Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

CIMAT

Soluciones KAM Débiles de una Ecuación de Hamilton-Jacobi a Tiempo Discreto en un Contexto Minimax

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A

Porfirio Toledo Hernández

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Renato Gabriel Iturriaga Acevedo

Mayo 13 de 2011. Guanajuato, Gto. México.

Para Tita.

Agradecimientos

Agradezco de manera muy especial a Renato por la dirección de este trabajo de tesis; siempre me enseñó que, sobre cualquier otra cosa, hay que disfrutar lo que hacemos, en particular las matemáticas. Gracias también por todas esas horas de discusión sobre el trabajo.

A mis sinodales Gonzalo Contreras, Daniel Hernández, Onésimo Hernández y Pablo Padilla, por la revisión del trabajo y todos sus valiosos comentarios.

Con todo mi cariño a mi familia Tere, Monse, Luis, Claudia, Javier, Ligia, Abel y Carlos, por el apoyo que siempre me han brindado en todos los sentidos.

Gracias al CIMAT por darme la oportunidad de realizar mis estudios de doctorado, así como a la Universidad Veracruzana y la beca PROMEP Folio UVER-418 por el apoyo económico de 2005 a 2009.

Contenido

Capítulo 1

Introducción

La ecuación de Hamilton-Jacobi aparece en diversas áreas de las Matemáticas, en particular es una herramienta muy importante para el estudio de los Sistemas Lagrangianos y de la Teoría de Control en general. En el caso de Lagrangianos convexos, Fathi, Mather y Mañé han perfeccionado diversas técnicas para comprender las soluciones de dicha ecuación ([Fat97], [Fat98], [Fat08], [FS04], [Mat91], [Man93], [Man97]). Estas técnicas pueden traducirse fácilmente al caso discreto en donde, en lugar de un Lagrangiano, se tiene una función $V(x, y)$ de dos variables en el espacio de configuraciones.

El objetivo del presente trabajo es estudiar un sistema discreto que pretende emular a un Lagrangiano convexo en unas variables y cóncavo en otras. Esto lleva a estudiar el comportamiento de las soluciones de una versión a tiempo discreto de la ecuación de Hamilton-Jacobi en un contexto minimax de Teoría de Juegos. Las soluciones de este problema representan el pago optimal que debería de hacerse asintóticamente. Para esto se modela el comportamiento con tiempos cada vez más largos de los pagos en un juego de dos jugadores con suma cero, en donde el número de jugadas alternadas entre los jugadores converge a infinito. Un numero real, llamado valor crítico, juega un papel central en el trabajo; dicho número es el promedio asintótico de la acción sobre trayectorias optimales. El problema de estudio de este trabajo es la existencia y caracterización de soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente a este tipo de juegos. Uno de los aspectos relevantes de las técnicas desarrolladas a lo largo del trabajo es que permiten estudiar juegos a tiempo infinito sin utilizar factores de descuento o acciones promedio.

Considérense M y N espacios métricos compactos, mismos que son los espacios de estados para los jugadores J_M y J_N respectivamente y una función $P : M \times N \to \mathbb{R}$ que es el pago de un juego estático. La función P es la cantidad que el jugador J_M obtiene de J_N y viceversa, de esta manera el jugador J_M buscará maximizar el pago del juego P, mientras que el jugador J_N pretenderá minimizarlo. El valor inferior del pago de un juego estático se define por

$$\mathcal{L} := \sup_{w \in M} \inf_{z \in N} P(w, z). \tag{1.1}$$

La clásica desigualdad, en donde el lado derecho es el valor superior del pago del juego,

$$\sup_{w \in M} \inf_{z \in N} P(w, z) \leq \inf_{z \in N} \sup_{w \in M} P(w, z),$$

se interpreta como que el jugador que comienza el juego tiene desventaja, pues el valor inferior del juego a la izquierda de la desigualdad modela el hecho de que el jugador J_M da un punto $w \in M$, luego J_N escoge $z^* = z^*(w) \in N$ para minimizar el pago y finalmente J_M escoge $w^* \in M$ para maximizar. De esta forma el jugador J_M que pretende maximizar su ganancia obtiene un valor del pago más pequeño que, cuando al considerar el valor superior del juego, el jugador J_N quien pretende minimizar el pago empieza a jugar, lo cual se modela en la parte derecha de la desigualdad. Lo anterior se debe a que al considerar el valor inferior del juego, el jugador J_N posee información de la jugada que realiza J_M inicialmente, lo cual le permite tomar una mejor decisión.

Se observa en [FS06] que es posible expresar el valor (1.1) de la siguiente manera

$$\mathcal{L} = \inf_{\theta(w)} \sup_{w \in M} P(w, \theta(w)),$$

con $\theta : M \to N$. Se dice que la función θ es una estrategia para el jugador J_N. El uso de este tipo de funciones será muy importante a lo largo del trabajo, en donde se definirán de forma más general.

Considérese ahora el problema de un juego con horizonte finito a tiempo $n \in \mathbb{Z}^+$, en donde los jugadores J_M y J_N alternan sus jugadas comenzando en el estado inicial (x_0, y_0) y estableciendo con éstas las funciones de estado o trayectorias determinadas por sucesiones finitas $\overline{x}(n) \subset M$ y $\overline{y}(n) \subset N$, denotadas por $\overline{x}(n) := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $\overline{y}(n) := \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ respectivamente. El estado del sistema depende de la elección que tomen los jugadores para moverse del punto (x_i, y_i) al punto (x_{i+1}, y_{i+1}) y la condición inicial

(x_0, y_0), en donde $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Para $(x, y) \in M \times N$, denótese por

$$S_M(x,n) := \{\overline{x}(n) = \{x_i\}_{i=0}^{n} : x_0 = x\},$$
$$S_N(y,n) := \{\overline{y}(n) = \{y_i\}_{i=0}^{n} : y_0 = y\},$$

a los conjuntos de sucesiones finitas a tiempo n en M y N, con estados iniciales $x \in M$, $y \in N$.

Para un punto $(x, y) \in M \times N$ y $V : M \times N \times M \times N \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz, se define la acción o costo al tiempo n por

$$A^n(\overline{x}(n), \overline{y}(n)) := \sum_{i=0}^{n-1} V(x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}).$$

Dada una función continua $g : M \times N \to \mathbb{R}$, se define el pago del juego $P_g : S_M(x,n) \times S_N(y,n) \to \mathbb{R}$ por

$$P_g(\overline{x}(n), \overline{y}(n)) := g(x_n, y_n) - A^n(\overline{x}(n), \overline{y}(n)).$$

En este caso el valor inferior del juego se puede obtener paso a paso, comenzando en los estados iniciales. Considerando un punto $x_i \in M$, J_N escoge y_i para minimizar el pago, con $y_i = y_i(x_i)$ dependiendo de x_i y los puntos anteriores, y entonces el jugador J_M escoge x_i para maximizar el pago, comenzando en el estado inicial $(x, y) \in M \times N$. En forma más precisa, el valor inferior del pago del juego con horizonte finito a tiempo n con estado inicial $(x, y) \in M \times N$, se define por

$$\mathcal{L}^n g(x,y) := \sup_{x_1 \in M} \inf_{y_1 \in N} \sup_{x_2 \in M} \inf_{y_2 \in N} \cdots \sup_{x_n \in M} \inf_{y_n \in N} P_g(\overline{x}(n), \overline{y}(n)),$$

con $\overline{x}(n) = \{x, x_1, \ldots, x_n\} \in S_M(x,n)$ y $\overline{y}(n) = \{y, y_1, \ldots, y_n\} \in S_N(y,n)$.

En el presente trabajo se calculará de otra manera el valor inferior del juego, extendiendo el concepto de estrategia del juego estático a este caso, definiendo estrategias progresivas (ver [BCD97], [ES84], [FS06]). La idea es utilizar una herramienta que le permita al jugador J_N seleccionar un punto y_i conociendo las elecciones actual y pasadas del oponente, sin conocer las elecciones futuras. Con este fin, se define una estrategia progresiva $\Theta(n)$ para el jugador J_N como una función $\Theta(n) : S_M(x,n) \to S_N(y,n)$ con la siguiente propiedad: para cada $m \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \le m \le n$ y $\overline{x}(n), \overline{z}(n) \in S_M(x,n)$, se cumple

$$x_i = z_i,\ 0 \le i \le m \Rightarrow \Theta(n)[\overline{x}(n)]_i = \Theta(n)[\overline{z}(n)]_i,\ 0 \le i \le m,$$

en donde $\Theta(n)[\overline{x}(n)]_i$ es el $i-$ésimo elemento en la sucesión $\Theta(n)[\overline{x}(n)] \in S_N(y,n)$. Se denotará al conjunto de estrategias progresivas para el jugador J_N como

$$\mathcal{E}_N(x,y,n) := \{\Theta(n) : S_M(x,n) \to S_N(y,n) \text{ estrategia progresiva}\}.$$

Finalmente, el valor inferior del pago del juego se puede expresar como

$$\mathcal{L}^n g(x,y) = \inf_{\Theta(n)} \sup_{\overline{x}(n)} P_g(\overline{x}(n), \Theta(n)[\overline{x}(n)]), \tag{1.2}$$

con $\overline{x}(n) \in S_M(x,n)$ y $\Theta(n) \in \mathcal{E}_N(x,y,n)$. A esta función se le llamará operador de Lax, cuyo comportamiento será primordial para comprender el desarrollo asistótico de los pagos del juego.

En el Capítulo 2 de este trabajo el objetivo es demostrar la existencia de un punto fijo del operador de Lax. Esto se hará adaptando los métodos desarrollados en el trabajo de Fathi (ver [Fat08]) de la Teoría Weak KAM, ahora a un contexto minimax de Teoría de Juegos. Por lo que será necesario probar que el operador de Lax $\mathcal{L}^n$, definido como en (1.2), satisface algunas propiedades importantes: la propiedad de semigrupo también llamada Principio de Programación Dinámica (ver [BCD97], [ES84], [FS06]) y las propiedades de regularización, monotonía y contracción débil.

Si $C(M \times N, \mathbb{R}) = \{g : M \times N \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$, se probará en particular el siguiente resultado.

Teorema 1 *Si M y N son espacios métricos compactos y $V : M \times N \times M \times N \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz, entonces existe una función Lipschitz $u \in C(M \times N, \mathbb{R})$ y una única constante $c \in \mathbb{R}$, tales que*

$$\mathcal{L}^n u = u + nc.$$

Las funciones mencionadas en el resultado anterior se llamarán puntos fijos del operador de Lax con constante c, esta última recibe el nombre de valor crítico. Estos puntos fijos serán soluciones de la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi a tiempo discreto asociada a V,

$$\sup_{x_1 \in M} \inf_{y_1 \in N} \{u(x_1,y_1) - u(x,y) - V(x,y,x_1,y_1)\} = c.$$

Ver [Gom05] para el caso a tiempo discreto en donde se busca minimizar.

En el Capítulo 3 se considerará un juego con horizonte infinito lo cual ayudará a mostrar una caracterización diferente del número c del Teorema 1. Para esto, se define la barrera inferior de Peierls h_k^- de la siguiente manera, dado un número real k y el estado inicial $(x, y) \in M \times N$,

$$h_k^-(x,y) := \liminf_{n\to\infty} \left\{ \sup_{\Theta(n)} \inf_{\overline{x}(n)} A^n\left(\overline{x}(n), \Theta(n)\left[\overline{x}(n)\right]\right) + nk \right\},$$

en donde $\overline{x}(n) \in S_M(x,n)$ y $\Theta(n) \in \mathcal{E}_N(x,y,n)$. Ver [CI99], [Con01], [Fat08]. Es posible probar que existe un número $c^- \in \mathbb{R}$, tal que

$$c^- = \inf\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = +\infty\right\} = \sup\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = -\infty\right\},$$

en donde el valor de h_k^- no depende del punto $(x, y) \in M \times N$ en donde se evalúe. El número real c del punto fijo del operador de Lax tiene con esto una nueva interpretación caracterizada por el siguiente resultado.

