cartera hipotecaria

Como se mencionó en capítulos previos, la obligación mensual de un deudor hipotecario es el pago nivelado que consta de interés y de principal programado. Al inicio del crédito se calculan, para cada mes, las proporciones de interés y de principal en las que se debería dividir el pago nivelado. Sin embargo, dichas proporciones son afectadas por los prepagos parciales y totales, de tal manera que los montos de principal programado heredan la incertidumbre de éstos.

Si ocurre un prepago total de un crédito en el período $t$ entonces el principal programado en $t+1$, $P\Pr og_{t+1}$ será cero. En caso de que ocurra en $t$ un prepago parcial, éste disminuirá el Saldo Final de ese período y en consecuencia se disminuirán los intereses del período $t+1$ y la proporción del pago nivelado correspondiente a $P\Pr og_{t+1}$ será mayor de lo planeado. Si no se presenta ningún tipo de prepago en $t$ entonces $P\Pr og_{t+1}$ será la diferencia entre el pago nivelado y los intereses del período $t+1$ calculados sobre el Saldo Final en $t$. Por lo tanto, bajo el supuesto de no incumplimiento, se pueden simular trayectorias de los flujos de efectivo de un crédito que constan de intereses, principal programado y prepagos con tan sólo simular tasas de prepago total y parcial.

Al trabajar con información de una cartera hipotecaria se tienen dos opciones, la primera es trabajar con información individualizada de los créditos y la segunda opción es utilizar información agregada, es decir, información que junta el comportamiento de todos los créditos.

El trabajar con información individualizada de los créditos proporciona mayor pecisión en la proyección de los flujos de efectivo de la cartera, pero lleva implícito el manejar tantas tablas de amortización como número de créditos no liquidados existan, lo que resta eficiencia a cualquier metodología.

Por otra parte, al trabajar con información agregada de la cartera no se sabe cuales son los créditos que se liquidan con un prepago total, ni tampoco se sabe cuales son los créditos que adelantan amortización con un prepago parcial por lo que se pierde claridad de la proporción en que los prepagos afectan al principal programado de la cartera. Sin embargo, el manejo de información agregada además de tener como ventaja la eficiencia computacional, es más práctico para cualquier institución financiera que quiera valuar un BORHI.

Aquí se formula una metodología para modelar las tasas de cambio del principal programado de una cartera hipotecaria de manera estocástica empleando información agregada.

Al igual que en la Sección 2.3, en esta sección se desarrolla de manera paralela la teoría concerniente al modelo de las tasas de cambio del principal programado de una cartera hipotecaria y la aplicación de la misma a la información histórica de la cartera subyacente a la emisión de BORHIs con serie MXMACCB04U. Junto con las 28 parejas de tasas anualizadas de prepago total y prepago parcial, se usan los 28 datos correspondientes al principal programado desde julio de 2006 hasta octubre de 2008 de los cuales se obtienen las 27 tasas de cambio del principal programado.

Sea $TPP_t$ la tasa de cambio del principal programado del tiempo $t$ al tiempo $t+1$ dada por

$$TPP_t = (P\Pr og_{t+1} - P\Pr og_t)/P\Pr og_t.$$

Como ya se ha mencionado las tasas de prepago total y prepago parcial en el tiempo $t$ afectan el principal programado en $t+1$, luego por la ecuación anterior se puede decir que también afectan a la tasa de cambio del principal programado $TPP_t$. Entonces, para ordenar de manera práctica la información histórica que se utiliza para modelar las tasas de cambio del principal programado se sugiere construir una matriz cuyas columnas sean las tasas de prepago total $CPR_t^T$, las tasas de prepago parcial $CPR_t^P$ y las tasas de cambio del principal programado $TPP_t$. Con este orden siempre faltará la última

$TPP_t$, una posibilidad para aprovechar la información de la última pareja de tasas de prepago es completar la matriz de datos históricos buscando, mediante una distancia euclidiana, a la pareja de prepago más cercana a la última pareja de prepago y heredarle su tasa de cambio del principal programado. La otra posibilidad es quitar la última pareja de tasas de prepago, lo que se podrá hacer siempre y cuando esta pareja no defina un estado nuevo de prepago de lo contrario faltará información para el modelo.

La matriz que se construye con los datos históricos de la emisión MX-MACCB04U es la siguiente:

| No. Observación | CPR Total | CPR Parcial | Tasa de Cambio Pprog |
|---|---|---|---|
| 1 | 8.45 | 1.79 | -0.92 |
| 2 | 8.80 | 2.23 | 0.29 |
| 3 | 6.95 | 1.44 | 0.78 |
| 4 | 6.66 | 1.71 | -42.24 |
| 5 | 5.64 | 1.61 | 55.58 |
| 6 | 4.53 | 1.07 | 10.36 |
| 7 | 6.73 | 3.01 | 5.07 |
| 8 | 5.53 | 1.96 | -13.91 |
| 9 | 6.92 | 2.15 | 7.18 |
| 10 | 7.40 | 1.19 | 6.10 |
| 11 | 5.44 | 1.85 | 7.02 |
| 12 | 7.54 | 1.47 | -20.62 |
| 13 | 7.36 | 0.64 | 116.51 |
| 14 | 5.39 | 2.47 | -44.45 |
| 15 | 7.01 | 1.59 | 26.38 |
| 16 | 7.77 | 1.14 | 64.23 |
| 17 | 9.90 | 1.44 | -52.22 |
| 18 | 7.41 | 2.66 | -0.31 |
| 19 | 8.34 | 2.97 | 1.40 |
| 20 | 7.51 | 1.61 | -4.75 |
| 21 | 6.29 | 2.64 | 4.84 |
| 22 | 8.30 | 1.23 | 1.50 |
| 23 | 9.94 | 1.68 | -5.77 |
| 24 | 5.60 | 0.65 | 36.58 |
| 25 | 7.53 | 1.25 | -34.61 |
| 26 | 13.86 | 3.76 | 20.34 |
| 27 | 8.19 | 1.83 | -5.89 |
| 28 | 4.94 | 2.42 | -44.25 |

Tabla 10

Por la forma en como se definieron los estados de prepago se presenta el caso en que no se puede omitir la última pareja de prepago pues ésta define al estado 2. La última $TPP_t$ se hereda de la pareja de prepago número catorce.

El siguiente paso es dividir el rango de las tasas de cambio del principal programado para determinar el espacio de estados discreto que tomará la cadena $(\widetilde{TPP_t})_{t=1,2,\ldots,N-1}$. Para hacer discreto este rango se tiene que analizar el comportamiento de los datos históricos, los subintervalos en los que se divida tendrán que ser representativos del fenómeno.

En el ejemplo estudiado se observa que el $64\%$ de las tasas de cambio del principal programado se concentran entre $-25\%$ y $25\%$, por tal motivo se decidió hacer una partición más fina no uniforme en el intervalo $[-25\%, 25\%)$ y fuera de éste elegir divisiones representativas. Abajo se muestra la Figura 10 sobre las tasas de cambio del principal programado con la división que se eligió para que la cadena $(\widetilde{TPP_t})_{t=1,2,\ldots,N-1}$ tome valores en un espacio de estados discreto.

