

Agradecimientos

Por el apoyo económico que recibí para realizar mis estudios de maestría al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT). También expreso mi agradecimiento por el apoyo económico brindado para terminar mi tesis de maestría al Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT).

Por dedicarme el tiempo necesario como director de tesis para llevar acabo este trabajo, por sus enseñanzas, motivación y apoyo, agradezco al Dr. Francisco Javier Solís Lozano. Por fungir como sinodales de esta tesis, por su apoyo, paciencia y guía constante, expreso mi agradecimiento a la Dr. Jesús Adrián Espínola Rocha y al Dr. Fausto Antonio Ongay Larios.

A mis padres Alicia Montes Pérez y Carlos Yebra Llamas por haberme dado todo su apoyo, por su comprensión, amor y fuerza. A mi hermano Eduardo Yebra Montes por su apoyo y ánimo brindado durante el tiempo lejos de mi familia.

A mis maestros Jimmy Petean Humen, Javier Flavio Vigueras Gómez, Marcos Aurelio Capistrán Ocampo, Silvia Jerez Galiano, Stephen Bruce Sontz, Francisco Sánchez Sánchez y Miguel Angel Moreles Vázquez por sus enseñanzas y consejos brindados.

A mis compañeros de generación, amigos y segunda familia Lilia Alanís, Josafath Alfredo Otero, Julio López, Adrián Jinich, Hugo Torres, Emilio Salcedo, Raquel Perales, Valentin Tovar y Lina Vargas por su amistad, compañerismo, consejos y gratos momentos. Agradezco también a la familia Alanís López por el apoyo que me brindaron para finalizar este trabajo.

Índice general

1. Introducción	5
2. Problemas típicos de persecución.	9
2.1. Problema perseguidor-evasor a rapidez constante.	9
2.2. Persecución simétrica en el plano a rapidez constante.	12
3. Teoría de Grafos, Matrices circulantes y de Fourier, Oscilador de van der Pol.	17
3.1. Teoría de Grafos.	17
3.1.1. Familias especiales de grafos.	19
3.1.2. Isomorfismos.	21
3.1.3. Grafos dirigidos.	22
3.1.4. Dgrafo k -circular.	24
3.2. Matrices circulantes y de Fourier.	26
3.3. Oscilador de van der Pol	28
3.3.1. Ciclos Límite.	31
4. Persecución cíclica.	35
4.1. Problema "perseguidor-evasor" a rapidez variable.	35
4.2. Persecución r -cíclica.	37
4.2.1. Representación por medio de digrafos.	38
4.2.2. Modelo matemático para la persecución r -cíclica.	40
4.3. Caracterización del punto de convergencia para el sistema 1-cíclico.	42
4.4. Generalización	44
4.5. Diversos escenarios de persecución cíclica	46
5. Patrones de persecución y el oscilador de Van der Pol. Caso lineal.	53
5.1. Caso $\mu = 0$, n individuos.	53
5.1.1. Representación por medio de digrafos.	54
5.1.2. Análisis y caracterización.	54

6. Patrones de persecución y el oscilador de Van der Pol. Caso no lineal.	59
6.1. Caso no lineal, $\mu \neq 0$.	59
7. Conclusiones.	63
A. Solución de ecuaciones del problema perseguidor-evasor a velocidad constante.	65
Bibliografía	68

Capítulo 1

Introducción

En muchos sistemas biológicos, organismos forman grupos de enlace con un comportamiento complejo en su adaptación y coordinación constante en su entorno cambiante. El comportamiento colectivo en grupos de animales es un fenómeno generalizado en sistemas biológicos, a diferentes escalas y niveles de complejidad. El comportamiento colectivo no sólo se observa en insectos sociales tales como hormigas o abejas, los cuales están genéticamente diseñados para cooperar con su colonia, sino también se observa en conjuntos de individuos no relacionados, como aves o peces. Una de las razones de la cohesividad de los individuos es la persecución mutua entre ellos [1] y existen diversos ejemplos en la naturaleza como los enjambres de abejas, manadas de mamíferos, bancos de peces, etcétera (Figura 1.1).

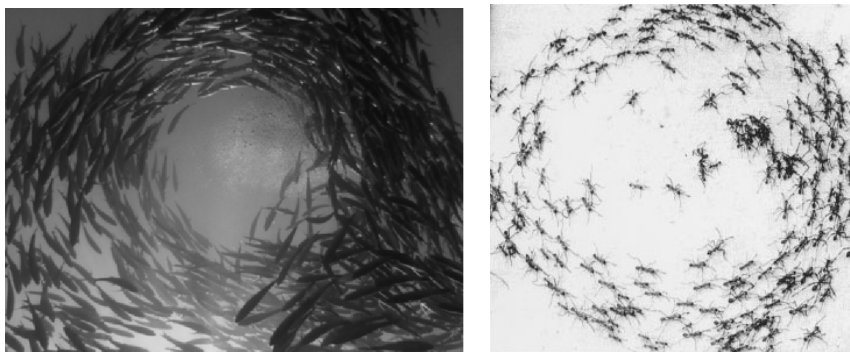


Figura 1.1: Comportamiento colectivo de organismos en el espacio (izq. cardumen) y en el plano (der. hormigas).

El problema de persecución es bastante antiguo, fue estudiado por Leonardo da

Vinci al inicio del siglo dieciséis y ha atraído la atención de varios matemáticos desde entonces. El científico francés Pierre Bouguer consideró el siguiente problema: Considérese un individuo B en el plano que se mueve a lo largo de una curva conocida y sea A un segundo individuo cuyo movimiento está siempre dirigido hacia B , moviéndose ambos puntos con rapidez constante [2]. Al problema de determinación de la trayectoria de A le denominaremos el de *perseguidor-evasor a rapidez constante*. Más de un siglo después, en 1877, Edouard Lucas planteó el problema acerca de las trayectorias que se generan si tres perros, inicialmente situados en los vértices de un triángulo equilátero, corren uno tras otro. En 1880, Henri Brocard dió respuesta a dicho problema, respondiendo que cada curva de persecución es una espiral logarítmica y que los perros se alcanzan en un punto en común. A este problema se le denomina el de *persecución simétrica*.

De manera general el mecanismo de persecución simétrica consiste en n individuos situados en los vértices de un polígono regular de n lados, cada lado de longitud a , donde cada individuo sigue a su vecino dado un sentido (ya sea en el sentido de las manecillas del reloj o al contrario), con rapidez constante. La ruta de cualesquiera de los n individuos consiste de una espiral logarítmica que converge en el centro del polígono y recorre una distancia dada por

$$\frac{a}{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

En este trabajo se estudian las propiedades geométricas asintóticas de un sistema de organismos bajo diversos tipos de persecución cíclica. Se proponen variados modelos de persecución generalizados con el fin de clasificar los sistemas conforme al número de puntos fijos, su comportamiento periódico y sus ciclos límite. Por medio de digrafos se caracteriza la relación existente entre los n individuos involucrados en el sistema. Consideramos persecuciones cíclicas similares a algunos mecanismos propuestos por varios autores (ver [3, 4 y 5]) aunque de manera diferente de como se trata en este trabajo. Los modelos presentados son estudiados analíticamente y numéricamente considerando diferentes tipos de persecución. Cabe aclarar que sólo son considerados modelos continuos aunque sistemas discretos análogos pueden ser obtenidos y analizados de manera similar.

Finalmente, en los sistemas se incluyen osciladores de relajación a fin de analizar diferentes escenarios asintóticos. En particular se acoplan los sistemas cíclicos con el oscilador de van der Pol por varias razones: Primero, por ser uno de los sistemas más simples con un grado de libertad con un ciclo límite y segundo, por su importancia en diferentes aplicaciones en sistemas mecánicos, electrónicos y biológicos.

Para detallar la organización de esta tesis a continuación se da un resumen del contenido de cada Capítulo.

2. Problemas típicos de persecución. En este capítulo se presentan los problemas de *perseguidor-evasor a rapidez constante* y el de *persecución simétrica*.

3. Teoría de Grafos, Matrices circulantes y de Fourier, Oscilador de van der Pol.

Para analizar y describir los diversos casos de persecución que se presentan en el desarrollo del trabajo es necesario tener presentes conceptos ya establecidos

de diversas áreas de las Matemáticas. Con la Teoría de Grafos se describen y cualifican los diferentes patrones de persecución brindándole una estructura Matemática a las ideas intuitivas que implican las relaciones entre los n individuos involucrados en el sistema. En la *persecución cíclica* y en los casos lineales que generalizan este patrón, los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que los modelan involucran matrices circulantes y de Fourier, que son parte fundamental para la caracterización del punto o puntos de convergencia de cada sistema. También se encuentra la ecuación de van der Pol que modela las oscilaciones en circuitos de bulbos y se presenta el teorema de Liénard que establece que el oscilador de van der Pol tiene un único ciclo límite estable.

4. Persecución cíclica. Se presenta el problema de *perseguidor-evasor* con rapidez variable, en el cual se tienen un par de individuos en el plano, el individuo perseguido tiene una trayectoria dada por una función conocida, el individuo perseguidor tendrá una rapidez que varía dependiendo de la *cercanía* que tenga con su objetivo. La solución consiste en la ruta que recorre el individuo perseguidor. Posteriormente, el problema se extiende para $n > 2$ individuos involucrados en el sistema, el problema se denomina *persecución cíclica*. Se analizan las propiedades geométricas asintóticas de diversos escenarios, clasificándolos de acuerdo al punto o puntos de convergencia. Para comprender cómo es la relación que se da entre los n individuos considerados en el sistema se asocia un digrafo circular, que por medio de su respectivo diagrama clarifica el fenómeno de persecución.

5. Patrones de persecución y el oscilador de van der Pol. Caso lineal. En este capítulo se presenta el patrón de *persecución en hilera*, en el cual están involucrados n individuos en el plano, el n -ésimo individuo tiene una trayectoria independiente. Dicha trayectoria es la circunferencia unitaria con centro en el origen (esta trayectoria resulta del retrato fase del oscilador de van der Pol $\ddot{v} - \mu(1 - v^2)\dot{v} + v = 0$, cuando $\mu = 0$). El n -ésimo individuo es seguido por el individuo $n - 1$, el cual a su vez es seguido por el individuo $n - 2$ y así sucesivamente. Los $n - 1$ individuos perseguidores después de cierto tiempo tendrán una trayectoria periódica, la cual tiende asintóticamente a una circunferencia con centro en el origen y radio que depende de la velocidad angular que tiene el individuo *líder*.

6. Patrones de persecución y el oscilador de van der Pol. Caso no lineal. Continuando con el análisis del patrón de *persecución en hilera* en este capítulo se plantea el caso en el cual el n -ésimo individuo, es decir, el individuo *líder* que tiene movimiento independiente, sigue la trayectoria dada por el plano fase del oscilador de van der Pol $\ddot{v} - \mu(1 - v^2)\dot{v} + v = 0$ para $\mu > 0$. El sistema resultante se soluciona numéricamente y se enuncian características y propiedades de los ciclos límite de los $n - 1$ individuos perseguidores.

7. Conclusiones. Por último se dan las conclusiones del trabajo de tesis.

Capítulo 2

Problemas típicos de persecución.

Como motivación, en este capítulo se analizan un par de problemas típicos acerca de persecución de individuos en el plano. Inicialmente se presenta el problema de *perseguidor-evasor a rapidez constante*, propuesto por el científico francés Pierre Bouguer, en el cual se considera un individuo B en el plano que tiene una trayectoria dada por una curva conocida, y se tiene otro individuo A que siempre se dirige hacia B . Dicho problema consiste en determinar la trayectoria del individuo perseguidor A . Posteriormente, en la sección 2.2 se analiza la *persecución simétrica en el plano a rapidez constante* en la cual se tienen involucrados n individuos en el plano, inicialmente cada uno se encuentra en el vértice de un polígono regular de n lados cuya longitud es igual a . Cada individuo se dirigirá hacia su vecino fijando un sentido con la misma rapidez.

2.1. Problema perseguidor-evasor a rapidez constante.

En el problema de perseguidor-evasor a rapidez constante se consideran un par de individuos en el plano, un individuo B que sigue instrucciones específicas, ya sea quedarse quieto o caminar a lo largo de una curva específica y el otro individuo, A , irá en persecución del individuo B , la rapidez de ambos es constante durante el recorrido.

A fin de encontrar las ecuaciones que modelan este problema de persecución hacemos referencia a la figura (2.1), donde tenemos dos curvas en el plano xy ; denotamos por A tanto al individuo perseguidor como a la curva que este sigue, de manera análoga, B será referido como el individuo perseguido así como a la curva que describe su movimiento. Tendremos entonces que en cualquier momento en particular el individuo que persigue se encuentra en un punto $P(x, y)$ y se mueve a lo largo de la ruta A a una rapidez u . En el mismo momento, el individuo evasor está en un punto $Q(m, n)$ y se mueve a lo largo de la ruta B con una rapidez v .

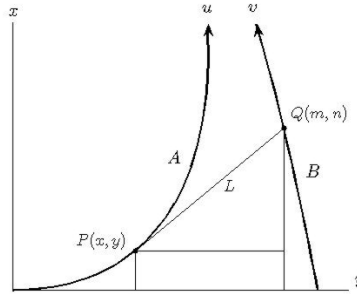


Figura 2.1: Esquema para el problema de persecución.

Si el perseguidor (el individuo A) siempre se dirige directamente hacia el evasor (el individuo B), y si la ruta del perseguido es una curva dada, se tendrá que la pendiente de la curva de persecución es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n - y}{m - x}, \quad (2.1)$$

si $m \neq x$ y donde dy/dx es la derivada de la curva A . La primera derivada de esta ecuación resulta

$$\frac{dn}{dx} = (m - x) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dm}{dx} \frac{dy}{dx}. \quad (2.2)$$

Denotando por \mathbf{u} y \mathbf{v} las velocidades del perseguidor y evasor, y por u y v las magnitudes de dichos vectores, tenemos la relación $u = kv$, donde u y v es la rapidez del perseguidor y evasor respectivamente; $k > 0$ es una constante. Dado que $\mathbf{u} = ds/dt$ y $\mathbf{v} = d\sigma/dt$, donde s y σ son las longitudes de arco a lo largo de las dos curvas, obtenemos

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = k^2 \left\{ \left(\frac{dm}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dx}\right)^2 \right\} \quad (2.3)$$

donde $x = t$ es el parámetro de la curva. Finalmente, suponemos que la ruta del perseguido, $m = g(n)$, es una relación conocida. Esta información aunada a las ecuaciones (2.2) y (2.3) define una ecuación diferencial para $y = y(x)$, cuya solución nos brinda la ruta del perseguidor $y = f(x)$, dadas ciertas condiciones iniciales.

Ejemplo 2.1.1 Consideremos por el momento el problema en el cual el individuo B tiene instrucciones de mantenerse a una rapidez constante v a lo largo de la línea recta $m = a$. Inicialmente el individuo A está localizado en el origen $(0, 0)$ y está dirigido en la dirección del vector velocidad $(u, 0)$. El individuo B , se encuentra en $(a, 0)$ dirigido en la dirección del vector $(0, v)$, como se muestra en la figura (2.2), donde $a = 100$. A partir de $t = 0$, los individuos comienzan a moverse. Dado que la línea recta $m = a$ es vertical se tiene $dm/dx = 0$ y (2.2) se convierte en

$$\frac{dn}{dx} = (m - x) \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (2.4)$$

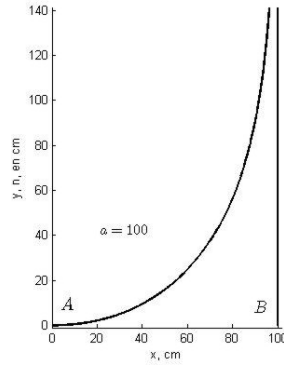


Figura 2.2: Curva de persecución con $u = v$ ($k = 1$).

y por (2.3) se tiene

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = k(m - x) \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (2.5)$$

Esta ecuación diferencial es resuelta para encontrar la respuesta que queremos, $y = f(x)$.

Si ambos individuos se mueven con la misma rapidez, es decir, $u = v$, de modo que $k = 1$, la solución a la ecuación (2.5) es

$$y = \frac{a}{4} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 - \log \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 - 1 \right\} \quad (2.6)$$

Esta ecuación describe la ruta de persecución del individuo A, la cual se muestra en la figura (2.2) con $a = 100\text{cm}$ y $u = v = 1.0\text{cm/s}$. No es sorprendente que el individuo A nunca alcance al individuo B. Sin embargo, notamos que al inicio de la carrera se encontraban a una distancia de $a = 100\text{cm}$ y como el individuo A tomó el acceso directo indicado, asintóticamente se acercará a 50 centímetros, pero no más.

Para el caso en el cual los individuos se mueven con cierta rapidez tal que $k \neq 1$, se obtiene la siguiente solución de la ecuación (2.5):

$$y = \frac{ka}{k^2 - 1} + \frac{ka}{2(k^2 - 1)} \left\{ (k - 1) \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1+1/k} - (k + 1) \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1-1/k} \right\} \quad (2.7)$$

Si $k < 1$, el individuo A nunca alcanzará al individuo B. Sin embargo, si $k > 1$, la captura se dará; esto ocurrirá cuando $x = a$. En el apéndice A se muestra cómo se da solución a la ecuación (2.5), para llegar a la ecuación 2.6 cuando $k = 1$ y a la ecuación (2.7) para $k \neq 1$.

2.2. Persecución simétrica en el plano a rapidez constante.

En el caso anterior se analizó el problema *perseguidor- evasor*; ahora podemos plantear otro mecanismo de persecución. Sean dos individuos, A y B , los cuales inicialmente se encuentran en los extremos de una línea recta de longitud a . Cuando comienza el movimiento, cada individuo se dirige uno a otro, ambos con la misma rapidez, la cual es constante. A este tipo de persecución le denominaremos persecución mutua. Intuitivamente, los dos individuos harán colisión en el punto medio de la línea y cada uno habrá recorrido una distancia de $a/2$.

En la persecución simétrica en el plano tendremos involucrados n individuos, los cuales los denotaremos por v_1, \dots, v_n , $n > 2$. Inicialmente cada uno se encuentra en un vértice de un polígono regular de n lados con centroide en el origen y con lado de longitud a . Cada individuo se dirigirá hacia su vecino fijando un sentido (ya sea en el sentido de las manecillas del reloj o al contrario), cada uno de ellos se moverá a la misma rapidez constante.

Las características más destacadas del análisis son que los n individuos siempre estarán separados por un ángulo $\alpha = 2\pi/n$ radianes y en un instante dado se encontrarán a la misma distancia del origen. Para el análisis utilizamos las posiciones y rutas de dos individuos v_j y v_{j+1} ; por simetría, el comportamiento de los $n - 2$ individuos restantes será análogo.

