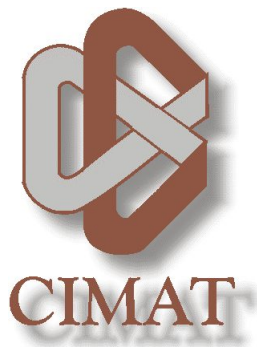

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN
MATEMÁTICAS A.C.



T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

*Maestro en Ciencias con
especialidad en Probabilidad y Estadística*

PRESENTA:

L.M. Gustavo Othoniel Cano Moo

*Riesgo sistémico. Una aplicación de
los grafos aleatorios*

DIRIGIDO POR: DR. ERICK TREVIÑO AGUILAR.

06 de Agosto 2010
Guanajuato, Gto. México

*A toda mi familia. En especial a mi madre
por siempre creer en mi.*

Agradecimientos

Agradezco de gran manera al Dr. Erick Treviño Aguilar por sus consejos, guía y ayuda para sobrellevar el tema de tesina. De igual manera agradezco al Dr. Víctor Manuel Pérez-Abreú Carrión quien fue mi tutor y ha sido mi guía en estos dos años de maestría, gracias por su comprensión y apoyo.

Le doy un agradecimiento infinito al pueblo mexicano, que a través del CONACyT solventó mis estudios de maestría lo cual permitió que concentrara mis esfuerzos en el estudio y acabar este periodo de manera exitosa.

Agradezco cariñosamente a mi familia por apoyarme en todo momento y creer siempre en mi. A mis padres por su tenacidad, consejos, cariño y comprensión que me han ayudado a dar forma a mi vida.

Agradezco a la comunidad de CIMAT, en especial al cuerpo académico de probabilidad y estadística los cuales me han brindado todo sus conocimientos. Además, me han enriquecido con sus consejos y experiencia que me serán útiles para mi vida futura. Jamás los olvidaré.

Gracias a mis amigos: Selomit, Leticia, Lina, Boryana, Mario, Diego, Juan Antonio, Joel y Héctor por su apoyo y amistad durante mi estancia en el CIMAT, siempre los recordaré y serán parte de mi vida. De manera especial quiero agradecer a Henry Pantí por sus apoyo y recomendaciones que me hicieron crecer y lograr mis objetivos en la maestría.

Índice general

1. Introducción	6
2. Consideraciones generales del riesgo sistémico	9
2.1. Acuerdo de convergencia internacional	9
2.2. Requerimientos marginales	12
2.3. Riesgo sistémico	12
2.4. Modelo de Márquez Díez Cañedo y Martínez Jaramillo	15
2.5. Características de la crisis del 2007	17
3. Grafos aleatorios	19
3.1. Grafos determinísticos	19
3.1.1. Familias especiales de grafos	22
3.1.2. Matrices incidentes y adyacentes	24
3.1.3. Grado del vértice	25
3.1.4. Subgrafos, supergrafos e isomorfismos	26
3.1.5. Operaciones entre grafos y digrafos	28
3.2. Grafos aleatorios	30
3.3. El modelo de Erdős y Renyi	32
4. Modelos de conexión preferencial	34

4.1. Conexión preferencial y libertad de escalamiento	34
4.2. Modelo de Barabási y Albert	36
4.3. Modelo LCD y el grafo $G_m^{(n)}$	40
4.4. El modelo de Bollobás, Borgs, Chayes y Riordan	42
5. Proceso de contagio	48
5.1. Modelo de contagio por nivel de solvencia	48
5.2. Choque inicial y estrés en los sistemas bancarios	51
5.3. Perturbación de reservas	52
6. Simulaciones	57
6.1. Impacto de incumplimiento vs número de participantes en el sistema . . .	58
6.1.1. Caso sin estrés	58
6.1.2. Caso con estrés	59
6.2. Simulación del índice de riesgo sistémico	60
6.2.1. Caso sin estrés	60
6.2.2. Caso con estrés	61
6.3. Proporción de pérdida y proporción de la caída	62
Bibliografía	67
A. Apéndice A	70
B. Apéndice B	74
B.1. Simulación del grafo de inicio	74
B.1.1. Paquete <code>network</code>	74
B.1.2. Código del programa.	76
B.1.3. Resultados	79
B.2. Simulación del proceso de contagio.	80

Capítulo 1

Introducción

El tema de este trabajo es el de riesgo sistémico. Problemas claves son los de modelación y medición de riesgo. Para el problema de modelación utilizaremos técnicas de la *teoría de grafos aleatorios*. Para el problema de medición utilizaremos propuestas que hemos encontrado en referencias bibliográficas recientes. En el Capítulo 2 presentamos el concepto de riesgo sistémico. En el Capítulo 3 presentamos conceptos de grafos y su contraparte probabilista.

A groso modo, el riesgo sistémico de un sistema interbancario es el peligro de que una institución o conjunto de instituciones tengan dificultades, tales como el estado de insolvencia o incumplimiento, y esto se contagie a otras instituciones a través de relaciones contractuales de deuda a tal grado que el sistema entre en un estado de colapso y/o parálisis. La preocupación de las autoridades regulativas es que la crisis del sector bancario llegue a afectar la economía real. Definiciones y formulaciones exactas requieren de considerar situaciones concretas y aun son tema de investigación. En el Capítulo 5 discutimos con mayor detalle este punto. Aquí solo mencionamos que un análisis de este fenómeno requiere representar las instituciones del sistema y sus relaciones deudor-prestamista. Para este fin tenemos un objeto matemático a la medida: Un grafo. Los vértices del grafo representan las instituciones y las conexiones sus relaciones de deuda. Podemos también decir en este momento que para hacer una representación que refleje la situación real debemos considerar grafos dirigidos y ponderados, lo que aumenta el grado de sofisticación en el análisis.

Enfocar el problema como un fenómeno determinista parece ser poco fructífero. Un primer motivo es el volumen masivo del mercado interbancario, por ejemplo en la red “Fedwire” el correspondiente grafo tiene mas de 6,600 vértices y 70,000 enlaces; ver e.g., Somaräki et al. [31]. Otro motivo es el carácter dinámico que tiene este mercado: Existen ajustes diarios a las relaciones de deuda, por ejemplo en la red mexicana *Sistema de depósito, administración y liquidación de valores* (DALI) el volumen de operación es de varios miles por día; ver el Reporte del sistema financiero del Banco de México [19]. Tomando esto en consideración haremos un análisis con *grafos aleatorios*. Este enfoque es

natural y ha sido considerado por ejemplo por Cont [15].

Para el problema de medición del riesgo nuestro análisis incorporará ideas desarrolladas por Márquez Diez Canedo y Martínez Jaramillo [26], Cont y Moussa [16] y Battiston et al. [6].

Con respecto a los trabajos de Márquez Diez Canedo y Martínez Jaramillo [26] y Battiston et al. [6] nuestro trabajo incorpora adicionalmente dos elementos: Las relaciones de deuda representadas mediante un grafo aleatorio con distribución de ley potencia y reservas de capital aleatorias.

El modelo con distribución ley potencia que utilizaremos es una contribución reciente de Bollobás et al. [10] el cual presentaremos en la Sección 4.4. El modelo de Bollobás et al. [10] se obtiene mediante una construcción algorítmica que es conveniente para los propósitos del Capítulo 6 en los que desarrollamos un programa de simulación en el lenguaje R.

Como producto del esfuerzo de análisis de este trabajo hemos detectado algunos problemas de investigación que consideramos pueden ser de relevancia y por este motivo los mencionamos a continuación. Una primera pregunta se origina al observar que las medidas de riesgo sistémico utilizadas en las anteriores referencias aun cuando son razonables, no dejan de ser “ad-hoc”. Parece ser un tema central el proveer un “esquema-axiomático” para caracterizar medidas de riesgo sistémico en el espíritu de las medidas de riesgo monetarias convexas de Föllmer y Schied [22]. En otra dirección, veremos que el modelo de Bollobás et al. [10], permite construir una clase limitada de grafos aleatorios dirigidos ponderados. En particular, las ponderaciones de cada arista en el grafo aleatorio se generan independientemente de la interconectividad, esto parece ser altamente irreal.

Finalmente, detectamos un conjunto de nuevos problemas que pueden ser de interés en un sentido puramente matemático y que requiere teoría avanzada de probabilidad:

1. Un grafo aleatorio puede ser interpretado como un campo aleatorio. ¿Es posible realizar esta interpretación también para grafos aleatorios dirigidos y ponderados?
2. Veremos que un grafo aleatorio dirigido y ponderado tiene asociada una matriz de adyacencia. Dicha matriz es aleatoria. Suponiendo que la pregunta de arriba tiene una respuesta afirmativa, ¿cuál es la relación, y cuál es su naturaleza, entre la matriz aleatoria y el correspondiente campo aleatorio? Por ejemplo, la clase de campos aleatorios que son plausibles para modelar la red de relaciones de deuda ¿es markoviana?, ¿qué clase de matriz aleatoria le corresponde a dicho campo aleatorio?
3. A un campo aleatorio markoviano le corresponde una medida de Gibbs; ver e.g. Kindermann and Snell [24]. Es interesante saber si podemos establecer esta correspondencia para los correspondientes objetos asociados a grafos aleatorios dirigidos y ponderados.

4. Suponiendo que obtenemos respuestas afirmativas a las anteriores preguntas, ¿qué significa para el concepto de riesgo sistémico el tema de cambios de fase de campos aleatorios?

Contribuciones de la tesis. Nuestras tres referencias principales son artículos de investigación del año 2009 en adelante, en este sentido, el tema de la tesis es muy reciente. Pensamos que hemos hecho una contribución a nuestra comunidad universitaria en el sentido de presentar una exposición autocontenida y que consideramos accesible para cualquier estudiante graduado con conocimientos de la teoría de probabilidad. Aunque modesta, consideramos que también hemos hecho una contribución a nuestra comunidad científica al detectar algunos temas de investigación que en nuestra opinión pueden iniciar una línea de trabajo productiva.

Una aportación importante de la tesis es el desarrollo de un simulador en el lenguaje R que presentamos en el Apéndice B. Este simulador consta de diversos módulos. Mediante este software llevamos a cabo diversas simulaciones cuyos resultados son el contenido del Capítulo 6. En su primer módulo, el simulador nos permite generar grafos aleatorios con distribuciones de ley potencia siguiendo la construcción de Bollobás et al. [10]. Una de las bondades de este programa es que se pueden simular el número de bancos en el sistema que se desee; la única limitante es la capacidad de cómputo. Este modelo tiene una gran flexibilidad que permite simular con cualesquiera exponentes; ver el Teorema 14.

Nuestro simulador tiene un módulo que reproduce el proceso de contagio que se describe en la Sección 5.1 en dos regímenes diferentes. En el primero, consideramos el sistema bajo estrés por riesgo de mercado y en el segundo ausencia de estrés. Para estudiar el caso con estrés se desarrolló un programa para calcular las reservas de capital perturbadas por una distribución multivariada F con marginales F_1, \dots, F_n con distribuciones dadas cualesquiera. La estructura de dependencias es modelada por una cópula Gaussiana. En el Capítulo 6 se estudia el caso en el que las distribuciones marginales F_i tienen distribución normal con diferentes medias y dos tipos de varianzas. La lógica de programación, para poder simular muestras de la distribución F , se especifica en los algoritmos 1 y 2.

El simulador culmina con un módulo que calcula el Índice de riesgo sistémico; ver Definición 17. Para llegar a este punto se conjuntaron todos los módulos del simulador. Se calculó la correspondiente esperanza condicional (5.11) por el método de Montecarlo. En el Capítulo 6 se estudian sistemas bancarios con parámetros específicos y se hace un énfasis en la comparación de los casos con estrés y sin estrés.

De este ejercicio encontramos empíricamente un comportamiento interesante: La relación de la severidad por riesgo sistémico con el número de vértices en el sistema, es no monótono. Esto va en la dirección del análisis con otros métodos de Battiston et al.[6].

Capítulo 2

Consideraciones generales del riesgo sistémico

En este capítulo se presenta de manera general el acuerdo de convergencia internacional y cómo este pretende minimizar los riesgos de incumplimiento y banca rota de los miembros de un sistema financiero. Se mostrará cómo está constituido este acuerdo y cuáles son las características principales las cuales permiten tomar medidas preventivas para evitar una crisis. Luego se verá cómo fue surgiendo la noción de riesgo sistémico y cómo se modela por medio de la teoría de grafos. Finalmente se mencionará cuales son las repercusiones en las economías de distintos países y se hará énfasis en la economía Mexicana.

2.1. Acuerdo de convergencia internacional

El comité de Basilea esta formado por bancos centrales y supervisores reguladores de los países industrializados del mundo el cual se reúne trimestralmente en el banco de acuerdos internacionales en Basilea, Suiza. Este comité esta conformado por los representantes de los bancos centrales de Bélgica, Canadá, Francia, Alemania, Italia, Japón, Holanda, Suecia, Suiza, Reino Unido, Los Estados Unidos y Luxemburgo como miembro observador. Fue fundada por los gobernadores de los bancos centrales del grupo de los diez en 1975.

Este comité publicó en 1988 el *Acuerdo de convergencia internacional de medición y estándares de requerimientos de capital* [5]. El acuerdo fue el primero en establecer un conjunto de reglas de regulación bancaria con alcance internacional. Es considerado uno de los mayores avances en cuanto a la definición de los requerimientos mínimos de capital que deben cumplir los bancos internacionales para hacer frente a las situaciones inesperadas de pérdidas por diferentes riesgos, principalmente el riesgo de crédito.

En junio del 2004 se suscribió el segundo acuerdo de capital conocido como Basilea

II [4]. Este nuevo acuerdo promueve el uso de mejores practicas en la administración de riesgos por parte de intermediarios financieros, plantea un esquema más sensible al riesgo, una regulación y supervisión mas efectiva y la implementación de una mayor disciplina del mercado. En Basilea II se menciona:

*“El objetivo primordial del comité al revisar el cuerdo de 1988, ha sido establecer un marco que fortaleciera en mayor medida la solidez y estabilidad del sistema bancario internacional, manteniendo al mismo tiempo la necesaria consistencia para que la normativa de suficiencia del capital no fuera una fuente de desigualdad competitiva entre los bancos internacionales. Los bancos y otras partes interesadas han aceptado de buen grado en sus comentarios el concepto y la lógica de los tres pilares en los que se basa el acuerdo: capital mínimo requerido, examen por parte del supervisor y disciplina del mercado”.
Basel II [4], Párrafo 4.*

El acuerdo Basilea II esta estructurado en tres pilares:

Pilar uno: Capital mínimo requerido Este pilar tiene relación con el mantenimiento del capital mínimo requerido para las instituciones bancarias. En Basilea II se discuten alternativas para que los requerimientos de capital estén mejor vinculados al riesgo al que este expuesto *cada banco en particular*. El capital mínimo requerido funge como respaldo para la seguridad del capital de los depositarios del banco, ya que se pretende reducir la posibilidad de *insolvencia*. De acuerdo con Basilea II, el capital mínimo requerido para cada banco tiene que calcularse en función de tres tipos de riesgo los cuales se clasifican de la siguiente manera:

Riesgo de Mercado Algunas veces llamado riesgo sistemático, riesgo agregado o riesgo no diversificable, es el riesgo de que los valores del portafolio, como los son los portafolios de inversión o los de transacción, disminuyan debido a los cambios en los valores de los factores mercantiles globales. Estos factores normalmente son cuatro; precio de las acciones, tasas de interés, tasas de cambio extranjeras y los precios de los productos básicos. Además de estos factores existen otros que influyen indirectamente en el riesgo de mercado, estos son: riesgo de renta variable, riesgo en las tasas de interés, riesgo cambiario y el riesgo de materia primas. En contraste el riesgo no sistemático o también llamado *riesgo idiosincrático* es el riesgo de que una empresa en particular tenga pérdidas causadas por problemas laborales, nacionalización de los activos o incluso por las condiciones meteorológicas. Este tipo de riesgo puede ser reducido mediante una adecuada diversificación.

Riesgo de Crédito El riesgo de crédito es el riesgo de pérdida debido al incumplimiento de un deudor en el pago de un préstamo o línea de crédito (ya sea la

principal de intereses o ambos). Los eventos incluyen por defecto un retraso en los pagos, la reestructuración de los pagos del prestatario y la quiebra.

Riesgo Operacional Es el riesgo de pérdida derivada del fraude, actividades no autorizadas, error, omisión, ineficiencia, fallo en los sistemas o eventos externos, riesgos físicos o ambientales. También se le conoce como el riesgo derivado de la ejecución de las funciones comerciales de una empresa.

En términos generales, un banco es una empresa que se dedica a la gestión de riesgos en busca de la rentabilidad. Es decir, un banco está dispuesto a correr niveles de riesgo con el objetivo de generar ganancias. Bajo esta perspectiva, un banco puede conceder créditos que no están debidamente respaldados por suficiente capital. Las prácticas establecidas en el primer pilar pretenden regular esta disyuntiva y evitar esta clase de *riesgo moral*¹.

Pilar dos: Proceso de examen supervisor Este proceso tiene los objetivos de garantizar que los bancos posean el capital mínimo necesario para cubrir los riesgos de sus actividades, tratando de asegurar que su grado de *capitalización* sea el adecuado de acuerdo a su perfil de riesgo. También tiene por objetivo supervisar que los bancos desarrollen y utilicen mejores técnicas de evaluación y control de riesgos. El segundo pilar se basa en los principios de supervisión preventiva y la incorporación de nuevos parámetros de medición de riesgos, tal como la probabilidad de incumplimiento en riesgo de crédito. Estos elementos se consideran cada vez más necesarios para la eficiencia de la gestión de las entidades financieras y la supervisión bancaria.

Pilar tres: Disciplina del Mercado A través de la transparencia y disciplina del mercado, el comité busca incentivar a los directivos de las instituciones bancarias a tomar las medidas necesarias para mejorar la gestión y conducirla dentro de niveles prudentes de solvencia. El tercer pilar también tiene por objetivos completar los requisitos mínimos de capital y el proceso de examen de supervisión del primer y segundo pilar respectivamente. El comité pretende fomentar la disciplina de mercado a través de un conjunto de requisitos de divulgación para que los integrantes del mercado financiero puedan evaluar la información sobre el perfil de riesgo de un banco y su nivel de *capitalización*. Al propiciar una mayor disciplina de mercado a través de divulgaciones mejoradas, es posible tener ventajas significativas que ayuden a los bancos y supervisores a gestionar sus riesgos y a mejorar la estabilidad.

Estos tres pilares y las normas que utiliza para evaluar y calcular el requerimiento de capital mínimo se muestra en la Figura 2.1

¹En inglés Moral Hazard.

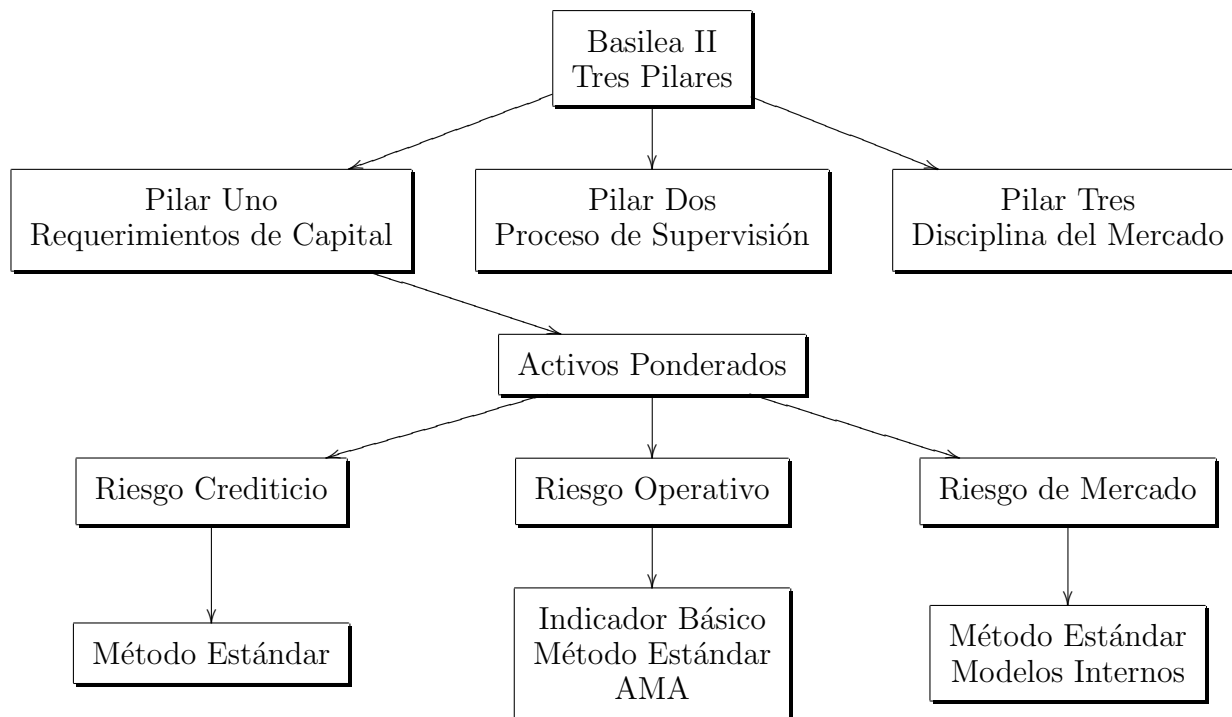


Figura 2.1: Estructura de Basilea II.

2.2. Requerimientos marginales

Es importante señalar que el acuerdo Basilea II se centra en establecer requerimientos de capital *individualmente* por entidad financiera. Los tres pilares están diseñados para complementarse mutuamente y evitar que tal entidad caiga en banca rota. El primer pilar sólo toma en cuenta los requerimientos de capital por banco y *no considera el riesgo generado al sistema bancario completo*. En este sentido, los requerimientos de capital de Basilea II, son requerimientos marginales. Surge la necesidad de establecer un nuevo requerimiento de capital a una operación financiera por el nivel de riesgo que introduce en toda la red de instituciones. Este punto es central y dirigirá el desarrollo de las siguientes secciones.

2.3. Riesgo sistémico

El riesgo sistémico es en un sentido amplio, el riesgo de que ciertos desarreglos en una institución financiera se propaguen a todo el sistema y afecten a otros mercados o que acabe por repercutir en varios países y por extensión, a toda la economía mundial. Una

definición notable es la dada por el *Banco de Acuerdos Internacionales*², en su reporte anual de 1993-1994:

“Riesgo sistémico es el riesgo de que el incumplimiento de un participante a sus obligaciones pactadas desencadene el incumplimiento de otros participantes, generando una reacción en cadena dejando a su paso dificultades financieras.”

Esta definición de riesgo sistémico destaca el papel del contagio financiero en una crisis sistémica. De esta definición uno puede inferir que el riesgo sistémico tiene dos componentes: (i) un evento de choque que causa las fallas o disfuncionalidades de un número crítico de participantes en el mercado y (ii) un mecanismo de contagio con el cual se propagan las fallas y/o las disfuncionalidades a un gran número de participantes del sistema completo. Algunos experiencias de crisis en las cuales se ha observado este comportamiento son:

- La crisis de Estados Unidos de 1980. En esta crisis se registraron en un solo mes, medio millón de desempleados. Esta crisis se extendió cruzando fronteras.
- La crisis “The Long Term Capital Management crisis (LTCM)”, 1998. Iniciada en Rusia con la “crisis del rublo” que golpeó en agosto de 1998 y extendiéndose a nivel internacional.
- La crisis del Efecto Tequila, México 1995. Esta crisis iniciada en México y se le conoce también como el error de diciembre que alcanzó repercusiones mundiales. Como consecuencia, el peso mexicano sufrió una fuerte devaluación. A unas semanas del inicio del proceso de devaluación de la moneda mexicana, el entonces presidente de los Estados Unidos, Bill Clinton, solicitó al congreso de su país la autorización de una línea de crédito por 20 mil millones de dólares para el Gobierno Mexicano.

Estos eventos de estrés tienen una característica en común: Comienzan con un choque inicial que golpea a uno o varios “vértices” y se propaga la situación de estrés a lo largo de la red de relaciones contractuales.

En reacción a las crisis vividas, post-facto, las autoridades regulatorias reconocen que parte esencial del problema es la gestión inadecuada del riesgo. En investigaciones y libros sobre riesgo bancario, por ejemplo Pyle [29] menciona lo siguiente:

“La gestión del riesgo es el proceso en el cual los gestores satisfacen las necesidades de liquidez, de crédito, de clientes, de gerencia y de las entidades

²En inglés: Bank of International Settlements (BIS).

reguladoras mediante la identificación de las claves del riesgo para poder obtener así medidas de riesgo operacionales, coherentes y sobre todo entendibles, escogiendo cual riesgo se debe reducir y cual se puede dejar aumentar y por que medios hacerlo y además establecer procedimientos para monitorear la posición riesgosa resultante.”

