CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A.C.

LA FILTRACIÓN DE HODGE DE UNA HIPERSUPERFICIE LISA:

Relaciones entre su Estructura Multiplicativa, la Cohomología del Complemento y el Anillo Jacobiano.

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Con orientación en

Matemáticas Básicas

P r e s e n t a

Lilia Alanís López

Director de tesis:

Dr. Xavier Gómez-Mont Ávalos

GUANAJUATO, GTO. JUNIO DE 2010

Agradecimientos

Por el apoyo económico que recibi para realizar mis estudios de maestría al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT). También expreso mi agradecimiento por el apoyo económico brindado para terminar mi tesis de maestría al Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT).

Por dedicarme el tiempo necesario como director de tesis para llevar acabo este trabajo, por sus enseñanzas y apoyo, agradezco al Dr. Xavier Gomez-Mont Avalos. Por fungir como sinodales de esta tesis, por su apoyo, paciencia y guía constante, expreso mi agradecimiento a la Dra. Gloria Leticia Brambila Paz y al Dr. Pedro Luis Del Angel Rodriguez.

A mis padres Alfredo Alanís Durán y Lilia López Vera por haberme dado todo su apoyo durante el transcurso de mis estudio de maestría, por su comprensión, amor y fuerza. A mis hermanos Alfredo Alanís López y Cecilia Alanís López por su apoyo y ánimo brindado durante el tiempo lejos de mi familia.

A mis maestros y amigos Xavier Gomez-Mont Avalos, Leticia Brambila Paz, Pedro Luis Del Angel Rodriguez, Herbert Kanarek Blando, Monica Moreno Rocha, Jimmy Petean Humen, Raul Quiroga Barranco, José Omegar Calvo, José Angel Canavati Ayub, Luis Hernandez Lamoneda, Victor Nuñez, Francisco Xavier Solis Lozano y Gonzalo Contreras Barandiarán por sus enseñanzas y consejos brindados.

A mis compañeros de generación, amigos y segunda familia Josafath Alfredo Otero, Carlos Yebra Montes, Julio López, Adrián Jinich, Hugo Torres, Emilio Salcedo, Andres Lara, Daniel Cancino, Anya Valenzuela, Raquel Perales, Nelly Selem, Valentin Tovar, Elias Huchim, Hugo Bojorquez y Carlos Campos por su amistad, compañerismo, consejos y gratos momentos.

Índice general

Introducción

La topología algebraica surge con Henri Poincaré al asignar a espacios topológicos grupos algebraicos que se preservan bajo homeomorfismo. En 1895, introdujo en su artículo "Analisis situs" el grupo fundamental de un espacio con el fin de diferenciar las superficies de Riemann.

A principios del siglo pasado, tuvo lugar el uso de una nueva técnica para estudiar espacios topológicos. La teoría de homología singular se basa en considerar el grupo abeliano generado por ciclos sobre un espacio topológico $M,$ bajo una relación de equivalencia. Tal grupo asignado a M se le conoce como $H_n(M, \mathbb{Z}),$ donde n depende de la dimensión de los ciclos sobre M.

La teoría dual a la teoría de homología singular es la teoría de cohomología singular. En 1931, Georges DeRham introdujo la cohomología de DeRham, la cual se construye a partir de formas diferenciales definidas sobre una variedad $M.$ DeRham probó que si la variedad M es lisa y compacta, entonces la cohomología singular y la cohomolgía de DeRham son álgebras isomorfas.

En geometría algebraica, se definen las variedades algebraicas como el lugar de ceros de un conjunto de polinomios, sobre un campo dado. A este tipo de variedades se asignan también invariantes topológicos como los grupos de DeRham algebraicos. Para una variedad algebraica proyectiva lisa, la cohomología singular es la cohomología de DeRham algebraica.

En este trabajo se estudiará la cohomología singular de una hipersuperficie proyectiva lisa X de dimensión $n,$ definida por un polinomio homogéneo Q de grado d. El objetivo es dar una conexión entre los siguientes puntos:

1. La filtración de Hodge del n-esimo grupo de cohomología de X.

2. La filtración por el orden del polo en X de las $(n+1)$-formas diferenciales racionales definidas en $U = \mathbb{P}^{n+1} - X$.

3. El ideal Jacobiano J_Q de $Q,$ definido como el ideal generado por las derivadas parciales del polinomio Q.

Dicha relación se desarrollará en dos partes. Dentro de la primera parte se dará la conexión entre los primero dos puntos, para lo cual necesitamos estudiar las $(n+1)$-formas diferenciales racionales en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^{n+1},$ a quienes denotaremos por $H^{n+1}(U, \mathbb{C}).$ En el capítulo

1 se obtiene una caracterización de dicho espacio vectorial, obteniendo explicitamente el generador Ω de $H^{n+1}(U, \mathbb{C})$, como módulo sobre las funciones racionales con polo en Q.

Como siguiente paso introduciremos en el capítulo 2 la aplicación tubular en los n-ciclos definidos en X. Con esto tendremos una función

$$\tau : H_n (X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n+1} \left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{Z}\right).$$

Al realizar un anáisis de τ y de su operador operador dual, tendremos la necesidad de definir la cohomología primitiva de X. Terminando este capítulo con las siguientes relaciones

1. si $n+1$ es par tenemos que
$$H^{n+1} \left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{C}\right) \cong H^n (X, \mathbb{C})$$
2. si $n+1$ es impar
$$H^{n+1} \left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{C}\right) \cong H^n (X, \mathbb{C})_0 \tag{1}$$

Teniendo la relación entre el n-esimo grupo de cohomología de X y el $(n+1)$-esimo grupo de cohomología de U comenzaremos a trabajar en el capítulo 3 con la filtración por el orden del polo en X de $H^{n+1} \left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{C}\right)$. Dentro de este capítulo construimos un operador de homotopía parcial dentro de un complejo doble para obtener el resultado principal de esta sección: para estudiar $H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{C})$ basta trabajar con $(n+1)$-formas racionales proyectivas con polo en X de orden a lo más $n+1$.

Antes de llegar al resultado final de esta primera parte, es necesario introducir la filtración de Hodge de $H^n (X, \mathbb{C})$, en el capítulo 4 se trabajará esa parte utilizando el concepto de complejos filtrados. La filtración de Hodge se obtiene de manera algebraica con el uso de filtraciones ingenuas y el teorema de Deligne (4.3.2).

Utilizando finalmente el mapeo residuo definido en el capítulo 2, la primera fracción de la conexión quedará completa con el Teorema 5.2.2, el cual describe la conexión entre el orden del polo de la imagen bajo el mapeo residuo de una $(n+1)$-forma racional y el nivel de la filtración de Hodge de la cohomología primitiva de X:

$$res \left(\Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}} ((a+1)X)\right) = F^{n-a} H^n (X, \mathbb{C})_0$$

La segunda parte de este trabajo incluye la relación entre el ideal Jacobiano J_Q y los elementos de la n-cohomología de X. Esta conexión se construirá dotando de una estructura multiplicativa con el producto cup a la imagen bajo el mapeo residuo de las $(n+1)$-formas diferenciales definidas en U.

Con el fin de manipular de manera fácil los elementos del conjunto

$$H^n (X, \mathbb{C})_0 = res \left(\Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}} ((n+1)X)\right),$$

volveremos a hacer uso de los compejos dobles. Obtendremos de manera explícita el término superior en el bicomplejo de un elemento de $H^n (X, \mathbb{C})_0$.

Tomaremos después dos $(n+1)$-formas diferenciales racionales con polos de orden complementarios en X y estudiaremos el comportamiento del producto cup del residuo de dichas formas. Llegando a la conclusión en el Teorema 7.0.5 que una condición necesaria y suficiente para que tal producto se anule involucra el ideal Jacobiano J_Q

$$res\left(\frac{A\Omega}{Q^{a+1}}\right) res\left(\frac{B\Omega}{Q^{b+1}}\right) = 0 \Longleftrightarrow AB \in J_Q$$

Durante la demostración del Teorema 7.0.5, se define el símbolo residuo de Grothendieck para una función holomorfa. Utilizando dicha fórmula para el cociente del anillo graduado de polinomios homogéneos entre el ideal Jacobiano,

$$\bar{V} = \mathbb{C}\left[z_0, \ldots, z_{n+1}\right]_h / J_Q = \oplus_i \bar{V}^i,$$

se define un apareamiento. En el corolario 7.2.3 demostramos que es un apareamiento perfecto entre los subanillos $\bar{V}^i$ y $\bar{V}^{\sigma-i}$ donde $\sigma = (n+2)(d-2)$. El corolario 7.2.3 y 7.1.3 nos permite dotar de una estructura multiplicativa a la estructura de Hodge del n-esimo grupo de cohomología primitiva de X. Concluyendo de esta manera con la conexión del tercer y primer punto mencionados en un comienzo.

Esta conexión fue esbozada en un artículo de James Carlson y Phillip Griffiths titulado *Infinitesimal variations of Hodge structure and the global Torelli problem* publicado en 1980. En dicho artículo se mencionan el operador de homotopía parcial dentro del complejo doble Čech-DeRham mencionado en el capítulo 3 y el Teorema 5.2.2 del capítulo 5.

La aportación de la tesis es dar tanto los detalles de la construcción del operador de homotopía parcial para reducir el orden del polo de una $(n+1)$-forma diferencial racional con polo en la hipersuperficie X como los de la demostración del Teorema 5.2.2 utilizando el complejo doble Čech-DeRham.

Capítulo 1

Formas Diferenciales Racionales en el Espacio Proyectivo

El objetivo de este capítulo es dar una caracterización algebraica de las formas diferenciales racionales en el espacio proyectivo. En particular, nos interesa estudiar el espacio vectorial de las $n+1$-formas diferenciales racionales, así que al final del capítulo daremos explícitamente el generador del espacio.

Consideremos el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n+1} = \frac{\mathbb{C}^{n+2}-\{0\}}{\sim}$ donde $x \sim \lambda x$ para algun $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Denotaremos como $z = [z_0 : z_1 : ... : z_{n+1}]$ las coordenadas homogeneas en $\mathbb{P}^{n+1}$ y $\xi = (\xi_0, ..., \xi_{n+1})$ las coordenadas afines en $\mathbb{C}^{n+2}$. El mapeo inclusión $\mathbb{C}^{n+1} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ está dado por $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}) \hookrightarrow [1 : \xi_1 : \xi_2 : ... : \xi_{n+1}]$, de donde obtenemos el hiperplano al infinito $\mathbb{P}^n$ dado por la ecuación $z_0 = 0$. El mapeo inverso $\mathbb{P}^{n+1} - \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ está dado por $[z_0 : z_1 : ... : z_{n+1}] \longrightarrow (\frac{z_1}{z_0}, ..., \frac{z_{n+1}}{z_0})$.

Con lo anterior tenemos que dada una k-forma racional φ en $\mathbb{C}^{n+1}$ dada por:

$$\varphi = \sum_J \frac{A_J(\xi)}{B(\xi)} d\xi_J, donde J = (j_1, ..., j_k), \xi = (\xi_1, ..., \xi_{n+1}), d\xi_J = d\xi_{j_1} \wedge ... \wedge d\xi_{j_k}, j_1 < ... < j_k \tag{1.1}$$

podemos obtener una k-forma racional homogenea $\widetilde{\varphi}$ en $\mathbb{C}^{n+2}$ y por tanto una k-forma en $\mathbb{P}^{n+1}$ haciendo la siguiente sustitución: $\xi_j = \frac{z_j}{z_0}$ y $d\xi_j = \frac{z_0 dz_j - z_j dz_0}{z_0^2}$. De lo cual tenemos lo siguiente: $\widetilde{\varphi} = \sum_J \frac{\widetilde{A}_J(z)}{\widetilde{B}(z)} dz_J$, donde $\widetilde{A}_J(z)$, $\widetilde{B}(z)$ son polinomios homogéneos y $deg\widetilde{B} = deg\widetilde{A}_J + k$.

La pregunta natural es la siguiente, dada una k-forma racional en $\mathbb{C}^{n+2} - \{0\}$ cuándo podemos saber si proviene de una k-forma racional dada por la expresión (1.1) la cual fue homogeneizada y ahora pertenece a $\mathbb{P}^{n+1}$. En otras palabras, quién es la imagen del mapeo

$$\begin{array}{rcl}\psi : \Omega^k\mathbb{C}^{n+1} & \longrightarrow & \Omega^k\mathbb{P}^{n+1} \\ \varphi & \longrightarrow & \widetilde{\varphi}\end{array}$$

Para esto, recordemos las propiedades de las contracciones de una forma diferencial ω con los campos vectoriales canónicos $\{\frac{\partial}{\partial\xi_j}\}$ en $\mathbb{C}^{n+2}$, denotadas por $i\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)$. Sea ω una p-forma y $\widetilde{\omega}$ una q-forma diferencial:

1. -$i\left(\frac{\partial}{\partial\xi_k}\right)(d\xi_j) = \delta_{k,j}$ donde $\delta_{k,j}$ es la delta de Kronecker
2. -$i\left(\frac{\partial}{\partial\xi_k}\right)(\omega\wedge\widetilde{\omega}) = i\left(\frac{\partial}{\partial\xi_k}\right)(\omega)\wedge\widetilde{\omega} + (-1)^p\,\omega\wedge i\left(\frac{\partial}{\partial\xi_k}\right)(\widetilde{\omega})$
3. -$i\left(\frac{\partial}{\partial\xi_k}\right)\left(\sum_J \frac{A_J(\xi)}{B(\xi)}d\xi_J\right) = \sum_J \frac{A_J(\xi)}{B(\xi)} i\left(\frac{\partial}{\partial\xi_k}\right)(d\xi_J)$

Proposición 1.0.1 *Consideremos el campo vectorial de Euler* $\theta = \sum_{i=0}^{n+1}\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}$ *y su contracción asociada* $i(\theta)$*. Entonces una k-forma racional* $\widetilde{\varphi} = \sum_J \frac{\widetilde{A}_J(\xi)}{\widetilde{B}(\xi)}d\xi_J$ *en* $\mathbb{C}^{n+2}-\{0\}$ *pertenece a la imagen de* ψ *si y solo si se cumplen 1 y 2:*

1. $deg\widetilde{B} = deg\widetilde{A}_J + k$
2. $i(\theta)(\widetilde{\varphi}) = 0$

Demostración: $(\Longrightarrow)$ Supongamos que $\widetilde{\varphi}$ proviene de una k-forma en $\mathbb{P}^{n+1}$ entonces es una forma homogenea de grado 0 y por tanto se cumple la igualdad de los grados de los polinomios. Para demostrar (2) notemos lo siguiente:

$$si\ \widetilde{\varphi} = \sum_J \frac{\widetilde{A}_J(z)}{\widetilde{B}(z)}dz_J \in \psi\left(\Omega^k\mathbb{C}^{n+1}\right)$$

Entonces existe una k-forma en $\Omega^k\mathbb{C}^{n+1}$

$$\varphi = \sum_J \frac{A_J(\xi)}{B(\xi)}d\xi_J$$

de tal manera que al hacer la sustitución $\xi_j = \frac{z_j}{z_0}$ y $d\xi_j = \frac{z_0dz_j - z_jdz_0}{z_0^2}$, obtenemos $\widetilde{\varphi}$.

