



---

Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

**Un Estudio de Fricción en un  
Problema de la Mecánica Celeste:  
Las Ecuaciones de Hill**

**Tesis**

que para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias**

con orientación en

Matemáticas Aplicadas

Presenta

**Marda Lariza Silva Muruato**

Director de Tesis

Dr. Stephen B. Sontz

Guanajuato, Gto., Marzo 2005.



*A El sea la gloria.*

## *Agradecimientos*

A mis padres y hermanos por todo su apoyo.

A mi esposo por su ayuda incondicional y a mi hijo Ian por la gran motivación que me da.

Especialmente agradezco al Dr. Stephen B. Sontz por su tiempo, dedicación y apoyo en la realización de esta tesis.

Al Dr. Ernesto Lacomba y al Dr. Fausto Ongay por el tiempo invertido en la revisión de esta tesis y sus comentarios que la mejoraron.

A todos mis compañeros, amigos y maestros que me ayudaron y motivaron en el aspecto académico, moral y físico durante mi estancia en el CIMAT.

Al Centro de Investigación en Matemáticas, CIMAT de Guanajuato A.C., por haberme albergado durante casi tres años de trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACyT y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología del Estado de Guanajuato, CONCyTEG por haber patrocinado este trabajo.

4	Efectos de fricción en las ecuaciones de Hill.	96
4.1	Breve estudio de las ecuaciones de Hill. . . . .	96
4.2	Efectos de fricción en las ecuaciones de Hill. . . . .	105
4.2.1	Posición de los puntos de equilibrio. . . . .	106
4.2.2	Estabilidad de los puntos de equilibrio. . . . .	109
4.2.3	Ejemplos de fuerzas de fricción introducidas en las ecuaciones de Hill. . . . .	121
	Bibliografía	135

# Introducción.

La aparición de la teoría de la gravitación de Newton dio inicio a la mecánica celeste. Con esta nueva teoría surgió la incógnita sobre el movimiento de los cuerpos celestes atrayéndose uno a otro de acuerdo con la ley de gravitación enunciada por Newton.

Para 1687 ya se había resuelto el problema de dos cuerpos moviéndose bajo mutua atracción. Para este tiempo la inquietud por esta línea de investigación motivaba el estudio del problema dirigiendo la atención al sistema Sol-Tierra-Luna.

Así que el problema de tres cuerpos se convirtió en uno de los más antiguos problemas en sistemas dinámicos por lo cual a través de la historia del problema vemos aparecer varias figuras matemáticas importantes como Newton, que ya hemos mencionado, Bernoulli, Euler, Lagrange, Jacobi, Hill, Poincare, Levi-Civita entre otros.

Estudiar el problema de tres cuerpos exigía modelos demasiado complicados, así que en 1760 Euler pensó que podría considerar un problema más simple que consistía en suponer que dos de los cuerpos están fijos en el espacio y el tercero se mueve bajo influencia gravitacional de los otros dos.

Gracias a que Euler empezó a considerar modelos más simples en 1762 apareció por primera vez el problema restringido de tres cuerpos, siendo el mismo Euler quien lo formulara y no solo lo formuló sino que provó la existencia de soluciones colineales.

Siguiendo con su trabajo dedicado al problema restringido de tres cuerpos, en 1772 presentó una nueva formulación del problema basándose en un sistema de coordenadas en rotación.

Respecto al trabajo que Euler realizó en el problema de tres cuerpos sabemos que

fue el responsable de que el problema pasara de un sistema de orden 18 a un sistema de orden ocho.

Los resultados que obtuvo Lagrange en el problema de tres cuerpos son bastante sobresalientes.

Lagrange utilizó las constantes de momento angular y energía para reducir el problema a un sistema de orden siete, además encontró otro tipo de soluciones, se trata de soluciones en las cuales los cuerpos siempre están en los vértices de un triángulo equilátero.

Para este tiempo ya estamos hablando de la existencia de soluciones particulares. Hoy sabemos que son cinco puntos de equilibrio: **L1**, **L2** y **L3**, que denotan las soluciones colineales encontradas por Euler, **L4** y **L5** las soluciones trinagulares encontradas por Lagrange. En conjunto a estos cinco puntos también se les conoce como puntos Lagrangianos.

En el tiempo en que Lagrange encontró el conjunto de soluciones particulares no había evidencia de que estas existieran en nuestro universo. Pero el descubrimiento de Aquiles en 1706 por Wolf corroboró la teoría de soluciones particulares en un sistema de tres cuerpos en nuestro sistema solar: el sistema Sol-Jupiter-Aquiles.

En 1836 apareció una constante de movimiento en el problema restringido de tres cuerpos ahora conocida como la constante de Jacobi debido a que Jacobi fuese quien la encontrara. Gracias a las aportaciones de Jacobi, el problema de tres cuerpos, para 1843 ya sería un sistema de orden seis que consistía en un modelo de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Jacobi y Hamilton mostraron que el problema de orden seis al que había llegado Jacobi podía ser escrito como un conjunto de tres pares de ecuaciones diferenciales parciales.

Laplace, al introducir métodos de perturbación en la búsqueda de soluciones en el problema de tres cuerpos, se convirtió en una de las figuras más importantes cuando se trata de hablar de estabilidad.

