



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

**Métodos Geométricos
en Problemas de Optimización
de Proyecciones**

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:

Rafael Iván Ayala Figueroa

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Jesús Jerónimo Castro

CO-DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Francisco Sánchez Sánchez

Enero 19 de 2011

Guanajuato, Gto. México

Contenido

Contenido	1
Agradecimientos	1
Notación básica	4
Introducción	5
1. Conceptos y Herramientas Básicas	9
1.1. Conceptos Básicos	10
1.2. Simetrización de Steiner	12
1.3. Transformaciones Afines	13
1.4. Teorema de John	14

1.5. Cuerpo de Flotación y Cuerpo de Iluminación	15
2. Sombras de Área Mínima	19
2.1. Definición del Problema	19
2.2. Problema Análogo en el Plano	20
2.3. Problema Restringido a Objetos Planos	21
2.4. Solución del Problema para Elipsoides	25
2.5. Aproximación al Punto Óptimo	29
3. Algunos Mínimos Geométricos	39
3.1. Optimizaciones sobre la Envolvente Convexa	39
3.2. Cuerpo de Iluminación y Volumen Mínimo	47
Conclusión	53
Bibliografía	55

Agradecimientos

Primero quiero dar gracias a Dios por haberme permitido llegar hasta aquí, por proveer las condiciones necesaria y con su favor pude tomar las decisiones que me llevaron a iniciar y concluir esta etapa.

A mis padres Martha y Rafael, por todos sus consejos y palabras de apoyo, por los valores que me enseñaron desde niño, porque debido a la insistencia, el trabajo y la paciencia que siempre tuve como ejemplo he podido concluir una etapa más de mi vida.

Gracias a mi esposa Mónica porque siempre me brindó un gran apoyo incondicional, toda su paciencia y comprensión durante tanto tiempo.

Muchas gracias a mis hermanas Margarita y Beatriz por que estuvieron en todo momento cuando las necesite, a mis sobrinas Mónica Alesi y a la pequeña Diana. También le agradezco a Claudia por sus palabras de aliento así como el continuo apoyo de Ramón y Kiko.

Muchas gracias a un gran amigo, Jesús, por todos sus consejos, además de todo el

apoyo que recibí para poder llegar a este punto. Gracias a todos mis amigos, Jose Luis, Beto, Chava, Pepe, Jaime, Esperanza, Neto, Ulises; a todos en alguna medida les debo dar un reconocimiento en este logro; sin ellos no se hubieran dado las cosas de la forma que suceden ahora. Y a todas las personas que pude haber olvidado una sincera disculpa, les agradezco a todos.

Por último les doy las gracias al CONACyT (Becario 223423) por que con su apoyo económico pude alcanzar esta meta.

Notación básica

\mathbb{R}^n	espacio euclidiano n -dimensional
\mathbb{S}^n	esfera unitaria n -dimensional
$\mathbb{B}^n(c, r)$	bola n -dimensional con centro en c y radio r
J_K	elipsoide de John asociado al cuerpo convexo K
$P_X(K)$	penumbra del cuerpo K respecto al punto X
$\ \cdot\ $	norma euclidiana
$d(x, y)$	distancia euclidiana entre x e y
$\text{conv}(K)$	envolvente convexa de K
$\text{int } K$	el interior de K
$\text{relint } K$	el interior relativo de K
$\text{bd } K$	la frontera de K ; i.e., $\text{cl } K \setminus \text{int } K$
$\text{vol}_n(K)$	volumen n dimensional de K
O	el origen en \mathbb{R}^n
$ X $	cardinalidad del conjunto X
\vec{ab}	el rayo con origen en a que pasa por b
$[a, b]$	el segmento de vértices a y b
$\ ab\ $	longitud del segmento $[a, b]$
\overline{ab}	longitud del segmento $[a, b]$

Introducción

En las artes las sombras obsequian contraste y énfasis, para la poesía las sombras denotan presencia de maldad y en la psicología tienen un impacto que se refleja en la depresión. Pueden causar depresión en personas que sufren desorden depresivo estacional, miedo en personas que padecen nictofobia y confort en ligófilos.

La sombra que produce un objeto es de gran interés en algunos campos, tales como la tomografía geométrica y la computación. La sombra de un objeto sobre una región resulta del hecho de que el mismo objeto obstaculiza los rayos de luz provenientes de alguna fuente. Se pueden formular algunas preguntas relacionadas a las sombras tales como: ¿cuál es su forma? ¿qué longitud tiene su perímetro? ¿qué cantidad de área encierra?, entre otras. Claro está que muchas de las características que poseen las sombras están en función de la forma del objeto y de la localización de la fuente de luz.

En este sentido podemos permitirnos pensar en la fuente de luz como un transmisor de datos, los cuales deben llegar a un receptor ubicado en alguna región; sin embargo la trayectoria que deben seguir los datos tiene un inconveniente, en la trayectoria

existe un objeto fijo que dificulta la transmisión de datos desde la fuente hasta dicha región. Entonces la pregunta obligada es ¿dónde colocar el transmisor para que el objeto interfiera la transmisión lo menos posible?

En el presente trabajo buscamos condiciones para optimizar algunos aspectos geométricos, en primera instancia minimizar áreas de sombras y posteriormente atacamos problemas laterales a la optimización de sombras.

En general, los problemas que estudiamos están íntimamente ligados a la proyección central de un cuerpo, la cual es una clase de proyección que se encuentra en pocas ocasiones en la literatura, a diferencia de otro tipo de proyecciones tales como la proyección ortogonal o la estereográfica.

En el capítulo 1 presentamos las herramientas y conceptos básicos que son necesarios definir desde el inicio. Primero enunciamos los conceptos de convexidad, ya que estos son primordiales debido a que los objetos de nuestro interés son en su mayoría convexos. Enseguida definimos y mencionamos propiedades de las *Transformaciones afines*, las cuales sirven como una herramienta de mucha utilidad para simplificar la búsqueda de extremos. Seguimos con el *Teorema de John*, el cual nos será de gran utilidad al final del capítulo 2 y por último mencionamos un par de construcciones interesantes *El cuerpo de flotación* y una variante del mismo, *el cuerpo de iluminación*.

En el capítulo 2, *Sombras de Área Mínima*, en principio se define el problema central de la tesis y se desarrolla de tal manera que se van resolviendo casos análogos al problema central, que si bien presentan algunas restricciones extras o variantes, no podríamos decir que su solución es trivial. Los casos que se resuelven por sí mismos pueden ser de utilidad en algunas aplicaciones y soluciones de casos más difíciles.

Finalmente, en *Algunos Mínimos Geométricos*, discutimos la generalización de un problema clásico de optimización geométrica, para posteriormente ver una serie de problemas en los que se hace énfasis en su relación con el problema de optimización

de sombras.

Esperamos que la presente tesis contenga alguna aportación que sirva de referencia para futuros trabajos de quienes estén interesados en el tema.

Capítulo 1

Conceptos y Herramientas Básicas

Iniciamos nuestro trabajo recordando algunos de los conceptos básicos en convexidad que se mencionarán frecuentemente. Estos conceptos nos serán útiles para familiarizarnos con la notación y más adelante poder definir formalmente nuestro problema. Así mismo, enseguida a la definición de conceptos desarrollamos una serie de herramientas que serán aplicadas en los capítulos subsecuentes. En el capítulo no son dadas las demostraciones de los teoremas tratados ya que el objetivo es la aplicación y no el estudio de los mismos.

1.1. Conceptos Básicos

Definición 1.1.1. Sea K un conjunto en \mathbb{R}^n . Decimos que K es un **conjunto convexo** si para cualesquiera dos puntos $x, y \in K$, el segmento $[x, y]$ también está contenido en K . Es decir, K es convexo, si

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in K \quad \forall x, y \in K, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Además, K es **estrictamente convexo**, si es cerrado y

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in \text{int } K \quad \forall x, y \in K, x \neq y, 0 < \lambda < 1.$$

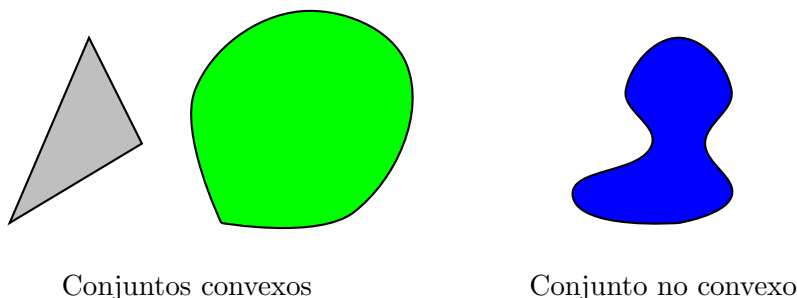


Figura 1.1.

Algunos ejemplos de conjuntos convexos son: polígonos regulares, la esfera sólida y los elipsoides. A la definición de conjunto convexo se le puede agregar un par de propiedades y definir ahora lo que es un cuerpo convexo de la siguiente forma.

Definición 1.1.2. Decimos que un conjunto convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ es un **cuerpo convexo** si es compacto y con interior no vacío.

Es importante prestar atención a la condición de interior no vacío, por ejemplo un segmento **no** es un cuerpo convexo en \mathbb{R}^2 , es cerrado, acotado pero de interior vacío, en cambio en \mathbb{R} es de interior no vacío y por tanto un segmento sí es un cuerpo convexo en \mathbb{R} . Los conjuntos y cuerpos convexos son los objetos de estudio más importantes dentro de la geometría convexa. Para el análisis de estos mismos vamos a enunciar

algunas de las definiciones clásicas relativas a ellos.

Definición 1.1.3. La **envolvente afín** de un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$, $\text{aff}(K)$, es el conjunto de todas las combinaciones afines de puntos de K , esto es,

$$\text{aff}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i : x_i \in K, \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, r = 1, 2, \dots \right\}$$

En otras palabras, la envolvente afín de un conjunto K es el trasladado de un subespacio lineal. Además, la dimensión de K , $\dim K$, es la dimensión de tal subespacio.

Definición 1.1.4. Sea K un conjunto en \mathbb{R}^n . La **envolvente convexa** de K , $\text{conv}(K)$, es la intersección de todos los conjuntos convexos en \mathbb{R}^n los cuales contienen a K .

Entendido de una manera sencilla podemos pensar a la envolvente convexa de un conjunto dado como el convexo más pequeño que contiene al conjunto. Ahora bien dos conjuntos importantes ligados entre sí son el hiperplano soporte y la línea soporte.

Definición 1.1.5. Un hiperplano H es **soporte** del conjunto convexo K si $H \cap K \neq \emptyset$ y K está contenido en uno de los semiespacios cerrados delimitados por H .

Definición 1.1.6. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. L es **línea soporte** de K si $L \cap K \neq \emptyset$ y $L \subset H$ un hiperplano soporte de K . Nos referimos a $L \cap K$ como conjunto de soporte.

Definición 1.1.7. Sea $K \in \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Decimos que un punto p en la frontera de K es regular si por p pasa un único hiperplano soporte.

Una clase particular de conjuntos extensamente estudiados son los conjuntos centralmente simétricos, los cuales se definen como sigue.

Definición 1.1.8. Diremos que K es **centralmente simétrico** si existe $p \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$x \in K \Leftrightarrow 2p - x \in K, \forall x \in K$$

y llamaremos a p centro de simetría.

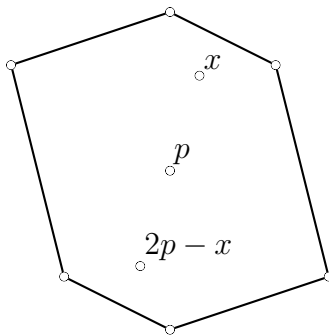


Figura 1.2 Conjunto centralmente simétrico

Definición 1.1.9. Dado un conjunto $A \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, diremos que un punto $p \in \mathbb{R}^n$ pertenece al conjunto λA si existe $x \in A$ tal que $p = \lambda x$.