Aplicando la contracción tenemos que

$$\begin{aligned} i(\theta)(\widetilde{\varphi}) &= i(\theta)\left(\sum_J \frac{A_J\left(\frac{z_1}{z_0},...,\frac{z_n}{z_0}\right)}{B\left(\frac{z_1}{z_0},...,\frac{z_{n+1}}{\xi_0}\right)}d\left(\frac{z_{j_1}}{z_{j_0}}\right)\wedge...\wedge d\left(\frac{z_{j_{n+1}}}{z_{j_0}}\right)\right) = \\ &= \sum_J \frac{A_J\left(\frac{z_1}{\xi_0},...,\frac{z_{n+1}}{z_0}\right)}{B\left(\frac{z_1}{z_0},...,\frac{z_{n+1}}{z_0}\right)} i(\theta)\left(d\left(\frac{z_{j_1}}{z_{j_0}}\right)\wedge...\wedge d\left(\frac{z_{j_{n+1}}}{z_{j_0}}\right)\right) \end{aligned}$$

Pero

$$i(\theta)\left(d\left(\frac{z_{j_k}}{z_{j_0}}\right)\right) = i(\theta)\left(\frac{z_{j_0}dz_{j_k} - z_{j_k}dz_{j_0}}{z_{j_0}^2}\right) = \frac{z_{j_0}z_{j_k}}{z_{j_0}^2} - \frac{z_{j_k}z_{j_0}}{z_{j_0}^2} = 0$$

Por tanto $i(\theta)(\widetilde{\varphi}) = 0$

($\Longleftarrow$) Primero veamos por inducción que

$$dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_k} = z_0^k d\left(\frac{z_{i_1}}{z_0}\right) ... d\left(\frac{z_{i_k}}{z_0}\right) + \left(\frac{dz_0}{z_0}\right) i(\theta)(dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_k})$$

Para k = 1 tenemos lo siguiente

$$z_0 d\left(\frac{z_{i_1}}{z_0}\right) + \left(\frac{dz_0}{z_0}\right) i(\theta)(dz_{i_1}) = z_0\left(\frac{z_0 dz_{i_1} - z_{i_1} dz_0}{z_0^2}\right) + \frac{z_{i_1} dz_0}{z_0} = dz_{i_1}$$

Supongamos que la igualdad se cumple para k=n-1 y sustituyamos en el producto siguiente tomando k=n:

$$dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_k}$$

obtenemos lo siguiente:

$$\left[z_0^{(k-1)} d\left(\frac{z_{i_1}}{z_0}\right) \wedge ... \wedge d\left(\frac{z_{i_(k-1)}}{z_0}\right) + \left(\frac{dz_0}{z_0}\right) i(\theta)\left(dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_{k-1}}\right)\right] \wedge$$
$$\wedge \left[z_0 d\left(\frac{z_{i_k}}{z_0}\right) + \left(\frac{dz_0}{z_0}\right) i(\theta)(dz_{i_k})\right]$$

de donde al desarrollar llegamos al resultado deseado.

Volviendo a la demostración de la proposición si sustituimos la igualdad anterior en $\widetilde{\varphi}$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi} &= \sum_J \frac{\widetilde{A}_J(z)}{\widetilde{B}(z)} dz_J = \sum_J \frac{\widetilde{A}_J(z)}{\widetilde{B}(z)} dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_k} \\
&= \sum_J \frac{\widetilde{A}_J(z)}{\widetilde{B}(z)} \left[z_0^k d\left(\frac{z_{j_1}}{z_0}\right) \wedge ... \wedge d\left(\frac{z_{j_k}}{z_0}\right) + \left(\frac{dz_0}{z_0}\right) i(\theta)(dz_{j_1} \wedge ... \wedge dz_{j_k})\right] \\
&= \sum_J \frac{\widetilde{A}_J(z)}{\widetilde{B}(z)} \left[z_0^k d\left(\frac{z_{j_1}}{z_0}\right) \wedge ... \wedge d\left(\frac{z_{j_k}}{z_0}\right)\right] + \left[\left(\frac{dz_0}{z_0}\right) i(\theta)\left(\sum_J \frac{\widetilde{A}_J(z)}{\widetilde{B}(z)} dz_{j_1} \wedge ... \wedge dz_{j_k}\right)\right] \\
&= \sum_J \frac{\widetilde{A}_J(z)}{\widetilde{B}(z)} \left(z_0^k d\left(\frac{z_{j_1}}{z_0}\right) \wedge ... \wedge d\left(\frac{z_{j_k}}{z_0}\right)\right) + \left(\frac{dz_0}{z_0}\right) i(\theta)(\widetilde{\varphi})
\end{aligned}$$

Por hipotesis (2) el segundo término se anula y $\widetilde{\varphi} = \sum_J z_0^k \frac{\widetilde{A}_J(z)}{\widetilde{B}(z)} d\left(\frac{z_{j_1}}{z_0}\right) ... d\left(\frac{z_{j_k}}{z_0}\right)$. Además por (1), tenemos que el cociente de los polinomios de la suma tiene grado cero y por tanto se puede ver como el homogeneizado de alguna k-forma en $\mathbb{C}^{n+1}$ $\square$

Por la proposición (1.0.1) podemos ver que las $(n+1)$-formas en $\mathbb{P}^{n+1}$ provienen de $(n+1)$-formas en $\mathbb{C}^{n+1}$. En este caso hay un único generador para las $(n+1)$-formas en el espacio complejo $\mathbb{C}^{n+1}$ el cual es $d\xi_1 \wedge ... \wedge d\xi_{n+1}$, al hacer la sustitución $\xi_i = \frac{z_i}{z_0}$ y utilizando la igualdad demostrada en la proposición anterior, obtenemos la siguiente $(n+1)$-forma en el espacio proyectivo

$$\widetilde{\Omega} = \frac{1}{z_0^{(n+2)}} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i z_i dz_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \cdots \wedge dz_{n+1}$$

lo cual tiene como consecuencia lo siguiente:

Corolario 1.0.2 *Las $(n+1)$-formas racionales en $\mathbb{P}^{n+1}$ son de las siguiente forma*

$$\varphi \; = \; \frac{P(z)\Omega}{Q(z)}$$

donde $deg(P) \, + \, n \, + \, 2 \, = \, deg(Q)$ *y*

$$\Omega \; = \; \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i z_i dz_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \cdots \wedge dz_{n+1}. \tag{1.2}$$

Capítulo 2

Relación entre la Cohomología de una hipersuperficie proyectiva y su complemento

El objetivo de este capítulo es estudiar los grupos de cohomología de una hipersuperficie proyectiva suave X fija. Para lograr esto primero relacionaremos los grupos de cohomología de $U = \mathbb{P}^{n+1} - X$ con los de X.

Consideremos entonces Q un polinomio homogeneo en $n+2$ variables complejas, sea X la hipersuperficie en $\mathbb{P}^{n+1}$ definida por $\{Q=0\}$ y supongamos que es no singular.

2.1. Teorema de Lefschetz y Dualidad de Poincaré

En esta sección recordaremos algunos resultados de topología diferencial y el teorema de Lefschetz para comparar los grupos de homología de X con los grupos de homología del espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n+1}$.

Teorema 2.1.1 *([1], Pag.199) Sea X una hipersuperficie suave del espacio proyectivo* $\mathbb{P}^{n+1}$, *si* $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ *es la inclusión, entonces:*

$$i^* : H^m\left(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\right) \longrightarrow H^m\left(X, \mathbb{C}\right),$$

es isomorfismo si $m \leq n$ *y es inyectivo si* $m = n$

Lema 2.1.2 *Si* $0 \leq m \leq 2(n+1)$

$$H^m\left(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\right) = \begin{cases} 0 & si\ m\ es\ impar \\ \mathbb{C} & si\ m\ es\ par \end{cases}$$

Lema 2.1.3 *([2], Pag. 42-53) Sea M una variedad diferencial orientable y compacta de dimensión n, entonces*

$$\int : H^m(M, \mathbb{C}) \otimes H^{n-m}(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

es un apareamiento no degenerado, para $0 \leq m \leq n$.

Por el teorema 2.1.1 y el lema 2.1.3 los grupos de cohomología de X, excepto $H^n(X, \mathbb{C})$, son isomorfos a los grupos de cohomología del espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n+1}$. Para analizar $H^n(X, \mathbb{C})$, consideremos la sucesión de cohomología relativa del par $\left(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{P}^{n+1} - X\right)$:

$$\cdots \to H^m\left(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{C}\right) \to H^m\left(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\right) \to H^m\left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{C}\right) \to \ldots$$

Tomemos T una vecindad tubular de X en $\mathbb{P}^{n+1}$. Como X es un retracto de T entonces para cualquier k se tiene que $H^k(T, \mathbb{C}) \cong H^k(X, \mathbb{C})$. Por el isomorfismo de Thom ([2], Pag. 63) $H^k(T, T - X, \mathbb{C}) \cong H^{k-2}(X, \mathbb{C})$. Como $\{T, \mathbb{P}^{n+1} - X\}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{P}^{n+1}$, por el teorema de excisión (A.0.6) podemos concluir que $H^k(T, T - X, \mathbb{C}) \cong H^k\left(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{C}\right)$.

Luego al sustituir en la sucesión anterior obtenemos la sucesión de Gysin:

$$\cdots \to H^{m-2}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^m\left(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\right) \longrightarrow H^m\left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{C}\right) \longrightarrow H^{m-1}(X, \mathbb{C}) \to \ldots$$

Tomando $m = n+1$ obtenemos

$$\cdots \to H^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\right) \longrightarrow H^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{C}\right) \xrightarrow{\varrho} H^n(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n+2}\left(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\right) \to \ldots \tag{2.1}$$

2.2. Mapeo tubular

En esta sección estudiaremos el mapeo dual del operador

$$\varrho : H^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{C}\right) \longrightarrow H^n(X, \mathbb{C}). \tag{2.2}$$

Proposición 2.2.1 *Sea un conjunto de integración* Γ*, el cual representa una (n+1)-clase de homología singular en* $\mathbb{P}^{n+1}$ *- X, entonces* Γ *es homóloga a cero en* $\mathbb{P}^{n+1}$.

Demostración:

En el caso de que $n+1 = 2m+1$ para algun entero positivo m, lo afirmado en la proposición se sigue simplemente de que $H_{2m+1}\left(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{Z}\right) = 0$.

Para el caso par n+1=2m, consideremos $\mathbb{P}^{m+1} \subset \mathbb{P}^{2m}$ un subespacio lineal en posición general a X y $W = \mathbb{P}^{m+1} \cdot X$. Entonces W es una subvariedad de $\mathbb{P}^{n+1}$ no singular de dimensión compleja m, en homología $W \sim (degQ)\, \gamma_m$ donde $\gamma_m \in H_{2m}\left(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{Z}\right)$ es el generador y $(degQ)$ es el grado del polinomio Q, el cual que define X. Como el número de intersección $\Gamma \cdot \gamma_m = \left(\frac{1}{degQ}\right) \Gamma \cdot W = 0$ pues Γ no intersecta X y como γ_m es un generador entonces $\Gamma \sim 0$ en $\mathbb{P}^{2m}$.

$\square$ Veamos que podemos llevar a Γ, un elemento de $H_{n+1}(X,\mathbb{C})$, a una forma estándar, esto es, encontrar una clase $\gamma \in H_n(X,\mathbb{Z})$ tal que $\Gamma \sim \tau_\varepsilon(\gamma)$, donde $\tau_\varepsilon(\gamma): \; H_n(X,\mathbb{Z}) \to H_{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{Z}\right)$.

Tomemos una métrica Riemanniana en $\mathbb{P}^{n+1}$. Escribamos $\Gamma = \partial R$ donde R es una $(n+2)$-cadena en $\mathbb{P}^{n+1}$. Podemos asumir que R está en posición general a X y por tanto R intersecta X de manera transversal en un n ciclo γ pues $\partial(R \cdot X) = \partial R \cdot X \pm R \cdot \partial X = 0$. Ahora dado $\gamma \in H_n(X,\mathbb{Z})$, sea $T_\varepsilon(\gamma) = \{z \,\epsilon\, \mathbb{P}^{n+1} | d(z,\gamma) < \varepsilon\}$. Por la transversalidad, para ε lo suficientemente pequeño, un punto z en $T_\varepsilon(\gamma)$ está únicamente determinado por un par (v,w) donde v está en γ y w pertenece al disco normal de radio ε a X en v.

Por tanto $T_\varepsilon(\gamma)$ es un tubo sólido de discos alrededor de γ y $\tau_\varepsilon(\gamma) = \partial T_\varepsilon(\gamma)$ es una familia disjunta de círculos en $\mathbb{P}^n - X$ parametrizada por γ. Claramente $\partial(R - T_\varepsilon(\gamma)) = \Gamma - \tau_\varepsilon(\gamma)$, entonces $\Gamma \sim \tau_\varepsilon(\gamma)$ en $H_{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{Z}\right)$. Llamaremos a $\tau_\varepsilon(\gamma)$ el ε-tubo sobre γ y $\tau(\gamma)$ será cualquier $\tau_\varepsilon(\gamma)$ para ε suficientemente pequeño. Notemos que si tenemos otro $\tau_{\widetilde{\varepsilon}}(\gamma)$ $\widetilde{\varepsilon}$-tubo, entonces $\tau_\varepsilon(\gamma)$ y $\tau_{\widetilde{\varepsilon}}(\gamma)$ serán homólogos. Lo cual nos permite argumentar que cualquier $(n+1)$-ciclo en $\mathbb{P}^{n+1} - X$ es homólogo a un ε-tubo sobre un n-ciclo γ en X.