En la definición de Pyle se hace claro que la parte esencial del problema es definir que son las claves del riesgo, ya que estas se pueden definir de muchas maneras. Para hacer frente a estos riesgos y en consecuencia gestionar el riesgo de una entidad financiera, muchos investigadores han creado modelos que les permitan manejar, entender, medir y predecir tales riesgos. Entre ellos podemos mencionar; la Técnica de Diversificación, el CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) y el MPT (*Modern Pricing Theory*); ver e.g., Cochrane [14]. Además de estos modelos matemáticos, los economistas y financieros han querido formalizar regulaciones de alcance mundial para manejar y de alguna manera minimizar estos riesgos. En este sentido, el *Acuerdo de convergencia internacional de medición y estándares de requerimientos de capital* del comité de Basilea representa un gran avance; como explicamos en la Sección 2.1.

Un punto de partida en el acuerdo, es el identificar “requerimientos de capital y mantenimiento de reservas” como un mecanismo de control de riesgo. Este es un punto de vista bien aceptado en la comunidad y que nosotros compartimos. Sin embargo, en las reglas que propone el acuerdo hay discusión. El acuerdo ha sido adoptado en mas de cien países, no obstante, algunas de las propuestas son ampliamente debatidas en la academia; ver e.g., Danielsson et al. [18]. Desafortunadamente, la actual “subprime-crisis” del 2007 ha demostrado con exceso de evidencia que aún no hay un entendimiento completo de las diferentes clases de riesgo. Dicha falta de percepción completa puede significar ser la expresión de diversos fenómenos, por ejemplo, puede ser la expresión de una ausencia de mecanismos adecuados de detección de riesgo. También como parte del problema, pueden faltar técnicas de cuantificación para la medición de riesgo. En esta misma dirección de peligro, aun cuando el concepto de riesgo sistémico existía en la literatura académica, el alcance devastador era desconocido.

Los sistemas financieros modernos exhiben un alto grado de interdependencia, las conexiones entre las instituciones financieras pudiendo ser a favor en el balance contable o del lado de las obligaciones. Una instancia importante son enlaces directos de relaciones de deuda adquiridos en el mercado interbancario. Las redes, entendidas como una colección de vértices y conexiones, son una representación útil de sistemas financieros; un punto de vista discutido a detalle por Allen y Babus [1] en donde los autores abordan el tema de riesgo sistémico mostrando que hay dos vertientes del tema: Por un lado, se tiene la vulnerabilidad de la red al contagio y por otro el fenómeno de formación de redes y su evolución como un proceso dinámico.

En este análisis, Allen y Babus concluyen que una red de enlaces con alta conectividad es menos susceptible al riesgo de contagio en comparación a una red de menor conectividad. Un resultado que a primera vista es sorprendente pero que pone en relieve el valor de compartir el riesgo (risk-sharing). Sin embargo, las dos vertientes que discuten Allen y Babus demuestran que el fenómeno de contagio es al menos bidimensional. En efecto, Battiston et al. [6] introducen el concepto de “financiamiento acelerador” el cual modela un desgaste en las conexiones de la red y en particular de la evolución de la misma. En la ausencia de este acelerador, recuperan la conclusión de Allen y Babus. Sin embargo, en presencia de este factor, la relación entre conectividad y severidad de contagio es no monótona presentando un carácter convexo-cóncavo por regiones.

Otros enfoques para analizar el riesgo sistémico son discutidos por Markose et al. [25]. En particular, encontramos muy interesante el enfoque ACE: “Agent-based Computational Economics Approach” el cual se basa en complejidad de sistemas, inteligencia artificial y simulación.

Otra línea de trabajo que ha ocupado la atención de investigadores en el tema de redes financieras consiste en estudios empíricos que mapean mercados financieros específicos a su representación como grafos y conducen un análisis estadístico. Algunos trabajos son, Boss et al. [11] para Austria, Mueller [27] y Sheldon y Maurer [30] para Suiza, Soramäki et al. [31] para Estados Unidos y Wells [33] para U.K. Esta literatura sugiere la clase de grafos aleatorios para modelar una red financiera: Grafos con distribución de ley potencia y libres de escalamiento; conceptos que revisamos en el Capítulo 3.

2.4. Modelo de Márquez Díez Cañedo y Martínez Jaramillo

Elemento esencial en todo análisis de riesgo sistémico es el mecanismo de contagio. Un modelo es el propuesto por Márquez Díez Cañedo y Martínez Jaramillo [26]. En este modelo se estudia el proceso de contagio financiero y el proceso de choque mediante un grafo dirigido $G(N, A)$ donde N es el conjunto de nodos, que en este caso representan a los bancos que se consideran en el sistema bancario, A es el conjunto de conexiones dirigidas entre nodos los cuales se consideran ponderados por las deudas interbancarias. Este modelo se representa gráficamente en la Figura 2.2.

Resultado del proceso de contagio, los N nodos del grafo son particionados como $N = \{s, S, R, t\}$, donde s es el nodo que representa el inicio del choque en el sistema, S es el conjunto de nodos que representan los bancos que son las fuentes del contagio dentro

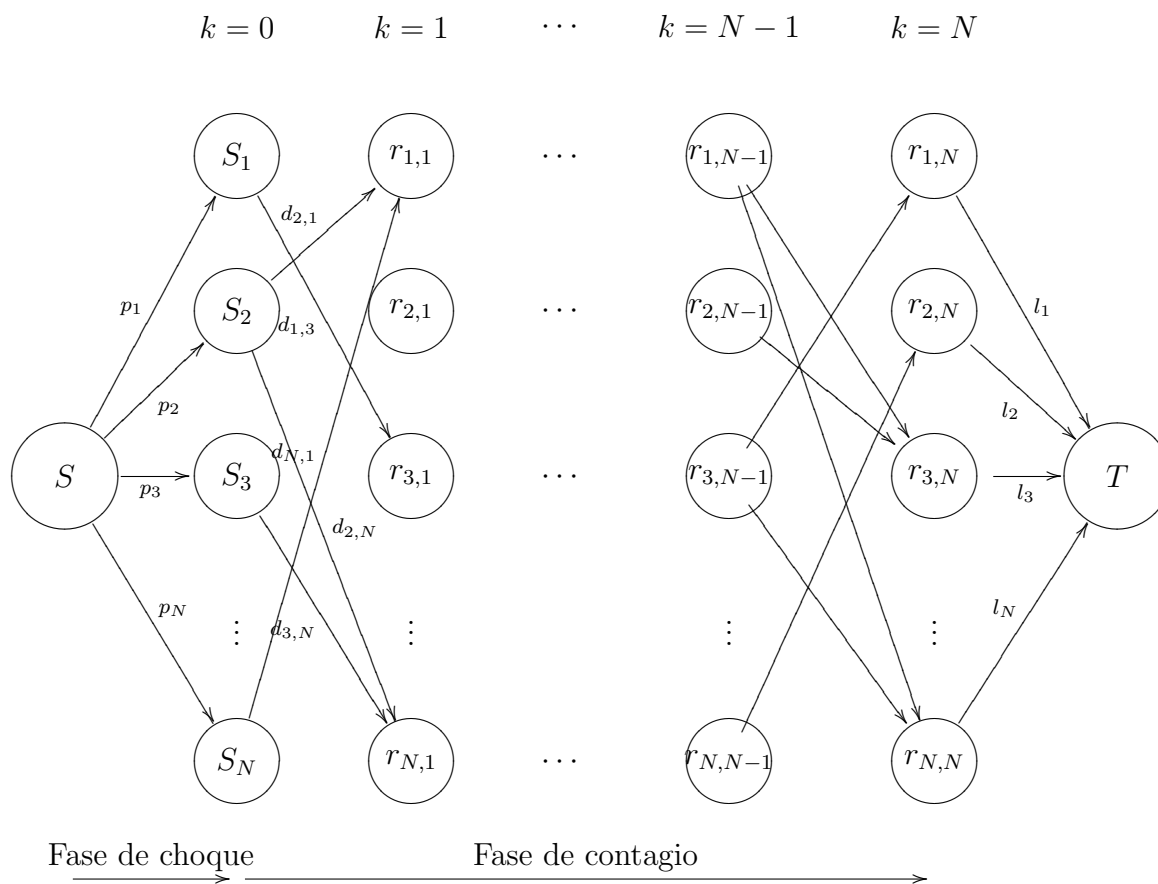


Figura 2.2: Modelo de redes para el mecanismo de contagio.

del sistema dadas por el choque inicial, R es el conjunto de los nodos “*relevo*” los cuales son bancos en el árbol de posibles contagiados en los diferentes “*pasos*” del proceso de contagio y t representa el nodo “*pozo*” donde todas las pérdidas sistémicas ocurren y se miden. De lo anterior se destaca que el riesgo sistémico se divide en dos fases, llamados la fase de choque y la fase de contagio. La Figura 2.2 ilustra el carácter dinámico del proceso de contagio.

Los nodos que van del nodo de choque s a las fuentes de contagio (s_1, \dots, s_N) son etiquetados con las probabilidades de falla de los bancos individuales p_i . Las etiquetas de las conexiones durante la fase de contagio se denotan por las exposiciones interbancarias d_{ij} , i.e., las deudas que se tienen entre bancos, las cuales en este modelo se asumen conocidas. Finalmente, las conexiones que van desde las terminales de relevo r_{iN} al nodo pozo t son etiquetados con la pérdida del sistema l_i dada la falla del banco i . Se debe observar que en este modelo solo el choque inicial es aleatorio, el proceso de contagio resultante se resuelve determinísticamente.

2.5. Características de la crisis del 2007

Los primeros síntomas de la crisis se manifestaron en 2006 con un aumento en los índices de morosidad de las hipotecas *subprime*. Entre los factores que contribuyeron a un aumento en la morosidad se encuentran la caída de los precios de la vivienda en los Estados Unidos. Identificamos esta situación de estrés como el *choque inicial* de la crisis.

Algunos factores que identifica el Banco de México [19] como factores de vulnerabilidad al choque inicial son:

- Un período prolongado de tasas de interés reales y nominales bajas y liquidez abundante en los mercados financieros internacionales. Esta situación propició una subestimación importante de los riesgos financieros asumidos por parte de los agentes económicos y fomentó el apalancamiento y la bursatilización de activos.
- Los conflictos de interés en las agencias calificadoras, la insuficiente transparencia en la información publicada, las inconsistencias en las reglas contables y los incentivos que generaba la estructura de remuneraciones del personal con capacidad de decisión en las entidades financieras.
- Una explosión en el nivel de apalancamiento por parte de los intermediarios financieros. Los bancos y otras instituciones financieras, sobre todo en los Estados Unidos, crearon vehículos de inversión (Special Purpose Vehicles) para sacar de sus balances carteras de crédito y reducir así sus requerimientos de capital. Los títulos emitidos por estos vehículos se diseñaron con características que les permitieron obtener mejores calificaciones crediticias.
- La insuficiente supervisión sobre las entidades financieras globales, derivada de la complejidad de sus operaciones y de la multiplicidad de sus contrapartes, así como de la fragmentación excesiva de las entidades con atribuciones regulatorias en algunos países.

La combinación de estos factores dió origen a un período de fuerte expansión del crédito y del consumo, a una caída en el ahorro, particularmente en los Estados Unidos, al surgimiento de una “burbuja” en el mercado inmobiliario y a un déficit creciente en la cuenta corriente de la balanza de pagos estadounidense.

La crisis se expandió a lo largo de 2008 y parte de 2009. Entre las razones que explican su expansión, el Banco de México menciona las siguientes:

- La innovación financiera y el uso de CDS-CDO's (Credit Derivative Swaps, Collateralized Debt Obligations) ha facilitado la segmentación y la distribución de los

riesgos financieros aumentando la *interconexión* entre las economías, mercados y entidades financieras.

- El uso generalizado de modelos de optimización basados en precios de mercado y en calificaciones de crédito ha propiciado que los participantes en los mercados financieros actúen de forma homogénea. Los comportamientos homogéneos dan lugar además a que el precio del activo en cuestión disminuya abruptamente ante noticias adversas, lo cual obliga a todos los participantes a liquidar posiciones adicionales. Las conductas de este tipo exacerbaban los movimientos de los precios de los activos financieros, lo que a su vez aumenta las correlaciones y las volatilidades.
- Las autoridades en los países desarrollados más importantes no lograron identificar de manera oportuna el origen y la extensión de la crisis.

En este análisis vemos que en la crisis interviene una fase de arranque o choque inicial y un proceso de contagio. De naturaleza, el proceso de contagio resulta ser complejo, el uso de derivados de crédito parece estar en el centro de atención. En al menos tres variantes es que los derivados de crédito intervienen en la crisis:

- Como instrumento de apalancamiento para hacer apuestas exponenciando el capital en reserva.
- Como herramienta con la que se construye la burbuja en el mercado inmobiliario.
- Como vínculo de enlace entre dos instituciones financieras.

La alta conectividad del mercado y los efectos devastadores de contagio en la crisis contradicen, en apariencia, el análisis de Allen y Babus [1], el cual predice la estabilidad del sistema bajo un régimen de alta conectividad. Sin embargo, esto confirma la teoría de Battiston et al. [6] de la relevancia de su concepto “finacial accelerator” el cual modela un deterioramiento en las conexiones de la red y en particular de la evolución de la misma. Como mencionamos anteriormente, en presencia de este factor, la relación entre conectividad y severidad de contagio es no monótona presentando un carácter convexo-cóncavo por regiones. Aparentemente, esto también va en línea con el carácter homogéneo en la toma de decisiones a que hace referencia el Banco de México.

Capítulo 3

Grafos aleatorios

En este capítulo presentamos un resumen de las definiciones y resultados sobre grafos deterministas y cómo en base a estos surge la idea de grafos aleatorios, definida por Erdős and Renyi. Se definirán las nociones importantes sobre grafos aleatorios y algunas características generales. Se mencionará también la noción de proceso de grafos aleatorios y las características más comunes, finalizando con el concepto del grado del vértice que será una pieza clave en la modelación de los procesos de grafos aleatorios.

3.1. Grafos determinísticos

En términos simples un grafo determinístico es una estructura que sirve para representar las relaciones entre objetos. Esta relación puede modelar muchos tipos de situaciones, en las cuales se tiene una clara interdependencia entre objetos y características que los relacionan. Ejemplo de ellas son: cuando los objetos son personas y las relaciones parentescos familiares o de amistad y las líneas que los unen son la comunicación, religión o alguna característica que se desee estudiar de la población, otras situaciones son darle respuesta a preguntas como ¿Cuánto tiempo dura viajar a las capitales de los 32 estados de la República Mexicana y cuál es la ruta más corta?, ¿Cuál será el costo mínimo para hacer que cada teléfono sea accesible en un sistema telefónico?, ¿Cómo deben ser ocupados n puestos de trabajo para tener una utilidad máxima?. Estas y muchas preguntas se pueden responder entendiendo bien los objetos involucrados y las relaciones entre ellos. Una herramienta para entender estas situaciones es la teoría de grafos, para usar esta herramienta definimos el concepto de forma precisa.

Definición 1 *Un grafo G es un par $G = (V, E)$ donde el conjunto de vértices (no vacío) usualmente finito es $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y el conjunto de conexiones (camino, aristas, arcos, etc.) E es una colección de pares (sin orden) de vértices $e_{ij} = (v_i, v_j)$.*

Un ejemplo de un grafo se muestra en la Figura 3.1, en ella se observan relaciones entre vértices y hace notar otras características de los grafos que se definirán mas adelante.

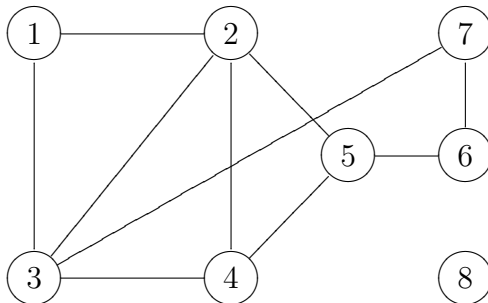


Figura 3.1: Ejemplo de un grafo con conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y conjunto de conexiones $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 7), (4, 5), (5, 6), (6, 7)\}$.

Existen otros tipos de grafos que tiene su origen en la práctica, estos hacen notar situaciones especiales en los cuales la definición anterior no es suficiente, como por ejemplo; cuando se quiere estudiar los hipervínculos entre las páginas web en la World Wide Web, es decir, se quiere contestar a la pregunta ¿De qué manera se puede llegar de una página web a otra?. Es claro que se tiene que determinar de alguna manera la relación que hay entre páginas web, ya que estas tiene “links” de salida y de entrada a páginas distintas, lo cual una conexión no modela, en esta situación se tiene que definir un tipo de gráfica que tome en cuenta esta situación. Para poder estudiar este tipo de situaciones se define el siguiente tipo de grafo.

Definición 2 *Dígrafo.* Cuando el conjunto de conexiones $A = A(G)$ es dirigido, es decir, se distinguen entre las conexiones $e_{ij} = (v_i, v_j)$ y $e_{ji} = (v_j, v_i)$, entonces el grafo $D = (V, A)$ se llama grafo dirigido o dígrafo.

Un problema muy importante relacionado con el estudio de grafos es el *problema del agente viajero*. Este problema se anuncia de la siguiente manera: dado un conjunto de N ciudades y M conexiones entre ellas, donde cada conexión tiene relacionado un número $T(c_k, c_l)$ el cual representa el tiempo que tarda de ir de la ciudad k a la ciudad l ¹, se quiere contestar a la pregunta ¿Cuál es la ruta que pase por las N ciudades que tenga el tiempo de recorrido mínimo?. Se nota en este problema que se tiene el ingrediente extra de los pesos $T(c_k, c_l)$ el cual no aparece en las definiciones anteriores. Para poder dar respuesta a la pregunta planteada por el problema del agente viajero hay que definir otro tipo de grafo que tome en cuenta estos pesos.

¹Aquí consideramos que el tiempo de viaje de ida y de vuelta es el mismo.

Definición 3 Un grafo ponderado (etiquetado) es un par (G, W) donde G es un grafo y W es un función $W : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, así el peso de una conexión e es $W(e)$. El peso del grafo es $W(G) = \sum_{e \in E} W(e)$.

Continuando con el problema del agente viajero, se plantea un problema más real y general en el cual se supone que los tiempos de ida y de vuelta son distintos. Esta suposición es válida ya que puede ser que entre dos ciudades existan diferentes tipos de transporte, así se puede hacer un viaje en avión desde la ciudad k a la ciudad l y un viaje en autobús desde la ciudad l a la ciudad k en este caso tenemos una desigualdad de la forma $T(c_k, c_l) < T(c_l, c_k)$. Llegamos entonces al concepto de *grado dirigido ponderado* que combina las dos definiciones anteriores. En la Figura 3.2 se muestra un ejemplo de estos tipos de grafos.

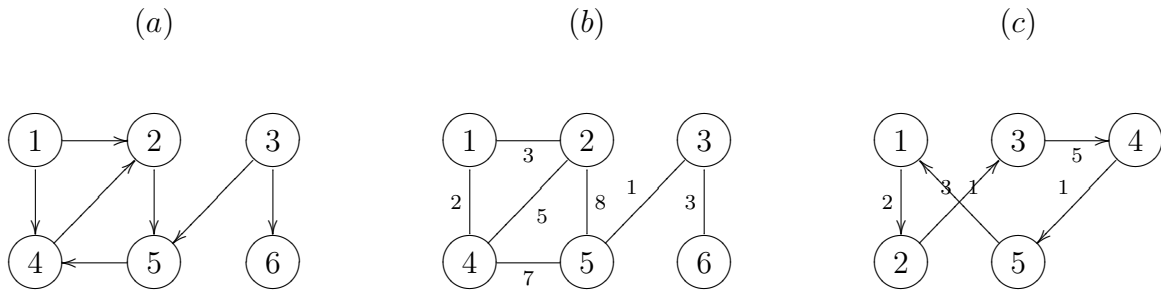


Figura 3.2: Ejemplos de un grafo dirigido (a), ponderado (b) con conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y para el grafo dirigido tenemos que el conjunto de conexiones es $E = \{e_{12}, e_{14}, e_{25}, e_{35}, e_{36}, e_{42}, e_{5,4}\}$ mientras que para el grafo ponderado se tiene que $W(e_{12}) = 3$ y $W(G) = \sum_{e \in E} W(e) = 2 + 3 + 8 + 1 + 3 + 5 + 7 = 29$ y (c) un grafo dirigido ponderado.

En la modelación del riesgo sistémico usando teoría de grafos aleatorios, usaremos la definición de grafo dirigido ponderado, la justificación de esto se sigue notando que las deudas (conexiones) interbancarias están dadas en una dirección, o sea, el banco i le debe al banco j la cantidad a_{ij} así se nota que la conexión tiene una dirección y un peso. También puede darse el caso que el banco j le deba al banco i la cantidad a_{ji} . Así se puede considerar dos casos. En la primera se toma en cuenta el grafo ponderado dirigido en el cual se distingan las dos situaciones anteriores como diferentes, es decir, el banco i y el banco j están conectadas en dos sentidos con diferentes pesos, a saber, a_{ij}, a_{ji} . El segundo caso es cuando se toma en cuenta un grafo dirigido ponderado en el cual las conexiones entre los bancos sólo tienen un sentido, es decir, cuando se tiene la situación anterior en la cual los bancos i, j tienen deudas entre sí, se toma la diferencia $a_{ij} - a_{ji}$ o $a_{ji} - a_{ij}$ según cual sea la cantidad positiva así se tiene que, si la cantidad $b_{ij} = a_{ij} - a_{ji} > 0$ se dice que

hay una deuda de cantidad b_{ij} del banco i al banco j , por otro lado si $b_{ji} = a_{ji} - a_{ij} > 0$ se tiene la situación contraria, de esta manera se tiene que los bancos están conectados en un solo sentido. Esta distinción es importante y es por ejemplo mencionada en el trabajo de Márquez Diez Canedo y Martínez Jaramillo [26].

3.1.1. Familias especiales de grafos

Cierto tipo de grafos juegan un papel muy importante en la teoría de grafos. Un *grafo simple* es un grafo que no tiene bucles en conexiones paralelas (i.e. no tiene conexiones de la forma $e_{v_i v_i}$), ejemplos de grafos simples son los que se muestran en la Figura 3.2. Un *grafo completo* es un grafo simple en el cual cualesquiera dos vértices son adyacentes, un *grafo vacío* es el cual cualesquiera dos vértices no son adyacentes (esto es, el conjunto de conexiones es vacío). Por ejemplo el número de vértices del grafo G denotado por $|V|$ se le llama *el orden del grafo*. El número de conexiones que tiene un grafo, i.e. $|E|$ refleja el *orden de conectividad del grafo*. Por ejemplo, si $E = 0$ entonces el grafo es vacío y si $|E| = \binom{|V|}{2}$ es el número total de vertices, entonces el grafo tiene orden de conectividad máximo y se conoce como completo.

Un grafo es *bipartito* si el conjunto de vértices del grafo puede dividirse en dos conjuntos X y Y tal que cualquier conexión tiene una terminal en X y otra en Y ; así la partición (X, Y) es llamada una bipartición del grafo con partes X y Y . Se denota a un grafo bipartito G con partición (X, Y) por $G(X, Y)$. Si $G(X, Y)$ es simple y cualquier vértice en X esta unido a todos los vértices de Y , entonces G se llama un *grafo bipartito completo*. Una *estrella* es un grafo bipartito completo $G(X, Y)$ con $|X| = 1$ o $|Y| = 1$. En la Figura 3.3 se ilustran ejemplos de un grafo completo, un grafo bipartito completo y una estrella.

Un *Camino* (ruta o trayectoria) es un grafo simple en el cual los vértices pueden ser organizados es una secuencia lineal de tal manera que dos vértices son adyacentes si son consecutivos en la secuencia, y no hay vértices adyacentes de otra manera. De igual manera, un *ciclo* sobre tres o más vértices es un grafo simple en el cual los vértices pueden ser organizados es una secuencia cíclica de tal manera que dos vértices son adyacentes si son consecutivos en la secuencia además se tiene conexión entre el primer vértice y el último en la secuencia, cosa que no pasa en el *camino*. Un ciclo de un solo vértice se conoce como *bucle* y un ciclo con dos vértices se llama *ciclo doble* o *ciclo paralelo*. La *longitud* de un camino o un ciclo es el número de conexiones que contiene cada uno, así un camino o un ciclo de longitud k se llama *k-camino* o un *k-ciclo*; el camino o el ciclo es par o impar si k lo es. Un 3-ciclo se llama *triangulo*, un 4-ciclo se llama un *cuadrilátero*, un 5-ciclo se

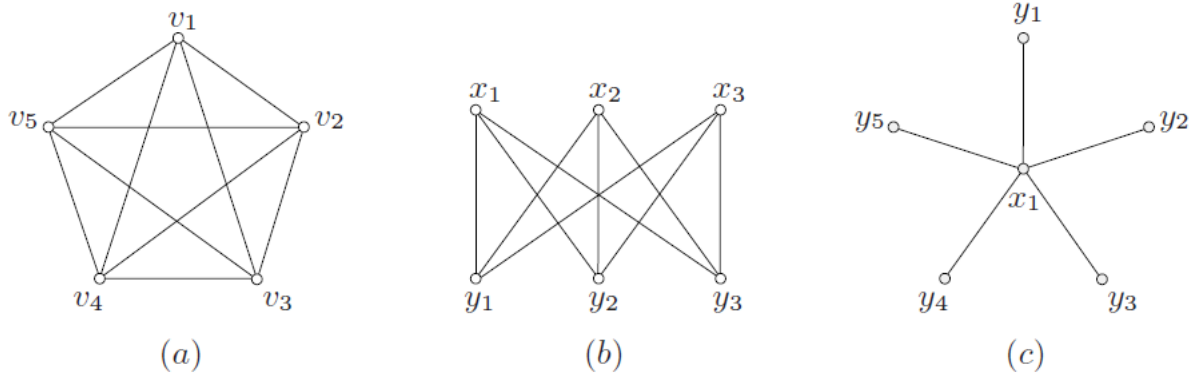


Figura 3.3: (a) un grafo completo, (b) un grafo bipartito completo, (c) una estrella.

llama un *pentágono* y así sucesivamente. En la Figura 3.4 se muestra un ejemplo de un ciclo y de un camino.