Teorema 2 *Si M y N son espacios métricos compactos, $V : M \times N \times M \times N \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz y $(x, y) \in M \times N$, entonces $h_{c^-}^-(x,y) \in \mathbb{R}$ y $c^- = c$, con c el número real en el Teorema 1.*

Análogamente se puede definir la barrera superior de Peierls h_k^+ como

$$h_k^+(x,y) := \limsup_{n\to\infty} \left\{ \sup_{\Theta(n)} \inf_{\overline{x}(n)} A^n\left(\overline{x}(n), \Theta(n)\left[\overline{x}(n)\right]\right) + nk \right\},$$

para la cual se pueden obtener resultados similares.

Tomando en consideración que $h_c^-(x,y) \in \mathbb{R}$ y $h_c^+(x,y) \in \mathbb{R}$, para cualquier $(x,y) \in M \times N$, se probará que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \left| nc + \sup_{\Theta(n)} \inf_{\overline{x}(n)} A^n\left(\overline{x}(n), \Theta(n)\left[\overline{x}(n)\right]\right) \right| < +\infty,$$

y por lo tanto

$$-c = \lim_{n\to\infty} \sup_{\Theta(n)} \inf_{\overline{x}(n)} \frac{1}{n} A^n\left(\overline{x}(n), \Theta(n)\left[\overline{x}(n)\right]\right).$$

Además, utilizando una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, es posible construir una estrategia óptima, de donde se obtienen a su vez sucesiones optimales para ambos jugadores para todo tiempo. En particular se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 3 *Si M y N son espacios métricos compactos, $V : M \times N \times M \times N \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz y $(x, y) \in M \times N$, entonces existen sucesiones $\{x_i^*\}_{i=0}^{\infty} \subset M$ y $\{y_i^*\}_{i=0}^{\infty} \subset N$ tales que*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \left| nc + A^n \left(\overline{x}^* (n), \overline{y}^* (n) \right) \right| < +\infty,$$

en donde $\overline{x}^* (n) := \{x_i^*\}_{i=0}^{n} \in S_M (x, n)$ y $\overline{y}^* (n) := \{y_i^*\}_{i=0}^{n} \in S_N (y, n)$, con c el número real en el Teorema 1.

De donde se desprende inmediatamente que

$$-c = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} A^n \left(\overline{x}^* (n), \overline{y}^* (n) \right).$$

Las sucesiones obtenidas en el resultado anterior cumplen con el Principio de Optimalidad de Bellman, pues a partir de cada estado (x_i^*, y_i^*) en la trayectoria óptima, el resto sigue siendo óptima. La optimalidad de las decisiones restantes a partir de (x_i^*, y_i^*) dependen precisamente de este último estado, el cual es producto de las decisiones previas.

En el Capítulo 4 del trabajo se mostrará otra caracterización de las soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Para $g \in C (M \times N, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in M \times N$, se dice que

1. g es $k-$supersolución si existe $\widehat{x}_1 \in M$ tal que

$$g (\widehat{x}_1, y_1) - g (x_0, y_0) - V (x_0, y_0, \widehat{x}_1, y_1) \geq k,$$

   para cualquier $y_1 \in N$.

2. g es $k-$subsolución si, para todo $x_1 \in M$, existe $\widehat{y}_1 = \widehat{y}_1(x_1) \in N$ tal que

$$g (x_1, \widehat{y}_1) - g (x_0, y_0) - V (x_0, y_0, x_1, \widehat{y}_1) \leq k.$$

Se dice que g es una $k-$solución, si g es $k-$supersolución y $k-$subsolución (ver [FS04]). Se verá que existe sólo un tipo de $k-$soluciones, las correspondientes a $k = c$, el número real del Teorema 1. Estas soluciones se llamarán soluciones críticas.

Se demostrará que las soluciones críticas son puntos fijos del operador de Lax con constante c. Con lo que se obtiene otra caracterización de c, la cual está dada por el siguiente resultado.

Teorema 4 *Si* $u \in C(M \times N, \mathbb{R})$ *es un punto fijo del operador de Lax* $\mathcal{L}^n$ *con constante* $c \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$c = \sup S_U(u) = \inf S_L(u).$$

En donde

$$S_U(u) := \{k \in \mathbb{R} : u \text{ es } k - \text{supersolución}\},$$
$$S_L(u) := \{k \in \mathbb{R} : u \text{ es } k - \text{subsolución}\}.$$

Finalmente se demostrará que $-h_c^-$ es una solución crítica y por tanto punto fijo del operador de Lax, con constante c.

Capítulo 2

El operador de Lax

2.1 El Operador de Lax

Sean M y N espacios métricos compactos, $V : M \times N \times M \times N \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz y $n \in \mathbb{Z}^+$. Se considerará un juego de suma cero de dos jugadores J_M y J_N con horizonte finito a tiempo n, en donde M y N representan los espacios de estado y las sucesiones $\overline{x}(n) = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset M$ y $\overline{y}(n) = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\} \subset N$ determinarán las funciones o trayectorias de estado del juego, respectivamente para los jugadores J_M y J_N. La función $A^n(\overline{x}(n), \overline{y}(n))$ definida por

$$A^n(\overline{x}(n), \overline{y}(n)) := \sum_{i=0}^{n-1} V(x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}).$$

será la acción o costo del juego a tiempo n. Si $C(M \times N, \mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones de valores reales definidas en $M \times N$, para $g \in C(M \times N, \mathbb{R})$ y $(x, y) \in M \times N$, el pago del juego $P_g : S_M(x, n) \times S_N(y, n) \to \mathbb{R}$ está definido por

$$P_g(\overline{x}(n), \overline{y}(n)) := g(x_n, y_n) - A^n(\overline{x}(n), \overline{y}(n)).$$

Si $\mathcal{E}_N(x, y, n)$ es el conjunto de estrategias progresivas para el jugador J_N, el Operador de Lax se define como el Valor Inferior del Juego, de la siguiente manera

$$\mathcal{L}^n g(x, y) := \inf_{\Theta(n)} \sup_{\overline{x}(n)} P_g(\overline{x}(n), \Theta(n)[\overline{x}(n)]),$$

en donde $\overline{x}(n) \in S_M(x, n)$ y $\Theta(n) \in \mathcal{E}_N(x, y, n)$.

Se probará inicialmente la siguiente propiedad de regularidad para el operador de Lax.

Lema 5 *El operador $\mathcal{L}^n g$ es $K-$Lipschitz, para cualesquiera $n \in \mathbb{Z}^+$ y $g \in C(M \times N, \mathbb{R})$, en donde K es la constante de Lipschitz de V.*

Demostración. Sean $(x, y), (z, w) \in M \times N$, $g \in C(M \times N, \mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$. Existe una estrategia $\Theta^1(n) \in \mathcal{E}_N(z, w, n)$ para el jugador J_N tal que

$$\mathcal{L}^n g(z, w) > \sup_{\overline{z}(n)} P_g\left(\overline{z}(n), \Theta^1(n)[\overline{z}(n)]\right) - \varepsilon, \tag{2.1}$$

en donde $\overline{z}(n) \in S_M(z, n)$.

Se define una nueva estrategia $\Theta^2(n) \in \mathcal{E}_N(x, y, n)$, de la siguiente manera, dada una sucesión $\overline{x}(n) = \{x, x_1, \ldots, x_n\} \in S_M(x, n)$

$$\Theta^2(n)[\overline{x}(n)]_i := \begin{cases} y, & i = 0 \\ \Theta^1(n)[\{z, x_1, \ldots, x_n\}]_i, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Por la definición del operador de Lax, para la estrategia anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n g(x, y) &= \inf_{\Theta(n)} \sup_{\overline{x}(n)} P_g(\overline{x}(n), \Theta(n)[\overline{x}(n)]) \\ &\leq \sup_{\overline{x}(n)} P_g\left(\overline{x}(n), \Theta^2(n)[\overline{x}(n)]\right), \end{aligned}$$

en donde $\overline{x}(n) \in S_M(x, n)$. Por lo tanto es posible encontrar $\overline{x}^*(n) = \{x, x_1^*, \ldots, x_n^*\} \in S_M(x, n)$ tal que

$$\mathcal{L}^n g(x, y) < P_g\left(\overline{x}^*(n), \Theta^2(n)[\overline{x}^*(n)]\right) + \varepsilon. \tag{2.2}$$

Se define $\overline{z}^*(n) \in S_M(z, n)$ como $\overline{z}^*(n) := \{z, x_1^*, \ldots, x_n^*\}$. Para esta sucesión, de la relación (2.1) se obiene la siguiente desigualdad

$$\mathcal{L}^n g(x, y) > P_g\left(\overline{z}^*(n), \Theta^1(n)[\overline{z}^*(n)]\right) - \varepsilon$$

De esta forma, tomando la diferencia de (2.2) con esta última desigualdad se obtiene

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^n g(x, y) - \mathcal{L}^n g(z, w) \\ &\quad < P_g\left(\overline{x}^*(n), \Theta^2(n)[\overline{x}^*(n)]\right) - P_g\left(\overline{z}^*(n), \Theta^1(n)[\overline{z}^*(n)]\right) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Y ya que $x_i^* = z_i^*$ y $\Theta^2(n)[\overline{x}^*(n)]_i = \Theta^1(n)[\overline{z}^*(n)]_i$, para $1 \leq i \leq n$, entonces

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^n g(x,y) - \mathcal{L}^n g(z,w) \\
&\quad < V\left(z,w,x_1^*,\Theta^1(n)[\overline{z}^*(n)]_1\right) - V\left(x,y,x_1^*,\Theta^1(n)[\overline{z}^*(n)]_1\right) + 2\varepsilon \\
&\quad \leq Kd[(x,y),(z,w)] + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

en donde K es la constante de Lipschitz de V y d la distancia en $M \times N$. Similarmente se puede obtener la desigualdad contraria, para cualquier $\varepsilon > 0$. Se concluye que

$$|\mathcal{L}^n g(x,y) - \mathcal{L}^n g(z,w)| \leq Kd[(x,y),(z,w)].$$

■

A partir del resultado anterior es natural pensar en realizar la composición de operadores de Lax a tiempos distintos, volviendo a aplicar $\mathcal{L}^m$ a la función continua $\mathcal{L}^n g$. En particular, se establecerá el siguiente resultado que en el contexto de Teoría de Juegos recibe el nombre de Principio de Programación Dinámica.

Proposición 6 *(Propiedad de Semigrupo) Para $m,n \in \mathbb{Z}^+$,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{m+n} g(x,y) &= \mathcal{L}^m \circ \mathcal{L}^n g(x,y) \\
&= \inf_{\Theta(m)} \sup_{\overline{x}(m)} \{\mathcal{L}^n g(x_m, \Theta(m)[\overline{x}(m)]_m) \\
&\qquad\qquad - A^m(\overline{x}(m), \Theta(m)[\overline{x}(m)])\},
\end{aligned}$$

en donde $\Theta(m) \in \mathcal{E}_N(x,y,m)$ y $\overline{x}(m) \in S_M(x,m)$.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $g \in C(M \times N, \mathbb{R})$. Para demostrar la relación $\mathcal{L}^{m+n} g = \mathcal{L}^m \circ \mathcal{L}^n g$ se verá que, para cada $(x,y) \in M \times N$, se verifican las desigualdades $\mathcal{L}^{m+n} g(x,y) \leq \mathcal{L}^m \circ \mathcal{L}^n g(x,y)$ y $\mathcal{L}^{m+n} g(x,y) \geq \mathcal{L}^m \circ \mathcal{L}^n g(x,y)$ simultáneamente.