En 1877 hubo un gran adelanto en la mecánica celeste, gracias a las aportaciones de George William Hill. Motivado por el sistema Sol-Tierra-Luna, Hill, publicó un artículo en el cual aparecen nuevas soluciones periódicas en el problema de tres cuerpos y en 1878 publicó un artículo donde dio a conocer cómo establecer regiones donde se puede dar el movimiento para el tercer cuerpo, esto como consecuencia de una aplicación de la constante de Jacobi.

Al hablar del problema de tres cuerpos estamos hablando en un principio de un problema en el que se considera solamente la fuerza gravitacional entre los cuerpos. En 1994 Carl D. Murray publicó un artículo [8] en el cual considera fuerzas de fricción externas. En este artículo hizo un análisis de la posición de los puntos de equilibrio partiendo de que los puntos de equilibrio de este nuevo problema son un desplazamiento de los puntos clásicos  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  y  $L_5$ .

Además, sabiendo que en el problema restringido de tres cuerpos  $L_4$  y  $L_5$  son linealmente estables, en su artículo, Murray publicó condiciones para las fuerzas de fricción externas de modo que los nuevos puntos de equilibrio, que como mencionamos anteriormente son un desplazamiento de  $L_4$  y  $L_5$  siguieran siendo estables. Cabe hacer notar que en dicho artículo Murray no considera la estabilidad de los nuevos puntos colineales.

Siguiendo esta línea de investigación en el trabajo que presentamos nos proponemos al igual que Murray tomar en cuenta fuerzas de fricción externas en las ecuaciones de Hill.

En el capítulo 1 estaremos exponiendo algunos conceptos importantes para el desarrollo del trabajo, como son las leyes de Newton entre otros.

En el capítulo 2 estaremos haciendo un breve estudio del problema de dos cuerpos. Básicamente expondremos las ecuaciones de movimiento y su solución.

En el capítulo 3 hablamos de una manera más extensa del problema restringido de tres cuerpos. Empezaremos con la descripción del problema y ecuaciones de movimiento. Introduciremos el concepto de la constante de Jacobi y localizaremos los

puntos de equilibrio  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$ ,  $L_5$  para después analizar su estabilidad. Por último en este capítulo mostraremos el trabajo de Carl D. Murray publicado en 1994 [8].

En el capítulo 4 hablaremos un poco de las ecuaciones de Hill incluyendo la localización de los puntos de equilibrio, que a saber son dos, los correspondientes a  $L_1$  y  $L_2$  y un análisis de su estabilidad.

Finalmente expondremos nuestros resultados que incluyen la posición de los nuevos puntos de equilibrio, condiciones para la fuerza de fricción externa de modo que los nuevos puntos de equilibrio, que en este caso son un desplazamiento de  $L_1$  y  $L_2$  sean estables y algunos ejemplos concretos. Además de que incluimos condiciones para la fuerza de fricción externa de modo que los nuevos puntos de equilibrio colineales, en el modelo del problema restringido de tres cuerpos incluyendo fuerzas de fricción, sean estables.



# Capítulo 1

## Preliminares.

En este primer capítulo daremos algunos conceptos básicos de mecánica clásica con los cuales debemos estar bien relacionados ya que nos referiremos a ellos a lo largo del trabajo.

Las definiciones y resultados expuestos en este capítulo vienen de [4], [5] y [9].

### 1.1 Leyes importantes en la mecánica clásica.

Entre las leyes más importantes en la mecánica clásica se encuentran las tres leyes de Newton. Por esto empezaremos esta sección enunciando la primera ley de Newton.

**1a Ley de Newton:** *Existe un marco de referencia o sistema de coordenadas tal que si la fuerza total actuando sobre una partícula es cero entonces la partícula se mueve con velocidad constante respecto al marco de referencia.*

Cabe recalcar, en base a esta ley, que la partícula puede quedarse en reposo (velocidad constante igual a cero relativa a ese marco de referencia).

Debemos enfatizar la importancia de los marcos de referencia mencionados en la primera ley de Newton, ya que las tres leyes de Newton están enunciadas en término de ellos. Es por eso que damos la siguiente definición:

**Definición 1.0.1** Llamamos *marco inercial* a los marcos de referencia donde se cumple la primera ley de Newton.

## CAPÍTULO 1. PRELIMINARES.

---

Una vez que ya tenemos la definición de marco inercial, podemos enunciar la segunda y tercera ley de Newton.

**2a Ley de Newton:** *La aceleración de una partícula relativa a un marco inercial es proporcional a la fuerza total actuando en la partícula, con constante de proporcionalidad el inverso de la masa de la partícula.*

**3a Ley de Newton:** *La fuerza que ejerce una partícula sobre otra es de igual magnitud y de sentido contrario y en la dirección de la recta que une las dos partículas, a la fuerza que ejerce la segunda partícula sobre la primera.*

Matemáticamente podemos escribir la segunda ley de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} = m^{-1}\mathbf{F} \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{a}$  y  $m$  son la aceleración y la masa de la partícula respectivamente y  $\mathbf{F}$  es la fuerza total actuando sobre la partícula.

A lo largo de todo el trabajo aceleración, masa y fuerza se denotarán como en el párrafo anterior, a menos que se indique lo contrario.

Enseguida daremos un poco de notación que nos ayudará a escribir matemáticamente la tercera ley de Newton.

**Notación:** Consideramos dos partículas  $p_i$  y  $p_j$ . Llamamos  $\mathbf{F}_{ij}$  a la fuerza que ejerce  $p_i$  sobre  $p_j$ .

Bajo estos términos podemos escribir una consecuencia de la tercera ley de Newton como sigue:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (1.2)$$

Referente a los marcos de referencia inerciales damos la siguiente proposición.