1.2. Simetrización de Steiner

En esta sección definiremos una transformación la cual, a través de la historia, ha resultado ser muy útil en la demostración de muchos problemas de Geometría. Hablamos de la *Simetrización de Steiner*. También enunciaremos algunas de sus propiedades que más tarde serán de utilidad.

Sea K un conjunto convexo compacto en el plano y L una línea. La *Simetrización de Steiner* de K con respecto a L , $St_L(K)$, se define (de manera informal) como sigue:

Para cada punto $p \in K$ sea ℓ_p la línea perpendicular a L la cual pasa por p . Traslade-mos la cuerda $\ell_p \cap K$ sobre la línea ℓ_p hasta que su punto medio quede sobre L . La unión de todas las cuerdas trasladadas es la *Simetrización de Steiner* de K ($St_L(K)$) con respecto a L .

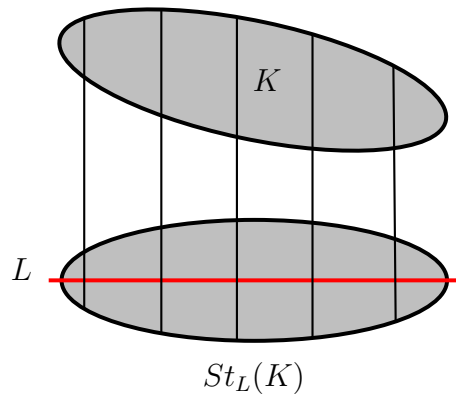


Figura 1.3 Simetrización de Steiner.

Algunas propiedades de la Simetrización de Steiner de un conjunto convexo K , con respecto a una línea L son:

- (a) La Simetrización de Steiner de un conjunto compacto convexo K , $St_L(K)$, es un conjunto convexo.
- (b) El área de $St_L(K)$ es igual al área de K .

1.3. Transformaciones Afines

Definición 1.4.1. Una transformación afín T , entre dos espacios consiste de una transformación lineal no singular seguida de una traslación, i.e., $x \mapsto Ax + b$, $\det(A) \neq 0$.

Algunas de las propiedades de transformaciones afines son las siguientes:

- (a) Si $A \subset B$ entonces $T(A) \subset T(B)$. Se preserva la contención.
- (b) El conjunto H es un plano si y sólo si $T(H)$ es un plano.

- (c) Los planos H y H' son paralelos si y sólo si $T(H)$ y $T(H')$ son paralelos.
- (d) K y K' son conjuntos homotéticos con razón de homotecia r si y sólo si $T(K)$ y $T(K')$ son homotéticos con razón de homotecia r . Transformaciones afines preservan razones de homotecia.
- (e) Si P y Q son conjuntos n -dimensionales, entonces

$$\text{vol}_n(P)/\text{vol}_n(Q) = \text{vol}_n(T(P))/\text{vol}_n(T(Q)),$$

i.e., transformaciones afines preservan razones entre volumen n -dimensional.

- (f) Si P es un conjunto n -dimensional y A la matriz asociada a la transformación afín T , entonces $\text{vol}_n(T(P)) = \det(A)\text{vol}_n(P)$.

Un objeto frecuentemente estudiado en la geometría convexa es el *Elipsoide*. Muchos problemas de extremos de naturaleza afín tienen a los elipsoides como cuerpos extremos y esto ha motivado líneas de investigación. Su relación con las transformaciones afines es que el elipsoide es la imagen de la bola unitaria cerrada mediante una transformación afín.

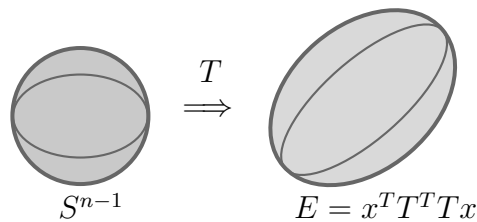


Figura 1.4

1.4. Teorema de John

El elipsoide de John tiene un gran número de aplicaciones en análisis de datos, diseño estadístico, geometría, problemas duales, optimización y en muchas más áreas.

Aquí veremos como se define y más adelante le daremos una aplicación.

El elipsoide de volumen máximo contenido en un cuerpo convexo K , es conocido como el elipsoide de John en honor al matemático Fritz John.

Teorema 1.5.1. (John) *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Entonces existe un único elipsoide J_K (el cual es llamado elipsoide de John) tal que si c es el centro de J_K se cumple la siguiente inclusión*

$$J_K \subseteq K \subseteq c + n(J_K - c).$$

Cuando K es simétrico respecto al origen el factor de dilatación en el teorema de John puede ser mejorado, además los dos elipsoides son concéntricos.

Teorema 1.5.2. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo centralmente simétrico respecto al origen. Entonces existe un único elipsoide J_K también centralmente simétrico respecto al origen tal que,*

$$J_K \subseteq K \subseteq \sqrt{n}J_K.$$

1.5. Cuerpo de Flotación y Cuerpo de Iluminación

A continuación definimos dos conjuntos importantes en el estudio de la geometría convexa, el análisis convexo y otras áreas: el *cuerpo de flotación* y el *cuerpo de iluminación*. El primero de estos definido a partir del problema 19 del célebre *Libro Escocés*.

Sea K un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n . El *cuerpo de flotación* K_δ de K es la intersección de todos los semiespacios quienes están definidos por hiperplanos que cortan un conjunto de volumen δ del conjunto K . Sea A el conjunto de todos los (ξ, t) , $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, tal que $vol_n\{X \in K : \langle X, \xi \rangle \geq t\} = \delta$. Entonces tenemos que

$$K_\delta = \bigcap_{(\xi, t) \in A} \{X \in \mathbb{R}^n : \langle X, \xi \rangle \leq t\}$$

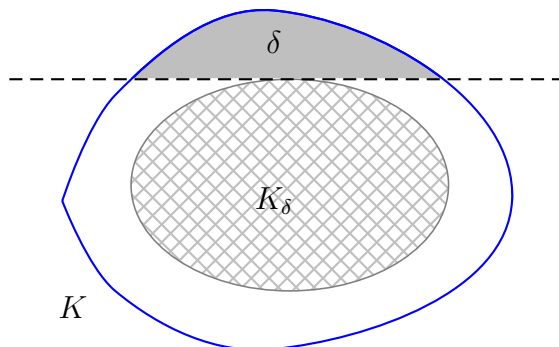


Figura 1.5 Cuerpo de flotación.

Tenemos por ejemplo, que dado un disco K y un número δ menor que la mitad del área de K , el cuerpo K_δ es de nuevo un disco.

A partir del cuerpo de flotación, en abstracto, se definió el cuerpo de iluminación. Sea K un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n y δ un número real positivo dado. Entonces el *cuerpo de iluminación* se define como

$$K^\delta = \{X \in \mathbb{R}^n \setminus K : \text{vol}_n(\text{conv}(X \cup K)) - \text{vol}_n(K) \leq \delta\}$$

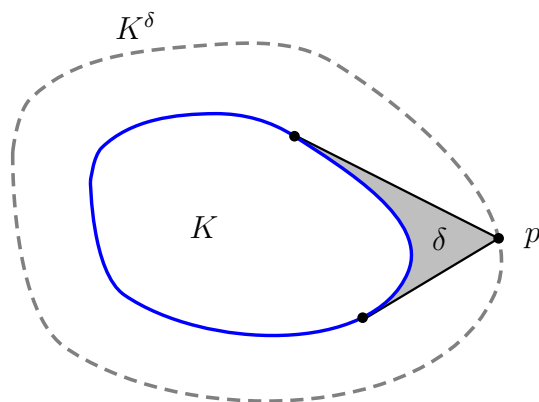


Figura 1.6 Cuerpo de iluminación

El cuerpo de iluminación y de flotación se pueden interpretar como que uno es *dual* del otro, no precisamente bajo la definición de dualidad si no más bien como que el área del cuerpo de flotación es producto de la *intersección* de un conjunto de semiespacios y el área del cuerpo de iluminación es la *unión* de un conjunto de envolventes convexas.

Como ejemplo, consideremos un cuadrado de lado 1 y $\delta = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Es fácil ver que en este caso el cuerpo de iluminación K^δ es un octágono regular de lado igual a 1.

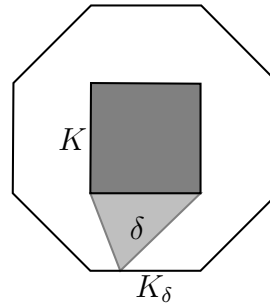


Figura 1.7 Cuerpo de iluminación de un cuadrado.

Una variante en el plano para el cuerpo de iluminación es la curva obtenida mediante *La Construcción del Jardinero*. Dado el conjunto convexo cerrado $K \subset \mathbb{R}^2$, denotemos por $P(K)$ al perímetro de K , entonces para un $t \in \mathbb{R}^+$ fijo, definimos el conjunto $CJ(K, t) = \{X \in \mathbb{R}^2 : P(\text{conv}(K \cup X)) = t\}$.

El conjunto $CJ(K, t)$ se puede ver como una función continua de t (ver [14]), $F(t)$, la cual al variar su parámetro resulta en curvas de nivel. Se puede demostrar que $F(t)$ es una función convexa y por tanto $CJ(K, t)$ es una curva convexa.

En matemáticas, un billar consiste de un dominio (en el plano, una mesa de billar), y un punto contenido en la masa (una bola de billar) que se mueve dentro del dominio libremente. Esto significa que se mueve a lo largo de líneas rectas con velocidad constante y golpea la frontera. La reflexión en la frontera cumple la conocida propiedad: *el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión*.

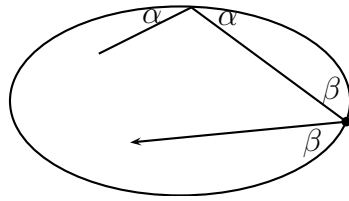


Figura 1.8 Billar convexo.

En relación a un billar, una cáustica es una curva contenida en una mesa de billar tal que si un segmento de una trayectoria del billar es tangente a dicha curva, entonces también lo es el segmento reflejado.

Resulta interesante señalar que dado un conjunto convexo cerrado K en el plano y un número real positivo t fijo, entonces $\text{conv}(CJ(K, t))$ es una mesa de billar y $\text{bd}K$ es una cáustica de ésta.

Capítulo 2

Sombras de Área Mínima

En este capítulo definiremos formalmente el problema central de esta tesis y posteriormente solucionaremos algunos casos especiales de éste. La manera en que se desarrolla el capítulo es a través de problemas análogos y más sencillos al problema general hasta llegar a ejemplos más complicados.

2.1. Definición del Problema

Supongamos que tenemos una habitación en la cual se encuentra un objeto suspendido entre el piso y el techo. Queremos colocar un foco en el techo pero de manera que la región iluminada en el piso sea la mayor posible. ¿Dónde debemos colocar el foco?

La manera de abordar el problema es agregando algunas condiciones adicionales sobre

la forma de los objetos de los cuales deseamos minimizar su sombra.

Definición 2.1.1. *Dados un plano H , un punto X y un cuerpo $K \subset \mathbb{R}^3$, definimos la **sombra** de K sobre el plano H respecto al punto X , $S_X(K, H)$, como*

$$S_X(K, H) = \{ Z \in H : [Z, X] \cap K \neq \emptyset \}$$

Con la definición anterior podemos enunciar nuestro problema.

Problema 1. *Dado un cuerpo convexo K , contenido en la región delimitada por dos planos paralelos H y H' , encontrar los puntos $X \in H'$ para los cuales se minimiza el área de $S_X(K, H)$.*

2.2. Problema Análogo en el Plano

Para iniciar pensemos en el mismo problema en una dimensión menor. Están dadas dos rectas paralelas l_1, l_2 y un cuerpo convexo K contenido en la región delimitada por ellas. Caracterizar los puntos $X \in l_1$ que minimizan la proyección central de K sobre l_2 con centro en X . La solución está dada por el siguiente lema.

