



**Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.**

---

Análisis y aproximación de una Ecuación Integral  
de convolución asociada a pruebas de pozo

**T E S I S**

Que para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS**

con Especialidad en

**MATEMÁTICAS APLICADAS**

**P R E S E N T A**

**VIRGILIO VÁZQUEZ HIPÓLITO**

Director de tesis:

**DR. MIGUEL ÁNGEL MORELES VÁZQUEZ**



# Agradecimiento

---

Al creador del Universo por haberlo creado de una forma Matemática perfecta.

A la familia Vázquez Hipólito; por su apoyo y consejos en cada etapa de mi vida, especialmente a mi padres: Juvencio Vázquez García y Margarita Hipólito González.

A toda la gente de México que por medio del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), solventó mis dos años de la maestría, con la beca número: 223475.

Al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT); por tener una Maestría en Matemáticas Aplicadas. Y por su apoyo con los espacios y personas tan magníficas que de alguna forma me apoyaron para adquirir nuevos conocimientos.

Al aula CIMAT-CIMNE por brindarme su espacio y equipo de cómputo para poder terminar mi tesis.

Al Dr. Miguel Angel Moreles Vázquez, por aceptar ser mi asesor. Por su tiempo tan valioso y comprensión que me brindó durante el desarrollo de la tesis.

A cada uno de mis sinodales: Dr. Marcos Aurelio Capistrán Ocampo y el Dr. Héctor Morales Bárcenas por su apoyo que me brindaron y el tiempo invertido en la revisión de esta tesis.

A cada uno de mis compañeros y amigos que conocí en el CIMAT.



# Índice general

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>Introducción</b>   | <b>VII</b> |
| <b>1. Integral de convolución asociada a pruebas de pozo</b>            | <b>1</b>   |
| 1.1. Un glosario de términos usados en yacimientos petroleros . . . . . | 1          |
| 1.1.1. Propiedades de roca en un yacimiento . . . . .                   | 2          |
| 1.1.2. Propiedades del fluido en un yacimiento . . . . .                | 2          |
| 1.2. Ecuación Diferencial Parcial en Configuración de Pozo . . . . .    | 3          |
| 1.2.1. Modelo del flujo monofásico . . . . .                            | 3          |
| 1.2.2. Flujo ligeramente compresible, homogéneo e isotrópico . .        | 8          |
| 1.2.3. Ecuacion Diferencial Parcial en simetría radial . . . . .        | 10         |
| 1.3. La integral de convolución . . . . .                               | 10         |
| 1.3.1. La ecuación adimensional . . . . .                               | 10         |
| 1.3.2. Caso de Presión Constante . . . . .                              | 12         |
| 1.3.3. Caso de Tasa Constante . . . . .                                 | 13         |
| <b>2. Métodos de Regularización para la ecuación integral</b>           | <b>15</b>  |
| 2.1. Discretización de la ecuación integral . . . . .                   | 15         |
| 2.2. Método de regularización de Tikhonov . . . . .                     | 22         |
| 2.2.1. El Principio de Discrepancia de Morozov . . . . .                | 25         |
| <b>3. Análisis y aproximación de la ecuación integral</b>               | <b>31</b>  |
| 3.1. Preliminares del análisis funcional . . . . .                      | 31         |
| 3.2. Un método de núcleo truncado para la ecuación integral . . . . .   | 34         |
| 3.2.1. Núcleo truncado y Ecuación Integral asociada . . . . .           | 34         |
| 3.2.2. Análisis de error . . . . .                                      | 37         |
| 3.2.3. Discretización e implementación computacional del método         | 42         |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>4. Resultados numéricos</b>                                  | <b>45</b> |
| 4.1. Comparación de los métodos con datos sin ruido . . . . .   | 45        |
| 4.2. Comparación de los métodos con datos perturbados . . . . . | 52        |
| <b>Conclusiones y trabajo futuro</b>                            | <b>59</b> |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>61</b> |

# Introducción

---

Consideremos un yacimiento petrolero alrededor del pozo. El yacimiento se modela como un medio poroso, la ecuación diferencial parcial fundamental que modela el flujo en este medio en simetría radial es la ecuación de difusión:

$$\frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (1)$$

El medio poroso está contenido en la región entre el radio de la abertura del pozo la cual es finita, y el radio del yacimiento el cual se puede considerar finito o infinito. La ecuación (1) se deriva de las siguientes hipótesis:

- El flujo a través del medio poroso es estrictamente radial con efectos de gravedad despreciables.
- El medio poroso es homogéneo e isotrópico, con profundidad constante  $h$ ,  $\phi$  es la porosidad, y  $k$  la permeabilidad.
- La viscosidad del fluido,  $\mu$ , es constante y la compresibilidad total,  $c_t$ , del fluido y el medio poroso es constante y pequeño en magnitud.
- El fluido es ligeramente compresible.
- Los gradientes de presión son pequeños en todas partes de tal forma que los términos cuadráticos de gradiente pueden ser despreciados.

La ecuación diferencial parcial (1) es en configuración de pozo. Siguiendo Everdingen y Hurst [VH49], se obtiene la integral de convolución,

$$\Delta p = P_0 - p(t) = \int_0^t q(t - \tau)g(\tau) d\tau \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

donde  $T$  es el tiempo de duración de la prueba,  $P_0$  es la presión inicial del yacimiento,  $p(t)$  es la presión como función del tiempo,  $q(t)$  es la tasa de producción.  $p(t)$ ,  $q(t)$  en la pared del pozo. Aquí

$$g(t) = \frac{dp_u(t)}{dt}.$$

A  $p_u(t)$  se le conoce como la función de respuesta. Se supone que tanto  $q$  como  $g$  valen 0 para  $t < 0$ .

En la práctica solo se tiene un conjunto discreto de datos,  $p_i$ ,  $q_i$  aproximaciones de  $p(t_i)$ ,  $q(t_i)$  respectivamente.

En un yacimiento petrolero, el objetivo de las pruebas de pozo es determinar las propiedades geológicas del yacimiento a partir de mediciones de la presión y la tasa de producción, a lo largo del tiempo. Para esto, es necesario estimar la *función de respuesta* del yacimiento. En la literatura se conoce como un problema de deconvolución.

Es bien sabido que la deconvolución requiere resolver un problema mal condicionado y por tanto cambios pequeños en los datos pueden resultar en grandes cambios en la solución. La naturaleza mal condicionada del problema unida a los errores inherentes a las mediciones de presión y gasto, hacen que la aplicación de la deconvolución sea difícil. También lo es el desarrollo de métodos robustos que puedan tolerar márgenes razonables de error. El problema es de gran interés y se han propuesto varios métodos de solución. Una reseña del estado del arte se presenta en [CIO06].

En general, los métodos requieren un soporte teórico más sólido. En este trabajo de tesis presentamos un método alternativo para resolver numéricamente el problema de deconvolución dado por (2). Trabajamos con núcleos  $q$  como las que aparecen en las pruebas de pozo. Entonces dados  $\Delta p$  y  $q$  obtenemos la aproximación a  $g$  la cual es la derivada de la función de respuesta. Queda como trabajo futuro obtener la función de respuesta  $p_u(t)$ . Para sustentar el método desarrollamos un análisis de aproximación.



El trabajo está dividido en 4 capítulos de la siguiente forma:

- En el primer capítulo obtenemos la ecuación integral de convolución la cual nos interesa resolver numéricamente.

Primeramente introducimos unas terminologías necesarias para entender el comportamiento de un yacimiento petrolero que son principalmente propiedades de las rocas y de los fluidos en el yacimiento como por ejemplo: poros, porosidad, permeabilidad, densidad, compresibilidad entre otros. Después obtenemos la ecuación diferencial parcial que modela un flujo monofásico en simetría radial, en base a la ecuación de conservación de masa, la ley de Darcy y de la ecuación que relaciona la presión del fluido con su densidad llamada ecuación de estado.

- En el capítulo 2 resolvemos numéricamente la ecuación integral (2), primeramente discretizando para llevarlo a un sistema de ecuaciones lineales, después de resolver el sistema se detecta que es mal condicionado por lo que se prosigue implementar el método de regularización de Tikhonov junto con el principio de discrepancia para seleccionar adecuadamente el parámetro de regularización.
- En el tercer capítulo proponemos un método numérico para resolver la ecuación integral (2), éste método está inspirado del trabajo de French y Groetsch ([FG09]). Primeramente empezamos dando una motivación del método; luego analizamos teóricamente la ecuación integral desde el punto de vista del análisis funcional, para después dar un método numérico.
- En el último capítulo hacemos una comparación entre el método de Tikhonov y el propuesto.



---

# Capítulo 1

## Integral de convolución asociada a pruebas de pozo

---

En este capítulo obtenemos la integral de convolución asociada a pruebas de pozo que nos interesa resolver numéricamente en esta tesis. Empezamos describiendo las ecuaciones fundamentales que modelan un flujo monofásico a través de un yacimiento (véase [Che07]). Las cuales incluyen la ecuación de conservación de masa, la ley de Darcy y una ecuación de estado que relaciona la presión del fluido con su densidad. En este caso consideraremos un fluido ligeramente compresible para finalmente obtener la ecuación diferencial parcial fundamental que modela el flujo en un medio poroso en simetría radial.

### 1.1. Un glosario de términos usados en yacimientos petroleros

Un yacimiento petrolero es un medio poroso que contiene hidrocarburos. La meta principal de la simulación de un yacimiento es predecir el rendimiento futuro del mismo para encontrar técnicas y medios de optimización para recuperar algunos de los hidrocarburos bajo varias condiciones de operación ([Che07], I). En la simulación de yacimientos es necesario entender las propiedades de roca, fluido y su interacción.

### 1.1.1. Propiedades de roca en un yacimiento

A continuación se describen los conceptos de poros, porosidad, y permeabilidad.

**Poros.** *Poros* son los delgados caminos conectados que existen en una roca permeable, típicamente de tamaño 1 a 200  $\mu\text{m}$  y fácilmente visible en escaneo de microscopio electrónico.

**Porosidad.** *Porosidad* es la fracción de una roca con espacio de poros. Hay dos tipos de porosidades: la total y la efectiva. La porosidad total incluye tanto espacio de poros interconectados y aislados, mientras que la porosidad efectiva sólo incluye el primero. Dado que solamente los poros interconectados almacenan y transmiten fluidos, uno está interesado principalmente con la porosidad efectiva. Así, el término *porosidad* significará porosidad efectiva. En este sentido mide la capacidad del yacimiento para almacenar fluidos que se producen en sus poros. Porosidad es comúnmente denotado por  $\phi$  (fracción) y varía de 0.25 para una roca de alta permeabilidad y debajo de 0.1 para una roca de baja permeabilidad. Si una propiedad es independiente de la localización del yacimiento, las rocas del yacimiento se denominan homogéneos con respecto a ésta propiedad. Si varía con la localización, entonces se le denomina heterogéneo. La porosidad depende sobre la presión debido a la compresibilidad de la roca.

**Permeabilidad.** *Permeabilidad* es la capacidad de una roca para conducir fluidos a través de sus poros interconectados. Comúnmente se denota por  $\mathbf{k}$ , con dimensiones de área y unidades de darcy ( $d$ ) o mili-darcy ( $md$ ). La permeabilidad frecuentemente varía con la localización y, aún para la misma localización, podría depender de la dirección del flujo. En muchas situaciones prácticas, es posible suponer que  $\mathbf{k}$  es una matriz diagonal:

$$\mathbf{k} = \text{diag}(k_{11}, k_{22}, k_{33}).$$

Si  $k_{11} = k_{22} = k_{33}$ , el medio poroso se dice *isótropo*; en otro caso, es *antisótropo*.

### 1.1.2. Propiedades del fluido en un yacimiento

Se introducen las definiciones de densidad del fluido, viscosidad y compresibilidad.

**Fase.** *Fase* refiere a una región químicamente homogéneo del fluido que está separado de otra fase por un interfase; se considera la fase aceite, agua y gas.

**Tipos de fluido en el yacimiento.** En general, agua, aceite y gas pueden existir simultáneamente en un yacimiento de hidrocarburos. Esos fluidos pueden ser clasificados como incompresibles, ligeramente compresibles, o compresibles, dependiendo como reaccionan a la presión. Un fluido incompresible tiene compresibilidad cero; su densidad es independiente de la presión. Un fluido ligeramente compresible tiene una compresibilidad pequeña pero constante que típicamente varía de  $10^{-5}$  a  $10^{-6}$   $\text{psi}^{-1}$ . Un fluido compresible tiene una compresibilidad que típicamente varía de  $10^{-3}$  a  $10^{-4}$   $\text{psi}^{-1}$ ; su densidad se incrementa cuando se incrementa la presión pero tiende a estabilizarse para presiones altas.

**Compresibilidad.** La compresibilidad de un fluido puede ser definida en términos del cambio de volumen ( $V$ ) o densidad ( $\rho$ ) con respecto a la presión:

$$c_f = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T$$

para una temperatura  $T$  fija.

**Densidad de un fluido.** La densidad de una fase simple (agua, aceite, o gas) se define por:

$$\rho = \frac{\rho_s V_s}{V(p, T)}$$

donde el subíndice  $s$  significa estándar.

**Viscosidad de un fluido.** Es una medida de la energía friccional disipada cuando está en movimiento resistiendo a una fuerza de deformación aplicada, con dimensiones de fuerza/área.tiempo y unidades de  $\text{Pa.s}$  (métrico) o  $\text{poise}$ . La unidad más común en el campo petrolero es  $\text{cp}$  (centipoise).

## 1.2. Ecuación Diferencial Parcial en Configuración de Pozo

### 1.2.1. Modelo del flujo monofásico

#### Ecuación de Conservación de Masa

Derivaremos la ecuación diferencial que gobierna el flujo y transporte de un fluido en un medio poroso.

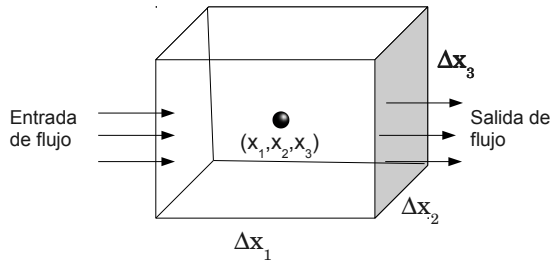


Figura 1.1: Un volumen diferencial

Empecemos introduciendo las terminologías y la notación que se usará, las variables espacial y temporal serán representadas por  $x = (x_1, x_2, x_3)$  y  $t$  respectivamente. Denotemos por  $\phi$  la porosidad del medio poroso, por  $\rho$  la densidad del fluido por unidad de volumen, por  $u = (u_1, u_2, u_3)$  la velocidad superficial de Darcy, y por  $w$  fuentes y sumideros externos. Consideremos un cubo rectangular tal que sus caras son paralelos a los ejes coordenados (Fig. 1.1). El centroide de este cubo se denota por  $(x_1, x_2, x_3)$ , y sus longitudes en la dirección  $x_i$  es  $\Delta x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . La componente  $x_i$  del flujo de masa (flujo de masa por unidad de área por unidad de tiempo) del fluido es  $\rho u_i$ .