**Proposición 1** *Si un marco de referencia  $S$  se mueve a velocidad constante en relación a un marco inercial entonces  $S$  también es inercial.*

## CAPÍTULO 1. PRELIMINARES.

---

Para dar un ejemplo de marco inercial daremos la siguiente definición.

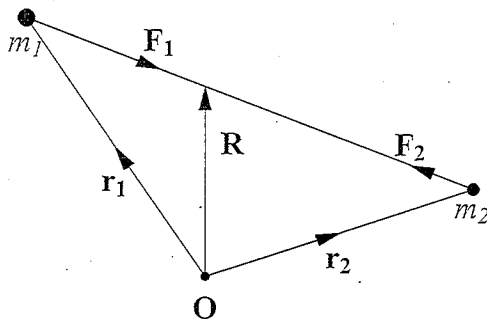
**Definición 1.0.2** Consideremos un sistema de  $N$  partículas de masas  $m_1, m_2, \dots, m_N$ ; con posiciones  $(x_n, y_n, z_n)$  respecto a un marco de referencia. Definimos la *posición del centro de masa* mediante las siguientes ecuaciones

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N m_n x_n, \quad (1.3)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N m_n y_n, \quad (1.4)$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N m_n z_n, \quad (1.5)$$

donde  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$ .



Consideremos un marco inercial  $O$  con coordenadas  $(x, y, z)$  y un sistema de dos partículas de masa  $m_1$  y  $m_2$  con vectores de posición  $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y  $r_2 = (x_2, y_2, z_2)$  respectivamente respecto al marco  $O$ .

Supongamos que la fuerza que actúa sobre  $m_1$  se debe a la presencia de  $m_2$  y la fuerza que actúa sobre  $m_2$  se debe a la presencia de  $m_1$  y si existen otras fuerzas actuando sobre las masas se cancelan.

## CAPÍTULO 1. PRELIMINARES.

---

Sea  $\mathbf{F}_1$  la fuerza que experimenta  $m_1$  por presencia de  $m_2$  y  $\mathbf{F}_2$  la fuerza que experimenta  $m_2$  debido a la presencia de  $m_1$ .

Por la segunda ley de Newton tenemos

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1, \quad \mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2. \quad (1.6)$$

Además por la tercera ley de Newton sabemos que

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2. \quad (1.7)$$

De aquí se sigue que

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0. \quad (1.8)$$

Si integramos dos veces la ecuación anterior obtenemos

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{a}, \quad (1.9)$$

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad (1.10)$$

donde  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son vectores constantes.

Así que si denotamos por  $\mathbf{R}(t)$  el vector posición del centro de masa tenemos que

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\mathbf{a}t + \mathbf{b}}{m_1 + m_2}. \quad (1.11)$$

Lo cual quiere decir que el centro de masa se está moviendo a velocidad constante respecto al marco inercial  $\mathbf{O}$ .

Entonces por la proposición anterior se sigue que el marco de referencia  $\mathbf{O}'$  que se define por las coordenadas

$$(x', y', z') := (x, y, z) - \mathbf{R}(t)$$

## CAPÍTULO 1. PRELIMINARES.

---

es un marco inercial.

En el marco inercial  $O'$  el centro de masa del sistema se queda en reposo en el origen de  $O'$ .

Este resultado se puede extender a un sistema de  $n$  partículas.

Otra ley importante que debemos enunciar es la ley de la gravitación universal de Newton, ya que fijaremos nuestra atención en esta y en la segunda ley de Newton porque son fundamentales en los trabajos hechos en la mecánica celeste.

**Ley de la gravitación universal:** *Toda partícula ejerce una fuerza de atracción sobre cualquier otra la cual tiene magnitud proporcional al producto de las masas de las partículas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.*

Matemáticamente escribimos:

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1.12)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector posición de  $m_2$  respecto a  $m_1$ ,  $r$  es la magnitud de  $\mathbf{r}$  y  $G$  es la constante de gravitación universal de Newton ( $G = 6.67260 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ ).

El signo negativo se debe a la dirección que se ha escogido de  $\mathbf{r}$  ya que la fuerza gravitacional por experimento es una fuerza de atracción.

Con esta ley Newton mostró que las leyes de Kepler, las cuales Kepler había derivado empíricamente, son consecuencia inmediata de esta fuerza.

En 1609 Kepler publicó sus tres leyes, a las que hacemos referencia en el párrafo anterior, en base a sus observaciones y las del astrónomo Tycho Brahe, las cuales describen el movimiento de los planetas alrededor del sol. A continuación enunciamos dichas leyes.

**1a Ley de Kepler:** *La trayectoria que describe el movimiento de cada planeta alrededor del sol es una elipse con el sol en un foco.*

## CAPÍTULO 1. PRELIMINARES.

---

**2a Ley de Kepler:** *El vector radial del sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.*

**3a Ley de Kepler:** *El cuadrado del periodo orbital de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse de su movimiento.*

En el siguiente capítulo mostraremos como se deducen estas leyes basándonos principalmente en la ley de la gravitación universal de Newton.

Ahora daremos la definición de *momento lineal* y con ella podemos reescribir la segunda ley de Newton.

**Definición 1.0.3** Definimos el *momento lineal* de una partícula de masa  $m$  el cual denotaremos por  $\mathbf{p}$ , mediante la ecuación:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (1.13)$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad de la partícula.