Los estados de la cadena $(\widetilde{TPP_t})_{t=1,2,\ldots,N-1}$ se asignaron de acuerdo a la Tabla 11:

**Tasa de cambio del Principal Programado**

| Estado | TPP % |
|---|---|
| 1 | < -50 |
| 2 | [-50,-25) |
| 3 | [-25,-10) |
| 4 | [-10,-0.5) |
| 5 | [-0.5,0.5) |
| 6 | [0.5,10) |
| 7 | [10,25) |
| 8 | [25,50) |
| 9 | [50,100) |
| 10 | >= 100 |

Tabla 11

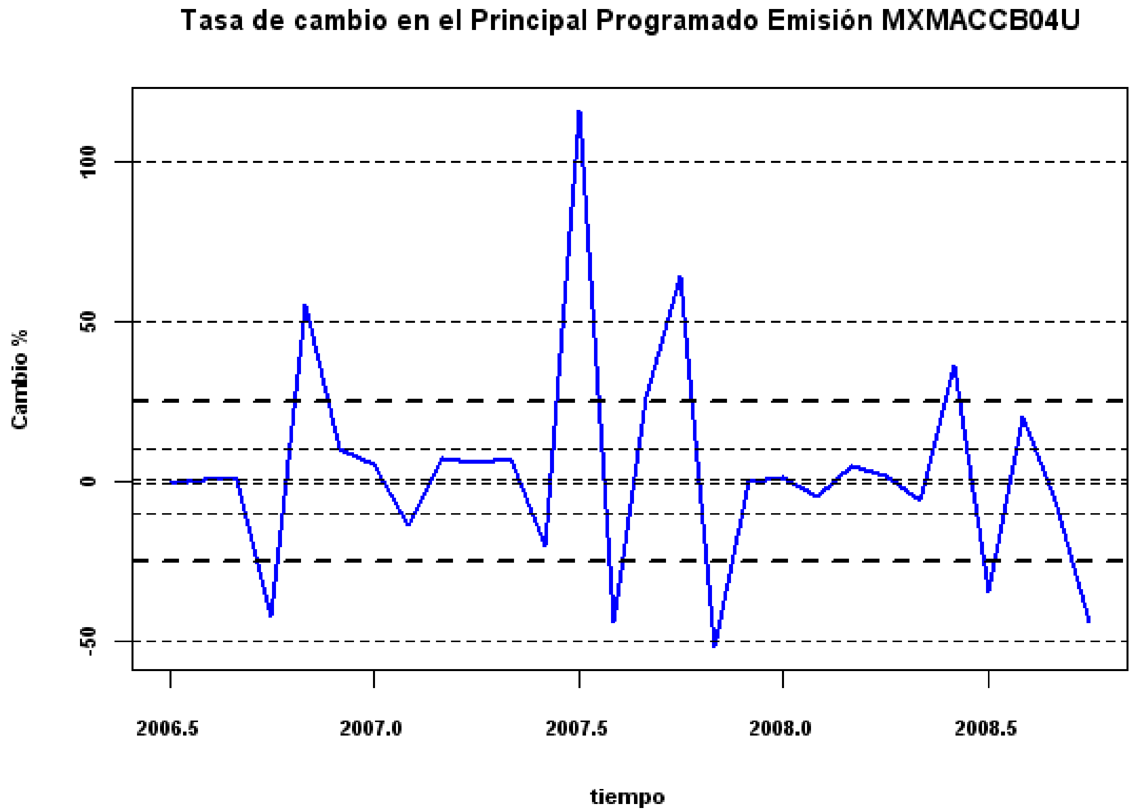


Figura 10

De acuerdo a la asignación de estados del histórico $(\widetilde{TPP}_t)_{t=1,2,...,n}$ se estima, con su respectiva frecuencia relativa, la densidad condicional de $\widetilde{TPP}_t$ dadas las tasas de prepago total y prepago parcial en $t$ o mejor dicho dado el estado que define a la pareja de prepago en $t$

$$\widehat{f}_{\widetilde{TPP}_t|X_t}(tpp_t \mid e_t) = \frac{a}{b} \qquad para \quad t = n+1, n+2, ..., N-1$$

donde

$a =$ No. veces que $\widetilde{TPP}_t = tpp_t$ dado que $X_t = e_t$ para $t = 1, 2, ..., n$ ,

$b =$ No. veces que $X_t = e_t$ para $t = 1, 2, ..., n$.

Para manejar de manera eficiente las estimaciones de las densidades condicionales se sugiere construir una matriz cuyos renglones representen $\widehat{f}_{\widetilde{TPP}_t|X_t}$

la estimación de la densidad condicional. Con esta matriz se puede calcular otra matriz cuyos renglones representen la estimación de la distribución condicional $\widehat{F}_{\widetilde{TPP}_t|X_t}$ .

Con la información histórica de la emisión MXMACCB04U se obtuvieron las siguientes matrices:

**MATRIZ DE DENSIDADES DEL PRINCIPAL PROGRAMADO DADO EL PREPAGO**

| | | Estados del Principal Programado | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **(PP,PT)** | **Edos Prepago** | <-50 | [-50,-25) | [-25,-10) | [-10,-0.5) | [-0.5,0.5) | [0.5,10) | [10,25) | [25,50) | [50,100) | >=100 |
| (1,2) | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 |
| (1,3) | 2 | 0 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (2,1) | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5000 | 0 | 0.5000 |
| (2,2) | 4 | 0 | 0.1429 | 0.1429 | 0 | 0 | 0.4286 | 0 | 0.1429 | 0.1429 | 0 |
| (2,3) | 5 | 0 | 0.2500 | 0 | 0 | 0.2500 | 0.5000 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (2,4) | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (3,2) | 7 | 0.1111 | 0.1111 | 0.1111 | 0.4444 | 0 | 0.1111 | 0 | 0 | 0.1111 | 0 |
| (3,3) | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5000 | 0.5000 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (4,4) | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 |

Tabla 12

**MATRIZ DE DISTRIBUCIONES DEL PRINCIPAL PROGRAMADO DADO EL PREPAGO**

| | | Estados del Principal Programado | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **(PP,PT)** | **Edos Prepago** | <-50 | [-50,-25) | [-25,-10) | [-10,-0.5) | [-0.5,0.5) | [0.5,10) | [10,25) | [25,50) | [50,100) | >=100 |
| (1,2) | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| (1,3) | 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| (2,1) | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0.5 | 1 |
| (2,2) | 4 | 0 | 0.1429 | 0.2857 | 0.2857 | 0.2857 | 0.7143 | 0.7143 | 0.8571 | 1 | 1 |
| (2,3) | 5 | 0 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| (2,4) | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| (3,2) | 7 | 0.1111 | 0.2222 | 0.3333 | 0.7778 | 0.7778 | 0.8889 | 0.8889 | 0.8889 | 1 | 1 |
| (3,3) | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| (4,4) | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabla 13

Con la estimación de las matrices de densidades y distribuciones se tiene un modelo condicional para las tasas de cambio del principal programado de una cartera hipotecaria.

La simulación de la distribución condicional de la tasa de cambio del principal programado dado que se conoce el prepago se lleva a cabo vía el Teorema de la transformada integral de probabilidad usando la matriz de distribuciones.