Conforme a la figura (Fig. 1.1), el flujo de masa entrante a través de la superficie

por  $x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}$  por unidad de tiempo es

$$(\rho u_1)_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} \Delta x_2 \Delta x_3.$$

y el flujo de masa saliente por  $x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}$  es

$$(\rho u_1)_{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} \Delta x_2 \Delta x_3.$$

Análogamente en las direcciones de las coordenadas  $x_2$  y  $x_3$ , la masa del flujo entrante y la masa del flujo que sale através de las superficies son, respectivamente,

$$(\rho u_2)_{x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} \Delta x_1 \Delta x_3, \quad (\rho u_2)_{x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} \Delta x_1 \Delta x_3,$$

y

$$(\rho u_3)_{x_1, x_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}} \Delta x_1 \Delta x_2, \quad (\rho u_3)_{x_1, x_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} \Delta x_1 \Delta x_2.$$

La acumulación de masa debido a la compresibilidad por unidad de tiempo es

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3,$$

y la salida de masa del cubo, es decir, el decremento de masa debido a un sumidero de concentración  $w$  (masa por unidad de volumen por unidad de tiempo), es

$$-w \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3.$$

La diferencia entre la masa entrante y saliente es igual a la suma de la acumulación de masas en este volumen:

$$\begin{aligned} & \left[ (\rho u_1)_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} - (\rho u_1)_{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} \right] \Delta x_2 \Delta x_3 + \\ & \left[ (\rho u_2)_{x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} - (\rho u_2)_{x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} \right] \Delta x_1 \Delta x_3 + \\ & \left[ (\rho u_3)_{x_1, x_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}} - (\rho u_3)_{x_1, x_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} \right] \Delta x_1 \Delta x_2 = \left( \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} - w \right) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por  $\frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}$  tenemos,

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\rho u_1)_{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} - (\rho u_1)_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3}}{\Delta x_1} - \frac{(\rho u_2)_{x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} - (\rho u_2)_{x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3}}{\Delta x_2} \\
& - \frac{(\rho u_3)_{x_1, x_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} - (\rho u_3)_{x_1, x_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}}{\Delta x_3} = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} - w.
\end{aligned}$$

Tomando  $\Delta x_i \rightarrow 0, i = 1, 2, 3$ , obtenemos

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho u) + w \quad (1.1)$$

la cual se llama *ecuación de conservación de masa*.

El factor de formación de volumen  $B$  del fluido es

$$\rho = \frac{\rho_s}{B},$$

donde  $\rho_s$  es la densidad del fluido para condiciones estándar.

Sustituyendo  $\rho$  en (1.1), tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi}{B} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{\rho_s}{B} u \right) + \frac{w}{\rho_s} \quad (1.2)$$

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) son equivalentes, son la forma más general de la ecuación de flujo monofásico.

### Ley de Darcy

La ley de Darcy (Darcy, 1856) fue originalmente una ley para el flujo monofásico que relaciona la tasa del flujo volumétrico total de un fluido a través de un medio poroso con el gradiente de presión y las propiedades del fluido (viscosidad,  $\mu$ ) y el medio (permeabilidad,  $k$ , y el área de la sección transversal  $A$ ).

Puede ser usado para definir la permeabilidad en una de las direcciones del flujo, por ejemplo, en la dirección del eje  $x_1$ :

$$w = -\frac{kA}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1}.$$



La velocidad de Darcy es calculada por  $u = \frac{w}{A}$ , así

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad (1.3)$$

Para un sistema de flujo en  $3D$  con la fuerza gravitacional, la forma diferencial de la ley de Darcy es

$$u = -\frac{1}{\mu} K (\nabla p - \rho G \nabla z) \quad (1.4)$$

donde  $K$  es la matriz de permeabilidad del medio poroso,  $G$  es la magnitud de la aceleración gravitacional,  $z$  es la profundidad, y  $\nabla$  es el operador gradiente:

$$\nabla p = \left( \frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3} \right).$$

La coordenada  $x_3$  en la ecuación (1.4) es la dirección vertical, positiva hacia abajo.

### Ecuación de Estado

Sustituyendo (1.4) en (1.1) tenemos

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\mu} K (\nabla p - \rho G \nabla z) \right) + w \quad (1.5)$$

Una ecuación de estado se expresa en términos de la compresibilidad del fluido  $c_f$ :

$$c_f = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T \quad (1.6)$$

para una temperatura fija  $T$ , donde  $V$  es el volumen ocupado por el fluido en las condiciones del depósito.

Combinando las ecuaciones (1.5) y (1.6) se obtiene un sistema cerrado para las incógnitas principales  $p$  y  $\rho$ .

## 1.2.2. Flujo ligeramente compresible, homogéneo e isotrópico

### Flujo incompresible

Cuando la roca y el fluido son incompresibles, la densidad  $\rho$  y porosidad  $\phi$  se consideran constantes. En este caso, la ecuación (1.5) se reduce a

$$\nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\mu} K \nabla \Phi \right) + w = 0, \quad (1.7)$$

donde  $\Phi = p - \rho Gz$ . La ecuación (1.7) es de tipo elíptico en  $\Phi$ .

Para el flujo de un fluido incompresible en un medio homogéneo e isotrópico con viscosidad constante, la ecuación (1.7) viene a ser

$$\Delta \Phi = -\frac{\mu w}{\rho K}$$

donde el operador Laplaciano  $\Delta$  está definido por

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}.$$

### Flujo ligeramente compresible

Algunas veces es posible considerar que el fluido compresible  $c_f$  es constante sobre un cierto rango de presiones. Entonces, después de integrar, escribimos a (1.6) como

$$\rho = \rho^0 e^{c_f(p-p^0)} \quad (1.8)$$

donde  $\rho^0$  es la densidad para la presión de referencia  $p^0$ .

Usando una expansión en series de Taylor, vemos que

$$\rho = \rho^0 \left\{ 1 + c_f (p - p^0) + \frac{1}{2!} c_f^2 (p - p^0)^2 + \dots \right\},$$

así una aproximación a primer orden es

$$\rho \approx \rho^0 (1 + c_f (p - p^0)) \quad (1.9)$$

La compresibilidad de la roca está definida por:

$$c_R = \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dp}. \quad (1.10)$$

Después de integrar, obtenemos,

$$\phi = \phi^0 e^{c_R(p-p^0)}$$

donde  $\phi^0$  es la porosidad para  $p^0$ . Similarmente,  $\phi$  es aproximado como

$$\phi \approx \phi^0 (1 + c_R(p - p^0)).$$

Entonces se considera que

$$\frac{d\phi}{dp} = \phi^0 c_R \quad (1.11)$$

Después de realizar la derivada con respecto al tiempo en el lado izquierdo de la ecuación (1.5), resulta

$$\left( \phi \frac{\partial \rho}{\partial p} + \rho \frac{d\phi}{dp} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\mu} K (\nabla p - \rho G \nabla z) \right) + w \quad (1.12)$$

Sustituyendo (1.6) y (1.11) en (1.12) da

$$\rho (\phi c_f + \phi^0 c_R) \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\mu} K (\nabla p - \rho G \nabla z) \right) + w.$$

Definiendo la compresibilidad total como

$$c_t = c_f + \frac{\phi^0}{\phi} c_R$$

vemos que

$$\phi \rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\mu} K (\nabla p - \rho G \nabla z) \right) + w \quad (1.13)$$

la cual es una *ecuación parabólica* en  $p$ , con  $\rho$  dado por (1.8).

### 1.2.3. Ecuación Diferencial Parcial en simetría radial

Sea  $\Omega$  un medio isotrópico, entonces  $K = kI$ , donde  $I$  es la matriz identidad. En coordenada cilíndrica  $(r, \theta, x_3)$ , la ecuación (1.13) toma la forma

$$\begin{aligned} \phi \rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r \rho k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial r} - \rho G \frac{\partial z}{\partial r} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\rho k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} - \rho G \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \frac{\rho k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x_3} - \rho G \frac{\partial z}{\partial x_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

Considerando un depósito  $\Omega$  con una extensión infinita en la dirección horizontal. Supongamos que hay un pozo de producción aislada (localizado en  $(0, 0, x_3)$ ) en el yacimiento, todas sus propiedades son simétricas con respecto a los ejes del pozo, y el yacimiento es homogéneo en la dirección vertical. Además, si el efecto de gravedad y el cambio de densidad son despreciables, la ecuación (1.14) se reduce a

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (1.15)$$

donde

$$\chi = \frac{k}{\phi \mu c_t}.$$

Así la presión  $p$  es una función de  $r$  y  $t$  solamente. Esto es, el flujo es 1D en la dirección radial.

## 1.3. La integral de convolución

### 1.3.1. La ecuación adimensional

Si hacemos el cambio de variable a la ecuación EDP (1.15) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r_D &= \frac{r}{r_w} \\ t_D &= \frac{\chi}{r_w^2} t \end{aligned}$$

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{p_i - p(r, t)}{p_i - p_{wf}}$$

donde:

- el sub-índice  $D$  significa adimensionalizado.
- $r_w$  denota el radio del pozo.
- $p_i$  es la presión inicial.
- $p_{wf}$  es la presión en la base del pozo.

llegamos a la siguiente ecuación adimensional:

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \quad (1.16)$$

Definimos la tasa del flujo total como

$$Q(r_w, t) = \int_0^t q(r_w, \tau) d\tau.$$

Si denotamos por  $h$  la altura del pozo entonces por la Ley de Darcy

$$q = 2\pi h r_w \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Así,

$$\begin{aligned} Q_D(t_D) &= \frac{\phi \mu c_t r_w^2}{k} \int_0^{t_D} q_D(\tau_D) d\tau_D \\ &= \frac{\phi \mu c_t r_w^2}{k} \frac{2\pi h k}{\mu} \int_0^{t_D} \frac{\partial p_D(\tau_D)}{\partial r_D} d\tau_D. \end{aligned}$$

De aquí,

$$Q_D(t_D) = 2\pi h \phi c_t r_w^2 \hat{Q}_D(t_D) \quad (1.17)$$

donde

$$\hat{Q}_D(t_D) = \int_0^{t_D} \frac{\partial p_D(\tau_D)}{\partial r_D} d\tau_D.$$

En el estudio de yacimientos petroleros se consideran dos casos de referencia, llamémosle, el caso de *presión constante* y el caso de *tasa constante*. Para el caso de presión constante tenemos la siguiente EDP con condición inicial y de frontera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_D}{\partial t_D} &= \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \\ p_D(r_D, 0) &= 1 \\ p_D(1, t_D) &= 0\end{aligned}$$

Si conocemos la solución explícita para este caso, entonces podemos reproducir cualquier historia de la presión variable (véase [VH49]).

Para el caso de tasa constante tenemos la siguiente EDP con condición inicial y de frontera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_D}{\partial t_D} &= \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \\ p_D(r_D, 0) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r_D} p_D(1, t_D) &= -1\end{aligned}$$

### 1.3.2. Caso de Presión Constante

Para el caso de presión constante, de la ecuación (1.17) tenemos:

$$Q(t) = 2\pi h \phi c_t r_w^2 \Delta p(t_1) \hat{Q}(t)$$

Ahora bien, considerando la caída de presión para cada  $t_j$  tenemos

$$Q^j(t) = 2\pi h \phi c_t r_w^2 \Delta p(t_j) \hat{Q}(t - t_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Por superposición de todos los efectos de caída de presión obtenemos;

$$Q(t) = 2\pi h \phi c_t r_w^2 \sum_{j=1}^n \Delta p(t_j) \hat{Q}(t - t_{j-1})$$

De la expresión

$$Q(t) = 2\pi h\phi c_t r_w^2 \sum_{j=1}^n \frac{\Delta p(t_j) - \Delta p(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \hat{Q}(t - t_{j-1}) (t_j - t_{j-1})$$

Llegamos a la integral de convolución:

$$Q(t) = 2\pi h\phi c_t r_w^2 \int_0^t \frac{d\Delta p(s)}{ds} \hat{Q}(t - s) ds.$$

### 1.3.3. Caso de Tasa Constante

Considerando variable las tasas de producción del fluido y reproduciendo estas tasas como una serie de tasas constantes por partes, entonces la caída de presión en la pared del pozo en el tiempo  $t$ , para la tasa inicial  $q_0$  es  $\Delta p_0 = q_0 p(t)$ . Para el tiempo  $t_1$  la diferencia de los incrementos para la tasa constante es expresado como  $q_1 - q_0$ , y el efecto de este incremento de tasa sobre el correspondiente incremento de caída de presión es  $\Delta p_1 = (q_1 - q_0)p(t - t_1)$ . Por superposición de todos los efectos, la determinación para la caída de presión acumulativa está dada por

$$\Delta p = q(0)p(t) + \sum_{i=1}^n [q(t_i) - q(t_{i-1})]p(t - t_i).$$

Si los incrementos son infinitesimales y  $q(0) = 0$ , llegamos a la siguiente integral de convolución

$$\Delta p = \int_0^t q(t - s)g(s)ds \quad (1.18)$$

donde

$$g(t) = \frac{dp_u(t)}{dt}.$$

A la función  $p_u(t)$  se le conoce como función de respuesta. Si logramos aproximar la función de respuesta, podemos determinar las propiedades geológicas del yacimiento. Por esta razón la necesidad de resolver la ecuación integral.

Durante el resto del trabajo, trabajaremos con la ecuación integral (1.18).





---

## Capítulo 2

# Métodos de Regularización para la ecuación integral

---

Consideramos el caso de tasa constante y procederemos a resolver numéricamente la ecuación integral (1.18), para esto discretizamos la ecuación para llevarlo a un sistema lineal de ecuaciones, se resuelve dicho sistema, pero debido al mal condicionamiento implementamos el método de regularización de Tikhonov (véase [Vog02]) y para seleccionar el parámetro adecuado utilizamos el principio de discrepancia de Morozov.

### 2.1. Discretización de la ecuación integral

En la sección 1.3 obtuvimos una ecuación integral de la siguiente forma:

$$p(t) = \int_0^t q(t-s)g(s)ds \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) se le conoce como ecuación de Volterra de primer tipo la cual se puede escribir como:

$$p(t) = \int_0^T k(t,s)g(s)ds, \quad 0 < t \leq T \quad (2.2)$$

donde  $k(t,s) = q(t-s)H(t-s)$  y  $H(t-s)$  es la función de Heaviside. La ecuación (2.2) se conoce como ecuación de Fredholm de primer tipo.

Considerando la ecuación (2.2),  $p(t)$  es una función conocida, típicamente representa datos observados. La función  $k(t,s)$  prescribe y codifica la física que

relaciona la situación física del modelo desconocido  $g(s)$  con lo observado  $p(t)$ . La función  $p(t)$  en teoría debería ser conocido en un intervalo pero en práctica sólo tenemos mediciones de  $p(t)$  para un conjunto finito de puntos.

Nuestra meta es resolver la ecuación integral (2.2) para la función incógnita  $g(s)$ . Para obtener soluciones numéricas útiles para (2.2), normalmente buscamos discretizarlo para llevarlo a una forma que sea tratable solucionarlo usando métodos de álgebra lineal. Primero supongamos que  $p(t)$  es conocido para un número finito de puntos  $t_1, t_2, \dots, t_m$ . Para un número finito de datos podemos escribir el problema inverso como

$$p_i = p(t_i) = \int_0^T k(t_i, s)g(s)ds, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

En la técnica de cuadratura para discretizar la ecuación integral (2.2), usamos una regla de cuadratura o un esquema de integración numérica para aproximar numéricamente (2.3). La regla de cuadratura que usaremos será la regla del punto medio, donde dividimos el intervalo  $[0, T]$  en  $n$  subintervalos y escogemos los puntos  $s_1, s_2, \dots, s_n$  en la mitad de cada subintervalo. Los puntos están dados por

$$s_j = \frac{h}{2} + (j-1)h$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

donde

$$h = \frac{T}{n}.$$

Así la integral (2.3) se aproxima por

$$p_i = \int_0^T k(t_i, s)g(s)ds \approx \sum_{j=1}^n k(t_i, s_j)g(s_j)h, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.4)$$

Si definimos

$$K_{i,j} = k(t_i, s_j)h$$

y

$$g_j = g(s_j)$$

llegamos a un sistema lineal de ecuaciones  $Kg = p$ .

Como en la práctica no se conoce  $p$  exactamente sino una aproximación de ella, esto debido a los errores inherentes en las mediciones.

Entonces consideramos el modelo:

$$p = K g_{real} + \eta, \quad (2.5)$$

$g_{real}$  representa la fuente real discretizada y  $\eta$  representa el ruido en los datos.

**Nota 2.1** El error en los datos de entrada para todos los ejemplos de esta sección y de la sección 3.2 es del 5 por ciento.

**Nota 2.2** Para ilustrar la metodología consideraremos un problema sintético. Utilizaremos la función

$$q(t) = e^{-t}$$

como núcleo en la convolución. Esta función tiene el comportamiento típico en pruebas de pozo.