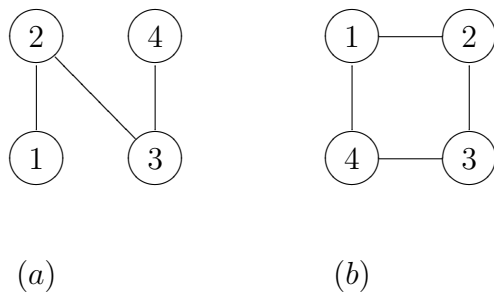


Figura 3.4: (a) un camino, (b) un ciclo.

Un grafo es *conexo* si para cualquier partición de sus vértices en dos conjuntos no vacíos X y Y , siempre hay una conexión con terminal en X y una terminal en Y ; en otro caso el grafo es *disconexo*. Ejemplo de estos grafos se muestran en la Figura 3.5.

Para mayor claridad, se observan algunas convenciones en la representación de un grafo por medio de diagramas: No se permiten conexiones que se intersecten a si mismos o una conexión que pase por un vértice el cual no sea su terminal; claramente esto siempre es posible. Sin embargo, dos ejes pueden intersectarse en un punto el cual no este en el

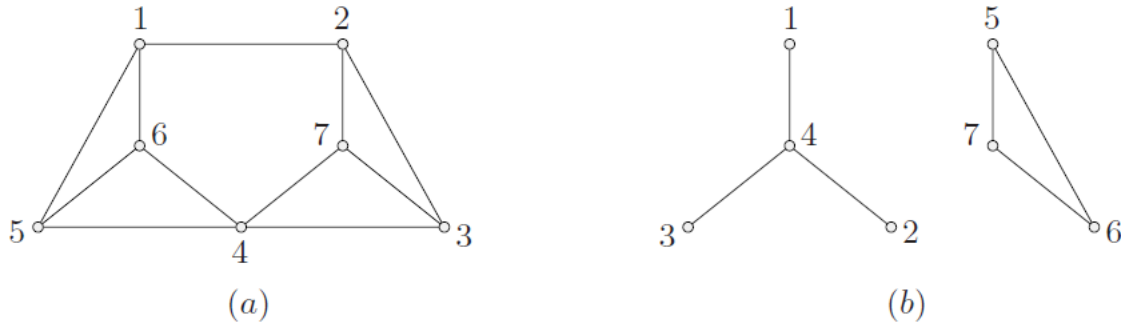


Figura 3.5: (a) un grafo conexo, (b) un grafo desconexo.

conjunto de los vértices como sucede en la Figura 3.1. Un grafo el cual se puede dibujar en el plano de tal manera que las conexiones sólo se crucen en los vértices que terminan se llama un *un grafo planar* y su diagrama se llama una *incrustación planar* del grafo. Aunque no todos los grafos son planares, todo grafo se puede dibujar en alguna superficie en el cual las conexiones solo se intersecten en los vértices terminales.

3.1.2. Matrices incidentes y adyacentes

Una representación equivalente de un grafo es mediante una matriz A_G la cual codifica las conexiones como entradas de la matriz, así las filas y las columnas representan el conjunto de vértices. Esto es A_G es una matriz de $n \times n$ (esto si $|V| = n$) binaria como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } e_{ij} \in E, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con esta representación podemos ver que un grafo es direccionado si su matriz adyacente no es simétrica. A un grafo ponderado le corresponde una matriz que tienen entradas valuadas en los números reales. El componente es cero si y solo si no hay una conexión entre los vértices. Si el componente es diferente de cero indica una conexión y su valor representa el peso de la misma.

La matriz aumentada se define como $A_G + I_n$ donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$.

Además de esta representación hay otra matriz asociada al grafo que se le llama *matriz incidente*. Esta matriz es de dimensiones $n \times m$ donde $m = |E|$ y se denota por $M_G := (m_{ve})$, el componente m_{ve} es el número de veces que el vértice v tiene una conexión e y este puede ser 0,1 o 2. En la Figura 3.6, [12], se ilustran las matrices asociadas a un grafo G . Como la mayoría de los grafos tienen más conexiones que vértices, la matriz

adyacente de un grafo es generalmente mas pequeña que la matriz incidente del mismo grafo.

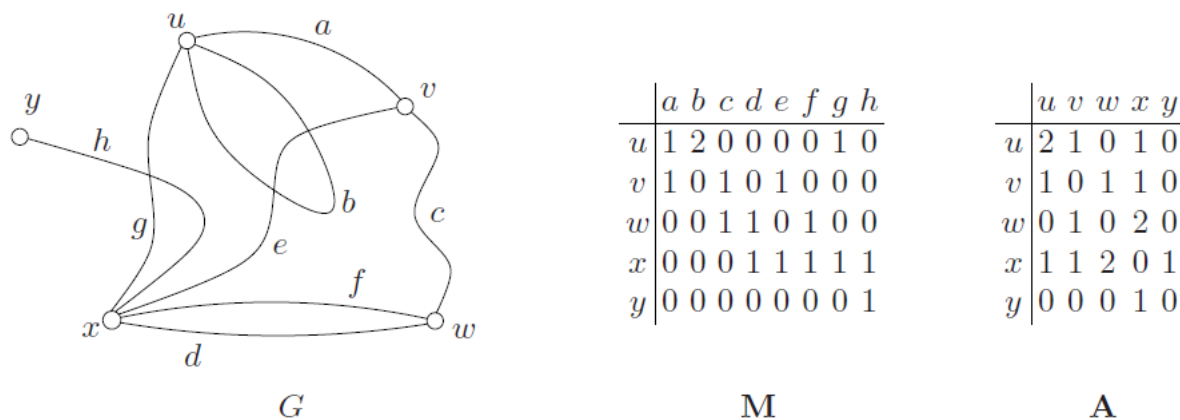


Figura 3.6: Matriz *incidente* y matriz *adyacente* del grafo G .

Cuando G es un grafo biparticionado, no hay conexiones que unan pares de vértices en una misma partición. Pero aún se puede representar este grafo mediante matrices adyacentes de la siguiente manera: suponga que se tiene un grafo biparticionado $G(X, Y)$, donde $X := \{x_1, \dots, x_r\}$ y $Y := \{y_1, \dots, y_r\}$. Se define la *matriz adyacente de un grafo biparticionado* G como la matriz de dimensión $r \times s$, $B_G = (b_{ij})$, donde b_{ij} es el número de conexiones que unen x_i con y_j .

3.1.3. Grado del vértice

El grado de un vértice v en un grafo G , denotado por $d_G(v)$ es el número de conexiones de G las cuales tienen como vértice incidente v y se define como

$$d_G(v) = |\{w : vw \in E(G)\}|.$$

Un bucle cuenta como dos conexiones. Cuando el grado de un vértice es cero: $d(v) = 0$, se dice que el vértice es *aislado*. Al mínimo y máximo de los grados del conjunto de vértices de un grafo se les denota respectivamente por δ_G y Δ_G . El grado medio del grafo se define por

$$d(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d_G(v).$$

El siguiente teorema establece una relación fundamental relacionada con el grado de los vértices de un grafo y el número de sus conexiones.

Teorema 4 Para cualquier grafo G ,

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2m$$

donde m es el número de conexiones del grafo.

Demostración. Consideremos la matriz incidente del grafo G cuyos componentes a_{ij} representa la conexión j incidente al vértice i , donde esta sólo puede tomar valores 0, 1 o 2 como se muestra en la matriz \mathbf{M} de la Figura 3.6, esto porque una conexión solo puede estar entre dos vértices, hacer un bucle o no conectar a ningún vértice. De esta manera se tiene que si G es de dimensión $n \times m$ entonces

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 2.$$

Como consecuencia

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^m 2 = 2m.$$

■

3.1.4. Subgrafos, supergrafos e isomorfismos

Dado un grafo $G = (V, E)$ con $|E| = m$, $|V| = n$, hay dos maneras de construir un nuevo grafo más pequeño a base del grafo G , una de ellas es eliminando una conexión e de G sin eliminar el vértice incidente correspondiente, de esta manera obtendremos un grafo con $m - 1$ conexiones. El grafo resultante de esta eliminación se denota por $G \setminus e$. La otra manera es eliminando un vértice v junto con todas las conexiones incidentes a él, de esta manera se obtiene un grafo $G - v$ el cual tiene $n - 1$ vértices. Otra manera más general de obtener subgrafos es la siguiente:

Definición 5 Un subgrafo H de un grafo G es nuevamente un grafo con $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$. Un subgrafo H de G es incidente si para cada $v, w \in V(H)$, $vw \in E(H) \Leftrightarrow vw \in E(G)$. Un subgrafo generador de G es el cual contiene todos los vértices de G .

Otra noción importante a cerca de los grafos es la de un *supergrafo*. Dado un grafo G define el supergrafo relacionado a G como un grafo H el cual contiene a G como subgrafo, esto es, $G \subseteq H$. Una clase particular de supergrafos son los grafos infinitos, estos son los que tienen un número infinito de vértices con un número infinito de conexiones donde el

grafo se dice contable si los vértices y las conexiones lo son.

En muchas de las aplicaciones de la teoría de grafos se está interesado en determinar, sí dado un grafo G este tiene un subgrafo o supergrafo con propiedades prescritas que se desean estudiar. Por ejemplo, el siguiente teorema nos da condiciones suficientes para que un grafo contenga un ciclo.

Teorema 6 *Sea G un grafo en el cual todos sus vértices tienen grado mayor o igual a dos. Entonces G contiene un ciclo.*

Demostración. Si G tiene un bucle, el vértice con esa propiedad tiene grado dos, de esta manera se tiene un ciclo de longitud uno. Si G contiene conexiones paralelas, contiene un ciclo de longitud dos. De esta manera, supongamos que G es simple, así quitamos los casos obvios anteriores.

Sea $P := v_0v_1 \dots v_{k-1}v_k$ el camino más largo que contiene G . Ya que el grado de v_k es al menos dos, tiene un vecino $v \in G$ diferente de v_{k-1} . Si v no esta en P , entonces el camino $v_0v_1 \dots v_{k-1}v_kv$ contradice la suposición de que P es el camino más largo contenido en G . Entonces $v = v_i$ para algún $0 \leq i \leq k-2$ y $v_iv_{i+1} \dots v_kv_i$ es un ciclo en G . ■

Algunos aspectos topológicos de un grafo se obtienen al observar la interacción entre los vértices y las conexiones. Algunos de estos aspectos son los siguientes. La *vecindad abierta* de un vértice v es el conjunto de vértices w tales que existe una conexión con v y se denota por $N(v)$. Para un conjunto de vértices $S \subset V$ una vecindad abierta se define $N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ y la *vecindad cerrada* de S es $\overline{N}(S) = N(S) \cup S$. Otra característica topológica de los grafos es el *complemento de una gráfica* que se define como $\overline{G} = (V, \overline{E})$ tal que $uw \in \overline{E} \Leftrightarrow uw \notin E$. Además de estos aspectos topológicos también tenemos el concepto de *dominancia* e *independencia*, los cuales se definen como sigue.

Definición 7 *Un conjunto $S \subset V(G)$ es un conjunto dominante si todo vértice en G es un elemento de S o es adyacente a un vértice en S ; esto es $\overline{N}(S) = V$. Un conjunto dominante minimal es un conjunto dominante S para el cual ningún subconjunto de S es dominante por si mismo. Un conjunto dominante mínimo es el que tiene la mínima cardinalidad sobre todos los conjuntos dominantes de G . La cardinalidad del conjunto dominante mínimo es llamado el número dominante y se denota por γ_G .*

Definición 8 *Un conjunto $S \subset V(G)$ es independiente si no hay conexiones entre elementos de S , esto es, $u, v \in S \Rightarrow uv \notin E(G)$. Un conjunto es independiente máximo si tiene la máxima cardinalidad sobre todos los conjuntos independientes de G . La cardinalidad del conjunto máximo independiente se llama el número independiente y se denota por β_G .*

Luego de estas definiciones, se tiene algunas características más específicas que nos indican las relaciones entre funciones dependientes de los grafos.

Definición 9 *Una componente conexa de un gráfico G es un subgrafo inducido H tal que para todo par de vértices $u, v \in V(H)$ hay un camino en H de u a v y tal que H es máxima con respecto a esta propiedad.*

3.1.5. Operaciones entre grafos y digrafos

Dado todo lo anterior estamos listos para ver algunas operaciones esenciales entre grafos, como lo son uniones, intersecciones y productos cartesianos. Dado dos grafos G y H hay varias maneras de definir un nuevo grafo a partir de ellos. Por simplicidad, asumimos que G y H son simples, de modo que cada conexión une a dos pares de vértices no ordenados.

Dos grafos son *disjuntos* si no tiene vértices en común, y se dice que son *disjuntos en conexión* si no tiene conexiones en común pero no necesariamente son disjuntos. Las dos maneras básicas para combinar dos grafos son la unión y la intersección. La *unión* de dos grafos simples G y H es el grafo $G \cup H$ cuyo conjunto de vértices es $V(G) \cup V(H)$ y conjunto de conexiones $E(G) \cup E(H)$. Si G y H son disjuntos, se dice que la *unión es disjunta* y se denota por $G + H$. Estas operaciones son asociativas y conmutativas y además se pueden extender a un número arbitrario de grafos.

Se puede determinar si un grafo es desconexo si y sólo si es una unión disjunta de dos grafos no nulos. Más generalmente, cualquier grafo G puede expresarse de una única manera (salvo cambio de orden) como unión disjunta de grafos conexos. A Estos grafos se le llaman *las componentes conexas* o simplemente las *componentes* de G . El número de componentes de G es denotado por $c(G)$ donde el grafo nulo es el único grafo con la propiedad de no tener componentes, i.e. $c(G) = 0$.

La *intersección* de los grafos G y H denotado por $G \cap H$ se define como el grafo cuyo conjunto de vértices es $V(G) \cap V(H)$ y conjunto de conexiones $E(G) \cap E(H)$, notemos que si G y H son disjuntos entonces su intersección es el grafo nulo. La Figura 3.7 ilustra como se aplican estas operaciones.

Ahora definiremos la operación producto entre dos grafos, esta operación genera un grafo cuyo conjunto de vértices es el producto cartesiano de ambos. El *producto cartesiano* de dos grafos simples G y H es el grafo $G \square H$ cuyo conjunto de vértices es $V(G) \times V(H)$ y

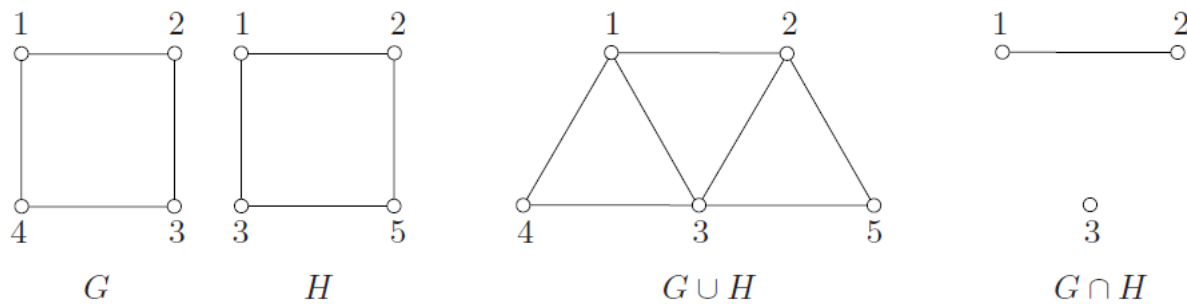


Figura 3.7: Unión e intersección de los grafos G y H .

conjunto de conexiones es el conjunto de todos los pares (v_1, u_i) tal que $u_1u_2 \in E(G)$ y $v_1 = v_2$ o $v_1v_2 \in E(H)$ y $u_1 = u_2$. Así, para cada conexión $u_1u_2 \in G$ y cada conexión $v_1v_2 \in H$, hay cuatro conexiones en $G \square H$, a saber $(u_1, v_1)(u_2, v_1)$, $(u_1, v_2)(u_2, v_2)$, $(u_1, v_1)(u_1, v_2)$ y $(u_2, v_1)(u_2, v_2)$. Más general el producto cartesiano de dos caminos $P_m \square P_n$ es la malla de dimensión $(m \times n)$. La Figura 3.8 muestra ejemplos de estas operaciones.

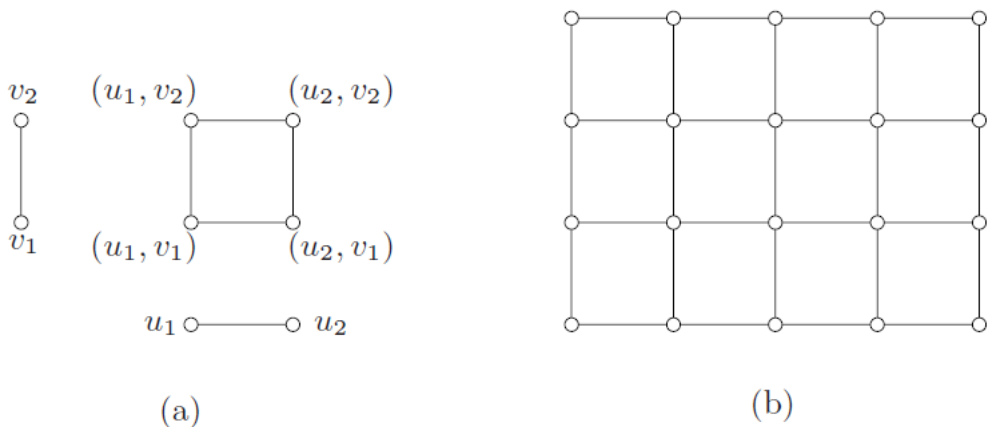


Figura 3.8: (a) el producto cartesiano $K_2 \square K_2$ y (b) la malla $P_5 \square P_4$.

Como definimos anteriormente un grafo dirigido o dígrafo es un grafo cuyas conexiones tienen una dirección, este concepto surge de problemas, como por ejemplo el tráfico en una ciudad, ya que en este caso es necesario saber cual camino en la red de autopistas es de un sentido y en cual dirección el tráfico está permitido. Claramente, un grafo no es suficiente para modelar este problema ya que no captura la “dirección”.

A cualquier digrafo D se le puede asociar un grafo G con el mismo conjunto de vértices simplemente reemplazando cada arco por una conexión con las mismas terminales. Este grafo se le conoce como *el grafo subyacente de D* , denotado por $G(D)$. A la inversa, cualquier grafo G puede ser considerado como un dígrafo, reemplazando cada conexión por dos arcos orientados opuestamente con las mismas terminales; este grafo es el *dígrafo asociado de G* , denotado por $D(G)$. Otra manera de obtener un dígrafo de un grafo G , es reemplazando una conexión por uno solo de los dos arcos posibles con las mismas terminaciones, tal dígrafo se llama *una orientación de G* . Un caso particularmente interesante es la orientación de un grafo completo, tal orientación se llama *torneo*, ya que se puede ver como la representación del resultado de un *torneo de round-robin*.²

Todos los conceptos definidos para grafos también son validos para los dígrafos. Por ejemplo, el grado del vértice v en el dígrafo D es simplemente el grado de v en $G(D)$, el grafo subyacente de D , la diferencia es que se denota por $d_D(v)$. De la misma manera un dígrafo se dice conexo si su grafo subyacente es conexo. Pero hay un concepto en la cual la orientación juega un papel muy importante. Este concepto es el de *grado de entrada* del vértice $v \in D$ denotado por $d_D^-(v)$ que se define como el número de arcos con terminal (punta) v , y el *grado de salida* $d_D^+(v)$ de v es el número de arcos con inicio (tallo) v . El grado de entrada y grado de salida mínimo de D son denotados por $\delta^-(D)$ y $\delta^+(D)$, respectivamente; de la misma manera el máximo grado de entrada y el máximo grado de salida de un digrafo D es denotado por $\Delta^-(D)$ y $\Delta^+(D)$, respectivamente. Un dígrafo es *K -diregular* si cada grado de entrada y cada grado de salida es igual a k . Un vértice de grado de entrada cero se llama *fuentes* y un grado de salida igual a cero es un *pozo*.

Muchos ejemplos de dígrafos pueden ser determinados por otras estructuras matemáticas, como los grupos. Por ejemplo, hay un análogo natural del grafo de Caley que se define de la siguiente forma: Sea Γ un grupo y sea S el conjunto de los elementos de Γ sin incluir a el elemento identidad. El *dígrafo de Caley* de Γ con respecto a S es el grafo $CD(\Gamma, S)$ con conjunto de vértices Γ en el cual el vértice x domina al vértice y si y sólo si $xy^{-1} \in S$. Un *dígrafo de Caley directamente circular* es un dígrafo de Caley $CD(\mathbb{Z}_n, S)$.

3.2. Grafos aleatorios

Un grafo aleatorio dirigido es una variable aleatoria definida en un espacio medible (Ω, σ) y valuado en el espacio de grafos dirigidos $G(N)$

$$X : \Omega \rightarrow G(N).$$

El espacio de grafos $G(N)$ es finito y podemos asignarle la sigma-álgebra del conjunto potencia.

²Un torneo de round-robin o algunas veces llamado juego de *todos contra todos* es en el cual cada participante se enfrenta a todos en turnos en alguna competencia.

Para fines de este trabajo debemos considerar grafos dirigidos y ponderados que denotaremos mediante $G^w(N)$. En este espacio, una arista conectando dos vértices tiene un peso que puede ser un número real positivo. En este caso, la clase $G^w(N)$ es infinita y definir una sigma álgebra requiere mayor cuidado. Para este fin utilizamos la matriz adyacente de la gráfica como sigue. El conjunto de vértices lo especificamos como $\{1, 2, \dots, N\}$ y formamos una matriz a_{ij} de dimensión $N \times N$. El componente a_{ij} es igual al peso que le damos a esta conexión. Este valor es cero si y solo si no existe una conexión entre los vértices. Cuando el componente no es igual a cero, entonces es un valor positivo que indica el peso de la conexión. En este sentido, esta relación define una función biyectiva entre grafos en la clase $G^w(N)$ y el espacio de matrices de dimensión $N \times N$ con componentes en los números reales no negativos. La sigma álgebra que asignamos a la clase $G^w(N)$ es la inducida por esta correspondencia tomando la sigma álgebra de Borel de este espacio de matrices. Recordemos que esta sigma álgebra se puede identificar con la sigma álgebra de $(\mathbb{R}_+)^{N^2}$. En nuestro problema, la matriz de adyacencia tiene ceros en las diagonales. En efecto, eliminamos la situación en la que un banco se presta así mismo, luego es suficiente con considerar el espacio $(\mathbb{R}_+)^{N(N-1)}$. Con este procedimiento llegamos a un espacio medible:

$$(G^w(N), \mathcal{F}).$$

Definición 10 *Un grafo aleatorio ponderado X es una variable aleatoria definida en un espacio medible (Ω, σ) y tomando valores en $(G^w(N), \mathcal{F})$:*

$$X : (\Omega, \sigma) \rightarrow (G^w(N), \mathcal{F}).$$

En este punto hemos definido un grafo aleatorio ponderado en gran generalidad sin introducir ninguna medida de probabilidad. Sin embargo, parte esencial en la discusión de grafos aleatorios son propiedades en conexión con sus distribuciones. Para incorporar esta discusión en nuestra definición, introducimos una medida de probabilidad P del espacio (Ω, σ) y recordamos que una variable aleatoria siempre induce una medida de probabilidad en \mathcal{F} como sigue:

$$R(A) := P(X \in A), A \in \mathcal{F}.$$

Esta definición permite capturar el método ampliamente usado de definir grafos aleatorios introduciendo directamente distribuciones en el espacio de grafos $(G^w(N), \mathcal{F})$. El método entonces es análogo a la construcción en el espacio de Wiener: Se define una distribución en el espacio de trayectorias continuas y el proceso canónico de proyección es un proceso con las propiedades probabilistas requeridas.

3.3. El modelo de Erdős y Renyi

La noción de grafo aleatorio se inicio por Erdős and Renyi [20, 21], el cual es considerada como la primera aplicación concisa de métodos probabilísticos para demostrar la existencia de un grafo con una propiedad de Ramsey. Veamos un ejemplo de propiedad de Ramsey. Consideremos un grafo completo de orden n , es decir, hay n vértices y cada vértice está conectado a todos los otros vértices por medio de una arista. Un grafo completo de orden 3 se llama triángulo. Ahora bien, cada arista puede tener color rojo o azul. ¿Qué tan grande debe ser n con el fin de garantizar que exista un triángulo azul o un triángulo rojo?