Una vez que se ha simulado el estado $tpp_t$ se necesita convertirlo en una tasa de cambio del principal programado y ésta a su vez en un flujo de efectivo $P\Pr og_{t+1}$. Para el ejemplo trabajado, la primera conversión se hizo asignándole a cada estado el punto medio del intervalo que lo definió, excepto para el estado 1 al cual se le asignó el -50% y para el último estado que se le asignó una tasa del 100%, tal como lo muestra la Tabla 14:

**Tasa de cambio**
**del Principal Programado**

| Estado | tcpp% |
|---|---|
| 1 | -50.0 |
| 2 | -37.5 |
| 3 | -17.5 |
| 4 | -7.5 |
| 5 | 0.0 |
| 6 | 7.5 |
| 7 | 17.5 |
| 8 | 37.5 |
| 9 | 75.0 |
| 10 | 100.0 |

Tabla 14

La conversión de tasa a flujo de efectivo del principal programado se hace mediante la fórmula

$$P\Pr og_{t+1} = P\Pr og_t(1 + tcpp_t).$$

## 3.2 Valuación de un BORHI

Para calcular el precio de un BORHI se propone usar el método Montecarlo basado en simulaciones de tasas de prepago total, prepago parcial y de tasas de cambio del principal programado de la cartera subyacente.

Para simular una trayectoria de los flujos de efectivo de un BORHI se realiza el siguiente procedimiento para cada $t \in \{n+1, n+2, ..., N\}$:

1) Calcular con la tasa de cupón, en base al valor nominal de toda la emisión al final del período $t-1$, el interés del período $t$ .

2) Convertir la tasa de cambio del principal programado $\widetilde{TPP}_{t-1}$ al flujo de principal programado $P\Pr og_t$ según lo establecido al final de la Sección 3.1 .

3) Simular un valor $(e_t)$ de la tasa de prepago $X_t$ dado $X_{t-1} = e_{t-1}$.

4) Convertir $e_t$ en los flujos de efectivo de prepago total $FPT_t$ y prepago parcial $FPP_t$ según lo establecido en la Sección 2.4.

5) Calcular el Flujo de Principal en el período $t$

$$FP_t = P\Pr og_t + FPT_t + FPP_t.$$

6) Calcular el flujo de efectivo del período $t$

$$FE_t = Interés_t + FP_t.$$

7) Calcular el valor nominal de toda la emisión al final del período $t$

$$VN_t = VN_{t-1} - FP_t.$$

8) Simular la tasa de cambio del principal programado $\widetilde{TPP}_t$ dado $X_t = e_t$.

La simulación de la trayectoria se termina cuando el Valor Nominal es cero. En caso de que $VN_{t-1} > 0$ y $VN_t < 0$, se toma $FPT_t = 0$, $FPP_t = 0$ y $P\Pr og_t = VN_{t-1}$. Si para alguna trayectoria el valor nominal se hace cero en una fecha posterior a la fecha de vencimiento del BORHI, entonces esa trayectoria no se registra.

Cabe aclarar que los flujos de efectivo también son afectados por los gastos del fideicomiso y por el sobrecolateral.

El siguiente paso es calcular el valor presente de los flujos de efectivo $(FE_t)_{t=1,...,N}$ a la fecha de valuación, para esto se sugiere usar la curva real cupón cero libre de riesgo más una sobretasa (el tema de sobretasas de bonos garantizados por hipotecas se puede consultar en la referencia [5] Capítulo 3)

Para el ejemplo manejado se usó la Curva Real Cero de Tasa Neta del proveedor de precios Valmer del 01-oct-08 con una sobretasa de 1.8%.

Bajo el supuesto de no incumplimiento y con una estructura de fideicomiso passthrough, el precio sucio en udis para cada trayectoria simulada es el valor presente de los flujos de efectivo entre el número de certificados bursátiles colocados.

Finalmente, el precio sucio en udis de un BORHI es el promedio de los precios sucios en udis de cada trayectoria simulada. El precio limpio en udis es el precio sucio en udis menos el interés devengado de la última fecha de cupón pagado a la fecha de valuación.

En la Tabla 15 se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones hechas con los datos de la emisión MXMACCB04U.

| Resultados para la emisión MXMACCB04U | | |
|---|---|---|
| **No. Simulaciones** | **Precio Sucio Udis** | **Tiempo minutos** |
| 10 | 74.2419 | 0.10 |
| 100 | 74.2068 | 0.15 |
| 200 | 74.1989 | 0.20 |
| 500 | 74.2303 | 0.50 |
| 1,000 | 74.2031 | 1.00 |
| 5,000 | 74.1820 | 2.00 |
| 10,000 | 74.1981 | 5.00 |

Tabla 15

Como puede apreciarse el método es muy estable ya que la parte entera del precio es la misma con pocas o muchas simulaciones, el método converge rápidamente y el costo en tiempo es mínimo.

# Capítulo 4

# Resultados, Conclusiones y Posibles Extensiones

## 4.1 Resultados

El primer resultado de esta Tesina es que los prepagos totales y los prepagos parciales tienen efectos inversos en el principal programado proyectado de una cartera hipotecaria. El prepago total de un crédito disminuye el principal programado proyectado y el prepago parcial de un crédito aumenta el principal programado proyectado. Cabe mencionar que ambos disminuyen el tiempo de vida de la cartera.

El segundo resultado es que las tasas de prepago total y las tasas de prepago parcial se pueden modelar conjuntamente como una Cadena de Markov de orden r, donde r es el grado de dependencia con los niveles que tanto las tasas de prepago total y las tasas de prepago parcial presentaron en los r meses anteriores. La matriz de transición se estima vía la función de máxima verosimilitud.

El tercer resultado es que si se trabaja con información agregada de una cartera hipotecaria, el modelo del principal programado proyectado condicionado a las tasas de prepago total y parcial debe ser estocástico y puede ser aproximado por medio de su frecuencia relativa.

Bajo simulación de trayectorias de tasas de prepagos y tasas de cambio de principal programado de la emisión MXMACCB04U, se calculó el precio de un BORHI vía Método de Montecarlo. El método es estable, converge rápidamente y tiene un costo en tiempo mínimo.

## 4.2 Conclusiones

En la primera etapa de investigación se confirmó que existe la necesidad, en el mercado financiero mexicano, de un modelo concensuado para la valuación de BORHIs, el cual de confianza al público inversionista e incentive aún más el mercado secundario de hipotecas.

Debido a los efectos inversos que tienen los prepagos totales y los prepagos parciales en el principal programado proyectado, se recomienda a las administradoras de las carteras hipotecarias hacer las mediciones de prepago por separado. Tal separación mejora los análisis de los flujos de efectivo de la cartera hipotecaria en cuestión.

El modelar las tasas de prepago de una cartera hipotecaria como una Cadena de Markov de orden r, permite conservar la dependencia con el pasado inmediato y facilita la simulación de los flujos de efectivo de la cartera hipotecaria y por ende facilita la simulación de los flujos de efectivo un BORHI.

Al trabajar con información agregada de una cartera hipotecaria surge la necesidad de modelar las tasas de cambio del principal programado dadas las tasas de prepago. En esta tesina, dichas tasas se modelan estocásticamente mediante una densidad condicional.