En cierto instante, el individuo v_j se encontrará en el punto $P(x, y)$ y v_{j+1} en $Q(m, n)$ (tal como se muestra en la Figura 2.3 para el caso $n = 3$ individuos) y la pendiente de la línea tangente a la trayectoria de v_j en P estará dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n - y}{m - x} \quad (2.8)$$

si $m \neq x$. En coordenadas polares los puntos P y Q estarán dados por (r, θ_j) y (r, θ_{j+1}) respectivamente. Recordemos que la distancia al origen de ambos puntos es la misma, es por eso que el valor r es el mismo para P y Q . La relación entre coordenadas cartesianas y polares de los dos puntos es

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta_j & y &= r \operatorname{sen}\theta_j \\ m &= r \cos\theta_{j+1} & n &= r \operatorname{sen}\theta_{j+1}, \end{aligned}$$

donde definimos $\alpha \equiv \theta_{j+1} - \theta_j = 2\pi/n$. Expresando las coordenadas (x, y) de P y (m, n) de Q en términos de los ángulos θ_j y θ_{j+1} establecemos las relaciones siguientes

$$\begin{aligned} m &= r \cos\theta_{j+1} = r \cos(\theta_{j+1} - \theta_j + \theta_j) = r \cos(\alpha + \theta_j) \\ &= r[\cos\alpha \cos\theta_j - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta_j] = r \left(\frac{x}{r} \cos\alpha - \frac{y}{r} \operatorname{sen}\alpha \right) \\ &= x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha. \end{aligned} \quad (2.9)$$

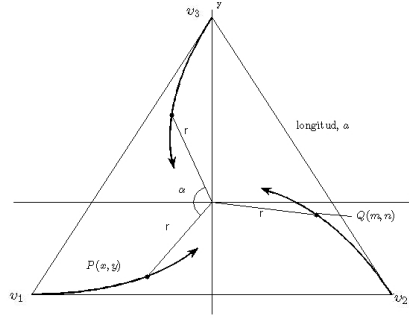


Figura 2.3: Esquema del problema de persecución simétrica de tres individuos.

y

$$\begin{aligned}
 n &= r \operatorname{sen} \theta_{j+1} = r \operatorname{sen}(\theta_{j+1} - \theta_j + \theta_j) = r \operatorname{sen}(\alpha + \theta_j) \\
 &= r[\operatorname{sen} \alpha \cos \theta_j + \cos \alpha \operatorname{sen} \theta_j] = r \left(\frac{x}{r} \operatorname{sen} \alpha - \frac{y}{r} \cos \alpha \right) \\
 &= x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.9) y (2.10) en (2.8) obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \operatorname{sen} \alpha + y(\cos \alpha - 1)}{-y \operatorname{sen} \alpha + x(\cos \alpha - 1)} \tag{2.11}$$

la cual se resuelve realizando la sustitución $y = wx$. Por lo que $\frac{dy}{dx} = w + x \frac{dw}{dx}$. Por simplicidad en el proceso de solución asignamos $\beta = \operatorname{sen} \alpha$ y $\gamma = \cos \alpha - 1$. Así (2.11) es equivalente a las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 w + x \frac{dw}{dx} &= \frac{\beta + \gamma w}{\gamma - \beta w} \\
 \frac{\gamma - \beta w}{\beta(1 + w^2)} \frac{dw}{dx} &= \frac{1}{x}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Integrando ambos lados de (2.12) respecto a x obtenemos

$$\log(x\sqrt{1 + w^2}) = \frac{\gamma}{\beta} \arctan w + k$$

donde k es una constante de integración. Sustituyendo $w = y/x$ en la última ecuación llegamos a

$$\log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\gamma}{\beta} \arctan \frac{y}{x} + k$$

Esta expresión puede ser escrita en coordenadas polares sustituyendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan(y/x)$:

$$\log r = \frac{\cos \alpha - 1}{\operatorname{sen} \alpha} \theta + k \tag{2.13}$$

Para determinar el valor de la constante k , empleamos las condiciones iniciales del individuo del cual queremos encontrar la trayectoria, en términos generales estarán dadas por

$$r(0) = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \quad \theta(0) = \theta_0$$

Así encontramos la respuesta

$$r = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} e^{\frac{\cos \alpha - 1}{\operatorname{sen} \alpha} (\theta - \theta_0)} \quad (2.14)$$

Esta es la ecuación de la espiral logarítmica o equiángulo. Para encontrar la distancia que cada una de los individuos recorre antes de hacer colisión con los demás en el centroide del polígono escribimos la expresión

$$(dS)^2 = (rd\theta)^2 + (dr)^2,$$

donde S es la longitud de arco a lo largo de la ruta de los individuos. De esta relación obtenemos la expresión

$$\frac{dS}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \quad (2.15)$$

Usando (2.14) en (2.15) encontramos

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} e^{\frac{\cos \alpha - 1}{\operatorname{sen} \alpha} (\theta - \theta_0)}$$

Integrando ambos lados de esta ecuación respecto a θ desde θ_0 hasta ∞

$$S = \frac{a}{\cos \alpha - 1} e^{\frac{\cos \alpha - 1}{\operatorname{sen} \alpha} (\theta - \theta_0)} \Bigg|_{\theta_0}^{\infty}.$$

Dado que $n \geq 2$ y $\alpha = 2\pi/n$, tendremos $0 < \alpha < \pi$ por lo que

$$\frac{\cos \alpha - 1}{\operatorname{sen} \alpha} \leq 0$$

Así, encontramos la longitud del recorrido de cada individuo dada por

$$S = \frac{a}{1 - \cos \alpha} \quad (2.16)$$

donde a corresponde a la longitud del lado del polígono de n lados. Para el caso $n = 3$ individuos, $\{v_1, v_2, v_3\}$ que inicialmente se encuentran en los vértices del triángulo equilátero (ver Figura 2.4), con longitud de lado a , con centroide en el origen tal como se muestra en la Figura (2.3), sustituyendo las condiciones iniciales de v_3 , es decir, $r(0) = a/\sqrt{3}$, $\alpha = 2\pi/3$ y $\theta_3(0) = \pi/2$ en la solución general (2.14) obtenemos

$$r_3 = \frac{a}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}(\pi/2 - \theta_3)}$$

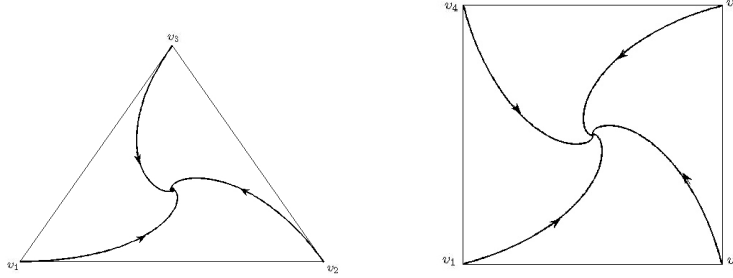


Figura 2.4: Rutas en el problema de persecución simétrica tres y cuatro individuos.

Sustituyendo el valor de $\alpha = 2\pi/3$ en 2.16, encontramos la longitud de la ruta, $S = (2/3)a$. Así, cada individuo viaja una distancia igual a dos terceras partes de la longitud del lado del triángulo. Si $a = 1.0m = 100cm$ y $v = 1.0cm/s$, los individuos se encontrarán en el centroide del triángulo en $T = S/v = 66.7s$.

El siguiente ejemplo a analizar es en el cual tenemos involucrados 4 individuos en un cuadrado. En este caso, la ruta de cada individuo esta descrita por la ecuación

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{\pi/4 - \theta} \quad (2.17)$$

y la longitud de la ruta es $S = a$. El tiempo de colisión es de 100 segundos cuando $a = 1.0m = 100cm$ y $v = 1.0cm/s$. Este caso se muestra en la figura 2.4.

Cuando el número de individuos y por lo tanto de lados del polígono se incrementa, el ángulo central, $\alpha = 2\pi/n$, decrece. Utilizando las **aproximaciones** $\text{sen}\alpha = \alpha + O(\alpha^3)$ y $\text{cos}\alpha = 1 - \alpha^2/2 + O(\alpha^4)$, la ecuación (2.14) se convierte en

$$r = \frac{na}{2\pi} e^{(\pi/n)(\theta_0 - \theta)} + O(\alpha) \quad (2.18)$$

y (2.16) se reduce a

$$S = \frac{n^2 a}{2\pi^2} + O(1). \quad (2.19)$$

Esta ecuación brinda aproximaciones válidas para valores de n mayores a 10. Cuando se incrementan el número de lados, el polígono comienza a verse como un círculo. Así, para valores de n muy grandes, la cantidad na aproxima la longitud de la circunferencia de un círculo de radio r_0 . Es decir, $C = na = 2\pi r_0$. En este caso, fijando $\theta_0 = 0$, ya que no es de importancia donde comenzamos el círculo, la ecuación (2.18) nos brinda

$$r = r_0 e^{-\pi\theta/n} \quad (2.20)$$

y de la ecuación (2.19) obtenemos la longitud total de la ruta

$$S = nr_0/\pi \quad (2.21)$$

En la Figura 2.5 se muestra un sistema de 16 individuos en persecución simétrica comparado con un acercamiento de una cabeza de girasol, donde las florecillas del racimo del girasol están ordenadas con un patrón espiral, las similitudes entre ambas imágenes son notables.

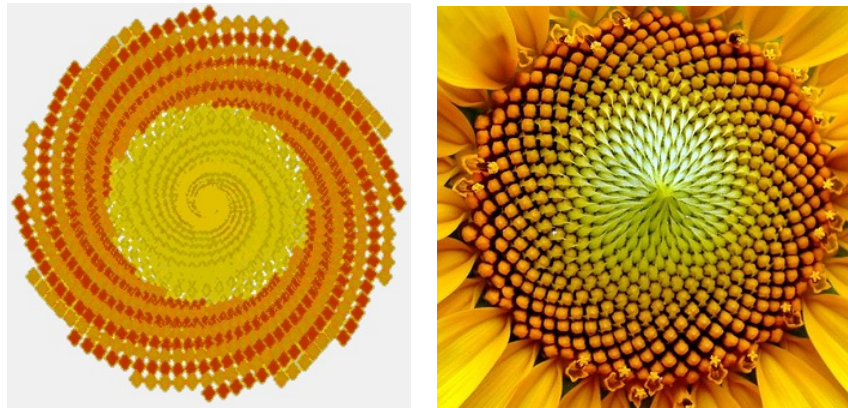


Figura 2.5: Un sistema virtual de persecución simétrica comparado con un sistema natural.

Capítulo 3

Teoría de Grafos, Matrices circulantes y de Fourier, Oscilador de van der Pol.

La Teoría de Grafos ([6] y [7]) nos será de gran ayuda para describir cómo se dan los mecanismos de persecución y la relación que hay entre n individuos sin que la persecución sea física, es decir, que implique movimiento ya sea en el plano o en el espacio de los n individuos. Para caracterizar la persecución cíclica y encontrar el punto o puntos de convergencia, el cual es el caso lineal, se utilizarán matrices circulantes y de Fourier (véase [8]), es por ello que se presentan en la sección 3.2 de este capítulo. Por último se encuentra el sistema que modela oscilaciones en circuitos de tubos de vacío o bulbos. Dicha ecuación es conocida como el oscilador de van der Pol, la cual es un caso particular de los sistemas de Liénard, por este motivo se exponen algunos resultados acerca de ciclos límite relacionados con el sistema, esto se expone al final del capítulo (12).

3.1. Teoría de Grafos.

Un *grafo* G es un par no ordenado $(V(G), E(G))$ que consiste de un conjunto $V(G)$ de *vértices* o *nodos* y un conjunto $E(G)$ de *aristas*, ajeno de $V(G)$, juntos con una *función de incidencia* ψ_G que asocia con cada arista de G un par no ordenado de

18 Teoría de Grafos, Matrices circulantes y de Fourier, Oscilador de van der Pol.

vértices de G (no necesariamente distintos). Si e es una arista, u y v son vértices tal que $\psi_G(e) = \{u, v\}$, entonces se dice que e une u y v , y los vértices u y v son llamados los *extremos* de e . Se denotan el número de vértices y aristas en G por $v(G)$ y $e(G)$, estos dos parámetros son llamados el *orden* y *tamaño* de G , respectivamente.

Dos ejemplos de grafos servirán para clarificar la definición. Para simplificar la notación, escribiremos uv para el par no ordenado $\{u, v\}$.

Ejemplo 3.1.1 Sea el grafo G dado por

$$G = (V(G), E(G))$$

donde

$$\begin{aligned} V(G) &= \{u, v, w, x, y\} \\ E(G) &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \end{aligned}$$

son el conjunto de vértices y de aristas respectivamente, la función de incidencia ψ_G está definida por

$$\begin{aligned} \psi_G(a) &= uv & \psi_G(b) &= uu & \psi_G(c) &= vw & \psi_G(d) &= wx \\ \psi_G(e) &= vx & \psi_G(f) &= wx & \psi_G(g) &= ux & \psi_G(h) &= xy \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.2 Ahora tendremos el grafo $H = (V(H), E(H))$ donde, el conjunto de vértices y aristas están dados por

$$\begin{aligned} V(H) &= \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \\ E(H) &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} \end{aligned}$$

y ψ_H , la función de incidencia, está definida por

$$\begin{aligned} \psi_H(e_1) &= v_1v_2 & \psi_H(e_2) &= v_2v_3 & \psi_H(e_3) &= v_3v_4 & \psi_H(e_4) &= v_4v_5 & \psi_H(e_5) &= v_5v_1 \\ \psi_H(e_6) &= v_0v_1 & \psi_H(e_7) &= v_0v_2 & \psi_H(e_8) &= v_0v_3 & \psi_H(e_9) &= v_0v_4 & \psi_H(e_{10}) &= v_0v_5 \end{aligned}$$

Diagramas de grafos.

Los grafos son llamados así porque pueden ser representados gráficamente, y es su representación gráfica la cual nos ayuda a comprender muchas de sus propiedades. Cada vértice es representado por un punto, y cada arista por una línea que une los puntos que representan sus extremos. Los diagramas de G y H son mostrados en la Figura 3.1, las aristas de G están representadas por curvas, y las de H por segmentos de líneas rectas. Un diagrama de un grafo sólo muestra la relación de incidencia entre sus vértices y aristas.

Los extremos de una arista son llamados *incidentes* a la arista y viceversa. Dos vértices que son incidentes con una arista en común son *adyacentes*, así como dos aristas que son incidentes con un vértice en común, dos vértices adyacentes distintos

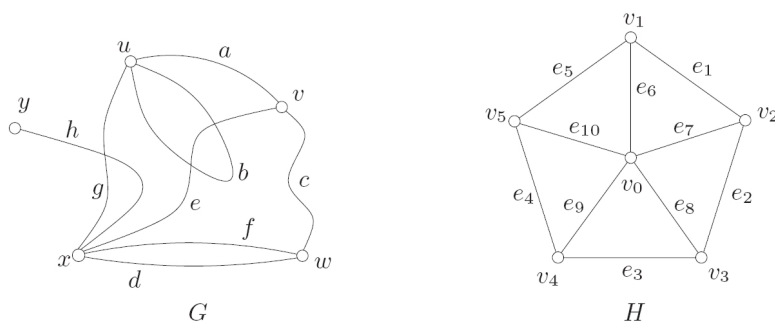


Figura 3.1: Diagramas de los grafos G y H .

son *vecinos*. El conjunto de vecinos de un vértice v en un grafo G es denotado por $N_G(v)$.

Una arista con extremos idénticos es llamada *lazo*, y una arista con distintos extremos un *enlace*. Dos o más enlaces con el mismo par de extremos son llamadas *aristas paralelas*. En el grafo G de la Figura 3.1, la arista b es un lazo, y las demás son enlaces; las aristas d y f son aristas paralelas.

Un grafo es *finito* si el conjunto de vértices y aristas son finitos. El grafo sin vértices (y por lo tanto sin aristas) es el *grafo nulo*. Cualquier grafo con sólo un vértice es referido como trivial.

Un grafo es *simple* si no tiene lazos o aristas paralelas. El grafo H en el Ejemplo 3.1.2 es simple, mientras que G del Ejemplo 3.1.1 no lo es. Un conjunto V , junto con un conjunto E de subconjuntos de dos elementos de V , define un grafo simple (V, E) , donde los extremos de una arista uv son precisamente los vértices u y v . Es más, en cualquier grafo simple podemos prescindir de la función de incidencia ψ renombrando cada arista como el par no ordenado de sus vértices.

3.1.1. Familias especiales de grafos.

Grafos completos y bipartitos.

Un grafo *completo* es un grafo simple en el cual dos vértices cualesquiera son adyacentes, un grafo *vacío* uno en el cual cualesquiera dos vértices no son adyacentes (es decir, un grafo en el cual su conjunto de aristas es vacío). Un grafo es *bipartito* si su conjunto de vértices puede ser partido en dos subconjuntos X y Y tal que cada arista tiene un extremo en X y un extremo en Y ; tal partición (X, Y) es llamada una *bipartición* del grafo, X y Y son sus partes. Denotamos un grafo bipartito G con bipartición (X, Y) por $G[X, Y]$. Si $G[X, Y]$ es simple y cada vértice en X es unido a cada vértice en Y , entonces G es llamado un *grafo completo bipartita*. Una *estrella* es un grafo completo bipartita $G[X, Y]$ donde la cardinalidad de X o Y es igual a 1. En la Figura 3.2 se muestran diagramas de un grafo completo, un grafo bipartito y una estrella.

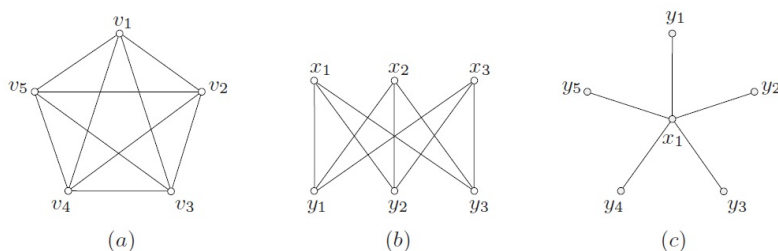


Figura 3.2: (a) Grafo completo. (b) Grafo bipartito. (c) Una estrella.

Rutas y ciclos.