Ahora sí ya estamos en posibilidades de enunciar la segunda ley de Newton de la siguiente manera:

*La razón de cambio del momento lineal de una partícula es igual a la fuerza total que se ejerce sobre ella, a saber,*

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (1.14)$$

La equivalencia de ambos enunciados la podemos ver de la siguiente manera.

Por la ecuación (1.1) se sigue que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.15)$$

lo cual se puede escribir así:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m\dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \\ &= \dot{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Con lo anterior queda visto lo que se quería.

## 1.2 Leyes de conservación.

Nos interesa también conocer cuales cantidades son conservadas, es decir constantes en el tiempo, y bajo qué condiciones. Una de ellas ya la hemos definido, el momento lineal de una partícula.

Ahora podemos enunciar el teorema de conservación del momento lineal:

**Teorema 1.1 (Ley de conservación del momento lineal)** *Si la fuerza total  $F$  actuando sobre una partícula es cero, entonces su momento lineal  $p$  se conserva.*

La demostración de este teorema se obtiene directamente de la ecuación (1.16).

Otra cantidad conservada en ciertas situaciones es el *momento angular* el cual definimos a continuación.

**Definición 1.1.1** Definimos el *momento angular* de una partícula alrededor de un origen fijo  $O$ , y lo denotaremos por  $L$ , como:

$$L = r \times p, \quad (1.17)$$

donde  $r$  es el vector posición de la partícula con respecto a  $O$  y  $p$  es su momento lineal.

Antes de enunciar el teorema de conservación del momento angular daremos la definición de otro concepto importante en la mecánica clásica, el *par de torsión*.

**Definición 1.1.2** Se define el *par de torsión total*  $N$  de una partícula alrededor de un origen fijo  $O$ , como el vector dado por

$$N = r \times F, \quad (1.18)$$

donde  $r$  es como en la definición anterior y  $F$  es la fuerza total actuando sobre la partícula.

**Teorema 1.2 (Ley de conservación del momento angular)** *Si el par de torsión total  $N$  de una partícula es cero, entonces el momento angular  $L$  de ella se conserva.*

## CAPÍTULO 1. PRELIMINARES.

---

Demostración 1.2.1 Escribamos la derivada de  $\mathbf{L}$ :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}} &= \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N}.\end{aligned}$$

Si  $\mathbf{N} = 0$  tenemos que  $\dot{\mathbf{L}} = 0$  y por lo tanto  $\mathbf{L}$  es una cantidad conservada.

Seguiremos viendo varios conceptos importantes para la mecánica clásica continuando con el concepto de *fuerza conservativa*.

**Definición 1.2.1** Decimos que una fuerza  $\mathbf{F}$  es *conservativa* si existe una función escalar  $V$  que depende solamente de la posición tal que

$$\mathbf{F} = -\nabla V. \quad (1.19)$$

Un ejemplo de fuerza no conservativa es una fuerza de fricción. Es importante tener esto presente ya que estaremos trabajando con este tipo de fuerzas.

Para verificar de una manera más fácil que una fuerza es conservativa tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 2** Consideremos una fuerza  $\mathbf{F}$  cuyo dominio es  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  y además es de clase  $C^1$ .

$\mathbf{F}$  es conservativa si y sólo si

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0. \quad (1.20)$$

**Demostración 1.2.2** Empecemos por suponer que  $\mathbf{F}$  es conservativa, es decir, existe una función escalar  $V$  tal que  $\mathbf{F} = -\nabla V$ . Entonces calculamos que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (-\nabla V) = 0. \quad (1.21)$$

Ahora supongamos que  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  y queremos demostrar que  $\mathbf{F}$  es conservativa.

Tenemos la siguiente observación:

**Observación 1.2.1** Si  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  es un camino cerrado simple, siempre se puede construir una superficie  $S$  cuya frontera es  $\alpha([0, 1])$  y tal que  $0 \notin S$ . (Esto puede hacerse aplicando una "pequeña" homotopía).



## CAPÍTULO 1. PRELIMINARES.

---

Ahora bien, construyamos un potencial para  $\mathbf{F}$ .

Fijemos un punto  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ , y definamos  $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (1.22)$$

donde la integral es realizada sobre cualquier camino uniendo  $\mathbf{A}$  con  $\mathbf{x}$  sin pasar por  $\mathbf{0}$ .

Veamos que  $\Phi$  está bien definida.

Sean  $\gamma_1, \gamma_2$  dos caminos en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  uniendo  $\mathbf{A}$  con  $\mathbf{x}$ , entonces  $\gamma_1 - \gamma_2$  es un camino cerrado pasando por  $\mathbf{A}$  donde  $\gamma_1 - \gamma_2$  es la nueva función que recorre  $\gamma_1$  e inmediatamente después recorre  $\gamma_2$  en sentido contrario. Por la observación se tiene que existe  $S$  superficie, la cual tiene frontera la imagen de  $\gamma_1 - \gamma_2$  y  $\mathbf{0} \notin S$ .

Tenemos que se vale el teorema de Stokes y así

$$0 = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.23)$$

de donde

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1.24)$$

Es decir la integral en (1.22) *no* depende del camino elegido en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  que une  $\mathbf{A}$  con  $\mathbf{x}$ .

Ya tenemos por tanto que  $\Phi$  está bien definida.

Veamos que  $\nabla\Phi = \mathbf{F}$ .

Veamos para esto que  $\Phi$  es diferenciable.