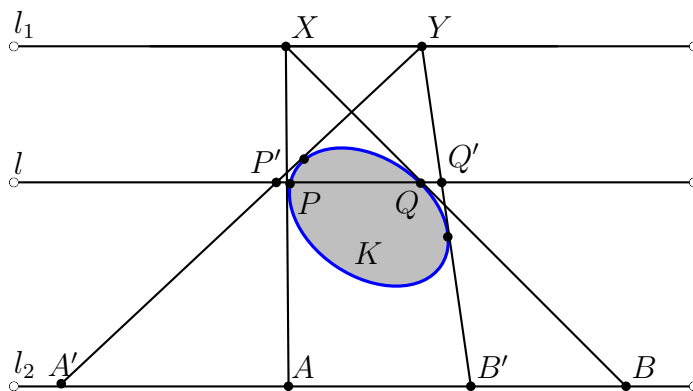


Figura 2.1

Lema 2.2.1. *Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo convexo, $X \in l_1$ y P, Q los puntos de contacto de las líneas soporte de K a través de X los cuales están más cercanos a X . Si el segmento PQ es paralelo a l_1 , entonces la proyección de K sobre l_2 , con centro en X , es de longitud mínima.*

Demostración. Sea $X \in l_1$ un punto tal que los puntos de contacto de las líneas soporte de K a través de X , más cercanos a X , pertenecen a un segmento paralelo a l_1 . Por un argumento estándar de continuidad, se puede demostrar que este punto siempre existe. Sean A y B los puntos de intersección de las prolongaciones de $[X, P]$ y $[X, Q]$ con l_2 , respectivamente. Consideremos un punto $Y \in l_1$, distinto de X . Las líneas soporte de K por Y intersectan a la prolongación de $[P, Q]$ en P' y Q' , y a l_2 en A' y B' , respectivamente. De la convexidad de K se cumple que $[P, Q] \subset [P', Q']$.

Haciendo uso de geometría elemental podemos ver que

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}},$$

y como $\overline{PQ} \leq \overline{P'Q'}$ se sigue que $\overline{AB} \leq \overline{A'B'}$. ■

2.3. Problema Restringido a Objetos Planos

Supongamos que el objeto considerado en el Problema 1 es un objeto plano. Es fácil ver que la solución a este problema es trivial. Consideremos los siguientes casos.

- (a) Supongamos que $\text{aff}(K)$ no es paralela a H' . Sea $X \in H' \cap \text{aff}(K)$. Dado que la proyección de K sobre H' es un segmento, tenemos que el mínimo es $\text{vol}_2(S_X(K, H)) = 0$.
- (b) Supongamos que $\text{aff}(K)$ es paralela a H' . Sean X y Y puntos arbitrarios en H' . Tenemos que $S_X(K, H)$ y $S_Y(K, H)$ son figuras homotéticas a K con la misma

razón de homotecia; por tanto $vol_2(S_X(K, H)) = vol_2(S_Y(K, H))$. De aquí se sigue que $vol_2(S_X(K, H))$ es constante $\forall X \in H'$.

Sin embargo, podría suceder que en nuestro problema real la línea $\text{aff}(K) \cap H'$ esté fuera de nuestro alcance. Tal sería el caso si tuviésemos un objeto plano suspendido en una habitación y cuya posición está muy cerca de ser paralela al piso y al techo, y de manera que la región donde se puede colocar el foco es una región muy reducida del techo. Sabemos que para obtener la sombra mínima sobre el piso, el foco debería ser colocado fuera de la habitación. De manera natural tenemos entonces una restricción a una región del techo. Es por esto que formulamos el siguiente problema.

Problema 2. *Sea $\mathcal{R} \subset H'$ una región conexa tal que $\mathcal{R} \cap \text{aff}(K) = \emptyset$. Determinar él o los puntos $X \in \mathcal{R}$ para los cuales se obtiene un mínimo del área de $S_X(K, H)$, restringidos a \mathcal{R} .*

Para resolver este problema necesitaremos probar antes los siguientes lemas.

Lema 2.3.1 *Sean l_1 y l_2 dos rectas paralelas en el plano, $[A, B]$ un segmento no paralelo a l_1 suspendido entre ellas y sea $P = \text{aff}(A, B) \cap l_1$. Sean $X, Y \in l_1$, dos puntos distintos de P . Las rectas XA y XB intersectan a l_2 en A_X y B_X , respectivamente, y las rectas YA y YB intersectan a l_2 en A_Y y B_Y , respectivamente. Si $\overline{PX} \leq \overline{PY}$ entonces $\overline{A_X B_X} \leq \overline{A_Y B_Y}$*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que la distancia de B a l_1 es menor que la distancia de A a l_1 . Tenemos que

$$\frac{\overline{B_X B_Y}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{BB_Y}}{\overline{YB}}, \quad \frac{\overline{A_X A_Y}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{AA_Y}}{\overline{YA}}.$$

Además,

$$\frac{\overline{AA_Y}}{\overline{YA}} \leq \frac{\overline{BB_Y}}{\overline{YB}},$$

lo cual implica que

$$\overline{A_X A_Y} \leq \overline{B_X B_Y}.$$

Se sigue que

$$\overline{A_X B_X} = \overline{A_X A_Y} + \overline{A_Y B_X} \leq \overline{B_X B_Y} + \overline{A_Y B_X} = \overline{A_Y B_Y}.$$

■

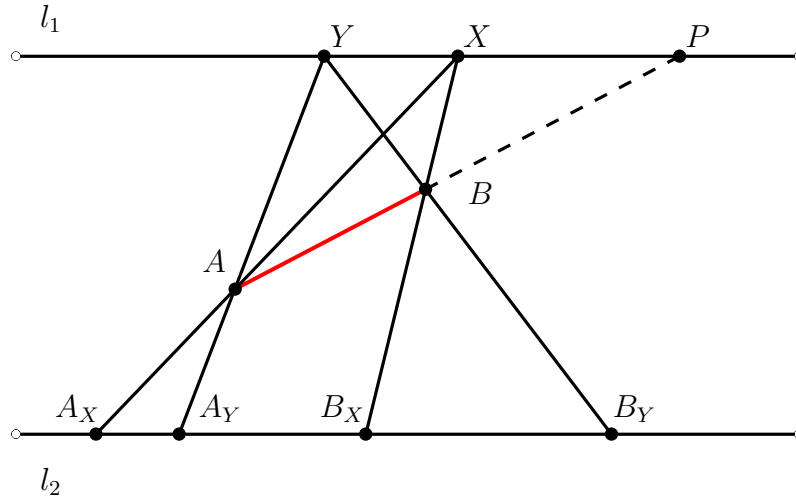


Figura 2.2

Observación 1. De lo anterior también tenemos que si $[A, B]$ es paralelo a l_1 entonces la longitud de la proyección es constante para todos los puntos de l_1 .

Lema 2.3.2 Sean K un conjunto convexo de dimensión 2 suspendido entre los planos H y H' , y $l' = \text{aff}(K) \cap H'$. Sea l una línea paralela a l' , entonces se cumple que el área de $S_X(K, H)$ es constante para toda $X \in l$.

Demostración. Consideremos el conjunto \mathcal{C} , el cual consiste de todas las cuerdas de K paralelas a l' . Sea $[A, B] \in \mathcal{C}$ una cuerda arbitraria y sea π el plano a través de $[A, B]$ y l . Sabemos que π interseca a H en una tercera recta paralela a $[A, B]$ y a l . Sean $X, Y \in l$ dos puntos distintos. De acuerdo a la Observación 1 tenemos que la longitud de $S_X([A, B], H)$ es igual a la longitud de $S_Y([A, B], H)$. Lo mismo sucede para todas las cuerdas de K paralelas a l' , se sigue entonces que $\text{St}_L(S_X(K, H)) = \text{St}_L(S_Y(K, H))$, donde $L \subset H$ es una línea ortogonal a l' . Por la propiedad (b) de la Simetrización de Steiner se sigue que $\text{vol}_2(S_X(K, H)) = \text{vol}_2(S_Y(K, H))$, es decir, $\text{vol}_2(S_Z(K, H))$ es constante para toda $Z \in l$. ■

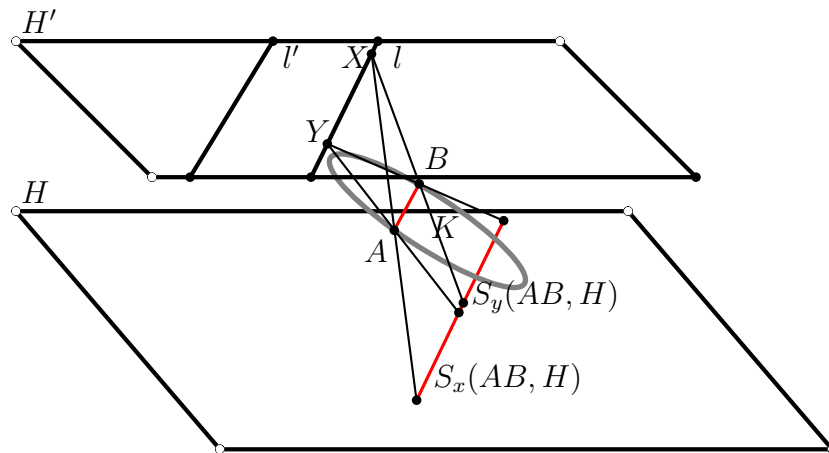


Figura 2.3

Con estos dos lemas podemos dar respuesta al Problema 2.

Teorema 2.3.1 Sean H y H' dos planos paralelos en \mathbb{R}^3 , y sea K un conjunto convexo 2-dimensional contenido en el interior de la región acotada por H y H' . Supongamos que $\text{aff}(K)$ no es paralela a H y denotemos por l' la intersección de H' y $\text{aff}(K)$. Sea $\mathcal{R} \subset H$ una región cerrada conexas y l la línea soporte de $\text{conv}(\mathcal{R})$ paralela a l' , la cual separa a \mathcal{R} de l' . Entonces los puntos que minimizan el área de la sombra, restringidos a \mathcal{R} , están en l .

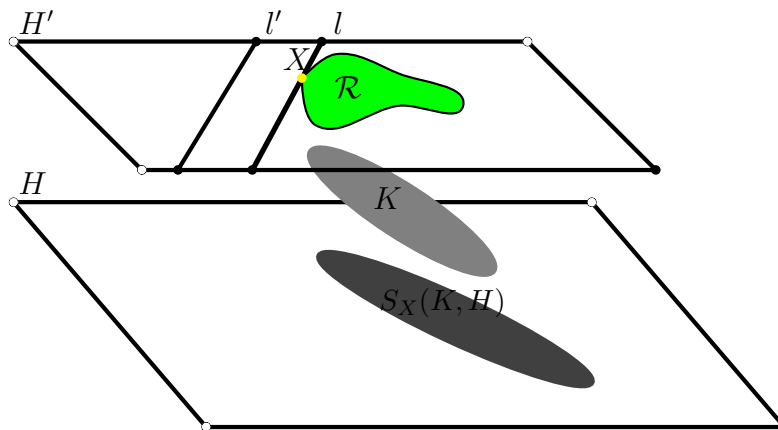


Figura 2.4

Demostración. Sean l_1 y l_2 dos rectas paralelas a l' . Supongamos que la distancia de l_2 a l' es mayor que la distancia de l_1 a l' . Probaremos que si $X_1 \in l_1$ y $X_2 \in l_2$, entonces $\text{vol}_2(S_{X_1}(K, H)) < \text{vol}_2(S_{X_2}(K, H))$. De esto se sigue la conclusión del teorema.