I. Se probará primero que $\mathcal{L}^{m+n} g(x,y) \leq \mathcal{L}^m \circ \mathcal{L}^n g(x,y)$. Para esto considérese $\Theta^1(m) \in \mathcal{E}_N(x,y,m)$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^m(\mathcal{L}^n g)(x,y) &> \sup_{\overline{x}(m)} \left\{\mathcal{L}^n g\left(x_m, \Theta^1(m)[\overline{x}(m)]_m\right)\right. \\
&\qquad \left. - A^m\left(\overline{x}(m), \Theta^1(m)[\overline{x}(m)]\right)\right\} - \varepsilon, \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

en donde $\overline{x}(m) \in S_M(x,m)$.

Por otro lado, para cada $(z,w) \in M \times N$

$$\mathcal{L}^n g(z,w) = \inf_{\Theta(n)} \sup_{\overline{z}(n)} \left\{ g\left(z_n, \Theta(n)\left[\overline{z}(n)\right]_n\right) - A^n\left(\overline{z}(n), \Theta(n)\left[\overline{z}(n)\right]\right)\right\},$$

en donde $\Theta(n) \in \mathcal{E}_N(z,w,n)$ y $\overline{z}(n) \in S_M(z,n)$. De esta manera, se puede encontrar una familia de estrategias $\Theta^2_{(z,w)}(n) \in \mathcal{E}_N(z,w,n)$ dependientes de (z,w), tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n g(z,w) \quad > \quad & \sup_{\overline{z}(n)} \left\{ g\left(z_n, \Theta^2_{(z,w)}(n)\left[\overline{z}(n)\right]_n\right)\right. \\ & \qquad \left. -A^n\left(\overline{z}(n), \Theta^2_{(z,w)}(n)\left[\overline{z}(n)\right]\right)\right\} - \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Se define la estrategia $\Theta^*(m+n) \in \mathcal{E}_N(x,y,m+n)$ utilizando la función $\Theta^1(m)$ que satisface la relación (2.3) y la familia $\Theta^2_{(z,w)}(n)$, para un punto (z,w) adecuado. Dada una sucesión en $S_M(x,m+n)$, la sucesión asociada en $S_N(y,m+n)$, que es imagen bajo la estrategia $\Theta^*(m+n)$, se define como sigue, los primeros m términos están determinados por la estrategia $\Theta^1(m)$ y la segunda parte la determina la estrategia $\Theta^2_{(z^*,w^*)}(n)$, para algún (z^*,w^*) específico. Más precisamente, para $\overline{x}(m+n) = \{x, x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}\} \in S_M(x,m+n)$, se define $\Theta^*(m+n) \in \mathcal{E}_N(x,y,m+n)$ como a continuación

$$\Theta^*(m+n)\left[\overline{x}(m+n)\right]_i := \begin{cases} \Theta^1(m)\left[\overline{x}^1(m)\right]_i, & 0 \leq i \leq m \\ \Theta^2_{(z^*,w^*)}(n)\left[\overline{x}^2(n)\right]_{i-m}, & m+1 \leq i \leq m+n \end{cases}$$

en donde

$$\begin{aligned} \overline{x}^1(m) &:= \{x, x_1, \ldots, x_m\}, \\ (z^*, w^*) &:= \left(x_m, \Theta^1(m)\left[\overline{x}^1(m)\right]_m\right), \\ \overline{x}^2(n) &:= \{z^*, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}\}, \\ \Theta^2_{(z^*,w^*)}(n) &\in \mathcal{E}_N(z^*, w^*, n). \end{aligned}$$

Tomando $\overline{x}(m+n) = \{x, x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}\} \in S_M(x,m+n)$ arbitrario, considerando las definiciones de $(z^*,w^*) \in M \times N$, $\overline{x}^1(m) \in S_M(x,m)$, $\overline{x}^2(m) \in S_M(z^*,n)$ como antes y combinando (2.3) y (2.4) se obtiene

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^m\left(\mathcal{L}^n g\right)(x,y)\\
&\quad> \mathcal{L}^n g\left(x_m, \Theta^1(m)\left[\overline{x}^1(m)\right]_m\right) - A^m\left(\overline{x}^1(m), \Theta^1(m)\left[\overline{x}^1(m)\right]\right) - \varepsilon\\
&\quad> g\left(x_{m+n}, \Theta^2_{(z^*,w^*)}(n)\left[\overline{x}^2(n)\right]_n\right) - A^n\left(\overline{x}^2(n), \Theta^2_{(z^*,w^*)}(n)\left[\overline{x}^2(n)\right]\right)\\
&\qquad -A^m\left(\overline{x}^1(m), \Theta^1(m)\left[\overline{x}^1(m)\right]\right) - 2\varepsilon\\
&\quad= g\left(x_{m+n}, \Theta^*(m+n)\left[\overline{x}(m+n)\right]_{m+n}\right)\\
&\qquad -A^{m+n}\left(\overline{x}(m+n), \Theta^*(m+n)\left[\overline{x}(m+n)\right]\right) - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sup_{\overline{x}(m+n)} &\left\{g\left(x_{m+n}, \Theta^*(m+n)\left[\overline{x}(m+n)\right]_{m+n}\right)\right.\\
&\left. -A^{m+n}\left(\overline{x}(m+n), \Theta^*(m+n)\left[\overline{x}(m+n)\right]\right)\right\}\\
&\leq \mathcal{L}^m\left(\mathcal{L}^n g\right)(x,y) + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

en donde $\overline{x}(m+n) \in S_M(x, m+n)$. Esto implica que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{m+n} g(x,y) &= \inf_{\Theta(m+n)} \sup_{\overline{x}(m+n)} \left\{g\left(x_{m+n}, \Theta(m+n)\left[\overline{x}(m+n)\right]_{m+n}\right)\right.\\
&\qquad \left. -A^{m+n}\left(\overline{x}(m+n), \Theta(m+n)\left[\overline{x}(m+n)\right]\right)\right\}\\
&\leq \mathcal{L}^m\left(\mathcal{L}^n g\right)(x,y) + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

y como ε era un número positivo arbitrario, entonces la relación anterior implica que $\mathcal{L}^{m+n} g(x,y) \leq \mathcal{L}^m \circ \mathcal{L}^n g(x,y)$.

II. Queda por probar que $\mathcal{L}^{m+n} g(x,y) \geq \mathcal{L}^m \circ \mathcal{L}^n g(x,y)$. Para esto considérese la estrategia $\Theta^*(m+n) \in \mathcal{E}_N(x,y,m+n)$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{m+n} g(x,y) &> \sup_{\overline{x}(m+n)} \left\{g\left(x_{m+n}, \Theta^*(m+n)\left[\overline{x}(m+n)\right]_{m+n}\right)\right.\\
&\qquad \left. -A^{m+n}\left(\overline{x}(m+n), \Theta^*(m+n)\left[\overline{x}(m+n)\right]\right)\right\}\\
&\qquad -\varepsilon, \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

en donde $\overline{x}(m+n) \in S_M(x, m+n)$.

Se define la estrategia $\Theta^1(m) \in \mathcal{E}_N(x,y,m)$ como la restricción a tiempo m de $\Theta^*(m+n)$. Dada una sucesión $\overline{z}(m) \in S_M(x,m)$, la sucesión asociada en $S_N(y,m)$, que es imagen bajo la estrategia $\Theta^1(m)$, estará determinada por los primeros m términos de la estrategia $\Theta^*(m+n)$ aplicada a alguna extensión de $\overline{z}(m)$ en $S_M(x, m+n)$, agregando cualquier sucesión $\overline{w}(n) \in S_M(z_m, n)$. Como $\Theta^*(m+n)$ es estrategia, no es relevante la sucesión $\overline{w}(n)$ que se agregue a $\overline{z}(m)$, pues los primeros m términos obtenidos serán iguales para cualquier $\overline{w}(n)$, por lo que la función $\Theta^1(m)$ está bien definida y es a su vez estrategia. Más precisamente, para $\overline{z}(m) \in S_M(x, m)$, tomando cualquier sucesión $\overline{w}(n) \in S_M(z_m, n)$, defínase $\Theta^1(m) \in \mathcal{E}_N(x, y, m)$ como a continuación

$$\Theta^1(m)\left[\overline{z}(m)\right]_i = \Theta^*(m+n)\left[\overline{x}(m+n)\right]_i,$$

para $i = 0, 1, \ldots, m$, en donde $\overline{x}(m+n) := \{x, z_1, \ldots, z_m, w_1, \ldots, w_n\}$. De esta manera, por la definición del operador $\mathcal{L}^m$ se cumple

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^m(\mathcal{L}^n g)(x, y)\\ &\quad\leq \sup_{\overline{z}(m)}\left\{\mathcal{L}^n g\left(z_m, \Theta^1(m)\left[\overline{z}(m)\right]_m\right) - A^m\left(\overline{z}(m), \Theta^1(m)\left[\overline{z}(m)\right]\right)\right\},\end{aligned}$$

en donde $\overline{z}(m) \in S_M(x, m)$. Consecuentemente, existe $\overline{z}^1(m) \in S_M(x, m)$ tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^m(\mathcal{L}^n g)(x, y) \;<\; & \mathcal{L}^n g\left(z^1_m, \Theta^1(m)\left[\overline{z}^1(m)\right]_m\right)\\ & - A^m\left(\overline{z}^1(m), \Theta^1(m)\left[\overline{z}^1(m)\right]\right) + \varepsilon. \qquad (2.6)\end{aligned}$$

En este momento los puntos $z^1_m \in M$ y $\Theta^1(m)\left[\overline{z}^1(m)\right]_m \in N$ están fijos. Sea define ahora $\Theta^2(n) \in \mathcal{E}_N\left(z^1_m, \Theta^1(m)\left[\overline{z}^1(m)\right]_m, n\right)$ como a continuación, dado $\overline{w}(n) \in S_M(z^1_m, n)$,

$$\Theta^2(n)\left[\overline{w}(n)\right]_i = \Theta^*(m+n)\left[\overline{x}_{\overline{w}}(m+n)\right]_{i+m},$$

para $i = 0, 1, \ldots, n$, en donde $\overline{x}_{\overline{w}}(m+n) := \{x, z^1_1, \ldots, z^1_m, w_1, \ldots, w_n\}$. Para la estrategia $\Theta^2(n)$ definida anteriormente se tiene, por la definición de $\mathcal{L}^n g$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n g\left(z^1_m, \Theta^1(m)\left[\overline{z}^1(m)\right]_m\right) \;\leq\; & \sup_{\overline{w}(n)}\left\{g\left(w_n, \Theta^2(n)\left[\overline{w}(n)\right]_n\right)\right.\\ & \left. - A^n\left(\overline{w}(n), \Theta^2(n)\left[\overline{w}(n)\right]\right)\right\},\end{aligned}$$

en donde $\overline{w}(n) \in S_M(z^1_m, n)$. Por lo que existe $\overline{z}^2(n) \in S_M(z^1_m, n)$ tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n g\left(z^1_m, \Theta^1(m)\left[\overline{z}^1(m)\right]_m\right) \;<\; & g\left(z^2_n, \Theta^2(n)\left[\overline{z}^2(n)\right]_n\right)\\ & - A^n\left(\overline{z}^2(n), \Theta^2(n)\left[\overline{z}^2(n)\right]\right)\\ & + \varepsilon. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Defínase $\overline{x}^* (m+n) \in S_M (x, m+n)$ como

$$\overline{x}^* (m+n) := \overline{x}_{\overline{z}^2} (m+n) = \left\{ x, z_1^1, \ldots, z_m^1, z_1^2, \ldots, z_n^2 \right\}.$$