Los modelos de grafos aleatorios introducidos originalmente por Erdős y Renyi denotados $\mathcal{G}(n, M)$ y $\mathcal{G}(n, \mathbb{P}(\text{conexión}) = p)$ se obtienen de la siguiente forma. El modelo $\mathcal{G}(n, M)$ corresponde a una distribución uniforme en el espacio de todos los grafos con n vértices y M conexiones. La medida de probabilidad \mathbb{P} de un grafo G se define como:

$$\mathbb{P}(G) = \binom{N}{M}^{-1} \text{ donde } N = \binom{n}{2}.$$

Cabe mencionar que M es una función del numero de vértices del grafo, i.e. $M = M(n)$ tomando en cuenta esto, se usa la notación $\mathbb{P}_{M(n)}$ y $\mathbb{E}_{M(n)}$ para hacer referencia a la medida de probabilidad y la esperanza en el espacio $(\mathcal{G}(n, M), \mathcal{P}(\mathcal{G}(n, M)), \mathbb{P}_{M(n)})$. Un modelo más general a partir del mencionado anteriormente sería suponer que cada grafo $G \in \mathcal{G}(n, M)$ tiene una probabilidad p_G de suceder y $\sum_{G \in \mathcal{G}(n, M)} p_G = 1$. Hay que destacar que para este modelo se tienen fijos el números de vértices n y el numero de conexiones $M(n)$, lo que es aleatorio es la forma en que están distribuidos tales conexiones.

Esta distribución uniforme también se puede obtener mediante un proceso iterativo en el que se obtiene una sucesión de grafos y que este tipo de construcción por Erdős y Rényi domina el enfoque moderno de construcción de grafos aleatorios. El proceso sigue la siguiente dinámica: Comienza con cero conexiones al tiempo inicial t_0 y va anexando nuevas conexiones, una a la vez. Cada nueva conexión es seleccionada aleatoriamente mientras no estén presentes todas las conexiones. De esta manera este proceso de grafos es una cadena de Markov, ya que no depende de toda la historia del grafo, solamente depende del tiempo inmediato anterior. Además este proceso corre sobre el conjunto $\{0, 1, \dots, \binom{n}{2}\}$. En el M -ésimo paso de este proceso el grafo aleatorio tiene distribución uniforme en $\mathcal{G}(n, M)$.

En el modelo $\mathcal{G}(n, \mathbb{P}(\text{conexión}) = p)$ se tiene $0 < p < 1$ y consiste en tomar en cuenta todos los grafos con conjunto de vértices $V = \{1, \dots, n\}$ en el cual las conexiones son escogidas independientemente y con probabilidad p . En este modelo la probabilidad de

un grafo G se define como

$$\mathbb{P}(G) = p^{|E(G)|}(1-p)^{N-|E(G)|}.$$

Un refinamiento de este modelo corresponde al modelo $\mathcal{G}(n, p_{ij})$ donde $0 < p_{ij} < 1$ para $1 \leq i < j \leq n$. Este modelo consiste en los grafos con n vértices en los cuales las conexiones son elegidas independientemente y para $1 \leq i < j \leq n$ la probabilidad de que ij sea una conexión es p_{ij} . En algunas ocasiones el rango del grafo también es aleatoria por ejemplo con distribución de Poisson: $|V| = n \sim Poisson(\lambda)$; en tal caso el rango de G es infinito numerable.

Capítulo 4

Modelos de conexión preferencial

En este capítulo presentamos la teoría de los grafos aleatorios libres de escala la cuál nos servirá para simular un sistema financiero dado los parámetros estimados. Comenzamos viendo el concepto de conexión preferencial y libertad de escala. Luego se presenta el modelo de Barabási y Albert en la Sección 4.2 el cual incorpora los conceptos de conexión preferencial a los grafos aleatorios. Este modelo depende de argumentos heurísticos, no incluye grafos aleatorios dirigidos y la verificación de distribución de ley de potencia del grado del vértice es poco rigurosa. Las ideas del modelo LCD son esenciales para la justificación rigurosa del modelo de Barabási y Albert. Por esta razón en la Sección 4.3 se presenta este modelo. En la Sección 4.4 se presenta el modelo que nos servirá de base para simular un sistema financiero ya que este es un modelo de grafos aleatorio dirigidos y con conexión preferencial presentado por Bollobás et al. [10].

4.1. Conexión preferencial y libertad de escalamiento

Estudios empíricos en diferentes sistemas interbancarios coinciden en las siguientes propiedades:

1. La conectividad de la red es baja en comparación de todos los posibles enlaces. No obstante,
2. dos nodos en la red se pueden conectar por una trayectoria de longitud pequeña; ver e.g., Soramäki et al. [31].

Estas propiedades se han detectado en una clase grande de “redes reales” y no se pueden modelar con grafos regulares. Esto ha motivado el desarrollo de una clase nueva de modelos que se conocen comúnmente como “Small world networks”.

Una propiedad que captura estos dos comportamientos es la propiedad de escalamiento libre:

Definición 11 Sea $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de grafos aleatorios con $g_n \in G(n)$. Consideremos una funcional F definida en el espacio de grafos. Una sucesión determinista $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales es una tasa de escalamiento de la sucesión de grafos si

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} R \left[\frac{F(G_n)}{f(n)} = 1 \right] = 1.$$

Si la sucesión de grafos no tiene una tasa de escalamiento entonces decimos que es libre de escalamiento (*scale-free*).

Cont y Tanimura [17] discuten el concepto de escalamiento libre con otros modos de convergencia. Un caso concreto que tenemos en mente para la funcional F es el grado del grafo. Los modelos clásicos de Erdős y Renyi no son libres de escalamiento; ver e.g., Cont y Tanimura [17]. Bollobás [7] discute varias propuestas que abordan el problema de construir un modelo de grafos libres de escalamiento. En este trabajo nos enfocaremos a grafos con distribución de ley potencia.

Uno de los primeros trabajos que discuten el comportamiento de distribución ley potencia para grafos (no dirigidos) es Barabási y Albert [3]. Una formalización de las ideas presentadas por Barabási y Albert es presentado por Bollobás y Riordan [8]. Para nuestros fines de modelar redes interbancarias, necesitamos grafos dirigidos y nos enfocaremos en el modelo presentado por Bollobás et al. [10].

El concepto de conexión preferencial también se conoce como ley de Gibrat. Otras nominaciones utilizadas son ventaja acumulativa, proceso de Yule, el rico se hace mas rico, y erróneamente “el efecto Mateo”. La principal razón del interés científico de este proceso es que bajo ciertas circunstancias genera una distribución de ley de potencia. Este fenómeno surge principalmente en el campo social ya que en este se quiere medir las preferencias de los participantes en el sistema.

Un proceso de conexión preferencial es básicamente un proceso estocástico en el que existen unidades discretas de riqueza denominadas “bolas” que son vertidas de forma aleatoria a una “urna”. Una conexión preferencial en la urna es aquel bajo el cual se van añadiendo continuamente bolas a la urna, incrementando el número de bolas. En la mayoría de los casos el número de urnas también puede ser incrementado.

Un ejemplo clásico de un proceso de conexión preferencial es el crecimiento del número de especies por géneros en algún taxón para organismos bióticos. Nuevos géneros (“urnas”) se añaden al taxón cuando aparecen especies suficientemente diferentes de sus generaciones predecesoras. Las nuevas especies (“bolas”) se añaden a los viejos géneros (por ejemplo una partición en dos) dependiendo a cual de ellas se parezca más. La probabilidad de que una especie se añada a un genero será proporcional al número de especies que el genero ya tiene. Este proceso fue estudiado por Yule y es descrito como un proceso lineal de

conexión preferencial, ya que la generación de nuevas especies depende linealmente con la acumulación de especies que ya existen.

El proceso lineal de conexión preferencial en el cual el número de urnas crece se conoce en el mundo del análisis de procesos estocásticos como distribución de Yule. En el caso más general del proceso, las bolas se añaden al sistema a una razón de m nuevas especies por urna. Cada urna creada empieza con k_0 bolas y se añaden nuevas bolas a una razón proporcional al número k de bolas del estado inmediato anterior más una constante $a > -k_0$. Con estas definiciones, la fracción $\mathbb{P}(k)$ de urnas que posee x bolas cuando se ha transcurrido un tiempo es

$$\mathbb{P}(x) = \frac{B(x + a, \gamma)}{B(k_0 + a, \gamma - 1)}$$

donde $B(x, y)$ es la función beta de Euler y $\gamma = 2 + \frac{k_0 + a}{m}$. Esta fracción asintóticamente se comporta como $\mathbb{P}(x) = x^{-\gamma}$. En otras palabras, el proceso de conexión preferencial genera una distribución de “cola larga” que sigue a la distribución de Pareto. A este tipo distribuciones se les conoce como leyes de potencias.

4.2. Modelo de Barabási y Albert

Este modelo es quizás el modelo mas básico sobre grafos aleatorios de escala libre, y más precisamente, modelos que producen un comportamiento de ley potencia. Este modelo fue propuesto por Barabási y Albert [3] en 1999.

El modelo se genera de la siguiente manera: se comienza con un número pequeño de vértices (m_0) y en cada (tiempo) paso se adhiere un nuevo vértice con $m (\leq m_0)$ conexiones desde el nuevo vértice hacia m diferentes vértices que ya estén presentes en el sistema. Para incorporar el concepto de conexiones preferenciales, se asume que la probabilidad Π de que un nuevo vértice se conecte a un vértice i depende de la conectividad k_i (comúnmente se toma como el grado del vértice, salvo se defina de otra manera) de tal vértice, tal que $\Pi(k_i) = k_i / \sum_j k_j$. Después de t pasos el modelo genera un grafo aleatorio con $N = t + m_0$ vértices y mt conexiones.

La motivación básica para este modelo esta dada por el crecimiento simple que tiene el world-wide web. En esta red los nuevos “sitios” (páginas) se conectan uno a la vez y el “link” (conexión) sobre sitios ya existentes en el sistema se elige con probabilidad que depende de su fuerza de “popularidad”; este es el principio de “la popularidad es atractiva”, este principio presumiblemente juega un papel en el crecimiento de la red real en una gran cantidad de contextos. Se acostumbra a llamar a esto la propiedad de “conexión preferencial”.

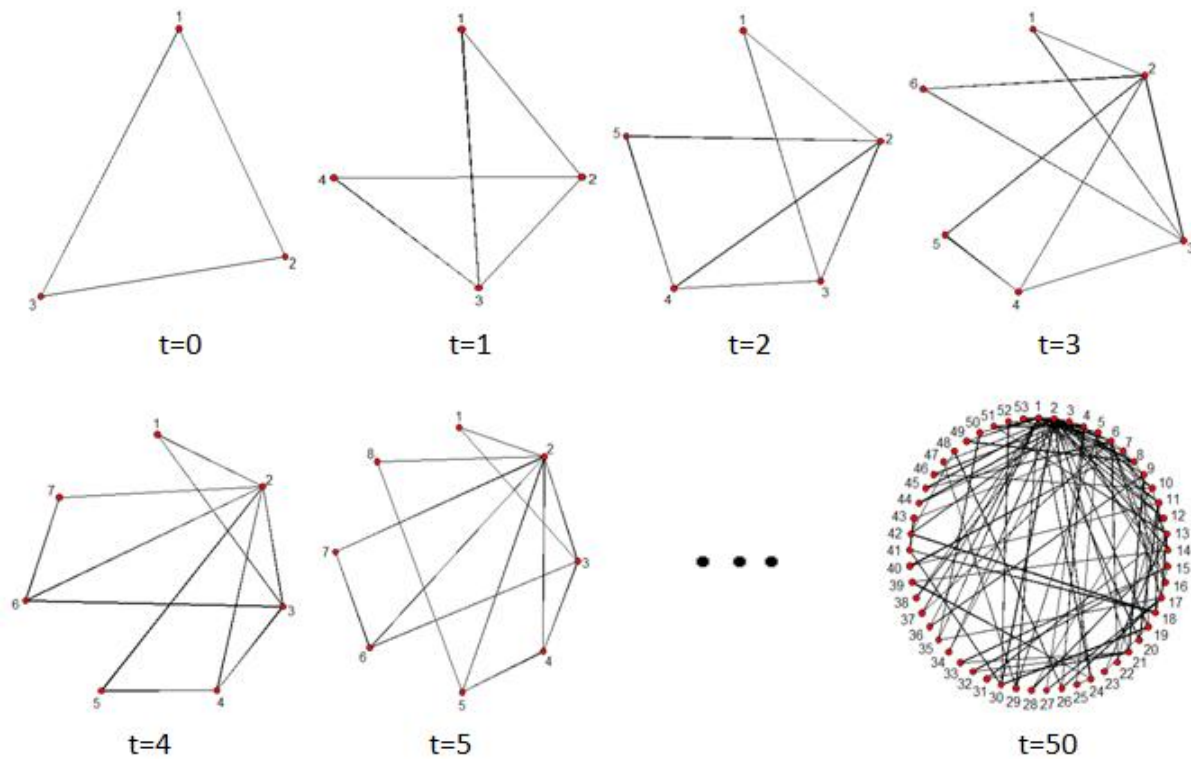


Figura 4.1: Proceso de grafos aleatorios generado por el modelo de Barabási y Albert. Con $m_0 = 3$ y $m = 2$ y numero de pasos 50. Se puede observar que en $t = 1$ se anexo el vértice 4 conectado a los vértices 2 y 3. En $t = 2$ se anexo el vértice 5 conectado a los vértices 2 y 4, etc.

El modelo de Barabási y Albert genera una distribución de grado de ley de potencia, esto se observa en el histograma de la Figura 4.2 generada con los mismos datos de la Figura 4.1.

Simulaciones numéricas muestran que el modelo de Barabási y Albert genera una distribución asintótica de vértices como ley de potencias de grado 3. Para demostrar lo visto en las simulaciones se usa la teoría del continuo definida por Barabási y Albert.

Esta teoría es una aproximación continua a la dinámica del crecimiento del grado del vértice en el modelo de Barbási y Albert, esta aproximación calcula la dependencia del tiempo y del grado d_i de un nodo dado i . Este grado se incrementa cada vez que entra un nuevo nodo al sistema y se conecta al nodo i , la probabilidad de este proceso es $\Pi(d_i)$. Asumiendo que d_i es una variable real continua, la tasa con la cual d_i cambia se espera que sea proporcional a $\Pi(d_i)$. En consecuencia d_i satisface la ecuación dinámica

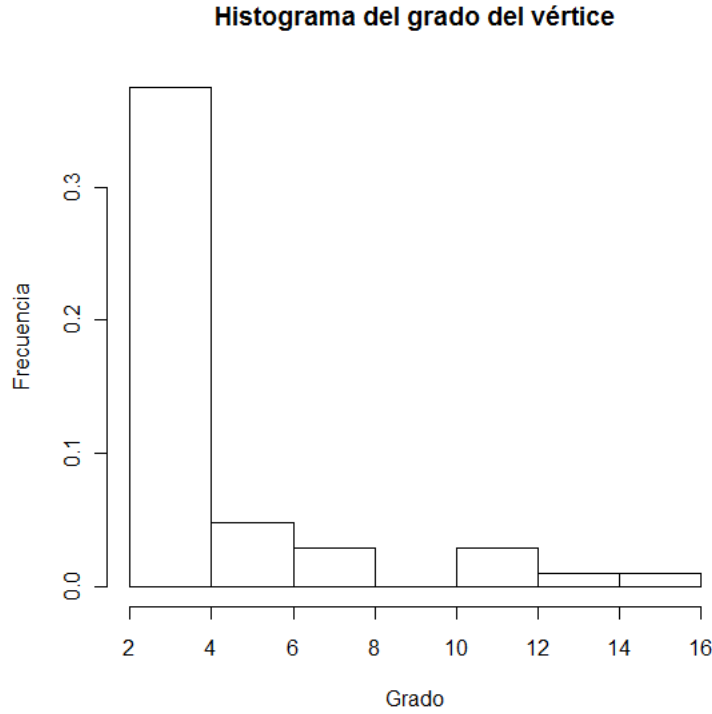


Figura 4.2: Histograma del grado del vértice.

$$\frac{\partial d_i}{\partial t} = m\Pi(d_i) = m \frac{d_i}{\sum_{j=1}^{N-1} d_j}, \quad (4.1)$$

usando el Teorema 4 del Capítulo 3, tenemos que $\sum_{j=1}^{N-1} d_j = 2mt$, con lo cual

$$\frac{\partial d_i}{\partial t} = \frac{d_i}{2t}.$$

La solución de esta ecuación diferencial, con condición inicial $d_i(t_i) = m$, es

$$d_i(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^\beta \quad \text{con } \beta = \frac{1}{2}.$$

Resolviendo esta ecuación encontramos la probabilidad de que el grado de un nodo i al tiempo t sea mas pequeño que algún k , es decir

$$\mathbb{P}[d_i(t) < k] = \mathbb{P}\left[t_i > \frac{m^{1/\beta} t}{k^{1/\beta}}\right].$$

Bajo la hipótesis de que se adhieren nodos en intervalos de tiempo iguales, la variable t_i tiene una densidad constante y dada por

$$\mathbb{P}(t_i) = \frac{1}{m_0 + t}.$$

Sustituyendo este valor en la probabilidad de k_i obtenemos lo siguiente

$$\mathbb{P}\left[t_i > \frac{m^{1/\beta}t}{k^{1/\beta}}\right] = 1 - \frac{m^{1/\beta}t}{k^{1/\beta}(t + m_0)}.$$

Esta distribución nos permite calcular la densidad:

$$\mathbb{P}(d_i = k) = \frac{\partial \mathbb{P}[d_i < k]}{\partial k} = \frac{2m^{1/\beta}t}{m_0 + t} \frac{1}{k^{1/\beta+1}}.$$

Tomando el límite cuando $t \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\mathbb{P}(d_i = k) \approx 2m^{1/\beta}k^{-\lambda} \text{ con } \lambda = \frac{1}{\beta} + 1 = 3. \quad (4.2)$$

El primer problema del modelo Barabási y Albert es: ¿Cómo tomar las probabilidades proporcionales a los grados de los vértices cuando estos son todos cero?. Quizá tiene sentido ignorar el comienzo de un proceso de grafos el cual no se tenga conexiones, como el dado por el modelo Barabási y Albert y comenzar desde un grafo pequeño G_0 el cual no tenga vértices aislados, esperando que la elección de G_0 haga pequeñas diferencias. Mientras mas propiedades tenga G_0 el grafo resultante también las tendrá y puede tener otras más que se hayan inducido de las que tenía G_0 . Por ejemplo, en el caso $m = 1$ en el modelo Barabási y Albert describe el crecimiento de un árbol, si el grafo inicial G_0 es un árbol. Si G_0 es disconexo, el grafo producido por el modelo Barabási y Albert también será disconexo. Para un m general el grafo inicial G_0 tiene efectos desagradables, por ejemplo sobre el grado máximo esperado, este puede cambiar por un factor constante cuando G_0 cambia a través del tiempo.

El segundo problema es con respecto a la regla de conexión preferencial para $m \geq 2$. Al anexar un nuevo vértice, digamos el $t + 1$ -ésimo, debemos anexar también un conjunto aleatorio N_{t+1} de m vértices cercanos con los cuales el nuevo vértice se unirá. En la notación del modelo de Barabási y Albert, siempre se trabaja con grafos en $\{1, 2, \dots\}$ y el modelo solo dice que para $1 \leq i \leq t$

$$\mathbb{P}(i \in N_{t+1}) = md_i(t) / \sum_{j=1}^t d_j(t), \quad (4.3)$$

donde $d_i(t)$ es el grado del vértice i en el grafo creciente al tiempo t .

Estos problemas sugieren que es necesario realizar un análisis más riguroso del modelo de Barabási y Albert. En la siguiente sección se presentará una manera de elegir las condiciones iniciales y la distribución de N_t para formalizar las ideas del modelo de Barabasi y Albert.

4.3. Modelo LCD y el grafo $G_m^{(n)}$

En esta sección presentamos el modelo definido en Bollobás et al. [9] que formaliza las ideas del modelo de Barabási y Albert mediante el uso de los diagramas cordales linealizados (*Linear Chord Model LCD*). En contraste con el modelo de Barabási y Albert, el modelo LCD toma en cuenta los bucles y las conexiones múltiples entre vértices, esto hace el modelo mas real, ya que este comportamiento se observa en las redes reales como el Internet donde una página puede tener múltiples links a una misma página o links hacia ella misma.

Para comenzar con la descripción, consideremos una sucesión de vértices

$$v_1, v_2, \dots$$

Denotamos por $d_G(v)$ el grado del vértice v del grafo G . Definimos progresivamente el proceso de grafos aleatorios $(G_1^{(t)})_{t \geq 0}$ donde el grafo $G_1^{(t)}$ esta definido en el conjunto $\{v_i : 1 \leq i \leq t\}$ de la siguiente manera: comenzamos con un grafo vacío $G_1^{(0)}$ sin vértices y sin conexiones o comencemos con el grafo $G_1^{(1)}$ de un solo vértice y un bucle. Se define el grafo $G_1^{(t)}$ a partir del grafo $G_1^{(t-1)}$ adhiriendo un nuevo vértice v_t junto con una conexión simple ($m = 1$) entre v_t y v_i , donde v_i se elige aleatoriamente con probabilidad dada por

$$\mathbb{P}(v = v_i) = \begin{cases} d_{G_1^{(t-1)}}(v_i) / 2t - 1 & 1 \leq i \leq t - 1, \\ 1 / 2t - 1 & i = t. \end{cases} \quad (4.4)$$

En otras palabras, se envía una conexión e desde el vértice nuevo v_t a un vértice aleatorio v_i , donde la probabilidad de escoger al vértice v_i es proporcional a su grado en el tiempo. Para el caso $m > 1$ en que se adhieren m conexiones desde el vértice v_t a m vértices distintos, uno en cada tiempo, definimos el proceso $(G_m^t)_{t \geq 1}$ a partir de G_1^{mt} agrupando los vértices de G_1^{mt} de m en m . Es decir, se toma como v_1 en G_m^t como el conjunto de vértices v_1, v_2, \dots, v_m de G_1^{mt} ; v_2 en G_m^t como el conjunto $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{2m}$ de G_1^{mt} y así sucesivamente, se van identificando los vértices de G_1^{mt} con los de G_m^t hasta obtener los t vértices de G_m^t .

Las conexiones de G_m^t están orientadas de manera natural, de los vértices nuevos a los vértices viejos en cada tiempo t , es decir $v_i \rightarrow v_j$ si $i > j$ en t . Para llegar al modelo de Barabási y Albert ignoramos el sentido de la conexión.

En el paso $t = n$, el grafo G_1^t sigue una descripción de *diagrama cordal linealizado* la cual consiste en lo siguiente:

Se define un n -*apareamiento* como una partición de un conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$ en pares. El número total de apareamientos posibles son $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times \dots \times 2n-1$ y calculando se vé fácilmente que $(2n-1)!! = (2n)!/n!2^n$. Así un modelo cordal linealizado (o LCD por sus siglas en inglés) con n cordales esta constituido por $2n$ distintos puntos colocados lineal e horizontalmente sobre el eje de las abscisas y unidos dos a dos por un semicírculo, llamado cuerda, sobre el semiplano superior.

A partir de un LCD L podemos formar un grafo $\phi(L)$ de la siguiente manera: Comenzamos desde la izquierda del LCD, identificamos cada punto del LCD hasta el primer punto terminal (donde termina una cuerda) como el vértice 1 del grafo $\phi(L)$, luego los puntos excluidos del vértice 1 (de izquierda a derecha) hasta el siguiente punto terminal formarán el vértice 2 del grafo, se sigue esto sucesivamente hasta terminar de agrupar a los $2n$ puntos.

Si se escoge L de manera uniforme sobre todo los posibles LCDs con n cordales $(2n)!/(n!2^n)$ entonces $\phi(L)$ tiene la misma distribución que el grafo aleatorio G_1^n definida mediante el proceso G_1^t definido anteriormente. Para ver que esta aseveración es correcta, veamos que un LCD L con n cordales se puede obtener tomando un LCD aleatorio L' con $n-1$ cordales y anexando un punto final y un nuevo cordal con punto inicial elegido uniformemente sobre los $2n-1$ lugares posibles entre todos los puntos de L' . Esto corresponde a aumentar un nuevo vértice al grafo $\phi(L')$ y unir este vértice a uno ya existente en el grafo, el cual se elige con probabilidad de acuerdo al grado de dicho vértice, esto es exactamente la descripción de G_1^t .

Un resultado que relaciona este tipo de grafos y distribuciones de escala libre, es el siguiente. Denotamos por $\#_m^n(d)$ al número de vértices con *in-degree* igual a d , es decir, con grado total $m+d$.

Teorema 12 Sea $m \geq 1$ y $\varepsilon > 0$ fijo, y sea

$$\alpha_{m,d} = \frac{2m(m+1)}{(d+m)(d+m+1)(d+m+2)}.$$

Entonces

$$\mathbb{P} \left((1-\varepsilon)\alpha_{m,d} \leq \frac{\#_m^n(d)}{n} \leq (1+\varepsilon)\alpha_{m,d} \right) \rightarrow 1 \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

para todo d en el rango $0 \leq d \leq n^{1/15}$.