Sea C_{x_i} , $i = 1, 2$, el conjunto de cuerdas de $S_{X_i}(K, H)$ paralelas al segmento $[X_1, X_2]$. Sea $[A, B] \subset K$ una cuerda paralela a $[X_1, X_2]$. Del Lema 2.3.1 tenemos que la longitud de $S_{X_1}([A, B], H)$ es menor que la longitud de $S_{X_2}([A, B], H)$. Así, a cada cuerda $[A, B] \subset K$ le asociamos cuerdas $S_{X_i}([A, B], H) \in C_{x_i}$ tales que la longitud de $S_{X_1}([A, B], H)$ es menor que la longitud de $S_{X_2}([A, B], H)$. De nuevo aplicamos la transformación de Steiner con respecto a una recta $L \subset H$ ortogonal al segmento $[X_1, X_2]$ y obtenemos que $\text{St}_L(S_{X_1}(K, H)) \subset \text{St}_L(S_{X_2}(K, H))$, lo que implica que $\text{vol}_2(\text{St}_L(S_{X_1}(K, H))) < \text{vol}_2(\text{St}_L(S_{X_2}(K, H)))$. De aquí se sigue que $\text{vol}_2(S_{X_1}(K, H)) < \text{vol}_2(S_{X_2}(K, H))$.

Finalmente, si nos restringimos a la región \mathcal{R} tenemos que los puntos que generan la sombra de menor área son los que están sobre la línea l , soporte de $\text{conv}(\mathcal{R})$, la cual es paralela a l' y la cual separa a \mathcal{R} de l' . ■

Observación 2. Como resultado del teorema anterior, podemos decir aún más. Los puntos en \mathcal{R} que maximizan el área de la sombra de K son aquéllos que están en la línea soporte a \mathcal{R} paralela a l' , tal que \mathcal{R} está contenida en la banda paralela acotada por l y l' .

2.4. Solución del Problema para Elipsoides

Ya habiendo resuelto el problema para objetos planos, ahora seguimos a la solución del problema para un cuerpo convexo muy conocido, el elipsoide.

Problema 1'. Dado el elipsoide E , contenido en la región delimitada por dos planos paralelos H y H' , encontrar los puntos $X \in H'$ para los cuales se minimiza el área de

$S_X(E, H)$.

Algunos de los resultados en el plano se pueden extender al espacio Euclideo tridimensional. Con este fin tenemos la siguiente definición.

Definición 2.4.1 Definimos la **Penumbra** de K respecto al punto X , $P_X(K)$, como la unión de los conjuntos de contacto de todas las líneas soporte de K que pasan por X .

Definiendo $P_X(K)$ de manera natural se extiende el Lema 2.2.1 a \mathbb{R}^3 como sigue.

Lema 2.4.1 Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo convexo con frontera suave, si para algún $X \in H'$, $P_X(K)$ está contenida en un plano paralelo a H' , entonces el área de $S_X(K, H)$ es mínima.

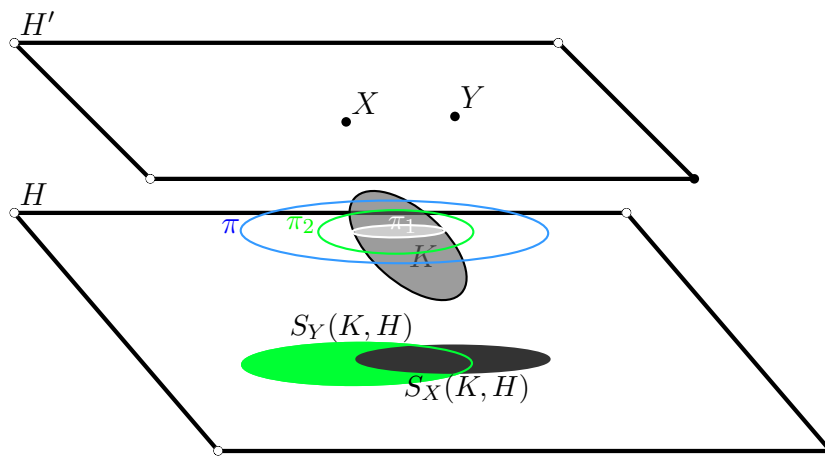


Figura 2.5

Demostración. Supongamos que existe un punto $X \in H'$ tal que $P_X(K)$ está contenida en un plano π paralelo a H' . Sea π_1 la región en el plano π que tiene como frontera a $P_X(K)$. Sea $Y \in H'$ un punto distinto de X . Las líneas soporte de K a través Y intersecta a π en una curva cerrada que encierra la región π_2 . Dada la convexidad de K tenemos que $\pi_1 \subseteq \pi_2$. Por otro lado, π es un plano paralelo a H , entonces tenemos que $S_Y(K, H)$ es una figura homotética a π_2 , y $S_X(K, H)$ homotética a π_1 , ambas con la

misma razón de homotecia. Entonces se sigue que $vol_2(S_X(K, H)) < vol_2(S_Y(K, H))$.

■

Observación 3. El lema 2.4.1 nos proporciona una condición geométrica suficiente para encontrar el mínimo valor para el área de la sombra. Sin embargo no siempre podemos asegurar que para todo cuerpo K existe $X \in H'$ que tenga asociada una penumbra contenida en un plano paralelo a H' .

De la simetría que poseen los sólidos de revolución convexos con eje perpendicular a H' no es difícil ver que poseen una penumbra plana y paralela a los planos cuando X es elegido como la intersección de H' y el eje de simetría. En particular la esfera tiene una sombra de área mínima cuando se elige X como el punto de intersección del plano H' con la línea perpendicular a H' que pasa por el centro de la esfera.

Entonces la solución al Problema 1' viene dada en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.1. Sean $E \subset \mathbb{R}^3$ un elipsoide contenido en la región delimitada por los planos H y H' , T la transformación afín tal que $T(E) = \mathbb{S}^2$, L la recta ortogonal a $T(H')$ que pasa por el centro de \mathbb{S}^2 y $Z = T(H') \cap L$. Entonces tenemos que $W = T^{-1}(Z)$ es el punto para el cual el área de $S_W(E, H)$ es mínima.

Demostración. Tenemos que Z es el punto en $T(H')$ para el cual se minimiza el área de la sombra de \mathbb{S}^2 . La penumbra asociada a Z está contenida en un plano π paralelo a $T(H')$. Ahora bien, la penumbra asociada a $T^{-1}(Z)$ está contenida en $T^{-1}(\pi)$. Como resultado de la propiedad c) en la sección 1.2 tenemos que H' y $T^{-1}(\pi)$ también son planos paralelos. El lema 2.4.1 implica que la sombra $S_W(E, H)$ alcanza su área mínima en $W = T^{-1}(Z)$. ■

Para ser precisos, dados H' y la transformación T^{-1} es posible calcular $T^{-1}(Z)$ de la siguiente manera.

Sin pérdida de generalidad supongamos que E tiene su centro en el origen, entonces

existe una matriz A tal que $T(x) = Ax$.

Supongamos que H' tiene la forma $w_0x' + w_1y' + w_2z' + w_3 = 0$; que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{y que}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

sustituimos (x', y', z') por (x, y, z)

$$\Rightarrow T(H') = \left(\sum_{i=0}^2 w_i a_i\right)x + \left(\sum_{i=0}^2 w_i b_i\right)y + \left(\sum_{i=0}^2 w_i c_i\right)z + w_3 = 0$$

El vector normal a H' que pasa por el centro de S^2 es $N = \left(\sum_{i=0}^2 w_i a_i, \sum_{i=0}^2 w_i b_i, \sum_{i=0}^2 w_i c_i\right)$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } Z = \lambda N \in H$$

$$\Rightarrow \lambda = -w_3 / \left[\left(\sum_{i=0}^2 w_i a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^2 w_i b_i\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^2 w_i c_i\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow W = \lambda \begin{pmatrix} a_0 \sum_{i=0}^2 w_i a_i + b_0 \sum_{i=0}^2 w_i b_i + c_0 \sum_{i=0}^2 w_i c_i \\ a_1 \sum_{i=0}^2 w_i a_i + b_1 \sum_{i=0}^2 w_i b_i + c_1 \sum_{i=0}^2 w_i c_i \\ a_2 \sum_{i=0}^2 w_i a_i + b_2 \sum_{i=0}^2 w_i b_i + c_2 \sum_{i=0}^2 w_i c_i \end{pmatrix}$$

2.5. Aproximación al Punto Óptimo

Es un tanto más complicado ofrecer una solución explícita al problema general. Debido a ello, mediante el *Teorema de John*, acotaremos una región en el plano H' donde están localizados los puntos que minimizan la sombra bajo la restricción de que el cuerpo convexo K en cuestión sea centralmente simétrico.

Para lograr acotar la región de nuestro interés primero estudiaremos cuál es la naturaleza de la sombra que genera la esfera.

Sea \mathbb{S}^2 la esfera unitaria contenida en la región delimitada por los planos paralelos H y H' . Y sea Z la intersección de la línea perpendicular a H' que pasa por el centro de la esfera. Es fácil ver que para todo punto $X \in H'$, la sombra $S_X(\mathbb{S}^2, H)$ es la intersección de un cono circular con vértice en X y el plano H . Por otro lado, para el caso que manejamos es bien sabido que dicha intersección es una elipse. Entonces, una pregunta que nos interesa responder es: ¿cómo se comporta el área de la elipse $S_X(\mathbb{S}^2, H)$ a medida que X se aleja del punto Z ? Para responder a esto antes probaremos lo siguiente.

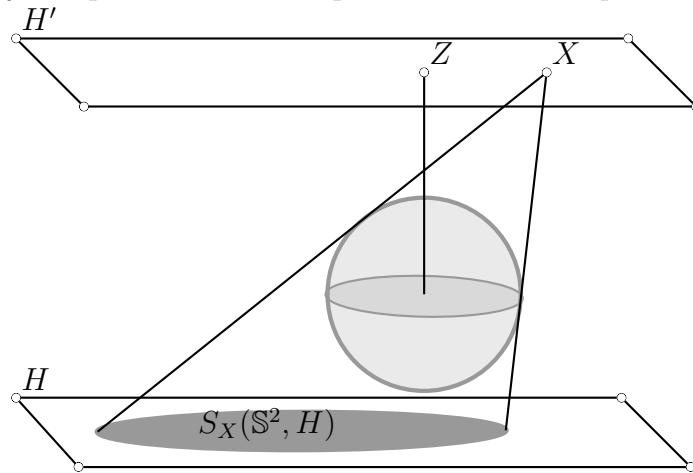


Figura 2.6

Lema 2.5.1. Sean H y H' planos paralelos tales que la esfera unitaria está contenida en la región delimitada por ellos. Sean Z la intersección de la línea perpendicular a

H' que pasa por el centro de la esfera, y X un punto en H' . Entonces la longitud del eje mayor de $S_X(\mathbb{S}^2, H)$ se puede calcular como $K_1\sqrt{ZX^2} - K_2$, donde K_1, K_2 son dos números reales fijos.

Demostración. Sea H_t el plano paralelo a H y tangente a \mathbb{S}^2 tal que la esfera está contenida en la región entre H' y H_t . Denotamos por A, B a los extremos del eje mayor de la elipse $S_X(\mathbb{S}^2, H_t)$. El área del triángulo $\triangle AXB$ se puede calcular de las siguientes dos maneras,

$$|\triangle AXB| = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = \frac{(\overline{AB} + d)}{2}$$

donde h es la distancia entre H' y H_t , y d es la longitud de la tangente a \mathbb{S}^2 desde X

$$\implies \overline{AB} = \frac{2d}{h-2}$$

Además tenemos que $d = \sqrt{ZX^2 + (h-1)^2 - 1}$

$$\implies \overline{AB} = \frac{2\sqrt{ZX^2 + (h-1)^2 - 1}}{h-2}$$

Dado que H_t y H son planos paralelos tenemos que $S_X(\mathbb{S}^2, H_t)$ y $S_X(\mathbb{S}^2, H)$ son homotéticas en alguna razón r . Entonces el eje mayor de $S_X(\mathbb{S}^2, H)$ se calcula como $\frac{2r\sqrt{ZX^2 + (h-1)^2 - 1}}{h-2}$. ■

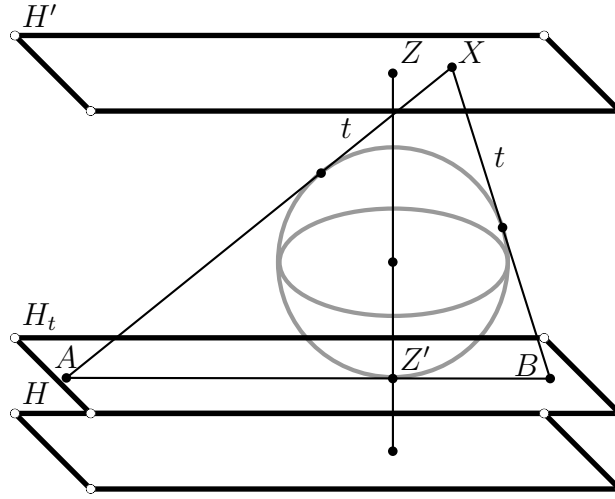


Figura 2.7

Con el último resultado podemos dar respuesta a la pregunta planteada al inicio en el siguiente lema.