Por otro lado, dada una q-cadena singular $\widetilde{\gamma}$ en X, podemos obtener $\tau(\widetilde{\gamma})$ una $(q+1)$-cadena en $\mathbb{P}^{n+1} - X$ que consisten en discos normales de radio ε sobre $\widetilde{\gamma}$. Además $\partial(\tau(\widetilde{\gamma})) = \tau(\partial\widetilde{\gamma})$, por lo tanto existe un mapeo inducido $\mathbb{Z}$-lineal dado geométricamente al tomar ε-tubos sobre ciclos:

$$\tau : H_n(X,\mathbb{Z}) \to H_{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{Z}\right). \tag{2.3}$$

Por lo visto anteriormente, el mapeo es suprayectivo. Veamos el Kernel de τ.

Si $\widetilde{\gamma} \in H_n(X,\mathbb{Z})$ y $\tau(\widetilde{\gamma}) = \partial R$ para alguna $(n+2)$-cadena R en el complemento de X, entonces $\Gamma = T_\varepsilon(\widetilde{\gamma}) - R$ es un $(n+2)$-ciclo donde $\Gamma \cdot X = \widetilde{\gamma}$.

1. Si $n+1$ es par, entonces $H_{n+2}\left(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{Z}\right) = 0$, luego $\Gamma = \partial C$, para alguna $(n+3)$-cadena C. Asumamos que C intersecta transversalmente a X en una $(n+1)$-cadena $c = C \cdot X$, luego $\partial c = \partial(C \cdot X) = \partial C \cdot X \pm C \cdot \partial X = \Gamma \cdot X = \widetilde{\gamma}$. de aquí que $\widetilde{\gamma} = 0$ en $H_n(X,\mathbb{Z})$.

2. Si $n+1 = 2m-1$ es impar, $\Gamma \in H_{2m}\left(\mathbb{P}^{2m-1}, \mathbb{Z}\right)$ entonces $\Gamma \sim l\mathbb{P}^m$ para algun $l \in \mathbb{Z}$ donde $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{2m-1}$ es un subespacio lineal. Entonces $\Gamma - l\mathbb{P}^m = \partial C$, tomando intersección con X tenemos que

$$\partial(C \cdot X) = (\Gamma - l\mathbb{P}^m) \cdot X = \widetilde{\gamma} - l(\mathbb{P}^m \cdot X)$$

de donde $\widetilde{\gamma} = l(\mathbb{P}^m \cdot X)$ en $H_{2m-2}(X,\mathbb{Z})$ donde $2m-2 = n$.

Resumiendo:

Proposición 2.2.2 *El mapeo τ es suprayectivo y es isomorfismo si $n+1$ es par. Para el caso impar el kernel está formado por clases de homología de X que son múltiplos enteros de la clase del homología de una sección lineal general $\mathbb{P}^m \cdot X$*

Corolario 2.2.3 *1. si $n+1$ es par tenemos que*

$$H_n(X,\mathbb{C}) \cong H_{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{C}\right)$$

2. *si $n+1$ es impar la siguiente sucesión es exacta*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}[\mathbb{P}^{\frac{n}{2}+1} \cdot X] \longrightarrow H_n\left(X, \mathbb{C}\right) \longrightarrow H_{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{C}\right) \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

Observación 2.2.4 *El mapeo τ se puede definir para toda k:*

$$\tau_k : H_k\left(X, \mathbb{Z}\right) \longrightarrow H_{k+1}\left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{Z}\right)$$

construyendo discos normales en k-cadenas en X para después tomar su frontera.

2.3. Cohomología Primitiva de X

Definición 1 *Sea $\widetilde{X}$ una variedad Kähler de dimensión $n,$ con su respectiva $(1,1)$ –forma de Kähler $\omega.$ Definimos el operador de Lefschetz, en las formas diferenciales C^{∞} como*

$$\begin{array}{rcl} L : \mathcal{A}^k\left(\widetilde{X}, \mathbb{C}\right) & \longrightarrow & \mathcal{A}^{k+2}\left(\widetilde{X}, \mathbb{C}\right) \\ \alpha & \longrightarrow & \omega \wedge \alpha \end{array}$$

donde $\mathcal{A}^k\left(\widetilde{X}, \mathbb{C}\right)$ son las k-formas diferenciales C^{∞} de $\widetilde{X}$ con coeficientes en los complejos.

Teorema 2.3.1 *([4]. Pag 146) Para $k \leq n$ el operador*

$$L^{n-k} : \mathcal{A}^k\left(\widetilde{X}, \mathbb{C}\right) \longrightarrow \mathcal{A}^{2n-k}\left(\widetilde{X}, \mathbb{C}\right)$$

donde la potencia $(n-k)$ denota composición, es un isomorfismo.

Si $k \leq n$ denotaremos

$$\left(\mathcal{A}^k_{\widetilde{X}}\right)_0 = Ker\left(L^{2n-k+1}\right) \subset \mathcal{A}^k_{\widetilde{X}}$$

el grupo de r-formas primitivas en $\widetilde{X}$.

Debido a que el operador L conmuta con el laplaciano ([4]. Pag 149) entonces el operador L está bien definido como operador entre formas harmónicas. Como nuestra hipersuperficie X es una variedad Kähler compacta, donde la forma de Kähler:

$$\omega = \frac{1}{2\Pi i} \partial\bar{\partial} log \|Z\|^2 \tag{2.5}$$

es la inducida por la métrica de Fubini-Study ([5]. Pag 109), entonces las k-formas harmónicas se pueden identificar con los k-grupos de cohomología de X ([4]. Pag 149). Por el teorema (2.3.1) el operador $L^{(n-k)}$ es inyectivo en las k-formas harmónicas y ya que $dim\left(H^k\left(X, \mathbb{C}\right)\right) = dim\left(H^{2n-k}\left(X, \mathbb{C}\right)\right)$ se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.3.2 *[Lefschetz]([4]. Pag 148) Para $k \leq n$ el operador*

$$L^{n-k} : H^k\left(X, \mathbb{C}\right) \longrightarrow H^{2n-k}\left(X, \mathbb{C}\right)$$

es un isomorfismo.

Definición 2 *Si $k \leq n$ definiremos*

$$H^k(X,\mathbb{C})_0 = Ker\left(L^{n-k+1}\right) \subset H^k(X,\mathbb{C})$$

el k-ésimo grupo de cohomología primitiva de X

Observación 2.3.3 *Para el caso cuando $k = n$ tenemos entonces que*

$$H^n(X,\mathbb{C})_0 = Ker(L) \subset H^n(X,\mathbb{C})$$

Proposición 2.3.4 *El espacio $H^n(X,\mathbb{C})_0$ con $n+1$ impar cumple lo siguiente:*

$$H^n(X,\mathbb{C})_0 \oplus \mathbb{C}[\omega^m] \cong H^n(X,\mathbb{C}) \tag{2.6}$$

donde $n = 2m$.

Demostración: Haciendo $k = n-2$, por el teorema 2.3.2

$$L^2 : H^{n-2}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{n+2}(X,\mathbb{C})$$

es un isomorfismo.

Por el teorema 2.1.1 y el lema 2.1.2 podemos identificar

$$\begin{array}{rcl} H^{2m-2}(X,\mathbb{C}) & \cong & \mathbb{C}[\omega^{m-1}] \\ H^{2m+2}(X,\mathbb{C}) & \cong & \mathbb{C}[\omega^{m+1}] \end{array}$$

Por tanto la imagen bajo L de $H^{2m-2}(X,\mathbb{C})$ es de dimensión 1.

Esto implica que el kernel del operador de Lefschetz:

$$L : H^n(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{n+2}(X,\mathbb{C})$$

tiene codimensión 1 en $H^n(X,\mathbb{C})$ y es complementaria a $L\left(\mathbb{C}[\omega^{m-1}]\right) = \mathbb{C}[\omega^m]$. □

Utilizando entonces (2.4) y (2.3.4) obtenemos lo siguiente en cohomología:

1. si $n+1$ es par tenemos que

$$H^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1} - X,\mathbb{C}\right) \cong H^n(X,\mathbb{C})$$

2. si $n+1$ es impar

$$H^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1} - X,\mathbb{C}\right) \cong H^n(X,\mathbb{C})_0 \tag{2.7}$$

Concluyendo entonces que para describir la cohomología de X trabajaremos con la cohomología de $U = \mathbb{P}^{n+1} - X$.

Capítulo 3

Reducción del orden del polo en formas diferenciales algebraicas definidas en el complemento de X

El objetivo de este capítulo es demostrar que para obtener representantes de la cohomología del complemento de X en $\mathbb{P}^{n+1}$ basta con trabajar con formas algebraicas racionales con polo en la hipersuperficie X y el cual sea de a lo más orden $n+1$.

Primero introduciremos el complejo doble de Čech-DeRham.

Sea $Q_j = \frac{\partial Q}{\partial z_j}$, definamos $U_j = \{z \in \mathbb{P}^{n+1} | \, Q_j(z) \neq 0\}$,

$$\mathcal{U} = \{U_j\}, \;\; W_j = U_j \cap \left(\mathbb{P}^{n+1} - X\right) \;\; y \;\; \mathcal{W} = \{W_j\}.$$

Notemos que debido a que X es no singular, $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{P}^{n+1}$. Sea

$$\mathcal{C}^q\left(\mathcal{U}, \Omega^p\left(*X\right)\right) = \prod_{j_0 < \cdots < j_q} \Omega^p_{U_{j_0} \cap \cdots \cap U_{j_q}}\left(*X\right),$$

donde $\Omega^p_{U_{j_0} \cap \cdots \cap U_{j_q}}\left(*X\right)$ denotan las p-formas diferenciales holomorfas en $U_{j_0} \cap \cdots \cap U_{j_q}$ con polo en X de orden finito. Consideremos lo operadores:

$$\begin{array}{rcl} \delta : \mathcal{C}^q\left(\mathcal{U}, \Omega^p\left(*X\right)\right) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{q+1}\left(\mathcal{U}, \Omega^p\left(*X\right)\right) \\ \left(\delta\omega\right)_{\left(j_0, \cdots, j_{q+1}\right)} & = & \sum \left(-1\right)^i \omega_{j_0, \cdots, \widehat{j_i}, \cdots, j_q} |_{U_{j_0} \cap \cdots \cap U_{j_{q+1}}} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} d:\mathcal{C}^{q}\left(\mathcal{U},\Omega^{p}\left(*X\right)\right) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{q}\left(\mathcal{U},\Omega^{p+1}\left(*X\right)\right) \\ \left(d\omega\right)_{\left(j_{0},\cdots,j_{q}\right)} & = & d\left(\omega_{j_{0},\cdots,j_{q}}\right) \end{array}$$

los operadores de Čech y DeRham respectivamente.

El diferencial total se define como

$$\begin{array}{rcl} D:\bigoplus_{p+q=m}\mathcal{C}^{q}\left(\mathcal{U},\Omega^{p}\left(*X\right)\right) & \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=m+1}\mathcal{C}^{q}\left(\mathcal{U},\Omega^{p+1}\left(*X\right)\right) \\ D & = & d+\left(-1\right)^{p}\delta \end{array}$$

Los complejos de Čech y DeRham están relacionados en el siguiente bicomplejo:

$$\begin{array}{ccccccccc} \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \cdots \\ \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow & & \\ \mathcal{C}^{q}\left(\mathcal{U},\Omega^{0}\left(_{*}X\right)\right) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^{q}\left(\mathcal{U},\Omega^{1}\left(_{*}X\right)\right) & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^{q}\left(\mathcal{U},\Omega^{p}\left(_{*}X\right)\right) & \xrightarrow{d} & \cdots \\ \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow & & \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \cdots \\ \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow & & \\ \mathcal{C}^{1}\left(\mathcal{U},\Omega^{0}\left(_{*}X\right)\right) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^{1}\left(\mathcal{U},\Omega^{1}\left(_{*}X\right)\right) & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^{1}\left(\mathcal{U},\Omega^{p}\left(_{*}X\right)\right) & \xrightarrow{d} & \cdots \\ \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow & & \\ \mathcal{C}^{0}\left(\mathcal{U},\Omega^{0}\left(_{*}X\right)\right) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^{0}\left(\mathcal{U},\Omega^{1}\left(_{*}X\right)\right) & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^{0}\left(\mathcal{U},\Omega^{p}\left(_{*}X\right)\right) & \xrightarrow{d} & \cdots \end{array}$$

El operador D define un complejo cuya cohomología la denotamos como $\mathbb{H}^{*}\left(\mathbb{P}^{n+1}-X\right)$, la hipercohomología de $\mathbb{P}^{n+1}-X$.

Teorema 3.0.5 (Serre) *([3],Pag. 239) Sea $\mathcal{F}$ es una gavilla coherente sobre una variedad afin V con cubierta abierta finita por variedades afines $\mathcal{U}=U_i$, entonces los grupos de cohomología de Čech son cero en niveles positivos:*

$$H^{q}\left(\mathcal{U},\mathcal{F}\right)=0\quad\forall q>0.$$

Proposición 3.0.6 *Sea X una hipersuperficie proyectiva lisa definida por un polinomio Q de grado d. Entonces $\mathbb{P}^{n+1}-X$ es una variedad afin*

Demostración:

Tomemos el conjunto de monomios en $n+2$ variables complejas de grado d y hagamos la siguientes asignación: Dado un multiindice $I=\left(i_0,...,i_{n+1}\right)$, con $\sum_{j=0}^{n+1}i_j=d$, entonces sea $w_I=z_0^{i_0}\dots z_{n+1}^{i_{n+1}}$. Por lo que:

$$\left[z_0^d,z_0^{d-1}z_1,\cdots,\left(z_0^{i_0}\dots z_{n+1}^{i_{n+1}}\right),\cdots,z_{n+1}^d\right]\rightarrow\left[w_{(d,0,\dots,0)}:w_{(d-1,1,\dots,0)}:\cdots:w_I:\cdots:w_{(0,\dots,d)}\right]$$

Por lo cual $\{Q=0\}\rightarrow\{\sum a_I w_I=0\}$ es un hiperplano proyectivo, lo anterior implica que $\mathbb{P}^{n+1}-X\rightarrow\mathbb{P}^{N}-\{\sum a_I w_I=0\}\cong\mathbb{C}^N$. $\square$

Analogamente los abiertos $U_j \quad y \;\; W_j$ son abiertos afines, de donde podemos concluir como consecuencia del teorema de Serre que

$$\check{H}^q \left(\mathcal{W}, \Omega^p\right) = 0 \qquad \forall q > 0. \tag{3.1}$$

Debido a que las p-formas holomorfas en el complemento de X, se pueden estudiar con p-formas racionales globales con polo de orden arbitrario en X, entonces:

$$\check{H}^q \left(\mathcal{U}, \Omega^p \left(*X\right)\right) = 0 \qquad \forall q > 0. \tag{3.2}$$

Por tanto si en la sucesión espectral del bicomplejo hacemos primero cohomología de Cěch obtenemos el complejo algebraico de DeRham de $\mathbb{P}^{n+1} - X$:

$$0 \longrightarrow H^0 \left(\mathbb{P}^{n+1}, \Omega^0 \left(*X\right)\right) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \ldots \longrightarrow H^0 \left(\mathbb{P}^{n+1}, \Omega^{n+1} \left(*X\right)\right) \longrightarrow 0$$

Demostrando así el siguiente resultado:

Proposición 3.0.7 *La hipercohomología de $\mathbb{P}^{n+1} - X$ calcula la cohomología de DeRham algebraica del complemento de X:*

$$\mathbb{H}^* \left(\mathbb{P}^{n+1} - X\right) \;=\; H^*_{DR} \left(\mathbb{P}^{n+1} - X\right)$$

Teorema 3.0.8 *([6] , Pag. 351) Para una variedad algebraica compleja afín lisa, la cohomología singular es la cohomología de DeRham algebraica.*

Por el teorema (3.0.8), podemos estudiar la cohomología singular del complemento de X con formas racionales globales que tengan polo de orden arbitrario en X.