Considerando (2.5), (2.6) y (2.7) se sigue que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^m (\mathcal{L}^n g) (x,y) \\
&\quad < \mathcal{L}^n g \left(z_m^1, \Theta^1 (m) \left[\overline{z}^1 (m) \right]_m \right) - A^m \left(\overline{z}^1 (m), \Theta^1 (m) \left[\overline{z}^1 (m) \right] \right) + \varepsilon \\
&\quad < g \left(z_n^2, \Theta^2 (n) \left[\overline{z}^2 (n) \right]_n \right) - A^n \left(\overline{z}^2 (n), \Theta^2 (n) \left[\overline{z}^2 (n) \right] \right) \\
&\qquad - A^m \left(\overline{z}^1 (m), \Theta^1 (m) \left[\overline{z}^1 (m) \right] \right) + 2\varepsilon \\
&\quad = g \left(x_{m+n}^*, \Theta^* (m+n) \left[\overline{x}^* (m+n) \right]_{m+n} \right) \\
&\qquad - A^{m+n} \left(\overline{x}^* (m+n), \Theta^* (m+n) \left[\overline{x}^* (m+n) \right] \right) + 2\varepsilon \\
&\quad \leq \sup_{\overline{x}(m+n)} \left\{ g \left(x_{m+n}, \Theta^* (m+n) \left[\overline{x} (m+n) \right]_{m+n} \right) \right. \\
&\qquad \left. - A^{m+n} \left(\overline{x} (m+n), \Theta^* (m+n) \left[\overline{x} (m+n) \right] \right) \right\} + 3\varepsilon \\
&\quad < \mathcal{L}^{m+n} g (x,y) + 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

por esta razón $\mathcal{L}^m \circ \mathcal{L}^n g (x,y) \leq \mathcal{L}^{m+n} g (x,y)$. ∎

A continuación se presentarán las últimas propiedades necesarias para la demostración del Teorema Weak KAM.

Lema 7 *(Propiedades del Operador de Lax) Sean $g, f \in C (M \times N, \mathbb{R})$, entonces se cumplen las siguientes relaciones*

1. *(Monotonía) Si $g \leq f$, entonces $\mathcal{L}^n g \leq \mathcal{L}^n f$.*
2. *Si $k \in \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{L}^n (k+g) = k + \mathcal{L}^n g$.*
3. *(Contración Débil) $\| \mathcal{L}^n g - \mathcal{L}^n f \|_\infty \leq \| g - f \|_\infty$.*

Demostración. Las primeras dos afirmaciones se obtienen como consecuencia directa de la definición. Considerando $(x,y) \in M \times N$ arbitrario, si $g(x,y) \leq f(x,y)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n g (x,y) &= \inf_{\Theta(n)} \sup_{\overline{x}(n)} \left\{ g \left(x_n, \Theta (n) \left[\overline{x} (n) \right]_n \right) - A^n \left(\overline{x} (n), \Theta (n) \left[\overline{x} (n) \right] \right) \right\} \\
&\leq \inf_{\Theta(n)} \sup_{\overline{x}(n)} \left\{ f \left(x_n, \Theta (n) \left[\overline{x} (n) \right]_n \right) - A^n \left(\overline{x} (n), \Theta (n) \left[\overline{x} (n) \right] \right) \right\} \\
&= \mathcal{L}^n f (x,y),
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(k+g)(x,y) &= \inf_{\Theta(n)}\sup_{\overline{x}(n)}\{k+g(x_n,\Theta(n)[\overline{x}(n)]_n) \\ &\qquad -A^n(\overline{x}(n),\Theta(n)[\overline{x}(n)])\} \\ &= k+\inf_{\Theta(n)}\sup_{\overline{x}(n)}\{g(x_n,\Theta(n)[\overline{x}(n)]_n) \\ &\qquad -A^n(\overline{x}(n),\Theta(n)[\overline{x}(n)])\} \\ &= k+\mathcal{L}^n g(x,y)\end{aligned}$$

Para probar la última afirmación, obsérvese que para $(x,y)\in M\times N$,

$$f(x,y)-\|g-f\|_\infty \le g(x,y)\le f(x,y)+\|g-f\|_\infty .$$

Las propiedades previas implican que

$$\mathcal{L}^n f(x,y)-\|g-f\|_\infty \le \mathcal{L}^n g(x,y)\le \mathcal{L}^n f(x,y)+\|g-f\|_\infty .$$

Así $|(\mathcal{L}^n g-\mathcal{L}^n f)(x,y)| \le \|g-f\|_\infty$, para cualquier $(x,y)\in M\times N$. De donde se concluye que

$$\|\mathcal{L}^n g-\mathcal{L}^n f\|_\infty \le \|g-f\|_\infty .$$

■

2.2 Puntos Fijos del Operador de Lax

A continuación se presenta el resultado principal de este capítulo, el cual es análogo al Teorema Weak KAM.

Teorema 1 *Si M y N son espacios métricos compactos y $V : M\times N\times M\times N\to\mathbb{R}$ es una función Lipschitz, entonces existe una función Lipschitz $u\in C(M\times N,\mathbb{R})$ y una única constante $c\in\mathbb{R}$, tales que*

$$\mathcal{L}^n u = u+nc.$$

De acuerdo a este resultado, se dirá que u es en punto fijo del operador de Lax con constante c, esta última recibe el nombre de valor crítico.

Demostración. Se dividirá la demostración en dos partes, la primera correspondiente a la existencia de la pareja (u, c) y la segunda a la unicidad de la constante c.

I. Para probar la existencia del punto fijo se utilizará el mismo argumento que usa Fathi ([Fat08]), en este caso a tiempo discreto.

Sea E el cociente de el espacio de funciones continuas $C(M \times N, \mathbb{R})$ módulo las constantes, $E := C(M \times N, \mathbb{R}) / \mathbb{R} \cdot 1$. Defínase la norma $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ como

$$\|[u]\| := \inf_{a \in \mathbb{R}} \|u + a\|_\infty ,$$

para $[u] \in E$. Luego $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Defínase el operador $\widehat{\mathcal{L}}^n : E \to E$ como

$$\widehat{\mathcal{L}}^n [u] := [\mathcal{L}^n u] ,$$

el cual satisface la propiedad de contracción débil en E. En consecuencia $[u] \mapsto \lambda \widehat{\mathcal{L}}^n [u]$, con $\lambda \in (0,1)$, es una contracción; por lo que existen puntos fijos $[u]_\lambda \in E$ para $\lambda \widehat{\mathcal{L}}^n$. Como $\mathcal{L}^n$ is equi-Lipschitz, por el Teorema de Arzela-Ascoli, la familia $\{[u]_\lambda\}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente cuando $\lambda \to 1$. Por lo tanto $\widehat{\mathcal{L}}^n$ tiene un punto fijo $[u]_* \in E$, lo cual en términos de $\mathcal{L}^n$ significa que existe una constante $c_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{L}^n u_* = u_* + c_n.$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Finalmente, la propiedad de semigrupo garantiza la existencia de $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{L}^n u_* = u_* + nc$$

para cada entero positivo n.

Que u_* sea Lipschitz es consecuencia de que $\mathcal{L}^n u_*$ lo es. De hecho, de acuerdo al Lema 5, u_* es $K-$Lipschitz en donde K es la constante de Lipschitz de V.

II. Queda por demostrar que el número c es único. Para esto considérese cualquier $\varepsilon > 0$ y supóngase que existen $u_i \in C(M \times N, \mathbb{R})$ y $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, tales que $\mathcal{L}^n u_i = u_i + nc_i$, con $c_1 > c_2$. Sea $\Theta^*(n) \in \mathcal{E}_N(x, y, n)$ una estrategia tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n u_2(x,y) \quad > \quad & \sup_{\overline{x}(n)} \{ u_2 (x_n, \Theta^*(n) [\overline{x}(n)]_n) \\ & \qquad - A^n (\overline{x}(n), \Theta^*(n) [\overline{x}(n)]) \} - \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Como la estrategia $\Theta^*(n)$ es una función que sólo depende del estado inicial (x,y) y no de la función u_i entonces, considerando el supremo de la evaluación del pago P_{u_i} en esta estrategia, por la definición del operador de Lax se tiene

$$\mathcal{L}^n u_1(x,y) \leq \sup_{\overline{x}(n)} \left\{ u_1\left(x_n, \Theta^*(n)\left[\overline{x}(n)\right]_n\right) - A^n\left(\overline{x}(n), \Theta^*(n)\left[\overline{x}(n)\right]\right)\right\}.$$

Por lo que debe existir $\overline{x}^*(n) \in S_M(x,n)$, tal que

$$\mathcal{L}^n u_1(x,y) < u_1\left(x_n^*, \Theta^*(n)\left[\overline{x}^*(n)\right]_n\right) - A^n\left(\overline{x}^*(n), \Theta^*(n)\left[\overline{x}^*(n)\right]\right) + \varepsilon.$$

Considerando esta sucesión $\overline{x}^*(n)$ y la relación (2.8) se cumple

$$\mathcal{L}^n u_2(x,y) > u_2\left(x_n^*, \Theta^*(n)\left[\overline{x}^*(n)\right]_n\right) - A^n\left(\overline{x}^*(n), \Theta^*(n)\left[\overline{x}^*(n)\right]\right) - \varepsilon.$$

Tomando en cuenta que u_i $\mathcal{L}^n u_i = u_i + nc_i$, para $i = 1,2$, y las desigualdades anteriores, se satisface

$$\begin{aligned} u_1(x,y) + nc_1 &< u_1\left(x_n^*, \Theta^*(n)\left[\overline{x}^*(n)\right]_n\right) - A^n\left(\overline{x}^*(n), \Theta^*(n)\left[\overline{x}^*(n)\right]\right) + \varepsilon, \\ u_2(x,y) + nc_2 &> u_2\left(x_n^*, \Theta^*(n)\left[\overline{x}^*(n)\right]_n\right) - A^n\left(\overline{x}^*(n)\, \Theta^*(n)\left[\overline{x}^*(n)\right]\right) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Restando estas dos desigualdades se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} \inf_{M\times N}(u_1 - u_2) + n(c_1 - c_2) &\leq u_1(x,y) + nc_1 - u_2(x,y) - nc_2 \\ &< u_1\left(x_n^*, \Theta^*(m+n)\left[\overline{x}^*(n)\right]_n\right) \\ &\quad - u_2\left(x_n^*, \Theta^*(m+n)\left[\overline{x}^*(n)\right]_n\right) + 2\varepsilon \\ &\leq \sup_{M\times N}(u_1 - u_2) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

de donde

$$n(c_1 - c_2) < \sup_{M\times N}(u_1 - u_2) - \inf_{M\times N}(u_1 - u_2) + 2\varepsilon. \tag{2.9}$$

Por otro lado, de que $c_1 > c_2$ se cumple que $n(c_1 - c_2) \to \infty$, cuando $n \to \infty$; lo cual es una contradicción al hecho de suponer que las constantes c_1 y c_2 son diferentes, puesto que según (2.9) la cantidad $n(c_1 - c_2)$ está acotada para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

∎

Si se consideran estrategias a un paso $\Theta(1) \in E_N(x, y, 1)$, sus imágenes serán de la forma $\Theta(1)[\overline{x}(1)] = \{y, y_1(x_1)\}$, para $\overline{x}(1) \in S_M(x, 1)$; puesto que el estado inicial $(x, y) \in M \times N$ es fijo, lo cual hace depender a y_1 exclusivamente de x_1. De esta manera, considerando el operador de Lax a un paso, se tiene que

$$\mathcal{L}^1 g(x, y) = \sup_{x_1 \in M} \inf_{y_1 \in N} \{g(x_1, y_1) - V(x, y, x_1, y_1)\}.$$

Si $u \in C(M \times N, \mathbb{R})$ es un punto fijo del operador de Lax con constante c, entonces u es una solución de la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi análoga a tiempo discreto,

$$\sup_{x_1 \in M} \inf_{y_1 \in N} \{u(x_1, y_1) - u(x, y) - V(x, y, x_1, y_1)\} = c. \tag{2.10}$$

Inversamente, si u es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi previa, entonces u es un punto fijo del operador de Lax a un paso, con constante c.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1 u(x, y) &= \sup_{x_1 \in M} \inf_{y_1 \in N} \{u(x_1, y_1) - V(x, y, x_1, y_1)\} \\ &= u(x, y) + c \end{aligned}$$

De acuerdo a las propiedades descritas en el Lema 7,

$$\mathcal{L}^n u(x, y) = \underbrace{\mathcal{L}^1 \circ \cdots \circ \mathcal{L}^1}_{n \text{ veces}} u(x, y) = u(x, y) + nc,$$

se sigue que u es un punto fijo para $\mathcal{L}^n$ con contante c, para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.