Lema 2.5.2. Sean H y H' planos paralelos tales que la región delimitada por ellos contiene a \mathbb{S}^2 , Z la intersección de la línea perpendicular a H' que pasa por el centro de la esfera, X un punto en H' y $s = d(Z, X)$. Entonces el área de $S_X(\mathbb{S}^2, H)$ depende continuamente de s . Más aún, el área de $S_X(\mathbb{S}^2, H)$ crece a medida que s lo hace.

Demostración. Sea H_t un plano paralelo a H y tangente a \mathbb{S}^2 en Z' . H_t cumple que \mathbb{S}^2 está contenida entre los planos H' y H_t . Sea $X \in H'$ un punto arbitrario. Denotamos por l a la línea que pasa por X y Z . Consideremos a las dos líneas tangentes a \mathbb{S}^2 que pasan por X y que están contenidas en el plano que definen los segmentos $[Z, Z']$ y $[Z, X]$. Supongamos que una línea tangente interseca a la esfera en A y al plano H_t en C y la otra interseca a la esfera en B y al plano H_t en D . Claramente $[C, D]$ es el eje mayor de $S_X(\mathbb{S}^2, H_t)$. Es posible calcular el área de $S_X(\mathbb{S}^2, H_t)$ en función de \overline{AC} y \overline{BD} de la siguiente manera.

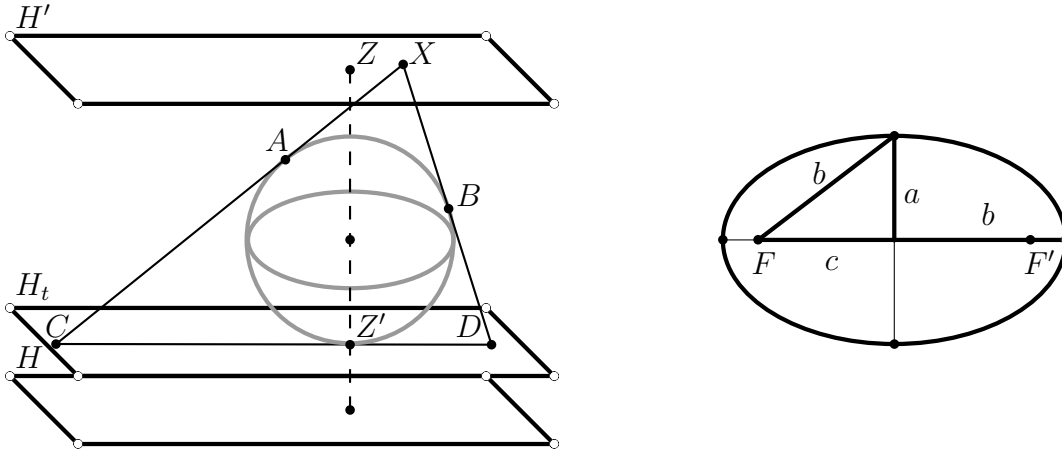


Figura 2.8

El plano definido por los segmentos $[Z, Z']$ y $[Z, X]$ intersecta a la esfera en un círculo máximo. Es fácil ver que los segmentos $[C, A]$ y $[C, Z']$ son tangentes al círculo. Lo que implica que $\overline{CA} = \overline{CZ'}$. Análogamente $\overline{DB} = \overline{DZ'}$. Entonces, $\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD}$. Por otro lado es conocido que los semiejes de la elipse están relacionados como $a^2 + c^2 = b^2$, donde a es el semieje menor, b el semiejes mayor y c es la distancia del centro a uno de los focos. Se puede demostrar que uno de los focos de $S_X(\mathbb{S}^2, H_t)$ es Z' [2]. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD}) - \overline{BD} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{BD}) \\ b &= \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD}) \\ \Rightarrow a &= \sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}. \end{aligned}$$

Se sigue que $vol_2(S_X(\mathbb{S}^2, H_t)) = \frac{\pi}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})\sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}$.

Dado que H y H_t son paralelos, $S_X(\mathbb{S}^2, H_t)$ y $S_X(\mathbb{S}^2, H)$ son homotéticas con alguna razón de homotecia r , entonces

$$vol_2(S_X(\mathbb{S}^2, H)) = \frac{r^2\pi}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})\sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}.$$

Consideremos los dos planos soportes a \mathbb{S}^2 que pasan por l . Los planos intersectan a H_t en un par de líneas paralelas l_1 y l_2 . De la simetría tenemos que la distancia entre dichas líneas paralelas es constante para toda línea $l \in H'$ que pase por Z . Además,

para todo punto $X \in l$, se cumple que el semieje menor de $S_X(\mathbb{S}^2, H_t)$ es igual a la distancia entre estas dos líneas paralelas. De tal modo que $\sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}$ es constante.

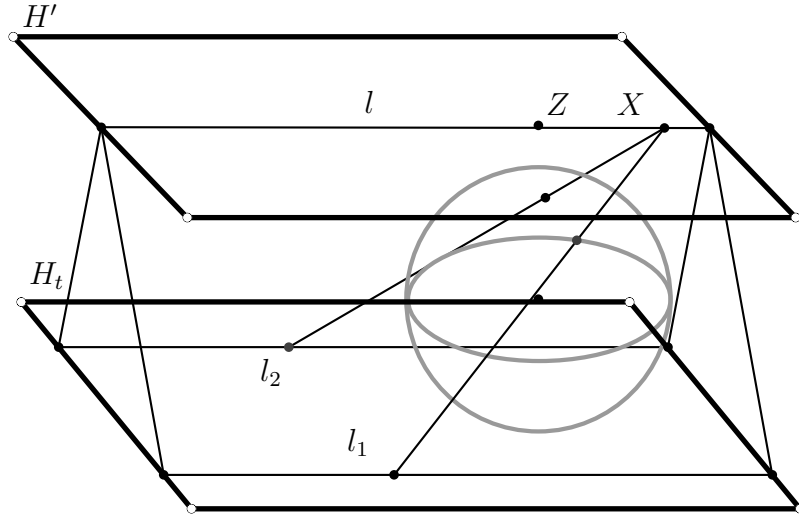


Figura 2.9

De aquí, la ecuación que calcula el área de $S_X(\mathbb{S}^2, H)$ únicamente depende de $(\overline{AC} + \overline{BD})$ es decir, sólo depende de la longitud del eje mayor. Del lema 2.5.1 se sigue que el área de $S_X(\mathbb{S}^2, H)$ depende continuamente de s y crece a medida que s lo hace. ■

Recordemos el planteamiento del problema:

Dado un cuerpo convexo K , contenido en la región delimitada por los planos paralelos H y H' , encontrar los puntos $X \in H'$ para los cuales se minimiza el área de $S_X(K, H)$.

Con el auxilio de los dos lemas anteriores tenemos la posibilidad de acotar la región en H' donde están contenidos los puntos de nuestro interés. Haciendo uso del Teorema de John obtenemos un panorama general como siguiente.

Dado un cuerpo $K \subset \mathbb{R}^3$ existe el elipsoide J_K tal que $J_K \subseteq K \subseteq c + \rho(J_K - c)$, $\rho \in [1, 3]$. Sin pérdida de generalidad supongamos que J_K está centrado en el origen. Si a lo planteado en el problema aplicamos la transformación afín T tal que $T(J_K) = \mathbb{S}^2$,

de las propiedades de transformaciones afines tenemos las siguientes afirmaciones,

- (i) $\mathbb{S}^2 \subseteq T(K) \subseteq T(c) + \rho(\mathbb{S}^2 - T(c))$ (Propiedad a)).
- (ii) \mathbb{S}^2 , $T(K)$ y $T(c) + \rho(\mathbb{S}^2 - T(c))$ son conjuntos contenidos en la región delimitada por los planos $T(H)$ y $T(H')$ (Propiedad a), b) y c)).
- (iii) Si A es la matriz asociada a T , entonces el área de $S_X(T(K), T(H'))$ es igual al área de $S_X(K, H')$ multiplicada por $\det(A)$ (Propiedad f)).
- (iv) $S_X(\mathbb{S}^2, T(H')) \subseteq S_X(T(K), T(H')) \subseteq S_X(T(c) + \rho(\mathbb{S}^2 - T(c)), T(H'))$ (Propiedad a) y d)).

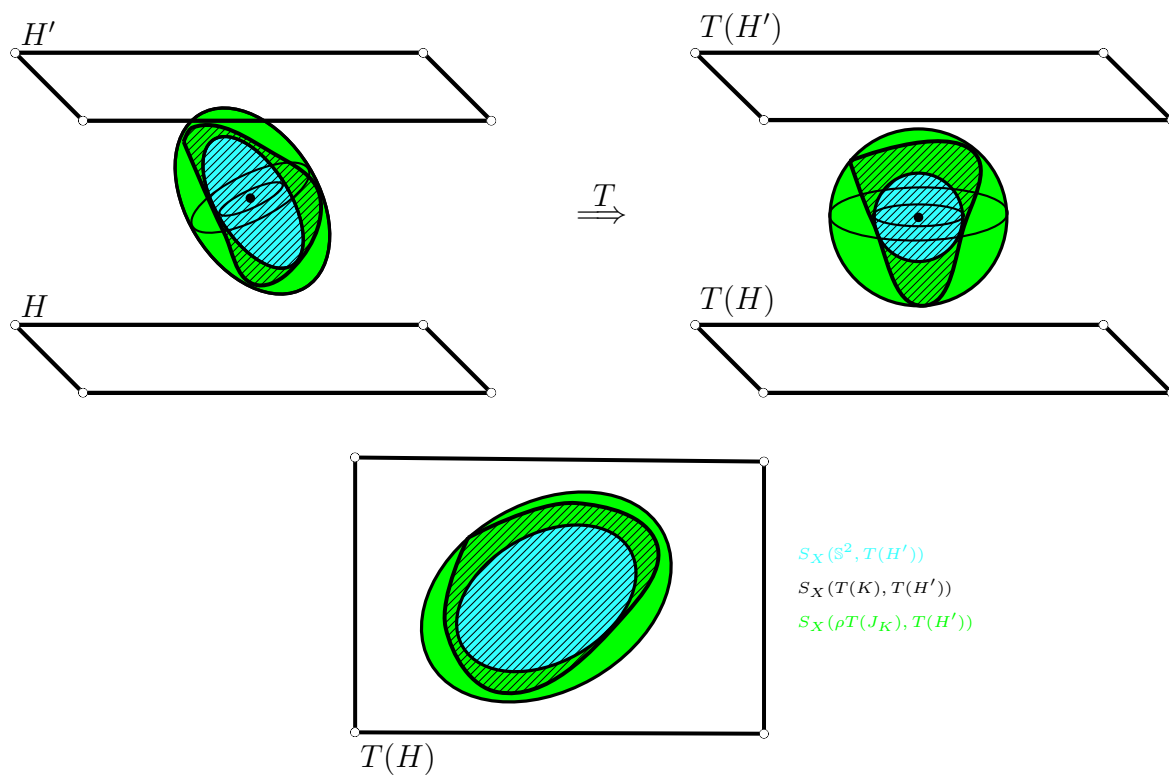


Figura 2.10

Para la aproximación definiremos algunos parámetros.