En lo que sigue mostraremos que el método de cuadratura da lugar a problemas lineales mal condicionados. Notamos que al resolver el sistema triangular inferior se obtienen soluciones oscilatorias.

Consideremos primero la función

$$p(t) = 2(1 - e^{-t}), \quad (2.6)$$

del artículo de Mendes et al. ([PUC89]); donde se presenta un método alternativo de solución para la ecuación integral.

En este caso queremos recuperar la función constante:

$$g(s) = 2.$$

la cual llamamos  $g_{real}$ .

Los datos de entrada son:

|              |              |
|--------------|--------------|
| Valor de $T$ | Valor de $n$ |
| 3            | 100          |

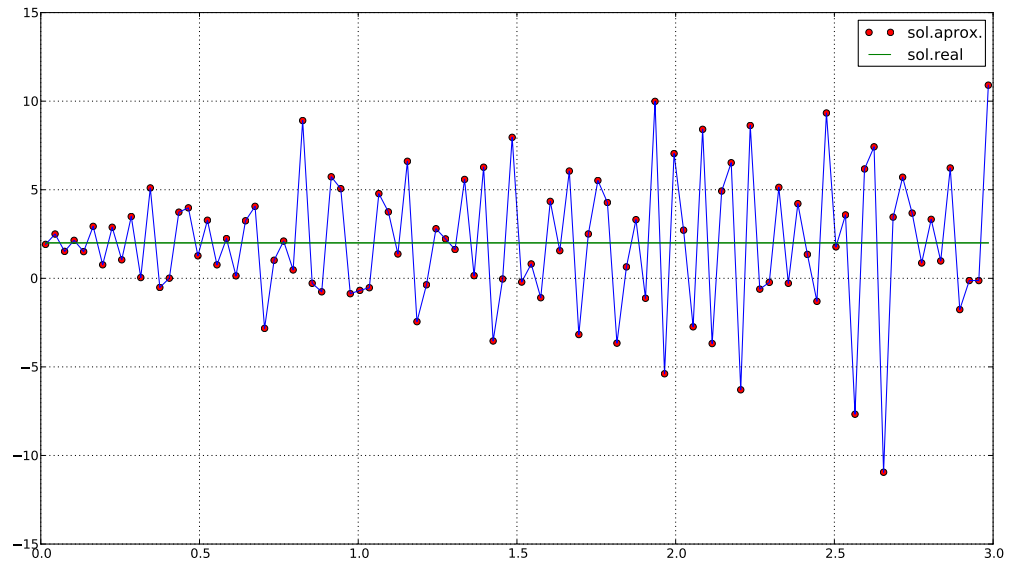


Figura 2.1: Aproximación sin regularizar, donde sol.aprox. es la solución aproximada y sol.real es la solución real. El eje vertical representa los valores de  $g_{real}$  para cada uno de los valores de  $s$  del eje horizontal.

Después de realizar la corrida computacional llegamos a la figura (2.1); donde el eje de las abscisas representa los valores de  $s$  y el eje de las ordenadas a  $g(s)$ , y los resultados de la siguiente tabla:

| Número de condición de $K$ | Determinante de $K$     | Error relativo |
|----------------------------|-------------------------|----------------|
| 527.531                    | $1.14 \times 10^{-153}$ | 0.851          |

Nótese de la tabla que el determinante es muy pequeño; lo cual significa que la matriz de coeficientes es casi singular.

Aparte de realizar la prueba con las funciones de ([PUC89]), también hemos probado con otras funciones para  $p(t)$ , por ejemplo:

Para  $p(t) = 2.5(-1 + t + e^{-t})$ , en este caso queremos recuperar la función lineal:

$$g(s) = 2.5s.$$

Los datos de entrada son:

|              |              |
|--------------|--------------|
| Valor de $T$ | Valor de $n$ |
| 3            | 100          |

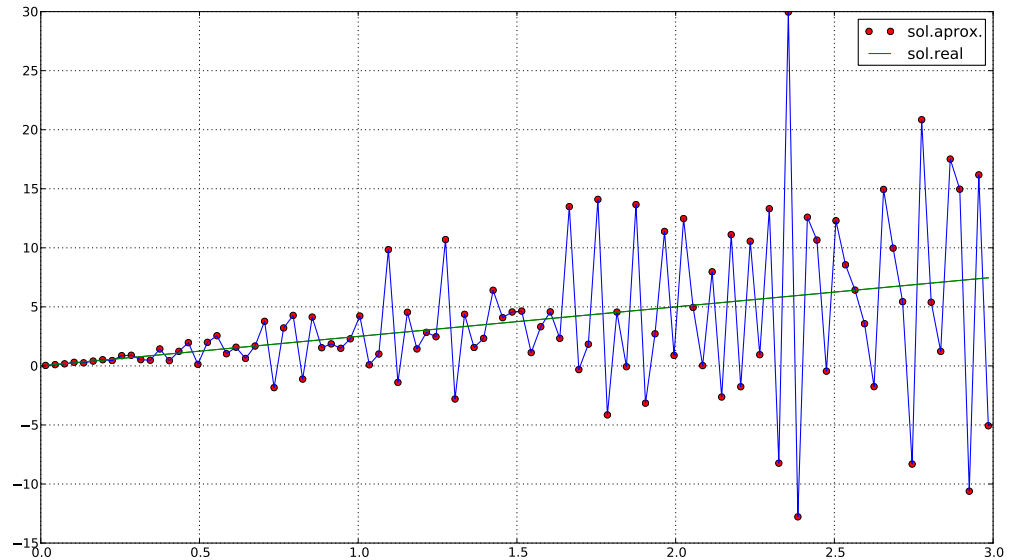


Figura 2.2: Aproximación sin regularizar para la función lineal, donde sol.aprox. es la solución aproximada y sol.real es la solución real.

Datos de salida:

|                            |                         |                |
|----------------------------|-------------------------|----------------|
| Número de condición de $K$ | Determinante de $K$     | Error relativo |
| 527.531                    | $1.14 \times 10^{-153}$ | 0.825          |

Para  $p(t) = -3.5t + 2t^2 + 4.5(1 - e^{-t})$ , en este caso queremos recuperar la función cuadrática:

$$g(s) = 2s^2 + 0.5s + 1.$$

Los datos de entrada son:

|              |              |
|--------------|--------------|
| Valor de $T$ | Valor de $n$ |
| 3            | 100          |

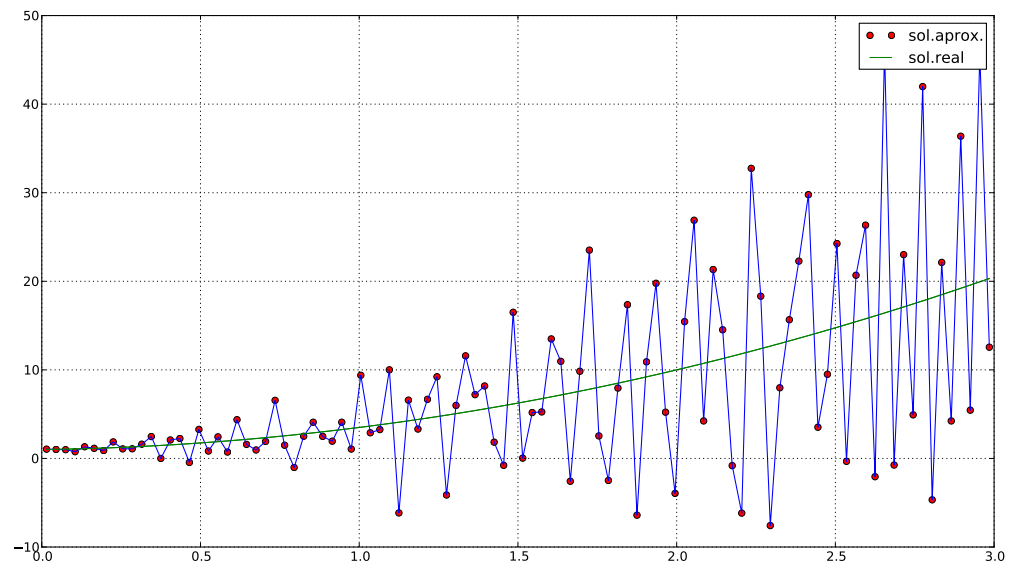


Figura 2.3: Aproximación sin regularizar para la función cuadrática, donde sol.aprox. es la solución aproximada y sol.real es la solución real.

Datos de salida:

| Número de condición de $K$ | Determinante de $K$     | Error relativo |
|----------------------------|-------------------------|----------------|
| 527.531                    | $1.14 \times 10^{-153}$ | 0.693          |

Para  $p(t) = 6t - 3t^2 + t^3 - 6(1 - e^{-t})$ , en este caso queremos recuperar la función cúbica:

$$g(s) = s^3.$$

Los datos de entrada son:

| Valor de $T$ | Valor de $n$ |
|--------------|--------------|
| 3            | 100          |

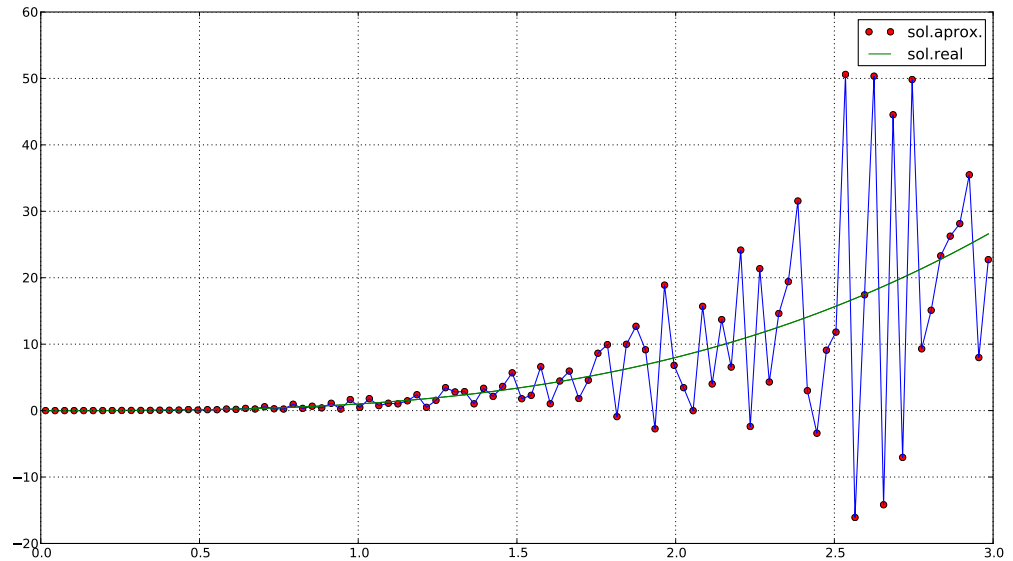


Figura 2.4: Aproximación sin regularizar para la función cúbica, donde sol.aprox. es la solución aproximada y sol.real es la solución real.

Datos de salida:

| Número de condición de $K$ | Determinante de $K$     | Error relativo |
|----------------------------|-------------------------|----------------|
| 527.531                    | $1.14 \times 10^{-153}$ | 0.696          |

De las gráficas que hemos mostrado, las aproximaciones son altamente oscilatorias, y los resultados de las tablas indican que la matriz  $K$  es prácticamente singular a precisión de máquina.

## 2.2. Método de regularización de Tikhonov

Como vimos en la sección anterior, si la matriz  $K$  es no singular, entonces podemos calcular la aproximación discreta  $K^{-1}p$  a  $g$ . Para obtener una exactitud de la aproximación de la cuadratura,  $n$  debería ser relativamente grande. Desafortunadamente, la matriz  $K$  viene a incrementar el mal condicionamiento cuando  $n$  llega ser grande, así los errores en  $p$  podrían ser enormemente amplificadas. Como consecuencia esta técnica de solución directa es probable que falle.

A pesar del mal condicionamiento, podemos extraer alguna información útil del sistema lineal discreto  $Kg = p$ .

Para simplificar la presentación, consideramos un modelo de dato discreto

$$p = Kg_{real} + \eta \quad (2.7)$$

con

$$\delta = \|\eta\| > 0. \quad (2.8)$$

En este caso  $\|\cdot\|$  denota la norma euclidéana,  $g_{real}$  representa la fuente real discretizada y  $\eta$  representa el ruido en los datos. El parámetro  $\delta$  se llama nivel de ruido. La matriz  $K$  se puede descomponer en valores singulares (SVD),

$$K = U \text{diag}(s_i) V^T$$

con valores singulares decrecientes y estrictamente positivos. Los vectores columna  $v_i$  de  $V$ , los cuales son llamados vectores singulares derechos, y los vectores columna  $u_i$  de  $U$ , los cuales son los vectores singulares izquierdos, que satisfacen

$$u_i^T u_j = \delta_{ij}, v_i^T v_j = \delta_{ij}, \quad (2.9)$$

$$Kv_i = s_i u_i, K^T u_i = s_i v_i, \quad (2.10)$$

Aquí  $\delta_{ij}$  denota la delta de Kronecker,  $U^T = U^{-1}$  y  $V^T = V^{-1}$ .

Usando las propiedades (2.9) y (2.10),

$$K^{-1}p = V \text{diag}(s_i^{-1}) U^T p = g_{real} + \sum_{i=1}^n s_i^{-1} (u_i^T \eta) v_i. \quad (2.11)$$

Los valores singulares de la matriz  $K$  aproximan los valores singulares del operador integral asociado. Es bien sabido que este operador es compacto con



valores singulares acumulándose en cero. De esta manera, mientras más grande sea el sistema, peor será el condicionamiento.

En el sistema (2.11) la inestabilidad surge debido a la división por pequeños valores singulares. Una forma de evitar esta inestabilidad es modificar los  $s_i^{-1}$  en (2.11), es decir, multiplicándolos por una función de regularización filtro  $w_\alpha(s_i^2)$  para el cual el producto  $w_\alpha(s_i^2)s_i^{-1} \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow 0$ . Estos filtros son componentes singulares de  $K^{-1}p$  correspondiente a pequeños valores singulares y nos lleva a una aproximación a  $g_{real}$  con una representación

$$g_\alpha = V \text{diag}(w_\alpha(s_i^2)s_i^{-1})U^T p = \sum_{i=1}^n w_\alpha(s_i^2)s_i^{-1}(u_i^T p)v_i. \quad (2.12)$$

Para obtener algún grado de precisión, necesitamos conservar los componentes singulares correspondientes a valores singulares grandes. Esto se logra tomando  $w_\alpha(s^2) \approx 1$  para valores grandes de  $s^2$ . Un ejemplo de función filtro es

$$w_\alpha(s^2) = \begin{cases} 1 & \text{si } s^2 > \alpha, \\ 0 & \text{si } s^2 \leq \alpha. \end{cases}$$

Con esta función la aproximación (2.12) toma la forma

$$g_\alpha = \sum_{s_i^2 > \alpha} s_i^{-1}(u_i^T p)v_i$$

y es conocida como la solución SVD truncado a  $Kg = p$ .

Otro ejemplo es la función filtro Tikhonov:

$$w_\alpha(s^2) = \frac{s^2}{s^2 + \alpha}. \quad (2.13)$$

La correspondiente aproximación regularizada (2.12) puede ser expresada como

$$g_\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{s_i(u_i^T p)}{s_i^2 + \alpha} v_i = (K^T K + \alpha I)^{-1} K^T p. \quad (2.14)$$

Esto nos lleva a una técnica conocida como regularización de Tikhonov.