Capítulo 3

Barrera de Peierls

3.1 Barrera Inferior de Peierls

Se considerará ahora un juego con horizonte infinito para los jugadores J_M y J_N. Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se define la función $h(n) : M \times N \to \mathbb{R}$ por

$$h(n)(x,y) := \sup_{\Theta(n)} \inf_{\overline{x}(n)} A^n\left(\overline{x}(n), \Theta(n)\left[\overline{x}(n)\right]\right),$$

en donde $\overline{x}(n) \in S_M(x,n)$ y $\Theta(n) \in \mathcal{E}_N(x,y,n)$.

Para $k \in \mathbb{R}$, se define la barrera inferior de Peierls como

$$h_k^-(x,y) := \liminf_{n\to\infty} \{h(n)(x,y) + nk\}.$$

Puede llegar a pensarse que h_k^- tiene un comportamiento que carece de interés, tomando sólo valores $\pm\infty$. A pesar de que esto es cierto para casi todos los números k, es posible encontrar uno de estos que marca un cambio en los valores de $h_k^-(x,y)$. Un primer paso para demostrar lo anterior, es probar que sus valores $\pm\infty$ no dependen del punto en $M \times N$, más precisamente se demuestra el siguiente resultado.

Proposición 8 *Para cada $k \in \mathbb{R}$, se cumple*

1. *Si $h_k^-(x,y) = -\infty$ para algún $(x,y) \in M \times N$, entonces $h_k^-(z,w) = -\infty$, para todo $(z,w) \in M \times N$.*

2. *Si $h_k^-(x,y) = +\infty$ para algún $(x,y) \in M \times N$, entonces $h_k^-(z,w) = +\infty$, para todo $(z,w) \in M \times N$.*

Demostración. Sea $B > 0$ y considérese $C > \sup V - \inf V + B$.

1. Sea $(x, y) \in M \times N$ tal que $h_k^-(x, y) = -\infty$. Considérese $(z, w) \in M \times N$ cualquiera. Existe una subsucesión $n_j \uparrow \infty$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \{h(n_j)(x, y) + n_j k\} = -\infty,$$

De esta forma existe $J \in \mathbb{Z}^+$ tal que, si $j \geq J$, entonces

$$\sup_{\theta(n_j)} \inf_{\overline{x}(n_j)} A^{n_j}(\overline{x}(n_j), \Theta(n_j)[\overline{x}(n_j)]) + n_j k = h(n_j)(x, y) + n_j k < -C.$$

Sea $\Theta(n_j)$ una estrategia cualquiera en $\mathcal{E}_N(z, w, n_j)$. Defínase $\Theta^0(n_j) \in \mathcal{E}_N(x, y, n_j)$ como a continuación, para $\overline{x}(n_j) = \{x, x_1, \ldots, x_{n_j}\} \in S_M(x, n_j)$,

$$\Theta^0(n_j)[\overline{x}(n_j)]_i := \begin{cases} y, & i = 0 \\ \Theta(n_j)\left[\{z, x_1, \ldots, x_{n_j}\}\right]_i, & 1 \leq i \leq n_j \end{cases}$$

Por lo tanto $\inf_{\overline{x}(n_j)} A^{n_j}(\overline{x}(n_j), \Theta^0(n_j)[\overline{x}(n_j)]) + n_j k < -C$. Esto implica que existe $\overline{x}^0(n_j) = \left\{x, x_1^0, \ldots, x_{n_j}^0\right\} \in S_M(x, n_j)$ tal que

$$A^{n_j}\left(\overline{x}^0(n_j), \Theta^0(n_j)\left[\overline{x}^0(n_j)\right]\right) + n_j k < -C.$$

Si se define $\overline{z}^0(n_j) := \left\{z, x_1^0, \ldots, x_{n_j}^0\right\} \in S_M(z, n_j)$, entonces

$$\begin{aligned} &A^{n_j}\left(\overline{z}^0(n_j), \Theta(n_j)\left[\overline{z}^0(n_j)\right]\right) + n_j k \\ &\quad = V\left(z, w, x_1^0, \Theta(n_j)\left[\overline{z}^0(n_j)\right]_1\right) - V\left(x, y, x_1^0, \Theta(n_j)\left[\overline{z}^0(n_j)\right]_1\right) \\ &\qquad + A^{n_j}\left(\overline{x}^0(n_j), \Theta^0(n_j)\left[\overline{x}^0(n_j)\right]\right) + n_j k \\ &\quad < \sup V - \inf V - C \\ &\quad < -B \end{aligned}$$

de esta manera $\inf_{\overline{z}(n_j)} A^{n_j}(\overline{z}(n_j), \Theta(n_j)[\overline{z}(n_j)]) + n_j k < -B$. Esta desigualdad es válida para toda $\Theta(n_j) \in \mathcal{E}_N(z, w, n_j)$, con $j \geq J$. Luego

$$\lim_{j\to\infty} \{h(n_j)(z, w) + n_j k\} = -\infty,$$

por lo que

$$h_k^-(z, w) = \liminf_{n\to\infty} \{h(n)(z, w) + nk\} = -\infty.$$

2. Considérese ahora $(x,y) \in M \times N$ tal que $h_k^-(x,y) = +\infty$. Sea $(z,w) \in M \times N$. Como $h_k^-(x,y) = \liminf_{n\to\infty} \{h(n)(x,y) + nk\} = +\infty$, entonces $h_k^-(x,y) = \lim_{n\to\infty} \{h(n)(x,y) + nk\} = +\infty$. De esta forma debe existir $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que, si $n \geq N$ entonces

$$h(n)(x,y) + nk > C.$$

Por la definición de $h(n)$ se puede seleccionar una estrategia $\Theta^0(n) \in \mathcal{E}_N(x,y,n)$ tal que

$$\inf_{\overline{x}(n)} A^n\left(\overline{x}(n), \Theta^0(n)[\overline{x}(n)]\right) + nk > C.$$

Para $\overline{z}(n) = \{z, z_1, \ldots, z_n\} \in S_M(z,n)$, se define la estrategia $\Theta^1(n) \in \mathcal{E}_N(z,w,n)$ como

$$\Theta^1(n)[\overline{z}(n)]_i := \begin{cases} w, & i = 0 \\ \Theta^0(n)[\{x, z_1, \ldots, z_n\}]_i, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

De esta manera, para cualquier $\overline{z}(n) = \{z, z_1, \ldots, z_n\} \in S_M(z,n)$, considerando $\overline{x}_{\overline{z}}(n) := \{x, z_1, \ldots, z_n\} \in S_M(x,n)$, se cumple

$$\begin{aligned} & A^n\left(\overline{z}(n), \Theta^1(n)[\overline{z}(n)]\right) + nk \\ &\quad = V\left(z, w, z_1, \Theta^1(n)[\overline{z}(n)]_1\right) - V\left(x, y, z_1, \Theta^0(n)[\overline{x}_{\overline{z}}(n)]_1\right) \\ &\qquad + A^n\left(\overline{x}_{\overline{z}}(n), \Theta^0(n)[\overline{x}_{\overline{z}}(n)]\right) + nk \\ &\quad \geq \inf V - \sup V + \inf_{\overline{x}(n)} A^n\left(\overline{x}(n), \Theta^0(n)[\overline{x}(n)]\right) + nk \\ &\quad > \inf V - \sup V + C \\ &\quad > B. \end{aligned}$$

Como la relación anterior es válida para cualquier $\overline{z}(n) \in S_M(z,n)$, entonces

$$\inf_{\overline{z}(n)} A^n\left(\overline{z}(n), \Theta^1(n)[\overline{z}(n)]\right) + nk > B,$$

para la estrategia $\Theta^1(n) \in \mathcal{E}_N(z,w,n)$ definida anteriormente. De esto se sigue que

$$\begin{aligned} h(n)(z,w) + nk &= \sup_{\theta(n)} \inf_{\overline{z}(n)} A^n(\overline{z}(n), \Theta(n)[\overline{z}(n)]) + nk \\ &\geq B \end{aligned}$$

Por lo que finalmente se tiene que

$$h_k^-(z,w) = \lim_{n\to\infty} \{h(n)(z,w) + nk\} = +\infty.$$

∎

Para ver que h_k^- tiene un cambio radical en sus imágenes, para un valor especial de $k \in \mathbb{R}$, primero se probará el siguiente resultado.

Lema 9 *Existe $k > 0$ suficientemente grande, tal que*

1. $h_{-k}^-(x,y) = -\infty$.
2. $h_k^-(x,y) = +\infty$.

Demostración. Obsérvese que si $k > \sup V + 1$, entonces

$$V - k \leq \sup V - k < -1.$$

Para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, sean $\overline{x}(n) \in S_M(x,n)$ y $\Theta(n) \in \mathcal{E}_N(x,y,n)$, entonces $A^n(\overline{x}(n), \Theta(n)[\overline{x}(n)]) - nk < -n$. Por lo tanto

$$h_{-k}^-(x,y) = -\infty.$$

La otra relación puede obtenerse de forma similar. ∎

Es claro que h_k^- es monótona en k, esto es

Lema 10 *Para $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ con $k_1 < k < k_2$, se cumple*

1. *Si $h_k^-(x,y) = -\infty$, entonces $h_{k_1}^-(x,y) = -\infty$.*
2. *Si $h_k^-(x,y) = +\infty$, entonces $h_{k_2}^-(x,y) = +\infty$.*
3. *Más aun, si $h_k^-(x,y) \in \mathbb{R}$, entonces*

$$h_{k_1}^-(x,y) = -\infty,$$

$$h_{k_2}^-(x,y) = +\infty.$$

Demostración. Sea $(x,y) \in M \times N$, obsérvese que si $h_k^-(x,y) = -\infty$ o bien $h_k^-(x,y) \in \mathbb{R}$, entonces debido a que $k_1 - k < 0$

$$\begin{aligned} h_{k_1}^-(x,y) &= \liminf_{n\to\infty} \{h(n)(x,y) + nk + n(k_1 - k)\} \\ &= h_k^-(x,y) + \lim_{n\to\infty} n(k_1 - k) \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Lo análogo sucede para k_2, cuando $h_k^-(x,y) = +\infty$ o bien $h_k^-(x,y) \in \mathbb{R}$, tomando en cuenta que $k_2 - k > 0$. ■

El siguiente resultado muestra la existencia del valor de k que marca el punto de ruptura en las imágenes de $h_k(x,y)$, de tal manera que del lado izquierdo de tal constante la barrera de Peierls toma valores iguales a $-\infty$, mientras que del lado derecho es igual a $+\infty$. En principio no se sabe si el valor de $h_k(x,y)$ para dicho k es un número real o $\pm\infty$. Esto queda aclarado en el Teorema 2.