Teorema 3.0.9 *Sea X una hipersuperficie proyectiva y suave en $\mathbb{P}^{n+1}$ definida por el polinomio homogéneo $\{Q = 0\}$, entonces $H^{n+1} \left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{C}\right)$ se puede representar con formas algebraicas racionales en $\mathbb{P}^{n+1}$ con polos de orden a lo más $(n + 1)$ en X.*

Denotemos como $\mathcal{C}^q \left(\mathcal{U}, \Omega^p \left(lX\right)\right)$ aquellos elementos de $\mathcal{C}^q \left(\mathcal{U}, \Omega^p \left({}_*X\right)\right)$ cuyas componentes tienen polo de orden l en X y definamos el siguiente operador:

$$\begin{aligned} H_l : \mathcal{C}^q \left(\mathcal{U}, \Omega^p \left(lX\right)\right) \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{C}^q \left(\mathcal{U}, \Omega^{p-1} \left(\left(l-1\right) X\right)\right) \\ \left(H_l \omega\right)_{\left(j_0, \cdots, j_q\right)} \quad &= \quad \frac{1}{1-l} \cdot \frac{Q}{Q_{j_0}} K_{j_0} \omega_{j_0, \cdots, j_q} \end{aligned}$$

donde $K_{j_0} \;= i \left(\frac{\partial}{\partial z_{j_0}}\right)$.

Apartir de aqui, omitiremos los subíndices de H_l, tomando en cuenta que se aplicará el operador correspondiente al orden del polo de la forma racional.

Lema 3.0.10 *Para $l \geq 2$, H satisface $dH \;+\; Hd \equiv 1$, modulo el grupo $\mathcal{C}^q \left(\mathcal{U}, \Omega^p \left(\left(l-1\right) X\right)\right)$.*

Demostración: Sea $\alpha \in \mathcal{C}^q \left(\mathcal{U}, \Omega^p \left(lX\right)\right)$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $\left(\alpha^p_q\right)_{j_0, \cdots, j_q} = \frac{f_I}{Q^l} dz_I$. Para el caso donde $j_0 \;\notin\; I$, tenemos que $H_l \left(\alpha^p_q\right) = 0$ pues se hace una contracción con respecto a $\frac{\partial}{\partial z_{j_0}}$, luego:

$$\left(d\alpha^p_q\right)_{j_0, \ldots, j_q} = \left(\frac{Q^l df_I - lQ^{l-1} f_I dQ}{Q^{2l}}\right) dz_I = \frac{df_I dz_I}{Q^l} - \frac{l f_I dQ dz_I}{Q^{l+1}}$$

Aplicando ahora H a la fórmula anterior obtenemos

$$\begin{aligned} H\left(d\alpha_q^p\right) &= \tfrac{1}{1-l}\cdot\tfrac{f_{j_0}Q}{Q_{j_0}Q^l}dx_I - \tfrac{1}{1-l-1}\cdot\tfrac{lf_IQQ_{j_0}}{Q_{j_0}Q^{l+1}}dz_I \quad \equiv \quad \alpha_q^p \\ \Rightarrow \qquad & H\left(d\alpha_q^p\right) + dH\left(\alpha_q^p\right) \equiv \alpha_q^p \end{aligned}$$

Para el caso cuando $j_0 \in I$ tenemos que

$$\begin{aligned} H\left(\alpha_q^p\right) &= \frac{1}{1-l}\cdot\frac{Qf_I}{Q_{j_0}}i\left(\frac{\partial}{\partial z_{j_0}}\right)(dz_I) \\ dH\left(\alpha_q^p\right) &= d\left(\frac{1}{1-l}\cdot\frac{f_I}{Q_{j_0}Q^{l-1}}dz_{I-1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1-l}\right)\frac{Q_{j_0}Q^{l-1}df_I - f_Id\left(Q_{j_0}Q^{l-1}\right)}{Q_{j_0}^2Q^{2l}}dz_{I-1} \\ &\equiv \left(\frac{df_I}{(1-l)\,Q_{j_0}Q^{l-1}} + \frac{f_IdQ}{Q^{l+1}}\right)dz_{I-1} \\ &\equiv \frac{f_IdQ}{Q^{l+1}}dz_{I-1} \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} d\alpha_q^p &= \frac{df_I}{Q^l}dz_I - \frac{lf_IdQ}{Q^{l+1}} \\ H\left(d\alpha_q^p\right) &= \frac{1}{1-l}\cdot\frac{Q}{Q_{j_0}Q^l}K_{j_0}\left(df_Idz_I\right) - \left(\frac{1}{1-(l+1)}\right)\frac{lf_IQ}{Q^{l+1}Q_{j_0}}k_{j_0}\left(dQdz_I\right) \\ &\equiv \frac{f_I}{Q^lQ_{j_0}}\left(Q_{j_0}dz_I - dQdz_{I-1}\right) \\ &= \alpha_q^p - dH\left(\alpha_q^p\right). \end{aligned}$$

□

Lema 3.0.11 *Sea α una cocadena en el complejo Čech-DeRham cuyo orden de polo $l_J \geq 2$ en cada coordenada J. Entonces*

$$\alpha \equiv DH\alpha + HD\alpha$$

módulo cocadenas cuyo orden del sea $l_J - 1$. En particular, si α es un D-cociclo, tenemos que

$$\widetilde{\alpha} = (I - DH)\,\alpha,$$

es cohomóloga a α y tiene orden del polo $l_J - 1$

Demostración: Sea α_q^p, la componente de α en $\mathcal{C}^q\left(\mathcal{U}, \Omega^p\left({}_*X\right)\right)$, luego

$$\begin{aligned} \alpha - DH\alpha &= \sum_{p,q}\left(\alpha_q^p - dH\alpha_q^p - (-1)^{p-1}\,\delta H\alpha_q^p\right) \\ &\equiv Hd\alpha_q^p + (-1)^p\,\delta\alpha_q^p \end{aligned}$$

Como H y δ son independientes entonces conmutan, de donde obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha - DH\alpha &\equiv \sum_{p,q}\left(\alpha_q^p - dH\alpha_q^p - (-1)^{p-1} H\delta\alpha_q^p\right)\\ &\equiv HD\alpha.\end{aligned}$$

□

Demostración:(Teorema 3.0.9)

Sea $\Omega_A = \frac{A\Omega}{Q^m}$, la cual representa una clase en $H^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{C}\right)$, con $m \geq n+1$.

La idea para la demostración es reducir el orden del polo de Ω_A utilizando la igualdad demostrada en el lema 3.0.11. El primer paso es encajar Ω_A en el complejo doble de Čech-DeRham, pues es una forma diferencial global cerrada, entonces $\Omega_A \in H^0\left(\mathbb{P}^{n+1}, \Omega^{n+1}(*X)\right)$: $\Omega_A \sim \left(\frac{A\Omega}{Q^m}\right)_i$.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \stackrel{d}{\to} & 0 & \stackrel{d}{\to} & \dots & \stackrel{d}{\to} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \stackrel{d}{\to} & 0 & \stackrel{d}{\to} & \dots & \stackrel{d}{\to} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \stackrel{d}{\to} & 0 & \stackrel{d}{\to} & \dots & \stackrel{d}{\to} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \stackrel{d}{\to} & 0 & \stackrel{d}{\to} & \dots & \stackrel{d}{\to} & \Omega_A = \left(\frac{A\Omega}{Q^m}\right)_j
\end{array}$$

Luego $(I - DH)^{m-1}\left(\frac{A\Omega}{Q^m}\right)_j$ será una forma D-cohomóloga con polo simple:

$$\begin{array}{ccccccc}
\omega_{n+1} & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \xrightarrow{d} & \omega_n & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \omega_0
\end{array}$$

$[\left(\frac{A\Omega}{Q^m}\right)_j] = [\sum_i \omega_i]$ donde $\omega_i \in \mathcal{C}^i\left(\mathcal{U}, \Omega^{n+1-i}(1X)\right)$, obteniendo así un D-cociclo con un polo simple en X.

Tenemos que $\sum \omega_i$ la cual denotaremos como $\sum_{i\leq n+1} \omega_i^{(n+1)}$, es un D-cociclo por lo que ω_{n+1} es δ-cerrada y, por el Teorema 3.0.5 $\omega_{n+1} = \delta\gamma_{n+1}$, para algún $\gamma_{n+1} \in \mathcal{C}^n\left(\mathcal{U}, \Omega^1(*X)\right)$. Como ω_{n+1} tiene un polo simple en X, entonces también γ_{n+1} tiene un polo simple. Luego

$$\omega^{(n)} = \sum_{i\leq n+1} \omega_i^{(n+1)} - (-1)^n D\left(\gamma_{n+1}\right),$$

la cual denotaremos como $\sum_{i\leq n} \omega^{(n)}$, es D-cohomóloga a $\sum \omega_i$ y tiene un polo doble en X y su componente $(n+1, 0)$ es 0.

Supongamos que $\sum_{i\leq j+1} \omega_i^{(j+1)}$ es D-cohomóloga a $\sum \omega_i$, tiene un polo de orden $n-j$ en X y su componente $(k, n-k)$ es 0 para toda $k > j+1$, además por ser D-cociclo existe $\gamma_{j+1} \in \mathcal{C}^j\left(\mathcal{U}, \Omega^{n+1-j}(*X)\right)$ tal que $\delta\gamma_{j+1} = \omega_{j+1}^{(j+1)}$.

Por tanto

$$\omega^{(j)} = \sum_{i\leq j+1} \omega_i^{(j+1)} - (-1)^j D\left(\gamma_{j+1}\right) \tag{3.3}$$

es D-cohomóloga a $\sum \omega_i$, tiene un polo de orden $n+1-j$ y su componente $(k, n-k) = 0\;\forall\, k > j$

Al finalizar el proceso llegamos a que $\omega^{(0)}$ tiene un polo en X de orden $n+1$, es D-cohomóloga a $\sum \omega_i$ y su única componente no cero es $(1, n+1)$, obteniendo así una forma racional en el complejo doble con polo de orden $n+1$ la cual es D-cohomóga a Ω_A. □

Capítulo 4

La filtración ingenua y la filtración de Hodge

En este capítulo introduciremos los conceptos de complejos filtrados y la filtración ingenua de un complejo doble son el objetivo de analizar la filtración de Hodge de X de manera algebraica.

4.1. Complejos filtrados

Definición 3 *Dado un espacio vectorial complejo A, una filtración decreciente en A está dada por una familia de subespacios vectoriales* $\{F^p A\}$ *tal que*

$$\cdots \subset F^p A \subset F^{p-1} A \subset \cdots \subset F^0 A = A, \quad para \;\; p \geq 0.$$

Si (A^*, d) es un complejo, una filtración decreciente en (A^*, d) es una filtracion decreciente $\{F^p A^k\}$ para cada A^k tal que $d\left(F^p A^k\right) \subset F^p A^{k+1}$, por lo que entonces tenemos una familia de complejos:

$$\{(F^p A^k, d)\}_p = \{\cdots \xrightarrow{d} F^p A^k \xrightarrow{d} F^p A^{k+1} \xrightarrow{d} \cdots\}_p$$

Definición 4 *(Filtración ingenua)*

Sea (A^*, d) *una complejo. Sea* $F^p A^* := A^{\geq p}$, *el complejo obtenido al considerar los términos de orden mayor o igual a p:*

$$0 \longrightarrow A^p \longrightarrow A^{p+1} \longrightarrow A^{p+2} \longrightarrow \cdots \tag{4.1}$$

Definición 5 *(Filtración ingenua de un complejo doble)*

Sea $(A^{r,s}, D_1, D_2)$ *un complejo doble para grados positivos. Sea* (A^*, D) *el complejo asociado.*

$$A^k = \bigoplus_{r+s=k} A^{r,s}, \quad D = D_1 + (-1)^p D_2$$

Como $DA^{r,s} \subset A^{r+1,s} \oplus A^{r,s+1}$. *Entonces*

$$F^pA^k = \bigoplus_{r+s=k, r\geq p} A^{r,s}$$

define una filtración decreciente en el complejo (A^*, D), *la filtración* (F^pA^k) *de* (A, D) *es la llamada filtración ingenua del complejo* (A, D) *asociada al bicomplejo* $(A^{r,s}, D_1, D_2)$.

4.2. Filtración de Hodge

Definición 6 *Una estructura de Hodge de peso k es un par* $(H_{\mathbb{Z}}, \{H^{p,q}\})$ *tal que:*

1. $H_{\mathbb{Z}}$ *es un* $\mathbb{Z}$*-módulo*
2. $H^{p,q}$ *son* $\mathbb{C}$*-espacios vectoriales tales que* $H^{p,q} = \overline{H}^{q,p}$
3. $H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$

Definición 7 *Dada una estructura de Hodge de peso k* $(H_{\mathbb{Z}}, \{H^{p,q}\})$ *, definimos la filtración de Hodge de* $H_{\mathbb{C}}$ *de nivel* r *como:*

$$F^rH_{\mathbb{C}} := \oplus_{p\geq r} H^{p,q}.$$

Teorema 4.2.1 (Hodge) *([4], Pag 205) Si X es una variedad algebraica proyectiva lisa, entonces* $H^k(X, \mathbb{Z})$ *admite una estructura de Hodge de peso k; i.e,*

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X), \quad \text{donde } H^{p,q}(X) = \overline{H}^{q,p}(X), \quad p, q \geq 0$$

donde $H^{p,q}$ *es el conjunto de clases representadas por formas cerradas de tipo* (p, q).