Una *ruta* es un grafo simple cuyos vértices pueden ser organizados en una secuencia lineal en tal forma que dos vértices son adyacentes si son consecutivos en la secuencia y no son adyacentes de lo contrario. Así mismo, un *ciclo* en tres o más vértices es un grafo simple cuyos vértices pueden ser organizados en una secuencia cíclica en tal forma que dos vértices son adyacentes si son consecutivos en la secuencia, y son no adyacentes de lo contrario. Un ciclo en un vértice consiste de un solo vértice con un lazo, y un ciclo en dos vértices consiste de dos vértices unidos por un par de aristas paralelas. La longitud de una ruta o un ciclo es el número de sus aristas. Una ruta o ciclo de longitud k es llamada una k -ruta o k -ciclo, respectivamente; la ruta o ciclo es par o impar dependiendo de la paridad de k . Un 3 -ciclo es también llamado un triángulo, un 4 -ciclo un cuadrilátero, un 5 -ciclo un pentágono, un 6 -ciclo un hexágono y así sucesivamente. La Figura 3.3 muestra una 3-ruta y un 5-ciclo.

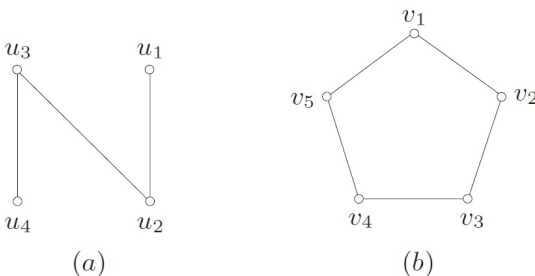


Figura 3.3: (a) Una ruta de longitud 3. (b) Un ciclo de longitud 5.

Grafos conexos.

Un grafo es *conexo* si, para cada partición de su conjunto de vértices en dos conjuntos no vacíos X y Y , hay una arista con un extremo en X y un extremo en Y ; de lo contrario el grafo es no conexo. Ejemplos de grafos conexos y no conexos se muestran en la Figura 3.4.

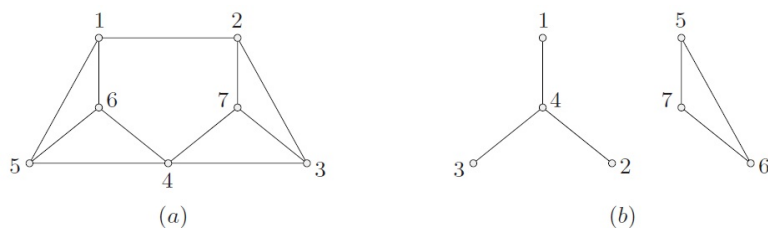


Figura 3.4: (a) Un grafo conexo y (b) un grafo no conexo.

Grado de un vértice.

El *grado* de un vértice v en un grafo G , denotado por $d_G(v)$, es el número de aristas de G incidentes con v , cada lazo cuenta como dos aristas. En particular, si G es un grafo simple, $d_G(v)$ es el número de vecinos de v en G . Un vértice de grado cero es llamado vértice aislado. Denotamos por $\delta(G)$ y $\Delta(G)$ el mínimo y máximo grados de los vértices de G , y por $d(G)$ el grado promedio, $\frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v)$.

Un grafo G es k -regular si $d(v) = k$ para todo $v \in V$; un grafo regular es k -regular para algún k . Por ejemplo, el grafo completo en n vértices es $(n - 1)$ -regular, y el grafo completo bipartita con k vértices en cada parte es k -regular. Para $k = 0, 1$ y 2 , los grafos k -regulares tienen estructuras muy simples y son fáciles de caracterizar, en contraste los grafos 3 -regular pueden ser notablemente complejos.

3.1.2. Isomorfismos.

Dos grafos G y H son *isomorfos*, $G \cong H$, si existen biyecciones $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ y $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ tal que $\psi_G(e) = uv$ si y sólo si $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$; dicho par de mapeos es llamado un *isomorfismo* entre G y H . A fin de demostrar que

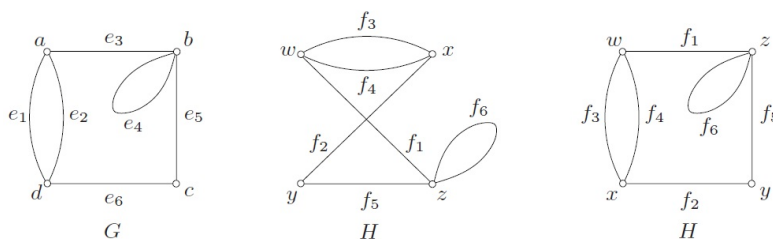


Figura 3.5: Grafos isomorfos.

dos grafos son isomorfos, es necesario indicar un isomorfismo entre ellos. El par de asignaciones (θ, ϕ) definido por

$$\theta := \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ w & z & y & x \end{pmatrix} \quad \phi := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ f_3 & f_4 & f_1 & f_6 & f_5 & f_2 \end{pmatrix}$$

22 Teoría de Grafos, Matrices circulantes y de Fourier, Oscilador de van der Pol.

es un isomorfismo entre los grafos G y H de la Figura 3.5.

En el caso de grafos simples, la definición de isomorfismo se puede establecer de forma más concisa, porque si (θ, ϕ) es un isomorfismo entre los grafos simples G y H , el mapeo ψ está completamente determinado por θ ; es más, $\psi(e) = \theta(u)\theta(v)$ para cualquier arista $e = uv$ de G . Así podríamos definir un isomorfismo entre dos grafos simples G y H como una biyección $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ la cual preserva adyacencia.

Considérese, por ejemplo, los grafos G y H en la Figura 3.6.

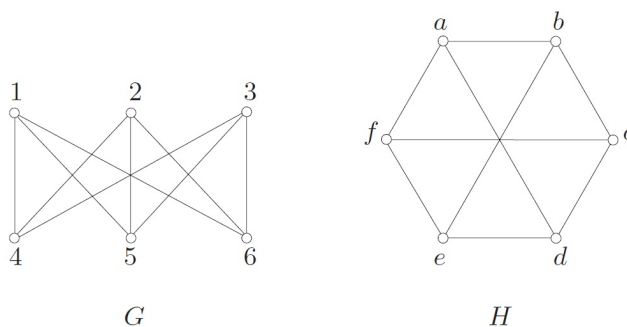


Figura 3.6: Grafos simples isomorfos.

El mapeo

$$\theta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b & d & f & c & e & a \end{pmatrix}$$

es un isomorfismo entre G y H , así como lo es

$$\theta' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & c & e & d & f & b \end{pmatrix}$$

Los grafos isomorfos tienen el mismo número de vértices y aristas. Por otro lado, la igualdad de esos parámetros no garantiza isomorfismo. Por ejemplo, los dos grafos mostrados en la Figura 3.7 tienen ocho vértices y doce aristas, pero no son isomorfos. Obsérvese que el grafo G tiene cuatro vértices no adyacentes entre sí, v_1, v_3, v_6 y v_8 . Si existiese un isomorfismo θ entre G y H , los vértices $\theta(v_1), \theta(v_3), \theta(v_6)$ y $\theta(v_8)$ de H serían no adyacentes entre sí. Pero se puede observar en la representación gráfica de H que no hay 4 vértices que no sean adyacentes entre sí. Por lo que se deduce que G y H no son isomorfos. Es claro de las observaciones anteriores que si dos grafos son isomorfos, entonces son idénticos o bien difieren solo en los nombres o etiquetas de sus vértices y aristas, y por lo tanto tienen la misma estructura.

3.1.3. Grafos dirigidos.

Un grafo dirigido D es un par ordenado $(V(D), A(D))$ que consiste de un conjunto $V := V(D)$ de vértices y un conjunto $A := A(D)$, de arcos, ajeno de $V(D)$; junto con una función de incidencia ψ_D que asocia a cada arco de D un par ordenado de vértices de D no necesariamente distintos. Si a es un arco y $\psi_D(a) = (u, v)$ entonces

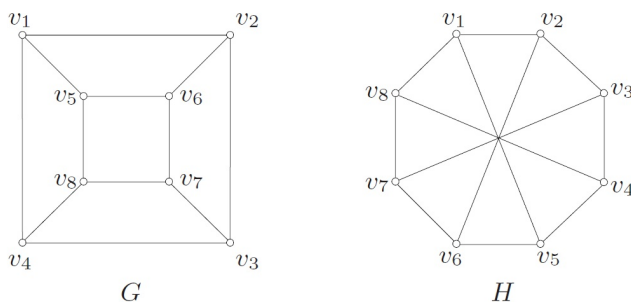


Figura 3.7: Grafos no isomorfos.

se dice que a une u a v ; también decimos que u *domina* a v . El vértice u es el inicial de a , y el vértice v su final; ambos son los extremos de a . El número de arcos en D es denotado por $a(D)$. Los vértices que dominan a un vértice v son los *vecinos entrantes*, aquellos que son dominados por el vértice son su *vecinos salientes*. Estos conjuntos son denotados por $N_D^-(v)$ y $N_D^+(v)$, respectivamente.

Por conveniencia, abreviamos el término 'grafo dirigido' por *digrafo*. Un *digrafo estricto* es aquel en el cual no hay lazos o arcos paralelos (arcos con el mismo vértice inicial y el mismo vértice final).

Con cualquier digrafo D , podemos asociar un grafo G sobre el mismo conjunto de vértices reemplazando cada arco por una arista con los mismos extremos. Este grafo es el *grafo subyacente* de D , denotado por $G(D)$. Inversamente, a un grafo G se le asocia un digrafo reemplazando cada una de sus aristas por dos arcos orientados en sentido opuesto con los mismos extremos; este digrafo es el *digrafo asociado* de G , denotado por $D(G)$. También podemos obtener un digrafo de un grafo G reemplazando cada arista por sólo uno de los dos posibles arcos en los mismos extremos. Tal digrafo es llamado una *orientación* de G . Usamos ocasionalmente el símbolo $G \rightarrow$ para especificar una orientación de G (aunque realmente un grafo generalmente tienen muchas orientaciones). Una orientación de un grafo simple es referido como un *grafo orientado*. Particularmente, uno de los ejemplos mas interesantes es una orientación de un grafo completo. Tal grafo orientado es llamado *torneo*, porque puede ser visto como la representación de los resultados de un torneo round-robin, en el cual cada equipo juega con cada equipo.

Los digrafos, como los grafos, tienen una simple representación gráfica. Un digrafo es representado por un diagrama de su grafo subyacente junto con flechas en sus aristas, cada flecha apunta hacia la cabeza del arco correspondiente. Los cuatro torneos no etiquetados sobre cuatro vértices son mostrados en la Figura 3.8.

Cada concepto válido para grafos es automáticamente aplicable a digrafos. Por ejemplo, el grado de un vértice v en un digrafo D es simplemente el grado de v en $G(D)$, el grafo subyacente de D . Asimismo, un digrafo es llamado conexo si su grafo subyacente es conexo. Pero hay conceptos en los cuales la orientación juegan un rol esencial. Por ejemplo, el *grado entrante* $d_D^-(v)$ de un vértice v en D es el número de arcos con final en v , y el *grado saliente* $d_D^+(v)$ de v es el número de arcos con inicio

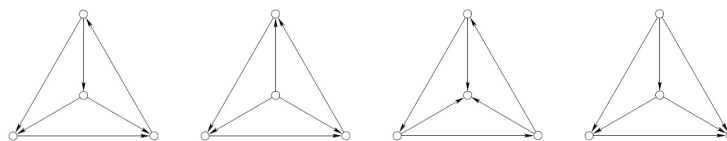


Figura 3.8: Los cuatro torneos no etiquetados en cuatro vértices.

en v . El mínimo grado entrante y grado saliente de D son denotados por $\delta^-(D)$ y $\delta^+(D)$, respectivamente, asimismo, el máximo grado entrante y grado saliente de D son denotados por $\Delta^-(D)$ y $\Delta^+(D)$, respectivamente.

3.1.4. Digrafo k -circular.

Un digrafo k -circular, $Ci(n, k)$, donde $k \in \mathbb{N}$ y $k < n$, es un digrafo sobre el conjunto de n vértices $V(Ci) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ y de arcos $A(Ci) = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ con una arco con inicio en v_i y final en v_{i+k} , por lo que su función de incidencia es $\psi_{Ci} = (v_i, v_{i+k})$ donde los subíndices son evaluados módulo n . La representación gráfica dada en 3.9, corresponde al digrafo 5-circular $Ci(12, 5)$, donde $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{11}\}$. El digrafo $Ci(12, 5)$ es isomorfo al 12-ciclo, sin embargo para el di-

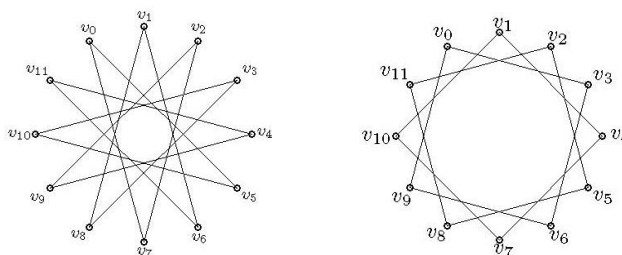


Figura 3.9: Digrafo $Ci(12, 5)$ y $Ci(12, 3)$.

grafo $Ci(12, 3)$ ya no es así, como se muestra en la Figura 3.9 b), el digrafo 3-circular con 12 vértices no es conexo, sus conjuntos de vértices y arcos se puede dividir en 3 subconjuntos, cada subconjunto determina un subgrafo que es isomorfo al 4-ciclo. Para determinar cuando un digrafo k -circular es conexo o bien se puede dividir en varios digrafos isomorfos a un ciclo de determinada longitud, se enuncia el siguiente lema.

Lema 3.1.3 Sea $d = MCD(n, r)$ el máximo común divisor de n y r . Dado un digrafo r -circular, $Ci(n, r)$, dicho digrafo es isomorfo a d ciclos de longitud $\frac{n}{d}$.

Demostración: Sea $V(Ci) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ el conjunto de n vértices del grafo $Ci(n, r)$, para $r \in \mathbb{Z}^+$ y $r < n$, dado que $d = MCD(n, r)$, se tiene

$$n = ld \quad r = kd$$

Para $l, k \in \mathbb{Z}^+$, además, l y k son coprimos. Sin pérdida de generalidad supongamos que iniciamos un ciclo en el vértice v_0 , así, el arco con inicio en v_0 tendrá final en v_r , después de cierta cantidad de enlaces tendremos un ciclo, notemos que esto ha de ocurrir, dado que con l enlaces se tiene, $lr = lkd = kn$ el cual evaluado módulo n es igual a cero, así el lr -ésimo arco incide en v_0 , como se muestra en el siguiente esquema

$$v_0 \rightarrow v_r \rightarrow v_{2r} \rightarrow v_{3r} \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-r} \rightarrow v_0$$

Dado que tendremos el ciclo hemos de encontrar la cantidad s de aristas mínima para un ciclo, es decir, encontrar s mínimo, tal que, $sr = skd$ evaluado módulo n sea igual a cero, es decir que sea múltiplo de $n = ld$, o bien, encontrar s mínimo tal que

$$skd = tld \quad (3.1)$$

para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, de (3.1) se tiene $sk = tl$, como $MCD(l, k) = 1$, k es divisor de t , sea $t = mk$, por lo que tendremos $s = ml$, para $m \in \mathbb{Z}^+$, dado que s debe ser el mínimo número de aristas, se tiene $m = 1$ por lo que $s = l$. Así, con l aristas se regresa a v_0 , por lo que cada ciclo tiene l vértices y el número de ciclos en el grafo $Ci(n, r)$ es $n/l = d$ \square

Ahora consideramos n vértices y un conjunto $K = \{k_1, \dots, k_m\}$, donde, $m < n$, $k_j \in \mathbb{Z}^+$ y $k_j \neq k_i$ para $j \neq i$. Definimos el digrafo circular $Ci(n, K)$ como aquel cuyo conjunto de n vértices está dado por $V(Ci) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ y existe una arista dirigida del vértice v_i hacia v_{i+k} si $k \in K$, donde $i = 0, 1, \dots, n$, evaluando los subíndices de los vértices módulo n . Por ejemplo, tomemos el digrafo circular $Ci(8, K)$ donde $K = \{1, 3\}$, el conjunto de los vértices está dado por $V(Ci) = \{v_0, v_1, \dots, v_7\}$, para realizar su representación gráfica comenzamos dibujando el digrafo $Ci(8, 1)$, posteriormente sobre el mismo dibujamos los enlaces correspondientes al digrafo $Ci(8, 3)$, dicha representación se muestra en la figura 3.10

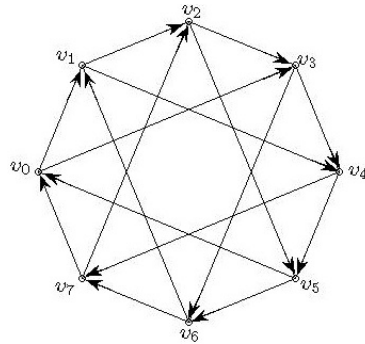


Figura 3.10: Digrafo $Ci(12, K)$ donde $K = \{1, 3\}$.

3.2. Matrices circulantes y de Fourier.

Consideremos $n \in \mathbb{Z}^+$ fijo y definimos $w_n = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ es decir, w_n es la raíz enésima “primitiva” de la unidad. Entonces las siguientes propiedades se verifican inmediatamente

1. $w_n^n = 1, w_n \bar{w}_n = 1, \bar{w}_n = w_n^{-1}.$
2. $(\bar{w}_n)^k = w_n^{-k} = w_n^{n-k}, \sum_{j=1}^n w_n^{j-1} = 0.$

Definición 3.2.1 La matriz de Fourier de orden n se define como aquella F dada por

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_n & w_n^2 & \cdots & w_n^{n-1} \\ 1 & w_n^2 & w_n^4 & \cdots & w_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_n^{(n-1)} & w_n^{2(n-1)} & \cdots & w_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Donde w_n es la raíz enésima primitiva de la unidad.