Sean  $\mathbf{y} \in S^2 = \{\mathbf{w} : \|\mathbf{w}\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $B_{\delta_1}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| < \delta_1\} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ , pues  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  es abierto.

Así, si  $h \in \mathbb{R}$  es tal que  $|h| < \delta_1$  entonces

## CAPÍTULO 1. PRELIMINARES.

---

$$\|x + hy - x\| = \|hy\| = |h|\|y\| = |h| < \delta_1.$$

lo cual muestra que  $x + hy \in B_{\delta_1}(x) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

Ahora bien, para toda  $\epsilon > 0$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$z \in B_{\delta_2}(x) \Rightarrow \|F(z) - F(x)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Se sigue que  $\delta > 0$ .

Así al analizar en  $B_\delta(x)$ , a saber, al tomar  $|h| < \delta$ , se tiene que

$$\Phi(x + hy) - \Phi(x) = \int_x^{x+hy} \mathbf{F} \cdot ds.$$

Podemos tomar el segmento de línea recta

$$\gamma(t) = t(x + hy) + (1 - t)x \quad \text{para } t \in [0, 1]$$

como el camino que une  $x$  con  $x + hy$ ; pues la bola  $B_\delta(x) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  es convexa.

Tenemos

$$\dot{\gamma}(t) = x + hy - x = hy$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \int_x^{x+hy} \mathbf{F} \cdot ds &= \int_0^1 \mathbf{F} \circ \gamma(t) \cdot hy \, dt \\ &= h \int_0^1 \mathbf{F} \circ \gamma(t) \cdot y \, dt \end{aligned}$$

y de aquí para  $h \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\Phi(\mathbf{x} + h\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x})}{h} - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} \right| &= \left| \int_0^1 \mathbf{F} \circ \gamma(t) \cdot \mathbf{y} \, dt - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} \right| \\
 &= \left| \int_0^1 (\mathbf{F} \circ \gamma(t) - \mathbf{F}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{y} \, dt \right| \\
 &\leq \int_0^1 \|\mathbf{F}(\gamma(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{x})\| \|\mathbf{y}\| \, dt \\
 &= \int_0^1 \|\mathbf{F}(\gamma(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{x})\| \, dt.
 \end{aligned}$$

Así para  $0 < |h| < \delta$  se tiene que  $\gamma(t) \in B_\delta(\mathbf{x}) \subset B_{\delta_2}(\mathbf{x})$  y así

$$\left| \frac{\Phi(\mathbf{x} + h\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x})}{h} - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} \right| \leq \int_0^1 \frac{\epsilon}{2} \, dt < \epsilon.$$

Esto muestra que  $\Phi$  es diferenciable y además

$$\nabla \Phi = \mathbf{F}.$$

Así si  $V = -\Phi$  se obtiene

$$\mathbf{F} = \nabla \Phi = -\nabla V$$

con lo cual  $V$  es un potencial para  $\mathbf{F}$ .

Enseguida definiremos los tipos de energía de una partícula, ya que la energía total, la cual definiremos posteriormente, también es a veces una cantidad conservada.

**Definición 1.2.2** Llamamos *energía cinética*  $T$  de una partícula de masa  $m$  y velocidad  $\mathbf{v}$  a la cantidad

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \tag{1.25}$$

donde  $v$  es la magnitud de la velocidad de la partícula.

Otro tipo de energía es la energía potencial que definiremos enseguida.

**Definición 1.2.3** Dada una fuerza  $\mathbf{F}$  conservativa definimos una *energía potencial*, o *potencial*,  $V$  como una función tal que

$$\mathbf{F} = -\nabla V. \tag{1.26}$$

## CAPÍTULO 1. PRELIMINARES.

Notemos de la definición que la energía potencial  $V$  no es única, lo que hacemos para convertirla en una cantidad única es tomar un nivel (arbitrario) de energía potencial cero.

Una vez que hemos definido la energía cinética y la energía potencial podemos dar la siguiente definición:

**Definición 1.2.4** *Definimos la energía total de una partícula bajo la influencia de una fuerza total conservativa la cual denotaremos por  $E$  como la suma de su energía cinética y su energía potencial,*

$$E = T + V. \quad (1.27)$$

La ley de conservación de la energía se enuncia como sigue:

**Teorema 1.3 (Ley de conservación de la energía)** *Si la fuerza total actuando sobre una partícula es conservativa, entonces la energía total de la partícula es una cantidad conservada.*

**Demostración 1.3.1** Supongamos que  $F$  es una fuerza conservativa, es decir  $F = -\nabla V$ . Para una curva diferenciable parametrizada por longitud de arco tenemos que  $F \cdot ds = -dV$ ; así que integrando esta ecuación de  $A$  a  $B$  tenemos:

$$\int_A^B F \cdot ds = - \int_A^B dV = V_A - V_B. \quad (1.28)$$

Por otro lado, directamente de  $\int_A^B F \cdot ds$  tenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \int_A^B F \cdot ds &= m \int_A^B \frac{dv}{dt} \cdot v \, dt = \frac{m}{2} \int_A^B \frac{d}{dt} (v \cdot v) \, dt \\ &= \frac{m}{2} \int_A^B \frac{d}{dt} v^2 \, dt = \frac{m}{2} (v_B^2 - v_A^2) \\ &= T_B - T_A. \end{aligned} \quad (1.29)$$

De las ecuaciones (1.28) y (1.29) tenemos:

$$V_A - V_B = T_B - T_A. \quad (1.30)$$

Lo cual implica que

$$T_A + V_A = T_B + V_B, \quad (1.31)$$

es decir:

$$E_A = E_B.$$

### 1.3 Fuerzas centrales.

Otro concepto importante para nuestro trabajo al cual dedicaremos esta sección es el de fuerza central. Entonces daremos la definición y mencionaremos algunos aspectos importantes sobre este tipo de fuerza.