4.3. La filtración ingenua de la cohomología de Hodge

Veamos que la cohomología de X admite una estructura de Hodge

Teorema 4.3.1 *Si X es una variedad algebraica proyectiva lisa, entonces*

$$H^{p,q}(X) \cong \check{H}^q(X, \Omega^p_X)$$

Antes de dar la demostración del teorema, recordemos los siguientes resultados:

Lema 4.3.2 *(Deligne) Si* $\widetilde{X}$ *es una variedad Kähler compacta y D es divisor a cruzamientos normales, entonces la sucesión espectral asociada a la filtración de Hodge degenera en el primer paso.*

Corolario 4.3.3 *Tomando* $\widetilde{X} = \mathbb{P}^{n+1}$ *y* $D = X$, *tenemos que la sucesión espectral asociada a la filtración de Hodge degenera en el primer paso.*

Demostración:

Tomemos el complejo holomorfo de gavillas de la hipersuperficie X:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\partial} \Omega^1_X \xrightarrow{\partial} \Omega^2_X \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^n_X \xrightarrow{\partial} 0 \tag{4.2}$$

Ahora utilicemos la resolución del operador de derivación antiholomorfo $\bar{\partial}$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & & & 0 & \\
 & \bar{\partial}\uparrow & & & & \bar{\partial}\uparrow & \\
0 \xrightarrow{\partial} & C^{\infty}\left(\Lambda^{0,n}T_X^{*}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right) & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & C^{\infty}\left(\Lambda^{n,n}T_X^{*}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right) & \xrightarrow{\partial} 0 \\
 & \bar{\partial}\uparrow & & & & \bar{\partial}\uparrow & \\
 & \vdots & & & & \vdots & \\
 & \bar{\partial}\uparrow & & & & \bar{\partial}\uparrow & \\
0 \xrightarrow{\partial} & C^{\infty}\left(\Lambda^{0,1}T_X^{*}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right) & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & C^{\infty}\left(\Lambda^{n,1}T_X^{*}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right) & \xrightarrow{\partial} 0 \\
 & \bar{\partial}\uparrow & & & & \bar{\partial}\uparrow & \\
0 \xrightarrow{\partial} & C^{\infty}\left(\Lambda^{0,0}T_X^{*}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right) & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & C^{\infty}\left(\Lambda^{n,0}T_X^{*}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right) & \xrightarrow{\partial} 0
\end{array}
$$

Donde los grupos de cohomología en los complejos

$$0 \longrightarrow C^{\infty}\left(\Lambda^{p,0}T^{*}_{X,\mathbb{C}}\right) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \to C^{\infty}\left(\Lambda^{p,q}T^{*}_{X,\mathbb{C}}\right) \to \cdots \to C^{\infty}\left(\Lambda^{p,n+1}T^{*}_{X,\mathbb{C}}\right) \xrightarrow{\bar{\partial}} 0$$

son las formas de tipo (p,q), i.e., $H^{p,q}(X)$.

Como también tenemos el bicomplejo de Čech-DeRham asociado al complejo (4.2), el cual también degenera, tenemos que sus grupos de cohomología vertical

$$\check{H}^{q}\left(X,\Omega_X^{p}\right)$$

son isomorfos a $H^{p,q}(X)$. □

Aplicando la filtración ingenua al complejo algebraico de DeRham

$$0 \longrightarrow \Omega_X^{p} \longrightarrow \Omega_X^{p+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_X^{n} \longrightarrow 0, \tag{4.3}$$

y tomando el bicomplejo con la resolución del operador de derivación antiholomorfa $\bar{\partial}$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & & & 0 & \\
 & \bar{\partial}\uparrow & & & & \bar{\partial}\uparrow & \\
0 \xrightarrow{\partial} & C^{\infty}\left(\Lambda^{p,n}T_X^{*}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right) & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & C^{\infty}\left(\Lambda^{n,n}T_X^{*}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right) & \xrightarrow{\partial} 0 \\
 & \bar{\partial}\uparrow & & & & \bar{\partial}\uparrow & \\
 & \vdots & & & & \vdots & \\
 & \bar{\partial}\uparrow & & & & \bar{\partial}\uparrow & \\
0 \xrightarrow{\partial} & C^{\infty}\left(\Lambda^{p,1}T_X^{*}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right) & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & C^{\infty}\left(\Lambda^{n,1}T_X^{*}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right) & \xrightarrow{\partial} 0 \\
 & \bar{\partial}\uparrow & & & & \bar{\partial}\uparrow & \\
0 \xrightarrow{\partial} & C^{\infty}\left(\Lambda^{p,0}T_X^{*}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right) & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & C^{\infty}\left(\Lambda^{n,0}T_X^{*}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right) & \xrightarrow{\partial} 0
\end{array}
$$

Si d es el operador de derivación en el bicomplejo dado por:

$$d : \bigoplus_{r+s=k,\ r\geq p} C^{\infty}\left(\Lambda^{r,s}T_X^{*}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right) \longrightarrow \bigoplus_{r+s=k+1,\ r\geq p} C^{\infty}\left(\Lambda^{r,s}T_X^{*}\bigotimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\right)$$

$$d = \partial + (-1)^{r}\,\bar{\partial} \tag{4.4}$$

Obtenemos entonces una filtración en la hipercohomología del bicomplejo la cual nos da la filtración de Hodge de la cohomología de X:

$$F^r \mathbb{H}^k_{DR}(X) = F^r H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p \geq r, p+q=k} H^{p,q}. \tag{4.5}$$

Esta es una manera algebraica, utilizando la filtración ingenua, de obtener la filtración de Hodge, la cual usualmente se introduce vía análisis armónico.

Capítulo 5

Filtración de la cohomología de X por el orden del polo

En este capítulo introduciremos el complejo logarítmico en la hipersuperficie X. El objetivo es analizar el mapeo residuo:

$$res : \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\left((n+1)X)\right) \longrightarrow H^n\left(X, \mathbb{C}\right)$$

el cual nos dará la relación entre el orden del polo en X de las formas diferenciales racionales globales y nivel de la filtración en la estructura de Hodge de la cohomología de X.

5.1. Complejo logarítmico

Dada la hipersuperficie lisa X de $\mathbb{P}^{n+1}$, definamos el complejo holomorfo con singularidades logarítmicas sobre X.

Sea $\Omega^k_{\mathbb{P}^{n+1}}\left(logX\right)$ la subgavilla de la gavilla de las formas meromorfas $\Omega^k_{\mathbb{P}^{n+1}}\left(*X\right)$ en $\mathbb{P}^{n+1}$, holomorfas en $U = \mathbb{P}^{n+1} - X$, determinada por:

$\alpha \in \Omega^k_{\mathbb{P}^{n+1}}\left(logX\right)$ si y sólo si tanto α como $d\alpha$ admiten un polo simple en X.

Observación 5.1.1 *Si $\alpha \in \Omega^k_{\mathbb{P}^{n+1}}\left(logX\right)$ entonces $d\alpha$ es d-cerrada.*

Lo cual nos permite obtener el siguiente subcomplejo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega^1_{\mathbb{P}^{n+1}}\left(logX\right) \xrightarrow{d} \Omega^2_{\mathbb{P}^{n+1}}\left(logX\right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^n_{\mathbb{P}^{n+1}}\left(logX\right) \xrightarrow{d} 0$$

Si tomamos la resolución con δ, el operador de Čech y la hipercohomología del bicomplejo obtendremos $\mathbb{H}^*\left(\mathbb{P}^{n+1}, \Omega^*_{\mathbb{P}^{n+1}}\left(log\ X\right)\right)$.

Teorema 5.1.2 *([4], Pag. 208) Sea $U = \mathbb{P}^{n+1} - X$, con X hipersuperficie lisa, entonces:*

$$H^k(U, \mathbb{C}) = \mathbb{H}^k\left(\mathbb{P}^{n+1}, \Omega^*_{\mathbb{P}^{n+1}}(log\, X)\right)$$

5.2. Mapeo Residuo

Consideremos $\Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}$ y fijemos la sección

$$\Omega = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i z_i dz_0 \wedge ... \wedge \widehat{dz_i} \wedge ... \wedge dz_{n+1}. \tag{5.1}$$

Luego la expresión

$$\Omega_A = \frac{A\Omega}{Q^{a+1}} \qquad con \qquad deg(A) + n + 2 = (a+1)\, deg(Q)$$

define una (n+1)-forma racional con polo en X de orden $a+1$.

El polinomio A del numerador se llama *adjunta de nivel a y* Ω_A *se dice que tiene nivel de adjunción a.*

Para cada clase de cohomología (k-1)-dimensional α en el complemento de X, queremos definir una clase de cohomologia k-dimensional Res(α) en X:

$$res_{Top} : H^k\left(\mathbb{P}^{n+1} - X, \mathbb{Z}\right) \longrightarrow H^{k-1}(X, \mathbb{Z})$$

Dado γ un (k-1)-ciclo en X, sea $\tau_k(\gamma)$ el k-ciclo en $\mathbb{P}^{n+1} - X$ como en la observación 2.2.4 donde el operador adjunto, salvo multiplicación por $2\pi i$, es el residuo topológico. Por tanto, si una clase de cohomología de $\mathbb{P}^{n+1} - X$ está representada por una forma diferencial α, entonces $res_{Top}(\alpha)$ está definido tal que

$$\int_\gamma res_{Top}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau(\gamma)} \alpha$$

Para una k-forma diferencial logarítmica a nivel de gérmenes en el complemento de X que está dado por

$$\omega = \beta + \alpha \wedge \frac{dQ}{Q} \tag{5.2}$$

donde $\beta \in \Omega^k_{\mathbb{P}^{n+1}}$, $\alpha \in \Omega^{k-1}_{\mathbb{P}^{n+1}}$ se define el residuo como

$$\begin{array}{rcl} res : \Omega^k_{\mathbb{P}^{n+1}}(logX) & \longrightarrow & \Omega^{k-1}_X \\ \omega & \longrightarrow & res(\omega) = \alpha|_X \end{array}$$

Observación 5.2.1 *El mapeo residuo también se puede definir en el bicomplejo con singularidades logarítmicas en X de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rcl} res : \bigoplus\limits_{p+q=k} \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \Omega^p(logX)) & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{p+q=k} \mathcal{C}^q\left(\mathcal{U} \cap X, \Omega^{p-1}_X\right) \\ \left(\beta_I + \alpha_I \wedge \dfrac{dQ}{Q}\right)_{|I|=k} & \longrightarrow & (\alpha_I|_X)_{|I|=k}\,. \end{array}$$

Notemos que el mapeo residuo hace una contracción con respecto a dQ *y multiplica la forma por Q. Por lo cual si tenemos una* $k+1$*-forma local con polo simple en Q de la siguiente manera:* $\left(\gamma_I + \frac{\beta_I}{Q} + \alpha_I \wedge \frac{dQ}{Q}\right)_I$ *entonces el residuo actuará se define como:*

$$res\left(\gamma_I + \frac{\beta_I}{Q} + \alpha_I \wedge \frac{dQ}{Q}\right)_I = \left(\alpha_I|_X\right)_{|I|=k} \tag{5.3}$$

Por lo que podemos enunciar el siguiente resultado:

Teorema 5.2.2 *El mapeo residuo satisface las siguientes propiedades:*

1. $res\left(\Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\left((n+1)X\right)\right) = H^n\left(X,\mathbb{C}\right)_0.$

2. $res\left(\Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\left((a+1)X\right)\right) = F^{n-a}H^n\left(X,\mathbb{C}\right)_0$ *donde la parte derecha se refiere a la filtración de Hodge de la cohomología primitiva de X.*

Demostración: La primera parte se obtiene del corolario 2.2.3. Para (2) primero demostraremos la contención hacia la derecha $(\subseteq)$. *Consideremos el bicomplejo Cěch-DeRham pero utilizando la filtración ingenua en las formas diferenciales de* $U = \mathbb{P}^{n+1} - X$*:*

$$0 \longrightarrow \Omega_U^{a+1} \longrightarrow \Omega_U^{a+2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_U^{n+1} \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \cdots \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow & & \\
\mathcal{C}^q\left(\mathcal{U},\Omega^{a+1}(*X)\right) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^q\left(\mathcal{U},\Omega^{a+2}(*X)\right) & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^q\left(\mathcal{U},\Omega^{p}(*X)\right) & \xrightarrow{d} & \cdots \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow & & \\
\vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \cdots \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow & & \\
\mathcal{C}^1\left(\mathcal{U},\Omega^{a+1}(*X)\right) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^1\left(\mathcal{U},\Omega^{a+2}(*X)\right) & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^1\left(\mathcal{U},\Omega^{p}(*X)\right) & \xrightarrow{d} & \cdots \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow & & \\
\mathcal{C}^0\left(\mathcal{U},\Omega^{a+1}(*X)\right) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^0\left(\mathcal{U},\Omega^{a+2}(*X)\right) & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}^0\left(\mathcal{U},\Omega^{p}(*X)\right) & \xrightarrow{d} & \cdots
\end{array}$$

Entonces dada una (n+1)-forma diferencial en el complemento cuyo orden del polo es a+1: $\omega = \frac{A\Omega}{Q^{a+1}}$, *esta se encaja en el bicomplejo*

$$\Omega_A \sim \left(\frac{A\Omega}{Q^{a+1}}\right)_i \in H^0\left(\mathbb{P}^{n+1},\Omega^{n+1}(*X)\right)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \stackrel{d}{\to} & 0 & \stackrel{d}{\to} & \dots & \stackrel{d}{\to} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \stackrel{d}{\to} & 0 & \stackrel{d}{\to} & \dots & \stackrel{d}{\to} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \stackrel{d}{\to} & 0 & \stackrel{d}{\to} & \dots & \stackrel{d}{\to} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \stackrel{d}{\to} & 0 & \stackrel{d}{\to} & \dots & \stackrel{d}{\to} & \Omega_A = \left(\frac{A\Omega}{Q^{a+1}}\right)_j
\end{array}$$

Luego $(I - DH)^a \left(\frac{A\Omega}{Q^m}\right)_j$ *será una forma D-cohomóloga con polo simple:*

$$\begin{array}{ccccccc}
\omega_a & \stackrel{d}{\to} & 0 & \stackrel{d}{\to} & \dots & \stackrel{d}{\to} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \stackrel{d}{\to} & \omega_{a-1} & \stackrel{d}{\to} & \dots & \stackrel{d}{\to} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \stackrel{d}{\to} & 0 & \stackrel{d}{\to} & \dots & \stackrel{d}{\to} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \stackrel{d}{\to} & 0 & \stackrel{d}{\to} & \dots & \stackrel{d}{\to} & \omega_0
\end{array}$$

$$Res \qquad \downarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\widetilde{\omega_a} & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \ldots & \xrightarrow{d} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \xrightarrow{d} & \widetilde{\omega_{a-1}} & \xrightarrow{d} & \ldots & \xrightarrow{d} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \ldots & \xrightarrow{d} & 0 \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \ldots & \xrightarrow{d} & \widetilde{\omega_0}
\end{array}$$

Donde

$$\left[res\left(\frac{A\Omega}{Q^{a+1}}\right)_j\right] = \left[\sum_{0\leq i\leq a}\widetilde{\omega}_i\right]; \qquad \widetilde{\omega}_i \in \mathcal{C}^i\left(\mathcal{U}\cap X, \Omega^{n+1-i}|_X\right)$$

Luego analogamente como en (3.3) podemos encontrar un elemento γ D-cohomólogo a $\sum_{i\leq a}\widetilde{\omega}_i$ cuyo único elemento no cero sea de tipo $(0,n)$, pero ya que $D\gamma = 0,$ entonces γ es $\delta-$cerrada, entonces:

$$\gamma \in H^0\left(\mathcal{U}\cap X, \Omega^n_X\right) \cong H^{n,0}\left(X\right) \subset F^{n-a}H^n\left(X,\mathbb{C}\right).$$

Utilizando la propiedad 1, la imagen del mapeo residuo está contenida en la cohomología primitiva de X, cuya filtración de Hodge cumple que:

$$F^{n-a}H^n\left(X,\mathbb{C}\right)_0 \subset F^{n-a}H^n\left(X,\mathbb{C}\right).$$

Por lo tanto γ se puede ver como elemento de $F^{n-a}H^n\left(X,\mathbb{C}\right)_0$.