La idea de la demostración de este teorema es la siguiente: Primero calcular la distribución explícita de la suma de los grados de los primeros k vértices, denotada por D_k ,

para luego obtener la distribución de $d_{G_1^t}(v_{k+1})$ condicionado a D_k . A partir de la distribución condicional anterior, se obtiene una expresión para la distribución de $d_{G_1^t}(v_{k+1})$ y por último se argumenta que la diferencia entre $\#_m^n(d)$ y su esperanza tiende a cero.

Este teorema nos da una rigurosa justificación de la dependencia entre la distribución del grado y la distribuciones de ley de potencia descrita por Barabási y Albert.

4.4. El modelo de Bollobás, Borgs, Chayes y Riordan

En el modelo de Bollobás et al. [10] se comienza con un grafo inicial G_0 y se hace una construcción recursiva para obtener una sucesión de grafos G_1, G_2, \dots, G_N . Para este fin, fijamos un par de números reales no negativos $(\delta_{in}, \delta_{out})$ y tres números reales no negativos α, β, γ tales que

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Denotemos por $n(t)$ el número de vértices totales en el paso t . El grafo G_{t+1} se construye modificando el grafo G_t siguiendo las siguientes

Definición 13 *Reglas de anexo preferencial.*

1. Con probabilidad α se adiciona un nuevo vértice y una arista que va hacia un vértice existente w . El vértice w se elige aleatoriamente de acuerdo a la conectividad del vértice:

$$\frac{d_{in} + \delta_{in}}{t + \delta_{in}n(t)}.$$

2. Con probabilidad β se adiciona una arista de un vértice v hacia un vértice w ya incluidos en el grafo G_t . Los vértices se eligen aleatoriamente e independientemente. El vértice v se elige de acuerdo a

$$\frac{d_{out} + \delta_{out}}{t + \delta_{out}n(t)}.$$

El vértice w se elige de acuerdo a

$$\frac{d_{in} + \delta_{in}}{t + \delta_{in}n(t)}.$$

3. Con probabilidad γ , se adiciona un nuevo vértice w y una arista que va de un vértice ya incluido en el grafo G_t y dirigido hacia el nuevo vértice w . El vértice v se elige de acuerdo a

$$\frac{d_{out} + \delta_{out}}{t + \delta_{out}n(t)}.$$

Un resultado central de Bollobás et al. es demostrar que esta construcción en efecto produce una distribución con ley potencia. Necesitamos introducir las siguientes notaciones. Denotamos por $x_i(t)$ el número de vértices en G_t con in-degree igual a i y por $y_i(t)$ el número de vértices en G_t con out-degree igual a i . También definimos las constantes:

$$c_1 := \frac{\alpha + \beta}{1 + \delta_{in}(\alpha + \gamma)}, \quad (4.5)$$

$$c_2 := \frac{\beta + \gamma}{1 + \delta_{out}(\alpha + \gamma)}. \quad (4.6)$$

Un resultado importante de Bollobás et al. [10] es el siguiente.

Teorema 14 *Existen constantes p_i y q_i tales que:*

$$x_i(t) = p_i t + o(t), \text{ c.s.} \quad (4.7)$$

$$y_i(t) = q_i t + o(t), \text{ c.s.} \quad (4.8)$$

Mas aun, si $\alpha\delta_{in} + \gamma > 0$ y $\gamma < 1$ entonces existe una constante positiva C_{in} tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p_i}{C_{in} i^{-1 - \frac{1}{c_1}}} = 1. \quad (4.9)$$

En otro caso posible, si $\gamma\delta_{out} + \alpha > 0$ y $\alpha < 1$ entonces existe una constante positiva C_{out} tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{q_i}{C_{out} i^{-1 - \frac{1}{c_2}}} = 1. \quad (4.10)$$

Antes de entrar en los detalles de la demostración veamos cuales son los argumentos principales. Para la primera parte del teorema, las relaciones (4.7) y (4.8), seguimos los siguientes pasos:

1. Las constantes p_i se definen por la condición inicial $p_{-1} := 0$ y la relación recursiva:

$$p_i := c_1 ((i - 1 + \delta_{in})p_{i-1} - (i + \delta_{in})p_i) + \alpha 1_{\{i=0\}} + \gamma 1_{\{i=1\}}. \quad (4.11)$$

2. Establecer la dinámica de la familia de procesos in-degrees $\{x_i(t)\}_{t=1}^{\infty}$, $i \in \mathbb{N}$ (análogamente para los procesos out-degree):

$$\begin{aligned} E[x_i(t+1) | G(t)] &= x_i(t) + \frac{\alpha + \beta}{t + \delta_{in}n(t)} ((i - 1 + \delta_{in})x_{i-1}(t) - (i + \delta_{in})x_i(t)) \\ &\quad + \alpha 1_{\{i=0\}} + \gamma 1_{\{i=1\}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

3. La dinámica (4.12) implica el siguiente “comportamiento ergódico”:

$$E[x_i(t)] = p_i t + o(t^{\frac{3}{5}}), \quad (4.13)$$

debido a la desigualdad de concentración del Teorema 15.

4. El comportamiento ergódico (4.13) implica la siguiente convergencia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_i(t)}{t} = p_i, \text{ en probabilidad,} \quad (4.14)$$

debido a la desigualdad de concentración del Teorema 15. Esto demuestra el comportamiento asintótico a que hace referencia la ecuación (4.7).

La segunda parte del teorema, las relaciones (4.9) y (4.10), es un calculo elemental consecuencia de las relaciones recursivas (4.11). Omitiremos los detalles de esta parte. De especial importancia es la siguiente desigualdad de concentración.

Teorema 15 (Desigualdad de Azuma-Hoeffding.) *Sea $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ una martingala. Supongamos que para toda $k \in \mathbb{N}$ existe una constante c_k con*

$$|X_k - X_{k-1}| < c_k.$$

Entonces, para toda $m \in \mathbb{N}$ y toda constante positiva a tenemos

$$\mathbb{P}[|X_m - X_0| \geq a] < 2 \exp \left\{ \frac{-a^2}{2(c_1^2 + \dots + c_m^2)} \right\}. \quad (4.15)$$

Demostración. Ver Apéndice A. ■

Utilizaremos la notación de la *o* minúscula para el comportamiento asintótico de funciones: Una función g es de orden $o(f)$ si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{f(t)} = 0.$$

Estamos listos para demostrar el Teorema 14.

Demostración del Teorema 14.

1. Comenzamos por establecer la dinámica (4.12). En el paso t tenemos el grafo G_t . Luego para construir G_{t+1} seguimos las reglas de anexo preferencial 13: observamos el resultado de una distribución multinomial M valuada en el vector $(1, 2, 3)$ con probabilidades (α, β, γ) :

- Definamos el evento $A^- := \{M \in \{1, 2\}\}$. Denotemos por B el evento en que un vértice con in-degree igual a i es seleccionado en los pasos uno o dos de las reglas de anexo preferencial. Tenemos que

$$R(B) = \frac{i + \delta_{in}}{t + \delta_{in}n(t)}.$$

En este caso, $x_i(t+1)$ disminuye en comparación a $x_i(t)$ y la diferencia $x_i(t) - x_i(t+1)$ es igual a

$$E_R [1_{A^-} 1_B (x_i(t) - x_i(t+1)) \mid G(t)] = (\alpha + \beta)x_i(t) \frac{i + \delta_{in}}{t + \delta_{in}n(t)}. \quad (4.16)$$

Denotemos por C el evento en que un vértice con in-degree igual a $i - 1$ es seleccionado por los pasos uno o dos de las reglas de anexo preferencial. Tenemos que

$$R(C) = \frac{i - 1 + \delta_{in}}{t + \delta_{in}n(t)}.$$

En este caso, $x_i(t+1)$ aumenta en comparación a $x_i(t)$ y la diferencia $x_i(t+1) - x_i(t)$ es igual a

$$E_R [1_{A^-} 1_C (x_i(t+1) - x_i(t)) \mid G(t)] = (\alpha + \beta)x_{i-1}(t) \frac{i - 1 + \delta_{in}}{t + \delta_{in}n(t)}. \quad (4.17)$$

- En el evento $A^+ := \{M = 3\}$ no cambia $x_i(t)$ para $i > 1$. Si $i = 1$ con probabilidad α un nuevo vértice con in-degree cero es creado. Con probabilidad γ un nuevo vértice con in-degree 1 es creado. Tenemos entonces que

$$E_R [1_{A^+} (x_i(t+1) - x_i(t)) \mid G(t)] = \alpha 1_{\{i=0\}} + \gamma 1_{\{i=1\}}. \quad (4.18)$$

Las ecuaciones (4.16), (4.17) y (4.18) implican (4.12).

2. Continuamos por demostrar el comportamiento ergódico (4.13). Definimos $Z_i(t)$ por

$$Z_i(t) := \frac{x_i(t)}{t} - p_i.$$

Debemos demostrar lo siguiente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E [Z_i(t)] = 0.$$

Para este fin, debemos estimar el valor esperado de $x_i(t)$. Lo haremos utilizando la dinámica (4.12). Para $t > t_0$ tenemos la estimación

$$\begin{aligned} R \left[|n(t) - (\alpha + \gamma)t| \geq t^{\frac{1}{2}}a \right] &\leq 2 \exp \left\{ \frac{-ta^2}{2t} \right\} \\ &= 2 \exp \left\{ \frac{-a^2}{2} \right\}, \end{aligned}$$

debido a la desigualdad de concentración del Teorema 15. En efecto, la diferencia $n(t+1) - n(t)$ vale uno o cero. Por otro lado, $n(t)$ es una suma independiente de variables binomiales con probabilidad de éxito igual a $\alpha + \gamma$. En particular para $a = \log t$ obtenemos

$$R \left[|n(t) - (\alpha + \gamma)t| \geq t^{\frac{1}{2}} \log t \right] \leq 2 \exp \left\{ \frac{-(\log t)^2}{2} \right\}. \quad (4.19)$$

Observemos que $t^{\frac{1}{2}} \log t$ es una función de orden $o(x^{\frac{3}{5}})$. Siguiendo Bollobás et al., una forma sugestiva de interpretar esta desigualdad es decir que con probabilidad $1 - o(t^{-1})$ la oscilación

$$|n(t) - (\alpha + \gamma)t|$$

es de orden $o(t^{\frac{3}{5}})$. La dinámica (4.12) nos permite estimar el valor esperado $E[x_i(t+1)]$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E[x_i(t+1)] &= E[x_i(t)] + \frac{\alpha + \beta}{t + \delta_{in}(\alpha + \gamma)t} ((i-1 + \delta_{in})E[x_{i-1}(t)] - (i + \delta_{in})E[x_i(t)]) \\ &\quad + \alpha 1_{\{i=0\}} + \gamma 1_{\{i=1\}} + o(t^{-\frac{2}{5}}), \end{aligned} \quad (4.20)$$

debido a la desigualdad (4.19). Recordemos que la constante c_1 se definió en la ecuación (4.5). Entonces

$$\begin{aligned} E[x_i(t+1)] - E[x_i(t)] &= c_1 \frac{1}{t} ((i-1 + \delta_{in})E[x_{i-1}(t)] - (i + \delta_{in})E[x_i(t)]) \\ &\quad + \alpha 1_{\{i=0\}} + \gamma 1_{\{i=1\}} + o(t^{-\frac{2}{5}}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Observemos lo siguiente:

$$x_i(t) = tZ_i(t) + tp_i.$$

Entonces, la ecuación (4.21) implica lo siguiente

$$\begin{aligned} (t+1)E[Z_i(t+1)] + (t+1)p_i - tE[Z_i(t)] - tp_i \\ &= c_1 \frac{1}{t} ((i-1 + \delta_{in})(tE[Z_{i-1}(t)] + tp_{i-1}) - (i + \delta_{in})(tE[Z_i(t)] + tp_i)) \\ &\quad + \alpha 1_{\{i=0\}} + \gamma 1_{\{i=1\}} + o(t^{-\frac{2}{5}}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Reescribimos (4.22) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (t+1)E[Z_i(t+1)] + p_i - tE[Z_i(t)] \\ &= c_1 ((i-1 + \delta_{in})E[Z_{i-1}(t)] - (i + \delta_{in})E[Z_i(t)]) \\ &\quad + c_1 ((i-1 + \delta_{in})p_{i-1} - (i + \delta_{in})p_i) \\ &\quad + \alpha 1_{\{i=0\}} + \gamma 1_{\{i=1\}} + o(t^{-\frac{2}{5}}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Por otro lado, la ecuación (4.23) se reduce a

$$\begin{aligned} & (t+1)E[Z_i(t+1)] - tE[Z_i(t)] \\ &= c_1((i-1 + \delta_{in})E[Z_{i-1}(t)] - (i + \delta_{in})E[Z_i(t)]) + o(t^{-\frac{2}{5}}), \end{aligned} \quad (4.24)$$

debido a la definición recursiva (4.11) de p_i . Un argumento por inducción matemática en la relación (4.24) demuestra la ecuación (4.13).

3. Continuamos por demostrar la convergencia (4.14). Debemos demostrar que

$$R \left[\lim_{t \nearrow \infty} \left| \frac{x_i(t)}{t} - p_i \right| = 0 \right] = 1.$$

Llamemos W el evento en el cual

$$\limsup_{t \nearrow \infty} \left| \frac{x_i(t)}{t} - p_i \right| > 0.$$

Queremos demostrar que $R[W] = 0$. Para este fin, definimos los eventos

$$W_n(t) := \left\{ \left| \frac{x_i(t)}{t} - p_i \right| > \frac{1}{n} \right\}. \quad (4.25)$$

$$W_n := \limsup_{t \rightarrow \infty} W_n(t) := \bigcap_{t \geq 0} \bigcup_{z \geq t} W_n(z). \quad (4.26)$$

Observemos que

$$W = \bigcup_{n \geq 0} W_n.$$

Luego es suficiente con demostrar que $R(W_n) = 0$; ver Petrov [28], Lemma 6.8. Para demostrar que $R(W_n) = 0$, es suficiente con verificar que

$$\sum_{t=t_0}^{\infty} R[W_n(t)] < \infty,$$

debido al lema de Borel-Cantelli, ver e.g., [28], Lemma 6.1. Tenemos

$$R[W_n(t)] = R \left\{ |x_i(t) - p_i t| > \frac{t}{n} \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{(\frac{t}{n})^2}{2n^2} \right\} = 2 \exp \left\{ -\frac{t^2}{2n^4} \right\},$$

debido a la desigualdad de concentración del Teorema 15. Tenemos entonces

$$\sum_{t=t_0}^{\infty} R[W_n(t)] \leq 2 \sum_{t=t_0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2n^4} \right\} < \infty.$$

■

Capítulo 5

Proceso de contagio

En este capítulo se precisará el mecanismo de contagio por nivel de solvencia. Este enfoque ha sido utilizado por varios autores; ver e.g., Cont [15]. El estado de solvencia se define por la ecuación (5.1) abajo. La idea principal en términos simples es comparar el capital pasivo contra el capital activo: El capital pasivo debe ser mayor que el capital activo. Si un banco o grupo inicial de bancos entran en un estado de insolvencia y este “estado” se propaga a los demás participantes por un procedimiento de liquidación quisieramos tener herramientas de cuantificación que nos permitan calcular el impacto y severidad del resultado de este choque. Con esto en mente, presentamos los conceptos de impacto de incumplimiento y el índice de riesgo sistémico; ver Cont y Moussa [16] y las definiciones 16 y 17 respectivamente. En el Capítulo 6 simularemos el proceso de contagio y sus efectos bajo dos regímenes con y sin estrés por riesgo de mercado. Para simular riesgo de mercado utilizaremos una perturbación estocástica en las reservas de capital mediante una cópula Gaussiana. Por este motivo revisamos brevemente esta teoría en la Sección 5.3.

5.1. Modelo de contagio por nivel de solvencia

Se define la liquidez de un miembro del sistema bancario como la suma de efectivo, cuentas corrientes de los bancos en el Banco Central y pasivos pasivos en relación al total de depósitos. Es decir, es la suma de lo que tiene en poder la institución bancaria y que puede hacer uso de ella en el momento que se requiera. El pilar I del acuerdo de Basilea II proporciona normas para regular la liquidez de una entidad financiera. Tal entidad esta obligada a dividir su capital y dirigir una parte de esta a una reserva de liquidez, útil para prevenir caer en un incumplimiento.

A partir de estas reservas de liquidez se define la solvencia de la institución i como:

$$c_i + \sum_{j \in N(i)} L_{ij} - \sum_{j \in N(i)} L_{ji} > 0, \quad (5.1)$$

donde L_{ij} es la conexión en el modelo de grafos, que representa las exposiciones contrapartidas. Es decir, es el valor de las obligaciones (deudas) de la entidad i hacia la entidad j . Así $\sum_j L_{ij}$ son todas las obligaciones que tiene la entidad financiera i , mientras que $\sum_j L_{ji}$ son todos los préstamos que ha hecho la entidad financiera i . De esta manera, si lo que tiene en “efectivo” la entidad i es $c_i + \sum_j L_{ij}$, menos lo que no tiene (porque lo ha prestado), $\sum_j L_{ji}$, es positivo entonces la entidad es solvente, es decir, la entidad tiene con que responder antes crisis financieras. En caso contrario la entidad financiera i no es solvente, entonces ante una crisis la entidad financiera caerá en banca rota.

Ahora veamos que ante el incumplimiento de la institución i se genera el siguiente flujo de dinero a corto plazo:

1. Se recolectan las deudas de los deudores de i

$$\forall j \in N(i), L_{ji} \rightarrow 0. \quad (5.2)$$

2. Los acreedores recuperan una fracción $R \in [0, 1]$ de las deudas que tenía i con ellos.

$$\forall j \in N(i) \quad c_j \rightarrow c_j + RL_{ij}. \quad (5.3)$$

En base a este flujo de dinero se define lo que es la **cascada de incumplimientos**. Este proceso nos define el estado de liquidez de las entidades financieras a partir del fallo de una de ellas. Este proceso de cascada de incumplimientos sigue la siguiente lógica:

- a) Se inicia con un grafo $G_{n(0),m(0)}(0)$ que representa el sistema bancario al inicio. Donde $V(G(0)) = n(0)$ como número de instituciones en el sistema y $E(G(0)) = m(0)$ el número de relaciones se tienen en el sistema.
- b) Se define el conjunto $F_0 = \{i\}$, que representa el incumplimiento (fallo) del banco o institución i y se inicializa las reservas de liquidez de todas las instituciones financieras del sistema bancario $c^0 \in \mathbb{R}_+^n$.
- c) A partir del fallo de la institución financiera i se actualizan las reservas de capital de las instituciones relacionadas con él de la siguiente manera:

$$c_j^k = c_j^{k-1} + R \sum_{v \in F_{k-1}} L_{vj}^{k-1} \quad (5.4)$$

$$\forall v \in F_{k-1}, L_{vj}^k := 0. \quad (5.5)$$

3. El conjunto de bancos que se vuelven insolventes en la iteración k es

$$F_k = \left\{ j \in V(G) : c_j^k + \sum_{v \in N(j)} L_{vj}^k - \sum_{v \in N(j)} L_{jv}^k \leq 0, c_j^{k-1} + \sum_{v \in N(j)} L_{vj}^{k-1} - \sum_{v \in N(j)} L_{jv}^{k-1} > 0 \right\}. \quad (5.6)$$

4. De esta manera se tiene el proceso de grafos $(G_{n,m}(k))_k^{n(i)}$. Donde $n(i)$ es la condición de paro, definido como

$$n(i) = \inf \{k \geq 1 : F_k = \emptyset\} \leq n. \quad (5.7)$$

Al proceso de grafos deterministas $(G_{n(k),m(k)}(k))_k^{n(i)}$ que resulta de la lógica anterior se le conoce como *cascada de incumplimientos* o *proceso de contagio*.

Observaciones del modelo:

1. Las cantidades iniciales c_i^0 se calculan en base a las obligaciones y los prestamos que tenga cada banco, el acuerdo de Basilea II sugiere el siguiente método de requerimientos de capital en reserva del ocho por ciento:

$$c_i = 8\% \sum_{j \in N(i)} |L_{ij}|. \quad (5.8)$$

2. Las obligaciones L_{ij} se simulan mediante una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución de cola pesada. Por ejemplo con una distribución de Pareto con parámetro 3, el cual se utilizó para modelar el riesgo sistémico el sistema bancario Brasileño.
3. La forma de modelar las obligaciones no es del todo real ya que las obligaciones de cada banco i y los prestamos hechos están correlacionados. Entonces las L_{ij} no pueden ser independientes como lo sugiere Rama Cont.
4. Este modelo se especifica con la terna (c, L, G) y la tasa de recuperación.
5. El grafo de inicio G que se menciona anteriormente se genera mediante el modelo de Bollóbas et al. [10]. Las reservas de liquidez de cada institución i dependen de sus vecinos interiores y exteriores, es decir, del in-degree y del out-degree del vértice i . Así el proceso de contagio es aleatorio ya que los in-degree y out-degree son aleatorios con distribución de ley de potencia.

En la siguiente definición se define el tamaño de la pérdida originada por el incumplimiento de una institución en particular. Este valor ha sido utilizado por diferentes autores para cuantificar la severidad en el incumplimiento. Esta es una medida de tipo *worst-case*.

Definición 16 *El impacto de incumplimiento de la institución i denotado $DI(i)$ se define como la pérdida total del sistema bancario causada por la falla de la institución i y se expresa como*

$$DI(i) = \sum_{j=1}^{t(i)} p_j, \quad (5.9)$$

donde p_j denota la pérdida de la institución j que cayó en incumplimiento durante el proceso de contagios:

$$p_j = (1 - R) \sum_{w \in N(j)} L_{jw}.$$

Definimos $t(i)$ como el número de instituciones que cayeron en incumplimiento durante el proceso de contagio:

$$t(i) = \left| \bigcup_{k=1}^{n(i)} F_k \right|.$$

La pérdida total $DI(i)$ es una medida del impacto en el sistema bancario causada por el incumplimiento de la institución i . Este valor está completamente determinado por el proceso de contagio dado que la institución i falló. Entonces ahora, lo que se tiene que especificar es cuando y porque falla la institución i , es decir, hay que especificar el choque que inicia los incumplimientos en los sistemas bancarios. Además en un sistema bancario real, el hecho de que solo un banco falle al inicio es algo irreal, ya que las fallas iniciales se dan en varios bancos simultáneamente. Estas fallas simultaneas se deben a situaciones externas al sistema bancario y por su importancia es necesario modelar este tipo de choques.

5.2. Choque inicial y estrés en los sistemas bancarios

En ambos modelos presentados anteriormente se toma en cuenta un choque inicial. Muchas veces este choque es idiosincrático para cada banco y no hay riesgo de contagio. Sin embargo, las crisis mas severas son aquellas en que existe un factor en común. La crisis originada en el sector hipotecario en Estados Unidos en el 2007 que aunque no tuvo su origen en el sistema bancario Mexicano sin lugar a dudas esta afectando y seguirá afectando al mismo. Esta crisis en diferentes mercados bursátiles y modelos de inversión constituyen un claro ejemplo de factores de estrés. Este estrés provoca que varios miembros de un sistema bancario caigan en incumplimiento simultáneamente. Entonces, es claro que las primeras caídas (choque inicial) en un sistema financiero estresado están correlacionadas y no solo eso, además el estrés afecta al sistema por un periodo de tiempo considerable, es decir, el sistema sigue sufriendo modificaciones en los incumplimientos a través del proceso

de contagio. Estas modificaciones en los incumplimientos significan mayores incumplimientos bajo el estrés que en ausencia de este. Así para modelar el proceso de contagio en un sistema bancario estresado se necesitan dos cosas. La primera es una manera de modelar la correlación entre los miembros del sistema y la segunda es definir una manera de introducir este modelo en el proceso de contagio.

En la Sección 5.1 explicamos el mecanismo de contagio. Ahora explicaremos la forma en que modelaremos escenarios de estrés mediante el uso de una copula Gaussiana, una técnica que presentaremos con detalle en la Sección 5.3. Las situaciones de estrés reflejan riesgo de mercado cuando los activos de las instituciones pierden valor.

1. Se comienza con una estructura del grafo inicial $(c(0), L)$ al tiempo $t = 0$.
2. Se perturban estocásticamente las reservas de liquidez por medio de una distribución conjunta F que simula riesgo de mercado en el sistema. Para simular la distribución de F se usa una cópula Gaussiana. En este caso, cada banco i tiene una perturbación con distribución F_i y estas son marginales de la distribución F . Para simular esta distribución F se supone que la estructura de dependencias es simulada por una cópula Gaussiana. Así se tiene

$$c^0 = (c_1^0, \dots, c_n^0) \sim F. \quad (5.10)$$

Para cuantificar el riesgo de contagio en el sistema utilizaremos el Índice de riesgo sistémico introducido por Cont [15]. Un concepto que a continuación presentamos.

Definición 17 *El Índice del riesgo sistémico de una institución i en un sistema financiero esta dado por*

$$IRS(i) = \mathbb{E}[DI_i(T) | c_i(T) < 0]. \quad (5.11)$$

Con el fin de aclarar la simulación de la distribución F mediante una cópula Gaussiana recordamos los conceptos necesarios en la siguiente sección.