Definición 2.5.1. Definimos a h como la distancia entre los planos paralelos $T(H)$ y $T(H')$, y a h_s como la distancia de $T(H')$ a $\rho T(J_K)$.

Definición 2.5.2. Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo convexo, si T es la transformación afín tal que $T(J_K) = \mathbb{S}^2$ y Z es la intersección de la línea que pasa por el centro de $T(J_K)$ y perpendicular a $T(H')$, definimos $C[r]$ como el círculo contenido en $T(H')$ con centro en Z y radio r .

Así podemos enunciar el teorema aproximación para cuerpos convexos centralmente simétricos como sigue.

Teorema 2.5.3. Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo convexo centralmente simétrico, contenido en la región delimitada por los planos paralelos H y H' , $\rho \in [1, \sqrt{3}]$ el número mínimo tomado de tal forma que $J_K \subseteq K \subseteq \rho J_K$ y T la transformación afín tal que $T(J_K) = \mathbb{S}^2$, entonces los puntos que minimizan el área de $S_X(K, H')$ pertenecen a la región $T^{-1}(C[\frac{(\rho h)^2}{h_s}])$.

Demostración. Sea $X \in H'$, y sea A la matriz asociada a la transformación afín T . Tenemos que $vol_2(S_X(T(K), T(H'))) = \det(A) vol_2(S_X(K, H'))$. Entonces basta probar que todos los puntos que minimizan $vol_2(S_X(T(K), T(H')))$ están en $C[\frac{(\rho h)^2}{h_s}]$.

Sea $Z \in T(H')$ el punto tal que $[Z, O]$ es perpendicular a $T(H')$. Del lema 2.5.1 tenemos que $vol_2(S_X(T(J_K), T(H')))$ es una función continua y creciente de $s = d(Z, X)$. Entonces existe X_0 suficientemente alejado de Z tal que

$$vol_2(S_{X_0}(T(J_K), T(H'))) = vol_2(S_Z(\rho T(J_K), T(H'))).$$

Además $\forall X \in T(H')$ tal que $d(Z, X) \leq d(Z, X_0)$ se tiene que

$$vol_2(S_X(T(J_K), T(H'))) \leq vol_2(S_{X_0}(T(J_K), T(H'))).$$

Se verifica que

$$S_X(T(J_K), T(H')) \subset S_X(T(K), T(H')) \quad \forall X \in T(H').$$

Lo cual implica que

$$\text{vol}_2(S_{X_0}(T(K), T(H'))) \geq \text{vol}_2(S_Z(\rho T(J_K), T(H'))).$$

Entonces tenemos que todos los puntos que minimizan a $\text{vol}_2(S_X(T(K), T(H')))$ pertenecen a $C[d(Z, X_0)]$.

Con geometría elemental se pueden calcular las áreas de las sombras $S_X(T(J_K), T(H'))$ y $S_Z(\rho T(J_K), T(H'))$ en función de s , h y h_s .

$$\text{vol}_2(S_Z(\rho T(J_K), T(H'))) = \frac{(\rho h)^2 \pi}{h_s^2 + 2\rho h_s}$$

$$\text{vol}_2(S_X(T(J_K), T(H'))) = \frac{h^2 \pi}{(h_s + \rho + 1)(h - 2)} \sqrt{\frac{s^2 + h^2 - 2h}{(h_s + \rho)^2 - 1}}$$

Si $X = X_0$ entonces $\text{vol}_2(S_Z(\rho T(J_K), T(H'))) = \text{vol}_2(S_X(T(J_K), T(H')))$ lo cual implica que

$$s = \sqrt{((h_s + \rho)^2 - 1) \left(\frac{\rho(h_s + \rho + 1)(h - 2)}{h_s^2 + 2\rho h_s} \right)^2 + 2h - h^2}.$$

La distancia s está acotada superiormente por $\frac{(\rho h)^2}{h_s}$. Por tanto todos los puntos que minimizan el área de $S_X(T(K), T(H'))$ están en $C\left[\frac{(\rho h)^2}{h_s}\right]$. Así los puntos que minimizan a $\text{vol}_2(S_X(K, H'))$ pertenecen a la región $T^{-1}\left(C\left[\frac{(\rho h)^2}{h_s}\right]\right)$. ■

Observación 4. A simple vista el resultado anterior pudiera extenderse de manera sencilla al caso no centralmente simétrico sin embargo, hay que notar que en dicho caso las elipsoides que se mencionan en el *Teorema de John* no son necesariamente concéntricas. De ahí que no se puede reproducir la prueba de manera directa.

Cabe mencionar que en una aplicación la distancia h_s puede ser muy grande o que

en general todas las distancias lo sean, tal es el caso de una aplicación donde se involucran distancias entre objetos en el espacio exterior, en tal caso $\frac{h}{h_s} \sim 1$ entonces dicha cota se puede considerar como ρh .

Capítulo 3

Algunos Mínimos Geométricos

Para concluir dejaremos un poco el problema de optimización de sombras para ocuparnos de otros problemas de optimización. En este capítulo formulamos problemas relacionados a la optimización del perímetro o volumen de la envolvente convexa de un punto y un cuerpo convexo bajo ciertas restricciones, así mismo vemos la estrecha relación que tienen con la elipse, la construcción del jardinero y el cuerpo de iluminación con la optimización.

3.1. Optimizaciones sobre la Envolvente Convexa

Un problema clásico de optimización es el siguiente:

Dada una recta L en el plano y dos puntos P_1, P_2 en el mismo semiplano definido por

L , encontrar el punto $P \in L$ tal que la suma de distancias $\overline{PP_1} + \overline{PP_2}$ sea mínima

La solución a este problema viene dada de la siguiente manera. Denotemos por P_2^* al punto reflejado de P_2 respecto a L , para todo $Q \in L$ se cumple que,

$$\overline{QP_2} = \overline{QP_2^*},$$

entonces

$$\overline{QP_1} + \overline{QP_2} = \overline{QP_1} + \overline{QP_2^*},$$

consideremos al punto $P = L \cap P_1P_2^*$, de la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\overline{QP_1} + \overline{QP_2^*} \geq \overline{PP_1} + \overline{PP_2^*}$$

así obtenemos que

$$\overline{QP_1} + \overline{QP_2} = \overline{QP_1} + \overline{QP_2^*} \geq \overline{PP_1} + \overline{PP_2^*} = \overline{PP_1} + \overline{PP_2}$$

De donde podemos observar que por ser P_2^* el reflejado de P_2 , el punto P que minimiza la suma de distancias va a cumplir que el ángulo entre PP_1 y L es el mismo que el que se tiene entre PP_2 y L .

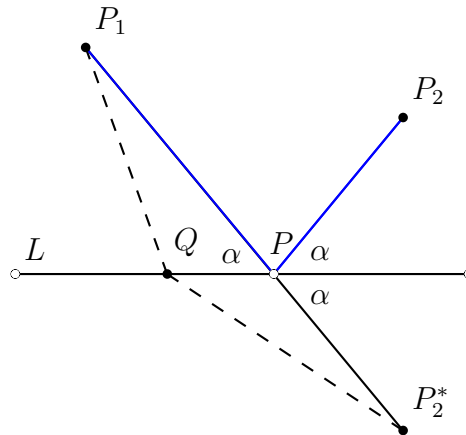


Figura 3.1

El problema anterior es equivalente a tener una línea L fija, un segmento con vértices P_1, P_2 contenido en uno de los semiplanos definidos por L y preguntarnos por el punto $P \in L$ tal que el perímetro de $\text{conv}(P_1P_2 \cup P)$ sea mínimo. La solución es inmediata.

Un problema más general es: *Dado un cuerpo convexo K en el plano y una línea L fija que no intersecta a K , encontrar características geométricas o analíticas de los puntos $P \in L$ que cumplan que el perímetro de $\text{conv}(K \cup P)$ sea mínimo.*

Un primer intento de solución es considerar la reflexión K^* de K respecto a L , aquí observamos que las dos líneas soporte comunes a ambos cuerpos que dejan a K y K^* en distintos semiplanos se intersectan en un punto $P \in L$, así tenemos que las dos líneas soporte a K que pasan por P forman un mismo ángulo α con L . A partir de lo anterior no es posible asegurar que P es el punto que minimiza.

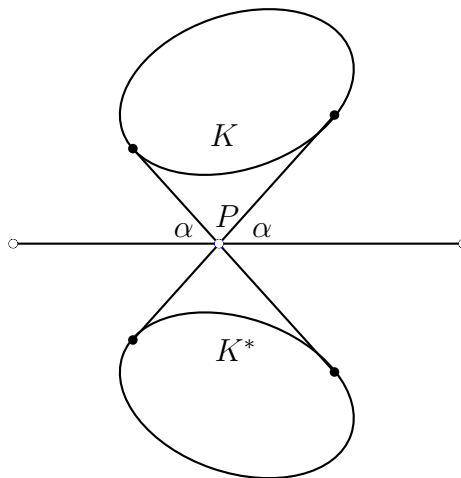


Figura 3.2

Si agregamos la condición de suavidad en la frontera de K podemos decir que en efecto, P minimiza el perímetro de la envolvente convexa y lo establecemos en el siguiente lema.

Lema 3.1.1. *Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo convexo con frontera suave y L una línea recta*

que no intersecta a K . Sea $X \in L$ y $Y, Z \in \text{bd}K$ tal que XY y XZ son líneas soporte de K , ψ, φ los ángulos que forma L con los segmentos YX y XZ respectivamente y $P = \|YX\| + \|\widehat{YZ}\| + \|XZ\|$. Entonces el mínimo de P se alcanza si $\psi = \varphi$.

Demostración. Consideremos a la longitud P como una función de t , i.e., $P = P(t)$, siguiendo el método convencional de cálculo diferencial calcularemos la derivada de P respecto a t e igualaremos a cero, así encontramos una condición necesaria para el extremo de $P(t)$.

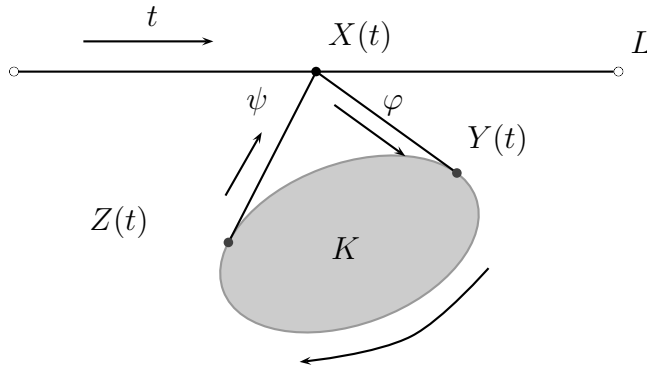


Figura 3.3

Es fácil ver que

$$\frac{d}{dt}(\widehat{YZ}) = \left\| \frac{dZ(t)}{dt} \right\| - \left\| \frac{dY(t)}{dt} \right\|$$

Además si $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $Y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|XY\|) &= \frac{d}{dt}(\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}) = \\ \frac{1}{\|YX\|} &[(y_1 - x_1)(y_1' - x_1') + (y_2 - x_2)(y_2' - x_2')] = \\ \frac{1}{\|YX\|} &[\langle \vec{Y} - \vec{X}, \vec{Y}' - \vec{X}' \rangle - \langle \vec{Y} - \vec{X}, \vec{X}' \rangle] = \end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{\vec{Y} - \vec{X}}{\|YX\|}, \vec{Y}' \right\rangle - \left\langle \frac{\vec{Y} - \vec{X}}{\|YX\|}, \vec{X}' \right\rangle = \left\| \frac{dY(t)}{dt} \right\| - \left\| \frac{dX(t)}{dt} \right\| \cos\varphi$$

Análogamente

$$\frac{d}{dt}(\|XZ\|) = \left\| \frac{dX(t)}{dt} \right\| \cos\psi - \left\| \frac{dZ(t)}{dt} \right\|$$

Entonces

$$\frac{dP(t)}{dt} = \left\| \frac{dX(t)}{dt} \right\| (\cos\psi - \cos\varphi)$$

La condición es $\frac{dP(t)}{dt} = 0$, así se debe cumplir que $\cos\psi = \cos\varphi$. Dado que $\psi + \varphi \leq 180^\circ$ entonces la condición necesaria para el extremo de P es $\psi = \varphi$, vemos que éste no es un máximo ya que podemos tomar a $X(t)$ como cualquier punto sobre L y así $P(t)$ hacerlo arbitrariamente grande. Luego $\psi = \varphi$ es una condición necesaria para el mínimo de P . ■

Otra manera de localizar al punto $P \in L$ para el caso en que K es un segmento con vértices P_1, P_2 es la siguiente:

Dado un número real t fijo, la elipse con focos P_1, P_2 y parámetro t la definimos como el conjunto $E(P_1, P_2, t) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \overline{XP_1} + \overline{XP_2} = t\}$. Consideremos a t_0 , el mínimo número real tal que:

- (i) $L \cap \text{int}(E(P_1, P_2, t)) = \emptyset$ para todo $t < t_0$.
- (ii) $L \cap \text{int}(E(P_1, P_2, t)) \neq \emptyset$ para todo $t > t_0$.