Ahora, para demostrar la contención hacia la izquierda $(\supseteq)$. Si tenemos $\gamma \in F^{n-a}H^n\left(X,\mathbb{C}\right)_0,$ debido a que:

$$\begin{aligned}
F^{n-a}H^n\left(X,\mathbb{C}\right)_0 &= \bigoplus_{p+q=n,\ p\geq n-a} H_0^{p,q} \\
&\subset \bigoplus_{p+q=n,\ p\geq n-a} H^{p,q} \\
&\cong \bigoplus_{p+q=n,\ p\geq n-a} H^q\left(\mathcal{U}\cap X, \Omega^p\right) \\
&= F^{n-a}\mathbb{H}^n\left(X\right)
\end{aligned}$$

podemos considerar que $\gamma = \sum_{p \geq n-a} \gamma^{p,q}$ *donde* $\gamma^{p,q} \in \mathcal{C}^q \left(\mathcal{U} \cap X, \Omega^p\right)$ *y* γ *es D-cerrada. Dado que*

$$\widetilde{\gamma} = \sum_{p \geq n-a} \gamma^{p,q} \wedge \frac{dQ}{Q}$$

es D-cerrada, con polo simple en X y

$$res\left(\widetilde{\gamma}\right) = \gamma$$

entonces analogamente a (3.3), existe una (n+1)-forma global, D-cohomologa a $\widetilde{\gamma}$, *cuyo único elemento no cero sea de tipo* $(0, n+1)$, *y el orden del polo en X es* $a+1$.

Terminando así la demostración de (2). □

Capítulo 6

Fórmula de Čech para el término superior del residuo

En este capítulo establezceremos una fórmula algebraica explícita para el término superior del residuo en la cohomología de Čech. Para hacerlo, introducimos la siguiente notación: Para cada entero j entre 0 y $n+1$, *denotamos* $K_j = i\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)$. *Dado un multiíndice* $J = (j_0, \cdots, j_q)$ *de tamaño* q, *sean:* $K_J = K_{j_q} \cdots K_{j_0}$, $\quad \Omega_J = K_J \Omega$ *y ademas,* $Q_J = Q_{j_q} \cdots Q_{j_0}$ *y* $U_J = U_{j_q} \cap \cdots \cap U_{j_0}$

Proposición 6.0.3 *Sea* Ω_A *una forma con nivel de adjunción* a, *entonces tenemos que*

$$(res\Omega_A)^{n-a,a} = c_a \left(\frac{A\Omega_J}{Q_J}\right)_{|J|=a}, \quad \text{donde } c_a \text{ es una constante no cero que sólo depende de } a.$$

Notemos que el lado derecho tiene sentido pues $\frac{A\Omega_J}{Q_J} \epsilon\, \Gamma\left(U_J \cap X, \Omega_X^{n-a}\right)$, *en otras palabras, el lado derecho de la ecuación es un* $a-$*cociclo de la cubierta* $\mathcal{U} \cap X$ *con valores en* Ω_X^{n-a}.

La prueba de la proposición se hará recurriendo nuevamente al complejo doble de Čech-DeRham, en el complemento de X. Dentro del bicomplejo hemos construido un operador de homotopía parcial H , el cual nos permite ir de formas diferenciales racionales definidas en el complemento de X con polos arbitrarios en X a formas diferenciales con singularidad simple en X.

Sabemos que dado Ω_A *una forma diferencial con nivel de adjunción* a *es D-cohomóloga al cociclo* $\widetilde{\Omega}_A = (I - DH)^a \, \Omega_A$ *la cual tiene polo simple en X, pero ahora el objetivo es obtener explícitamente el término* $(n-a, a)$ *de* $\widetilde{\Omega}_A$. *Recordemos que al aplicar el operador residuo, nos restringimos a* X, *el conjunto de ceros del polinomio* Q, *por tanto podemos trabajar utilizando la siguiente congruencia* $Q \equiv 0$.

Lema 6.0.4 *Sea Ω_A una $(n+1)$-forma racional con nivel de adjunción a, entonces si tomamos la congruencia $Q \equiv 0$:*

1. $\Omega_A \equiv (-1)^n \left(\frac{A\Omega_i}{Q_i Q^a} \wedge \frac{dQ}{Q} \right)$
2. *Si $I = (i_0, \cdots i_q)$, entonces*
$$H_{r+1}\left(\frac{A\Omega_I}{Q_I Q^r} \wedge \frac{dQ}{Q} \right) \equiv \frac{(-1)^{n-q+1}}{r} \left(\frac{A\Omega_I}{Q_I Q^r} \right)$$
3. *Con la misma notación,*
$$\delta \left(\frac{A\Omega_I}{Q_I Q^r} \right) \equiv (-1)^n \left(\frac{A\Omega_I}{Q_I Q^r} \wedge \frac{dQ}{Q} \right)$$

   donde $J = (j_0, \cdots j_{q+1})$

Demostración:

1. *Sea $dV = dz_0 \cdots dz_{n+1}$ la forma de volumen Euclideana, sea $E = \sum z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, el campo vectorial de Euler, observemos que*
$$i\,(E)\,dV = \sum (-1)^i\, z_i dz_0 \cdots \widehat{dz_i} \cdots dz_{n+1} = \Omega$$
Tomemos la identidad trivial $dQ \wedge dV = 0$ y hagamos contracción con el campo de Euler
$$0 = i\,(E)\,(dQ \wedge dV) = (degQ)\,QdV - dQ \wedge \Omega$$
Haremos uso de la siguiente congruencia $dQ \wedge \Omega \equiv 0$. Haciendo contracción con el campo $\frac{\partial}{\partial z_i}$, obtenemos que:
$$Q_i \Omega - dQ\Omega_i \equiv 0$$
o, lo que es equivalente
$$\Omega \equiv \frac{\Omega_i}{Q_i} \wedge dQ$$
sustituyendo Ω en Ω_A obtendremos el resultado
2. *Como $i_0 \in I$ y $\Omega_I = K_I \Omega = K_{i_q} \cdots K_{i_0}\Omega$; entonces $K_{i_0}\Omega_I = 0$, de donde,*
$$\begin{aligned} H_{r+1}\left(\frac{A\Omega_I}{Q_I Q^r} \wedge \frac{dQ}{Q} \right) &= \frac{Q}{[1-(r+1)]\,Q_{i_0}} \left(\frac{A}{Q_I Q^r} K_{i_0}\left(\Omega_I \wedge dQ\right) \right) \\ &= \frac{-1}{rQ_{i_0}} \left(\frac{A}{Q_I Q^r} \right) \left[(K_{i_0}\Omega_I) \wedge dQ + (-1)^{n-q}\,\Omega_I \wedge (K_{i_0} dQ) \right] \\ &= \frac{(-1)^{n-q}}{-rQ_{i_0}} \left(\frac{A\Omega_I}{Q_I Q^r} \right) \Omega_I \wedge Q_{i_0} \\ &= \frac{(-1)^{n-q+1}}{r} \left(\frac{A\Omega_I}{Q_I Q^r} \right) \end{aligned}$$

3. *Trabajando de nuevo con la congruencia $dQ \wedge \Omega \equiv 0$, aplicando de manera iterativa $K_J = K_{j_q} \cdots K_{j_0}$ obtenemos que*

$$(-1)^{q+1} \sum (-1)^l \, Q_{j_l} \Omega_{J_l} \equiv dQ \wedge \Omega_J,$$

donde $J_l = \left(j_0, \cdots, \widehat{j_l}, \cdots, j_{q+1}\right)$.

Por otro lado tenemos que

$$\left(\delta\left(\frac{A\Omega_I}{Q^r Q_I}\right)\right)_{(j_0,\cdots,j_{q+1})} = \sum (-1)^l \, \frac{A\Omega_{J_l}}{Q^r Q_{J_l}} = \frac{A \sum (-1)^l \, Q_{J_l} \Omega_{J_l}}{Q_J Q^r}.$$

Sustituyendo obtenemos que $\delta\left(\frac{A\Omega_I}{Q^r Q_I}\right) = (-1)^n \, \frac{A\Omega_J}{Q_J Q^{r-1}} \wedge \frac{dQ}{Q}$.

□

Demostración:(Teorema 6.0.3) Definamos

$$\Omega_A\left(\mu\right) = ((I - DH)^{\mu} \Omega_A)_{\mu}^{n+1-\mu}.$$

Probemos inductivamente que

$$\Omega_A\left(\mu\right) \equiv c_\mu \left(\frac{A\Omega_J}{Q_J Q^{a-\mu}} \wedge \frac{dQ}{Q}\right)_{J=(j_0,\cdots,j_\mu)},$$

donde c_μ es una constante que depende sólo de n y de μ. Por el resultado (1) del lema 6.0.4, la igualdad es cierta para $\mu = 0$. Si suponemos que es cierto para $\mu = k$, tenemos que, usando 2 y 3 para $\mu = (k+1)$,

$$\begin{aligned}
\Omega_A\left(\mu+1\right) &= \left((I - DH)^{\mu+1} \Omega_A\right)_{\mu+1}^{n+1-(\mu+1)} \\
&= (I - DH)\left(\Omega_A\left(\mu\right)\right)_{\mu+1}^{n+1-(\mu+1)} \\
&= (-1)^{n+1-\mu} \, \delta H \left(\Omega_A\left(\mu\right)\right) \\
&\equiv (-1)^{n+1-\mu} \, \delta H \left[c_\mu \left(\frac{A\Omega_J}{Q_J Q^{a-\mu}} \wedge \frac{dQ}{Q}\right)_{J=(j_0,\cdots,j_\mu)}\right] \\
&= (-1)^{n+1-\mu} \, \delta \left[c_\mu \frac{(-1)^{n-\mu+1}}{a-\mu} \frac{A\Omega_J}{Q_J Q^{a-\mu}}\right] \\
&= \left(\frac{(-1)^n \, c_\mu}{a-\mu}\right) \frac{A\Omega_J}{Q_J Q^{a-\mu-1}} \wedge \frac{dQ}{Q}
\end{aligned}$$

luego $c_{\mu+1} = \frac{(-1)^n c_\mu}{a-\mu}$, *para* $\mu \geq 0$ *y* $c_0 = (-1)^n$. *Entonces*

$$\Omega_A\left(a\right)_a^{n-a+1} = \frac{(-1)^{an}}{a!} \left(\frac{A\Omega_J}{Q_J} \wedge \frac{dQ}{Q}\right). \tag{6.1}$$

Debido a que $\widetilde{\Omega}_A = (I - DH)^a\, \Omega_A$ *es homóloga a* Ω_A, *sus residuos son iguales, por lo tanto*

$$(res\Omega_A)_a^{n-a} = \left(res\widetilde{\Omega}_A\right)_a^{n-a} = res\left(\Omega_A\left(a\right)\right) = c_a res\left(\frac{A\Omega_J}{Q_J} \wedge \frac{dQ}{Q}\right) = c_a \frac{A\Omega_J}{Q_J}$$

$\square$

Capítulo 7

Estructura Multiplicativa de los residuos de formas diferenciales racionales con polos en X y niveles de adjunción complementaria.

El objetivo de este capíulo es:

1. *Estudiar el producto cup de los residuos de dos formas racionales con nivel de adjunción complementaria.*
2. *Dotar de una estructura multiplicativa a los elementos de la estructura de Hodge del n-ésimo grupo de cohomología primitiva de X.*

Para el primer punto demostraremos el siguiente resultado:

Teorema 7.0.5 *Sea Ω_A y Ω_B formas racionales con nivel de adjunción complementarios, i.e., $a + b = n$. Entonces el producto cup de sus residuos es cero si y sólo si AB pertenece al ideal Jacobiano; esto es*

$$res\Omega_A \cdot res\Omega_B = 0 \Longleftrightarrow AB \,\epsilon\, J_Q. \tag{7.1}$$

7.1. Cálculo algebraico del producto cup

En esta sección calcularemos explícitamente la parte derecha de (7.1). Primero observemos que

$$res\Omega_A \cdot res\Omega_B = (res\Omega_A)^{n-a,a} (res\Omega_B)^{n-b,b}. \tag{7.2}$$

Recordemos que el producto cup de cocadenas en el complejo de Čech-DeRham está dado por:

$$\begin{array}{rcl} \vee : \mathcal{C}^q\left(\mathcal{U}\mid_X, \Omega_X^p\right) \times \mathcal{C}^s\left(\mathcal{U}\mid_X, \Omega_X^r\right) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{q+s}\left(\mathcal{U}\mid_X, \Omega_X^{p+r}\right) \\ (\alpha, \beta) & \longrightarrow & \alpha \vee \beta \end{array}$$

donde

$$(\alpha \vee \beta)_{(j_0,\ldots,j_q,\ldots,j_{q+s})} = (-1)^{qr}\,(\alpha)_{(j_0,\ldots,j_q)} \wedge (\beta)_{(j_q,\ldots,j_{q+s})}.$$

Por tanto, ya que la cubierta $\mathcal{U}$ tiene $n+2$ elementos, si $q+s \geq n+1$ entonces el producto será 0. Además debido a que X tiene dimensión n, si $p+r \geq n$ también el producto será 0. Por tanto, obtenemos que $(res\Omega_A) \vee (res\Omega_B) = (res\Omega_A)_a^{n-a} \wedge (res\Omega_B)_b^{n-b}$, ya que los demás términos se anularon.