El método de valuación de BORHIs aquí planteado es eficaz y resulta práctico para cualquier institución financiera.

## 4.3 Posibles Extensiones

Como se mencionó a lo largo del trabajo, la metodología que aquí se presenta para la valuación de un BORHI se formuló bajo el supuesto de no incumplimiento y con una estructura de fideicomiso passthrough. Si bien estos dos supuestos son muy restrictivos, la metodología propuesta se puede tomar como esencia para modelar las tasas de incumplimiento de una cartera hipotecaria, sólo que para la proyección de los flujos de efectivo de la cartera se tienen que calcular tiempos de recuperación y pérdidas esperadas a través de tasas de severidad (ver referencia [6]). Además, se tienen que contemplar las diferentes garantías de la emisión respectiva.

También se puede adecuar la metodología para manejar estructuras diferentes de fideicomiso, tarea que no parece tan difícil ya que en México no existen aún estructuras tan complejas como las que existen por ejemplo en los Estados Unidos de América (ver referencia [19]).

La ventaja del Método de Montecarlo para calcular el precio de un BORHI es que una vez que se incluya el incumplimiento en el modelo de valuación se pueden calcular sin problema la duración y las sensibilidades a la curva de tasas de interés.

Por último, conforme se cuente con una historia más larga de prepago se podrá estudiar si las series de tiempo tanto de las tasas de prepago total como de prepago parcial presentan estacionariedad.

# Capítulo 5

# Apéndices

## A1. Glosario

*Certificado Bursátil.* Instrumento de financiamiento cuya principal característica es su flexibilidad operativa de estructuras a partir de un programa de colocación que puede ejercerse en una o varias emisiones con características iguales o distintas en cada emisión.

*Valor Nominal.* El valor nominal de un bono es el monto de la deuda contraída por el emisor en el momento de su colocación entre el número de títulos emitidos. Si durante la vida del bono se permiten amortizaciones programadas o no programadas entonces el valor nominal del bono será el valor nominal al momento de la colocación menos las amortizaciones realizadas. En México, la mayoría de los bonos emitidos tienen un valor nominal de 100 pesos ó udis.

*Calificadora Oficial.* Entidad que evalúa las características crediticias de la empresa y de los bienes o derechos de la propia emisión. En México las Calificadoras Oficiales son tres: Standard & Poor's, S.A. de C.V., Moody's México, S.A. de C.V. y Fitch México, S.A. de C.V.

*Fideicomiso.* Se constituye bajo un contrato mediante el cual una persona transmite a una institución bienes y derechos para que los administre de manera óptima, y los destine a un fin lícito en beneficio de un tercero.

*Fideicomitente.* Es la persona que mediante expresa manifestación de su voluntad, constituye el fideicomiso. Es el titular de los bienes y derechos que destina necesarios para el cumplimiento de sus fines, delegando su administración y/o su custodia al fiduciario.

*Fiduciario.* Es la persona que tendrá a su cargo la realización del fin establecido por el fideicomitente en el acto constitutivo del fideicomiso y a quien se atribuye la administración y/o custodia de los bienes fideicomitidos.

*Fideicomisario.* Es la persona destinada a recibir el beneficio del fideicomiso durante la operación de éste o en el momento que se cumpla con la finalidad establecida, de acuerdo a los lineamientos fijados por el fideicomitente.

*Patrimonio Fideicomitido.* Integrado por los derechos de crédito que se transmitan al fideicomiso en cualquier tiempo, tanto para la integración inicial como para las adquisiciones adicionales.

La operación del fideicomiso se resume en la Figura 11.

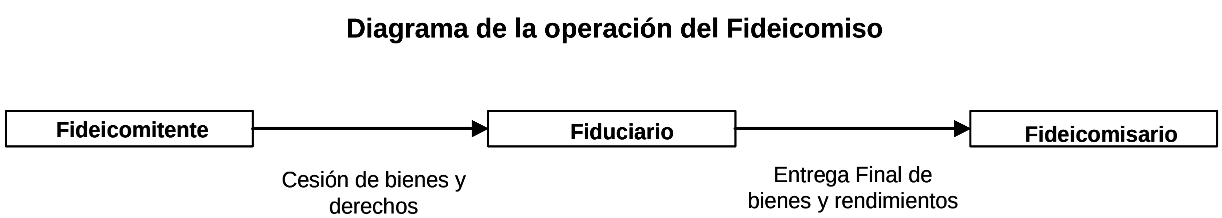


Figura 11

*Cadena de Markov ergódica.* Una Cadena de Markov es ergódica si todos sus estados son recurrentes, aperiódicos y se comunican entre sí.

# A2. Teoría

En esta sección se enuncian los resultados teóricos en los que se basa este trabajo.

1. `ESTIMACIÓN DE LA MATRIZ DE TRANSICIÓN DE UNA CADENA DE MARKOV.`

   `(Ver referencia [1] pág.52)`

Sea $\{X_k\}_{k=0,1,2,...}$ una Cadena de Markov ergódica sobre el espacio de estados $E = \{1, 2, ..., m\}$ con probabilidades de transición

$$p_{ij} = P[X_k = j \mid X_{k-1} = i], \quad i, j \in E,$$

con probabilidades iniciales

$$p_u^{(0)} = P[X_0 = u], \quad u \in E,$$

y distribución estacionaria límite $\{\pi_j\}_{j=1,2,...,m}$, $\pi_j > 0$, $\sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1$.

Sea $\overline{x}_{n+1} = (x_0, x_1, ... x_n)$ una realización de tamaño $n+1$ de la cadena $\{X_k\}_{k=0,1,2,...}$. La función de verosimilitud basada en esta muestra está dada por

$$\begin{aligned} L &= p_{x_0}^{(0)} \prod_{k=1}^{n} p_{x_{k-1}x_k} \\ &= p_{x_0}^{(0)} \prod_{i,j=1}^{m} p_{ij}^{n_{ij}}, \end{aligned}$$

donde $n_{ij}$ es la frecuencia de la transición $i \to j$ en la muestra $\overline{x}_{n+1}$.

El conjunto de $m^2$ frecuencias de transición forma una estadística suficiente para la matriz de transición $P = \{p_{ij}\}$.

Al maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud sujeto a $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$, se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud

$$\widehat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i},$$

donde $n_i = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}$.

## 2. PRUEBA PARA EL ORDEN DE DEPENDENCIA DE UNA CADENA DE MARKOV.

(Ver referencia [1] pág.63)

Una Cadena de Markov $\{X_k\}$ de orden r está definida por la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} P[X_n &= a_{r+1} \mid X_{n-1} = a_r, X_{n-2} = a_{r-1}, ..., X_{n-r} = a_1, ..., X_1 = x_1, X_0 = x_0] \\ &= P[X_n = a_{r+1} \mid X_{n-1} = a_r, X_{n-2} = a_{r-1}, ..., X_{n-r} = a_1] = p_{a_1,...,a_r;a_{r+1}} , \end{aligned}$$

es decir, la probabilidad del estado actual, dado el pasado, sólo depende de los últimos r estados. Cuando $r = 1$ se tiene el caso usual de dependencia de primer orden.