5.3. Perturbación de las reservas de capital usando la cópula Gaussiana y el acuerdo de Basilea II

Una cópula es una función C que permite recuperar una función de distribución conjunta multivariada F a partir de sus distribuciones marginales univariadas de la siguiente manera:

$$C : \begin{array}{l} (0, 1)^m \\ C[F_1(y_1), \dots, F_m(y_m)] \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} (0, 1) \\ = F(y_1, \dots, y_m) . \end{array}$$

Este tipo de funciones fueron presentadas originalmente por Sklar (1959) para resolver algunos problemas formulados por M. Fréchet sobre la relación entre una función de distribución conjunta multivariada y sus funciones de distribución marginales univariadas. En la actualidad las cópulas se han convertido en una poderosa y popular herramienta de modelado multivariado en muchos campos de la investigación, sobre todo donde la dependencia entre varias variables aleatorias es de gran interés y para las cuales la suposición de normalidad multivariada es cuestionable.

Para formalizar este concepto, Sklar enunció y demostró el teorema siguiente. Este resultado garantiza la existencia, la unicidad y como generar cópulas a partir de funciones de distribución.

Teorema 18 (Sklar) Sean Y_1, Y_2, \dots, Y_n variables aleatorias con función de distribución conjunta F y funciones de distribución marginal F_1, F_2, \dots, F_n . Entonces, existe una cópula C tal que para todo $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = C[F_1(y_1), F_2(y_2), \dots, F_n(y_n)]. \quad (5.12)$$

Si F_1, F_2, \dots, F_n son continuas, entonces C es la única cópula sobre $\text{rango}(F_1) \times \dots \times \text{rango}(F_n)$. Inversamente, si C es una cópula y F_1, F_2, \dots, F_n son funciones de distribución, entonces F definida por la ecuación (5.12) es una función de distribución conjunta con marginales F_1, F_2, \dots, F_n .

La ecuación (5.12) muestra la forma en la que se relacionan la función de distribución conjunta, las marginales y la cópula. Esta fórmula puede ser invertida para expresar las cópulas en términos de una función de distribución conjunta y las inversas de las funciones de distribución marginales. Esto proporciona un método de construcción de cópulas a partir de funciones de distribución conjuntas. Por ejemplo en el caso de dimensión dos, si $v_1 = F_1(y_1)$ y $v_2 = F_2(y_2)$, entonces $y_i = F_i^{-1}(v_i)$, $i = 1, 2$. Por lo tanto,

$$C(v_1, v_2) = F(F_1^{-1}(v_1), F_2^{-1}(v_2)), \quad (5.13)$$

Algunas propiedades de las cópulas se enuncian en la siguiente proposición.

Proposición 19 1. Para todo $v_1, v_2 \in (0, 1)$

$$\lim_{v_j \rightarrow 1} C(v_1, v_2) = v_{3-j}, \quad \lim_{v_j \rightarrow 0} C(v_1, v_2) = 0,$$

donde $j = 1, 2$.

2. Cuasi-monotonía. Para todo $u_1, u_2, w_1, w_2 \in (0, 1)$ tales que $u_1 \leq u_2, w_1 \leq w_2$

$$C(u_2, w_2) - C(u_2, w_1) - C(u_1, w_1) + C(u_1, w_2) \geq 0.$$

3. *Desigualdad de Fréchet-Hoeffding.* Si C es una cópula, entonces para todo $(v_1, v_2) \in (0, 1)^2$

$$W(v_1, v_2) = \max\{v_1 + v_2 - 1, 0\} \leq C(v_1, v_2) \leq \min\{v_1, v_2\} = M(v_1, v_2), \quad (5.14)$$

donde W y M son las cópulas mínima y máxima respectivamente bajo un orden parcial en el conjunto de cópulas llamado orden concordante, esto porque no todo par de cópulas es comparable. Como consecuencia del teorema de Sklar y la ecuación (5.13) tenemos que para todo $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\max\{F_1(y_1) + F_2(y_2) - 1, 0\} \leq F(y_1, y_2) \leq \min\{F_1(y_1), F_2(y_2)\}. \quad (5.15)$$

La ecuación (5.15) se conoce como desigualdad de Fréchet-Hoeffding. La desigualdad (5.14) muestra que las cópulas comparables bi-variadas se encuentran entre las cópulas W y M . Este hecho se muestra en la Figura 5.1 donde además se ilustra la cópula producto o cópula independiente $z = \Pi(u, v) = uv$.

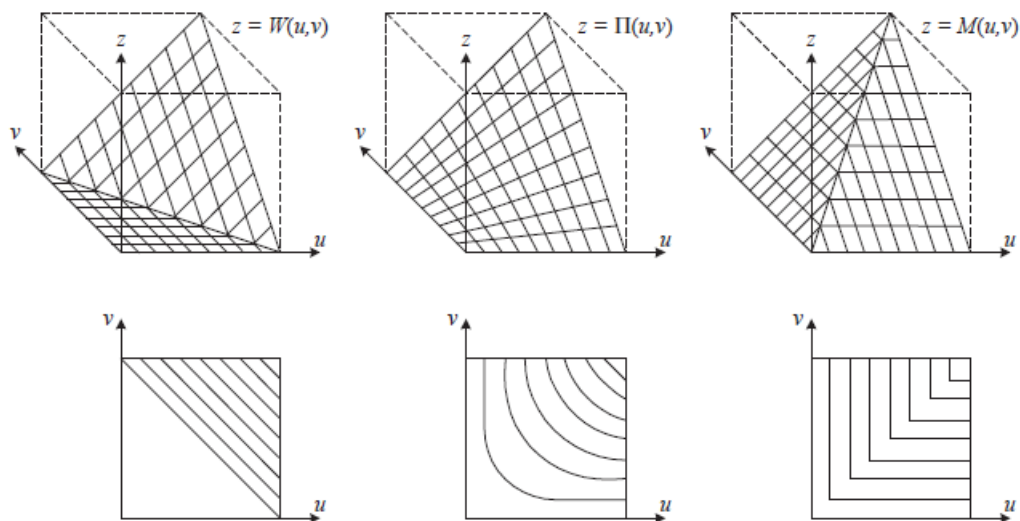


Figura 5.1: Gráficas y contornos de las cópulas W , Π y M .

Las dos clases de cópulas de un parámetro más frecuentemente usados son las cópulas *elípticas* y las cópulas *Arquimedianas*. Una cópula elíptica es la correspondiente a una distribución elíptica; es decir, son aquellas cuya función de densidad tiene contornos que son elipses concéntricas con excentricidad constante. Estas cópulas se construyen por medio del *método de inversión* vía (5.13).

Dentro de las cópulas elípticas, una familia importante es la *Gaussiana o normal* bi-variada, que tiene la forma

$$C_\rho(v_1, v_2) = \Phi_2[\Phi^{-1}(v_1), \Phi^{-1}(v_2)], \quad (v_1, v_2)^T \in (0, 1)^2, \quad (5.16)$$

donde Φ^{-1} es la inversa de la función de distribución normal estándar y Φ_2 es la función de distribución normal bi-variada dada por la fórmula

$$\phi_2(\mathbf{z}) = (2\pi)^{-1} |\mathbf{R}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z} \right\}, \quad \mathbf{z}^T \in \mathbb{R}^2,$$

donde \mathbf{R} es la matriz de covarianzas con forma

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

y $\rho \in (-1, 1)$ es el coeficiente de correlación de Pearson.

El uso de la cópula Gaussiana bi-variada es atractivo ya que codifica la dependencia en la misma forma en que la distribución normal bi-variada lo hace usando el parámetro de dependencia ρ , con la diferencia de que lo hace para variables aleatorias con cualesquiera marginales arbitrarias. Esta cópula tiene la capacidad de capturar el rango completo de dependencia ya que $C_{-1} = W$, $C_0 = \Pi$ y $C_1 = M$.

Para el caso que estamos estudiando tenemos que la cópula Gaussiana codifica las dependencias que existen entre las instituciones bancarias cuando existe estrés. Para utilizar esta cópula debemos ser capaces de simular valores de una distribución conjunta F definida mediante la cópula Gaussiana. Esto se logra observando una consecuencia del teorema de Sklar, ya que si $F(y_1, \dots, y_n) = C[F_1(y_1), \dots, F_n(y_n)]$ entonces derivando tenemos que

$$f(y_1, \dots, y_n) = f_1(y_1) \times \dots \times f_n(y_n) c[F_1(y_1), \dots, F_n(y_n)], \quad (5.17)$$

donde f_n es la densidad de la v.a. Y_n , f es la densidad de la distribución conjunta F y la expresión $c[F_1(y_1), \dots, F_n(y_n)]$ es la que modela la estructura de dependencias. Así en el caso de la cópula Gaussiana, haciendo el cambio de variable $v_n = F_n(y_n)$, tenemos que

$$c_\rho(v_1, \dots, v_n) = \frac{\phi_n[F_1^{-1}(v_1), \dots, F_n^{-1}(v_n)]}{\phi[F_1^{-1}(v_1)] \times \dots \times \phi[F_n^{-1}(v_n)]}, \quad (5.18)$$

donde ϕ es la densidad de una normal estándar y ϕ_n es la densidad de una normal n -variada con media cero y una matriz de correlaciones dada por el parámetro ρ . Es importante mencionar que el parámetro de la cópula ρ puede ser un valor en $[-1, 1]$ o un elemento en el hipercubo $[-1, 1]^{n(n-1)/2}$ ya que existen $n(n-1)/2$ formas posibles de interacción entre las n variables aleatorias involucradas.

Usando (5.17) y (5.18) obtenemos una forma para simular valores de la densidad multivariada resultante f dado marginales f_n y suponiendo que la estructura de dependencias es Gaussiana. Estas simulaciones se hacen utilizando el algoritmo 1

Siguiendo los pasos anteriores se obtiene una muestra $x = (x_1, \dots, x_n)$ de una variable aleatoria X con distribución n -variada F , con marginales F_1, \dots, F_n y una dependencia modelada por la cópula Gaussiana. Es importante señalar que las distribuciones

Algorithm 1 Generar una muestra de la distribución F con una cópula gaussiana

- 1: Se genera una variable aleatoria $y = (y_1, \dots, y_n)$ con distribución normal n -variada con media C y matriz de correlaciones $A = R(\rho)$.
 - 2: Se calcula $v = (v_1, \dots, v_n) = (\Phi(y_1), \dots, \Phi(y_n))$ donde Φ es la distribución de una normal estándar.
 - 3: Finalmente se calcula $x_1 = F_1^{-1}(v_1), \dots, x_n = F_n^{-1}(v_n)$.
-

marginales F_1, \dots, F_n pueden ser cualesquiera distribución continua o discreta y si se dá el caso de que todas sean normales, x será una muestra de una normal n -variada con media cero y matriz de correlaciones $R(\rho)$.

La parte importante en la simulación de muestras de la distribución n -variada F es determinar el parámetro de la cópula ρ y generar una muestra de la variable aleatoria normal n -dimensional con media C y matriz de correlaciones $A = R(\rho)$. Además el acuerdo de Basilea toma en cuenta el riesgo sistemático e idiosincrático y estos deben de aparecer en la simulación de la perturbación. Para incorporar estos factores de riesgo utilizamos el algoritmo 2.

Algorithm 2 Generar muestras de una $N_n(C, A)$ con riesgos sistemático e idiosincrático

- 1: Se genera una variable aleatoria $x_0 \sim N(0, 1)$ y se define el valor de $\theta \in (0, 1)$. El valor de θ servirá para definir la proporción de riesgo sistemático e idiosincrático que afectará a la reserva de liquidez.
- 2: Se generan las variables aleatorias $Y = (y_2, \dots, y_n)$ donde n es el número de participantes del sistema y

$$y_i = \sqrt{\theta}x_0 + \sqrt{1 - \theta}x_i \quad \text{donde } x_i \sim N(0, 1). \quad (5.19)$$

- 3: Se calcula la matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}$ donde $a_{ij} = \text{corr}(x_i, x_j) = \rho_{ij}$. Con la matriz A se calcula la descomposición de Cholesky para obtener la matriz L tal que $A = LL^T$.
 - 4: Se genera el vector aleatorio X^{inicial} de dimensión n donde $x_i^{\text{inicial}} = \sqrt{\theta}x_0 + \sqrt{1 - \theta}x_i$, luego se calcula $Z = C + LX^{\text{inicial}}$.
-

Con el algoritmo 2 generamos una muestra de una variable aleatoria normal n -dimensional Z con media C y matriz de correlaciones A la cual usaremos en el algoritmo 1 para generar una muestra de F usando la cópula.

En el algoritmo 2 la variable aleatoria x_0 representa el riesgo sistemático que afecta al sistema financiero y las variables aleatorias x_i son los riesgos idiosincráticos de cada institución.

Capítulo 6

Simulaciones

En este capítulo haremos un análisis de medición de riesgo sistémico basado en el simulador desarrollado en el lenguaje R. Nos concentraremos en tres estudios bajo dos regímenes. Los estudios corresponden a estimar el *impacto de incumplimiento* en función del número de vértices en un sistema que tiene de tres a doscientos bancos. El segundo estudio corresponde a estimar el *índice de riesgo sistémico* del banco etiquetado como B3 en un sistema de cincuenta bancos. En el tercer estudio se proponen dos medidas para medir la severidad del impacto bajo los dos regímenes y estas dos medidas corresponden a estimar la proporción de capital en pérdida así como la proporción de bancos salientes. También se dará una estimación de las densidades empíricas de tales medidas para analizar su comportamiento. Los regímenes corresponden a considerar situaciones de estrés por riesgo de mercado o bien ignorar estos efectos.

Son dos las conclusiones principales a que llegamos como producto de este ejercicio de simulación. La primera conclusión es que observamos sensibilidad del riesgo sistémico al riesgo de mercado para cada método de cuantificación y medición que se analizó, es decir, el impacto de incumplimiento, el índice de riesgo sistémico y las proporciones. Especialmente el índice de riesgo sistémico fue sensible a este factor. La segunda conclusión es que encontramos relaciones de dependencia no monótonas entre el riesgo sistémico y el número de vértices en el sistema en concordancia con Battiston et al. [6].

En todos los ejercicios de simulación consideramos los siguientes parámetros en el modelo de conexión preferencial expuesto en la Sección 4.4:

$$\alpha = 0,2, \beta = 0,6, \gamma = 0,2, \delta_{in} = 0,01, \delta_{out} = 4,45.$$

Esta selección de parámetros genera un grafo aleatorio con distribución de los vértices ley

potencia con exponentes

$$X_{in} = 1 + \frac{1}{c_1} = 1 + \frac{1 + \delta_{in}(\alpha + \gamma)}{\alpha + \beta} = 2,3, \quad (6.1)$$

$$X_{out} = 1 + \frac{1}{c_2} = 1 + \frac{1 + \delta_{out}(\alpha + \gamma)}{\gamma + \beta} = 4,475. \quad (6.2)$$

Estos exponentes son aproximadamente los que se estiman en los sistemas bancarios de Brazil y Australia; ver [16]. Para el caso de México no existen estas estimaciones y esta dirección de investigación lo dejamos para trabajo futuro.

Aclaremos la forma en que seleccionamos los parámetros anteriores. Los parámetros α , β y γ nos reflejan el comportamiento del grafo aleatorio que se formará. Estos determinan la distribución de los grados interiores y exteriores. Es decir, la selección $\alpha = \gamma = 0,2$ corresponde a que en el 20 % de los casos los bancos entran al sistema con una conexión hacia a fuera o hacia adentro, ambos con la misma probabilidad. Luego, $\beta = 0,6$ significa que en el 60 % de los casos los bancos, que están ya en el sistema, se prestan dinero entre sí. Los parámetros δ_{in} y δ_{out} especifican el mínimo de bancos deudores y acreedores del sistema de las instituciones participantes.

La organización del capítulo es la siguiente. En la Sección 6.1 presentamos las simulaciones del impacto de incumplimiento. En la Sección 6.2 presentamos las simulaciones del índice de riesgo sistémico. En la Sección 6.3 presentamos las simulaciones de la proporción de capital en pérdida y se estimará las densidades empíricas en cada régimen. Además en la Sección 6.3 presentamos las simulaciones de la proporción de bancos salientes.

6.1. Impacto de incumplimiento vs número de participantes en el sistema

6.1.1. Caso sin estrés

Consideremos el caso en que el sistema bancario no está bajo estrés y que las obligaciones siguen una distribución de Pareto con parámetros $a = 10$ y $b = 100$. Con estos parámetros las deudas interbancarias tienen como mínimo 100 unidades monetarias y con probabilidad del 95 % estas no exceden las 200 unidades. Es decir, a los bancos no se les permite pedir prestado más del doble de lo que prestan e inversamente en el 95 por ciento de los casos. Fijemos también la tasa de recuperación al nivel 30 %, es decir, cuando un banco cae en banca rota este devuelve aproximadamente una tercera parte de la deuda a los bancos que les debe. El requerimiento de capital es del 8 % como lo especifica el acuerdo de Basilea II. En la Figura 6.1, gráfica de la izquierda, se muestran los resultados

obtenidos en este caso. La gráfica sugiere un comportamiento con *alta volatilidad* y una *tendencia no monótona*.

La duración de la simulación fue de 1.12 horas y se manejó un sistema bancario de hasta 200 bancos. En un sistema interbancario mas grande, como el de Estados Unidos, se deben considerar aproximadamente 6600 participantes y esto hace que nuestro programa sea incapaz de hacer los cálculos en un tiempo razonable. Esto sugiere la aplicación de técnicas computacionales intensivas, tales como el uso de *clusters* y programación en paralelo.

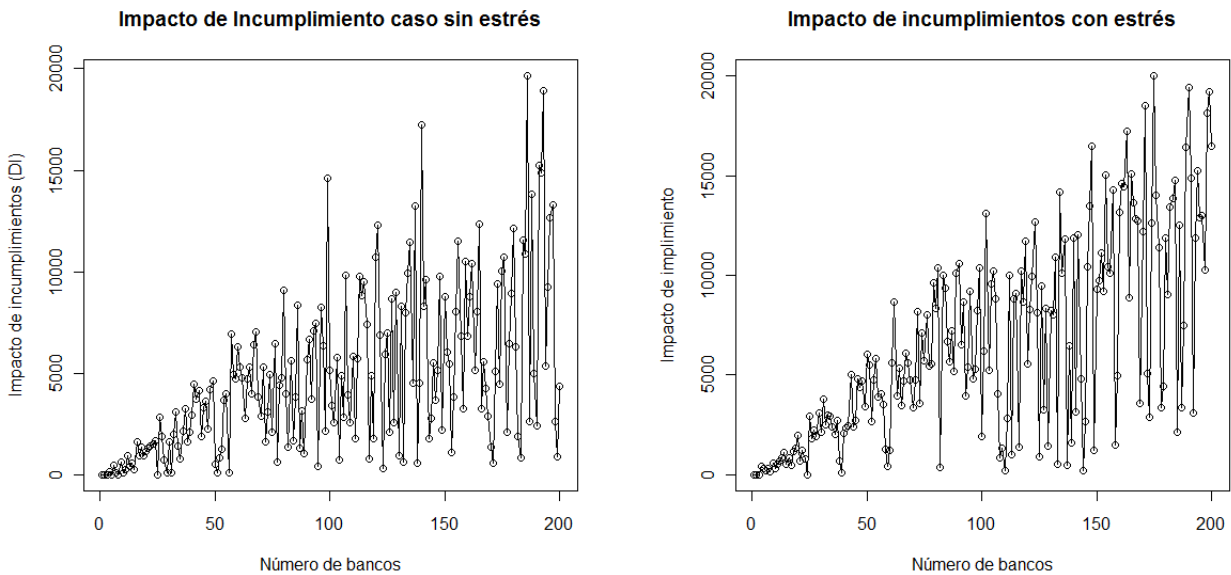


Figura 6.1: A la izquierda se muestra la gráfica del impacto de incumplimiento como función del número de vértices, caso sin estrés. A la derecha se muestra el caso con estrés.

6.1.2. Caso con estrés

La esencia de este ejercicio es una perturbación de las reservas de capital por riesgo de mercado. La perturbación se simuló con una distribución F cuya densidad está dada por f según la Fórmula (5.17). Recordemos que c_ρ es la derivada de la cópula Gaussiana. Las distribuciones marginales F_i serán normales con parámetros de la forma (c_i, σ) donde c_i es el capital en reserva dado por la regla del ocho por ciento y σ es igual a cinco para el primer bloque del veinte por ciento de los vértices y es igual a uno para el segundo bloque. Esto en concordancia con la “ley de Mateo” del 80-20 por ciento. El resultado de la simulación se ilustra en la Figura 6.1, gráfica de la derecha. En ella observamos

una oscilación pequeña cuando el número de bancos es de 3 a 100. Sin embargo, después de 100 bancos, la oscilación aumenta en mayor medida con el número de bancos. Este fenómeno es causado por el estrés ya que, al introducir estrés al sistema, el número de bancos salientes del sistema en el choque, aumenta y por consecuencia la pérdida también. Además esto sucede con mas frecuencia que en el caso sin estrés. Lo cual ocasiona que el impacto de incumplimiento sea grande y oscile menos. Para entender mejor, el por qué de esto, estudiaremos el IRS en la siguiente sección.

6.2. Simulación del índice de riesgo sistémico

6.2.1. Caso sin estrés

En este estudio consideramos un sistema bancario con 50 bancos. El cálculo del índice se hizo para el Banco 3 que llamaremos B3. Se realizaron 1000 iteraciones del algoritmo para tener una aproximación Montecarlo de la esperanza condicional que se define en el Teorema 5.11. Los resultados se muestran en la Figura 6.2, gráfica de la izquierda. En ella se puede observar la convergencia del índice. Este comportamiento asintótico sugiere que el incumplimiento del banco B3 al inicio del proceso de contagio tiene un índice de riesgo sistémico igual a

$$IRS(B3) = 24,60.$$

En esta gráfica observamos que la convergencia del índice es lenta y con forma de proceso de riesgo clásico, pero con la peculiaridad de ser invertido. Consideremos el proceso

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k(n)} DI(B3)_i, \quad (6.3)$$

donde $k(n)$ es una variable aleatoria y la perdida ocasionada por B3 que denotamos por $DI(B3)_i$. Entonces, $DI(B3)$ seria el monto de pago del proceso al tiempo i y este hace subir la gráfica. Lo que no se puede deducir a simple vista es que el tiempo entre llegadas de $DI(B3)_i$ es exponencial. Para ello se necesita más estudios y parece una pregunta de interés el determinar la distribución de los tiempos de arribo de $DI(B3)$.

Para poder entender el por qué de esta forma tan peculiar. Observemos que, durante el choque inicial, la probabilidad de B3 de caer es pequeña, ya que B3 tiene un alta conectividad hacia adentro heredada de la distribución de ley de potencia y del modelo de Bollobás et al. Para entender mejor este hecho, notemos que $\beta = 0,6$ es decir, se da mas posibilidades a que dos vértices ya existentes en el sistema se conecten en comparación de lo otros dos casos en los cuales se anexan, un nuevo vértice con una nueva conexión.

Además B3 desde el principio de las iteraciones se incorpora al sistema, esto le dá mayores posibilidades de incrementar sus conexiones hacia afuera y hacia adentro.

Esta conectividad implica que su reserva de capital será grande y por lo tanto, a causa del mecanismo de liquidación mencionado en capítulos anteriores, más solvente. Con lo cual será menos probable que salga del sistema en el choque inicial. Los saltos que se observa en la gráfica ilustran en que momento salió B3 del sistema en el choque inicial. De hecho estas fueron solamente 8 veces de 1000, es decir, el 0.08 % de las veces.

Un aspecto que destacamos nuevamente es el tiempo de simulación ya que este fue de 1.034958 horas. Este tiempo es considerablemente alto.

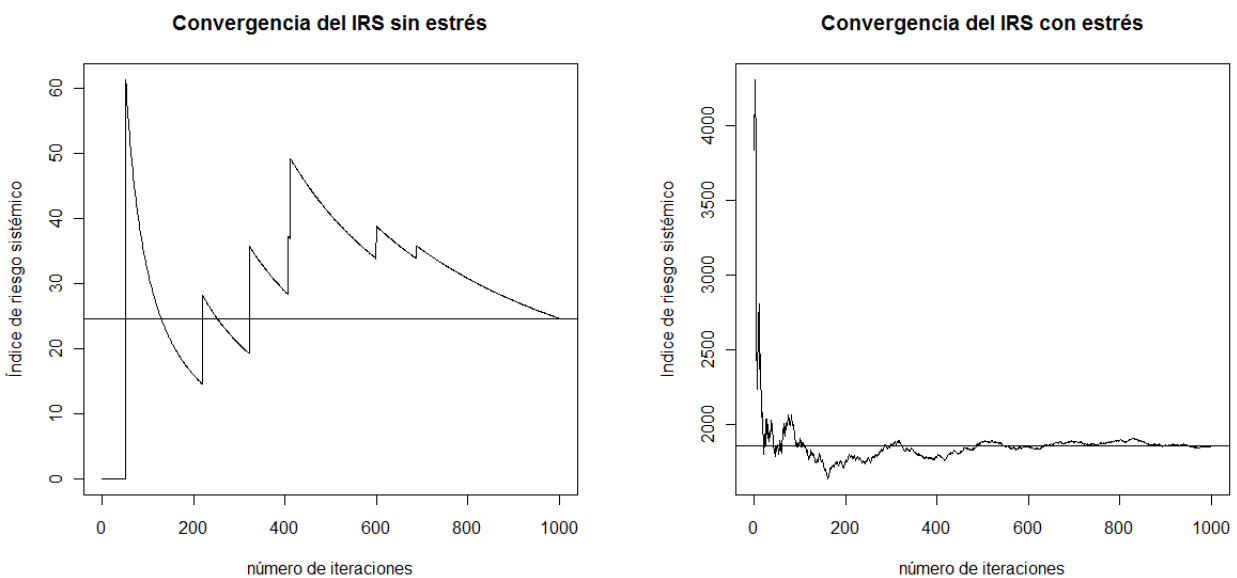


Figura 6.2: En la gráfica de la izquierda se muestra la convergencia del índice de riesgo sistémico del banco B3 caso sin estrés. En la gráfica de la derecha el correspondiente valor para el caso con estrés.