**Definición 1.3.1** Una *fuerza central*  $\mathbf{F}$  es una fuerza dirigida hacia un punto fijo  $\mathbf{0}$  llamado centro, y la magnitud de  $\mathbf{F}$  es una función de la distancia a  $\mathbf{0}$  únicamente.

Como ejemplo de fuerza central podemos afirmar que la fuerza gravitacional es de este tipo.

En coordenadas esféricas podemos escribir una fuerza central en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  con centro en  $\mathbf{0}$  como:

$$\mathbf{F} = F(r)\mathbf{n} \quad (1.32)$$

donde  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

En coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  podemos escribir  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$  como:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{x}{r}F(r) \\ F_y &= \frac{y}{r}F(r) \\ F_z &= \frac{z}{r}F(r) \end{aligned} \quad (1.33)$$

donde  $(0, 0, 0)$  es el punto  $\mathbf{0}$  y  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$  para todo punto  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$

Enseguida veremos que las fuerzas centrales satisfacen la definición de fuerza conservativa, y las hipótesis de los teoremas de conservación del momento angular y

conservación de la energía vistos en la sección anterior.

**Proposición 3** *Las fuerzas centrales son conservativas.*

Verificaremos que las fuerzas centrales son conservativas valiéndonos de la ecuación (1.20) junto con las ecuaciones (1.33) y la regla de la cadena.

Empecemos por calcular las siguientes derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_z}{\partial y} &= z \frac{d}{dr} \left( \frac{F(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{yz}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{F(r)}{r} \right) \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} &= y \frac{d}{dr} \left( \frac{F(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{yz}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{F(r)}{r} \right) \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} &= x \frac{d}{dr} \left( \frac{F(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{xz}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{F(r)}{r} \right) \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} &= z \frac{d}{dr} \left( \frac{F(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{xz}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{F(r)}{r} \right) \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} &= y \frac{d}{dr} \left( \frac{F(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{F(r)}{r} \right) \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} &= x \frac{d}{dr} \left( \frac{F(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{F(r)}{r} \right)\end{aligned}$$

para  $r \neq 0$ .

Con las igualdades anteriores podemos calcular el rotacional de  $\mathbf{F}$  y vemos que:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \tag{1.34}$$

para  $r \neq 0$ .

Por la proposición 2 las fuerzas centrales son conservativas.

**Proposición 4** *El momento angular de una partícula bajo influencia de una fuerza central se conserva.*

Para verificar la proposición anterior calculemos el par de torsión usando la ecuación (1.32) como sigue:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times F(r)\mathbf{n} = F(r)(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) = \mathbf{0}. \quad (1.35)$$

Por el Teorema 1.2 tenemos lo que se quería.

**Proposición 5** *Si las fuerzas que actúan sobre una partícula son fuerzas centrales, entonces la energía total de la partícula se conserva.*

Si las fuerzas que actúan sobre una partícula son cada una de ellas centrales entonces la fuerza total, es decir la suma de ellas, es central. Entonces por la Proposición 3 sabemos que la fuerza total es conservativa y por el Teorema 1.3 tenemos que la energía de una partícula que está bajo influencia de fuerzas centrales se conserva.

Cabe mencionar que la energía potencial de una partícula bajo estas fuerzas es, al igual que la magnitud de la fuerza, una función de  $r$  solamente.

Otro aspecto importante sobre fuerzas centrales es la siguiente proposición:

**Proposición 6** *La trayectoria de una partícula que está bajo la influencia de una fuerza total que es central está en un plano fijo.*

Por la Proposición 4 sabemos que el momento angular,  $\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$ , es constante lo cual quiere decir que tanto  $\mathbf{r}$  como  $\mathbf{v}$  deben permanecer en el plano fijo perpendicular a  $\mathbf{L}$ , si  $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ . En el caso  $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ , se tiene que los valores iniciales  $\mathbf{r}_0$  y  $\mathbf{v}_0$  de posición y velocidad yacen en una recta. Por lo tanto, la solución de la ecuación de movimiento da una trayectoria en la misma recta.

## Capítulo 2

# El problema de dos cuerpos.

Aunque el problema de dos cuerpos es bastante conocido en este capítulo daremos un estudio general de él ya que nos servirá de preámbulo para tratar posteriormente *el problema restringido de tres cuerpos*.

También veremos la deducción de las tres leyes de Kepler y algunos datos importantes de las órbitas.

Los resultados presentados en este capítulo vienen de [7] y [4].

### 2.1 Descripción del problema y las ecuaciones de movimiento.

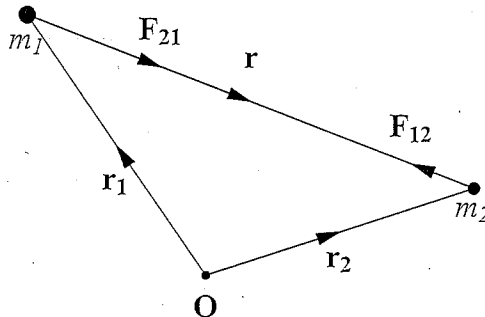
Para abordar el problema de dos cuerpos consideremos dos masas  $m_1$  y  $m_2$ , tales que  $m_2$  se mueve bajo influencia gravitacional de  $m_1$ , además de suponer que no existen otras fuerzas externas que afecten el movimiento.