Cualquier Cadena de Markov de orden $r$ puede ser transformada en una Cadena de Markov equivalente de primer orden como sigue:

Sea $\{Y_k\}$ un proceso con espacio de estados $E^r \subset \mathbb{R}^r$, tal que

$$\begin{aligned} P[Y_n &= (a_1, ..., a_r) \mid Y_{n-1} = (b_1, ..., b_r)] \\ &= P[X_n = a_1, X_{n+1} = a_2, ..., X_{n+r-1} = a_r \mid X_{n-1} = b_1, X_n = b_2, ..., X_{n+r-2} = b_r] \\ &= \begin{cases} p_{b_1,...,b_r;a_r} & si \quad a_i = b_{i+1},\ i = 1, 2, ..., r-1 \\ 0 & otro\ caso. \end{cases} \end{aligned}$$

Es claro que $\{Y_k\}$ forma una Cadena de Markov de primer orden con probabilidades de transición dadas por

$$p_{(a_1,...,a_r),(b_1,...,b_r)} = \begin{cases} p_{b_1,...,b_r;a_r} & si \quad a_i = b_{i+1},\ i = 1, 2, ..., r-1 \\ 0 & otro\ caso. \end{cases}$$

Nótese que el número de entradas en cada renglón de la matriz de transición de $\{Y_k\}$ es $m$, y el número de renglones es $m^r$.

Por lo tanto, cualquier Cadena de Markov $\{X_k\}$ de orden $r$ puede transformarse en una Cadena de Markov equivalente de primer orden.

La importancia, en este trabajo, del resultado anterior es que se puede estimar la matriz de transición de una Cadena de Markov de orden r como la matriz de transición de una Cadena de Markov de primer orden.

Para llevar a cabo la prueba de orden se define a $n_{a_1,...,a_k}$ como la frecuencia de la subtrayectoria $a_1, ..., a_k$ en una muestra de n observaciones y a $n_{a_1,...,a_k;a_{k+1}}$ como la frecuencia de transición de $a_1, ..., a_k$ a $a_{k+1}$. Luego, $n_{a_1,...,a_k}$ y $n_{a_1,...,a_k;a_{k+1}}$ juegan el mismo papel que $n_i$ y $n_{ij}$ en una cadena de primer orden.

Supóngase que se desea hacer la prueba de hipótesis $H_0$ : *el proceso es una cadena de orden l* contra $H_1$ : *el proceso es una cadena de orden r* para $l < r$.

La hipótesis $H_0$ especifica lo siguiente

$$p_{a_1,...,a_r;a_{r+1}} = p_{a_{r-l+1},...,a_r;a_{r+1}}$$

entonces, las probabilidades de transición de la cadena están especificadas por $m^l \times m - m^l = m^l(m-1)$ parámetros.

Bajo $H_0$, los estimadores de máxima verosimilitud son

$$\widehat{p}_{a_1,...,a_r;a_{r+1}} = \frac{n_{a_{r-l+1},...,a_r;a_{r+1}}}{n_{a_{r-l+1},...,a_r}}.$$

El estadístico de prueba está dado por

$$\sum_{a_1,...,a_{r+1}} \frac{\left(n_{a_1,...,ar;a_{r+1}} - n_{a_1,...,ar}\widehat{p}_{a_1,...,a_r;a_{r+1}}\right)^2}{n_{a_1,...,ar}\widehat{p}_{a_1,...,a_r;a_{r+1}}},$$

para $a_1, ..., a_r, a_{r+1}$ tal que $\widehat{p}_{a_1,...,a_r;a_{r+1}} \neq 0$ .

Asintóticamente, el estadístico de prueba tiene una distribución $\chi^2$ con

$$m^r(m-1) - m^l(m-1) = m^l(m-1)(m^{r-l}-1)$$

grados de libertad.

## 3. SIMULACIÓN DE UNA CADENA DE MARKOV.

(Ver referencia [2] pág.94)

A través del siguiente Teorema se realizan simulaciones de una Cadena de Markov con espacio de estados $E = \{e_i : i \in I\} \subset \mathbb{R}$ a lo más numerable, matriz de transición $P$ y vector de distribución inicial $\pi$.

**Teorema** *Sean* $U_{0,}U_{1,\ldots}$ *variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, sea* $f : [0,1) \to E$ *dada por*

$$f(x) = e_j \quad si \quad x \in \left[ \sum_{\{i:e_i<e_j\}} \pi(e_i) \ , \sum_{\{i:e_i\leq e_j\}} \pi(e_i) \right), \qquad j \in I.$$

*Sea* $g : [0,1) \times E \to E$ *tal que*

$$g(x, e_i) = e_j \quad si \quad x \in \left[ \sum_{\{k:e_k<e_j\}} P_{e_i,e_k} \ , \sum_{\{k:e_k\leq e_j\}} P_{e_i,e_k} \right), \qquad i, j \in I.$$

*Se define* $X_0 = f(U_0)$ *y para* $n \geq 1$

$$X_n = g(U_n, X_{n-1}).$$

*Entonces* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una Cadena de Markov con espacio de estados* $E$*, matriz de transición* $P$ *y vector de distribución inicial* $\pi$*.*

La demostración del teorema se puede encontrar en la referencia [2] página 95.