Así para minimizar la suma $\overline{PP_1} + \overline{PP_2}$, tomamos $P = E(P_1, P_2, t_0) \cap L$, de la estricta convexidad de la elipse vemos que el punto P es único.

Para el caso general hemos visto que se puede localizar dicho punto mediante la reflexión de K respecto a L , pero también es posible hacerlo con la construcción del

jardinero $CJ(K, t = t_0)$, donde al igual que en el caso anterior, t_0 es el mínimo número real tal que:

- (i) $L \cap \text{int}(CJ(K, t)) = \emptyset$ para todo $t < t_0$.
- (ii) $L \cap \text{int}(CJ(K, t)) \neq \emptyset$ para todo $t > t_0$.

De donde concluimos que el perímetro de $\text{conv}(K \cup P)$ es mínimo si $P = L \cap CJ(K, t_0)$.

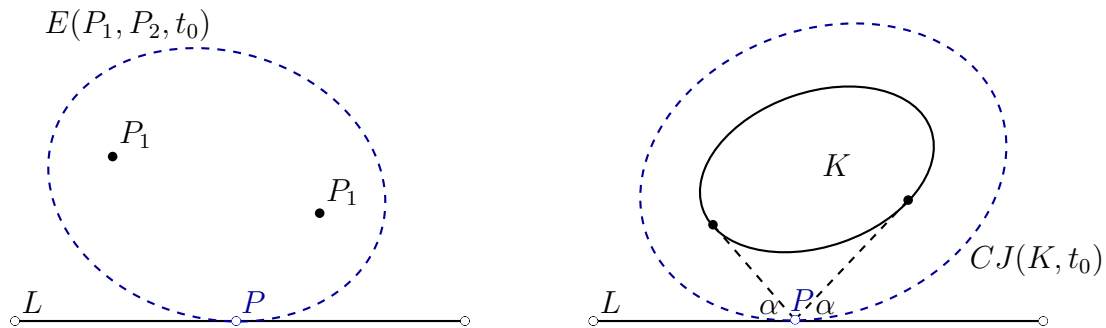


Figura 3.4

Entonces ahora resulta natural señalar que si K tiene frontera suave la curva que se obtiene mediante la construcción del jardinero es una mesa de billar ya que si una trayectoria golpea la frontera entonces su ángulo de incidencia y reflexión son el mismo, además, de la forma en que se obtiene la construcción, $\text{bd}K$ es una cáustica.

Notemos que para la demostración del lema 3.1.1 no fue necesario que L fuese una recta, es decir, podemos substituir a L por una curva γ suave y preguntarnos por la caracterización de los puntos $X \in \gamma$ que minimicen el perímetro de $\text{conv}(X \cup K)$, siguiendo la demostración del lema 3.1.1 se prueba que la condición necesaria es $\psi = \varphi$, donde ahora ψ, φ son los ángulos que forma la tangente a γ en X con los segmentos XY, XZ respectivamente.

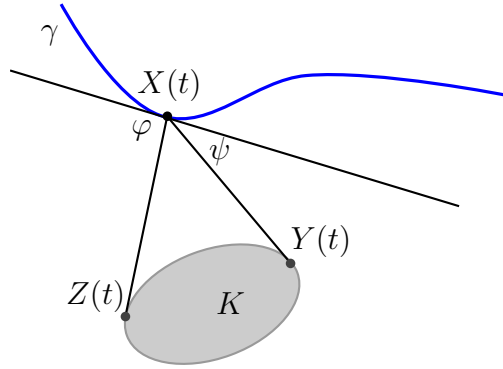


Figura 3.5

Habiendo ya resuelto el problema de minimizar el perímetro podemos ahora formularnos el siguiente problema: *Dados en el plano un cuerpo convexo K y una recta L que no intersecta a K , encuentra o caracteriza los puntos $X \in L$ tal que el área de $\text{conv}(X \cup K)$ sea mínima.* Para esto necesitamos demostrar el siguiente lema.

Lema 3.1.2. *Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo convexo, L una línea recta que no intersecta a K . Consideremos los puntos $Z, Z' \in L$ y a las líneas l_1, l_2 (l'_1, l'_2) soporte a K a través del punto Z (Z'). Denotamos por X, Y (X', Y') a los puntos de contacto más cercanos a Z (Z') tal que $X \in l_1$ y $Y \in l_2$ ($X' \in l'_1$ y $Y' \in l'_2$). Supongamos que XY es un segmento paralelo a L . Entonces $\text{vol}_2(\text{conv}(Z \cup K)) \leq \text{vol}_2(\text{conv}(Z' \cup K))$, con la igualdad si y sólo si $X' = X$ y $Y' = Y$.*

Demostración. Consideremos los segmentos $Z'X$ y $Z'Y$ y denotemos por t a la diferencia $\text{vol}_2(\text{conv}(Z \cup K)) - \text{vol}_2(\Delta ZXY)$. Vemos que $Z'X, Z'Y \subset \text{conv}(Z' \cup K)$ entonces $\text{vol}_2(\text{conv}(Z' \cup K)) \geq t + \text{vol}_2(\Delta Z'XY)$, ahora bien, dado que el segmento XY es paralelo a L tenemos que $\text{vol}_2(\Delta Z'XY) = \text{vol}_2(\Delta ZXY)$ entonces

$$\text{vol}_2(\text{conv}(Z' \cup K)) \geq t + \text{vol}_2(\Delta Z'XY) = t + \text{vol}_2(\Delta ZXY) = \text{vol}_2(\text{conv}(Z \cup K))$$

Los segmentos $Z'X$ y $Z'Y$ no necesariamente intersectan al interior de $\text{conv}(Z' \cup K)$, de aquí observamos que $\text{vol}_2(\text{conv}(Z \cup K)) = \text{vol}_2(\text{conv}(Z' \cup K))$ si y sólo si $Z'X$ y

$Z'Y$ son líneas soporte, es decir, $vol_2(\text{conv}(Z \cup K)) = vol_2(\text{conv}(Z' \cup K))$ si y sólo si $X' = X$ y $Y = Y'$.

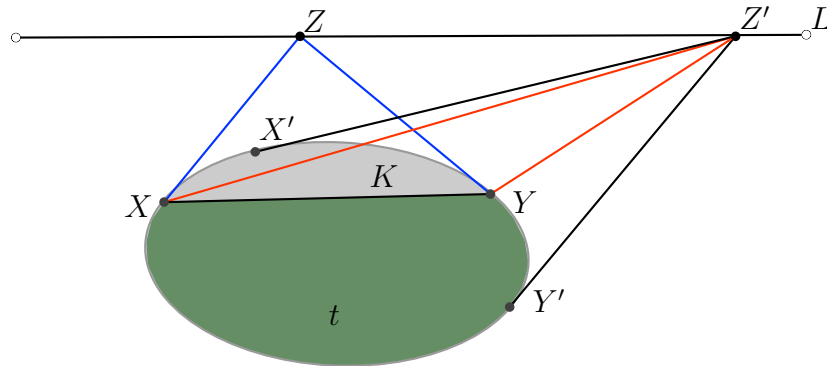


Figura 3.6

Observación 1. La demostración anterior nos lleva a la solución del problema, ya que también nos dice que el área mínima se alcanza cuando los puntos de contacto X, Y pertenecen a una línea paralela a L .

Del plano directamente podemos obtener una condición suficiente para el problema tridimensional.

Teorema 3.1.3. *Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo estrictamente convexo y H un plano que no intersecta a K , dado $X \in H$ entonces si la penumbra de K respecto a X está contenida en un plano paralelo a H , entonces el volumen de $\text{conv}(X \cup K)$ es mínimo.*

Demostración. Se sigue de la misma forma que en el lema 3.1.2.

La condición para alcanzar el volumen mínimo de $\text{conv}(X \cup K)$ es suficiente más no necesaria, tal como sucede con la condición del Lema 2.4.1. También es importante mencionar que se puede demostrar que los puntos que minimizan el área de $S_X(K, H)$ en todos los casos descritos en el capítulo anterior también minimizan el volumen de $\text{conv}(X \cup K)$, incluso la aproximación del Teorema 2.5.3 aplica directamente, es decir, dado $K \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo convexo y H un plano que no intersecta a K , se cumple que

todos los puntos $X \in H$ que minimizan el volumen de $\text{conv}(X \cup K)$ están contenidos en la región $T^{-1}(C[\frac{(\rho h)^2}{h_s}])$.

3.2. Cuerpo de Iluminación y Volumen Mínimo

En esta sección veremos que el cuerpo de iluminación definido en el capítulo I está íntimamente ligado a la optimización del volumen de la envolvente convexa.

Sea $K \in \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y H un hiperplano que no intersecta a K , entonces consideramos a δ_0 como el mínimo número real tal que:

- (i) $H \cap \text{int}(K^\delta) = \emptyset$ para todo $\delta < \delta_0$
- (ii) $H \cap \text{int}(K^\delta) \neq \emptyset$ para todo $\delta > \delta_0$

Claramente H es hiperplano soporte de K^{δ_0} .

Restringiéndose al plano, consideramos a K un cuerpo convexo y L una línea que no intersecta a K , como L es línea soporte a K^{δ_0} tenemos que si Z está en el conjunto de contacto entre L y K^{δ_0} entonces $\text{vol}_2(\text{conv}(Z, K)) - \text{vol}_2(K) = \delta_0$, del lema 3.1.2 concluimos lo siguiente.

- (i) Si $Z \in L \cap K^{\delta_0}$ entonces $\text{vol}_2(K) + \delta_0$ es el valor mínimo de $\text{vol}_2(\text{conv}(X, K))$ para todo $X \in L$.
- (ii) Si $Z \in L \cap K^{\delta_0}$ y l_1, l_2 son las líneas soporte a K a través de Z . Denotamos por X_1, X_2 a los puntos de contacto más cercanos a Z tal que $X_1 \in l_1$ y $X_2 \in l_2$. Entonces X_1X_2 es un segmento paralelo a L .

Lo que nos lleva a enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. *Sea K un cuerpo convexo en el plano, $\delta_0 \in \mathbb{R}^+$ y L una línea soporte de K^{δ_0} en Z . Denotamos por l_1, l_2 a las líneas soporte a K a través de Z . Entonces*

existen dos puntos $X_1 \in l_1 \cap K$, $X_2 \in l_2 \cap K$ tal que X_1X_2 es un segmento paralelo a L .