6.2.2. Caso con estrés

También en este caso tomaremos un sistema bancario con 50 participantes. Con estas especificaciones calcularemos el índice de riesgo sistémico del banco identificado con el vértice número tres $B3$. Para este fin, se utilizará el algoritmo descrito en la Sección 5.1. Haciendo la simulación se obtuvieron resultados que se ilustran en la Figura 6.2, gráfica de la derecha. La gráfica muestra la convergencia del algoritmo Montecarlo para calcular

el índice de riesgo sistémico del banco $B3$. Aparentemente el índice tiene una asíntota en el nivel

$$IRS(B3) = 1860,41.$$

En este caso se supuso que el parámetro θ en el algoritmo 2 es de 0.3. La tasa de recuperación en el proceso de liquidación es del treinta por ciento.

En esta gráfica observamos que la velocidad de convergencia del índice es buena y más rápida que en el caso sin estrés. Es interesante observar que el orden de magnitud en este caso del índice de riesgo sistémico del banco $B3$ es mucho mas grande que en el caso sin estrés. De aquí la conclusión de que el IRS es muy sensible al estrés del mercado.

El IRS de $B3$ en el caso con estrés muestra que este banco provocaría una caída del sistema mas severo que en el caso sin estrés. Es decir, el estrés afecta mucho al sistema. Para tener más información de esta conjetura, en la siguiente sección introducimos dos proporciones que nos darán idea de como es el impacto que sufre el sistema a causa de la caída de $B3$, de hecho a causa del choque inicial no solo de la caída de $B3$, y con ello podremos interpretar mejor la información que nos arroja el IRS.

6.3. Proporción de pérdida y proporción de la caída

En esta sección calcularemos la siguiente proporción:

$$PP = \frac{\text{Pérdida del sistema}}{\text{Capital del sistema}}.$$

Este cociente nos da el porcentaje de capital que ha sido liquidado por el proceso de contagio relativo al capital agregado del sistema. También aquí consideraremos los dos regímenes y se utilizarán los datos generados en el estudio del impacto de incumplimiento de la Sección 6.1.

Es importante mencionar que calculamos estas cantidades para darnos una idea de la severidad de la pérdida causada por el choque inicial, el cual depende del riesgo de mercado. Es decir, las obligaciones L_{ij} son simuladas por una distribución de Pareto (10,100), además el número de conexiones hacia fuera de un vértice dado es aleatorio. Así las reservas de capital c_i también serán aleatorias y por como definimos el proceso de liquidación, el conjunto $F_0 = \{\text{bancos salientes en el choque}\}$ tendrá la peculiaridad de ser un conjunto aleatorio¹. Es decir, $\#F_0$ será una variable aleatoria. Por lo tanto, la pérdida dependerá de que tan grande es este conjunto, y por consiguiente el IRS también dependerá del tamaño de F_0 . De aquí surge la idea de calcular PP y PBS.

¹En particular, puede contener al banco $B3$ o no.

En la Figura 6.3 se ilustran los resultados para los dos regímenes, a la izquierda el caso sin estrés y a la derecha el caso con estrés para la fracción PP.

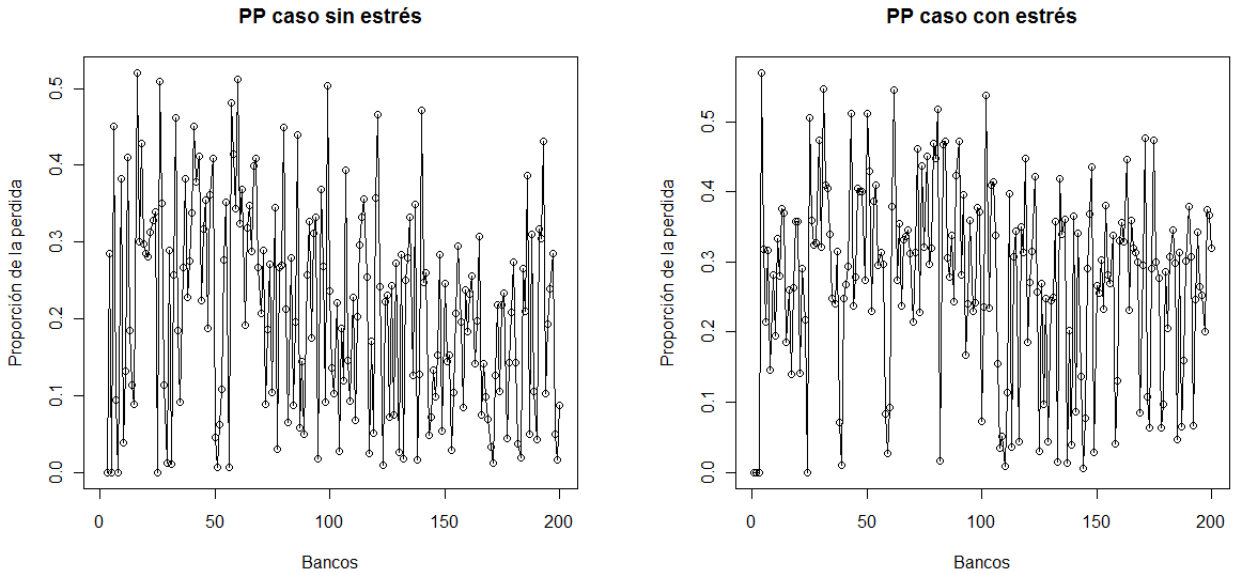


Figura 6.3: En la gráfica de la izquierda se observa la proporción de la pérdida con respecto al capital del sistema, caso sin estrés. En la gráfica de la derecha el caso con estrés.

Esta fracción nos da una idea de cual fue la severidad de la pérdida ocasionada por el choque inicial. Lo interesante que notar en esta figura es la forma no monótona que presenta. Esto de acuerdo a lo observado por Battiston et al. [6]. Algo interesante que notar que es al parecer la media de la fracción PP para el caso sin estrés es más pequeña que para el caso con estrés. Esto querría decir que bajo estrés la pérdida es mayor. Para corroborar esta conjetura veamos las gráficas de la Figura 6.4, en ella se observa que la media de PP sin estrés es de 0.22, es decir, el choque inicial ocasiona una pérdida del 22% del dinero del sistema. Mientras que en el caso con estrés la media de PP es de 0.3, es decir, el choque ocasiona que el sistema tenga una pérdida del 30% de su capital. El cual es 8% más grande que en el caso sin estrés.

Para seguir con este análisis introducimos la proporción que no dirá cuantos bancos salieron del sistema a causa del choque inicial. Esta la denotamos por

$$PBS := \frac{\text{Bancos salientes}}{\text{Número de bancos en el sistema}}.$$

Este cociente nos da el porcentaje de bancos salientes en la fase final del proceso de contagio relativo al tamaño del sistema. Aquí también se utilizarán los datos generados en el estudio del impacto de incumplimiento de la Sección 6.1.

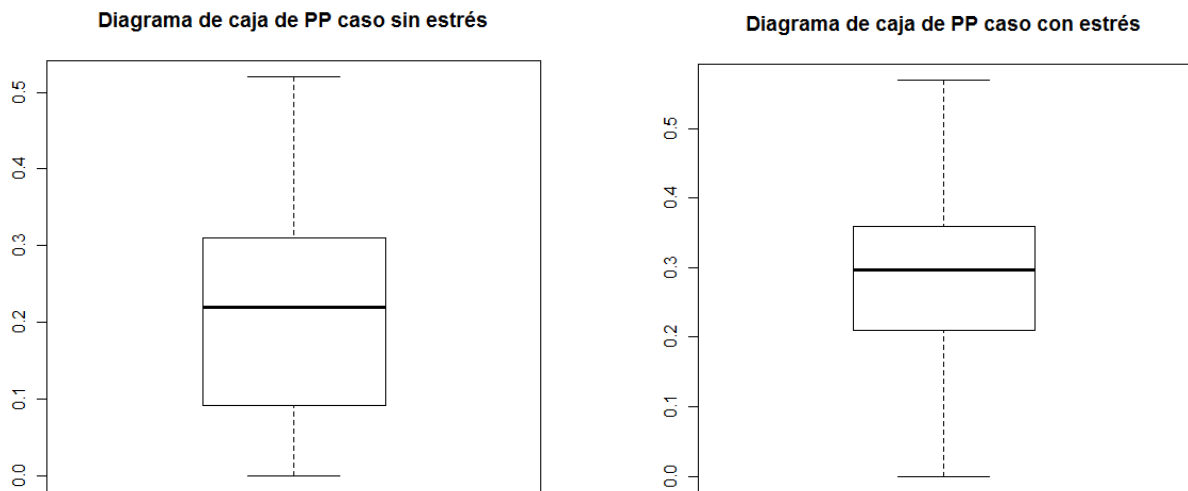


Figura 6.4: En la gráfica de la izquierda se observa el diagrama de caja de PP sin estrés, con la cual tenemos una idea de la densidad de esta. En la gráfica de la derecha tenemos lo mismo pero con estrés.

En la Figura 6.5 se ilustran los resultados para los dos regímenes, a la izquierda el caso sin estrés y a la derecha el caso con estrés.

En la Figura 6.5, izquierda, que corresponde al caso sin estrés, se observa que la tendencia es no monótona y que además se estabiliza a partir de un punto crítico. En este caso a partir de 100, la fracción de bancos salientes parece oscilar de una manera constante al rededor de un punto estable. Cosa que no sé observa en la gráfica de la derecha de la Figura 6.5. En esta última se observa que mas bien, tiene una tendencia decreciente lenta pero con oscilación grande. Esto hace notar que bajo estrés los bancos salientes son muy volátiles. Pudiendo ser de 1 a 50 en unos cuantos pasos.

Una manera de notar lo anteriormente mencionado con más detalle es observar los histogramas y la densidades empíricas que se calcularon. Tales gráficas se observan en la Figura 6.6, en ella se puede observar que la media de la proporción PBS en el caso sin estrés esta aproximadamente en 0.35. Mientras que para el caso con estrés, este es de aproximadamente de 0.55. Es decir, los bancos que salen del sistema conforme crece el número de participantes es de aproximadamente la mitad cuando hay estrés y una tercera parte cuando no hay estrés. Además, en el caso con estrés se observa que la amplitud de la densidad es mayor que en caso sin estrés, esto nos da una muestra más de que en el caso con estrés la variabilidad es mucho mayor que en ausencia de estrés. Esto ocasiona

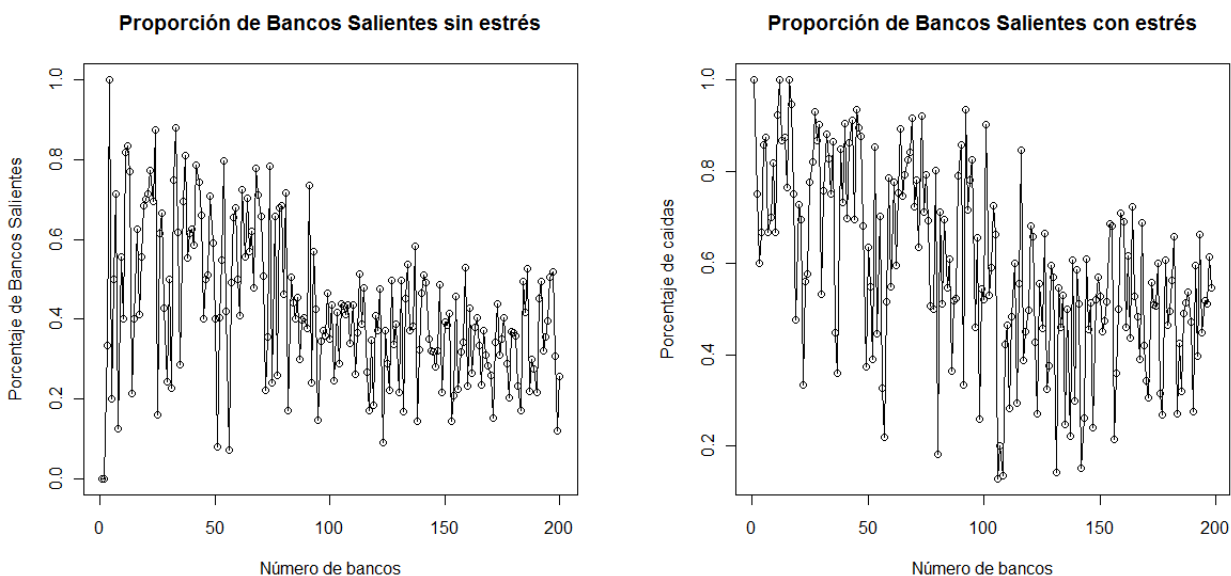


Figura 6.5: En la gráfica de la izquierda se observa la proporción de bancos salientes por el proceso de contagio en función del tamaño del sistema, caso sin estrés. En la gráfica de la derecha el caso con estrés.

problemas ya que hace mas difícil pronosticar la magnitud de la pérdida a causa de riesgo sistémico.

Finalmente comparando lass medias de PBS con las medias de la proporción PP observamos, que en promedio, cuando no hay estrés, el 65 % de los bancos en el sistema se quedan con el 88 % del dinero del sistema, ya que este no se pierde después del proceso de contagio. Por otro lado, en el caso con estrés el 45 % de los bancos en el sistema, que sobrevivieron al proceso de contagio, se quedan con el 70 % del dinero del sistema al final del proceso de contagio. Esto, en contraste con el valor del IRS, concluyen que ambos nos dicen que el estrés ocasiona un golpe fuerte al sistema. Sin embargo, el IRS no dice de cual es esa magnitud, de aquí que las fracciones PP y PBS sean de utilidad.

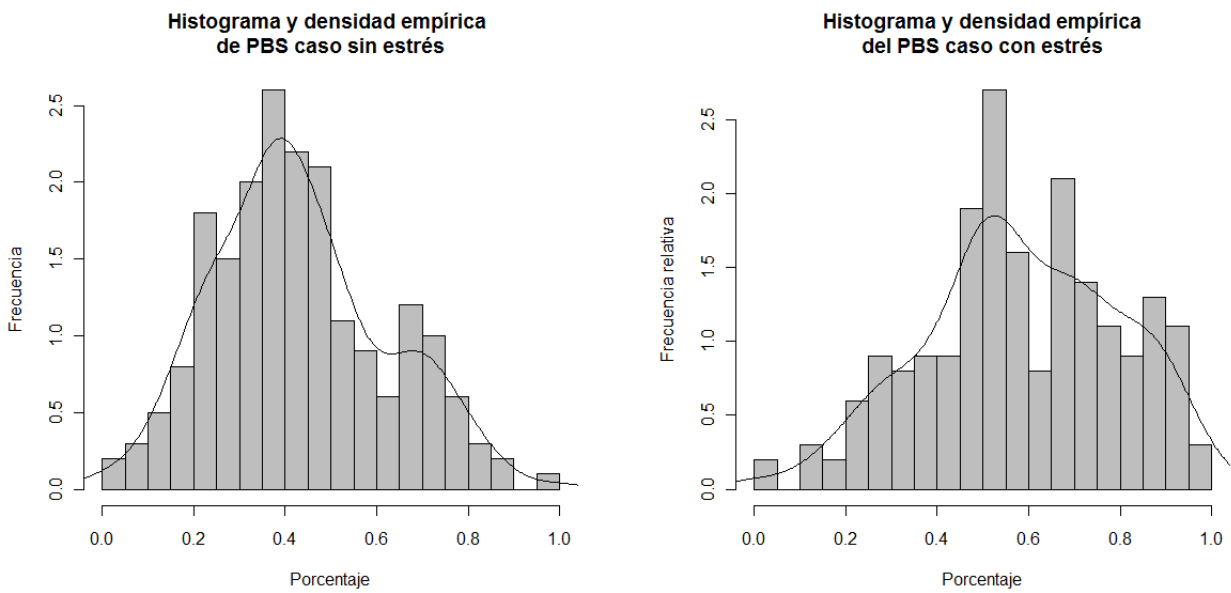


Figura 6.6: En la gráfica de la izquierda se observa el histograma y la densidad empírica de la proporción de bancos salientes por el proceso de contagio en función del tamaño del sistema, caso sin estrés. En la gráfica de la derecha el caso con estrés.

Bibliografía

- [1] F. Allen and A. Babus. Networks in finance. *Wharton Financial Institutions Center, Working Paper, Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1094883>*, (08-07), 2008.
- [2] K. Azuma. Weighted sums of certain dependent random variables. *Tôhoku Math. Journ.* 19, pages 357–367, 1967.
- [3] A. L. Barabasi and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286:509–512, 1999.
- [4] Basel Committee on Banking Supervision. Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. A Revised Framework. <http://www.bis.org/publ/bcbs107.htm>, 2004.
- [5] Basel Committee on Banking Supervision. Basel I: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. <http://www.bis.org/publ/bcbsc111.htm>, 1988.
- [6] S. Battiston, D. Delli Gatti, M. Gallegati, B. C. Greenwald, and J. S. Stiglitz. Liaisons dangereuses: Increasing connectivity, risk sharing, and systemic risk. *Working paper, National Bureau of Economic Research*, 2009.
- [7] B. Bollobás. Mathematical results on scale-free random graphs. *Preprint*, page 2003.
- [8] B. Bollobás and O. Riordan. The diameter of a scale-free random graph. *Combinatorica*, 24(1), 2004.
- [9] B. Bollobás and O. Riordan and J. Spencer and G. Tusnády. The degree sequence of a scale-free random graph process. *Random structures and algorithmms*, 18(3), 2001.
- [10] B. Bollobás, C. Borgs, J. Chayes, and O. Riordan. Directed Scale-Free Graphs. *Preprint*, pages 1–8.

-
- [11] M. Boss, H. Elsinger, M. Summer, and S. Thurner. An empirical analysis of the network structure of the austrian interbank market. *Oesterreichische Nationalbank Financial Stability Report*, pages 77–87, 2004.
- [12] J.A. Bondy, U.S.R. Murty. Graph Theory. *Springer Verlag*, 2008.
- [13] Butts. C. T. network: a Package for Managing Relational Data in R. *Journal of Statistical Software*, 24(2), 2008. <http://www.jstatsoft.org/v24/i02/>
- [14] J. H. Cochrane. Asset pricing. *Princeton University Press, Revised Edition*, 2005.
- [15] R. Cont. Measuring systemic risk: a network approach. *Financial Stability Review*, 2009.
- [16] R. Cont and A. Moussa. Too interconnected to fail: contagion and systemic risk in financial networks. *Working paper, Columbia Center for Financial Engineering*, 2009.
- [17] R. Cont and E. Tanimura. Small world graphs: characterization and alternative constructions. *Advances in Applied Probability*, 40(4), 2008.
- [18] J. Danielsson, P. Embrechts, C. Goodhart, C. Keating, F. Muennich, O. Renault, and H. S. Shin. An Academic Response to Basel II. *Financial Markets Group, Special Paper No. 130*, 2001.
- [19] Junta de Gobierno del Banco de México. Reporte sobre el sistema financiero. *Banco de México*, 2009.
- [20] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs i. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 5:290–297, 1959.
- [21] P. Erdős and A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl*, 5:17–61, 1960.
- [22] H. Föllmer and A. Schied. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastics*, 6(4):429–447, 2002.
- [23] W. Hoeffding. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J. Amer. Statist. Assoc.* 58, pages 13–30, 1963.
- [24] R. Kindermann and J. L. Snell. Markov random fields and their applications. *AMS, Providence*, 1980.
- [25] S. Markose, S. Giansante, Gatkowski M., and Shaghghi A. R. Too interconnected to fail: Financial network of CDS and other credit enhancement obligations of U.S. banks. *Prepared for discussion at the ECB Workshop on “Recent advances in modelling systemic risk using network analysis”*, 2009.

-
- [26] J. Márquez Diez Canedo and S. Martínez Jaramillo. A network model of systemic risk: stress testing the banking system. *Intelligent systems in accounting, finance and management*, 16:87–110, 2009.
- [27] J. Mueller. Interbank credit lines as a channel of contagion. *Journal of Financial Services Research*, (29):37–60, 2006.
- [28] V. V. Petrov. Limit theorems of probability theory. Number 4 in Oxford studies in probability. Oxford science publications, 1995.
- [29] D. H. Pyle. Banking risk management theory. *Research Program in Finance. Working Paper RPF-272*, pages 1–16, 1997.
- [30] G. Sheldon and M. Maurer. Interbank lending and systemic risk: an empirical analysis of switzerland. *Swiss Journal of Economics and Statistics*, 134:685–704, 1998.
- [31] K. Soramäki, M. L. Bech, J. Arnold, R. J. Glass, and W. E. Beyeler. The topology of interbank payment flows. *Federal Reserve Bank of New York*, (243):1–13, 2006.
- [32] Tsomocos. Equilibrium analysis, banking, contagion and financial fragility. *Works papers, bank of England*, 175, 2003.
- [33] S. Well. UK interbank exposures: systemic risk implications. *Financial Stability Review*, pages 175–182, 2002.

Apéndice A

En este apéndice se demuestra la desigualdad de concentración de Azuma [2] y Hoeffding [23] que enunciamos en el Teorema 15 de la Sección 4.4.

Demostración del Teorema 15.

1. Comenzamos con la siguiente observación

$$\mathbb{P}(\|X_m - X_0\| \geq a) = \mathbb{P}(X_m - X_0 \geq a) + \mathbb{P}(X_0 - X_m > a).$$

Por otro lado tenemos la desigualdad

$$\mathbb{P}(X_m - X_0 \geq a) + \mathbb{P}(X_0 - X_m > a) \leq \mathbb{P}(X_m - X_0 \geq a) + \mathbb{P}(X_0 - X_m \geq a).$$

Ahora definimos $Z_k := -X_k$. Con esta notación el término de la mano derecha de la desigualdad anterior se lee

$$\mathbb{P}(X_m - X_0 \geq a) + \mathbb{P}(Z_m - Z_0 \geq a).$$

De esto concluimos que para establecer la desigualdad de concentración (4.15) es suficiente con demostrar lo siguiente:

$$\mathbb{P}[X_m - X_0 \geq a] < \exp \left\{ \frac{-a^2}{2(c_1^2 + \dots + c_m^2)} \right\}, \quad (\text{A.1})$$

debido a que el proceso $\{Z_k\}_{k=0}^\infty$ es una martingala que satisface las condiciones del teorema.

2. En este paso demostraremos la siguiente desigualdad

$$\mathbb{E} \left(e^{\alpha(X_m - X_0)} \right) \leq e^{\left\{ \frac{\alpha^2 \sum_{k=1}^m c_k^2}{2} \right\}}. \quad (\text{A.2})$$

Para este fin, consideremos las variables aleatorias $Y_k = X_k - X_{k-1}$, estas nuevas v.a. cumplen que $\mathbb{E}[Y_k | X_{k-1}] = 0$ ya que que $(X_k)_{k=1}^\infty$ es una martingala. Ahora consideremos la función convexa $f(x) = e^x$ y

$$\lambda_k = \frac{1 + Y_k/c_k}{2} < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.3})$$

La fórmula A.3 es válida ya que $Y_k \leq |X_k - X_{k-1}| < c_k$. De esta manera tenemos que

$$\lambda_k c_k + (1 - \lambda_k)(-c_k) = c_k \frac{1 + Y_k/c_k}{2} - c_k \frac{1 - Y_k/c_k}{2} = Y_k \quad (\text{A.4})$$

Así, por ser f convexa y A.4 tenemos

$$\begin{aligned} e^{\alpha Y_k} &\leq \lambda_k e^{\alpha c_k} + (1 - \lambda_k) e^{-\alpha c_k} \\ &\leq e^{\alpha c_k} \frac{1 + Y_k/c_k}{2} + e^{-\alpha c_k} \frac{1 - Y_k/c_k}{2} \\ &= \frac{1}{2}(e^{\alpha c_k} + e^{-\alpha c_k}) + \frac{Y_k}{2c_k}(e^{\alpha c_k} - e^{-\alpha c_k}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\alpha Y_k} | X_{k-1}) &\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(e^{\alpha c_k} + e^{-\alpha c_k}) + \frac{Y_k}{2c_k}(e^{\alpha c_k} - e^{-\alpha c_k}) \mid X_{k-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}(e^{\alpha c_k} + e^{-\alpha c_k}) + \frac{\mathbb{E}(Y_k | X_{k-1})}{2c_k}(e^{\alpha c_k} - e^{-\alpha c_k}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{\alpha c_k} + e^{-\alpha c_k}). \end{aligned}$$

Además tenemos que $-\alpha c_k < \alpha c_k \leq \alpha^2 c_k^2/2$. Por lo tanto, $\mathbb{E}(e^{\alpha Y_k} | X_{k-1}) \leq e^{\alpha^2 c_k^2/2}$. Utilizando esta cota observamos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(e^{\alpha(X_m - X_0)} \right) &= \mathbb{E} \left(e^{\alpha \sum_{k=1}^m (X_k - X_{k-1})} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\prod_{k=1}^m e^{\alpha Y_k} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\prod_{k=1}^m \mathbb{E} \left(e^{\alpha Y_k} \mid X_{m-1} \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\prod_{k=1}^{m-1} e^{\alpha Y_k} \mathbb{E} \left(e^{\alpha Y_m} \mid X_{m-1} \right) \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(e^{\alpha^2 c_m^2 / 2} \prod_{k=1}^{m-1} e^{\alpha Y_k} \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(e^{\alpha^2 c_m^2 / 2} e^{\alpha^2 c_{m-1}^2 / 2} \prod_{k=1}^{m-2} e^{\alpha Y_k} \right) \\
&\vdots \\
&\leq \mathbb{E} \left(e^{\alpha^2 c_m^2 / 2} e^{\alpha^2 c_{m-1}^2 / 2} \dots e^{\alpha^2 c_1^2 / 2} \right) \\
&= e^{\left\{ \frac{\alpha^2 \sum_{k=1}^m c_k^2}{2} \right\}}.
\end{aligned}$$

Esto establece la desigualdad (A.2).