## A3. Programa

El siguiente programa en R fue utilizado para obtener todos los resultados numéricos que se presentan. El input PProg.txt contiene los datos históricos de CPR Total, CPR Parcial y tasas de cambio del Principal Programado, las tres columnas deben ser expresadas en porcentaje. El número de simulaciones se puede cambiar en la parte de "SIMULACIÓN".

```
#Calcula el precio de un BORHI vía Método de Montecarlo con simulaciones de tasas de prepago total, prepago parcial y principal programado sin contemplar incumplimiento.
#Emisión MXMACCB04U.
datos <-data.frame(read.table("C:/Documents and Settings/XP/Mis documentos/PProg.txt",header=F));
#Columnas del archivo PProg
#CPR Total t
#CPR Parcial t
#PProg t+1
n<-dim(datos)[1]
p<-dim(datos)[2]
#último saldo insolto final de capital
ult_SF<-210987574.14
ult_PProg<-294988.99
#tasa cupón real
tasa_cup<-0.0643
#### Se construyen series de tiempo
ts.PT<-ts(datos[,1],start=c(2006,7),frequency=12)
ts.PP<-ts(datos[,2],start=c(2006,7),frequency=12)
ts.PProg_ade<-ts(datos[,3],start=c(2006,7),frequency=12)
#### Gráficas con rangos
ts.plot(ts.PT,gpars=list(col=4,lwd=2,ylim=c(4,14),xlab="tiempo",ylab="CPR Total %",main="Tasa Condicional de Prepago Total Emisión MXMACCB04U",cex.axis=.7,cex.lab=.7,cex.main=.9,font.axis=2,font.lab=2))
abline(h=5,lty=2)
```

```
abline(h=7.5,lty=2)
abline(h=10,lty=2)
ts.plot(ts.PP,gpars=list(col=4,lwd=2,ylim=c(0,4),xlab="tiempo",ylab="CPR Parcial %",main="Tasa Condicional de Prepago Parcial Emisión MXMACCB04U",cex.axis=.7,cex.lab=.7,cex.main=.9,font.axis=2,font.lab=2))
abline(h=1,lty=2)
abline(h=2,lty=2)
abline(h=3,lty=2)
ts.plot(ts.PProg_ade,gpars=list(col=4,lwd=2,xlab="tiempo",ylab="Cambio %",main="Tasa de cambio en el Principal Programado Emisión MXMACCB04U",cex.axis=.7,cex.lab=.7,cex.main=.9,font.axis=2,font.lab=2))
abline(h=-50,lty=2)
abline(h=-25,lty=2,lwd=2)
abline(h=-10,lty=2)
abline(h=-0.5,lty=2)
abline(h=0.5,lty=2)
abline(h=10,lty=2)
abline(h=25,lty=2,lwd=2)
abline(h=50,lty=2)
abline(h=100,lty=2)
###### Se convierten la s.t. a estados
#### Prepago Total
trayec.PT<-rep(0,length(ts.PT))
pos_edo11<-which((ts.PT>=0)&(ts.PT<5))
if (length(pos_edo11)>0){trayec.PT[c(pos_edo11)]<-1}
pos_edo12<-which((ts.PT>=5)&(ts.PT<=7.5))
if (length(pos_edo12)>0){trayec.PT[c(pos_edo12)]<-2}
pos_edo13<-which((ts.PT>7.5)&(ts.PT<=10))
if (length(pos_edo13)>0){trayec.PT[c(pos_edo13)]<-3}
pos_edo14<-which((ts.PT>10)&(ts.PT<=100))
if (length(pos_edo14)>0){trayec.PT[c(pos_edo14)]<-4}
m1<-4 #No. Edos para el Prepago Total
```

```
print(trayec.PT)
#### Prepago Parcial
trayec.PP<-rep(0,length(ts.PP))
pos_edo21<-which((ts.PP>=0)&(ts.PP<1))
if (length(pos_edo21)>0){trayec.PP[c(pos_edo21)]<-1}
pos_edo22<-which((ts.PP>=1)&(ts.PP<2))
if (length(pos_edo22)>0){trayec.PP[c(pos_edo22)]<-2}
pos_edo23<-which((ts.PP>=2)&(ts.PP<3))
if (length(pos_edo23)>0){trayec.PP[c(pos_edo23)]<-3}
pos_edo24<-which((ts.PP>=3)&(ts.PP<=100))
if (length(pos_edo24)>0){trayec.PP[c(pos_edo24)]<-4}
m2<-4 #No. Edos para el Prepago Parcial
print(trayec.PP)
#### Principal Programado
trayec.PProg<-rep(0,length(ts.PProg_ade))
pos_edo31<-which((ts.PProg_ade<(-50)))
if (length(pos_edo31)>0){trayec.PProg[c(pos_edo31)]<-1}
pos_edo32<-which((ts.PProg_ade>=(-50))&(ts.PProg_ade<(-25)))
if (length(pos_edo32)>0){trayec.PProg[c(pos_edo32)]<-2}
pos_edo33<-which((ts.PProg_ade>=(-25))&(ts.PProg_ade<(-10)))
if (length(pos_edo33)>0){trayec.PProg[c(pos_edo33)]<-3}
pos_edo34<-which((ts.PProg_ade>=(-10))&(ts.PProg_ade<(-0.5)))
if (length(pos_edo34)>0){trayec.PProg[c(pos_edo34)]<-4}
pos_edo35<-which((ts.PProg_ade>=(-0.5))&(ts.PProg_ade<(0.5)))
if (length(pos_edo35)>0){trayec.PProg[c(pos_edo35)]<-5}
pos_edo36<-which((ts.PProg_ade>=(0.5))&(ts.PProg_ade<(10)))
if (length(pos_edo36)>0){trayec.PProg[c(pos_edo36)]<-6}
pos_edo37<-which((ts.PProg_ade>=(10))&(ts.PProg_ade<(25)))
if (length(pos_edo37)>0){trayec.PProg[c(pos_edo37)]<-7}
pos_edo38<-which((ts.PProg_ade>=(25))&(ts.PProg_ade<(50)))
```

```
if (length(pos_edo38)>0){trayec.PProg[c(pos_edo38)]<-8}
pos_edo39<-which((ts.PProg_ade>=(50))&(ts.PProg_ade<(100)))
if (length(pos_edo39)>0){trayec.PProg[c(pos_edo39)]<-9}
pos_edo310<-which((ts.PProg_ade>=100))
if (length(pos_edo310)>0){trayec.PProg[c(pos_edo310)]<-10}
m3<-10 #No. Edos para el Prepago Programado
print(trayec.PProg)
######### Matriz de frecuencias de las parejas (PT,PP)
frec_PTPP<-matrix(rep(0,m1*m2*5),m1*m2,5)
colnames(frec_PTPP)<-c('Edo','Nvo_Edo','PT','PP','Frecuencia')
m4<-m1*m2
frec_PTPP[,1]<-seq(1:m4)
frec_PTPP[,3]<-trunc((frec_PTPP[,1]-1)/m1)+1
frec_PTPP[,4]<-frec_PTPP[,1]-m1*(frec_PTPP[,3]-1)
#(PT,PP)->edo(1:16)
trayec.PTPP<-trayec.PP+m1*(trayec.PT-1)
cont<-0
for (k in 1:m4){
 frec_PTPP[k,5]<-length(which(trayec.PTPP==k))
 if(frec_PTPP[k,5]>0){
 frec_PTPP[k,2]<-cont+1 #Reasignación de estado
 cont<-cont+1
 }
}
print(frec_PTPP)
######### Matriz de frecuencias positivas de las parejas (PT,PP)
frec_positiva<-which(frec_PTPP[,5]>0)
no_edos<-length(frec_positiva) #No. de edos con frecuencia positiva
frec_pos_PTPP<-matrix(rep(0,no_edos*4),no_edos,4)
colnames(frec_pos_PTPP)<-c('Edo','PT','PP','Frecuencia')
```

```
for (k1 in 1:no_edos){
 reng<-frec_positiva[k1]
 frec_pos_PTPP[k1,]<-frec_PTPP[reng,2:5]
}
print(frec_pos_PTPP)
######### Convertir trayec (1:16) a (1:9)
trayec2.PTPP<-rep(0,length(trayec.PTPP))
for (k3 in 1:length(trayec.PTPP)){
 trayec2.PTPP[k3]<-frec_PTPP[which(frec_PTPP[,1]==trayec.PTPP[k3]),2]
}
print(trayec2.PTPP)
####################################################
PRUEBA DE ORDEN DE LA CADENA DE MARKOV H0(1) vs H1(2)
Espacio de Estados (1:9)
####################################################
###### Matriz donde se guardan las frecuencias para la prueba de orden
r<-3
s<-no_edos^r
frecuencias<-matrix(rep(0,s*8),s,8)
##Genera las tres primeras columnas
#cont<-0
#for (i in 1:no_edos){
# for (j in 1:no_edos){
# for (k in 1:no_edos){
# cont<-cont+1
# frecuencias[cont,c(1,2,3)]<-c(i,j,k)
#}
#}
#}
#write.csv(frecuencias[,c(1,2,3)],"C:/Documents and Settings/XP/Mis documentos/frecuencias_PTPP.csv")
```

```
frecuencias[,c(1,2,3)]<-as.matrix(read.table("C:/Documents and Settings/XP/Mis documentos
/frecuencias_PTPP_MXMACCB04U.txt",header=F));
### Significado de las columnas 4:7 de la matriz frecuencias
###Columna 4: frecuencia posición 2
###Columna 5: frecuencia posición 1-2
###Columna 6: frecuencia posición 2-3
###Columna 7: frecuencia posición 1-2-3
cont<-0
for (i in 1:no_edos){
 for (j in 1:no_edos){
 for (k in 1:no_edos){
 cont<-cont+1
 pos1<-which(trayec2.PTPP==i)
            frec_i<-length(pos1) #frecuencia de i
 pos2<-pos1+rep(1,length(pos1))
            trayec2<-trayec2.PTPP[c(pos2)]
            pos21<-which(trayec2==j)
            frecuencias[cont,5]<-length(pos21) #frecuencia de i,j
            pos3<-pos2[c(pos21)]+rep(1,length(pos21))
            trayec3<-trayec2.PTPP[c(pos3)]
            pos31<-which(trayec3==k)
            frecuencias[cont,7]<-length(pos31) #frecuencia de i,j,k

 pos4<-which(trayec2.PTPP==j)
            frecuencias[cont,4]<-length(pos4) #frecuencia de j