Corolario 11 *Existe $c^- \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\inf\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = +\infty\right\} = \sup\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = -\infty\right\} = c^-.$$

Demostración. Según el Lema 9, existe un $k_0 > 0$ suficientemente grande tal que $h_{-k_0}^- = -\infty$ y $h_{k_0}^- = +\infty$; mientras que por el Lema 10, si $k_1 < -k_0$ y $k_0 < k_2$ entonces $h_{k_1}^- = -\infty$ y $h_{k_2}^- = +\infty$. Por lo tanto los conjuntos $\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = -\infty\right\}$ y $\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = +\infty\right\}$ están respectivamente acotados superior e inferiormente, lo cual implica que

$$\inf\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = +\infty\right\}, \sup\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = -\infty\right\} \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, dado $(x,y) \in M \times N$, sean $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que $h_{k_1}^-(x,y) = -\infty$ y $h_{k_2}^-(x,y) = +\infty$, entonces $k_1 \leq k_2$. Por lo tanto $\sup\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = -\infty\right\} \leq k_2$, así

$$\sup\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = -\infty\right\} \leq \inf\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = +\infty\right\}.$$

Supóngase ahora que $\sup\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = -\infty\right\} < \inf\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = +\infty\right\}$, entonces deberán existir $k_3 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $h_{k_3}^-(x,y) \in \mathbb{R}$ y

$$\sup\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = -\infty\right\} < k_3 - \varepsilon < k_3 + \varepsilon < \inf\left\{k \in \mathbb{R} : h_k^- = +\infty\right\}.$$

De acuerdo al Lema 10 se tiene que $h^-_{k_3-\varepsilon} = -\infty$ y $h^-_{k_3+\varepsilon} = +\infty$, lo cual es una contradicción. Concluimos que

$$\sup\left\{k \in \mathbb{R} : h^-_k = -\infty\right\} = \inf\left\{k \in \mathbb{R} : h^-_k = +\infty\right\}.$$

$\blacksquare$

Es posible ahora formular un resultado que ofrezca una caracterización diferente para el número c en el Teorema 1 y que relacione la barrera de Peierls con los puntos fijos del operador de Lax con constante c.

Teorema 2 *Si M y N son espacios métricos compactos, $V : M \times N \times M \times N \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz y $(x, y) \in M \times N$, entonces $h^-_{c^-}(x, y) \in \mathbb{R}$ y $c^- = c$, con c el número real en el Teorema 1.*

Demostración. Sea u un punto fijo del operador de Lax, con constante c. Para $(x, y) \in M \times N$ y $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned} u(x,y) + nc &= \mathcal{L}^n u(x,y) \\ &= \inf_{\Theta(n)} \sup_{\overline{x}(n)} \left\{ u\left(x_n, \Theta(n)\left[\overline{x}(n)\right]_n\right) \right. \\ &\qquad \left. - A^n\left(\overline{x}(n), \Theta(n)\left[\overline{x}(n)\right]\right) \right\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

en donde $\overline{x}(n) \in S_M(x, n)$ y $\Theta(n) \in \mathcal{E}_N(x, y, n)$. Por lo tanto

$$\inf u + nc \leq \sup u - \sup_{\Theta(n)} \inf_{\overline{x}(n)} A^n\left(\overline{x}(n), \Theta(n)\left[\overline{x}(n)\right]\right).$$

Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned} h(n)(x,y) + nc &= \sup_{\theta(n)} \inf_{\overline{x}(n)} A^n\left(\overline{x}(n), \Theta(n)\left[\overline{x}(n)\right]\right) + nc \\ &\leq \sup u - \inf u. \end{aligned}$$

De donde $h^-_c(x, y) = \liminf_{n\to\infty} \{h(n)(x, y) + nc\} \leq \sup u - \inf u < +\infty$, esto implica que

$$c \leq \inf\left\{k \in \mathbb{R} : h^-_k = +\infty\right\} = c^-.$$

Análogamente, de (3.1) se tiene que

$$\sup u + nc \geq \inf u - \sup_{\Theta(n)} \inf_{\overline{x}(n)} A^n\left(\overline{x}(n), \Theta(n)\left[\overline{x}(n)\right]\right).$$

Consecuentemente, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

$$h(n)(x,y) + nc \geq \inf u - \sup u.$$

Lo cual implica que $h_c^-(x,y) > -\infty$ y en consecuencia

$$c \geq \sup \left\{ k \in \mathbb{R} : h_k^- = -\infty \right\} = c^-.$$

■

3.2 Barrera Superior de Peierls

De manera semejante a como se definió la barrera inferior de Peierls, es posible definir ahora la barrera superior de Peierls como la función

$$h_k^+(x,y) := \limsup_{n\to\infty} h(n)(x,y) + nk.$$

Utilizando argumentos similares a los de la sección previa para h_k^-, se obtienen propiedades análogas para h_k^+.

Proposición 12 *Para cada $k \in \mathbb{R}$, se cumple*

1. *Si $h_k^+(x,y) = -\infty$ para algún $(x,y) \in M \times N$, entonces $h_k^+(z,w) = -\infty$, para todo $(z,w) \in M \times N$.*
2. *Si $h_k^+(x,y) = +\infty$ para algún $(x,y) \in M \times N$, entonces $h_k^+(z,w) = +\infty$, para todo $(z,w) \in M \times N$.*

Lema 13

1. *Existe $k > 0$ suficientemente grande, tal que*
   (a) $h_{-k}^+(x,y) = -\infty$.
   (b) $h_k^+(x,y) = +\infty$.
2. *Además, si $k_1 < k_0 < k_2$, se cumple*
   (a) *Si $h_{k_0}^+(x,y) = -\infty$, entonces $h_{k_1}^+(x,y) = -\infty$.*
   (b) *Si $h_{k_0}^+(x,y) = +\infty$, entonces $h_{k_2}^+(x,y) = +\infty$.*

(c) Más aun, si $h^+_{k_0}(x,y) \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$h^+_{k_1}(x,y) = -\infty,$$
$$h^+_{k_2}(x,y) = +\infty.$$

Los resultados anteriores son útiles para demostrar principalmente el siguiente resultado.

Teorema 14 *Si* M *y* N *son espacios métricos compactos,* $V : M \times N \times M \times N \to \mathbb{R}$ *es una función Lipschitz y* $(x,y) \in M \times N$*, entonces*

$$c = \inf\left\{k \in \mathbb{R} : h^+_k = +\infty\right\} = \sup\left\{k \in \mathbb{R} : h^+_k = -\infty\right\},$$

y $h^+_c(x,y) \in \mathbb{R}$*, en donde* c *es el número real en el Teorema 1.*

Es claro que si $k \neq c$ entonces $h^-_k(x,y) = h^+_k(x,y)$, para todo $(x,y) \in M \times N$.

Corolario 15 *Si* M *y* N *son espacios métricos compactos,* $V : M \times N \times M \times N \to \mathbb{R}$ *es una función Lipschitz y* $(x,y) \in M \times N$*, entonces*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}^+} |nc + h(n)(x,y)| < +\infty,$$

con c *el número real en el Teorema 1.*

Demostración. Por la definiciones de h^-_c y h^+_c, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$h^-_c(x,y) - 1 < nc + h(n)(x,y) < h^+_c(x,y) + 1,$$

para $n \geq N$. Sea A el máximo de entre los números $|h^-_c(x,y) - 1|$, $|h^+_c(x,y) + 1|$, $|c + h(1)(x,y)|$, $|2c + h(2)(x,y)|, \ldots, |(N-1)c + h(N-1)(x,y)|$. Ahora, según los Teoremas 2 y 14 $h^-_c(x,y), h^+_c(x,y) \in \mathbb{R}$, por lo que $A \in \mathbb{R}$; y además

$$|nc + h(n)(x,y)| \leq A,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. ■

Corolario 16 *Si* M *y* N *son espacios métricos compactos,* $V : M \times N \times M \times N \to \mathbb{R}$ *es una función Lipschitz y* $(x,y) \in M \times N$*, entonces*

$$-c = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} h(n)(x,y),$$

en donde c *es el número real en el Teorema 1.*

Ya que se ha podido expresar c sólo en términos de la función $h(n)$, se verá a continuación que es posible hacerlo sólo en términos de las acciones para ciertas sucesiones especiales, mismas que se pueden obtener considerando alguna solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, obteniendo sus elementos paso por paso.

Teorema 3 *Si M y N son espacios métricos compactos, $V : M \times N \times M \times N \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz y $(x, y) \in M \times N$, entonces existen sucesiones $\{x_i^*\}_{i=0}^{\infty} \subset M$ y $\{y_i^*\}_{i=0}^{\infty} \subset N$ tales que*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+} |nc + A^n (\overline{x}^* (n), \overline{y}^* (n))| < +\infty,$$

en donde $\overline{x}^* (n) := \{x_i^*\}_{i=0}^{n} \in S_M (x, n)$ y $\overline{y}^* (n) := \{y_i^*\}_{i=0}^{n} \in S_N (y, n)$, con c el número real en el Teorema 1.

Demostración. Considerando $n \in \mathbb{Z}^+$, $(x, y) \in M \times N$ y $u \in C (M \times N, \mathbb{R})$ solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi (2.10). Como M y N son espacios métricos compactos, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, dado $x_n \in M$, se puede escoger

$$\begin{aligned} y_n^* (x_n) \in \arg\min_{y_n\in N} \Big\{ & u (x_n, y_n) - u \left(x_{n-1}^*, y_{n-1}^* \left(x_{n-1}^*\right)\right) \\ & -V \left(x_{n-1}^*, y_{n-1}^* \left(x_{n-1}^*\right), x_n, y_n\right) \Big\}, \end{aligned}$$

en donde $(x_0^*, y_0^* (x_0^*)) = (x, y)$. A continuación se toma

$$\begin{aligned} x_n^* \in \arg\max_{x_n\in M} \Big\{ & u (x_n, y_n^* (x_n)) - u \left(x_{n-1}^*, y_{n-1}^* \left(x_{n-1}^*\right)\right) \\ & -V \left(x_{n-1}^*, y_{n-1}^* \left(x_{n-1}^*\right), x_n, y_n^* (x_n)\right) \Big\}. \end{aligned}$$

Y considerando que u es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi se tiene que

$$\begin{aligned} c &= \sup_{x_n\in M} \inf_{y_n\in N} \Big\{ u (x_n, y_n) - u \left(x_{n-1}^*, y_{n-1}^* \left(x_{n-1}^*\right)\right) \\ &\qquad -V \left(x_{n-1}^*, y_{n-1}^* \left(x_{n-1}^*\right), x_n, y_n\right) \Big\} \\ &= u (x_n^*, y_n^* (x_n^*)) - u \left(x_{n-1}^*, y_{n-1}^* \left(x_{n-1}^*\right)\right) \\ &\qquad -V \left(x_{n-1}^*, y_{n-1}^* \left(x_{n-1}^*\right), x_n^*, y_n^* (x_n^*)\right). \end{aligned}$$

Como estas identidades son válidas para todos los índices previos, se pueden sumar todas ellas; cancelándose todos los sumandos para u excepto el primero $u (x, y)$ y el último $u (x_n, y_n^* (x_n^*))$. Consecuentemente, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$nc = u (x_n^*, y_n^* (x_n^*)) - u (x, y) - A^n (\overline{x}^* (n), \overline{y}^* (n)) \tag{3.2}$$

en donde $\overline{x}^*(n) := \{x_i^*\}_{i=0}^n \in S_M(x,n)$ y $\overline{y}^*(n) := \{y_i^*(x_i^*)\}_{i=0}^n \in S_N(y,n)$.