El  $\alpha$  en la definición de la función filtro se conoce como parámetro de regularización. Cuando  $\alpha$  es muy pequeño, la filtración del ruido es inadecuado y  $g_\alpha$

es altamente oscilatorio. Por otro lado, cuando  $\alpha$  es grande, los componentes de ruido son filtrados (véase [Vog02]). Desafortunadamente, varios componentes de la solución son también filtrados y  $g_\alpha$  es demasiado suave. El lado derecho de (2.12) define un operador de regularización lineal, lo cual denotamos por  $R_\alpha$ . Aquí  $g_\alpha = R_\alpha p$ . De (2.7), el error de solución regularizada está dado por

$$e_\alpha = g_\alpha - g_{real} = e_\alpha^{truncado} + e_\alpha^{ruido}, \quad (2.15)$$

donde

$$\begin{aligned} e_\alpha^{truncado} &= R_\alpha K g_{real} - g_{real} \\ &= \sum_{i=1}^n (w_\alpha(s_i^2) - 1)(v_i^T g_{real})v_i \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} e_\alpha^{ruido} &= R_\alpha \eta \\ &= \sum_{i=1}^n w_\alpha(s_i^2) s_i^{-1} (u_i^T \eta) v_i. \end{aligned}$$

Llamamos  $e_\alpha^{truncado}$  el error de la solución truncada debido a la regularización. Cuantifica la pérdida de información debido a la regularización del filtro. El término  $e_\alpha^{ruido}$  se llama el error de la amplificación del ruido.

Un método de regularización junto con una regla de selección de parámetro se llama convergente si

$$e_\alpha \rightarrow 0$$

cuando

$$\delta \rightarrow 0$$

se cumple.

Se puede demostrar que para la función filtro Tikhonov (véase [Vog02]), el parámetro de regularización  $\alpha$  puede ser seleccionado de tal manera que garantice que (2.15) converja a cero cuando el nivel de ruido converge a cero.

Un método de regularización junto con una regla de elección de parámetro para el cual  $\|e_\alpha\| = O(\sqrt{\delta})$  cuando  $\delta \rightarrow 0$  se llama de orden óptimo dada la información  $g_{real} \in \text{Rango}(K^T)$ .

### 2.2.1. El Principio de Discrepancia de Morozov

Una regla de elección de parámetro se llama a posteriori si la selección del parámetro de regularización depende sobre los datos pero no sobre información a priori acerca de la solución. En la literatura hay varias reglas, en este trabajo utilizaremos el principio de discrepancia de Morozov para la regularización de Tikhonov. Para esta regla seleccionamos el valor más grande del parámetro de regularización  $\alpha$  para el cual

$$\| K g_\alpha - p \| \leq \delta.$$

Se puede mostrar que la regularización de Tikhonov con la regla del principio de discrepancia para la selección del parámetro son convergentes y suponiendo la condición fuente

$$g_{real} = K^T z, \quad z \in R^n$$

es de orden óptimo (véase [Kir96]).

Para simplificar la notación, definamos el funcional de la discrepancia de los datos

$$D(\alpha) = \| K g_\alpha - p \|^2.$$

De la representación (2.14) y del SVD (2.9)-(2.10),

$$D^2(\alpha) = \| (I - K(K^T K + \alpha I)^{-1} K^T) p \|^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{s_i^2}{s_i^2 + \alpha}\right)^2 (u_i^T p)^2. \quad (2.16)$$

Así  $D(\alpha)$  es continuo y estrictamente creciente con  $D(0) = 0$  y  $D(\alpha) \rightarrow \| p \|^2$  cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ . Por lo tanto  $D(\alpha) = \delta$  tiene una única solución siempre que el nivel de ruido de los datos sea menor que la norma de los datos,

$$\delta < \| p \|^2.$$

La solución de esta ecuación no lineal nos da el parámetro de regularización.

### Método de Newton para resolver una ecuación con una incógnita

Usaremos el método de Newton para encontrar el parámetro de estabilización. Recordemos las propiedades:

Suponga que  $f \in C^2[a, b]$ <sup>1</sup>. Sea  $\bar{x} \in [a, b]$  una aproximación a la raíz real  $x_s$  tal que  $f'(\bar{x}) \neq 0$ . Consideremos el polinomio de Taylor de  $f(x)$  alrededor de  $\bar{x}$ ,

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(x)),$$

donde  $\xi(x)$  está entre  $x$  y  $\bar{x}$ . Para  $x = x_s$ , ésta ecuación resulta

$$0 = f(\bar{x}_s) + (x_s - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x_s - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(x_s)).$$

Ahora supongamos que  $|x_s - \bar{x}|$  es pequeño, entonces llegamos a la siguiente expresión:

$$x_s = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}.$$

El método de Newton empieza con una aproximación inicial  $x_0$  y genera la sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

Si el punto inicial  $x_0$  es buena, entonces el método de Newton converge cuadráticamente a la raíz de una ecuación no lineal con una incógnita. El teorema que afirma tal resultado es la siguiente:

**Teorema 2.1** *Sea  $f : D \rightarrow R$ , para un intervalo abierto  $D$ , y sea  $f'$  una función continua Lipschitz en  $D$ . Suponga que para algún  $M > 0$ ,  $|f'(x)| \geq M$  para todo  $x \in D$ . Si  $f(x) = 0$  tiene una solución  $x_* \in D$ , entonces existe algún  $\varsigma > 0$  tal que: si  $|x_0 - x_*| < \varsigma$ , entonces la sucesión  $\{x_n\}$  generada por*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

*existe y converge a  $x_*$ . Además, para  $n = 0, 1, \dots$ ,*

$$|x_{n+1} - x_*| \leq \frac{P}{2M}|x_n - x_*|^2.$$

*donde  $P$  es la constante Lipschitz.*

<sup>1</sup>Es el conjunto de las funciones que tienen segundas derivadas continuas en el intervalo  $[a, b]$ .

La prueba se puede consultar en ([DS96]). Este teorema garantiza la convergencia del método de Newton, solamente para un buen punto inicial  $x_0$ , por lo que hay casos en los que el método no podría converger. Tal es el caso de hallar la raíz de (2.16). Así el método de Newton es útil por su convergencia local rápida, pero necesitamos incorporarlo dentro de un método más robusto que converja para cualquier punto inicial.

Un ejemplo de algoritmo híbrido es (2.17), la cual combina la convergencia global y la convergencia local rápida, primero probando con Newton para cada iteración, pero siempre insistiendo que la iteración vaya aproximando de alguna medida a la solución.

$$x_+ = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

mientras  $|f(x_+)| \geq |f(x_0)|$  hacer

$$x_+ \leftarrow \frac{x_+ + x_0}{2}. \quad (2.17)$$

Resolvimos el sistema lineal (2.5) para las funciones prueba (2.6), utilizando regularización tikhonov. Para hallar el parámetro  $\alpha$  en la ecuación (2.16), usamos el algoritmo híbrido (2.17) para asegurar la convergencia.

Los datos de entrada son:

| Valor de $T$ | Valor de $n$ |
|--------------|--------------|
| 3            | 100          |

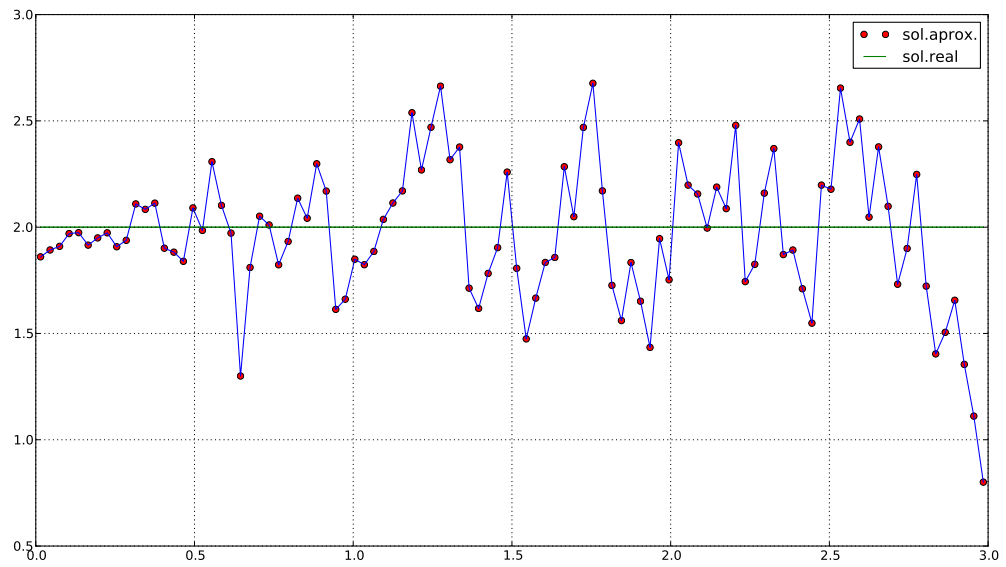


Figura 2.5: Aproximación con regularización de Tikhonov, donde sol.aprox. es la solución aproximada y sol.real es la solución real.

Después de realizar la corrida computacional llegamos a la figura (2.5), y los resultados de la siguiente tabla:

| Número de condición de $K$ | Determinante de $K$     | Error relativo |
|----------------------------|-------------------------|----------------|
| 527.531                    | $1.14 \times 10^{-153}$ | 0.164          |

Observemos que el error relativo que obtuvimos con regularización de Tikhonov, es mucho más pequeño a comparación con el que se obtuvo sin regularizar la cual fue de 0.851.

También probamos para las funciones:

| Función dada $p(t)$               | Función a recuperar $g(s)$ |
|-----------------------------------|----------------------------|
| $2.5(-1 + t + e^{-t})$            | $2.5s$                     |
| $-3.5t + 2t^2 + 4.5(1 - e^{-t})$  | $2s^2 + 0.5s + 1$          |
| $6t - 3t^2 + t^3 - 6(1 - e^{-t})$ | $s^3$                      |

Los datos de entrada para las funciones son:

| Valor de $T$ | Valor de $n$ |
|--------------|--------------|
| 3            | 100          |

Los datos de salida para cada una de las aproximaciones se muestran en la figura (2.6) y las principales características en la siguiente tabla:

| Tipo de función $g(s)$ | Error relativo |
|------------------------|----------------|
| Lineal                 | 0.192          |
| Cuadrática             | 0.235          |
| Cúbica                 | 0.269          |

En la siguiente tabla se hace una comparación del error relativo para cada una de las funciones,

| Tipo de función $g(s)$ | Error relativo sin regularizar | Error relativo Tikhonov |
|------------------------|--------------------------------|-------------------------|
| Lineal                 | 0.825                          | 0.192                   |
| Cuadrática             | 0.693                          | 0.235                   |
| Cúbica                 | 0.696                          | 0.269                   |

Notemos que hay una gran diferencia entre los errores.

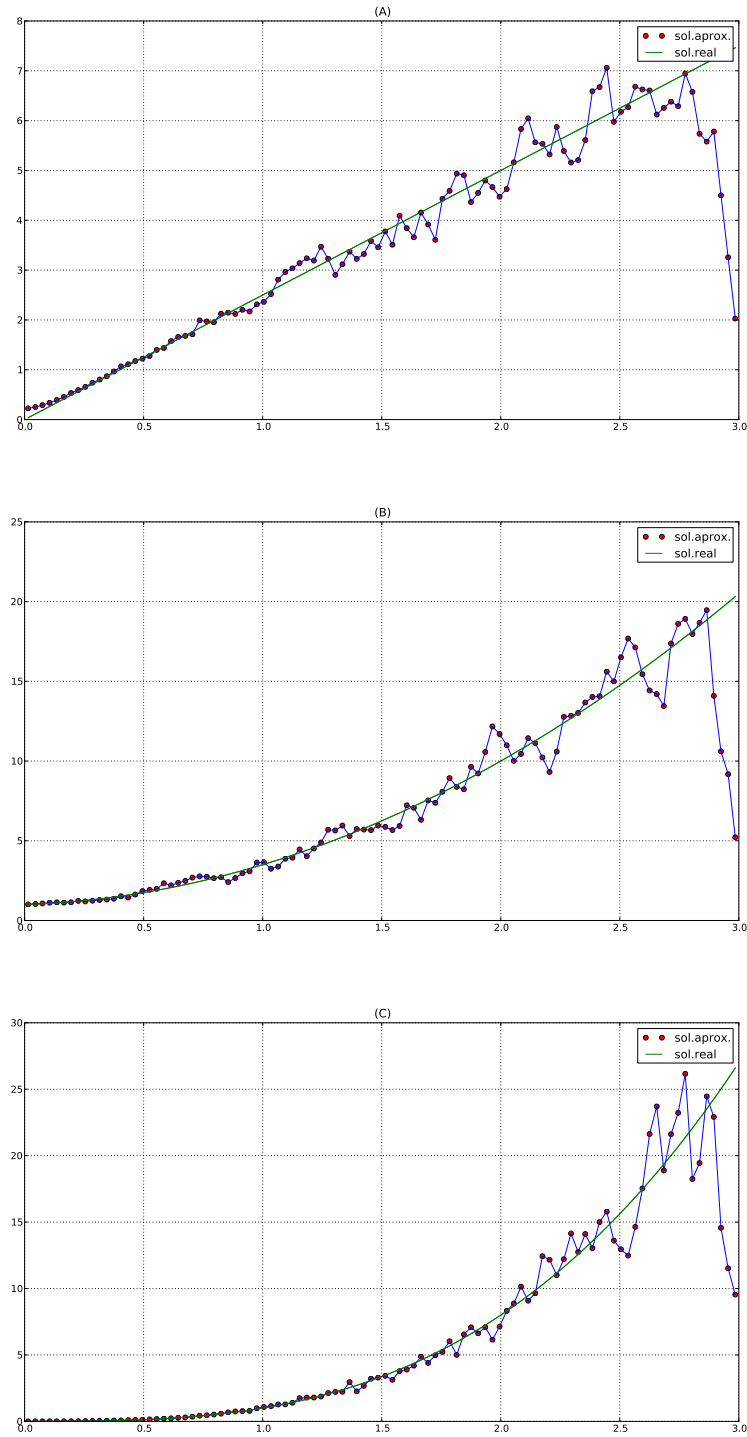


Figura 2.6: Aproximación con regularización de Tikhonov en (A) se muestra la aproximación lineal, (B) la aproximación cuadrática y (C) la cúbica.



---

## Capítulo 3

# Análisis y aproximación de la ecuación integral

---

En este capítulo presentamos un método numérico para resolver la ecuación integral (3.9), el cual está inspirado en el método presentado en el artículo ([FG09]). Primeramente damos las bases teóricas donde se sustenta el método, para luego dar un análisis del mismo y la implementación numérica.

### 3.1. Preliminares del análisis funcional

En esta sección se definen conceptos y se enuncia un teorema; los cuales son necesarios para obtener los resultados de este capítulo (véase ([Smi70])).

**Definición 3.1** Una función  $x(t)$  pertenece a la clase de las *funciones cuadrado integrables* si es medible en el intervalo  $(a, b)$  y

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty,$$

donde la integral es en el sentido de Lebesgue.

El espacio de las funciones cuadrado integrables se denota por  $L^2(a, b)$ .

Decimos que  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  donde *loc* significa localmente si

$$\int_W |u| < \infty$$

para  $W \subset \Omega$  compacto.

**Definición 3.2** El *espacio de Sobolev* es el conjunto de las funciones  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  tal que  $u, u' \in L^2(\Omega)$  y se denota por  $H^1(\Omega)$ .