            pos5<-pos4+rep(1,length(pos4))
            trayec4<-trayec2.PTPP[c(pos5)]
            pos51<-which(trayec4==k)
            frecuencias[cont,6]<-length(pos51) #frecuencia de j,k
}
```

```
}
}
###Columna 8: proba estimada de posición 3 dado posición 1-2 bajo H0(1)
#es decir, proba estimada de posición 2-3 dado posición 2
frecuencias[,8]<-frecuencias[,6]/frecuencias[,4]
#frecuencias[460:480,]
###### Estadístico de prueba T.
#(*)La suma que determina al estadístico de prueba no cuenta los sumandos
#con denominador igual a cero.
#Esta comprobación es para ver que siempre que T2=0 (denominador) entonces T3=0
#por lo tanto, se justifica (*).
#T2<-frecuencias[,5]*frecuencias[,8]
#T3<-frecuencias[,7]
#T4<-cbind(T3,T2)
#write.csv(T4,"C:/Documents and Settings/XP/Mis documentos/comprobación_PPPT_MXMACCB04U.csv")
T1<-rep(0,s)
for (m in 1:s){
  if (frecuencias[m,5]*frecuencias[m,8]>0){
  T1[m]<-((frecuencias[m,7]-frecuencias[m,5]*frecuencias[m,8])^2)/(frecuencias[m,5]*frecuencias[m,8])}
}
T<-sum(T1) #43.52778
print(T)
grados<-no_edos*(no_edos-1)^2 #576
cuantil1<-qchisq(.90,grados,ncp=0) #619.903
print(cuantil1)
cuantil2<-qchisq(.95,grados,ncp=0) #632.9419
print(cuantil2)
#Por lo tanto, no se rechaza Ho(1).
################ Estimación de la matriz de transición
mat_trans_est<-matrix(rep(0,no_edos*no_edos),no_edos,no_edos)
```

```
suma_1<-rep(0,no_edos)
último<-trayec2.PTPP[length(trayec2.PTPP)]
if (frec_pos_PTPP[último,4]>1){
 for (r in 1:no_edos){
       if (r==último){
 mat_trans_est[r,]<-frecuencias[(1+(r-1)*no_edos):(r*no_edos),6]/(frecuencias[(1+(r-1)*no_edos),4]-1)
     } else {mat_trans_est[r,]<-frecuencias[(1+(r-1)*no_edos):(r*no_edos),6]/frecuencias[(1+(r-1)*no_edos),4]}
      suma_1[r]<-sum(mat_trans_est[r,])
 }
}else{ frecuencias[16,6]<-1
#edo 2 - edo 7. Se designa transición de acuerdo a la menor distancia con los otros estados
 for (r in 1:no_edos){
      mat_trans_est[r,]<-frecuencias[(1+(r-1)*no_edos):(r*no_edos),6]/frecuencias[(1+(r-1)*no_edos),4]
      suma_1[r]<-sum(mat_trans_est[r,])
 }
 }
print(suma_1)
print(mat_trans_est)
#Es una matriz de transición con una sola clase comunicante
# 7 .-. 2
# 7 .-. 3
# 7 .-. 5
# 7 .-. 8
# 7 .-. 9
# 1-6-4-7-5-4-1
##Matriz de distribución
mat_distr<-matrix(rep(0,no_edos*no_edos),no_edos,no_edos)
for (i in 1:no_edos){
 mat_distr[i,]<-cumsum(mat_trans_est[i,])
}
```

```
print(mat_distr)
##################################################
######### Construcción de la Matriz de frecuencias Prepagos - Principal Programado
frec_PProg<-matrix(rep(0,no_edos*m3),no_edos,m3)
for (i in 1:no_edos){
 for (j in 1:m3){
 frec_PProg[i,j]<-length(which((trayec2.PTPP==i)&(trayec.PProg==j)))
}
}
print(frec_PProg)
######### Construcción de la Matriz de densidades Prepagos - Principal Programado
dens_PProg<-matrix(rep(0,no_edos*m3),no_edos,m3)
for (i in 1:no_edos){
 dens_PProg[i,]<-frec_PProg[i,]/sum(frec_PProg[i,])
}
print(dens_PProg)
######### Construcción de la Matriz de distribuciones Prepagos - Principal Programado
distr_PProg<-matrix(rep(0,no_edos*m3),no_edos,m3)
for (i in 1:no_edos){
 distr_PProg[i,]<-cumsum(dens_PProg[i,])
}
print(distr_PProg)
##############################################
 SIMULACIÓN
##############################################
no_simulaciones<-10000
Precios_udis<-rep(0,no_simulaciones)
Precios_pesos<-rep(0,no_simulaciones)
s3<-0
while(s3 < no_simulaciones){
```

```
s3<-s3+1
X_t_1<-último
PProg_t_1<-ult_PProg
SdoFinal_t_1<-ult_SF
contador<-0
MontoPT<-0
MontoPP<-0
PProg<-0
Intereses<-0
while (SdoFinal_t_1>0){
 #Simulación de Y_t
 u1<-runif(1)
 for (s1 in m3:1){
 if (u1<=distr_PProg[X_t_1,s1]){Y_t<-s1} #Y_t % de afectación al Principal Programado
 }
 #print(Y_t)
 #Se convierte el edo Y_t a tasa.
 if (Y_t==1){tasaY_t<-(-.5)}
 if (Y_t==2){tasaY_t<-(-.375)}
 if (Y_t==3){tasaY_t<-(-.175)}
 if (Y_t==4){tasaY_t<-(-.075)}
 if (Y_t==5){tasaY_t<-0}
 if (Y_t==6){tasaY_t<-0.075}
 if (Y_t==7){tasaY_t<-0.175}
 if (Y_t==8){tasaY_t<-0.375}
 if (Y_t==9){tasaY_t<-0.75}
 if (Y_t==10){tasaY_t<-1}
 #print(tasaY_t)
 PProg_t<-PProg_t_1*(1+tasaY_t)
```

```
if(PProg_t>=SdoFinal_t_1){SdoFinal_t_1<-0 #El último pago es SdoFinal_t
} else {
      #Simulación de X_t cadena de prepago
      u2<-runif(1)
      for (s2 in no_edos:1){
      if (u2<=mat_distr[X_t_1,s2]){X_t<-s2}
      }
      #print(X_t)
      #Se convierte el edo X_t a (tasa de Prepago Total,tasa de Prepago Parcial).
      if (X_t==1){tasaPT_t<-0.05
   tasaPP_t<-0.15}
      if (X_t==2){tasaPT_t<-0.05
   tasaPP_t<-0.25}
      if (X_t==3){tasaPT_t<-0.0625
   tasaPP_t<-.05}
      if (X_t==4){tasaPT_t<-0.0625
tasaPP_t<-0.15}
      if (X_t==5){tasaPT_t<-0.0625
      tasaPP_t<-0.25}
      if (X_t==6){tasaPT_t<-0.0625
      tasaPP_t<-0.35}
      if (X_t==7){tasaPT_t<-0.0875
      tasaPP_t<-0.15}
      if (X_t==8){tasaPT_t<-0.0875
      tasaPP_t<-0.25}
      if (X_t==9){tasaPT_t<-0.1
      tasaPP_t<-0.35}
   MontoPT_t<-(SdoFinal_t_1-PProg_t)*(1-(1-tasaPT_t)^(1/12))
    MontoPP_t<-(SdoFinal_t_1-PProg_t)*(1-(1-tasaPP_t)^(1/12))
    Intereses_t<-SdoFinal_t_1*30*tasa_cup/360
```

```
 #Vector con flujo de Prepago Total, la primera entrada no cuenta
 MontoPT<-c(MontoPT,MontoPT_t)
#Vector con flujo de Prepago Parcial, la primera entrada no cuenta
 MontoPP<-c(MontoPP,MontoPP_t)
#Vector con flujo de Principal Programado, la primera entrada no cuenta
 PProg<-c(PProg,PProg_t)
#Vector con intereses, la primera entrada no cuenta
 Intereses<-c(Intereses,Intereses_t)
 SdoFinal_t<-SdoFinal_t_1-PProg_t-MontoPT_t-MontoPP_t
            PProg_t_1<-PProg_t
            X_t_1<-X_t
            SdoFinal_t_1<-SdoFinal_t
            }
            contador<-contador+1
}
MontoPT<-MontoPT[c(-1)] #Vector con flujo de Prepago Total
MontoPP<-MontoPP[c(-1)] #Vector con flujo de Prepago Parcial
PProg<-PProg[c(-1)] #Vector con flujo de Principal Programado
Intereses<-Intereses[c(-1)] #Vector de intereses
 ###########################
 #Valuación al 01-oct-08
 #Corte cupón 25 de cada mes
 ###########################
#Vector con flujos de efectivo en UDIS
Flujos1<-PProg+MontoPT+MontoPP+Intereses
#El último flujo de efectivo es SdoFinal_t + Intereses
ult_Flujo<-SdoFinal_t+SdoFinal_t*30*tasa_cup/360
Flujos<-c(Flujos1,ult_Flujo)
no_Flujos<-length(Flujos)
```

```
no_títulos<-3063500
udi_01oct08<-4.083064
 ###########################
 VP con curva cupón cero con sobretasa de 1.8 (01-oct-08 Valmer)
 ###########################
#Factores de descuento
FactDesc<-as.matrix(read.table("C:/Documents and Settings/XP/Mis documentos/FactDesc.txt",header=F));
if(no_Flujos>dim(FactDesc)[1])
 {s3<-s3-1
 next} else {
factor_descuento<-FactDesc[1:no_Flujos,2]
VP_Flujos<-Flujos*factor_descuento
Precios_udis[s3]<-sum(VP_Flujos)/no_títulos #Precio Sucio
Precios_pesos[s3]<-Precios_udis[s3]*udi_01oct08
}
}
########### Fin de la Simulación #############################
Precios<-cbind(Precios_udis,Precios_pesos)
###Precio Sucio Promedio
Precio_udis<-mean(Precios_udis)
Precio_pesos<-mean(Precios_pesos)
print(Precio_udis)
print(Precio_pesos)
```