La sucesión $\{w_n^k\}_{k=1}^\infty$ es periódica de periodo n , es decir, $w_n^{k+n} = w_n^k$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$; de tal manera que hay solo n elementos diferentes en F . Más aún, para $0 \leq j \leq n-1$ se tiene

$$w_n^{j(n-1)} = w_n^{(nj-j)} = w_n^{-j} = w_n^{n-j}.$$

De tal manera que la expresión F puede escribirse también como

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_n & w_n^2 & \cdots & w_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_n^{(n-1)} & w_n^{n-2} & \cdots & w_n \end{pmatrix}.$$

Sea F^* la transpuesta conjugada de F . Algunas propiedades de la matriz de Fourier F son

1. F y F^* son simétricas.
2. La inversa de F está dada por $F^{-1} = \frac{1}{n}F^*$. En efecto, si $(FF^*)_{kl}$ es el kl -elemento del producto (FF^*) entonces se puede verificar que

$$(FF^*)_{kl} = \sum_{r=0}^{n-1} (w_n^{(l-k)r}) = \begin{cases} n & \text{si } l = k \\ 0 & \text{si } l \neq k \end{cases}$$

3. $\frac{1}{\sqrt{n}}F$ es unitaria. Es decir $F \frac{1}{n}F^* = \frac{1}{n}F^*F = I_n.$
4. Los valores propios de $\frac{1}{\sqrt{n}}F$ son $\pm 1, \pm i$ con sus respectivas multiplicidades. Esto se deduce del hecho que F es una matriz unitaria y todo valor propio λ de una matriz unitaria satisface $|\lambda| = 1$

Definición 3.2.2 Por matriz de Vandermonde $V(z_1, z_2, \dots, z_n)$ entendemos la matriz de orden n

$$V(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & \cdots & z_n^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & z_3^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Así $V(1, w_n, w_n^2, \dots, w_n^{n-1}) = F$ y $V(1, \bar{w}_n, \bar{w}_n^2, \dots, \bar{w}_n^{n-1}) = F^*$. Es posible probar por inducción que $\det V(z_1, \dots, z_n) = \prod_{k \neq l} (z_k - z_l)$, luego si $z_k \neq z_l$ la matriz de Vandermonde es no singular.

Definición 3.2.3 Dados $n \in \mathbb{Z}_+$ y $(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$, la matriz $n \times n$ definida como

$$\text{circ}(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_3 & \cdots & c_n & c_1 & c_2 \\ c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n & c_1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

es llamada matriz circulante de orden n .

Proposición 3.2.4 Si $C = \text{circ}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ entonces $\det C = \prod_{k=1}^n h(w_k)$, donde $h(x) = \sum_{j=1}^n c_j x^{j-1}$ y w_k ($k = 1, \dots, n$) son las diferentes raíces n -ésimas de la unidad.

Demostración: Sea

$$V_n \equiv V(w_1, w_2, w_3, \dots, w_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_n \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 & \cdots & w_n^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ w_1^{n-1} & w_2^{n-1} & w_3^{n-1} & \cdots & w_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

La matriz de Vandermonde de orden n en las n -raíces distintas de la unidad. Primero notamos que $CV_n = V_n \text{diag}(h(w_k))_{k=1}^n$. Pero entonces

$$\det(CV_n) = \det(V_n) \det(\text{diag}(h(w_k))_{k=1}^n) \quad (3.5)$$

y como $w_k \neq w_l$ si $l \neq k$, $\det V_n \neq 0$; por tanto $\det C = \prod_{k=1}^n h(w_k)$. \square

Corolario 3.2.5 Los valores y vectores propios de $C = \text{circ}(c_1, \dots, c_n)$ están dados respectivamente por

$$\lambda_k = h(w_k), \quad V_{\lambda_k} = (1, w_k, w_k^2, \dots, w_k^{n-1})^T \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.6)$$

28 Teoría de Grafos, Matrices circulantes y de Fourier, Oscilador de van der Pol.

Demostración: Lo que hay que observar es que

$$C = V_n \text{diag}(h(w_k))_{k=1}^n V_n^{-1}. \quad (3.7)$$

□

Teorema 3.2.6 (Teorema de las circunferencias de Gershgorin.) *Cada valor propio (real o complejo) λ de una matriz A de $n \times n$ satisface al menos una de las desigualdades*

$$|\lambda - a_{ii}| \leq r_i \quad \text{donde} \quad r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.8)$$

Es decir, cada valor propio se encuentra en al menos uno de los discos con centro en a_{ii} y radio r_i , en el plano complejo. Más aún, si la unión de p de los discos (3.8) es ajena al resto, entonces hay exactamente p valores propios de A en la unión de los p discos.

La demostración del teorema de las circunferencias de Gershgorin puede ser consultada en [9].

3.3. Oscilador de van der Pol

La ecuación van der Pol describe oscilaciones en circuitos de tubos de vacío o bulbos, es un ejemplo fundamental en la teoría de oscilaciones no lineales. En la figura (3.11) se muestra la estructura básica del circuito de una importante clase de osciladores electrónicos. A fin de encontrar el modelo matemático que gobierna las variables de estado de dicho circuito, habrá que caracterizar la relación de corriente-voltaje en cada uno de los elementos, principalmente en el capacitor y el inductor.

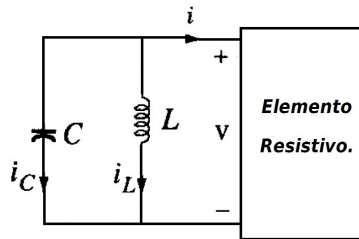


Figura 3.11: Circuito oscilador básico.

Capacitores.

Un capacitor es un elemento pasivo diseñado para almacenar energía en su campo eléctrico. Un capacitor está compuesto por dos placas conductoras separadas por un aislante (o dieléctrico). Cuando una fuente de voltaje v se conecta al capacitor, deposita

una carga positiva q en una placa y una carga negativa $-q$ en la otra. Se dice que el capacitor almacena la carga eléctrica. El monto de carga almacenada, representado por q_C , es directamente proporcional al voltaje aplicado v , de modo que

$$q_C = Cv \quad (3.9)$$

donde C , se conoce como la capacitancia del capacitor. La unidad de capacitancia es el Faradio (F). Así, la capacitancia es la proporción entre la carga en una placa de un capacitor y la diferencia de tensión entre las dos placas, medida en Faradios (F). Cabe señalar que, de acuerdo con la convención pasiva de los signos, si $v > 0$ e $i_C > 0$ o si $v < 0$ e $i_C < 0$, el capacitor se está cargando, y si $v \cdot i_C < 0$, se está descargando.

Para obtener la relación corriente-voltaje del capacitor, se toma la derivada respecto al tiempo de (3.9). Puesto que

$$i_C = \frac{dq_C}{dt}$$

la derivada de (3.9) da como resultado

$$i_C = C \frac{dv}{dt} \quad (3.10)$$

Esta es la relación de corriente-voltaje de un capacitor, suponiendo la convención pasiva de los signos. Se dice que son lineales los capacitores que satisfacen la ecuación (3.10). La relación voltaje-corriente del capacitor puede obtenerse integrando (3.10) respecto a t . Así se consigue

$$v_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt$$

o bien

$$v_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt + v_C(t_0) \quad (3.11)$$

donde $v_C(t_0) = q_C(t_0)/C$ es el voltaje entre el capacitor en el tiempo t_0 .

Inductores.

Un inductor es un elemento pasivo diseñado para almacenar energía en su campo magnético. Todos los conductores de corriente eléctrica tienen propiedades inductivas y pueden considerarse inductores. Pero para aumentar el efecto inductivo, un inductor práctico suele formarse en una bobina cilíndrica con muchas vueltas de alambre conductor. Si se permite que pase corriente por un inductor, se descubre que la tensión en el inductor es directamente proporcional a la velocidad de cambio de la transformación de la corriente. Mediante la convención pasiva de los signos,

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (3.12)$$

donde L es la constante de proporcionalidad, llamada inductancia del inductor. La unidad de inductancia es el Henrio (H). Así, la inductancia es la propiedad por la cual

30 Teoría de Grafos, Matrices circulantes y de Fourier, Oscilador de van der Pol.

un inductor presenta oposición al cambio de la corriente que fluye por él, medida en Henrios (H). La ecuación (3.12) es la relación de voltaje-corriente de un inductor, a tal inductor se le conoce como inductor lineal. La relación de corriente-voltaje se obtiene integrando respecto a t la ecuación (3.12) obteniendo

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(t) dt \quad (3.13)$$

o bien

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L(t) dt + i_L(t_0) \quad (3.14)$$

donde $i_L(t_0)$ es la corriente total para $-\infty < t < t_0$ e $i_L(t) = 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Ecuación de van der Pol.

El inductor y capacitor se suponen lineales, invariantes en el tiempo y pasivos, es decir, $L > 0$ y $C > 0$. El elemento resistivo es un circuito activo caracterizado por el voltaje controlado, $i-v$ característico $i = h(v)$. La función h satisface las condiciones

$$h(0) = 0, \quad h'(0) < 0$$

$$h(v) \rightarrow \infty \text{ cuando } v \rightarrow \infty, \quad y \quad h(v) \rightarrow -\infty \text{ cuando } v \rightarrow -\infty$$

donde $h'(v)$ es la primera derivada de $h(v)$ con respecto a v . Usando la ley de corrientes de Kirchhoff, podemos escribir la ecuación

$$i_C + i_L + i = 0 \quad (3.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.10 y 3.14 en la ecuación anterior se obtiene

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(s) ds + h(v) = 0$$

Derivando una vez mas respecto a t y multiplicando por L , obtenemos

$$CL \frac{d^2v}{dt^2} + v + Lh'(v) \frac{dv}{dt} = 0$$

Esta ecuación puede ser escrita de forma tal que coincida con alguna ecuación conocida en la teoría de sistemas no lineales. Para hacerlo, cambiemos la variable tiempo t por $\tau = t/\sqrt{CL}$. Denotando la derivada de v con respecto a τ por \dot{v} , se puede reescribir la ecuación del circuito como

$$\ddot{v} + \mu h'(v) \dot{v} + v = 0$$

donde $\mu = \sqrt{L/C}$. Esta ecuación es un caso especial de la ecuación de Liénard

$$\ddot{v} + f(v) \dot{v} + g(v) = 0 \quad (3.16)$$

Cuando

$$h(v) = -v + \frac{1}{3}v^3$$

la ecuación del circuito toma la forma

$$\ddot{v} - \mu(1 - v^2)\dot{v} + v = 0 \quad (3.17)$$

la cual es conocida con la *ecuación de Van der Pol*. Esta ecuación, para $\mu > 0$, tiene una solución periódica que atrae todas las soluciones excepto a la trivial que consiste del único punto de equilibrio $v = \dot{v} = 0$. Para escribir el modelo del espacio fase del circuito, tomamos $x = v$ y $y = \dot{v}$ para obtener

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \mu(1 - x^2)y \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.3.1. Ciclos Límite.

Un ciclo límite es una trayectoria cerrada y aislada. Aislada significa que las trayectorias vecinas no son cerradas; son espirales que salen o convergen hacia el ciclo límite.

Si todas las trayectorias vecinas se aproximan al ciclo límite, se dice que el ciclo límite es estable o atractor. De otra manera el ciclo límite es inestable, o en casos excepcionales, semi-estable (Figura 3.12).

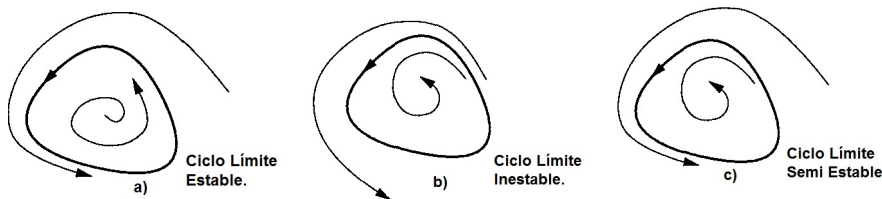


Figura 3.12: Ciclos límite a) Estable b) Inestable c) Semi Estable.

Los ciclos límite son fenómenos inherentes a sistemas no lineales, éstos no pueden ocurrir en sistemas lineales. Un sistema lineal $\dot{x} = Ax$ puede tener órbitas cerradas, pero no serán aisladas; si $x(t)$ es una solución periódica, entonces también lo es $c x(t)$ para cualquier constante $c \neq 0$. Así $x(t)$ está rodeada por una familia uno-paramétrica de órbitas cerradas (Figura 3.13).

Como consecuencia, la amplitud del conjunto de oscilaciones lineales está completamente determinado por las condiciones iniciales; cualquier leve perturbación a la amplitud perdurará. En contraste, las oscilaciones en un ciclo límite son determinadas por la estructura del sistema mismo.

Sistemas de Liénard.

Muchos de los circuitos osciladores pueden ser modelados por medio de las ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$\ddot{v} + f(v)\dot{v} + g(v) = 0, \quad (3.19)$$

32 Teoría de Grafos, Matrices circulantes y de Fourier, Oscilador de van der Pol.

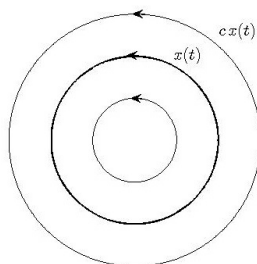


Figura 3.13: Familia de órbitas cerradas alrededor de $x(t)$.

la cual es conocida como la *ecuación de Liénard*. Esta ecuación es una generalización del oscilador de van der Pol $\ddot{v} - \mu(1 - v^2)\dot{v} + v = 0$. La ecuación de Liénard es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x) - f(x)y.\end{aligned}\tag{3.20}$$

El siguiente teorema establece que el sistema tiene un único ciclo límite estable para ciertas hipótesis para las funciones f y g . Para una demostración véase [10] u [11].

Teorema 3.3.1 (Teorema de Liénard) *Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y diferenciables para toda x ;
2. $g(-x) = -g(x)$ para toda x , es decir, $g(x)$ es una función impar;
3. $g(x) > 0$ para $x > 0$;
4. $f(-x) = f(x)$ para toda x , es decir, $f(x)$ es una función par;
5. La función par $F(x) = \int_0^x f(u) du$ tiene una raíz en $x = a$, es negativa para $0 < x < a$, es positiva y no decreciente para $x > a$, y $F(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$

Entonces el sistema 3.20 tiene un único ciclo límite estable alrededor del origen en el plano fase.

La ecuación de van der Pol $\ddot{v} + \mu(v^2 - 1)\dot{v} + v = 0$ tiene un único ciclo límite estable ya que $f(-v) = \mu((-v)^2 - 1) = \mu(v^2 - 1) = f(v)$, es decir, $f(v)$ es par y $g(-v) = -v = -g(v)$ por lo que $g(v)$ es impar, además $f(v)$ y $g(v)$ son diferenciables por lo que satisfacen las condiciones (1)-(4) del teorema de Liénard. Para verificar la condición 5), nótese que

$$F(v) = \mu \left(\frac{1}{3}v^3 - v \right) = \frac{1}{3}\mu v(v^2 - 3)$$

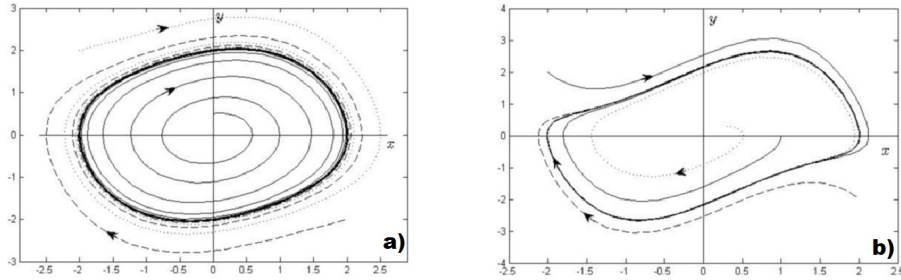


Figura 3.14: Retratos fase para el oscilador de van der Pol con valores de a) $\mu = 0.2$ y b) $\mu = 1$.

Así, la condición 5) es satisfecha ya que $F(v)$ tiene una raíz en $a = \sqrt{3}$, es negativa para $0 < v < a$, es positiva y no decreciente para $v > a$, y $F(v) \rightarrow \infty$ cuando $v \rightarrow \infty$.

En las Figuras 3.14 y 3.15 se muestran retratos fases de la ecuación de van der Pol

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \mu(1 - x^2)y \end{aligned}$$

para tres diferentes valores del parámetro μ : un valor pequeño de 0.2, un valor medio de 1.0 y un valor grande de 5.0. En los tres casos, el retrato fase muestra que existe una única órbita cerrada que atrae todas las trayectorias que comienzan fuera de la órbita. Para $\mu = 0.2$, la órbita cerrada es una órbita suave cercana al círculo de radio 2. Esto es típico para valores pequeños de μ (digamos, $\mu < 0.3$). Para el valor medio, $\mu = 1.0$, la forma circular de la órbita cerrada es distorsionada como se muestra en la Figura 3.14 b). Para el valor mas grande, $\mu = 5.0$, la órbita cerrada es severamente distorsionada como se observa en la Figura 3.15 a). En la Figura 3.15 b) se muestra el retrato fase típico para grandes valores de μ , este caso analiza con mayor detalle en el Capítulo 6.

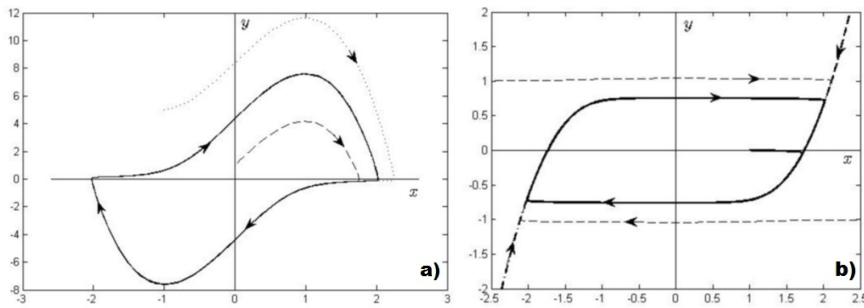


Figura 3.15: Retratos fase para el oscilador de van der Pol a) $\mu = 5$ y b) $\mu \gg 1$.

34 Teoría de Grafos, Matrices circulantes y de Fourier, Oscilador de van der Pol.

Capítulo 4

Persecución cíclica.

Este capítulo inicia con el análisis del problema *perseguidor-evasor* a rapidez variable, en el cual se considera un individuo evasor cuya posición en el plano es u_e , dicho individuo sigue una trayectoria dada por una curva conocida; se tiene otro individuo u_p (perseguidor) que se dirige hacia u_e , la velocidad del individuo perseguidor variará dependiendo de qué tan cerca o lejos se encuentre de su objetivo, la relación de *cercanía* que se utiliza es la diferencia entre los vectores del evasor y perseguidor, es decir, $u_e - u_p$, entonces, la solución consiste en determinar la trayectoria del individuo perseguidor u_p .

Posteriormente se extiende para el caso de más de dos individuos donde sus variables de estado no necesariamente denotan posiciones, el problema se denomina *persecución cíclica*, se exponen diversos escenarios y se caracterizan los sistemas que corresponden a cada mecanismo. Se analizan sus propiedades geométricas asintóticas que consisten en la convergencia a una cantidad finita de puntos, siendo de principal importancia aquel sistema que converge a un solo punto, ya que, si un sistema converge a $s > 1$ puntos, dicho sistema se puede dividir en s subsistemas entre los cuales no hay interacción y cada uno de ellos converge a un solo punto. Para comprender cómo es la relación que se da entre los n individuos se le asocia un digrafo circular que por medio de su respectivo diagrama clarifica el fenómeno de persecución.