3. Ahora utilizando la desigualdad de Markov obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_m - X_0 \geq a) &= \mathbb{P}(e^{\alpha(X_m - X_0)} \geq e^{\alpha a}) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}(e^{\alpha(X_m - X_0)})}{e^{\alpha a}} \\
&\leq \frac{e^{\left\{ \frac{\alpha^2 \sum_{k=1}^m c_k^2}{2} \right\}}}{e^{\alpha a}} \\
&= \exp \left\{ \frac{\alpha^2 \sum_{k=1}^m c_k^2}{2} - \alpha a \right\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando α que minimice la función

$$g(\alpha) = \frac{\alpha^2 \sum_{k=1}^m c_k^2}{2} - \alpha a$$

tenemos que $\alpha_{\min} = \frac{a}{\sum_{k=1}^m c_k^2}$. Con esto concluimos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_m - X_0 \geq a) &\leq \exp \left\{ \frac{\alpha_{\min}^2 \sum_{k=1}^m c_k^2}{2} - \alpha_{\min} a \right\} \\
 &= \exp \left\{ \frac{\left(\frac{a}{\sum_{k=1}^m c_k^2} \right)^2 \sum_{k=1}^m c_k^2}{2} - \frac{a}{\sum_{k=1}^m c_k^2} a \right\} \\
 &= \exp \left\{ \frac{a^2}{2 \sum_{k=1}^m c_k^2} - \frac{a^2}{\sum_{k=1}^m c_k^2} \right\} \\
 &= \exp \left\{ \frac{-a^2}{2 \sum_{k=1}^m c_k^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

■

Apéndice B

En este apéndice se presenta el simulador desarrollado en el lenguaje R que se utilizó en las simulaciones del Capítulo 6.

B.1. Simulación del grafo de inicio

En esta sección describiremos el programa hecho para simular las relaciones interbancarias mediante el modelo de Bollobás et al. Primero se dará una breve explicación del paquete *network* elaborado por Butts [13] el cual se utilizó para hacer la gráficas y para manejar algunos cambios en el grafo resultante. Después se mostrará el código y se explicará su funcionamiento, para al final presentar los resultados de las simulaciones variando los parámetros del modelo de Bollobás

B.1.1. Paquete *network*

El paquete *network* provee de una herramienta que muchos pueden usar para codificar información sobre relaciones complejas en una estructura compuesta por un conjunto de vértices junto con un conjunto de relaciones en cualquier combinación como lo son: con dirección o sin dirección, ponderadas o no ponderadas, hipergrafos y con multirelaciones o bucles. Además, este paquete provee una estructura simple, interfaces y funciones para visualizar los grafos en un conjunto de comandos y operadores fáciles para el usuario final.

Los comandos que usamos en el desarrollo del simulador son los descritos a continuación:

network Este comando toma una matriz y la asocia con la matriz adyacente de un grafo. La utilización de este comando es como sigue:

```
G<-network(x, vertex.attr=NULL, vertex.attrnames=NULL, directed=TRUE,
hyper=FALSE, loops=FALSE, multiple=FALSE, bipartite = FALSE, ...)
```

A continuación mencionamos la descripción de algunos argumentos que se utilizaron en la simulación, los demás argumentos se describen en [13].

<code>x</code>	Matriz que le dá a <code>network</code> la estructura de una matriz adyacente, incidente o una forma de lista de conexiones. En otro caso el objeto se clasifica como red.
<code>directed</code>	Argumento lógico. Con valor T o F para TRUE o FALSE. En este argumento se decide si el grafo que se quiere manejar es direccionado, utilizando T o F para tal decisión.
<code>...</code>	otros argumentos que se deseen agregar.

Otros comandos de utilidad son: `network.copy` este comando copia un grafo dado con todos sus argumentos posibles; `as.network` convierte un objeto, usualmente una matriz o una lista, a un grafo; `is.network` este comando verifica si un objeto es un grafo o no; `print.network` este comando imprime en pantalla un grafo de todas la maneras posibles incluyendo una lista de sus atributos; `summary.network` este comando imprime en pantalla un resumen del grafo similar al que genera `print.network`.

plot.network.default Este comando produce un gráfico en dos dimensiones de una red (grafo) `x`, en varios modos como lo son: en círculo, vertical, en función de los in-degrees y out-degrees, etc. Este comando se usa de la siguiente manera:

```
plot.network(x, attrname = NULL, label = network.vertex.names(x),
coord = NULL, jitter = TRUE, thresh = 0, usearrows = TRUE, mode =
"fruchtermanreingold",
displayisolates = TRUE, interactive = FALSE, xlab = NULL, ylab =
NULL, xlim = NULL, ylim = NULL, pad = 0.2, label.pad =
0.5, displaylabels = !missing(label), boxed.labels = TRUE, label.pos
= 0, label.bg = "white", vertex.sides = 8, vertex.rot = 0,
arrowhead.cex = 1, label.cex = 1, loop.cex = 1, vertex.cex = 1,
edge.col = 1, label.col = 1, vertex.col = 2, label.border = 1,
vertex.border = 1, edge.lty = 1, label.lty = NULL, vertex.lty = 1,
edge.lwd = 0, label.lwd = par("lwd"), edge.len = 0.5, edge.curve =
0.1, edge.steps = 50, loop.steps = 20, object.scale = 0.01, uselen =
FALSE, usecurve = FALSE, suppress.axes = TRUE, vertices.last = TRUE,
new = TRUE, layout.par = NULL, ...)
```

A continuación describiremos los argumentos que se usaron en la simulación. Para el resto de los argumentos de este comando referirse a [13].

<code>x</code>	Se refiere al grafo que se quiere visualizar en una gráfica bidimensional.
<code>boxed.labels</code>	Argumento booleano. Con valor T o F si se quiere ver los recuadros de las etiquetas.
<code>displaylabels</code>	Argumento booleano. Con valor T o F según si se quiere que las etiquetas guardadas como atributos se visualicen en el plot.
<code>mode</code>	Argumento de forma. Este puede ser <code>circle</code> o <code>degree</code> . Este último necesita que el grafo que se quiera visualizar este definido como una función. Si no se incorpora este argumento al comando <code>plot.network</code> , el grafo visualizado será como una maraña.
<code>...</code>	Más argumentos que sean del comando <code>plot</code> , como <code>color</code> .

B.1.2. Código del programa.

Ahora se presenta el programa hecho en el lenguaje R. Este código fue elaborado pensando en hacer un programa simple, pero que sea adecuado para los fines de esta tesis. El código fuente es:

```

1. nv<-# numero de vértices
2. alpha<- $\alpha$ 
3. beta<- $\beta$ 
4. gamma<- $\gamma$ 
5. deltain<- $\delta_{in}$ 
6. deltaout<- $\delta_{out}$ 
7.
8. I<-matrix(c(rep(0,1)),1,1) # matriz inicial, solo un vértice sin conexiones
9.
10. PrGAB<-function(alpha,beta,gamma,deltain,deltaout,nv,I) {
11.   p<-c(alpha,beta,gamma)
12.   GD<-list(NULL) # proceso de grafos aleatorio
13.   GD[[1]]<-I
14.   i<-1
15.   Nt<-2
16.   while(Nt< nv){
17.     i<-i+1
18.     din<-c()
19.     dout<-c()
20.     pin<-c()
21.     pout<-c()
22.     A<-as.matrix(GD[[i-1]])
23.     Nt<-dim(A)[1]

```

```

24.         for(j in 1:Nt){
25.             din[j]<-sum(A[,j])
26.             dout[j]<-sum(A[j,])
27.             pout[j]<-(dout[j]+deltaout)/(i+deltaout*Nt)
28.             pin[j]<-(din[j]+deltain)/(i+deltain*Nt)
29.         }
30.
31.     d<-sample(c(1,2,3),1,prob=p) # desición (A=1)(B=2)(C=3)
32.
33.         if(d==1){
34.             lin<-sample(c(seq(1,Nt,1)),1,prob=pin)
35.             x<-c(rep(0,Nt))
36.             x[lin]<-1
37.             GD[[i]]<-cbind(rbind(A,as.vector(x)),c(rep(0,Nt+1)))
38.         }
39.         else if(d==2){
40.             a<-sample(c(seq(1,dim(A)[1],1)),1,prob=pin)
41.             b<-sample(c(seq(1,dim(A)[1],1)),1,prob=pout)
42.             A[a,b]<-1
43.             GD[[i]]<-A
44.         }
45.         else if(d==3){
46.             lout<-sample(c(seq(1,Nt,1)),1,prob=pout)
47.             y<-c(rep(0,Nt+1))
48.             y[lout]<-1
49.             GD[[i]]<-cbind(rbind(A,c(rep(0,Nt))),as.vector(y))
50.         }
51.     }
52. return(GD)
53.     }
54.
55. for(i in 1:length(GD)){
56. g<-network(GD[[i]],directed=T)
57. plot.network.default (g,displaylabels=F,boxed.labels=F,mode='circle')
58. Sys.sleep(1)
59. }

```

Este programa esta hecho en forma de función y esta dividido en dos partes. La primera parte corresponde a las definiciones de las constantes y algunas variables que se utilizarán en todo el programa. La segunda parte corresponde al cuerpo del programa, en el cual se ejecutan las decisiones fundamentales.

La primera parte corresponde a las líneas 1 al 9 se definen las constantes que el modelo de Bollobás et al. [10] sugiere. En las líneas 18, 19, 20 y 21 cabe sobresaltar el comando `d<-c()` este indica que se generará un vector de longitud no especificada, esto es, el vector `d` tendrá la longitud que el ciclo `for` o el usuario elija. En la línea 8 se define lo que el modelo de Bollobás llama el grafo de inicio G_0 . En la línea 12 se genera una lista, la cual guardará en memoria el proceso de grafos aleatorios que describe el modelo de Bollobás et al. [10]. Esta lista no es una matriz que el comando `network` reconozca, así que hay que convertir este en una matriz. Al igual que el comando `c()`, el comando `list(NULL)` genera una lista de tamaño indeterminado. Finalmente la línea 13 indica que el primer elemento de la lista será el grafo G_0 .

La segunda parte corresponde a las líneas 14-53. Este bloque inicia con la línea 16, en ella se inicia un ciclo `while` el cual controlará el número de vértices que el proceso de grafos aleatorios tendrá. De la línea 24 a la 29, se definen los parámetros que se utilizan para calcular las probabilidades de creación de un vértice o de una conexión. Además, en este sub-bloque se toma un elemento de la lista y se convierte en una matriz con el comando `as.matrix` y en base a esta matriz, en la línea 23, se define el proceso aleatorio η_t .

De la línea 24 a la 29 se realiza un ciclo `for` en el cual se calcula las probabilidades de selección de un nuevo vértice según la proporción de $d_{in} + \delta_{in}$ y $d_{out} + \delta_{out}$ como lo define el modelo de Bollobás et al. [10]. Estas probabilidades son las que los vértices tiene de ser elegidas en la iteración i -ésima. En la línea 31 se elige cual será la evolución del grafo, es decir, de modo A con probabilidad α , B con probabilidad β y C con probabilidad γ como se define en el modelo.

Ahora en las líneas 33 a la 50, el programa calcula el grafo $G(t_i)$ a partir del grafo $G(t_{i-1})$ según sea el modo de crecimiento, es decir, A, B o C. En cada caso se calcula la matriz adyacente del grafo $G(t_i)$ de la siguiente manera: primero se crea un vértice `x` y se elige su conexión según el modo de crecimiento del grafo. Por ejemplo en el caso A el comando `sample(c(seq(1,Nt,1)),1,prob=pin)` elige la conexión con probabilidad `pin` que corresponde a la proporción $d_{in} + \delta_{in}$. Luego se toma la matriz adyacente del grafo $G(t_{i-1})$, definido como `A` y se le anexa la fila `x` con el comando `rbind` y después para hacer la matriz cuadrada se anexa la columna `c(rep(0,Nt+1))` con el comando `cbind`. Finalmente esta nueva matriz se guarda en la lista `GD` para así crear el grafo $G(t_i)$. Análogamente se hace para el caso C. Mientras que para el caso B, solo se eligen las coordenadas en la cual se anexará una conexión, usando el comando `sample`.

Finalmente en las líneas 55-59 se generan el proceso de grafos aleatorios $(G(t_i)_{i=1}^t)$ (`g`) en base a las matrices adyacentes de la lista `GD` usando el comando `network`. Después este proceso se grafica con ayuda del comando `plot.network.default` explicado anteriormente.

Con este programa podemos obtener las relaciones que tienen las instituciones fi-

nancieras en un sistema bancario, basta especificar los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta_{in}$ y δ_{out} para generar el proceso de grafos aleatorios que generan tales relaciones. Otra manera de especificar estos parámetros es usando el Teorema 14 para estimar los parámetros de la distribución del in-degree y el out-degree y así despejar los valores de los cinco parámetros anteriores.

Este programa en forma de función ahora es fácil de implementar ya que solo se proporcionan los cinco parámetros que el modelo requiere escribiendo $\text{PrGAB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta_{in}, \delta_{out}, V(G), G(t_0))$.

B.1.3. Resultados

A continuación pondremos algunas simulaciones de grafos aleatorios usando el programa anterior y daremos algunas características de estos:

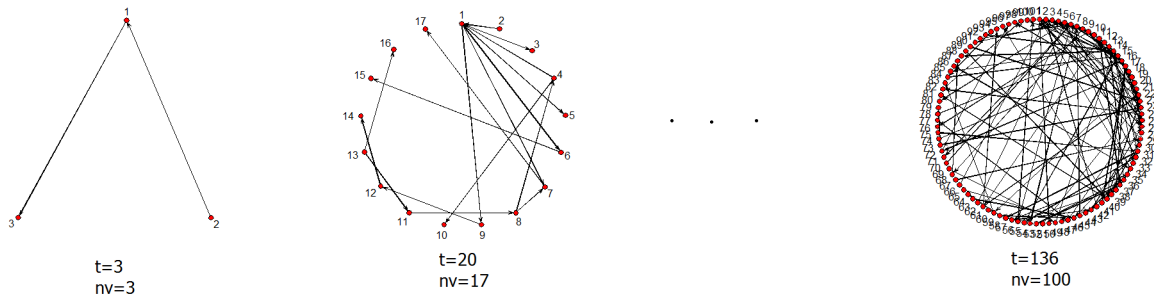


Figura B.1: Grafo aleatorio con el modelo de Bollobás et al. [10] con $\alpha = 0,3, \beta = 0,3, \gamma = 0,4, \delta_{in} = 1, \delta_{out} = 1, nv = 100$.

En el grafo anterior podemos sacar los histogramas de el in-grado y out-grado, y en ellos ver que en efecto siguen una ley de potencias.

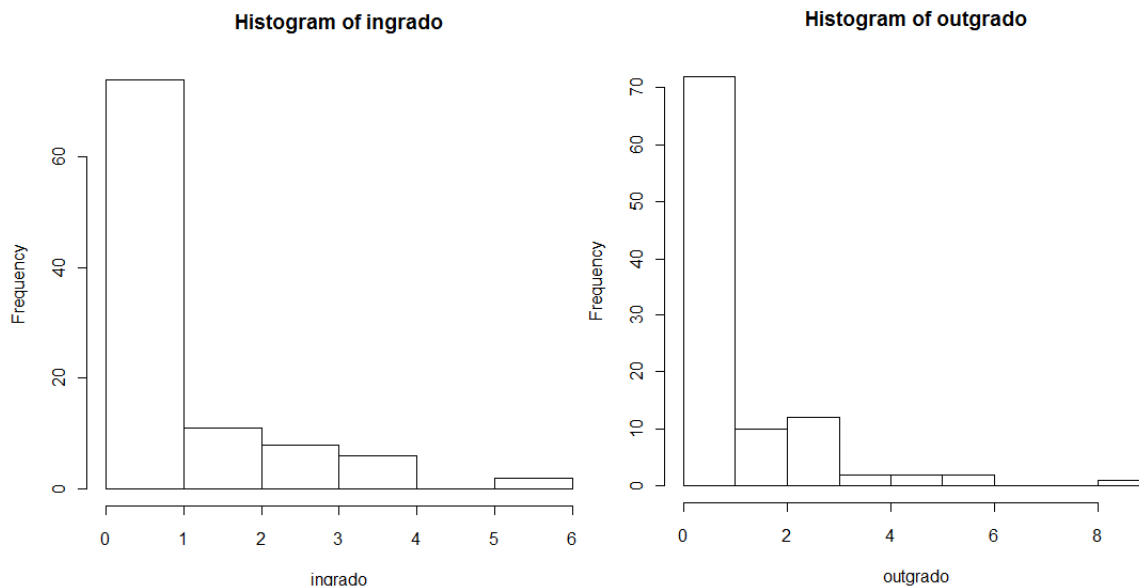


Figura B.2: Histograma del in-grado y out-grado del grafo simulado anterior.

B.2. Simulación del proceso de contagio.

En esta sección mostraremos el programa hecho para la simulación del proceso de contagio. En la primera parte se mostrará la simulación del modelo en el cual el sistema bancario está bajo estrés, las obligaciones están simuladas por una distribución de cola pesada y las reservas de liquidez por medio de una distribución Pareto (a,b) . Las reservas de liquidez serán perturbadas mediante una distribución F multivariada con dependencias simuladas por la cópula Gaussiana y marginales $F_n \sim \text{Pareto}(a, b)$.

Para simular el proceso de contagio también se usó el lenguaje de programación R. Como antes se mencionó además se utilizó el paquete `network` para manejar los grafos. Principalmente se trabajó con las matrices adyacentes de los grafos ponderados. En el programa se definieron funciones para calcular las solvencias, actualizaciones de las reservas de liquidez, etc. El código fuente que se utilizó es el siguiente:

```

1.
2.  Nb<-200
3.  perdida<-c()
4.  caidos<-c()
5.  totalincumplimientos<-c()
6.  for(i in 3:Nb){
7.    GC<-list(NULL)          # proceso de reservas de liquidez

```

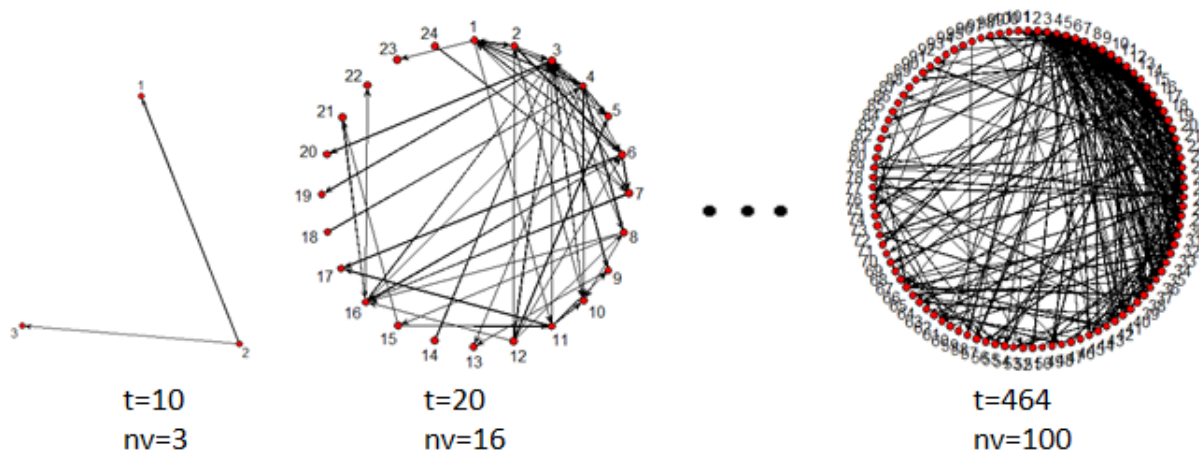



Figura B.3: Grafo aleatorio con el modelo de Bollobás et al. [10] con $\alpha = 0,1, \beta = 0,8, \gamma = 0,1, \delta_{in} = 1, \delta_{out} = 1, nv = 100$.

```

8.  GPC<-list(NULL)      # proceso de contagio
9.  MAGPC<-list(NULL)# matrices de adyacencias de los grafos.
10. Dk<-list(NULL)      # conjuntos de instituciones que caen en incumplimiento
11. S<-list(NULL)       # proceso de solvencias
13. E<-c()
14. DI<-c()             # Default impact
15. R<-0.3              # tasa de recuperación
16.
17. GD<-PrGAB(.2,.6,.2,1,4,10,I)      # Generación del grafo inicial
18. GPC[[1]]<-network(as.matrix(GD,directed=T)) # Grafo inicial.
19. MGPC<-as.matrix(GPC[[1]])         # Matriz de adyacencias no ponderado
20.
21. E<-OIRL(MGPC,0.08)
22. MAGPC[[1]]<-as.matrix(round(E[[1]],2)) # Matriz de adyacencias ponderado
23.
#----- Cópula Gaussiana -----
24. d<-dim(MGPC)[[1]]
25. NX<-SMCP(d,.4,E[[2]],2,3,2*mean(E[[2]])/3)
#-----
26.
27. VGC<-E[[2]]          # Vector de reservas de liquidez al 8%
28. #Dk[[1]]<-2          # Banco que falla al inicio. Choque inicia
29. GC[[1]]<-VGC         # Lista de las reservas de liquidez
30. S[[1]]<-Solvencia(VGC,MAGPC[[1]],0) # Solvencias iniciales dadas por el
31.                                     # grafo inicial y
32. Dk[[1]]<-ACI(S[[1]],MAGPC[[1]])    # Bancos que caen en incumplimiento

```

```

33.                                     # al inicio t=0.
34. MGL<-MAGPC[[1]]                    # Se define la matriz de obligaciones inicial
35. dk<-Dk[[1]]                        # Se inicializa el contador dk
36. DI[1]<-ARL(R,dk,VGC,MGL)[[2]]
37. MGL[dk,]<-0                         # Salen del sistema los bancos que cayeron
38. MGL[,dk]<-0                         # en incumplimiento al inicio
39. k<-2                                # inicialización del contador
40.
41. while(length(dk)>0){                 # tiempo de paro
42.   MAGPC[[k]]<-MGL                   # Se define la k-esima matriz de obligacio
43.   GPC[[k]]<-network(MGL,directed=T) # Se calcula el k-esimo grafo
44.
45.   GC[[k]]<-as.vector(ARL(R,dk,as.vector(GC[[k-1]]),MGL)[[1]])
46.   VGC<-GC[[k]]
47.   S[[k]]<-Solvencia(VGC,MGL,dk)
48.   if(length(as.integer(ACI(S[[k]],MAGPC[[k]])))==0) #El conjunto Dk es vacio?
49.     {dk<-0
50.      Dk[[k]]<-'Vacio'
51.      break()}
52.
53.   Dk[[k]]<-ACI(S[[k]],MAGPC[[k]])
54.   dk<-Dk[[k]]                       # Se define el k-esimo contador
55.   MGL[dk,]<-0                         # Salen del sistema los bancos que cayeron
56.   MGL[,dk]<-0                         # en incumplimiento en el k-esimo paso.
57.   DI[k]<-ARL(R,Dk[[k]],as.vector(GC[[k]]),MAGPC[[k]])[[2]]
58.   k<-k+1
59. }
60. perdida[i]<-sum(DI)
61. L<-c()
62. for(m in 1:length(Dk)){L[m]<-length(Dk[[m]])}
63. caidos[i]<-sum(L)-1
64. totalincumplimientos[i]<-sum(MAGPC[[1]])
65. }

```