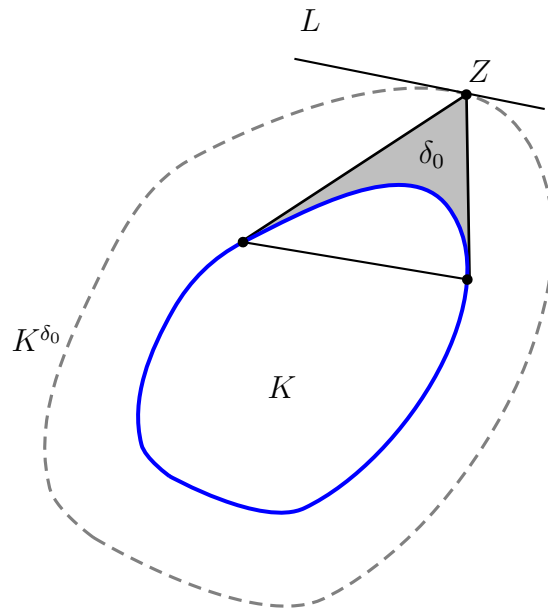


Figura 3.7

Enseguida veremos una aplicación del Teorema anterior, donde presentamos una caracterización para la elipse.

Teorema 3.2.2. *Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo convexo con frontera regular i.e., todos los puntos de la frontera son regulares, tal que para todo $\delta > 0$ se cumple que K^δ es homotético a K con respecto a un punto $X \in \text{int}K$. Entonces K es una elipse.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $X = O$.

Afirmación (*). K es centralmente simétrico con centro de simetría en O .

Sea $u \in S^1$ una dirección dada y sea AB una cuerda de K paralela a u . Supongamos que las líneas soporte de K en los puntos A y B se intersectan en P . Dado que $P \in \text{bd}K^\delta$ para alguna $\delta \in \mathbb{R}^+$, por el Teorema 3.2.1 tenemos que la línea soporte de K^δ por P es paralela a AB .

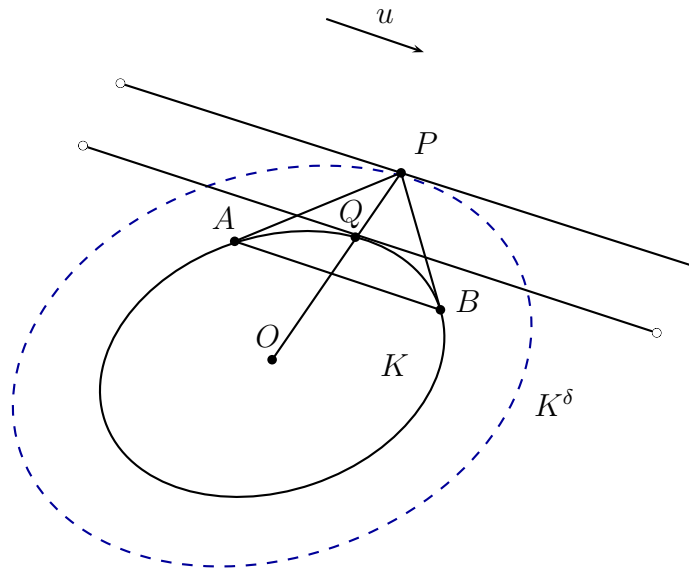


Figura 3.7

Sea Q el punto donde el rayo \overrightarrow{OP} intersecta a $\text{bd}K$. Dado que K y K^δ son homotéticos con centro de homotecia en O , tenemos que la línea soporte de K a través de Q es paralela a AB . Ahora, sea CD la cuerda de K con longitud máxima en la dirección u . Como fue demostrado por Hammer en [8], sabemos que existen líneas soporte de K , paralelas, a través de C y D . Sea $v \in S^1$ una dirección paralela a estas líneas soporte y $\infty(v)$ el punto al infinito en la dirección v .

Sea $\{l_n\}$ una sucesión de cuerdas paralelas a AB , las cuales convergen a CD y están contenidas en el semiplano superior delimitado por CD . Dado $n \in \mathbb{N}$, sea P_n el punto donde las líneas soporte de K por los extremos de l_n se intersectan. Por un lado sabemos que $\forall n$ los puntos O , Q y P_n están alineados; por otro lado tenemos que $P_n \rightarrow \infty(v)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Se sigue que el rayo \overrightarrow{OQ} es paralelo a v . Ahora, sea T el punto donde la otra línea soporte a K paralela a u intersecta a $\text{bd}K$. Análogamente, podemos demostrar que \overrightarrow{OT} es paralelo a v . Obtenemos que Q , O y T son colineales; como por los puntos Q y T existen líneas soporte paralelas, tenemos que QT es un diámetro afín de K el cual pasa por O . Como u es una dirección arbitraria, tenemos

que todos los diámetros afines de K concurren en O . Hammer en [7] demuestra que bajo estas hipótesis tenemos que K es centralmente simétrico con centro de simetría en O .

Afirmación (**). Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo convexo con frontera suave, L una línea que interseca $\text{int}K$ con la siguiente propiedad: para cualquier punto $p \in \{L \setminus K\}$, la línea que une los dos puntos de contacto a_p, b_p de las tangentes de K trazadas por p es paralela a una dirección fija u e interseca a L en x_p . Entonces la razón $a_p x_p : b_p x_p$ es constante para todo $p \in L$.

Tenemos que para todo punto $p \in L$, la cuerda $a_p b_p$ tiene una dirección constante. Aplicamos una transformación afín T en el plano tal que L y $a_p b_p$ sean ortogonales. Supongamos que $L' = T(L)$ coincide con el eje x , y definamos $a'_p = T(a_p)$, y $b'_p = T(b_p)$. Sean γ_1, γ_2 las dos curvas en las cuales $\text{bd}T(K)$ es dividido por L' , tal que γ_1 y γ_2 están contenidas en el semiplano superior e inferior acotado por L' . Si $\{c, d\} = L' \cap \text{bd}T(K)$ podemos suponer que γ_1 y γ_2 coinciden con las funciones diferenciables f y g en el intervalo $[c, d]$, esto es posible ya que $T(K)$ también es un cuerpo convexo suave. Debido a que tangencialidad y concurrencia se preservan bajo transformaciones afines tenemos que las líneas tangentes en $a'_p = (x_0, f(x_0))$ y $b'_p = (x_0, g(x_0))$ concurren en el punto $T(p)$ sobre L' . Con un cálculo sencillo obtenemos que

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}.$$

De aquí se sigue que $f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0) = 0$, dado que $g(x_0) \neq 0$

$$\frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{[g(x_0)]^2} = 0$$

Entonces

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right) = 0$$

Denotamos $x'_p = T(x_p)$, del hecho de que las transformaciones afines preservan razones de longitud de segmentos tenemos que $\frac{a_p x_p}{b_p x_p} = \frac{a'_p x'_p}{b'_p x'_p} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = k$, para algun $k \in \mathbb{R}$.

Consideremos una dirección arbitraria $u \in S^1$. Sean l_1, l_2 las dos líneas soporte de K en dirección u y sean $\{S\} = l_1 \cap \text{bd}K$ y $\{T\} = l_2 \cap \text{bd}K$.

Por la Afirmación (*), tenemos que dada una cuerda paralela a la dirección u , las líneas soporte en los extremos de ésta cuerda se intersectan sobre la línea ST . Por la Afirmación (**) tenemos que toda cuerda paralela a u se divide por el segmento ST en una razón constante. Como ST pasa por O , concluimos que la razón es 1 : 1.

Hemos probado que dada una dirección $u \in S^1$, los puntos medios de las cuerdas paralelas a u están alineados. Por el Teorema de Brunn [3] concluimos que K es una elipse. ■

Conclusión

Durante la presente tesis, hemos visto que mediante problemas análogos o laterales podemos resolver un problema que en principio puede ser complicado. Con la solución de estos problemas tenemos toda una construcción de resultados hilados de tal manera que damos pie a que siguiendo este mismo orden de ideas se pueda plantear más preguntas que tendrán respuesta en trabajos futuros.

Como hemos visto en el segundo capítulo recopilamos todos los resultados directamente ligados al problema central de nuestra tesis, desde la solución plana hasta el teorema que nos acota la región donde se encuentran todos los puntos que proyectan la sombra de área mínima. En el tercer capítulo revisamos una serie de resultados que si bien tratan la optimización, a primera vista no tienen una relación con minimizar sombras conforme avanzamos nos damos cuenta que están íntimamente ligados.

La relación entre el segundo y tercer capítulo comienza a clarificarse proponiendo el siguiente problema. *Encontrar condiciones geométricas o analíticas de los puntos $X \in H$ tal que $\text{conv}(X, K)$ tenga superficie mínima.* Este problema nos lleva a analizar una variante del cuerpo de flotación. Dado un cuerpo convexo $K \in \mathbb{R}^3$ y $t \in \mathbb{R}^+$, considerar

el conjunto de puntos X tal que la superficie $\text{conv}(X, K)$ sea t . De aquí mismo se sigue que es posible analizar construcciones análogas al cuerpo de iluminación y sus problemas de optimización correspondientes.

Por otro lado, del estudio de las diversas variantes surge la siguiente conjetura: *Los puntos que minimizan el área de la sombra y el volumen de la envolvente convexa son los mismos.* De lo anterior vemos que el cuerpo de iluminación cobra importancia, debido a que si la conjetura resulta ser cierta, entonces tendremos lo siguiente.

Dado un cuerpo convexo $K \in \mathbb{R}^3$ contenido en la región delimitada por los planos paralelos H y H' ; consideremos a δ_0 el menor número real positivo tal que H' es plano soporte de K^{δ_0} . Si $X \in K^{\delta_0} \cap H'$ entonces $S_X(K, H)$ es de área mínima.

Bibliografía

- [1] T. Burger, P. Gritzmann, V. Klee. *Polytope Projection and Projection Polytopes*. Amer. Math. Monthly. Vol. 103. No. 9. 1996. 742-755.
- [2] H. Brunn. *Ueber Kurven ohne Wendepunkte*. Habilitationsschrift. T. Ackermann. München. 1889.
- [3] G.D. Chakerian, L.H. Lange. *Geometric Extremum Problems*. Mathematics Magazine, Mar.-Apr. 1971. 57-69.
- [4] R. J. Gardner. *Geometric Tomography*. Cambridge Univ. Press, New York. 1995
- [5] P. Gruber. *Convex and Discrete Geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2007.
- [6] P.C. Hammer. *Diameters of Convex Bodies*. Proc. Amer. Math. Soc Vol 5. 1954. 304-306
- [7] P.C. Hammer. *Convex Curves of Constant Minkowski breadth*. Convexity (Seattle, WA, 1961). Proceedings of Symposium on Pure Mathematical. vol VII. American Mathematical Society. Providence. RI. 1963. pp. 291-204 (MR27#4136).

-
- [8] K. Lange. *Optimization*. Springer-Verlang NY, LLC. 2004
- [9] D. Oliveros, L. Montejano. *de Volantes, Espirógrafos y la Flotación de Cuerpos*. Ciencias, Revista de difusión, Facultad de Ciencias, UNAM. 1999. No. 5556 pp.4653.
- [10] V.V. Prasolov, V.M. Tikhomirov. *Geometry*. Translations of Mathematical Monographs Vol 200. Amer. Math. Soc. 2001.
- [11] C. Schütt. *Floating Body, Illumination Body, and Polytopal Approximation*. Convex Geometric Analysis. MSRI Publications Vol. 34. 1998.
- [12] A.C. Thompson. *Minkowski Geometry*. Cambridge University Press. 1996.
- [13] V.A. Toponogov. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Birkhäuser Boston. 2006.
- [14] P.H. Turner. *Convex Caustics for Billiards in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3* . Convexity and related combinatorial geometry. Marcel Dekker. 1982. 85–105.
- [15] R. Webster. *Convexity*. Oxford University Press. 1994.
- [16] E. Werner. *Illumination bodies and the affine surface area*. Studia Math. 110. 1994. 257-269.
- [17] E. Werner. *The illumination bodies of a simplex*. J. Discrete Comput. Geom. 15. 1996. 297-306.
- [18] E. Werner. *The Illumination Body of Almost Polygonal Bodies*. J. Geometriae Dedicata. Publisher Springer Netherlands Vol. 64. 1997. 343-354.