4.1. Problema "perseguidor-evasor" a rapidez variable.

En la sección 2.1 se analizó el problema *perseguidor-evasor* a rapidez constante, en el cual se consideran un par de individuos cuyo movimiento está restringido al plano. El individuo perseguido tiene una ruta dada por una función conocida. Durante la persecución, tanto el evasor como el perseguidor se mueven a una rapidez constante; donde u , la velocidad del perseguidor es proporcional a la velocidad del evasor v , es decir, se

tiene la relación $u = kv$. Si se da el alcance o no, depende del valor de la constante de proporcionalidad k , si $k > 1$ la colisión se dará.

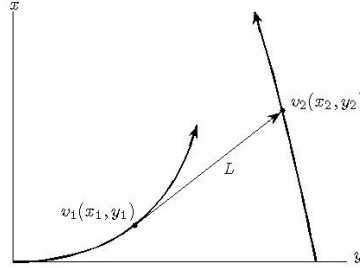


Figura 4.1: Esquema del problema perseguidor-evasor a velocidad variable.

Para el problema *perseguidor-evasor a rapidez variable*, consideramos un par de individuos u_p el perseguidor y u_e el evasor, el movimiento que llevarán a cabo estará restringido al plano. El recorrido que tendrá el individuo perseguido estará dado por $u_e(t) = (x_e(t), y_e(t))$ la cual es una función conocida. La velocidad que tendrá el perseguidor en un instante $t > 0$ será proporcional al vector comprendido entre u_p y u_e , $\mathbf{L} = u_p - u_e$, el desplazamiento del perseguidor se dará en la misma dirección de este vector, es decir, se dirigirá directamente al evasor, tal como se muestra en la figura 4.1. La ecuación que modela dicho movimiento está dada por

$$\frac{du_p(t)}{dt} = k(u_e(t) - u_p(t)), \quad (4.1)$$

donde $0 < k \leq 1$. Este tipo de movimiento lo podemos interpretar como aquel en el cual el objetivo no es dar alcance al individuo perseguido, es decir, si el individuo perseguidor se encuentra a una distancia considerable de aquel que va siguiendo entonces debe moverse con una rapidez que le permita acercarse más, posteriormente cuando la distancia que los separa haya disminuido también ha de disminuir la rapidez de su movimiento. Para comprender este mecanismo de persecución nos referiremos a un caso en particular, en el cual, la trayectoria del evasor es una línea en el plano de la forma

$$u_e(t) = (x_e(t), y_e(t)) = (at + b, ct + d) \quad (4.2)$$

para $t \geq 0$, y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. De esta ecuación podemos observar que al inicio de la persecución la posición del evasor es $u_e(0) = (b, d)$, la magnitud de la velocidad del evasor permanecerá constante con valor igual a $\sqrt{a^2 + c^2}$. Para encontrar la trayectoria del perseguidor $u_p(t) = (x_p(t), y_p(t))$, usamos la ecuación 4.1, es decir, que el vector velocidad del individuo u_p es proporcional al vector $u_e - u_p$, así, tendremos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx_p(t)}{dt} &= k(x_e(t) - x_p(t)) = k(at + b - x_p(t)) \\ \frac{dy_p(t)}{dt} &= k(y_e(t) - y_p(t)) = k(ct + d - y_p(t)), \end{aligned}$$

el cual es un sistema desacoplado y cada una de las ecuaciones de este sistema son de la forma

$$z'(t) + kz(t) = k(\alpha t + \beta).$$

Cuya solución está dada por

$$z(t) = Ce^{-kt} + \alpha \left(t - \frac{1}{k} \right) + \beta \quad (4.3)$$

Donde

$$C = z(0) + \frac{\alpha}{k} - \beta.$$

Supongamos que el individuo evasor se mueve en la línea recta vertical de modo que

$$u_e(t) = (x_e(t), y_e(t)) = (b, t).$$

Al iniciar el movimiento, el individuo evasor se encuentra en el punto $u_e(0) = (b, 0)$, asignando el origen como el punto en el cual se encuentra el individuo perseguidor al iniciar el movimiento, la ecuación 4.3 nos brinda la ruta del individuo perseguidor

$$u_p(t) = (x_p(t), y_p(t)) = (b(1 - e^{-kt}), \frac{1}{k}(e^{-kt} - 1) + t).$$

En la Figura 4.2 se muestran las trayectorias tanto del individuo evasor u_e como la del individuo perseguidor u_p , a los 1, 3 y 5 segundos, en este caso la constante de proporcionalidad k es igual a 0.5, también se muestra el vector $u_e - u_p$, cuya dimensión va disminuyendo conforme el perseguidor se acerca a su objetivo.

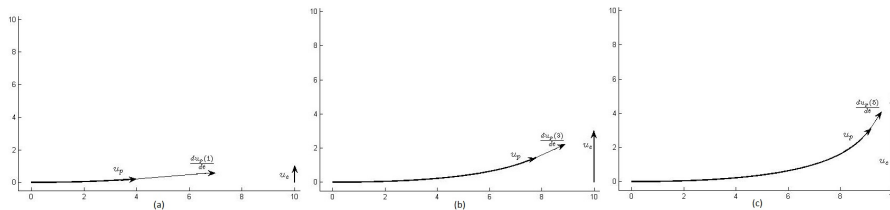


Figura 4.2: Problema perseguidor evasor $k = 0.5$. (a) 1s. (b) 3s (c) 5s.

En la siguiente sección se extiende este tipo de persecución para $n > 2$ individuos.

4.2. Persecución r-cíclica.

Comenzamos con una configuración en la cual participan n partículas o individuos ordenados, u_0, u_1, \dots, u_{n-1} , $n > 2$, cuyas variables de estado en un espacio m -dimensional en un tiempo dado t , estarán dadas por $u_j(t) = (u_{1j}(t), \dots, u_{mj}(t))$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$ (nótese que en el problema *perseguidor-evasor a rapidez variable* las variables de estado eran sus coordenadas en el plano, en la *persecución r-cíclica* no restringiremos las variables de estado a la posición en el plano o en el espacio, estas se pueden extender a más parámetros cuyos valores puedan ser modelados por la

persecución). En cualquier momento, la partícula u_j , se mueve en la dirección del vector $u_{j+r}(t) - u_j(t)$, es decir, se mueve directamente hacia la partícula u_{j+r} , donde el índice de los individuos son evaluados módulo n .

El vector velocidad o bien, el de la tasa de cambio en las variables de estado del j -ésimo individuo, u_j , es proporcional al vector $u_{j+r}(t) - u_j(t)$, por lo cual tendremos

$$\frac{du_j}{dt} = k(u_{j+r} - u_j)$$

Para que se de la persecución es necesario que $k > 0$, ya que si k es negativo la persecución se dará en sentido opuesto, evadiendo al individuo u_{j+r} ; en el caso de $k = 0$ no habría movimiento y cada partícula permanecerá en su posición o condición inicial.

Cabe resaltar que este fenómeno al que hemos denominado *persecución* no necesariamente describe movimiento (ya sea en el plano o en el espacio) de los individuos, sino una interacción entre ellos respecto a sus variables de estado.

Para hacer una descripción cualitativa de la interacción que implica la persecución *r-cíclica* entre n individuos, utilizamos Teoría de Grafos. Así, a cada sistema de persecución de este tipo le podemos asignar un digrafo, el cual describirá convenientemente por medio de un diagrama la relación existente entre los n individuos.

4.2.1. Representación por medio de digrafos.

La persecución *r-cíclica* es asociada a un digrafo donde el conjunto de vértices o nodos corresponde a los individuos involucrados en la persecución y existe un arco dirigido entre el individuo perseguidor y aquél al cual sigue. Denotemos a dicho digrafo por $D = (V(D), A(D))$, donde $V(D)$, el conjunto de vértices como se señaló anteriormente, corresponde a los n individuos, $V(D) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$, dado que cada individuo va en persecución de otro, también tendremos n arcos cuyo conjunto es $A(D)$, denotaremos a_j al arco saliente del vértice u_j , resultando $A(D) = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$, la función de incidencia ψ_D que asocia a cada arco el par ordenado *perseguidor-perseguido* está definida por $\psi_D(a_j) = (u_j, u_{j+r})$, para $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ donde los índices son evaluados módulo n . Este digrafo corresponde a la estructura del digrafo circulante de n vértices $Ci(n, r)$. Por lo que $D(V(D), A(D)) = Ci(n, r)$.

El digrafo Ci es finito y estricto, esto último porque no hay lazos ni arcos paralelos.

Como se vio en la sección 3.1.4, el digrafo $Ci(n, r)$ se descompone en d ciclos de longitud $l = n/d$, donde $d = MCD(n, r)$, cada uno de esos ciclos describe a su vez la persecución 1-cíclica entre los n/d individuos. Si $d = 1$, el digrafo Ci es conexo y es isomorfo a un *n-ciclo*.

Si $d > 1$ podemos dividir, tanto el conjunto de vértices $V(Ci)$ como el de arcos $A(Ci)$, en d subconjuntos, para los vértices cada subconjunto estará dado por

$$\begin{aligned} V_0(Ci) &= \{v_0, v_r, v_{2r}, \dots, v_{(l-1)r}\} \\ V_1(Ci) &= \{v_1, v_{1+r}, v_{1+2r}, \dots, v_{1+(l-1)r}\} \\ &\vdots \\ V_{d-1}(Ci) &= \{v_{d-1}, v_{(d-1)+r}, v_{(d-1)+2r}, \dots, v_{(d-1)+(l-1)r}\}, \end{aligned}$$

de manera análoga cada subconjunto de arcos será $A_j(Ci) = \{a_j, a_{j+r}, a_{j+2r}, \dots, a_{j+(l-1)r}\}$ evaluando los subíndices módulo n .

Sea j un entero fijo donde $0 \leq j \leq d-1$, el digrafo E tal que su conjunto de vértices es $V(E) = \{v_j, v_{j+r}, v_{j+2r}, \dots, v_{j+(l-1)r}\}$ y el de arcos $A(E) = \{a_j, a_{j+r}, a_{j+2r}, \dots, a_{j+(l-1)r}\}$, con la función de incidencia $\psi_E(a_{j+kr}) = v_{j+kr}v_{j+(k+1)r}$, con $k \in \{0, 1, \dots, l-1\}$, evaluando los subíndices módulo n , es isomorfo al l -ciclo H , cuyo conjunto de vértices es $V(H) = \{u_0, u_1, \dots, u_{l-1}\}$ con arcos $A(H) = \{e_0, e_1, \dots, e_{l-1}\}$ con función de incidencia $\psi_H(a_k) = u_k u_{k+1}$, donde $k = 0, 1, \dots, l-1$ y los subíndices son evaluados módulo l .

Utilizando las biyecciones $\theta : V(E) \rightarrow V(H)$ dada por $\theta(v_{j+kr}) = u_k$ y $\phi : A(E) \rightarrow A(H)$ definida por $\phi(a_{j+kr}) = a_k$, evaluando los subíndices módulo l , es un isomorfismo entre E y H . A fin de clarificar lo anteriormente expuesto demos un ejemplo.

Ejemplo 4.2.1 Sea el digrafo 14-circular, con 35 vértices, $Ci(35, 14)$, cuyo conjunto de vértices estará dado por

$$V(Ci) = \{v_0, v_1, \dots, v_{34}\}$$

y su conjunto de arcos

$$A(Ci) = \{a_0, a_1, \dots, a_{34}\}$$

con función de incidencia $\psi_{Ci} = (v_j, v_{j+14})$ para $j = 0, 1, \dots, 34$ evaluando los subíndices módulo 35. El diagrama del grafo subyacente a este digrafo se muestra en la Figura 4.3. Dado que $d = MCD(35, 14) = 7$ tendremos que $Ci(35, 14)$, puede dividirse en 7 ciclos de longitud $l = n/d = 5$. Para mostrar uno de los 5-ciclo, fijemos

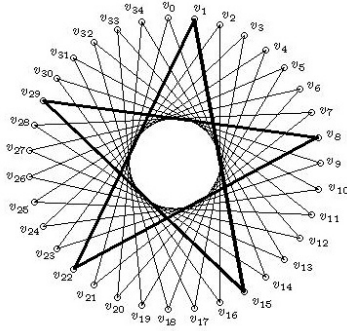


Figura 4.3: Diagrama del digrafo $Ci(35, 14)$, donde se observa el 5-ciclo que comienza en v_1 .

un $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j \leq 6$, tomemos $j = 1$, entonces

$$\tilde{V}_1(Ci) = \{v_1, v_{1+r}, v_{1+2r}, v_{1+3r}, v_{1+4r}\} = \{v_1, v_{15}, v_{29}, v_{43}, v_{57}\}$$

Evaluando los subíndices módulo 35 tendremos

$$V_1(Ci) = \{v_1, v_{15}, v_{29}, v_8, v_{22}\}$$

respectivamente el conjunto de arcos es

$$A_1(Ci) = \{a_1, a_{15}, a_{29}, a_8, a_{22}\}$$

Para ver que el digrafo $E = (V_1, A_1)$ es isomorfo al 5-ciclo, H con $V(H) = \{u_0, u_1, \dots, u_4\}$ y $A(H) = \{e_0, e_1, \dots, e_4\}$ con función de incidencia $\psi_H(e_j) = (u_j, u_{j+1})$, tomamos las asignaciones (θ, ϕ) definidas por

$$\theta(v_z) = u_k \quad \phi(a_z) = e_k$$

donde $z \equiv 1 + 14k \pmod{n}$

4.2.2. Modelo matemático para la persecución r -cíclica.

El mecanismo de persecución r -cíclica está modelado por el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{u}_j(t) = k(-u_j(t) + u_{j+r}(t)) \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.4)$$

donde $0 < k \leq 1$ es una constante y con condiciones iniciales

$$u_j(0) = (u_{1j}(0), u_{2j}(0), \dots, u_{mj}(0)).$$

Para realizar el análisis del sistema (4.4) supondremos el valor $k = 1$. Notemos que cada coordenada de u_j satisface uno de los m sistemas de ecuaciones, a saber

$$\dot{x}_k(t) = A_{n,r} x_k(t) \quad (4.5)$$

con condiciones iniciales $x_k(0) = (x_{1k}(0), x_{2k}(0), \dots, x_{nk}(0))$ para $k = 1, \dots, m$, donde $x_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. $A_{n,r} \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$, la matriz que representa dicha transformación lineal es una matriz circulante de orden n , $A_{n,r} = \text{circ}(h)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $h_1 = -1$, $h_{r+1} = 1$, $h = 0$ en otro caso. Por ejemplo, en la Figura 4.4 se muestran las trayectorias en el plano (es decir $m = 2$) para el caso $n = 6$, $r = 1$ con posiciones iniciales aleatorias. Las ecuaciones que modelan el movimiento de los 6 individuos dadas por (4.4) las podemos escribir como $m = 2$ sistemas de la forma (4.5) expresados por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{6,1} x_1(t) & x_1(0) &= (x_{1,1}(0), x_{2,1}(0), \dots, x_{6,1}(0)) \\ \dot{x}_2(t) &= A_{6,1} x_2(t) & x_2(0) &= (x_{1,2}(0), x_{2,2}(0), \dots, x_{6,2}(0)), \end{aligned}$$

donde $A_{6,1} = \text{circ}(-1, 1, 0, 0, 0, 0)$. Para cada una de las ecuaciones anteriores se encuentra una solución analítica; $x_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ nos brinda las abscisas de las posiciones de cada uno de los individuos para $t \geq 0$ y $x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ las ordenadas.

El comportamiento asintótico consiste del único punto de equilibrio en el cual convergen los 6 individuos cuando $t \rightarrow \infty$; esto se concluye de las soluciones

$$(x_{(1,j)}(t), x_{(2,j)}(t)) \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, 6,$$

cuya gráfica se muestra en la figura 4.4.

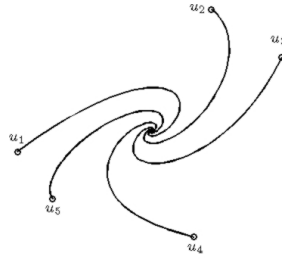


Figura 4.4: Caso $n=6$, $r=1$, único punto de convergencia.

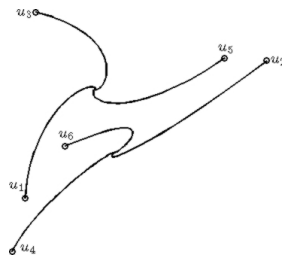


Figura 4.5: Caso $n=6$, $r=2$, dos puntos de convergencia.

Ahora consideremos el caso para $n = 6$, $r = 2$ y $A_{6,2} = \text{circ}(-1, 0, 1, 0, 0, 0)$; del cual resulta un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que se resuelve de manera analítica. La gráfica de las soluciones se muestra en la figura 4.5, en la cual observamos que hay dos puntos de equilibrio. En la siguiente sección se caracterizará el estado asintótico de los sistemas que describen la persecución r -cíclica, se verá que el punto o puntos de convergencia dependen de las condiciones iniciales.

El siguiente resultado muestra que cada sistema r -cíclico puede ser descompuesto en $d = \text{MCD}(n, r)$ sistemas 1-cíclico, donde $\text{MCD}(n, r)$ denota el máximo común divisor de n y r y suponemos que $u_j \in \mathbb{R}$.

Lema 4.2.2 *El sistema lineal $u'(t) = A_{n,r}u(t)$ se puede desacoplar en $d = \text{MCD}(n, r)$ sistemas 1-cíclico de $\frac{n}{d}$ variables.*

Demostración: Como se vio en la sección anterior un digrafo r -circular de n vértices, $Ci(n, r)$, es asociado al sistema lineal (4.4) identificando cada variable como un vértice; donde un arco une un par de vértices si y sólo si hay una ecuación diferencial en el sistema lineal que involucra ambas variables. El digrafo $Ci(n, r)$ se puede descomponer en $d = \text{MCD}(n, r)$ ciclos de longitud $\frac{n}{d}$. \square

Por lo tanto, independientemente del número de individuos, n , o del valor de r , podemos obtener el comportamiento asintótico del sistema estudiando el sistema de

persecución 1-cíclico de la forma

$$\dot{x}(t) = A_{n,1}x(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) \quad (4.6)$$

Vamos ahora a demostrar que cada sistema de persecución 1-cíclico tiene un único atractor global dado por un punto de equilibrio, el cual depende de las condiciones iniciales.

4.3. Caracterización del punto de convergencia para el sistema 1-cíclico.

Para el sistema de persecución 1-cíclico de la forma

$$\dot{u}_j(t) = -u_j(t) + u_{j+1}(t) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.7)$$

sujeto a las condiciones iniciales $u_j(0) = (u_{1j}(0), u_{2j}(0), \dots, u_{mj}(0))$, se caracteriza el punto de convergencia, como se indica a continuación.