Finalmente debido a que $u \in C(M \times N, \mathbb{R})$ y por la compacidad de M y N, entonces $\inf u, \sup u \in \mathbb{R}$. Luego, utilizando la relación (3.2) se obtiene

$$\inf u - \sup u \leq nc + A^n(\overline{x}^*(n), \overline{y}^*(n)) \leq \sup u - \inf u.$$

De donde se concluye que

$$|nc + A^n(\overline{x}^*(n), \overline{y}^*(n))| \leq \sup u - \inf u < +\infty,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. ∎

Como consecuencia inmediata de este resultado se obtiene otra caracterización del valor crítico en términos de las acciones para las sucesiones encontradas en el teorema anterior.

Corolario 17 *Si M y N son espacios métricos compactos, $V : M \times N \times M \times N \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz y $(x,y) \in M \times N$, entonces existen sucesiones $\{x_i^*\}_{i=0}^\infty \subset M$ y $\{y_i^*\}_{i=0}^\infty \subset N$ tales que*

$$-c = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} A^n(\overline{x}^*(n), \overline{y}^*(n)),$$

en donde $\overline{x}^*(n) := \{x_i^*\}_{i=0}^n \in S_M(x,n)$ y $\overline{y}^*(n) := \{y_i^*\}_{i=0}^n \in S_N(y,n)$, con c el número real en el Teorema 1.

Capítulo 4

Soluciones Críticas

4.1 $k-$Soluciones

A continuación se verá una caracterización de las soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi que permitirá demostrar que la barrera de Peierls es una de esas soluciones.

Definición 18 *Para una constante $k \in \mathbb{R}$ y un punto $(x_0, y_0) \in M \times N$, se dice que una función continua $g \in C(M \times N, \mathbb{R})$*

1. *es $k-$supersolución si existe $\widehat{x}_1 \in M$ tal que*

$$g(\widehat{x}_1, y_1) - g(x_0, y_0) - V(x_0, y_0, \widehat{x}_1, y_1) \geq k,$$

para todo $y_1 \in N$;

2. *es $k-$subsolución si, para cualquier $x_1 \in M$, existe $\widehat{y}_1 = \widehat{y}_1(x_1) \in N$ tal que*

$$g(x_1, \widehat{y}_1) - g(x_0, y_0) - V(x_0, y_0, x_1, \widehat{y}_1) \leq k.$$

Se dice que g es una $k-$solución, si g es a la vez $k-$supersolución y $k-$subsolución.

Se tienen las siguientes propiedades para las super y subsoluciones.

Lema 19 *Para $g \in C(M \times N, \mathbb{R})$ y $(x_0, y_0) \in M \times N$,*

1. *Si g es $k-$supersolución y $k' \leq k$, entonces g es $k'-$supersolución.*

2. *Si g es $k-$subsolución y $k' \geq k$, entonces g es $k'-$subsolución.*

3. *Si los conjuntos $S_U, S_L \subset \mathbb{R}$ están definidos por*

$$S_U(g) := \{k \in \mathbb{R} : g \text{ es } k - \textit{supersolución}\},$$
$$S_L(g) := \{k \in \mathbb{R} : g \text{ es } k - \textit{subsolución}\},$$

entonces $\sup S_U(g) \leq \inf S_L(g)$.

Demostración. Las primeras dos afirmaciones son inmediatas. Para probar la tercer afirmación considérese $a \in S_U(g)$ y $b \in S_L(g)$. Como g es una $a-$supersolución, existe $\widehat{x}_1 \in M$ tal que

$$g(\widehat{x}_1, y_1) - g(x_0, y_0) - V(x_0, y_0, \widehat{x}_1, y_1) \geq a,$$

para todo $y_1 \in N$. Y como g es una $b-$subsolución, entonces existe $\widehat{y}_1 = \widehat{y}_1(\widehat{x}_1)$ tal que

$$g(\widehat{x}_1, \widehat{y}_1) - g(x_0, y_0) - V(x_0, y_0, \widehat{x}_1, \widehat{y}_1) \leq b.$$

Combinando estas dos desigualdades, se tiene que $a \leq b$, de donde se concluye que $\sup S_U(g) \leq \inf S_L(g)$. ■

Obsérvese que las $k-$soluciones están relacionadas con el operador de Lax mediante el siguiente resultado.

Proposición 20 *g es una $k-$solución si y sólo si g es un punto fijo del operador de Lax, con constante k.*

Demostración. Considérese $(x_0, y_0) \in M \times N$.

I. g es una $k-$supersolución si y sólo si existe $\widehat{x}_1 \in M$ tal que

$$\inf_{y_1 \in N} \{g(\widehat{x}_1, y_1) - V(x_0, y_0, \widehat{x}_1, y_1)\} \geq g(x_0, y_0) + k,$$

De esta manera

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1 g(x_0, y_0) &= \inf_{\Theta(1)} \sup_{\overline{x}(1)} \{g(x_1, \Theta(1)[\overline{x}(1)]_1) - V(x_0, y_0, x_1, \Theta(1)[\overline{x}(1)]_1)\} \\
&= \sup_{x_1 \in M} \inf_{y_1 \in N} \{g(x_1, y_1) - V(x_0, y_0, x_1, y_1)\} \\
&\geq g(x_0, y_0) + k
\end{aligned}$$

en donde $\overline{x}(1) \in S_M(x_0, 1)$ y $\Theta(1) \in \mathcal{E}_N(x_0, y_0, 1)$.

II. g es una $k-$subsolución si y sólo si, para cualquier $x_1 \in M$,

$$\inf_{y_1 \in N} \{g(x_1, y_1) - V(x_0, y_0, x_1, y_1)\} \leq g(x_0, y_0) + k,$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1 g(x_0, y_0) &= \inf_{\Theta(1)} \sup_{\overline{x}(1)} \{g(x_1, \Theta(1)[\overline{x}(1)]_1) - V(x_0, y_0, x_1, \Theta(1)[\overline{x}(1)]_1)\} \\
&= \sup_{x_1 \in M} \inf_{y_1 \in N} \{g(x_1, y_1) - V(x_0, y_0, x_1, y_1)\} \\
&\leq g(x_0, y_0) + k
\end{aligned}$$

en donde $\overline{x}(1) \in S_M(x_0, 1)$ y $\Theta(1) \in \mathcal{E}_N(x_0, y_0, 1)$.

Combinando los resultados obtenidos en I y II, se tiene que g es una $k-$solución si y sólo si

$$\mathcal{L}^1 g(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) + k.$$

Además, utilizando la propiedad de semigrupo del operador de Lax,

$$\mathcal{L}^n g(x_0, y_0) = \underbrace{\mathcal{L}^1 \circ \cdots \circ \mathcal{L}^1}_{n \text{ veces}} g(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) + nk,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, es decir g es un punto fijo del operador de Lax con constante k a un paso si y sólo si lo es a n pasos. De donde se concluye el resultado. ■

De acuerdo al Teorema 1, existe una única constante para todos los puntos fijos del operador de Lax, por lo que habrá solo un tipo de $k-$soluciones, para ser más precisos cuando $k = c$. Las $c-$soluciones se llamarán soluciones críticas.

Como consecuencia del resultado anterior tenemos también que las soluciones críticas satisfacen las siguientes afirmaciones, para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.

1. Para cualquier estrategia $\Theta(n) \in \mathcal{E}_N(x_0, y_0, n)$, existe una sucesión $\widehat{\overline{x}}(n) \in S_M(x_0, n)$ tal que

$$u\left(\widehat{x}_n, \Theta(n)\left[\widehat{\overline{x}}(n)\right]_n\right) - u(x_0, y_0) - A^n\left(\widehat{\overline{x}}(n), \Theta(n)\left[\widehat{\overline{x}}(n)\right]\right) \geq nc.$$

2. Existe una estrategia $\widehat{\Theta}(n) \in \mathcal{E}_N(x_0, y_0, n)$ tal que

$$u\left(x_n, \widehat{\Theta}(n)[\overline{x}(n)]_n\right) - u(x_0, y_0) - A^n\left(\overline{x}(n), \widehat{\Theta}(n)[\overline{x}(n)]\right) \leq nc,$$

para toda sucesión $\overline{x}(n) \in S_M(x_0, n)$.

El siguiente resultado establece otra caracterización del número c del Teorema 1.

Teorema 4 *Si $u \in C(M \times N)$ es un punto fijo del operador de Lax $\mathcal{L}^n$ con constante $c \in \mathbb{R}$, entonces*

$$c = \sup S_U(u) = \inf S_L(u).$$

Demostración. De acuerdo a la Proposición 20, u es una solución crítica. Por lo tanto $c \in S_U(u) \cap S_L(u)$. Y de acuerdo al Lema 19

$$c = \sup S_U(u) = \inf S_L(u).$$

■

4.2 Una Solución Crítica

Además de que la barrera de Peierls es útil para encontrar distintas caracterizaciones para la constante c del Teorema 1, se demostrará que es una solución crítica. Para esto se considerará el comportamiento de las sucesiones extremales para la barrera de Peierls definidas como sigue.

Definición 21 *Se dice que una pareja $\left(\widehat{\overline{x}}(n), \widehat{\Theta}(n)\right)$, formada por una sucesión en $S_M(x_0, n)$ y una estrategia en $\mathcal{E}_N(x_0, y_0, n)$, es extremal para la función $h(n)(x_0, y_0)$, si $h(n)(x_0, y_0) = A^n\left(\widehat{\overline{x}}(n), \widehat{\Theta}(n)\left[\widehat{\overline{x}}(n)\right]\right)$ y satisface la siguientes dos condiciones.*

1. *Para cualquier estrategia $\Theta(n) \in \mathcal{E}_N(x_0, y_0, n)$, existe una sucesión $\widetilde{\overline{x}}(n) \in S_M(x_0, n)$ tal que*

$$A^n\left(\widehat{\overline{x}}(n), \widehat{\Theta}(n)\left[\widehat{\overline{x}}(n)\right]\right) \geq A^n\left(\widetilde{\overline{x}}(n), \Theta(n)\left[\widetilde{\overline{x}}(n)\right]\right).$$

2. *Para toda sucesión* $\overline{x}(n) \in S_M(x_0, n)$ *se cumple*

$$A^n\left(\widehat{\overline{x}}(n), \widehat{\Theta}(n)\left[\widehat{\overline{x}}(n)\right]\right) \leq A^n\left(\overline{x}(n), \widehat{\Theta}(n)\left[\overline{x}(n)\right]\right).$$

El siguiente resultado muestra que la barrera inferior de Peierls es una solución crítica y por lo tanto un punto fijo del operador de Lax con constante c.

Teorema 22 $-h_c^-$ *es una solución crítica.*

Demostración. Consideremos $(x_0, y_0) \in M \times N$. De acuerdo al Teorema 2, $h_c^-(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$.