Ahora consideremos la ecuación integral lineal de segundo tipo

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)x(s)ds \quad (a \leq t \leq b,) \quad (3.1)$$

donde  $k(t, s)$  es un kernel en  $L^2$  y  $y(t)$  es una función en  $L^2$ . En notación abreviada (3.1) toma la forma

$$x = y + \lambda Kx. \quad (3.2)$$

Si introducimos el símbolo  $I$  para el operador identidad, es decir el operador que satisface  $Ix = x$  para cualquier función  $x(t)$  en  $L^2$ , podemos también escribir (3.2) en la forma

$$(I - \lambda K)x = y. \quad (3.3)$$

Si (3.3) tiene una solución  $x$  en  $L^2$ , es natural preguntar si siempre  $x$  se puede escribir como

$$x = (I + \lambda H)y = y + \lambda Hy,$$

donde  $H(t, s) = H_\lambda(t, s)$  es un kernel en  $L^2$ , dependiendo, desde luego, sobre el parámetro  $\lambda$ . Si tal  $x$  satisface (3.3), entonces

$$(I - \lambda K)(I + \lambda H)y = y = Iy;$$

esto sugiere que  $H$  debería satisfacer la ecuación operador

$$I - \lambda K + \lambda H - \lambda^2 KH = I,$$

para el cual, si  $\lambda \neq 0$ , obtenemos

$$H - K = \lambda KH. \quad (3.4)$$

Por el otro lado, si  $x = (I + \lambda H)y$  es la única solución en  $L^2$  de (3.3), entonces

$$x = (I + \lambda H)y = (I + \lambda H)(I - \lambda K)x,$$

lo cual sugiere que  $H$  debería también satisfacer la ecuación

$$H - K = \lambda HK. \quad (3.5)$$

**Definición 3.3** Para un valor  $\lambda$  dado, si existe un kernel  $H_\lambda(t, s)$  en  $L^2$  que satisface (3.4) y (3.5), es decir tal que

$$H_\lambda(t, s) - k(t, s) = \lambda \int k(u, s)H_\lambda(t, u)du = \lambda \int H_\lambda(u, s)K(t, u)du,$$

entonces  $H_\lambda(t, s)$  es un *kernel resolvente* o *resolvente* del kernel  $k(t, s)$  para el valor  $\lambda$ , y  $\lambda$  es un *valor regular* del kernel  $k(t, s)$ .

**Teorema 3.1** Sea  $\lambda$  un valor regular del núcleo  $k$  en  $L^2$  y sea  $H$  el correspondiente resolvente del núcleo. Si  $y$  es una función  $L^2$  dada, la ecuación

$$x = y + \lambda Kx \tag{3.6}$$

tiene una única solución  $x$  función  $L^2$  dada por

$$x = y + \lambda Hy. \tag{3.7}$$

**Definición 3.4** Una *ecuación integral de Volterra de segundo tipo* es una ecuación de la forma

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_a^t k(t, s)x(s)ds \quad (a \leq t \leq b), \tag{3.8}$$

el límite superior de integración es la variable  $t$ .

Si extendemos el dominio de definición de  $k(t, s)$  tomando su valor como cero cuando  $a \leq t \leq s \leq b$ , (3.8) se puede escribir como

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)x(s)ds \quad (a \leq t \leq b).$$

Para nuestro propósito  $k(t, s)$  está definido en el cuadrado  $a \leq t \leq b$ ,  $a \leq s \leq b$ , se anula cuando  $a \leq t \leq s \leq b$ , es un núcleo  $L^2$  y que  $y(t)$  es una función  $L^2$  en  $a \leq t \leq b$ . Un núcleo de este tipo se le conoce como *núcleo Volterra*.

Si el núcleo es Volterra la ecuación integral (3.8) tiene solución única  $x(t)$  en  $L^2$  para cualquier función  $y(t)$  en  $L^2$  y cualquier número complejo  $\lambda$ .

## 3.2. Un método de núcleo truncado para la ecuación integral

En esta sección proponemos un método numérico para resolver la ecuación integral:

$$p(t) = \int_0^T k(t, s)g(s)ds, \quad 0 < t \leq T \quad (3.9)$$

donde  $p$  es una función suave decreciente con  $p(0) = 0$ ,  $T$  es una constante positiva y el núcleo  $k(t, s)$  tiene las siguientes propiedades:

1.  $k(t, s) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .
2. Existe una constante positiva  $M$  tal que  $k(s^+, s) \geq M$  para todo  $s$ .
3.  $k(t, s)$  es acotado en  $[0, T] \times [0, T]$ , positivo para  $t > s$  y  $k(t, s) \in C^1$  en  $t > s$ .
4.  $\partial_1 k < 0 < \partial_2 k$  (donde  $\partial_j$  indica la derivada parcial con respecto a la  $j$ -ésima variable)
5.  $k(t, s)$  es un núcleo Volterra.

Observemos que

$$k(t, s) = \begin{cases} e^{-(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}$$

satisface todas las propiedades mencionadas.

### 3.2.1. Núcleo truncado y Ecuación Integral asociada

Para definir el núcleo truncado de interés, mostraremos primero algunas propiedades del núcleo  $k$ .

**Lema 3.1** *Sea  $0 < \epsilon < k(0, 0)$ . Entonces existe un único  $\tau(\epsilon) > 0$  tal que*

$$k(\tau(\epsilon), 0) = \epsilon.$$

*Además  $\tau(\epsilon)$  es una función decreciente y  $\tau(\epsilon) \rightarrow T$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .*

**Demostración.**

Como  $k(0, 0) > \epsilon$  y  $k(\cdot, 0)$  es estrictamente decreciente, la existencia de un único  $\tau(\epsilon)$  de clase  $C^1$  tal que

$$k(\tau(\epsilon), 0) = \epsilon$$

se sigue del teorema de la función implícita.

Para probar la monotocidad de  $\tau(\cdot)$ , sea  $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < k(0, 0)$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 < \epsilon_2 - \epsilon_1 &= k(\tau(\epsilon_2), 0) - k(\tau(\epsilon_1), 0) \\ &= \partial_1 k(\theta, 0)(\tau(\epsilon_2) - \tau(\epsilon_1)) \end{aligned}$$

para algún  $\theta$  entre  $\tau(\epsilon_1)$  y  $\tau(\epsilon_2)$ . Por la propiedad (3) del núcleo se sigue que

$$\tau(\epsilon_2) < \tau(\epsilon_1).$$

Ahora bien, supongamos que  $\tau(\epsilon) \rightarrow \alpha < T$  para alguna sucesión  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , entonces por continuidad

$$k(\tau(\epsilon_n), 0) \rightarrow k(\alpha, 0),$$

por otro lado,  $k(\tau(\epsilon_n), 0) = \epsilon_n$  y como  $k$  es decreciente en la primera variable, tenemos que

$$k(T, 0) < k(\alpha, 0) = 0,$$

lo cual es una contradicción. ■

**Lema 3.2** *Sea  $0 < \epsilon < \min\{M, k(0, 0)\}$ . Entonces,*

(a) *Para  $t \geq \tau(\epsilon)$  existe un único  $s_\epsilon(t)$  que satisface*

$$k(t, s_\epsilon(t)) = \epsilon.$$

*Además, para cada  $\epsilon > 0$ ,  $s_\epsilon(\cdot)$  es una función creciente y  $s_\epsilon(t) \rightarrow 0$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .*

(b) *Para  $t < \tau(\epsilon)$  se cumple*

$$k(t, s) > \epsilon$$

*para todo  $s \geq 0$ .*

**Demostración.**

(a) Si  $\tau(\epsilon) < t$  entonces por el hecho de que  $k(t, s)$  es decreciente en  $t$  tenemos

$$k(t, 0) < k(\tau(\epsilon), 0) = \epsilon.$$

Por otro lado, se tiene que  $k(s^+, s) \geq M > \epsilon$ . Como  $k(t, \cdot)$  es continuo y estrictamente creciente entonces la existencia de un único  $s_\epsilon(t)$  de clase  $C^1$  tal que

$$k(t, s_\epsilon(t)) = \epsilon$$

se sigue del teorema de la función implícita. Ahora, sea  $\tau(\epsilon) \leq t_1 < t_2$ , entonces para algún  $\theta$  y  $\psi$  positivos,

$$\begin{aligned} 0 &= k(t_1, s_\epsilon(t_1)) - k(t_2, s_\epsilon(t_2)) = \nabla k(\theta, \psi)(t_1 - t_2, s_\epsilon(t_1) - s_\epsilon(t_2)) \\ &= \partial_1 k(\theta, \psi)(t_1 - t_2) + \partial_2 k(\theta, \psi)(s_\epsilon(t_1) - s_\epsilon(t_2)), \end{aligned}$$

y por la propiedad 4 del kernel, se sigue que

$$s_\epsilon(t_1) < s_\epsilon(t_2).$$

Supongamos que  $s_\epsilon(t) \rightarrow s_0 > 0$  para alguna sucesión  $\epsilon_n \rightarrow 0$ . Por continuidad,

$$k(t, s_{\epsilon_n}(t)) \rightarrow k(t, s_0).$$

Pero  $k(t, s_{\epsilon_n}(t)) = \epsilon_n$  y  $k(t, s_0) > k(t, 0)$ , de aquí que

$$k(t, 0) < 0,$$

lo cual es una contradicción.

(b) Sea  $t < \tau(\epsilon)$ , entonces por ser  $k(t, s)$  decreciente en la variable  $t$ ,

$$k(\tau(\epsilon), 0) < k(t, 0),$$

por otro lado,

$$k(t, 0) \leq k(t, s) \quad \text{para todo } s \geq 0.$$

Luego por el lema **3.1**

$$\epsilon < k(t, s).$$

■

El método numérico se basa en truncar el núcleo de la siguiente manera.

Para  $0 < t < T$  con  $T = r\tau(\epsilon)$  y  $r$  un entero positivo, definimos la función  $k_\epsilon$  como:

$$k_\epsilon(t, s) = \begin{cases} k(t, s) & \text{si } k_\epsilon(t, s) \geq \epsilon \\ 0 & \text{si } k_\epsilon(t, s) < \epsilon \end{cases}$$

Y la función  $g_\epsilon$  de la siguiente forma:

$$p(t) = \int_0^T k_\epsilon(t, s)g_\epsilon(s) ds := (Kg_\epsilon)(t). \quad (3.10)$$

Probaremos que  $g_\epsilon$  aproxima a  $g$ .

### 3.2.2. Análisis de error

Note que (3.10) puede ser escrito como

$$p(t) = \int_{s_\epsilon(t)}^T k(t, s)g_\epsilon(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.11)$$

Como  $K$  es un operador compacto en  $L^2$  se puede asegurar la existencia de la solución a (3.10). Para asegurar la unicidad de la solución de dicha ecuación se enuncian los siguientes teoremas.

**Teorema 3.2** *Sea  $g_\epsilon \in L^2(0, T)$  solución de la ecuación de Fredholm de primer tipo (3.10) y  $p \in H^1(0, T)$  entonces  $g_\epsilon$  es una solución de la ecuación integral*

$$g_\epsilon(t) = \frac{1}{z(t)} \frac{d}{dt} p(t) + \frac{\epsilon}{z(t)} s'_\epsilon(t) g_\epsilon(s_\epsilon(t)) - \int_{s_\epsilon(t)}^t \hat{k}(t, s) g_\epsilon(s) ds, \quad (3.12)$$

donde,

$$z(t) = k(t, t) \quad \text{y} \quad \hat{k}(t, s) = \frac{1}{z(t)} \partial_1 k(t, s).$$

#### Demostración.

Por la definición de  $k_\epsilon$  y por la propiedad 5 de  $k$ , de la ecuación (3.10) tenemos

$$p(t) = \int_{s_\epsilon(t)}^t k(t, s)g_\epsilon(s)ds.$$

Derivando con respecto a  $t$  obtenemos

$$\frac{d}{dt}p(t) = \int_{s_\epsilon(t)}^t \partial_1 k(t, s) g_\epsilon(s) ds + k(t, t) g_\epsilon(t) - k(t, s_\epsilon(t)) g_\epsilon(s_\epsilon(t)) s'_\epsilon(t).$$

Pero  $k(t, s_\epsilon(t)) = \epsilon$ , entonces

$$k(t, t) g_\epsilon(t) = \frac{d}{dt}p(t) + \epsilon g_\epsilon(s_\epsilon(t)) s'_\epsilon(t) - \int_{s_\epsilon(t)}^t \partial_1 k(t, s) g_\epsilon(s) ds.$$

De aquí se sigue el aserto del teorema. ■

La ecuación integral de volterra de segundo tipo

$$g_0(t) = \frac{1}{z(t)} \frac{d}{dt}p(t) - \int_0^t \hat{k}(t, s) g_0(s) ds, \quad (3.13)$$

tiene solución única  $g_0(t)$ .

**Teorema 3.3** *Sea  $g_0$  solución de (3.13) entonces existe  $\epsilon_0$  tal que para todo  $\epsilon \leq \epsilon_0$  se satisface la siguiente desigualdad*

$$\|g_\epsilon - g_0\| \leq \frac{C}{(1 - \epsilon_0 C)} \|g_0\| \quad (3.14)$$

donde  $g_\epsilon$  es la solución de (3.12) y  $C$  constante positiva.

**Demostración.**

Haciendo la diferencia entre (3.12) y (3.13) resulta

$$g_\epsilon(t) - g_0(t) = \frac{\epsilon}{z(t)} s'_\epsilon(t) g_\epsilon(s_\epsilon(t)) - \int_{s_\epsilon(t)}^t \hat{k}(t, s) (g_\epsilon(s) - g_0(s)) ds.$$

Sea  $h_\epsilon(t) = g_\epsilon(t) - g_0(t)$ , entonces del teorema **3.1** la ecuación integral

$$h_\epsilon(t) = \frac{\epsilon}{z(t)} s'_\epsilon(t) g_\epsilon(s_\epsilon(t)) - \int_{s_\epsilon(t)}^t \hat{k}(t, s) h_\epsilon(s) ds.$$

tiene solución única de la forma,

$$h_\epsilon(\cdot) = \frac{\epsilon}{z(\cdot)} s'_\epsilon(\cdot) g_\epsilon(s_\epsilon(\cdot)) - H \frac{\epsilon}{z(\cdot)} s'_\epsilon(\cdot) g_\epsilon(s_\epsilon(\cdot))$$



donde  $H$  es el resolvente correspondiente al núcleo  $\hat{k}$ .

Como  $z(\cdot) \geq M$  y por la definición de  $s'_\epsilon(t)$  se satisface

$$\frac{s'(\cdot)}{z(\cdot)} \leq \frac{\max\{s'_\epsilon(\cdot)\}}{M}.$$

Además  $H$  es un operador acotado, entonces

$$\|g_\epsilon - g_0\| \leq \epsilon C \|g_\epsilon\|,$$

con  $C$  constante positivo. Por la desigualdad

$$\|g_\epsilon - g_0\| \geq \left| \|g_\epsilon\| - \|g_0\| \right|$$

tenemos

$$(1 - \epsilon C) \|g_\epsilon\| \leq \|g_0\|.$$

Sea  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $1 - \epsilon_0 C > 0$ . Entonces para cualquier  $\epsilon \leq \epsilon_0$  se satisface la desigualdad

$$\|g_\epsilon\| \leq \frac{\|g_0\|}{(1 - \epsilon_0 C)},$$

la cual implica (3.14). ■

La solución única de (3.10) se sigue del siguiente corolario; cuya afirmación es una implicación inmediata de la desigualdad (3.14).

**Corolario 3.4**  $N(K_\epsilon) = \{0\}$ .

**Teorema 3.5** *El rango de  $K_\epsilon$  es un subespacio denso propio de  $L^2[0, T]$ .*

**Demostración.**

Como  $k_\epsilon$  es compacto y no degenerado, es decir no tiene rango finito, entonces  $R(K_\epsilon)$  es subconjunto propio de  $L^2[0, T]$ .