Lema 4.3.1 *Sea U_j tal que $u_j(t) \rightarrow U_j$ cuando $t \rightarrow \infty$. Bajo el patrón de persecución 1-cíclico modelado por sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (4.7), tendremos un único punto de convergencia, que esta dado por*

$$U_j = \left(\frac{\sum_{j=1}^n u_{1j}(0)}{n}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^n u_{mj}(0)}{n} \right)$$

Antes de demostrar este lema, se exponen algunas características de las características de las matrices circulantes, las cuales definen los sistemas de ecuaciones diferenciales que modelan la persecución 1-cíclica. En la sección anterior encontramos que (4.7) lo podemos escribir como m sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias desacoplados, de la forma:

$$\dot{x}(t) = A_{n,1} x(t) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

con condición inicial $x(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$, así, con el lema (4.3.1), el estado asintótico de cada sistema, corresponde a la media aritmética de las condiciones iniciales. La matriz $A_{n,1} = \text{circ}(-1, 1, 0, \dots, 0)$ de orden n , cuyos valores propios (Corolario 3.2.5) están dados por

$$\lambda_k = \left(\cos \left(\frac{k-1}{n} 2\pi \right) - 1 \right) + i \text{sen} \left(\frac{k-1}{n} 2\pi \right) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.8)$$

Notemos que $\lambda_1 = 0$, por lo tanto $A_{n,1}$ es singular y $\dim(Ker(A_{n,1})) = 1$, asignamos a

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

el vector característico correspondiente al valor característico nulo. De (4.8), observamos para $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ valores característicos no nulos de $A_{n,1}$ que $Re(\lambda_k) < 0$ $j = 2, \dots, n - 1$.

Lema 4.3.2 *La matriz de vectores propios de $A_{n,1}$ está dada por F , la matriz de Fourier de orden n .*

Demostración: Buscamos $v_k \in Ker(\lambda_k I - A_{n,1})$, $k = 1, 2, \dots, n$ vectores propios de la matriz. Encontrar los elementos del Kernel de la matriz $\lambda_k I - A_{n,1}$ es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} a_k & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_k & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_k & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_k(1) \\ v_k(2) \\ v_k(3) \\ \vdots \\ v_k(n-1) \\ v_k(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$a_k = \lambda_k + 1 = \cos\left(\frac{k-1}{n}2\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k-1}{n}2\pi\right) = e^{(k-1)\left(\frac{2\pi i}{n}\right)} = \omega_n^{(k-1)}$$

donde ω_n es la raíz enésima “primitiva” de la unidad.

Para resolver el sistema asignamos a $v_k(1) = 1$ y resolviendo las ecuaciones sucesivas obtenemos

$$v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^{(k-1)} \\ \omega_n^{2(k-1)} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-2)(k-1)} \\ \omega_n^{(n-1)(k-1)} \end{pmatrix}$$

Así, la matriz de vectores característicos de $A_{n,1}$ estará dada por la matriz de Fourier de orden n

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \omega_n^3 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \omega_n^6 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ 1 & \omega_n^3 & \omega_n^6 & \omega_n^9 & \cdots & \omega_n^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{(n-1)} & \omega_n^{2(n-1)} & \omega_n^{3(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

□

Demostración: **del lema 4.3.1** La solución del sistema $x'(t) = A_{n,1} x(t)$, con el vector de condiciones iniciales $x(0)$ estará dada por

$$x(t) = F e^{Jt} \frac{1}{n} F^* x(0) = c_1 v_1 + \sum_{k=2}^n c_k e^{\lambda_k t} v_k \quad (4.9)$$

Donde, J es la forma canónica de Jordan correspondiente a $A_{n,1}$. Los valores de las constantes c_k dependen de las condiciones iniciales, para determinar el punto de convergencia es necesario encontrar c_1 ya que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c_1 v_1$$

Esto se debe a que la parte real de los valores característicos no nulos es negativa.

Para calcular los valores de las constantes c_k tendremos

$$x(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

Por lo que es necesario resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$F c = x(0)$$

Siendo F la matriz de vectores propios y $x(0)$ el vector de condiciones iniciales, al conocer la inversa de F el vector de constantes $c = (c_1, \dots, c_n)$ será

$$c = \frac{1}{n} F^* x(0)$$

El valor de c_1 resulta al multiplicar la primera fila de $\frac{1}{n} F^*$ (dicha primera fila es el vector cuyas entradas son $\frac{1}{n}$) por $x(0)$ (el vector de condiciones iniciales)

$$c_1 = \frac{\sum_{j=1}^n x_j(0)}{n}$$

Así encontramos el resultado requerido, es decir, el punto de convergencia corresponde al valor de c_1 , la media aritmética de las condiciones iniciales, multiplicado por el vector característico $v_1 = (1, \dots, 1)^T$. □

Para un sistema 1-cíclico se concluye que hay un punto atractor único. El atractor global para un sistema 1-cíclico esta caracterizado por el baricentro de las condiciones iniciales en cada configuración.

4.4. Generalización

Con el fin de caracterizar cuándo diferentes sistemas de persecución tienen un único atractor global, dado por un punto de equilibrio que depende de las condiciones iniciales se presentan los dos siguientes resultados.

Lema 4.4.1 Sea A una matriz semidefinida negativa con V como matriz de vectores característicos con columnas denotadas por v_j , $j = 1, \dots, n$. Sean r_j , $j = 1, \dots, n$ las filas de V^{-1} . Si suponemos que $\dim(\text{Ker}(A)) = 1$ entonces con el valor propio $\lambda_1 = 0$ y asignando $v_1 = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ a su respectivo vector propio, tenemos

$$r_1 = \frac{v_1^\perp}{\|v_1^\perp\|^2} \quad (4.10)$$

donde $v_1^\perp = v_1 - v_1^p$ y v_1^p es la proyección ortogonal de v_1 sobre el subespacio generado por v_2, \dots, v_n .

Demostración: Sea v_1^p la proyección ortogonal de v_1 sobre el subespacio generado por v_2, \dots, v_n . Esta proyección es única, ya que los vectores característicos de A son linealmente independientes. Definiendo $v_1^\perp = v_1 - v_1^p$ y dado que $\langle v_j, r_1 \rangle = 0$ para $j = 2, \dots, n$ tenemos que $r_1 = \kappa v_1^\perp$ donde κ es una constante por determinar. Como $1 = \langle v_1, r_1 \rangle$ obtenemos, $1 = \langle v_1, \kappa v_1^\perp \rangle = \kappa \langle v_1^\perp, v_1^\perp \rangle$ lo cual implica que $\kappa = \langle v_1^\perp, v_1^\perp \rangle^{-1}$. \square

Teorema 4.4.2 Consideremos el siguiente sistema lineal

$$x'(t) = Ax(t) \quad (4.11)$$

donde A satisface las condiciones del lema previo. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{\langle v_1^\perp, x(0) \rangle}{\|v_1^\perp\|^2} v_1 \quad (4.12)$$

Demostración: La solución general de (4.11) está dada por

$$x(t) = c_1 v_1 + \sum_{k=2}^n c_k e^{\lambda_k t} v_k \quad (4.13)$$

El vector de constantes $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ depende de las condiciones iniciales siendo de principal importancia el valor de c_1 , esto porque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c_1 v_1 \quad (4.14)$$

Para encontrar los valores del vector c es necesario resolver el sistema de ecuaciones

$$Vc = x(0) \quad (4.15)$$

donde V es la matriz de vectores característicos de A y $x(0)$ el vector de condiciones iniciales. El valor de c_1 es obtenido por el lema 4.4.1 multiplicando la primera fila de V^{-1} por $x(0)$ esto es

$$c_1 = \frac{\langle v_1^\perp, x(0) \rangle}{\|v_1^\perp\|^2} \quad (4.16)$$

□

Notemos que cada valor de la constante c_1 es la misma que la solución de mínimos cuadrados para el problema lineal dado por $w(0) = c_1 v_1^\perp$. Nótese también que cuando v_1, v_2, \dots, v_n forman un sistema ortogonal, los coeficientes c_1, c_2, \dots, c_n llamados coeficientes ortogonales, o algunas veces, coeficientes de Fourier, pueden ser calculados fácilmente, tal como se vio en la sección anterior. Consideremos ahora diferentes escenarios de persecución.

4.5. Diversos escenarios de persecución cíclica

Primer escenario.

Consideremos ahora que cada uno de los individuos fija su atención en el movimiento de los demás elementos del conjunto, supongamos que esa tendencia a seguir a los demás tiene cierto peso, donde el individuo u_j seguirá al individuo u_{j+1} con un peso s_1 , al individuo u_{j+2} con un peso s_2 , cuando $j+k$ sea igual a n , entonces el j -ésimo individuo seguirá a u_1 con un peso de s_{k+1} y así sucesivamente, donde $0 \leq s_l \leq 1$ y $\sum_{l=1}^{n-1} s_l = 1$ estos pesos estarán dados por un vector $s \in \mathbb{R}^{n-1}$. Así, cada partícula sigue un punto arbitrario de la envoltura convexa de las posiciones del resto de las partículas. Para caracterizarlo por medio de digrafos, consideremos n nodos, es decir, los individuos, cuyo conjunto está dado por $V(D) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$, el vector de pesos $s = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ y la función $\varphi(u_j, u_k)$ la cual definimos de la siguiente manera

$$\varphi(u_j, u_k) = \begin{cases} s_r & \text{si } k > j \text{ donde } r = k - j \\ s_h & \text{si } k < j \text{ donde } h = (n - j) + (k + 1) \end{cases} \quad (4.17)$$

Así, se define el digrafo D que describe este tipo de persecución como $D = (V(D), s, \varphi(u_j, u_k))$ donde $j = 0, \dots, n-1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, con $j \neq k$, $u_j, u_k \in V(D)$, existiendo una arista dirigida desde u_j hacia u_k si $\varphi(u_j, u_k) \neq 0$. Algunas de las características a notar son

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(u_0, u_k) = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \varphi(u_j, u_k) = 1 \quad \text{para } j \neq 0$$

Además, si $s_j \neq 0$ para $j = 1, 2, \dots, n-1$ el digrafo que corresponde al sistema es completo. En este caso es necesario que el digrafo sea conexo, si el digrafo no es conexo y se tiene que para el vector s una de sus componentes es igual a uno y las de más son cero entonces se trata de un caso de persecución r -cíclica. Nótese que el digrafo correspondiente es un digrafo K -circular, es decir, $Ci(n, K)$, donde n es el número de vértices (en este caso individuos) y el conjunto $K = \{k_1, \dots, k_m\}$, está dado por los subíndices j tal que $s_j \neq 0$.

Recordemos que cada coordenada de u_j satisface uno de los m sistemas lineales de la forma

$$x'(t) = A_s x(t) \quad (4.18)$$

donde $A_s \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$, la matriz que representa dicha transformación lineal es una matriz circulante de orden n , dada por $A_s = \text{circ}(-1, s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$, o bien

$$A_s = \begin{pmatrix} -1 & s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{n-2} & s_{n-1} \\ s_{n-1} & -1 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-3} & s_{n-2} \\ s_{n-2} & s_{n-1} & -1 & s_1 & \cdots & s_{n-4} & s_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & \cdots & -1 & s_1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n-1} & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de vectores característicos de A_s , estará dada por $V = F$, la matriz de Fourier.

Además A_s es una matriz semidefinida negativa, es decir, para λ_j valor propio de A_s se tiene $\lambda_1 = 0$ y $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ para $j = 2, \dots, n$, al considerar que solo existe un valor propio nulo (al cual hemos denotado por λ_1) se tiene $\dim(\text{Ker}(A_s)) = 1$, nótese que se excluye la multiplicidad algebraica para el valor propio igual a cero al considerar al digrafo que corresponde al sistema como un digrafo conexo. Así A_s cumple con las hipótesis del lema 4.4.1 asignamos $v_1 = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ como el vector característico correspondiente al valor propio $\lambda_1 = 0$, como se había señalado los vectores de las columnas de F , la matriz de vectores propios son ortogonales, en particular $\langle v_1, v_k \rangle = 0$, para $k = 2, \dots, n$, es decir, $v_1^\perp = v_1$, entonces por el teorema 4.4.2, para el sistema $x'(t) = A_s x(t)$, tendremos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j(0) (1, 1, \dots, 1)^T$$

Así, para el patrón de persecución para n individuos u_0, u_1, \dots, u_n en un espacio m dimensional, el punto de equilibrio será

$$\left(\frac{\sum_{j=1}^n u_{0j}(0)}{n}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^n u_{mj}(0)}{n} \right)$$

A continuación se exponen un par de ejemplos, uno en el cual no es posible aplicar este caso dado que el digrafo que corresponde al sistema no es conexo y otro en el cual se aplica el procedimiento anterior.

Ejemplo 4.5.1 Consideremos un conjunto de 18 individuos $V(D) = \{u_0, u_1, \dots, u_{17}\}$, el vector de pesos está dado por $s \in \mathbb{R}^{17}$ donde $s_3 = 0.3$ y $s_6 = 0.7$. El digrafo circular correspondiente es $Ci(18, K)$ donde $K = \{3, 6\}$, en la Figura 4.6 a) se muestra la representación gráfica del grafo subyacente, se puede observar que no es conexo y se resalta una de las tres partes conexas. Recordemos que el digrafo es una representación de cómo se lleva a cabo el fenómeno denominado persecución esto no implica que necesariamente se encuentren en el plano, aunque en este caso para ilustrar el comportamiento de cada uno de los individuos supondremos que es así, es decir, $u_j = (x_j(t), y_j(t))$ para $j = 0, 1, \dots, 17$, por lo que tendremos un par de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$x'(t) = A_s x(t) \quad y'(t) = A_s y(t)$$

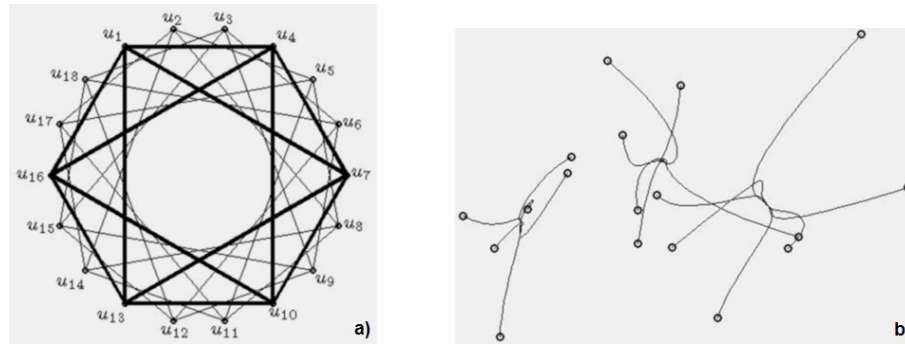


Figura 4.6: a) Grafo subyacente a $Ci(18, K)$ b) Puntos de convergencia para el sistema.

Donde $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^{18}$, $A_s = circ(s)$, sujeto a las respectivas condiciones iniciales $x(0)$ y $y(0)$. Como se puede observar en la Figura 4.6 b), cuando $t \rightarrow \infty$ hay tres puntos de convergencia, cada punto corresponde a la media aritmética de las condiciones iniciales de los 6 individuos cuyos vértices son subgrafos conexos. En este caso el número de digrafos conexos corresponde a $d = MCD(n, K) = MCD(18, 3, 6) = 3$, y la cantidad de individuos en cada sistema correspondiente a cada digrafo conexo es $n/d = 6$.

Ejemplo 4.5.2 Ahora considérense 25 individuos, el conjunto de vértices correspondiente es $V(D) = \{u_0, u_1, \dots, u_{24}\}$, en esta ocasión el vector de pesos $s \in \mathbb{R}^{25}$ es aquel cuyas componentes tienen los valores $s_2 = 0.8$, $s_5 = 0.1$, $s_8 = 0.1$ y las demás igual a cero. El grafo subyacente al grafo circulante $Ci(25, K)$ donde $K = \{2, 5, 8\}$, se muestra en la Figura 4.7 a), se observa que es un grafo conexo, esto porque $d = MCD(n, K) = 1$, por lo tanto cumple con las condiciones específicas para este caso. Con fines ilustrativos suponemos que los individuos están en el plano, una vez

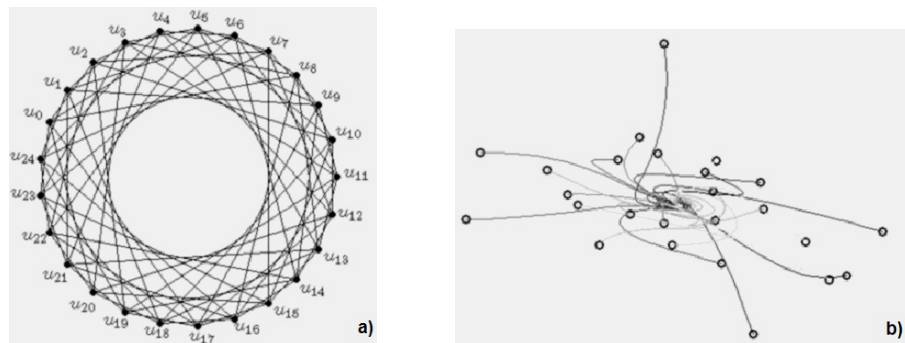


Figura 4.7: a) Grafo subyacente a $Ci(25, K)$ b) Único punto de convergencia para el sistema.

más tendremos un par de sistemas, uno para las abscisas y otro para las ordenadas,

$x'(t) = A_s x(t)$ y $y'(t) = A_s y(t)$, donde $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^{25}$ y A_s es la matriz *circ*(s). En la Figura 4.7 se muestra que hay un solo punto de convergencia dado por

$$U_j = \left(\sum_{i=0}^{24} x_i(0), \sum_{i=0}^{24} y_i(0) \right) \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, 24$$

donde $u_j(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Es decir el punto de convergencia corresponde a la media aritmética de las condiciones iniciales.

Segundo escenario.