Nos interesa conocer la trayectoria que describe  $m_2$ .

Sean  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  las posiciones de  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente respecto a un origen fijo  $O$  en un marco de referencia inercial, y sea  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  la posición de  $m_2$  respecto a  $m_1$ .

Por la ley de la gravitación universal sabemos que las fuerzas que experimentan





las masas son:

$$\mathbf{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \qquad \mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}. \quad (2.1)$$

Por la segunda ley de Newton sabemos que:

$$G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1, \qquad -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2. \quad (2.2)$$

Dado que  $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= -G \frac{m_1}{r^3} \mathbf{r} - G \frac{m_2}{r^3} \mathbf{r} \\ &= -\frac{G}{r^3} (m_1 + m_2) \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Escribimos la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = 0 \quad (2.4)$$

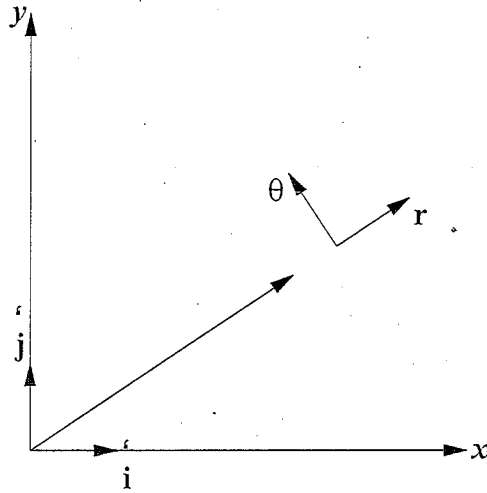
donde  $\mu = G(m_1 + m_2)$ .

Debido al hecho que  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , en la ecuación anterior estamos estudiando el movimiento de  $m_2$  con respecto a  $m_1$ . El vector  $\mathbf{r}$  yace en el plano que contiene a los vectores  $\mathbf{r}_0$  y  $\mathbf{v}_0$  donde  $\mathbf{r}_0$  y  $\mathbf{v}_0$  son la posición y la velocidad de  $m_2$  al tiempo inicial

## CAPÍTULO 2. EL PROBLEMA DE DOS CUERPOS.

respectivamente.

Denotaremos este plano por plano  $xy$  y tomemos una base ortogonal  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  del plano  $xy$ .



Consideremos el sistema en coordenadas polares,  $r, \theta$ , en el plano  $xy$  y sean

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (2.5)$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (2.6)$$

una base ortonormal del sistema.

Podemos escribir el vector posición de la siguiente manera:

$$\mathbf{r} = r \hat{r}. \quad (2.7)$$

Tomando la derivada de  $\mathbf{r}$  con respecto al tiempo  $t$  obtenemos el vector velocidad que escribimos como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} \\ &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\hat{r}}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \dot{\theta}(-\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}}) \\ &= \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}},\end{aligned}\tag{2.8}$$

entonces

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}.\tag{2.9}$$

Ahora tomamos la segunda derivada de la posición con respecto a  $t$  o lo que es lo mismo, la primera derivada de la velocidad para obtener la aceleración:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} \\ &= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\hat{\mathbf{r}}} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= -\dot{\theta}(\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}}) \\ &= -\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}},\end{aligned}$$

entonces al sustituir en (2.10) y usando (2.8) obtenemos  $\mathbf{a}$  del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\hat{\mathbf{r}}} + (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Escribamos la ecuación de movimiento en coordenadas polares sustituyendo (2.7) y (2.11) en (2.4):

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\mu}{r^3}r\hat{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} = 0.$$

Descomponemos esta ecuación vectorial en dos ecuaciones escalares de la manera siguiente:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2},\tag{2.12}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.\tag{2.13}$$

Hasta aquí hemos encontrado un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden el cual al resolverlo nos dará la solución al problema de dos cuerpos, es decir la trayectoria que describe  $m_2$  al moverse bajo la influencia gravitacional de  $m_1$ .

## 2.2 Solución a las ecuaciones de movimiento.

En esta sección presentamos el desarrollo del método para resolver las ecuaciones de movimiento que deducimos en la sección anterior. Para esto empecemos considerando la ecuación (2.13) la cual podemos escribir de la siguiente forma:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (2.14)$$

de donde podemos decir que  $r^2 \dot{\theta}$  es constante.

Por otro lado sabemos que la fuerza que está actuando en el sistema de partículas es una fuerza central cuyo punto central es el centro de masa del sistema. Por lo visto en el capítulo 1 sabemos que el momento angular es constante, es decir:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} \quad (2.15)$$

donde  $\mathbf{h}$  es un vector constante, que podemos calcular sustituyendo las ecuaciones (2.7) y (2.9) en (2.15) como sigue:

$$\begin{aligned} r\hat{\mathbf{r}} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= r\hat{\mathbf{r}} \times \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\hat{\mathbf{r}} \times r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $\hat{\mathbf{z}}$  es el vector unitario ortogonal a  $\hat{\mathbf{r}}$  y a  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  definido por  $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$ .

De la ecuación (2.16) podemos decir que es constante la cantidad  $h$  definida por

$$h := \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{z}} = r^2 \dot{\theta} \quad (2.17)$$

lo cual es congruente ya que hemos dicho que  $r^2 \dot{\theta}$  es constante y que  $\mathbf{h}$  es un vector constante.