Explícitamente $(res\Omega_A)_a^{n-a} \wedge (res\Omega_B)_b^{n-b}$ está dado por

$$((res\Omega_A)_a^{n-a} \wedge (res\Omega_B)_b^{n-b})_{(j_0,\ldots,j_s,\ldots,j_n)} = \left(c_a \frac{A\Omega_{(j_0,\ldots,j_a)}}{Q_{(j_0,\ldots,j_a)}}\right) \wedge \left(c_b \frac{B\Omega_{(j_a,\ldots,j_n)}}{Q_{(j_a,\ldots,j_n)}}\right)$$

$$= c_{ab}\left(\frac{AB\Omega_{(j_0,\ldots,j_a)}\Omega_{(j_a,\ldots,j_n)}}{Q_{j_0}\ldots Q_{j_{a-1}}Q_{j_a}^2 Q_{a+1}\ldots Q_{j_n}}\right). \tag{7.3}$$

Lema 7.1.1 *Si $L = (j_0, \ldots, j_n)$ y $v \in \{0, \ldots, n+1\}$ es el indice complementario a L, entonces*

$$\Omega_{(j_0,\ldots,j_a)} \wedge \Omega_{(j_a,\ldots,j_n)} \wedge dQ \equiv (-1)^{b+v}\, z_v Q_a \Omega.$$

Demostración: Sea E la contracción con el campo vectorial de Euler. Como

$$\Omega_{(j_0,\ldots,j_a)} = K_{(j_0,\ldots,j_a)}\Omega = K_{(j_0,\ldots,j_a)}EdV$$

y

$$\Omega_{(j_a,\ldots,j_n)} = K_{(j_a,\ldots,j_n)}\Omega = K_{(j_a,\ldots,j_n)}EdV$$

La parte izquierda de la ecuación (7.3) es

$$\Omega_{(j_0,\ldots,j_a)} \wedge \Omega_{(j_a,\ldots,j_n)} \wedge dQ = K_{(j_0,\ldots,j_a)}EdV \wedge K_{(j_a,\ldots,j_n)}EdV \wedge dQ.$$

Denotemos $R = (j_0, \ldots, j_{a-1})$ y $T = (j_{a+1}, \ldots, j_n)$.

Como tenemos $n+1$ indices en (R, j_a, T), se pueden dar dos casos

1. $(0, \ldots, n+1) = (R, j_a, T', v, T'')$, *donde* $T' = (j_{a+1}, \ldots, j_{v-1})$ *y* $T'' = (j_{v+1}, \ldots, j_{n+1})$
2. $(0, \ldots, n+1) = (R', v, R'', j_a, T'')$, *donde* $R' = (0, \ldots, j_{v-1})$ *y* $R'' = (j_{v+1}, \ldots, j_{a-1})$

Demostraremos la igualdad para el primer caso ya que el segundo es análogo. Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} EdQ &= (degQ)\,Q \equiv 0 \\ j_a &= a \\ K_{R,j_a}(EdV) &= (-1)^{a+1} E\,(K_{R,j_a}dV) \\ E^2 &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en la siguiente expresión obtenemos que:

$$\begin{aligned} & E\,[E\,(K_{R,a}dV) \wedge (K_{a,T}dV) \wedge dQ] = \\ = \;& E^2\,(K_{R,a}dV) \wedge (K_{a,T}dV) \wedge dQ \;+\; (-1)^{n-a} E\,(K_{R,a}dV) \wedge E\,[(K_{a,T}dV) \wedge dQ] \\ = \;& (-1)^{n-a} E\,(K_{R,a}dV) \wedge E\,(K_{a,T}dV) \wedge dQ + (-1)^{n-a} (-1)^{a+1} (K_{a,T}dV)\, deg\,(Q)\, Q \\ \equiv \;& (-1)^{n-a} E\,(K_{R,a}dV) \wedge E\,(K_{a,T}dV) \wedge dQ \\ = \;& (-1)^{n-a} \left[(-1)^{a+1} K_{R,a}EdV \wedge (-1)^{n-a+1} K_{a,T}EdV \wedge dQ\right] \\ = \;& (-1)^{a} \left[K_{R,a}EdV \wedge K_{a,T}EdV \wedge dQ\right] \\ = \;& (-1)^{a}\, \Omega_{(j_0,\ldots,j_a)} \wedge \Omega_{(j_a,\ldots,j_n)} \wedge dQ \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} E\,(K_{R,a}dV) &= E\left(\frac{\partial}{\partial z_a}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_0}\right)(dz_0 \ldots dz_{n+1}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n+1} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}\right)(dz_{a+1} \ldots dz_{n+1}) \\ &= \sum (-1)^{i+1} z_{a+i} dz_{a+1} \ldots \widehat{dz_{a+i}} \ldots dz_{n+1} \\ K_{a,T}dV &= \left(\frac{\partial}{\partial z_{n+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_{v+1}}, \frac{\partial}{\partial z_{v-1}} \cdots \frac{\partial}{\partial z_a}\right)(dz_0 \ldots dz_{n+1}) \\ &= (K_{T''}K_{T',a}) \left[(-1)^{(n-a)a+n-v+1+a} dz_{(a,T')} \wedge dz_{(T'')} \wedge dz_R dz_v\right] \\ &= (-1)^{(n-a)a+n-v+1+a} dz_R dz_v \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} & \Omega_{(j_0,\ldots,j_a)} \wedge \Omega_{(j_a,\ldots,j_n)} \wedge dQ = \\ = \;& (-1)^{a} E\,[E\,(K_{R,a}dV) \wedge (K_{a,T}dV) \wedge dQ] \\ = \;& (-1)^{a} E\left[(-1)^{v-a} z_v dz_{a+1} \ldots \widehat{dz_v} \ldots dz_{n+1} \wedge (-1)^{(n-a)a+n-v+1+a} dz_R dz_v \wedge Q_a dz_a\right] \\ = \;& (-1)^{a} E\left[(-1)^{(n-a)a+n+1} z_v Q_a dz_{T'} \wedge dz_{T''} \wedge dz_R \wedge dz_v \wedge dz_a\right] \\ = \;& (-1)^{a} E\left[(-1)^{(n-a)a+n+1+a+n+v-1+(n-a)(a+1)} z_v Q_a dV\right] \\ = \;& (-1)^{(a+n-v)} z_v Q_a E\,[dV] \\ = \;& (-1)^{(n-a+v)} z_v Q_a \Omega \\ = \;& (-1)^{(b+v)} z_v Q_{j_a} \Omega \end{aligned}$$

□

En la sucesión corta del residuo de Poincaré:

$$0 \to \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}} \to \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}(X) \overset{res}{\to} \Omega^n_X \to 0 \tag{7.4}$$

utilizaremos el operador cofrontera δ de Čech en la sucesión larga asociada a (7.4) y la cubierta $\widetilde{\mathcal{U}} = \{U_j\}$ obteniendo el siguiente operador:

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta} : H^n(X, \Omega^n) \quad &\longrightarrow \quad H^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1}, \Omega^{n+1}\right) \\ \omega \quad &\longrightarrow \quad \delta\left(\omega \frac{dQ}{Q}\right). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}(res\Omega_A \cdot res\Omega_B) &\equiv \delta\left[\left(\frac{c_{ab}AB\Omega_{(j_0,\ldots,j_a)}\Omega_{(j_a,\ldots,j_n)}}{Q_{j_0}\ldots Q_{j_{a-1}}Q^2_{j_a}Q_{a+1}\ldots Q_{j_n}} \wedge \frac{dQ}{Q}\right)_{(0,\ldots,\widehat{v},\ldots,n+1)}\right] \\ &= \delta\left[\left(\frac{(-1)^{(b+v)}c_{ab}AB}{Q_{j_0}\ldots Q_{j_{a-1}}Q^2_{j_a}Q_{a+1}\ldots Q_{j_n}} \wedge \frac{z_vQ_{j_a}\Omega}{Q}\right)_{(0,\ldots,\widehat{v},\ldots,n+1)}\right] \\ &= \delta\left[\left(\frac{(-1)^{(b+v)}c_{ab}ABz_v\Omega}{Q\prod_{j\neq v}Q_j}\right)_{(0,\ldots,\widehat{v},\ldots,n+1)}\right] \\ &= \delta\left[\left(\frac{(-1)^{(b+v)}c_{ab}ABz_vQ_v\Omega}{Q_0\ldots Q_{n+1}}\frac{1}{Q}\right)_{(0,\ldots,\widehat{v},\ldots,n+1)}\right] \\ &= (-1)^{(b)}\widetilde{c_{ab}}\left(\sum\frac{ABz_vQ_v\Omega}{Q_0,\ldots,Q_{n+1}}\right)\frac{1}{Q} \\ &= (-1)^{(b)}\widetilde{c_{ab}}\left(\frac{ABdeg(Q)Q\Omega}{Q_0\ldots Q_{n+1}}\right)\frac{1}{Q} \\ &= (-1)^{(b)}\widetilde{c_{ab}}\left(\frac{ABdeg(Q)\Omega}{Q_0\ldots Q_{n+1}}\right) = \frac{k_{ab}AB\Omega}{Q_0\ldots Q_{n+1}} \end{aligned}$$

Ahora que ya tenemos un cociclo $\eta(A,B) = \widetilde{\delta}(res\Omega_A res\Omega_B)$ que nos represente el producto cup de los residuos en el proyectivo veamos cuando es cero, i.e. cuando $\eta(A,B)$ es frontera de alguna n-cocadena en $\mathbb{P}^{n+1}$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} & \eta(A,B) &&= \delta\left[\left(\frac{R_j\Omega}{\prod_{i\neq j}Q_i}\right)_{(0,\ldots,\widehat{j},\ldots,n+1)}\right] \\ \iff & \tfrac{k_{ab}AB\Omega}{Q_0\ldots Q_{n+1}} &&= \sum(-1)^j\left(\frac{R_j\Omega}{\prod_{i\neq j}Q_i}\right) \\ \iff & (k_{ab}AB)\tfrac{\Omega}{Q_0\ldots Q_{n+1}} &&= \left(\sum(-1)^jR_jQ_j\right)\frac{\Omega}{Q_0\ldots Q_{n+1}} \\ \iff & k_{ab}AB &&= \sum(-1)^jR_jQ_j \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow AB \ \in \ J_Q \tag{7.5}$$

De manera análoga podemos enunciar el siguiente resultado

Corolario 7.1.2 *El residuo de una forma Ω_A con nivel de adjunción a tendrá un nivel en la filtración de Hodge $n-a+1$, si y sólo si, A pertenece al ideal Jacobiano.*

Corolario 7.1.3 *Sea $\bar{V}$ el cociente de los polinomios homogeneos en $n+2$ variables entre el anillo Jacobiano J_Q denotado por $\bar{V} = \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_{n+1}]/J_Q$, entonces el mapeo residuo define un isomorfismo de manera natural*

$$\chi_{t_a} : \bar{V}^{t_a} \longrightarrow \frac{F^{n-a}H^n\left(X, \mathbb{C}\right)_0}{F^{n-a+1}H^n\left(X, \mathbb{C}\right)_0}; \tag{7.6}$$

donde $\bar{V}^{t_a}$ son los polinomios homogéneos de grado $t_a = d(a+1) - (n+2)$ en $\bar{V}$.

Demostración: Definamos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \chi_{t_a} : \bar{V}^{t_a} \quad &\longrightarrow \quad \frac{F^{n-a}H^n\left(X, \mathbb{C}\right)_0}{F^{n-a+1}H^n\left(X, \mathbb{C}\right)_0} \\ A \quad &\longrightarrow \quad res\left(\frac{A\Omega}{Q^{a+1}}\right) \end{aligned}$$

Por el corolario 7.1.2 la aplicación está bien definida y es inyectiva. Utilizando el inciso (2) del Teorema 5.2.2 tenemos que χ_a es sobreyectivo. $\square$

7.2. Símbolo Residuo de Grothendieck

Definamos primero el símbolo residuo de Grothendieck. Sea U un abierto de $\mathbb{C}^m$, tomemos $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^m$ una función holomorfa tal que $f^{-1}(0) = 0$ y

$$\Gamma(\epsilon) = \{|f_j| = \epsilon : j = 1, \ldots, m\}$$

donde f_j es la j-ésima coordenada de f. Para g función meromorfa en U definamos

$$\omega_f(g) = \frac{g dz_1 \ldots dz_m}{f_1 \cdots f_m}.$$

Sea

$$Res_0 \left\{ \begin{matrix} g \\ f_1 \ldots f_m \end{matrix} \right\} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^m \int_{\Gamma(\epsilon)} \omega_f(g) \tag{7.7}$$

Llamaremos símbolo residuo de Grothendieck de g a $Res_0(g) := Res_0 \left\{ \begin{matrix} g \\ f_1 \cdots f_m \end{matrix} \right\}$.

Este operador define un homomorfismo $\mathbb{C}-$lineal en el anillo de funciones holomorfas $\mathcal{O}$ en el origen cuyo Kernel es $I = (f_0, \ldots, f_m)$.

Como consecuencia obtenemos que el residuo desciende a un homomorfismo

$$Res_0 : \mathcal{O}/I \longrightarrow \mathbb{C},$$

definiendo entonces un apareamiento dado por:

$$\begin{aligned} Res_0 : (\mathcal{O}/I) \times (\mathcal{O}/I) &\longrightarrow \mathbb{C} && (7.8)\\ (g,h) &\longrightarrow Res_0\,(g \cdot h) && (7.9)\end{aligned}$$

Teorema 7.2.1 *El apareamiento es perfecto.*

La pregunta sería cómo se ve este apareamiento en el subanillo graduado de polinomios homogéneos $V = \mathbb{C}\,[z_0, \ldots, z_{n+1}]_h$ *, al tomar* $m = n+2$.
Como Q_j *son homogéneos de grado* $d-1$, *entonces el ideal* $J_Q \subset V$ *es graduado así como el cociente* $\bar{V} = V/J_Q = \oplus_i \bar{V}^i$.