Por la definición de  $k_\epsilon$  y  $s_\epsilon$ , tenemos

$$(K_\epsilon^* \rho)(s) = \int_0^T k_\epsilon(t, s) \rho(t) dt = \int_s^{s_\epsilon^{-1}(s)} k(t, s) \rho(t) dt.$$

De aquí, si  $\rho \in N(K_\epsilon^*)$ , entonces

$$\int_s^{s_\epsilon^{-1}(s)} k(t, s)\rho(t)dt = 0.$$

Derivando con respecto a  $s$ , obtenemos

$$0 = \int_s^{s_\epsilon^{-1}(s)} \partial_2 k(t, s)\rho(t)dt + k(s_\epsilon^{-1}(s), s)\rho(s_\epsilon^{-1}(s))(s_\epsilon^{-1}(s))' - k(s, s)\rho(s).$$

Como  $k(s_\epsilon^{-1}, s) = \epsilon$  entonces

$$\rho(s) = \frac{\epsilon\rho(s_\epsilon^{-1}(s))}{f(s)}(s_\epsilon^{-1}(s))' + \int_s^{s_\epsilon^{-1}(s)} \bar{k}(t, s)\rho(t)dt.$$

donde

$$f(s) = k(s, s) \quad \text{y} \quad \bar{k}(t, s) = \frac{\partial_2 k(t, s)}{f(s)}.$$

Haciendo analogía con la demostración del teorema **3.3**, obtenemos la desigualdad

$$\|\rho - \rho_0\| \leq \epsilon D \|\rho_0\|$$

donde  $D$  es una constante positiva y  $\rho_0$  es la solución de la ecuación de volterra de segundo tipo

$$\rho_0(s) = \int_s^{s_\epsilon^{-1}(s)} \bar{k}(t, s)\rho_0(t)dt. \quad (3.15)$$

Pero (3.15) tiene la solución trivial. Así,

$$\rho = 0.$$

Luego,  $N(K_\epsilon^*) = R(K_\epsilon)^\perp = \{0\}$ . Se sigue que  $R(K_\epsilon)$  es denso. ■

En el siguiente teorema damos una estimación para el residuo,

$$p - Kg_\epsilon = Kg - Kg_\epsilon.$$

**Teorema 3.6** Si  $g_\epsilon \in L^2[0, T]$  y  $\{\|g_\epsilon\|_2\}_{\epsilon>0}$  es acotado, entonces

$$\left| \int_0^T k(t, s)(g(s) - g_\epsilon(s)) ds \right| = O(\epsilon).$$

**Demostración.**

Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T k(t, s)g(s)ds - \int_0^T k_\epsilon(t, s)g_\epsilon(s)ds \\ &= \int_0^T k(t, s)g(s)ds - \int_{s_\epsilon(t)}^T k(t, s)g_\epsilon(s)ds. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T k(t, s)(g(s) - g_\epsilon(s))ds \right| &= \left| \int_0^{s_\epsilon(t)} k(t, s)g_\epsilon(s)ds \right| \\ &\leq \int_0^{s_\epsilon(t)} |k(t, s)| |g_\epsilon(s)| ds \end{aligned}$$

y de aquí, por el hecho que  $k(t, s) \leq \epsilon$  para  $s \leq s_\epsilon(t)$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T k(t, s)(g(s) - g_\epsilon(s))ds \right| &\leq \epsilon \int_0^T |g_\epsilon(s)| ds \\ &\leq \epsilon\sqrt{T} \|g_\epsilon\|_2. \end{aligned}$$

■

Ahora daremos un resultado acerca de la convergencia débil de  $g_\epsilon$  solución de (3.10) a  $g$  solución de (3.9).

**Teorema 3.7** Si  $N(K) = \{0\}$  y  $\{\|g_\epsilon\|_2\}_{\epsilon>0}$  es acotado, entonces  $g_\epsilon \rightharpoonup g$  (convergencia débil) cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Demostración.**

Como  $N(K) = \{0\}$  se tiene que  $R(K^*)$  es denso. Para  $\varphi \in R(K^*)$ , digamos  $\varphi = K^*\psi$ , tenemos (donde el producto interno y la norma son en  $L^2$ ):

$$\langle g_\epsilon - g, \varphi \rangle = \langle g_\epsilon - g, K^*\psi \rangle = \langle K(g_\epsilon - g), \psi \rangle.$$

Si definimos,

$$h(t) = \int_0^T k(t, s)(g(s) - g_\epsilon(s))ds$$

entonces

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 &= \int_0^T |h(t)|^2 dt = \int_0^T \left| \int_0^T k(t, s)(g(s) - g_\epsilon(s))ds \right|^2 dt \\ &\leq \int_0^T \epsilon^2 T \|g_\epsilon\|_2^2 = \epsilon^2 T^2 \|g_\epsilon\|_2^2. \end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$|\langle K(g_\epsilon - g), \psi \rangle| = |\langle h(t), \psi(t) \rangle| \leq \|h\| \|\psi\|,$$

de esta desigualdad, resulta

$$\langle g_\epsilon - g, \varphi \rangle \leq \epsilon T \|g_\epsilon\| \|\psi\|$$

Como  $\psi$  fue tomado arbitrario pero fijo, se sigue que

$$\langle g_\epsilon, \varphi \rangle \rightarrow \langle g, \varphi \rangle.$$

Además  $\{g_\epsilon\}$  es acotado y converge para  $\varphi$  en un conjunto denso, se sigue del teorema de Banach-Steinhaus que

$$g_\epsilon \rightharpoonup g.$$

■

### 3.2.3. Discretización e implementación computacional del método

El método numérico está basado por una aproximación constante por partes y colocación dada por la ecuación (3.10). Definimos una sucesión de puntos

$$s_j = s(t_j) \text{ donde } k(t_j, s(t_j)) = \epsilon.$$

La existencia de los  $s_j$ 's lo asegura el lema 3.2. Sea

$$g^d(s) = \sum_{j=1}^n g_j^d \chi_{[s_j, s_{j+1})}(s) \quad (3.16)$$

donde  $\chi_A$  denota la función característica del conjunto  $A$ .

Entonces las ecuaciones colocación vienen dadas por:

$$p(t_{n+1-i}) = \int_0^T k_\epsilon(t_{n+1-i}, s) g^d(s) ds, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.17)$$

**Teorema 3.8** *Las ecuaciones (3.17) tienen una única solución de la forma (3.16).*

**Demostración.**

Procederemos a realizar la demostración por inducción sobre  $i$ .

Para  $i = 1$ , (3.17) se convierte en

$$p(t_n) = \sum_{j=1}^n g_j^d \int_0^T k_\epsilon(t_n, s) \chi_{[s_j, s_{j+1})}(s) ds$$

por la definición de  $k_\epsilon(\cdot, \cdot)$ ,

$$p(t_n) = g_n^d \int_{s_n}^T k(t_n, s) ds,$$

de aquí,

$$g_n^d = p(t_n) \left( \int_{s_n}^T k(t_n, s) ds \right)^{-1}.$$

Para  $i > 1$ ,

$$\begin{aligned} p(t_{n+1-i}) &= \int_0^T k_\epsilon(t_{n+1-i}, s) \sum_{j=1}^n g_j^d \chi_{[s_j, s_{j+1})}(s) ds \\ &= g_i^d \int_{s_i}^{s_{i+1}} k(t_{n+1-i}, s) ds + \sum_{j=i+1}^n g_j^d \int_{s_j}^T k(t_{n+1-i}, s) \chi_{[s_j, s_{j+1})}(s) ds, \end{aligned}$$

lo cual determina de forma única a  $g_i^d$ :

$$g_i^d = (p(t_{n+1-i}) - \sum_{j=i+1}^n g_j^d \int_{s_j}^T k(t_{n+1-i}, s) \chi_{[s_j, s_{j+1})}(s) ds) \left( \int_{s_i}^{s_{i+1}} k(t_{n+1-i}, s) ds \right)^{-1}$$

$$= (p(t_{n+1-i}) - \sum_{j=i+1}^n g_j^d \int_{s_j}^{s_{j+1}} k(t_{n+1-i}, s) ds) \left( \int_{s_i}^{s_{i+1}} k(t_{n+1-i}, s) ds \right)^{-1}.$$

La proposición (3) determina de forma única los  $g_j^d$  por un procedimiento explícito. ■

De esta manera podemos definir una ecuación matricial  $H\vec{g}^d = \vec{F}$  donde

$$H_{ij} = \begin{cases} \int_{s_j}^{s_{j+1}} k_e(t_i, s) ds & \text{para } i \leq j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y  $F_i = p(t_i)$ .

---

# Capítulo 4

## Resultados numéricos

---

En este capítulo procederemos a realizar una comparación entre el método de Tikhonov, y el que se ha propuesto en este trabajo de tesis.

### 4.1. Comparación de los métodos con datos sin ruido

En esta sección vamos a considerar los datos de entrada  $p(t_i)$  libres de ruido. Empecemos considerando las funciones prueba (2.6) del artículo ([PUC89]), la respuesta teórica de deconvolución en este caso es:

$$g(s) = 2,$$

los métodos son entonces usados para desarrollar aproximaciones a  $g_{real}$ .

En la figura (4.1), mostramos las aproximaciones de ambos métodos y en la siguiente tabla presentamos la comparación de sus características, con número de partición  $n = 10$ :

| Método     | Parámetro                       | Determinante de $K$ | Error relativo        | Tiempo T |
|------------|---------------------------------|---------------------|-----------------------|----------|
| TIKHONOV   | $\alpha = 0.15$                 | 0.042               | 0.008                 | 23.026   |
| TRUNCACION | $\epsilon = 1.0 \times 10^{-5}$ | 0.656               | $6.92 \times 10^{-6}$ | 23.026   |

Notemos de la tabla que el método del núcleo truncado mejora el determinante de la matriz  $K$  y el error relativo es mucho más pequeño.

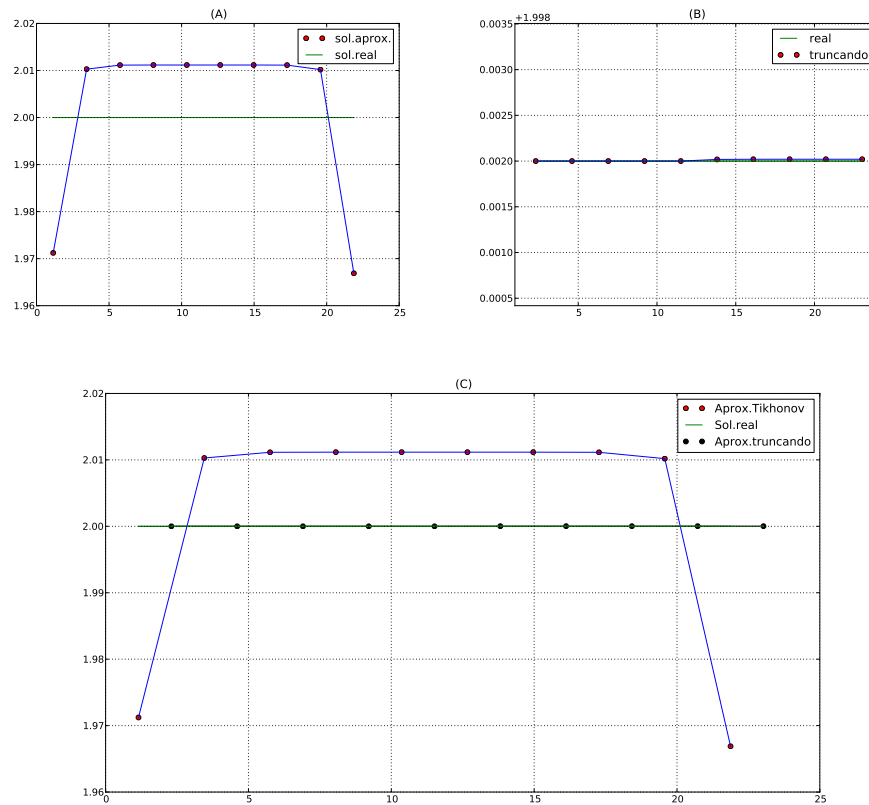


Figura 4.1: Aproximación del método de Tikhonov (A) y el método del núcleo truncado (B), donde real es  $g$ . En (C) representamos las dos aproximaciones junto con la solución real. En (A) usamos el valor del parámetro  $\alpha = 0.15$  y para (B) tomamos  $\epsilon = 1.0 \times 10^{-5}$ .

Aparte de la función constante  $g(s) = 2$ , probamos con las siguientes funciones:

| Función dada $p(t)$               | Función a recuperar $g(s)$ | Tipo de función $g(s)$ |
|-----------------------------------|----------------------------|------------------------|
| $2.5(-1 + t + e^{-t})$            | $2.5s$                     | LINEAL                 |
| $-3.5t + 2t^2 + 4.5(1 - e^{-t})$  | $2s^2 + 0.5s + 1$          | CUADRÁTICA             |
| $6t - 3t^2 + t^3 - 6(1 - e^{-t})$ | $s^3$                      | CÚBICA                 |



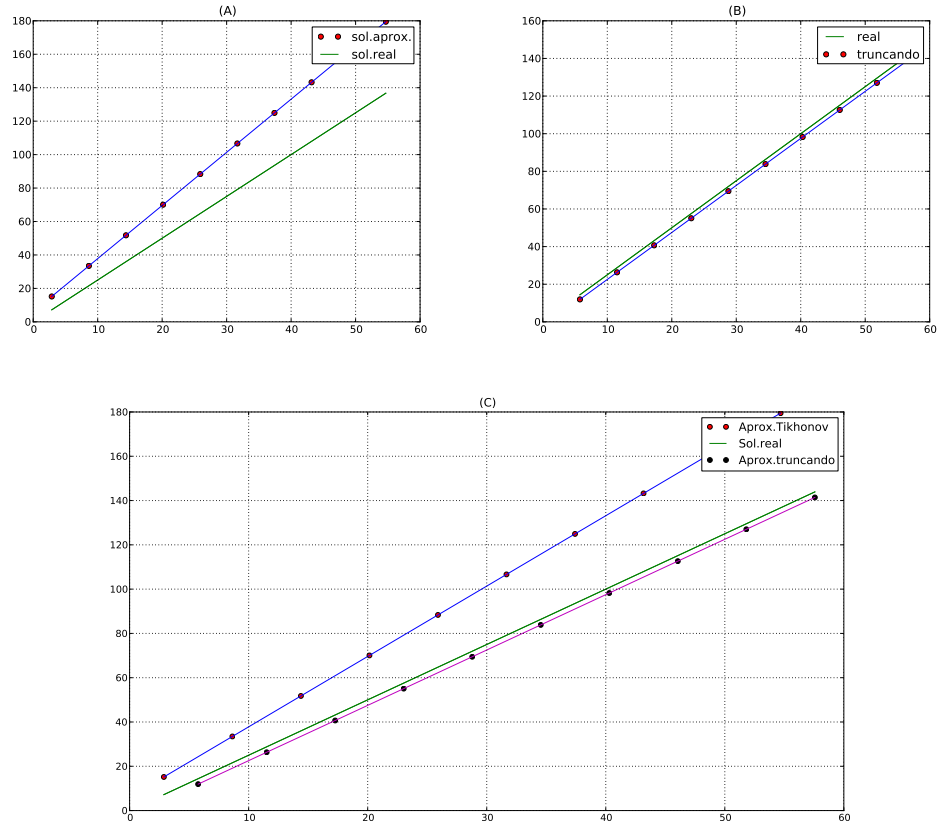


Figura 4.2: Aproximación para  $g$  lineal con regularización de Tikhonov en (A) y del núcleo truncado en (B). En (C) representamos las dos aproximaciones junto con la solución real, la línea azul con los puntos rojos representan la aproximación con Tikhonov y la línea magenta con los puntos negros representan la aproximación con el método propuesto.

En la figura (4.2) presentamos la aproximación de ambos métodos a la función lineal  $g$  y las principales características con  $n = 10$ , en la siguiente tabla:

| Método     | Parámetro                       | Determinante de $K$   | Error relativo | Tiempo T |
|------------|---------------------------------|-----------------------|----------------|----------|
| TIKHONOV   | $\alpha = 0.15$                 | $0.26 \times 10^{-5}$ | 0.335          | 57.565   |
| TRUNCACION | $\epsilon = 1.0 \times 10^{-5}$ | 0.994                 | 0.028          | 57.565   |

Observemos de la tabla que el método del núcleo truncado obtiene un error relativo mucho más pequeño.