Para analizar en qué tipo de escenarios el punto de convergencia corresponderá a la media aritmética de las condiciones iniciales, es necesario plantear un caso análogo al anterior. Cada individuo sigue un punto arbitrario de la envoltura convexa de las posiciones del resto. Digamos que el j -ésimo individuo tiene un vector $a_j = (a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \dots, a_{n-1}^{(j)})$ el cual brinda la combinación convexa de las posiciones de los $n - 1$ individuos restantes. Esto significa que el individuo u_0 , en un instante de tiempo dado se dirigirá al punto

$$q_0(t) = a_1^{(0)} u_1(t) + a_2^{(0)} u_2(t) + \dots + a_{n-1}^{(0)} u_{n-1}(t)$$

y para los demás individuos $u_j, j = 1, 2, \dots, n - 1$ tenemos

$$q_j(t) = a_1^{(j)} u_{j+1}(t) + a_2^{(j)} u_{j+2}(t) + \dots + a_{n-1}^{(j)} u_{j+n-1}(t)$$

Dado que los $a_k^{(j)}$ son los coeficientes de una combinación convexa de $n - 1$ individuos tenemos

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(j)} = 1 \quad 0 \leq a_k^{(j)} \leq 1 \quad j = 0, 1, \dots, n - 1$$

Así, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que modela el sistema es

$$u_j'(t) = -u_j(t) + q_j(t) \quad j = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Entonces para cada uno de los m sistemas de la forma $x'(t) = A_a x(t)$, la matriz A_a que define dicho sistema estará dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \cdots & a_{n-2}^{(1)} & a_{n-1}^{(1)} \\ a_{n-1}^{(2)} & -1 & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \cdots & a_{n-3}^{(2)} & a_{n-2}^{(2)} \\ a_{n-2}^{(3)} & a_{n-1}^{(3)} & -1 & a_1^{(3)} & \cdots & a_{n-4}^{(3)} & a_{n-3}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2^{(n-1)} & a_3^{(n-1)} & a_4^{(n-1)} & a_5^{(n-1)} & \cdots & -1 & a_1^{(n-1)} \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & a_4^{(n)} & \cdots & a_{n-1}^{(n)} & -1 \end{pmatrix}$$

con las siguientes características

- La suma de cada fila y de cada columna de A_a es igual a cero.

- A es semidefinida negativa, $\dim(Ker(A_a)) = 1$, siendo $\lambda_1 = 0$ y $v_1 = (1, \dots, 1)$, es decir $v_1 \in Ker(A_a)$, además, también $v_1 \in Ker(A^T)$.
- Para v_1, v_2, \dots, v_n vectores característicos de A tenemos $\langle v_1, v_k \rangle = 0$ para $k = 2, \dots, n$. Sean λ_k y v_k los k -ésimos valor y vector característicos de A , $k \neq 1$, entonces

$$\bar{\lambda}_k \langle v_1, v_k \rangle = \langle v_1, \lambda_k v_k \rangle = \langle v_1, Av_k \rangle = \langle A^T v_1, v_k \rangle = 0. \quad (4.19)$$

Ya que $\lambda_k \neq 0$ para $k = 2, \dots, n$, se tiene que $\langle v_1, v_k \rangle = 0$.

Como v_1 es ortogonal a los demás vectores característicos de A_a , tenemos que $v_1^\perp = v_1$, así, por el lema 4.4.1 encontramos la primer fila de V^{-1} , $r_1 = v_1 \|v_1\|^{-2}$ y con ello

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_j(t) = \frac{\langle v_1, x(0) \rangle}{\|v_1\|} \quad (4.20)$$

Al digrafo que le corresponde a este caso le denominaremos K_j -circular, $Ci(n, K_j)$, donde n es el número de vértices indexados desde 0 hasta $n-1$ y a cada vértice le corresponde un conjunto $K_j = k_1, k_2, \dots, k_m$, donde $k_i \in \mathbb{Z}^+$, $m < n$ y $k_l \neq k_i$ para $l \neq i$. El conjunto K_j nos indica los enlaces dirigidos que tienen como origen el vértice u_j , así, si $K_j = k_1, k_2, \dots, k_m$ las aristas dirigidas con inicio en u_j tendrán como vértices finales aquellos de la forma u_{j+k_i} , evaluando $j+k_i$ módulo n . En este caso también es necesario que el digrafo sea conexo para que haya un solo punto de convergencia. El conjunto K_j está dado por los subíndices j tales que $a_j^{(k)} \neq 0$.

Tercer escenario.

En los dos casos anteriores se han impuesto las condiciones necesarias para que el punto de convergencia de los n individuos involucrados en el mecanismo de persecución sea la media aritmética de las condiciones iniciales. Ahora veremos algunas características para que el punto de equilibrio corresponda a un punto de la envoltura convexa, el cual no corresponda a la media aritmética de las condiciones iniciales. Para ello consideramos la matriz A_a expresada en 4.5, pero en este caso $v_1 \notin Ker(A_b^T)$ por lo que $\langle v_1, v_k \rangle \neq 0$ al menos para algún $k = 2, \dots, n$, es decir, $v_1^\perp \neq v_1$. Con estas características para el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x}(t) = A_a x(t)$ con condiciones iniciales $x(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$, el punto de convergencia, es dado por

$$X = \sum_{j=1}^n c_j x_j(0)$$

donde $x(t) \rightarrow X$ cuando $t \rightarrow \infty$ y el vector $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, está dado por $c = \frac{v_1^\perp}{\|v_1^\perp\|^2}$ además

$$\sum_{j=1}^n c_j = 1 \quad (4.21)$$

Por lo que el punto en el cual convergen los individuos es una combinación convexa de las condiciones iniciales. En la figura se muestra el caso para $n = 20$, con condiciones iniciales aleatorias donde el punto de equilibrio no corresponde a la media aritmética de las condiciones iniciales.

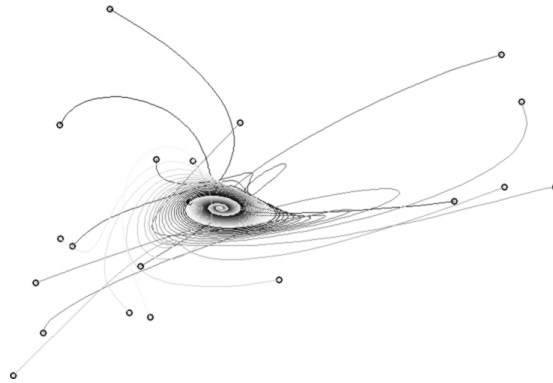


Figura 4.8: Caso $n=20$, donde el punto de convergencia es combinación convexa de las condiciones iniciales.

Capítulo 5

Patrones de persecución y el oscilador de Van der Pol. Caso lineal.

En este capítulo se expondrá el patrón de persecución que se da entre n partículas o individuos ordenados en el plano, u_1, u_2, \dots, u_n , $n > 1$, donde el individuo u_j sigue al organismo u_{j+1} para $j = 1, \dots, n - 1$, el organismo u_n tiene una trayectoria dada. El n -ésimo organismo tendrá movimiento independiente, es decir, no dependerá del movimiento de los demás individuos, en este caso $u_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$, donde $x_n(t)$ y $y_n(t)$ son soluciones de la ecuación de van der Pol. El modelo que describe este mecanismo de persecución está dado por

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= -u_j + u_{j+1} \quad \text{para } j = 1, \dots, n - 1 \\ \dot{u}_n &= \begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ -x_n + \mu y_n(1 - x_n^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Se analizará el caso lineal, es decir, cuando en la ecuación anterior $\mu = 0$, inicialmente se caracterizará el digrafo que corresponde al sistema, posteriormente se describirá el movimiento de los individuos para valores grandes del tiempo.

5.1. Caso $\mu = 0$, n individuos.

El patrón de persecución que se da entre n individuos, u_1, \dots, u_n , tal que el n -ésimo individuo tiene una trayectoria dada y es seguido por el individuo u_{n-1} , el cual a su vez es seguido por u_{n-2} y así sucesivamente, es análogo a una formación militar, la cual es denominada hilera, en la cual los soldados se sitúan uno detrás de otro, formando un

frente y cola de un solo soldado. Así, si la distancia entre perseguido y perseguidor es la misma para los n individuos y la velocidad de cada uno es igual, al cabo de cierto tiempo la trayectoria que recorrerán los $n - 1$ individuos que no son el frente será la misma que la del individuo *líder* que tiene movimiento independiente. El escenario puede tener muchas variantes, por ejemplo, que al inicio del movimiento cada individuo tenga una posición aleatoria en el plano y por ende la distancia entre individuos no será la misma, o que el movimiento se lleve a cabo con velocidad variable o que el enésimo individuo tenga una trayectoria cerrada y periódica. En muchos de los casos los individuos perseguidores no recorrerán la misma trayectoria del individuo *líder*, sin embargo, por analogía denominaremos a este fenómeno como *patrón de persecución en hilera*.

5.1.1. Representación por medio de digrafos.

Para el digrafo que corresponde al patrón de persecución en hilera, tomamos como el conjunto de nodos o vértices al conjunto de individuos involucrados en el sistema, es decir $V(D) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, dado que los vértices pueden ser organizados en una secuencia lineal en tal forma que dos vértices son adyacentes si son consecutivos en la secuencia y no son adyacentes de lo contrario, el digrafo que corresponde es una $n - 1$ -ruta dirigida. Por ejemplo, para $n = 10$ la representación gráfica de la 9-ruta dirigida es tal como en la Figura 5.1

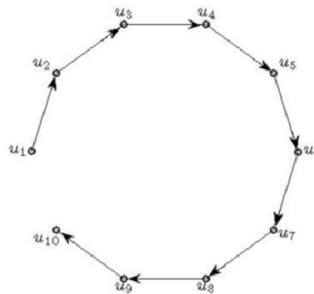


Figura 5.1: Representación gráfica de la 9-ruta dirigida.

5.1.2. Análisis y caracterización.

Para el patrón de persecución en hilera donde el enésimo individuo, aquel de movimiento independiente en el plano, tiene la trayectoria $u_n = (x(t), y(t))$ solución de la ecuación de van der Pol

$$\dot{u}_n = \begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ -x_n + \mu y_n(1 - x_n^2) \end{pmatrix}$$

el caso lineal se da para el valor de $\mu = 0$, con este valor la ecuación anterior es un caso particular del siguiente sistema

$$\dot{u}_n = \begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_n y_n(t) \\ \omega_n x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_n \\ \omega_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n(t) \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Con $(x(0), y(0))$ como condiciones iniciales, o en este caso posición del individuo u_n para el tiempo $t = 0$. Esta ecuación diferencial tiene por solución

$$u_n(t) = \begin{pmatrix} x_n(t) \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n(0) \cos(\omega_n t) - y_n(0) \operatorname{sen}(\omega_n t) \\ x_n(0) \operatorname{sen}(\omega_n t) + y_n(0) \cos(\omega_n t) \end{pmatrix}$$

Entonces el organismo u_n se mueve en la circunferencia con centro en el origen y radio r_n con una frecuencia angular ω_n . El radio r_n depende de la posición inicial $u_n(0) = (x_n(0), y_n(0))$, por lo que

$$\begin{aligned} r_n &= \sqrt{x_n(t)^2 + y_n(t)^2} \\ &= \sqrt{x_n(0)^2 + y_n(0)^2}. \end{aligned}$$

La magnitud de la velocidad tangencial es constante dada por

$$v_t = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = \omega_n r_n$$

Ahora, para el movimiento de los $n - 1$ organismos tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que lo modela

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= -u_j + u_{j+1} \quad \text{para } j = 1, \dots, n-1 \\ \dot{u}_n &= \begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_n y_n \\ \omega_n x_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.3)$$

En la Figura 5.2 observamos un par de casos en los cuales el número de individuos es $n = 200$, $u_n(0) = (x_n(0), y_n(0)) \in S^2$, por lo que el n -ésimo organismo se moverá en dicha circunferencia $\forall t > 0$, con una frecuencia angular ω_n . Las demás partículas cuya posición inicial es el origen, tienden asintóticamente a trayectorias circulares, con centro en el origen pero de menor radio, en el inciso a) la velocidad angular del n -ésimo individuo es $\omega_n = 0.8$ en el inciso b) es $\omega_n = 0.2$. Se observa que a mayor frecuencia angular del n -ésimo individuo menores serán los radios de las circunferencias a las cuales tiende el movimiento de cada uno de los individuos restantes. En el Lema 5.1.1 que se presenta a continuación se caracteriza el radio de la circunferencia a la cual tienden los $n - 1$ organismos que no tienen movimiento independiente, suponemos que el n -ésimo organismo se mueve en la circunferencia unitaria.

Teorema 5.1.1 Considerando el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (5.3) con condiciones iniciales $u_j(0) = (x_j(0), y_j(0))$ aleatorias para $j = 1, \dots, n - 1$ y $u_n \in S^2$; los primeros $n - 1$ individuos tienden asintóticamente a trayectorias circulares con centro en el origen y radio

$$r_j = \frac{1}{(1 + \omega_n^2)^{(n-j)/2}} \quad j = 1, 2, \dots, n - 1$$

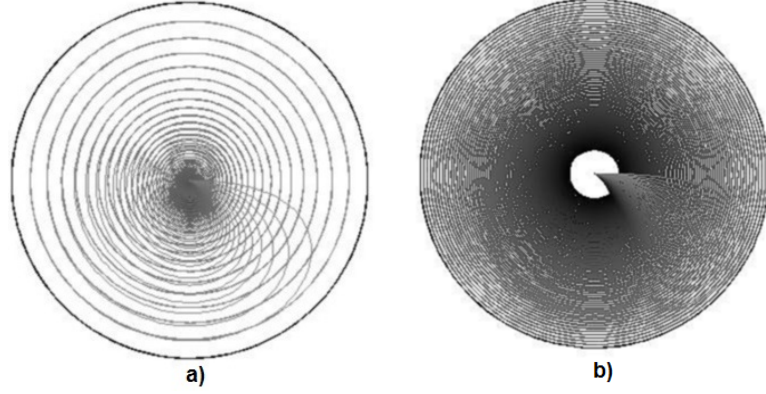


Figura 5.2: Caso $n = 200$ individuos, a) $\omega_n = 0.8$, b) $\omega_n = 0.2$.

Demostración: Dado que el individuo u_{n-1} va en persecución del u_n , su trayectoria no dependerá de los $n - 2$ individuos restantes, así podemos considerar solo las dos últimas ecuaciones del sistema, a saber

$$\begin{aligned}\dot{u}_{n-1} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_{n-1} \\ \dot{y}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{n-1} + x_n \\ -y_{n-1} + y_n \end{pmatrix} \\ \dot{u}_n &= \begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_n y_n \\ \omega_n x_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

O bien, expresarlo de la forma $\dot{u} = Au$ donde A está dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_n \\ 0 & 0 & \omega_n & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

La solución de este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, está dado por

$$u(t) = \Lambda e^{Jt} \Lambda^{-1} u(0) \quad (5.5)$$

donde Λ es la matriz de vectores característicos y J es la forma canónica de Jordan correspondiente a A . Los valores propios de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \omega_n i$ y su conjugado $\lambda_4 = -\omega_n i$.

Λ la matriz de vectores propios y su respectiva inversa están dadas por

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & -a & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & -a \\ 0 & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde

$$a = \frac{\omega_n}{1 + \omega_n^2} \quad b = \frac{1}{1 + \omega_n^2}$$

Y la matriz e^{Jt} es

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_n t) & -\text{sen}(\omega_n t) \\ 0 & 0 & \text{sen}(\omega_n t) & \cos(\omega_n t) \end{pmatrix}$$

Sustituyendo las matrices anteriores en 5.5, encontramos la solución del sistema $u(t)$. Fijamos un tiempo τ lo suficientemente grande tal que $e^{-\tau} \approx 0$, entonces con $u(t)$ y con esta aproximación, definimos la función $U(t)$ para $t \in [\tau, +\infty)$, dada por

$$\begin{pmatrix} x_n(0) [a \text{sen}(\omega_n t) + b \cos(\omega_n t)] + y_n(0) [a \cos(\omega_n t) - b \text{sen}(\omega_n t)] \\ x_n(0) [-a \cos(\omega_n t) + b \text{sen}(\omega_n t)] + y_n(0) [a \text{sen}(\omega_n t) + b \cos(\omega_n t)] \\ x_n(0) [\cos(\omega_n t)] + y_n(0) [-\text{sen}(\omega_n t)] \\ x_n(0) [\text{sen}(\omega_n t)] + y_n(0) [\cos(\omega_n t)]. \end{pmatrix}$$

Esta función nos brinda la trayectoria circular a la cual tiende asintóticamente el individuo denotado por u_{n-1} , dicha circunferencia tendrá por radio

$$r_{n-1} = \sqrt{x_{n-1}(t)^2 + y_{n-1}(t)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{\omega_n^2 + 1}}{1 + \omega_n^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_n^2}}$$

Ahora encontraremos la velocidad tangencial y frecuencia angular correspondientes a la trayectoria a la cual tiende asintóticamente el individuo u_{n-1} . Consideramos la función $U_{n-1}(t) = (x_{n-1}(t), y_{n-1}(t))$ para $t \in [\tau, \infty)$, es decir, cuando la trayectoria es circular. Bajo estas consideraciones la velocidad tangencial del individuo u_{n-1} es

$$\begin{aligned} v_t &= \sqrt{x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2} \\ &= \sqrt{(-x_{n-1} + x_n)^2 + (-y_{n-1} + y_n)^2} \\ &= r_n \sqrt{(1-b)^2 + a^2} \\ &= r_n \sqrt{\frac{\omega_n}{1 + \omega_n^2}} \\ &= r_n \frac{\omega_n}{\sqrt{1 + \omega_n^2}} = r_n \omega_n r_{n-1} = \omega_n r_{n-1} \end{aligned}$$

Entonces el valor de la frecuencia angular de u_{n-1} , es igual a la frecuencia angular del enésimo individuo, es decir, $\omega_{n-1} = \omega_n$, así tendremos el siguiente sistema para $\dot{U}_{n-1}(t)$

$$\dot{U}_{n-1}(t) = \begin{pmatrix} -x_{n-1}(t) + x_n(t) \\ -y_{n-1}(t) + y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_n y_{n-1}(t) \\ \omega_n x_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Por lo que también se llega a un sistema similar para encontrar el radio de la circunferencia a la cual tiende asintóticamente el individuo u_{n-2}

$$\begin{aligned} \dot{u}_{n-2} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_{n-2} \\ \dot{y}_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{n-2} + x_{n-1} \\ -y_{n-2} + y_{n-1} \end{pmatrix} \\ \dot{U}_{n-1} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_{n-1} \\ \dot{y}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_n y_{n-1} \\ \omega_n x_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Al realizar el mismo procedimiento se calcula el radio de la circunferencia a la cual tiende el individuo u_{n-2}

$$r_{n-2} = \sqrt{x_{n-2}(t)^2 + y_{n-2}(t)^2} = \frac{1}{(1 + \omega_n^2)}$$

para $t \in [\tau, \infty)$. Llevando a cabo el mismo procedimiento de manera sucesiva encontramos r_j para $j = 1, 2, \dots, n-1$

$$r_j = \sqrt{x_j(t)^2 + y_j(t)^2} = \frac{1}{(1 + \omega_n^2)^{(n-j)/2}}.$$

□

Capítulo 6

Patrones de persecución y el oscilador de Van der Pol. Caso no lineal.