Si consideramos que los números complejos forman un álgebra de grado cero, entonces el símbolo residuo preserva la graduación salvo una elevación de grado:

Lema 7.2.2 *El símbolo residuo en* $\bar{V}$ *es homogeneo de grado* $-\sigma$, *donde* $\sigma = (n+2)\,(d-2)$.

Demostración: Denotemos λ_t *a la multiplcación por* t :

$$\begin{aligned} \lambda_t : \mathbb{C}^{n+2} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+2}\\ (z_0, \ldots, z_{n+1}) &\longrightarrow (tz_0, \ldots, tz_{n+1})\end{aligned}$$

Sea g un polinomio homogéneo de grado j. Para el simbolo residuo en $\widetilde{V}$ *, utilizaremos* $f = (Q_0, \ldots, Q_{n+1})$.

Entonces:

$$\begin{aligned} Res_0\,(g) &= \int_{\Gamma(\epsilon)} \omega_f\,(g)\\ &= \int_{\{|Q_i(z_o,\ldots,z_{n+1})|=\epsilon\}} \frac{g\,(z_0, \ldots, z_{n+1})}{Q_0 \cdots Q_{n+1}} dz_0 \cdots dz_{n+1}\\ &= \int_{\{|Q_i(tz_o,\ldots,tz_{n+1})|=\epsilon\}} \frac{g\,(tz_0, \ldots, tz_{n+1})\,d\,(tz_0) \cdots d\,(tz_{n+1})}{Q_0\,(tz_0, \ldots, tz_{n+1}) \cdots Q_{n+1}\,(tz_0, \ldots, tz_{n+1})}\\ &= \int_{\{|t^{d-1}||Q_i(z_o,\ldots,z_{n+1})|=\epsilon\}} \frac{g\,(tz_0, \ldots, tz_{n+1})\,d\,(tz_0) \cdots d\,(tz_{n+1})}{Q_0\,(tz_0, \ldots, tz_{n+1}) \cdots Q_{n+1}\,(tz_0, \ldots, tz_{n+1})}\end{aligned}$$

Debido a que el cero es la unica singularidad del integrando, entonces no importando el radio del círculo la integral no cambia su valor,entonces:

$$\begin{aligned} Res_0\,(g) &= \int_{\{|Q_i(z_o,\ldots,z_{n+1})|=\epsilon\}} \frac{g\,(tz_0, \ldots, tz_{n+1})\,d\,(tz_0) \cdots d\,(tz_{n+1})}{Q_0\,(tz_0, \ldots, tz_{n+1}) \cdots Q_{n+1}\,(tz_0, \ldots, tz_{n+1})}\\ &= \int_{\Gamma(\epsilon)} \frac{t^{j+n+2} g\,(z_0, \ldots, z_{n+1})}{t^{(d-1)(n+2)} Q_0\,(z_0, \ldots, z_{n+1}) \cdots Q_{n+1}\,(z_0, \ldots, z_{n+1})} dz_0 \cdots dz_{n+1}\\ &= \int_{\Gamma(\epsilon)} t^{j-(n+2)(d-2)} \frac{g}{Q_0 \cdots Q_{n+1}} dz_0 \cdots dz_{n+1}\\ &= t^{j-\sigma} Res_0\,(g)\end{aligned}$$

□

Esto implica que si g no es de grado σ, *entonces su símbolo residuo es cero. Por lo cual, para el apareamiento definido en (7.8) en* $\bar{V}$ *tenemos el siguiente corolario:*

Corolario 7.2.3 *1.* $\bar{V}^i$ *es ortogonal a* $\bar{V}^j$ *si* $i+j \neq \sigma$.

2. $\bar{V}^i$ y $\bar{V}^{\sigma-i}$ *son un par perfecto.*

3. *Si* $i \notin [0,\sigma]$ *entonces* $\bar{V}^i = 0$

4. $dim\bar{V}^\sigma = 1$

Consideremos ahora los complejos de Čech, $\mathcal{C}_l^* \left(\mathcal{U}, \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\right)$ *donde*

$$\omega \in \mathcal{C}_l^q \left(\mathcal{U}, \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\right) \Longleftrightarrow \omega_{(j_0,\ldots,j_q)} = \frac{R_{(j_0,\ldots,j_q)}\Omega}{\left(Q_{j_0}\ldots Q_{j_q}\right)^l}$$

Con esta notación tenemos que $\eta(A,B) \in H_1^* \left(\mathcal{U}, \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\right)$ *donde* $H_l^* \left(\mathcal{U}, \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\right)$ *es el grupo de cohomología para cada* l *y tomando* $\widetilde{Q} = Q_0 \ldots Q_{n+1}$ *sea*

$$\begin{array}{rcl} \rho_l : H_l^* \left(\mathcal{U}, \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\right) & \longrightarrow & H_{l+1}^* \left(\mathcal{U}, \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\right) \\ \rho_l(\omega) & = & \dfrac{\omega\widetilde{Q}}{\widetilde{Q}} \end{array}$$

luego denotemos

$$H^* \left(\mathcal{U}, \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\right) = \varinjlim H_l^* \left(\mathcal{U}, \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\right)$$

Para terminar la demostración del Teorema 7.0.5, necesitamos que ρ_l *sea un mapeo inyectivo, para entonces tener la siguiente inyección:*

$$H_1^{n+1}\left(\ \mathcal{U}\ ,\ \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\ \right) \longrightarrow H^{n+1}\left(\ \mathcal{U}\ ,\ \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\ \right)$$

Lema 7.2.4 *El residuo de Grothendieck define un isomorfismo que conmuta con la multiplicación de* $\widetilde{Q} = Q_0 \cdots Q_{n+1}$:

$$Res_0^{(l)} : H_l^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1}, \Omega^{n+1}\right) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$$

Demostración: Para definir el mapeo $Res_0^{(l)}$ *en* $H_l^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1}, \Omega^{n+1}\right)$ *primero definamoslo en* $\mathcal{C}_l^{n+1}\left(\mathcal{U}, \Omega^{n+1}\right)$: *por*

$$\frac{R\Omega}{\prod Q_j^l} \longrightarrow Res_0 \left\{ \begin{array}{c} R \\ Q_0^l \ldots Q_m^l \end{array} \right\} \tag{7.10}$$

Luego una cofrontera en general tiene la siguiente forma

$$\delta\left[\left(\frac{R_j\Omega}{\prod_{i\neq j}Q_i^l}\right)_j\right]=\frac{\left(\sum(-1)^j R_jQ_j^l\right)\Omega}{\prod Q_j^l}$$

Por tanto el conjunto de cofronteras se puede identificar con el ideal $I^{(l)}$ *generado por* $\left(Q_0^l,\ldots Q_{n+1}^l\right)$*, el cual está contenido en el Kernel del operador* $Res_0^{(l)}$*, de donde obtenemos un operador en* $H_l^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1},\Omega^{n+1}\right)$.

Como todos lo elementos en $H_l^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1},\Omega^{n+1}\right)$ *son de la forma* $\frac{A\Omega}{\prod_j Q_j^l}$*, donde* $deg\,(A)=(n+2)\,(l\,(d-1)-1)$. *Entonces tenemos la inclusión:*

$$H_l^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1},\Omega^{n+1}\right)\hookrightarrow\widetilde{V}^{\sigma^{(l)}}$$

con $\widetilde{V}^{\sigma^{(l)}}$ *la parte de grado* $\sigma^{(l)}=(n+2)\,(l\,(d-1)-1)$ *en* $\widetilde{V}=V/I^{(l)}$.

De manera análoga al corolario (7.2.3), el espacio vectorial $\widetilde{V}^{\sigma^{(l)}}$ *es isomorfo a* $\mathbb{C}$ *via* $Res_0^{(l)}$.

Para ver que conmuta con la multiplicación de $\widetilde{Q}$*, utilizaremos de nuevo que el cero es la única singularidad del integrando, por lo que sin importar el radio del círculo, el valor de la integral no cambia, por tanto tenemos que*

$$\begin{aligned}
Res_0^{(l+1)}\left(\rho_l\left(\frac{R\Omega}{Q_0^l\cdots Q_{n+1}^l}\right)\right) &= Res_0^{(l+1)}\left(\frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{Q}}\frac{R\Omega}{Q_0^l\cdots Q_{n+1}^l}\right)\\
&= Res_0\left\{\frac{R\widetilde{Q}}{\widetilde{Q}Q_0^l\cdots Q_m^l}\right\}\\
&= \int_{\Gamma_{l+1}(\epsilon)}\frac{RQ_0\cdots Q_{n+1}\Omega}{Q_0^{l+1}\cdots Q_{n+1}^{l+1}}\\
&= \int_{\{|Q_i^{l+1}(z_o,\ldots,z_{n+1})|=\epsilon\}}\frac{R\Omega}{Q_0^l\cdots Q_{n+1}^l}\\
&= \int_{\{|Q_i(z_o,\ldots,z_{n+1})|=\epsilon^{\frac{1}{l+1}}\}}\frac{R\Omega}{Q_0^l\cdots Q_{n+1}^l}\\
&= \int_{\{|Q_i(z_o,\ldots,z_{n+1})|=\epsilon^{\frac{1}{l}}\}}\frac{R\Omega}{Q_0^l\cdots Q_{n+1}^l}\\
&= \int_{\{|Q_i^l(z_o,\ldots,z_{n+1})|=\epsilon\}}\frac{R\Omega}{Q_0^l\cdots Q_{n+1}^l}\\
&= Res_0^{(l)}\left(\frac{R\Omega}{Q_0^l\cdots Q_{n+1}^l}\right)
\end{aligned}$$

□

Concluyendo entonces que ρ_l siempre es inyectivo, en particular cuando $l = 1$:

$$\begin{aligned} AB \in J_Q &\iff Res_0^{(1)}\left(\eta\left(A,B\right)\right) = 0 \\ &\iff \eta\left(A,B\right) = 0 \;\; en \;\; H_1^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1}, \Omega^{n+1}\right) \\ &\iff \eta\left(A,B\right) = 0 \;\; en \;\; H^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1}, \Omega^{n+1}\right) \\ &\iff \widetilde{\delta}\left(res\Omega_A \cdot res\Omega_B\right) = 0 \;\; en \;\; H^{n+1}\left(\mathbb{P}^{n+1}, \Omega^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrado el Teorema 7.0.5.

Para dotar con una estructura multiplicativa a la estructura de Hodge de $H^n\left(X,\mathbb{C}\right)_0$ definamos el siguiente apareamiento para dos componentes de la estructura de Hodge $H_0^{n-p,p}$ y $H_0^{n-s,s}$ inducida por la multiplicación de polinomios

$$< \alpha, \beta >= \chi_{t_p+t_s}\left(\chi_{t_p}^{-1}\left(\alpha\right) \cdot \chi_{t_s}^{-1}\left(\beta\right)\right).$$

Por el corolario 7.2.3 tenemos que el apareamiento es perfecto entre las componente $H_0^{n-p,p}$ y $H_0^{p,n-p}$.

Apéndice **A**

Homología Relativa

En esta sección introduciremos el concepto de homología relativa. Consideremos un espacio topológico M y un subespacio A de M. Si queremos entender la relación entre la homología de M y de A, debemos pensar en el espacio cociente M/A.

Teorema A.0.5 *Si A es un subespacio cerrado no vacío de un espacio topológico M y A es un retracto por deformación de alguna vecindad de M entonces la siguiente sucesión es exacta:*

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{H}_n\left(A\right) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_n\left(M\right) \xrightarrow{j_*} \widetilde{H}_n\left(M/A\right) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{n-1}\left(A\right) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \widetilde{H}_0\left(M/A\right) \longrightarrow 0$$

A espacios (M,A) que cumplen con la hipótesis del teorema se les llama buen par. Los grupos de homlogía del espacio cociente M/A se les denotará como $H_n\left(M,A\right),$ nos referiremos a ellos como grupos relativos de homología.

La manera de construir los grupos de homología relativa es la siguiente: dado un espacio M y un subespacio A, se tomará el grupo cociente $C_n\left(M,A\right) = C_n\left(M\right)/C_n\left(A\right).$ Debido a que el operador frontera ∂ manda n-cadenas de A en $(n-1)$-cadenas de A entonces el operador

$$\partial_n : C_n\left(M,A\right) \longrightarrow C_{n-1}\left(M,A\right)$$

está bien definido. Además $\partial^2 = 0,$ de donde tiene sentido pensar en los grupos de homología

$$H_n\left(M,A\right) = \frac{Ker\partial_n}{Im\partial_{n+1}}$$

Una propiedad importante de los grupos de homología relativa es que son invariantes al restar otro supespacio $Z \subset A$ que cumple ciertas propiedades:

Teorema A.0.6 (Excisión) *([7], Pag. 119) Dados subespacios $Z \subset A \subset M$ de tal manera que la cerradura de Z está contenida en el interior de A; entonces la inclusión $(M-Z, A-Z) \hookrightarrow (M,A)$ induce un isomorfismo para toda n*

$$H_n(M-Z, A-Z) \longrightarrow Hn(M,A)$$

. Equivalentemente, dados A,B subespacios de M cuyos interiores son una cubierta abierta de M, entonces la inclusión $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ *induce isomorfismos para toda n*

$$H_n(B, A \cap B) \longrightarrow Hn(X, A)$$

Bibliografía

[1] ***José Bertin, Jean-Pierre Demailly, Luc Illusie, Chris Peters***. Introduction to Hodge Theory. *SMF-AMS Texts and Monographs, Vol. 8*

[2] ***Raoul Bott y Loring W. Tu***. Differential forms in algebraic topology. *Springer-Verlag New York Inc. 1982*

[3] ***Jean-Pierre Serre***. Faisceaux Algebriques Coherents. *The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 61, No. 2. 1955.*

[4] ***Claire Voisin***. Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I. *Cambridge University Press. 2002*

[5] ***Phillip Griffiths and Joseph Harris***. Principles of algebraic geometry. *John Wiley and Sons, Inc. 1978.*

[6] ***Alexander Grothendieck***. On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Publications mathématiques del'I.H.É.S., tome 29. 1966*

[7] ***Allen Hatcher***. Algebraic Topology. *Cambridge University Press. 2002*

[8] ***Victor Guillemin and Allan Pollack***. Differential Topology. *Prentice-Hall. 1974*