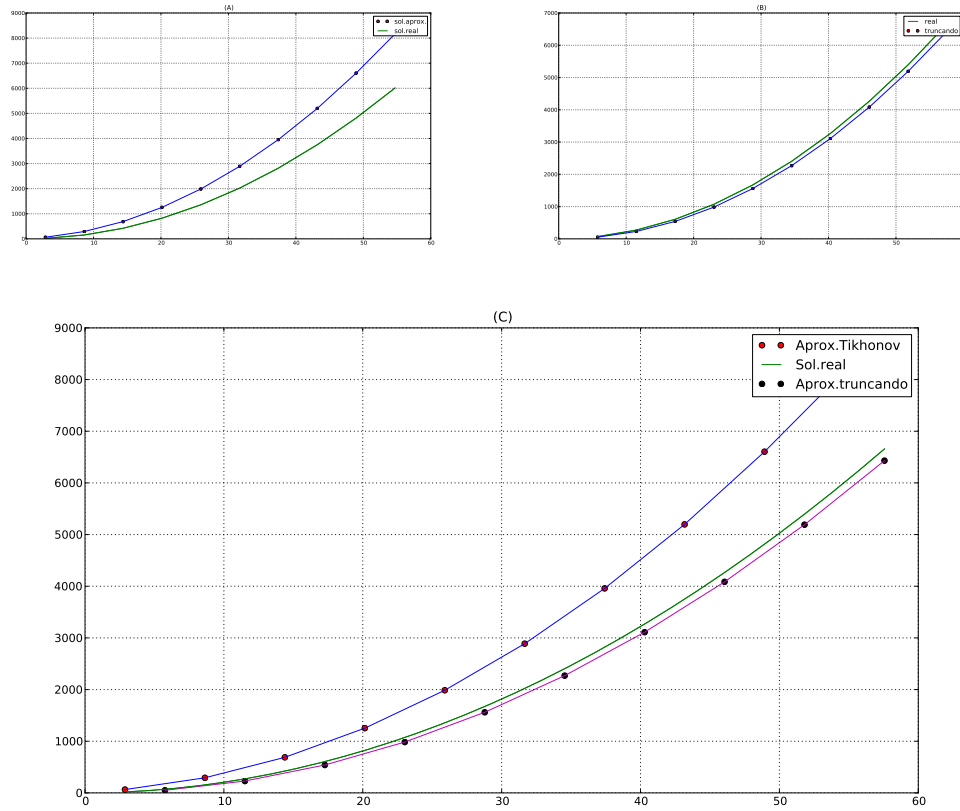


Figura 4.3: Aproximación para  $g(s)$  cuadrática con regularización de Tikhonov en (A) y del método del núcleo truncado en (B). En (C) representamos las dos aproximaciones junto con la solución real, la línea azul con los puntos rojos representan la aproximación con Tikhonov y la línea magenta con los puntos negros representan la aproximación con el método propuesto.

En la figura (4.3) presentamos la aproximación de ambos métodos a la función cuadrática  $g$  y las principales características con  $n = 10$ , en la siguiente tabla:

| Método     | Parámetro                       | Determinante de $K$   | Error relativo | Tiempo T |
|------------|---------------------------------|-----------------------|----------------|----------|
| TIKHONOV   | $\alpha = 0.15$                 | $0.26 \times 10^{-5}$ | 0.379          | 57.565   |
| TRUNCACION | $\epsilon = 1.0 \times 10^{-5}$ | 0.994                 | 0.042          | 57.565   |

Observemos de la tabla que el método del núcleo truncado funciona muy bien para la función cuadrática; ya que el error relativo es más pequeño.

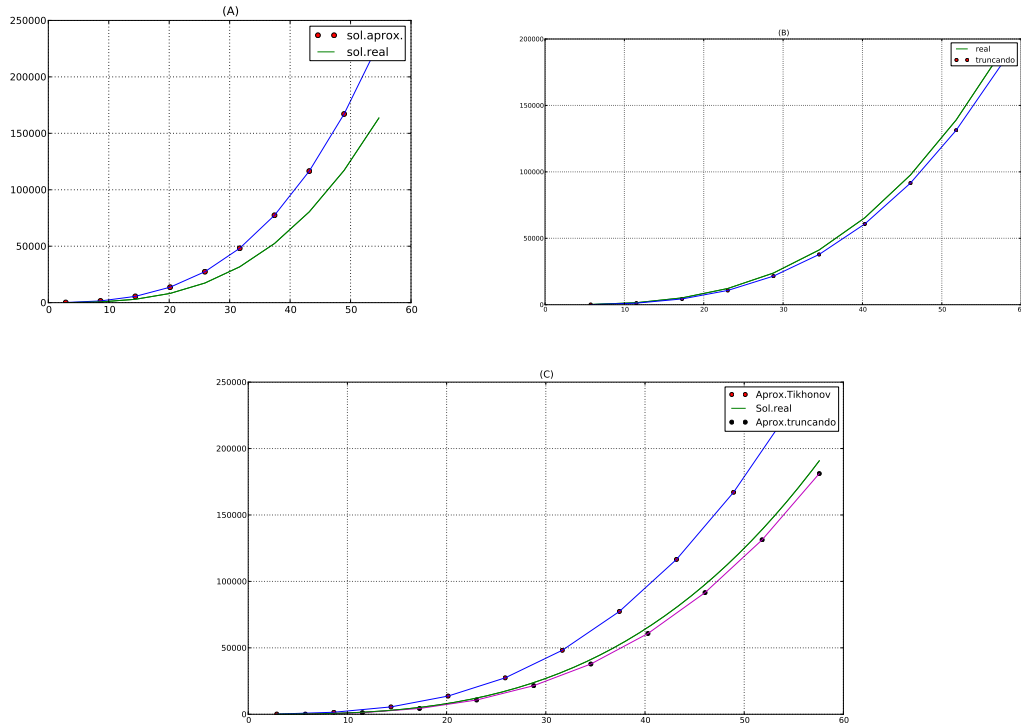


Figura 4.4: Aproximación para  $g$  cúbica con regularización de Tikhonov en (A) y del núcleo truncado en (B). En (C) representamos las dos aproximaciones junto con la solución real, la línea azul con los puntos rojos representan la aproximación con Tikhonov y la línea magenta con los puntos negros representan la aproximación con el método propuesto.

En la figura (4.4) presentamos la aproximación de ambos métodos a la función cúbica  $g$  y las principales características con  $n = 10$ , en la siguiente tabla:

| Método     | Parámetro                       | Determinante de $K$   | Error relativo | Tiempo T |
|------------|---------------------------------|-----------------------|----------------|----------|
| TIKHONOV   | $\alpha = 0.15$                 | $0.26 \times 10^{-5}$ | 0.425          | 57.565   |
| TRUNCACION | $\epsilon = 1.0 \times 10^{-5}$ | 0.994                 | 0.0566         | 57.565   |

La tabla muestra que también para la función cúbica, el error relativo dada para el método del núcleo truncado es más pequeño.

Otra función que nos hizo interesante probar con los métodos es recuperar la función periódica:

$$g(s) = \text{sen}\left(\frac{s}{2\pi}\right),$$

aunque para nuestro problema no interviene este tipo de funciones, pero es un buen ejemplo para comparar los métodos.

En la figura (4.5) presentamos la aproximación de ambos métodos a la función periódica  $g$  y las principales características con  $n = 20$ , en la siguiente tabla:

| Método     | Parámetro                       | Error relativo | Tiempo T |
|------------|---------------------------------|----------------|----------|
| TIKHONOV   | $\alpha = 0.15$                 | 0.179          | 69.078   |
| TRUNCACION | $\epsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ | 0.149          | 69.078   |

De la tabla observamos que el método propuesto también funciona bastante bien para recuperar funciones periódicas.

En general las tablas y las gráficas muestran que el método del núcleo truncado da mejores resultados que la regularización de Tikhonov.

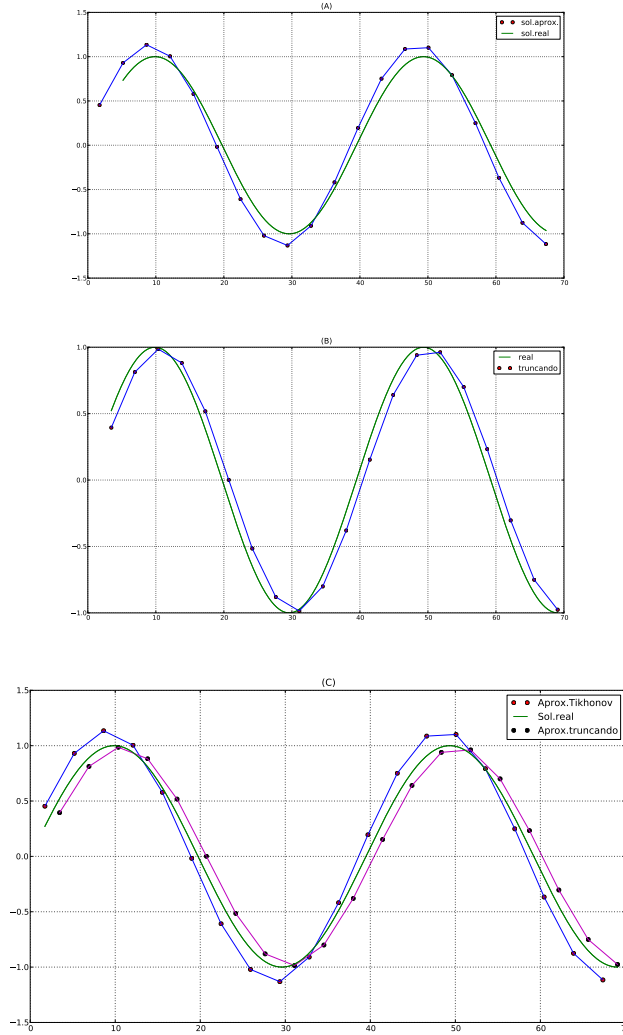


Figura 4.5: Aproximación para  $g$  periódica con regularización de Tikhonov en (A) y del núcleo truncado en (B). En (C) representamos las dos aproximaciones junto con la solución real, la línea azul con los puntos rojos representan la aproximación con Tikhonov y la línea magenta con los puntos negros representan la aproximación con el método propuesto.

## 4.2. Comparación de los métodos con datos perturbados

Siguiendo con las comparaciones de los métodos de Tikhonov y el propuesto en el capítulo 3, ahora procederemos a considerar los datos de entrada  $p(t_i)$ , contaminados de ruido del 5 por ciento.

Así como en la sección anterior, primeramente comparamos los métodos para  $g(s) = 2$ .

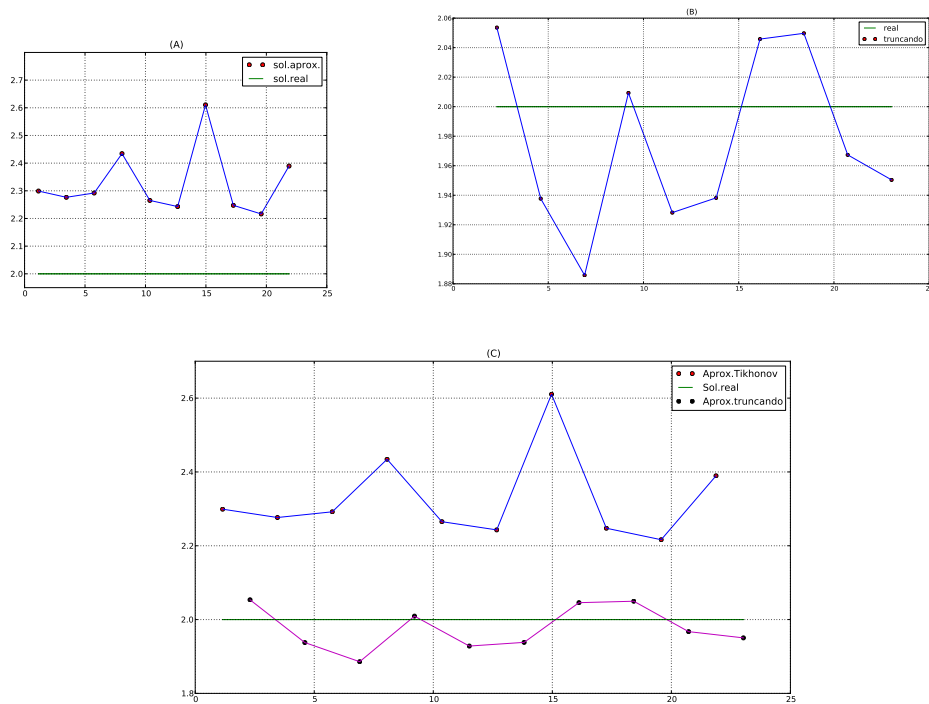


Figura 4.6: Aproximación del método de Tikhonov (A) y el método del núcleo truncado (B), donde real es el  $g_{real}$ . En (C) representamos las dos aproximaciones junto con la solución real, la línea azul con los puntos rojos representan aproximación con Tikhonov y la línea magenta con los puntos negros representan la aproximación con el método propuesto.

En la figura (4.6) mostramos las aproximaciones de ambos métodos y en la

siguiente tabla presentamos la comparación de sus características, con  $n = 10$ :

| Método     | Parámetro                       | Determinante de $K$ | Error relativo | Tiempo T |
|------------|---------------------------------|---------------------|----------------|----------|
| TIKHONOV   | $\alpha = 0.037$                | 0.042               | 0.149          | 23.026   |
| TRUNCACION | $\epsilon = 1.0 \times 10^{-5}$ | 0.656               | 0.030          | 23.026   |

Nótese de la tabla que aún para datos de entrada con ruido, el método del núcleo truncado funciona bastante bien, de la figura (4.6) en (C) es muy notable la diferencia.

Ahora, hagamos las comparaciones para  $g(s)$ , LINEAL, CUADRÁTICA Y CÚBICA.

En la figura (4.7) presentamos ambas aproximaciones a la función lineal  $g$  y las principales características con  $n = 10$ , en la siguiente tabla:

| Método     | Parámetro                       | Determinante de $K$   | Error relativo | Tiempo T |
|------------|---------------------------------|-----------------------|----------------|----------|
| TIKHONOV   | $\alpha = 0.0091$               | $0.26 \times 10^{-5}$ | 0.658          | 57.565   |
| TRUNCACION | $\epsilon = 1.0 \times 10^{-5}$ | 0.994                 | 0.064          | 57.565   |

Observemos de la tabla que para datos de entrada con ruido para la función lineal, el método del núcleo truncado obtiene mejor aproximación, de la figura (4.7) en (C) se aprecia mejor.

En la figura (4.8) presentamos ambas aproximaciones a la función cuadrática  $g$  y las principales características con  $n = 10$ , en la siguiente tabla:

| Método     | Parámetro                       | Determinante de $K$   | Error relativo | Tiempo T |
|------------|---------------------------------|-----------------------|----------------|----------|
| TIKHONOV   | $\alpha = 0.0057$               | $0.26 \times 10^{-5}$ | 0.690          | 57.565   |
| TRUNCACION | $\epsilon = 1.0 \times 10^{-5}$ | 0.994                 | 0.048          | 57.565   |

De la tabla notamos que para datos de entrada con ruido para la función cuadrática, el método del núcleo truncado obtiene aproximación mucho mejor que la regularización de Tikhonov, de la figura (4.8) en (C) se nota la gran la diferencia.