I. Se probará inicialmente que $-h_c^-$ es una $c-$supersolución. Sea $y_1 \in N$. Considérese $\widehat{\Phi}(n-1)$ estrategia en $\mathcal{E}_N(x_1, y_1, n-1)$ extremal para la función $h(n-1)(x_1, y_1)$, entonces

$$h(n-1)(x_1, y_1) = \inf_{\overline{z}(n-1)} A^{n-1}\left(\overline{z}(n-1), \widehat{\Phi}(n-1)\left[\overline{z}(n-1)\right]\right)$$

en donde $\overline{z}(n-1) \in S_M(x_1, n-1)$.

Para cualquier $\overline{x}(n) \in S_M(x_0, n)$ defínase $\widehat{\Theta}(n) \in \mathcal{E}_N(x_0, y_0, n)$ como

$$\widehat{\Theta}(n)\left[\overline{x}(n)\right]_i := \begin{cases} y_0, & i = 0 \\ \widehat{\Phi}(n-1)\left[\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\right]_{i-1}, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

entonces

$$h_c^-(x_0, y_0) \geq \liminf_{n\to\infty}\left\{\inf_{\overline{x}(n)} A^n\left(\overline{x}(n), \widehat{\Theta}(n)\left[\overline{x}(n)\right]\right) + nc\right\}.$$

Considérese $\widehat{\overline{x}}(n) \in S_M(x_0, n)$ tal que

$$\inf_{\overline{x}(n)} A^n\left(\overline{x}(n), \widehat{\Theta}(n)\left[\overline{x}(n)\right]\right) = A^n\left(\widehat{\overline{x}}(n), \widehat{\Theta}(n)\left[\widehat{\overline{x}}(n)\right]\right).$$

Se escoge una subsucesión $n_j \uparrow \infty$ tal que $n_1 = 1$ y

$$\begin{aligned} &\liminf_{n\to\infty} A^n\left(\widehat{\overline{x}}(n), \widehat{\Theta}(n)\left[\widehat{\overline{x}}(n)\right]\right) + nc \\ &\qquad = \lim_{j\to\infty} A^{n_j}\left(\widehat{\overline{x}}(n_j), \widehat{\Theta}(n_j)\left[\widehat{\overline{x}}(n_j)\right]\right) + n_j c, \end{aligned}$$

extrayendo una subsucesión en caso necesario, se puede asumir que

$$\widehat{\overline{x}}(n_j) \to \overline{x}^* \in S_M(x_0,\infty).$$

en donde $S_M(x_0,\infty)$ denota el conjunto de sucesiones infinitas en M con punto inicial x_0. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
h_c^-(x_0,y_0) &\geq \lim_{j\to\infty} A^{n_j}\left(\widehat{\overline{x}}(n_j), \widehat{\Theta}(n_j)\left[\widehat{\overline{x}}(n_j)\right]\right) + n_j c \\
&= \lim_{j\to\infty}\Bigg\{V(x_0,y_0,x_1^*,y_1)+c \\
&\quad + \left[V\left(x_0,y_0,\widehat{\overline{x}}(n_j)_1, \widehat{\Theta}(n_j)\left[\widehat{\overline{x}}(n_j)\right]_1\right) - V(x_0,y_0,x_1^*,y_1)\right] \\
&\quad + \left[V\left(\widehat{\overline{x}}(n_j)_1, \widehat{\Theta}(n_j)\left[\widehat{\overline{x}}(n_j)\right]_1, \widehat{\overline{x}}(n_j)_2, \widehat{\Theta}(n_j)\left[\widehat{\overline{x}}(n_j)\right]_2\right)\right. \\
&\qquad \left. - V\left(x_1^*,y_1,\widehat{\overline{x}}(n_j)_2, \widehat{\Theta}(n_j)\left[\widehat{\overline{x}}(n_j)\right]_2\right)\right] \\
&\quad + A^{n_j-1}\left(\widehat{\overline{z}}(n_j-1), \widehat{\Phi}(n_j-1)\left[\widehat{\overline{z}}(n_j-1)\right]\right) + (n_j-1)c\Bigg\},
\end{aligned}$$

en donde $\widehat{\overline{z}}(n_j-1) = \left\{x_1^*, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_{n_j}\right\}$. Como V es continua, entonces

$$\begin{aligned}
h_c^-(x_0,y_0) &\geq V(x_0,y_0,x_1^*,y_1)+c \\
&\quad + \liminf_{n\to\infty}\Bigg\{\inf_{\overline{z}(n-1)} A^{n-1}\left(\widehat{\overline{z}}(n-1), \widehat{\Phi}(n-1)\left[\widehat{\overline{z}}(n-1)\right]\right) \\
&\qquad + (n-1)c\Bigg\} \\
&= V(x_0,y_0,x_1^*,y_1)+c+h_c^-(x_1^*,y_1).
\end{aligned}$$

Lo cual demuestra que existe $x_1^* \in M$ tal que

$$-h_c^-(x_1^*,y_1) + h_c^-(x_0,y_0) - V(x_0,y_0,x_1^*,y_1) \geq c,$$

para todo $y_1 \in N$. De donde $-h_c^-$ es una $c-$supersolución.

II. A continuación se probará que $-h_c^-$ es una $c-$subsolución. Sea $x_1 \in M$. Para $n \in \mathbb{Z}^+$, considérese $\widehat{\Theta}(n)$ estrategia en $\mathcal{E}_N(x_0,y_0,n)$ extremal para $h(n)(x_0,y_0)$, entonces

$$h(n)(x_0,y_0) = \inf_{\overline{x}(n)} A^n\left(\overline{x}(n), \widehat{\Theta}(n)\left[\overline{x}(n)\right]\right).$$

Se observa que $\widehat{\Theta}(n)[\overline{x}(n)]_1$ depende exclusivamente de x_1, ya que $\widehat{\Theta}(n)$ es una estrategia en $\mathcal{E}_N(x_0, y_0, n)$. Supóngase que $\widehat{\Theta}(n)[\overline{x}(n)]_1 \to y_1^*(x_1)$.

Para $\overline{w}(n-1) := \{x_1, w_2, \ldots, w_n\} \in S_M(x_1, n-1)$, defínase $\widehat{\Phi}(n-1) \in \mathcal{E}_N(x_1, y_1^*(x_1), n-1)$, como sigue

$$\widehat{\Phi}(n-1)[\overline{w}(n-1)]_i := \begin{cases} y_1^*(x_1), & i = 0 \\ \widehat{\Theta}(n)[\overline{z}(n)]_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

en donde $\overline{z}(n) := \{x_0, x_1, w_2, w_3, \ldots, w_n\} \in S_M(x_0, n)$. De esta manera

$$h(n-1)(x_1, y_1^*(x_1)) \geq \inf_{\overline{w}(n-1)} A^{n-1}\left(\overline{w}(n-1), \widehat{\Phi}(n-1)[\overline{w}(n-1)]\right).$$

Se puede tomar $\widehat{\overline{w}}(n-1) := \{x_1, \widehat{w}_2, \ldots, \widehat{w}_n\} \in S_M(x_1, n-1)$ extremal para

$$\inf_{\overline{w}(n-1)} A^{n-1}\left(\overline{w}(n-1), \widehat{\Phi}(n-1)[\overline{w}(n-1)]\right)$$

y una subsucesión $n_j \uparrow \infty$ tal que

$$\begin{aligned} h_c^-(x_1, y_1^*(x_1)) \quad \geq \quad & \lim_{j\to\infty} A^{n_j-1}\left(\widehat{\overline{w}}(n_j-1), \widehat{\Phi}(n_j-1)\left[\widehat{\overline{w}}(n_j-1)\right]\right) \\ & + (n_j-1)\,c. \end{aligned}$$

Si $\widehat{\overline{z}}(n_j) := \left\{x_0, x_1, \widehat{w}_2, \widehat{w}_3, \ldots, \widehat{w}_{n_j}\right\}$ entonces

$$\begin{aligned} h_c^-(x_0, y_0) \quad = \quad & \liminf_{n\to\infty} \inf_{\overline{x}(n)} A^n\left(\overline{x}(n), \widehat{\Theta}(n)[\overline{x}(n)]\right) + nc \\ \leq \quad & \lim_{j\to\infty} \Bigg\{ V(x_0, y_0, x_1, y_1^*(x_1)) + c \\ & + \left[V\left(x_0, y_0, x_1, \widehat{\Theta}(n_j)\left[\widehat{\overline{z}}(n_j)\right]_1\right) - V(x_0, y_0, x_1, y_1^*(x_1))\right] \\ & + \Bigg[V\left(x_1, \widehat{\Theta}(n_j)\left[\widehat{\overline{z}}(n_j)\right]_1, \widehat{\overline{z}}(n_j)_2, \widehat{\Theta}(n_j)\left[\widehat{\overline{z}}(n_j)\right]_2\right) \\ & \quad - V\left(x_1, y_1^*(x_1), \widehat{\overline{z}}(n_j)_2, \widehat{\Theta}(n_j)\left[\widehat{\overline{z}}(n_j)\right]_2\right)\Bigg] \\ & + A^{n_j-1}\left(\widehat{\overline{w}}(n_j-1), \widehat{\Phi}(n_j-1)\left[\widehat{\overline{w}}(n_j-1)\right]\right) + (n_j-1)\,c \Bigg\}. \end{aligned}$$

La continuidad de V y las relaciones anteriores implican que para cualquier $x_1 \in M$, existe $y_1^*(x_1) \in N$ tal que

$$-h_c^-(x_1, y_1^*(x_1)) + h_c^-(x_0, y_0) - V(x_0, y_0, x_1, y_1^*(x_1)) \leq c.$$

Por lo tanto $-h_c^-$ es una $c-$subsolución. ∎

Referencias

[CDI97] G. Contreras, J. Delgado & R. Iturriaga, Lagrangian flows: the dynamics of globally minimizing orbits II, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), Vol. 28, No. 2*, 155-196 (1997).

[CI99] G. Contreras & R. Iturriaga, *Global minimizers of autonomous Lagrangians*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro (1999).

[Con01] G. Contreras, Action potential and weak KAM solutions, *Calculus of Variations 13*, 427-458 (2001).

[BCD97] M. Bardi & I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Birkhäuser, Boston (1997).

[ES84] L.C. Evans & P.E. Souganidis, Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations, *Indiana University Mathematics Journal, Vol. 33, No. 5,* 773-797 (1984).

[Fat97] A. Fathi, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., Vol. 324, No. 9,* 1043-1046 (1997).

[Fat98] A. Fathi, Sur la convergence du semi-groupe de Lax-Oleinik, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., Vol. 327, No. 3,* 267-270 (1998).

[Fat08] A. Fathi, *Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics, preliminary version*, (2008).

[FS04] A. Fathi, & A. Siconolfi, Existence of C^1 critical subsolutions of the Hamilton-Jacobi equation, *Inventiones Mathematicae, 155*, 363-388 (2004).

[FS06] W.H. Fleming & H.M. Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, 2d. Ed., Springer (2006).

[Gom05] D.A. Gomes, Viscosity solution methods and the discrete Aubry-Mather problem, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol. 13, No. 1*, 103-116 (2005).

[Man93] R. Mañé, Global variational methods in conservative dynamics, *18 Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)*, Rio de Janeiro (1993).

[Man97] R. Mañé, Lagrangian flows: the dynamics of globally minimizing orbits, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), Vol. 28, No. 2*, 141-153 (1997).

[Mat91] J. N. Mather, Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems, *Math. Z. 207*, 169-207 (1991).

[Sin03] M. Sintzoff, On the design of correct and optimal dynamical systems and games, *Information Processing Letters 88*, 59-65 (2003).