# Bibliografía


[1] Basawa I. V. y Prakasa Rao B. L. S. (1980). Probability and Mathematical Statistics. A Series of Monographs and Textbooks Statistical Inference for Stochastic Processes. Academic Press Inc. Cap. 4.

[2] Caballero M. E., Rivero V. M., Uribe G. y Velarde C. (2004) Cadenas de Markov. Un enfoque elemental. Sociedad Matemática Mexicana. Cap. 5 pp. 94-95.

[3] Pliska Stanley R. (1997). Introduction to Mathematical Finance Discrete Time Models. Blackwell Publishers.

[4] Hayre Lakhbir (2001) Guide to Mortgage-Backed and Asset-Backed Securities. Salomon Smith Barney. Cap 1-15.

[5] Stone C. A. y Zissu Anne (2005) Structures and Dynamics of Mortgage- and Asset-Backed Securities. The Securitization Markets Handbook. Bloomberg Press Princeton. Cap 1-4.

[6] Elizondo A., Gómez G., Bernabé A. y Valladares S. (2006) Estudio de Severidad Sectorial. SHF.

[7] Curva de Incumplimiento. Seminario para Sofoles. SHF.

[8] Modelos de Puntuación. Puntaje de originación. SHF.

[9] Puntaje de Comportamiento.(2007) SHF.

[10] Prepago. SHF.

[11] Boletín Informativo. Certificados Bursátiles Respaldados por Hipotecas (BORHIs). SHF.

[12] Programas y suplementos de BORHIs. Bolsa Mexicana de Valores.

[13] LEVELS México® estima el riesgo de incumplimiento y recuperación de las bursatilizaciones mexicanas respaldadas por hipotecas (RMBS). Financiamiento Estructurado (2009). Standard and Poors's.

[14] Aban L. (1999). Tesis: Bursatilización de Cartera, Fuente de Financiamiento dentro del Sistema Financiero Mexicano. Universidad La Salle. Secc. 3.3.

[15] Rodríguez A. (septiembre 2007). El mercado de Instrumentos Respaldados por Hipotecas. Acciones y Valores Banamex, Casa de Bolsa.

[16] Departamento de Análisis de Deuda Privada de Ixe Grupo Financiero (julio 2005). Bursatilizaciones de Hipotecas, Despejando las Dudas. IXE.

[17] Estudios Económicos y Servicio de Estudios BBVA. (abril 2002). Informe Inmobiliario. BBVA-Bancomer.

[18] Arsenin I., Cervera A., Williams Jeff. Fixed Income Research.(septiembre 2006). Mexico Mortgage Market. Mexico's Residential Mortgage-Backed Securities: An overview of the market. Credit Suisse.

[19] Hayre Lakhbir. US Fixed Income Research. (1999) Guide to Mortgage-Backed Securities. Salomon Smith Barney.

[20] Reveiz A., Merchán D. y De Beaufort Roberto. Departamento de Investigaciones. Departamento de Reservas Internacionales. (octubre 2002) Títulos Hipotecarios de los Estados Unidos: Estudio de las Características del Mercado e Instrumentos. Banco de la República de Colombia.