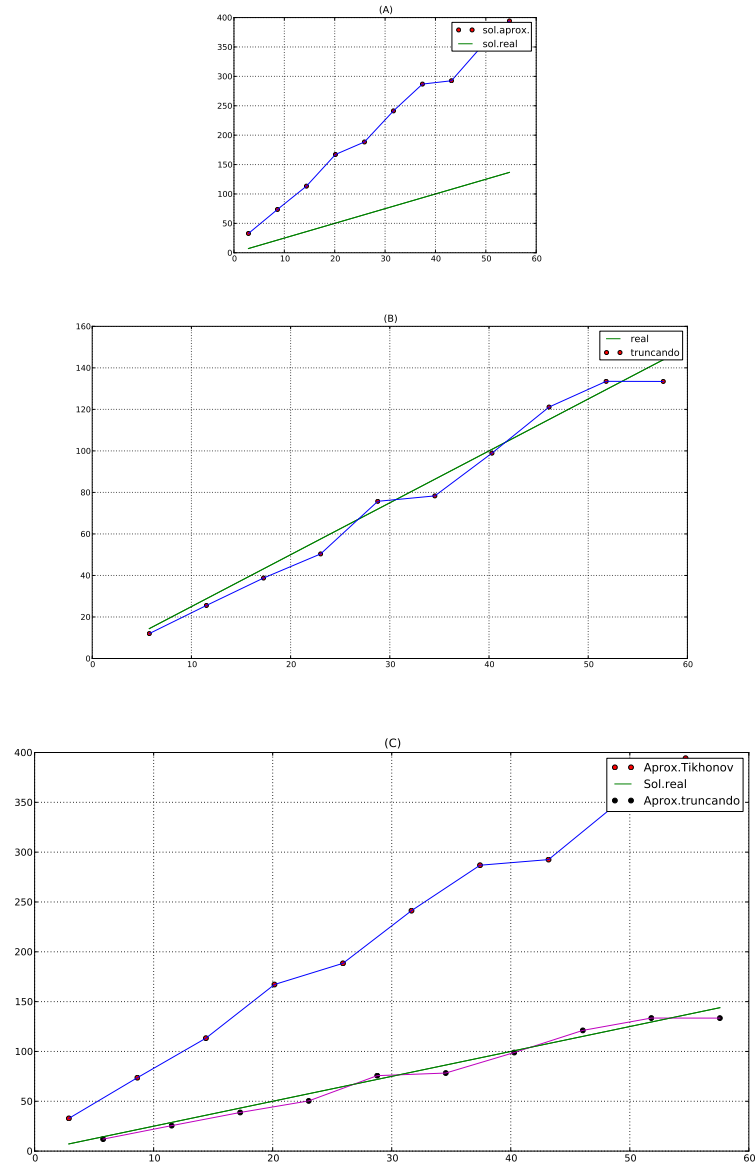


Figura 4.7: Aproximación para  $g$  lineal con regularización de Tikhonov en (A) y del método del núcleo truncado en (B). En (C) representamos las dos aproximaciones junto con la solución real, la línea azul con los puntos rojos representan aproximación con Tikhonov y la línea magenta con los puntos negros representan la aproximación con el método propuesto.



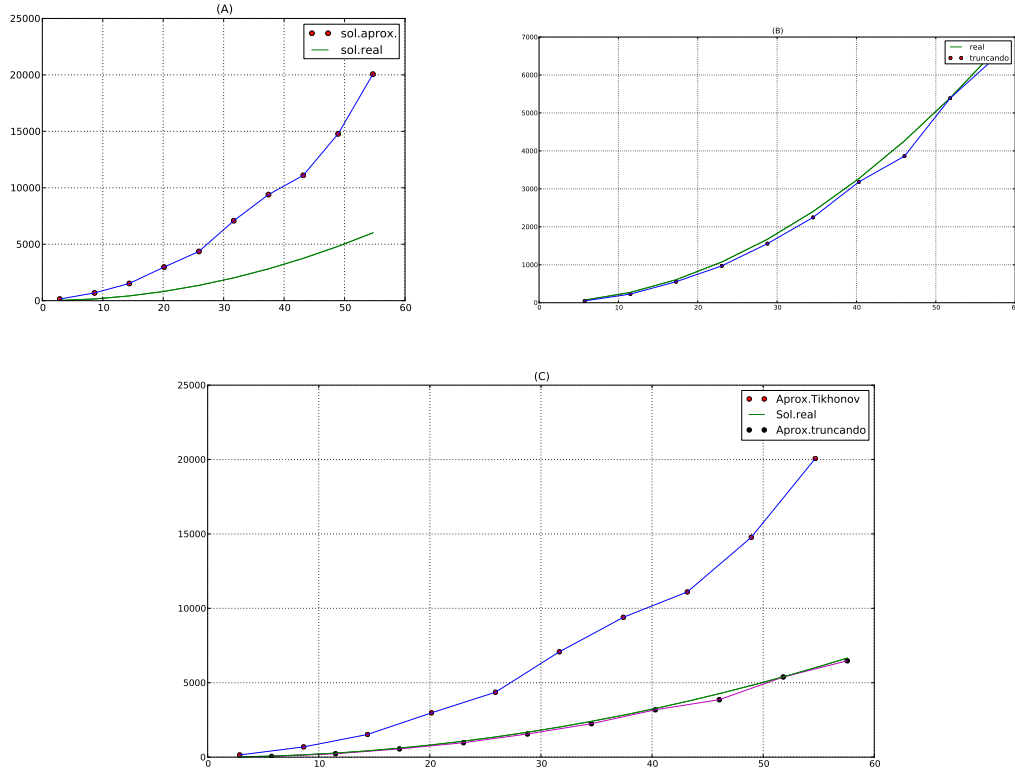


Figura 4.8: Aproximación para la cuadrática  $g$  con regularización de Tikhonov en (A) y del núcleo truncado en (B). En (C) representamos las dos aproximaciones junto con la solución real, la línea azul con los puntos rojos representan aproximación con Tikhonov y la línea magenta con los puntos negros representan la aproximación con el método propuesto.

En la figura (4.9), presentamos las aproximaciones a la función cúbica  $g$  y las principales características con  $n = 10$ , en la siguiente tabla:

| Método     | Parámetro                       | Determinante de $K$   | Error relativo | Tiempo T |
|------------|---------------------------------|-----------------------|----------------|----------|
| TIKHONOV   | $\alpha = 0.005$                | $0.26 \times 10^{-5}$ | 0.694          | 57.565   |
| TRUNCACION | $\epsilon = 1.0 \times 10^{-5}$ | 0.994                 | 0.049          | 57.565   |

La tabla nos muestra que para datos con ruido para la función cúbica, el

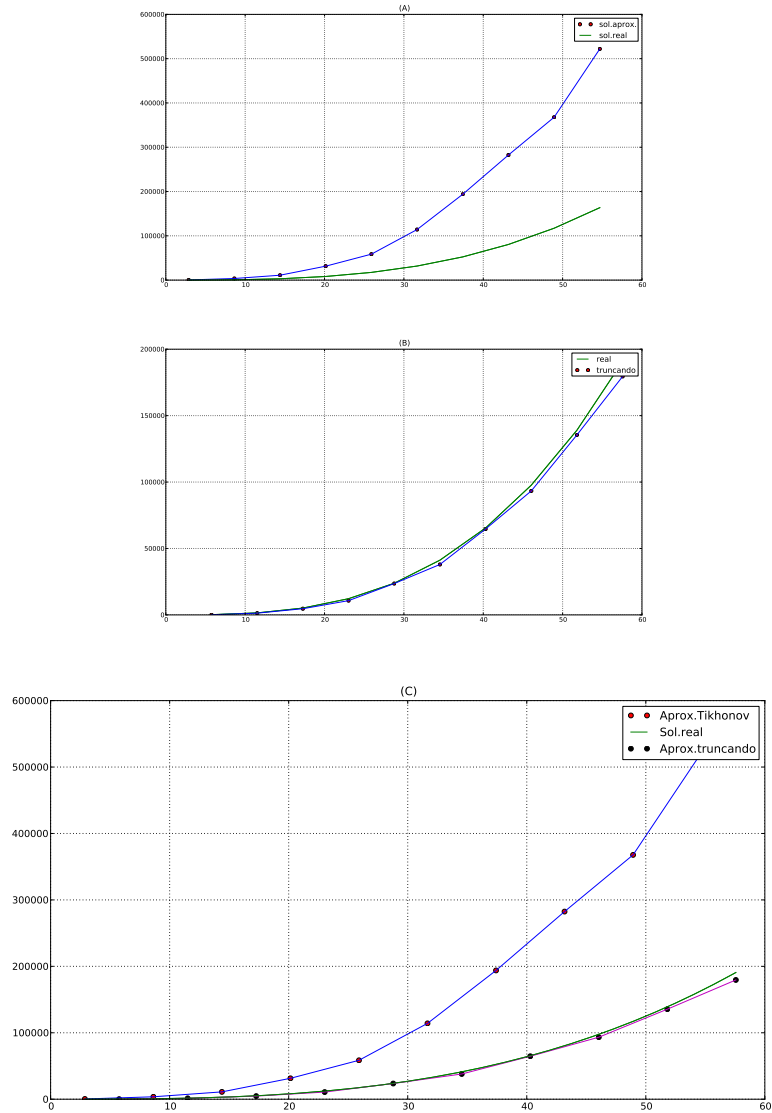


Figura 4.9: Aproximación para la cúbica  $g$  con regularización de Tikhonov en (A) y truncando kernel en (B). En (C) representamos las dos aproximaciones junto con la solución real, la línea azul con los puntos rojos representan aproximación con Tikhonov y la línea magenta con los puntos negros representan la aproximación con el método propuesto.

método del núcleo truncado obtiene una mejor aproximación que la regularización

de Tikhonov, de la figura (4.9) en (C) se muestra mejor esta diferencia.

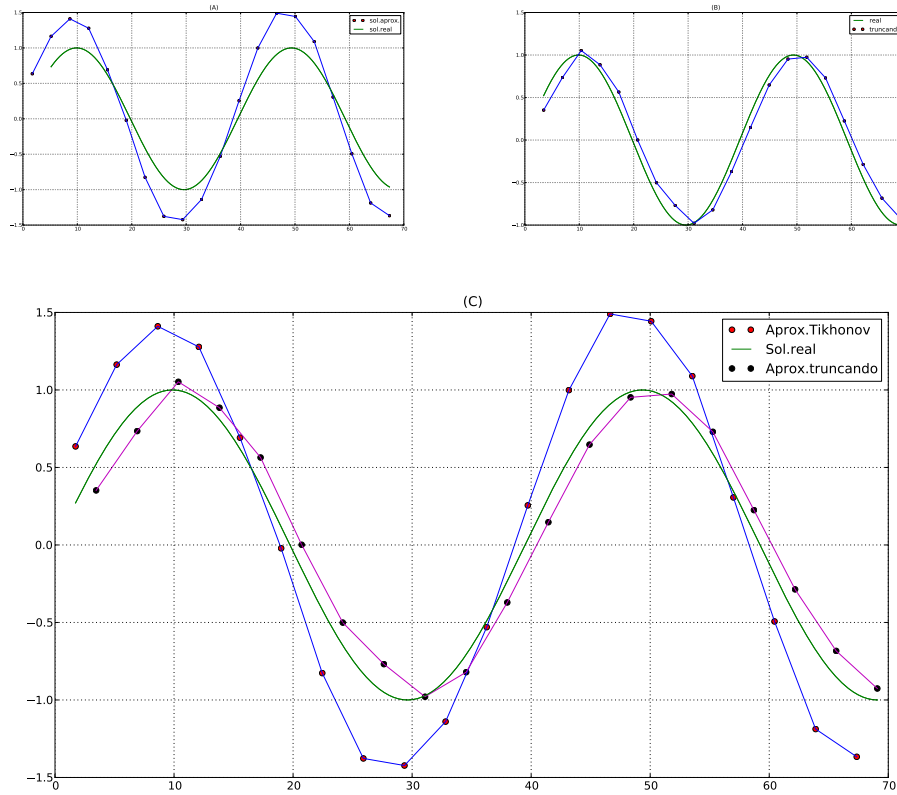


Figura 4.10: Aproximación para la función periódica  $g$  con regularización de Tikhonov en (A) y el método del núcleo truncado en (B). En (C) representamos las dos aproximaciones junto con la solución real, la línea azul con los puntos rojos representan aproximación con Tikhonov y la línea magenta con los puntos negros representan la aproximación con el método propuesto.

En la figura (4.10), presentamos las aproximaciones a la función periódica  $g$  y las principales características con  $n = 20$ , en la siguiente tabla:

| Método     | Parámetro                       | Error relativo | Tiempo T |
|------------|---------------------------------|----------------|----------|
| TIKHONOV   | $\alpha = 0.019$                | 0.352          | 69.078   |
| TRUNCACION | $\epsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ | 0.1829         | 69.078   |

De la tabla se observa que para datos de entrada con ruido para la función periódica, el método del núcleo truncado obtiene aproximación mucho mejor que la regularización de Tikhonov, de la figura (4.10) en (C) se nota dicha diferencia.

En resumen, el método del núcleo truncado da una mejor aproximación en comparación con el método de regularización de Tikhonov; esto para las diferentes funciones que hemos probado y para datos de entrada con ruido.

# Conclusiones y trabajo futuro

---

En este trabajo de tesis, se propuso un método numérico para resolver la ecuación integral de convolución (2). Para tener una base sólida del método, durante todo el capítulo **3** salvo en los preliminares, nos ocupamos de realizar el análisis de aproximación. Lo cual distingue fuertemente este método con respecto a los presentados por ejemplo en el artículo de Cinar et al. ([CIO06]). En el capítulo **4**, mostramos la diferencia del método con respecto al método clásico de regularización de Tikhonov. Notamos que el método del núcleo truncado reduce en gran medida la singularidad del sistema lineal, la aproximación a la solución real es mucho más precisa. Además el método propuesto es muy sencillo de implementar computacionalmente a comparación de los métodos presentados en ([CIO06]).

Cabe mencionar que el método que se propuso en esta tesis no es un método de regularización en la forma como lo es el método de Tikhonov, ya que una solución es garantizada a existir solamente para  $p$  en un subespacio denso de  $L^2$  como lo afirma el Teorema **3.5**, sin embargo hay funciones  $p \in L^2$  para el cual el método no se aplica.

A pesar de esta condición, varias funciones que se presentan en las aplicaciones como en yacimientos petroleros satisfacen dicha condición, como es el caso de las funciones continuas en el intervalo de integración. Por tal motivo el método del núcleo truncado presenta una gran ventaja como un método alternativo de regularización, para implementarlo a otros tipos de problema de deconvolución.

En este trabajo obtuvimos aproximaciones a  $g(t_i)$ ; como uno de los trabajos a futuro sería implementar un algoritmo para hallar la aproximación a la función de respuesta  $p_u(t)$ . Por otro lado para validar el método hemos probado con ejemplos sintéticos, estaría bien hacer la validación con datos de campo. Además implementar un método de ajuste a los datos discretos que se obtuvo con el núcleo truncado para lograr una aproximación mucho mejor.



# Bibliografía

---

- [Che07] Chen, Zhangxin: *Reservoir simulation: mathematical techniques in oil recovery*. SIAM, 2007.
- [VH49] Van Everdingen, A. F. y W. Hurst: *The Application of the Laplace Transformation to flow problems in reservoirs*. TP 2732, 1949.
- [Vog02] Vogel, Curtis R.: *Computacional Methods for INVERSE PROBLEMS*. SIAM, 2002.
- [Eng95] Engl, Heinz W.: *Inverse Problems*. Sociedad Matemática Mexicana, 1995.
- [DS96] Dennis, J. E. y Robert B. Schnabel: *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. SIAM, 1996.
- [Rei67] Reinsch, Christian H.: *Smoothing by Spline Functions*. Numerische Mathematik 10, 177-183(1967).
- [PUC89] Petrobrás, L.C.C. Mendes, M. Tygel Unicamp y A.C. de Franca Corrèa: *A Deconvolution Algorithm for Analysis of Variable-Rate Well Test Pressure Data*. SPE, 1989.
- [CIO06] Cinar, M., D. Ilk, M. Onur, P. P. Valkó y T. A. Blansingame: *A Comparative Study of Recent Robust Deconvolution Algorithms for Well-Test and Production-Data analysis*. SPE, 2006.
- [OCI08] Onur, M., M. Cinar, D. Ilk, P. P. Valkó, T. A. Blansingame y P.S. Hegeman: *An Investiagtion of Recent Deconvolution Methods for Well-Test Data analysis*. SPE Journal, 2008.

- [OV91] Ohaeri, C. U. y D. T. Vo: *Practical Solutions for Interactive Horizontal Well Test Analysis*. SPE, 1991.
- [FG09] French, D. A. y C. W. Groetsch: *Numerical Solution of a Class of Integral Equations Arising in a Biological Laboratory Procedure*. 2009.
- [Smi70] Smithies, F.: *Integral Equations*, Cambridge University Press, London, 1970.
- [Kir96] Kirsch, Andreas: *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer-Verlag, New York, 1996.