En el capítulo anterior se analizó el sistema en la cual n individuos o partículas, u_1, u_2, \dots, u_n , $n > 1$, ordenados en el plano están bajo el patrón de *persecución en hilera*, en el cual el individuo u_j persigue al organismo u_{j+1} para $j = 1, \dots, n - 1$, el organismo u_n sigue una trayectoria dada. El movimiento del enésimo individuo no dependerá del movimiento de los $n - 1$ individuos restantes involucrados en el sistema. La función del movimiento en el plano del individuo u_n estará dado por la función $u_n = (x_n(t), y_n(t))$, donde x_n y y_n son soluciones del siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_n &= y_n \\ \dot{y}_n &= -x_n + \mu y_n(1 - x_n^2)\end{aligned}$$

el cual recibe el nombre de ecuación u oscilador de van der Pol. En el presente capítulo se analizará el caso no lineal, es decir, el caso en el cual $\mu > 0$.

6.1. Caso no lineal, $\mu \neq 0$.

El digrafo que caracteriza la persecución en el plano se expuso en el capítulo anterior, para n individuos involucrados corresponderá una $n - 1$ ruta dirigida. El sistema que modela el patrón de persecución descrito en la sección anterior está dado por

$$\begin{aligned}\dot{u}_j &= -u_j + u_{j+1} \quad \text{para } j = 1, \dots, n - 1 \\ \dot{u}_n &= \begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ -x_n + \mu y_n(1 - x_n^2) \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{6.1}$$

Consideremos ahora el caso no lineal, es decir, en el sistema no lineal 6.1 el valor de

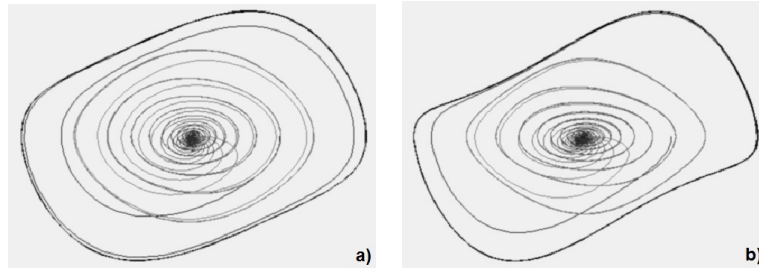


Figura 6.1: Caso $n = 40$ individuos, a) $\mu = 0.5$, b) $\mu = 1$.

μ será diferente de cero. Para esta situación habrá que recurrir a métodos numéricos para resolver dicho sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. El comportamiento asintótico de la ruta del enésimo individuo consiste en una órbita cerrada, tal como se analizó en la sección 3.3.1. Para el comportamiento asintótico de la ruta del resto de los individuos se muestra en la Figura 6.1 que para pequeños valores de μ , todas las órbitas están contenidas en el interior del ciclo límite del oscilador de van der Pol. Para grandes valores de μ (Figura 6.2) observamos que las órbitas de los seguidores no están completamente contenidas en el ciclo perseguido. Las zonas donde sí están contenidas dentro del ciclo límite del oscilador de van der Pol son, esencialmente, donde el oscilador tiene un cambio de estado suave y lento. Incrementando los valores de μ se producen órbitas muy alargadas para los seguidores. Para describir a qué nos referimos con cambios de estado *suaves* y el porqué se suscita este fenómeno realizaremos un análisis del diagrama de fases del oscilador de van der Pol. Parte de este análisis se basa en 12 y 13.

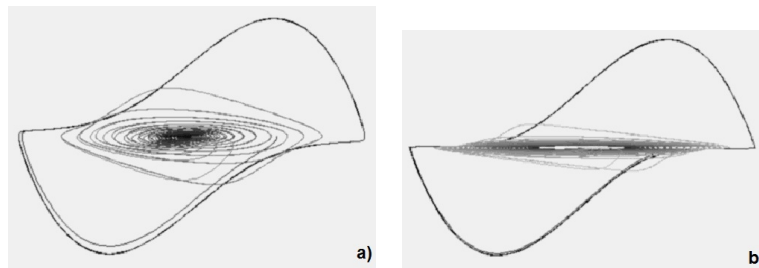


Figura 6.2: Caso $n = 40$ individuos, a) $\mu = 3$, b) $\mu = 8$.

Para hacer el análisis del diagrama de fases de la ecuación de van der Pol $\ddot{x} + \mu(x^2 + 1)\dot{x} + x = 0$ para $\mu \gg 1$ es conveniente introducir diferentes variables a las usuales, " $\dot{x} = y, \dot{y} = \dots$ ". Para motivar las nuevas variables, nótese que

$$\ddot{x} + \mu\dot{x}(x^2 - 1) = \frac{d}{dt} \left(\dot{x} + \mu \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right] \right).$$

Así si hacemos

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x, \quad w = \dot{x} + \mu F(x), \quad (6.2)$$

la ecuación de van der Pol implica

$$\dot{w} = \ddot{x} + \mu \dot{x}(x^2 - 1) = -x. \quad (6.3)$$

Por lo tanto la ecuación de van der Pol es equivalente a 6.2 y 6.3, y puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= w - \mu F(x) \\ \dot{w} &= -x \end{aligned} \quad (6.4)$$

Un nuevo cambio de variables es útil. Si hacemos

$$y = \frac{w}{\mu}$$

entonces, por 6.4, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu[y - F(x)] \\ \dot{y} &= -\frac{1}{\mu}x \end{aligned} \quad (6.5)$$

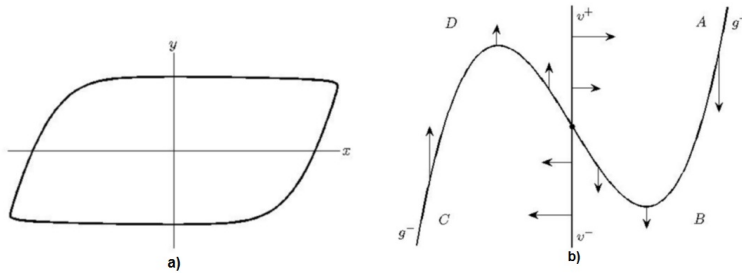


Figura 6.3: a) Gráfica del ciclo límite del sistema 6.5, con $\mu = 6$ b) Plano dividido en 4 partes por las curvas donde $\dot{x} = 0$ y $\dot{y} = 0$.

Resolviendo esta ecuación numéricamente obtenemos la gráfica mostrada en la Figura 6.3 a). Las curvas sobre las cuales \dot{x} y \dot{y} son iguales a cero estarán dadas por

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}x^3 - x \\ x &= 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Dividimos cada una de estas curvas en dos partes resultando

$$\begin{aligned} v^+ &= \{(x, y) | y > 0, x = 0\} \\ v^- &= \{(x, y) | y < 0, x = 0\} \\ g^+ &= \{(x, y) | x > 0, y = \frac{1}{3}x^3 - x\} \\ g^- &= \{(x, y) | x < 0, y = \frac{1}{3}x^3 - x\}. \end{aligned}$$

Estas curvas son disjuntas; con el origen forman las fronteras de cuatro regiones (conjuntos abiertos) A, B, C y D , tal como se muestra en la Figura 6.3 b). Veamos como se comporta el campo vectorial (\dot{x}, \dot{y}) de 6.5 sobre las curvas frontera. Tendremos que $\dot{y} = 0$ en el origen y sobre $v^+ \cup v^-$ y no se anula en ningún otro punto; para \dot{x} , se anula en el origen y en $g^+ \cup g^-$. El vector (\dot{x}, \dot{y}) es horizontal sobre $v^+ \cup v^-$, apuntando hacia la derecha sobre v^+ y hacia la izquierda sobre v^- ; (\dot{x}, \dot{y}) será vertical sobre $g^+ \cup g^-$, apuntando hacia abajo sobre g^+ y hacia arriba sobre g^- , tal como se muestra en 6.3 b). En cada región los signos de \dot{x} y de \dot{y} son constantes. Para dar una descripción de la oscilación del sistema 6.5 identificamos 6 puntos del ciclo límite, 4 de ellos son las intersecciones de la solución $(x(t), y(t))$ de 6.5 con las curvas 6.6, denotados de la siguiente manera $s_0 = (x(t), y(t)) \cap v^+$, $s_1 = (x(t), y(t)) \cap g^+$, $s_3 = (x(t), y(t)) \cap v^-$, $s_4 = (x(t), y(t)) \cap g^-$, y un par de puntos s_2 y s_5 que pertenecen a $(x(t), y(t))$ y a las regiones B y D respectivamente, tal como se muestran en la Figura 6.4. También ubicamos un par de puntos donde $F'(x) = 0$ estos puntos son denotados por m_0 y m_1 .

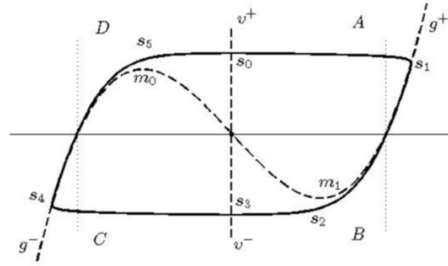


Figura 6.4: Gráfica donde se muestran las intersecciones del ciclo límite de 6.5 y las curvas donde $\dot{x} = 0$ y $\dot{y} = 0$.

Supongamos que la condición inicial s_5 no es cercana a la curva $F(x)$, es decir, supongamos que $y - F(x) \sim O(1)$ (denotando $f(k) \sim O(k)$ si $f(k)/k$ es acotada cuando $k \rightarrow \infty$). Entonces, por 6.5 tenemos $|\dot{x}| \sim O(\mu) \gg 1$ mientras $|\dot{y}| \sim O(\mu^{-1}) \ll 1$; por lo tanto, la velocidad horizontal es enorme y en dirección vertical muy pequeña, así la trayectoria entre el punto s_5 y s_0 es prácticamente horizontal, de igual manera el movimiento entre s_0 y s_1 . Si la condición inicial está por encima de $F(x)$, entonces $y - F(x) > 0$ y por lo tanto $\dot{x} > 0$; entonces la trayectoria se mueve lateralmente hacia la curva $F(x)$. Sin embargo, una vez que la trayectoria se acerca tanto que $y - F(x) \sim O(\mu^{-2})$, entonces \dot{x} y \dot{y} son comparables, siendo ambas $O(\mu^{-1})$. Entonces la trayectoria cruza a $F(x)$ verticalmente moviéndose lentamente a lo largo de la rama, con velocidad de tamaño $O(\mu^{-1})$, es decir, entre los puntos s_1 y s_2 , una vez que llega a s_2 se da el fenómeno anteriormente descrito por simetría de la curva cúbica.

Debido a que los cambios de variable realizados preservan el comportamiento de cada uno de los sistemas diferenciales, el análisis realizado y la descripción obtenida para 6.5, es válida para el sistema original. Lo anterior nos permite concluir que los cambios de estado presentes en el sistema 6.5 también se presentarán en el sistema inicial.

Capítulo 7

Conclusiones.

En este trabajo se proporcionaron diferentes mecanismos de persecución, teniendo cada uno diferentes comportamientos asintóticos. Los múltiples escenarios de la persecución cíclica se caracterizaron por la existencia de puntos atractores, los cuales son encontrados dependiendo de las características del sistema que modela la persecución. Para la persecución en hilera en la cual el individuo *líder* tiene movimiento independiente se analizaron principalmente un par de casos, uno en el cual el comportamiento asintótico de cada individuo corresponde a una órbita periódica, dicha órbita es una circunferencia con centro en el origen y radio que depende de la frecuencia angular que tiene el individuo perseguido; el otro caso en el cual se involucra un oscilador de relajación dado por la ecuación de van der Pol, el comportamiento asintótico de cada individuo consiste en un ciclo límite cuya forma depende del plano fase del oscilador.

Apéndice **A**

Solución de ecuaciones del problema perseguidor-evasor a velocidad constante.

En el problema de perseguidor-evasor a rapidez constante del capítulo 2 sección 2.1, a fin de encontrar la trayectoria que sigue el individuo perseguidor se llega a la siguiente ecuación diferencial ordinaria (Ecuación (2.5))

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = k(m - x)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (\text{A.1})$$

con condiciones iniciales $y'(0) = 0$ y $y(0) = 0$. Si el individuo evasor y el perseguidor se mueven con la misma rapidez, resulta que el valor de k es igual a 1, se considera también que el individuo evasor se mueve en la línea vertical, tal que $m = a$, con estas suposiciones de la ecuación (A.1) resulta

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = (a - x)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (\text{A.2})$$

Para reducir de orden esta ecuación diferencial realizamos el cambio de variable $v = y'$ por lo que (A.2) se escribe como

$$\sqrt{1 + v^2} = (a - x)v' \quad (\text{A.3})$$

66 Solución de ecuaciones del problema perseguidor-evasor a velocidad constante.

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación y separando variables se tiene

$$\frac{v'}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{1}{a-x},$$

en la cual se integran respecto a x ambos miembros de la ecuación, resultando

$$\log[C(v + \sqrt{1+v^2})] = -\log(a-x)$$

donde C es una constante de integración. Se lleva a cabo el cambio de variable $v = y'$ para obtener

$$\log[C(y' + \sqrt{1+(y')^2})] = -\log(a-x) \quad (\text{A.4})$$

considerando la condición inicial $y'(0) = 0$ se encuentra el valor de $C = \frac{1}{a}$, sustituyendo este valor en (A.4) se llega a la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$y' + \sqrt{1+(y')^2} = \frac{a}{a-x}. \quad (\text{A.5})$$

La cual, elevando al cuadrado y separando variables resulta

$$2ay' = \frac{a^2}{(a-x)} - a + x$$

Integrando ambos miembros de esta ecuación respecto a x se encuentra

$$2ay + C = -a^2 \log(a-x) - ax + \frac{x^2}{2}$$

donde C es una constante de integración. Para encontrar el valor de dicha constante se sustituye la condición inicial $y(0) = 0$ obteniéndose

$$C = -a^2 \log a$$

Con esto, la solución de la ecuación A.2 es

$$y = \frac{a}{4} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 - \log \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 - 1 \right\}. \quad (\text{A.6})$$

Ahora, en el caso en el cual la rapidez de ambos individuos es diferente, se tiene la relación $u = kv$ para $k > 0$ y $k \neq 1$, donde u es la rapidez del perseguidor y v la rapidez del evasor, por lo que la trayectoria del individuo perseguidor está dada por la ecuación diferencial (A.1)

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = k(m-x) \frac{d^2y}{dx^2}$$

con condiciones iniciales $y'(0) = 0$ y $y(0) = 0$ y donde $m = g(n)$ es una función conocida que brinda la trayectoria del individuo evasor. Suponiendo que el movimiento

del individuo perseguido es una línea vertical dada por $m = a$ la ecuación (A.1) toma la forma

$$\sqrt{1 + (y')^2} = k(a - x)y'' \quad (\text{A.7})$$

Para reducir de orden esta ecuación hacemos el cambio de variable $w = y'$, así la ecuación anterior se escribe como

$$\sqrt{1 + w^2} = k(a - x)w'$$

la cual, separando variables se expresa como

$$\frac{k w'}{\sqrt{1 + w^2}} = \frac{1}{a - x}$$

Integrando ambos miembros de esta ecuación respecto a x se tiene

$$k \log[C(v + \sqrt{1 + v^2})] = -\log(a - x) \quad (\text{A.8})$$

donde C es una constante de integración. Realizando el cambio de variable $w = y'$ y sustituyendo la condición inicial $y'(0) = 0$ se encuentra el valor de $C = a^{1/k}$, obteniendo la siguiente ecuación diferencial

$$y' + \sqrt{1 + (y')^2} = \left(\frac{a}{a - x}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (\text{A.9})$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación y separando variables, se encuentra

$$2y' = \left(\frac{a}{a - x}\right)^{1/k} - \left(\frac{a - x}{a}\right)^{1/k}.$$

Integrando ambos miembros respecto a x tendremos

$$2y + C = \frac{a^{1/k}(a - x)^{1-1/k}}{1 - 1/k} - \frac{a - x}{a},$$

donde C es una constante de integración cuyo valor

$$C = \frac{ka}{k - 1} - \frac{ka}{k + 1} = \frac{2ka}{k^2 - 1} \quad (\text{A.10})$$

se encuentra al sustituir la condición inicial $y(0) = 0$ en la ecuación (A.10). Con este valor de C encontramos la solución de la ecuación (A.1) para $k > 0$ y $k \neq 1$ dada por

$$y = \frac{ka}{k^2 - 1} + \frac{ka}{2(k^2 - 1)} \left\{ (k - 1) \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1+1/k} - (k + 1) \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1-1/k} \right\} \quad (\text{A.11})$$

68 Solución de ecuaciones del problema perseguidor-evasor a velocidad constante.

Bibliografía

- [1] **Julia K. Parrish, Steven V. Viscido y Daniel Grünbaum.** *Self-Organized Fish Schools: An Examination of Emergent Properties.* Biol. Bull. 202: 296305. June 2002.
- [2] **Banks, Robert B.** *Slicing pizzas, racing turtles and futher adventures in applied mathematics.* New Jersey: Princeton University Press. 1999.
- [3] **P. K. Aravind.** *A Symmetrical Pursuit Problem on the Sphere and the Hyperbolic Plane.* The Mathematical Gazette, Vol. 78, No. 481 (1994), 30-36
- [4] **M. S. Klamkin and D. J. Newman.** *Cyclic pursuit or 'The Three Bugs Problem'* Amer. Math. Monthly (June 1971) 631-639.
- [5] **F. Behroozi and R. Gagnon.** *Cyclic pursuit in a plane.* J. Math. Phys. 20 (November 1979) 2212-2216
- [6] **Bondy, J. A.** *Graph theory.* Springer-Verlag New York Inc. Graduate Texts in Mathematics; 244. 2008
- [7] **Saša Klampfer, Jože Mohorko, Žarko Čučej.** *Mathematical analysis of routing, based on circular graphs.* University of Maribor, Faculty of Electrical Engineering and Computer Science. 2000.
- [8] **Lara, Teodoro.** *Matrices circulantes.* Departamento de Física y Matemáticas. NURR-ULA, Trujillo, Venezuela.
- [9] **Ben Noble and James W. Daniel.** *Applied Linear Algebra.* Prentice Hall, 1977.
- [10] **D.W. Jordan and P. Smith.** *Nonlinear ordinary differential equations.* Oxford University Press. 2007
- [11] **Perko, L.** *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer- Verlag. 1991
- [12] **Khalil, Hassan K.** *Nonlinear systems.* Prentice Hall. 1996

- [13] **Hirsch, Morris; Smale, Stephen and Devaney, Robert.** *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos.* New York: Academic Press. Pure and applied mathematics, 60. 1974.