## CAPÍTULO 2. EL PROBLEMA DE DOS CUERPOS.

---

Cabe hacer la aclaración que  $h$  no es necesariamente la magnitud de  $\mathbf{h}$ , sino la componente de  $\mathbf{h}$  en la dirección  $\hat{\mathbf{z}}$ .

Ahora consideremos la ecuación (2.12). Para resolverla hacemos un cambio de variable tomando la función

$$u = \frac{1}{r}. \quad (2.18)$$

De la ecuación (2.18) podemos conocer  $r$  en términos de  $u$  y podemos calcular  $\dot{r}$ . Para esto calculamos primero  $\dot{r}$  como:

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta}. \quad (2.19)$$

Usando (2.17) podemos escribir la igualdad anterior de la siguiente manera:

$$\dot{r} = -h \frac{du}{d\theta}. \quad (2.20)$$

Enseguida derivamos la ecuación anterior y obtenemos que

$$\ddot{r} = -h \frac{d^2u}{d\theta^2} \dot{\theta}. \quad (2.21)$$

De la ecuación (2.17) tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{h}{r^2} \\ &= hu^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Sustituimos (2.22) en (2.21) para obtener

$$\ddot{r} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (2.23)$$

Si sustituimos (2.23), (2.22) y  $r = \frac{1}{u}$  en (2.12) podemos escribir la ecuación de movimiento en términos de la función  $u(\theta)$  de la siguiente forma:

$$-h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} (h^2 u^4) = -\mu u^2. \quad (2.24)$$

## CAPÍTULO 2. EL PROBLEMA DE DOS CUERPOS.

La ecuación anterior la podemos simplificar para finalmente escribir la ecuación de movimiento como sigue:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \quad (2.25)$$

Con todo esto hemos simplificado el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales a una sola ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal.

De la teoría de ecuaciones diferenciales sabemos que tenemos que encontrar una solución particular de la ecuación (2.25) y una solución general de la ecuación homogénea  $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$  y que la solución que buscamos es la suma de ambas soluciones.

Así que, en base al método de coeficientes indeterminados, encontramos una solución particular a la ecuación (2.25) la cual es:

$$u_p(\theta) = \frac{\mu}{h^2} \quad (2.26)$$

y resolviendo la ecuación característica de  $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$  sabemos que la solución general para esta ecuación es:

$$u_g(\theta) = \frac{\mu}{h^2} (e \cos(\theta - \omega)) \quad (2.27)$$

donde  $e$  y  $\omega$  son constantes de integración.

Por lo dicho anteriormente tenemos la solución general a la ecuación (2.25) haciendo uso de la ecuaciones (2.26) y (2.27) la cual escribimos a continuación:

$$u(\theta) = \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos(\theta - \omega)). \quad (2.28)$$

Recordamos que  $u = \frac{1}{r}$  y que por lo tanto no hemos encontrado aún la solución a nuestro problema, sino que nos falta tomar el inverso de la ecuación (2.28) como sigue:

$$r = \frac{h^2}{\mu(1 + e \cos(\theta - \omega))}. \quad (2.29)$$

Finalmente escribimos la solución al problema de dos cuerpos de la siguiente forma:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad (2.30)$$

donde

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad (2.31)$$

### 2.3 Leyes de Kepler.

En la sección anterior mostramos que la solución para la ecuación que describe el problema de dos cuerpos tiene la forma:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad (2.32)$$

Si tomamos

$$p = a(1 - e^2) \quad (2.33)$$

tenemos que

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad (2.34)$$

Con esto ya hemos deducido la **primera ley de Kepler** ya que la ecuación (2.32) describe una sección cónica y dadas las condiciones iniciales en base a los datos de los planetas podemos escribir la ecuación de la trayectoria como en la ecuación (2.34), la cual describe una elipse, es decir  $0 \leq e < 1$ , y uno de sus focos está en  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , es decir en el lugar donde se encuentra  $m_1$ .

Enseguida trabajaremos para deducir la **segunda ley de Kepler**. Para esto consideremos el movimiento de  $m_2$  durante un intervalo de tiempo  $\delta t$  donde  $\delta t$  es demasiado pequeño y supongamos que en coordenadas polares, es decir el sistema que introdujimos en la Sección 2.1,  $(r, \theta)$  es la posición de  $m_2$  al tiempo  $t$ , y en el tiempo  $t + \delta t$  la partícula se encuentra en  $(r + \delta r, \theta + \delta \theta)$ .

## CAPÍTULO 2. EL PROBLEMA DE DOS CUERPOS.

---

El área barrida por el vector radial en el intervalo de tiempo  $\delta t$  es aproximadamente

$$\delta A \approx \frac{1}{2}r(r + \delta r) \sin \delta\theta. \quad (2.35)$$

Despreciando los términos de segundo orden y más alto para cantidades pequeñas tenemos la siguiente aproximación:

$$\delta A \approx \frac{1}{2}r^2\delta\theta. \quad (2.36)$$

Enseguida dividimos la ecuación anterior por  $\delta t$  y tenemos:

$$\frac{\delta A}{\delta t} \approx \frac{1}{2}r^2\frac{\delta\theta}{\delta t}. \quad (2.37)$$

Si tomamos el límite cuando  $\delta t \rightarrow 0$  y usamos la ecuación (2.17) tenemos la siguiente igualdad:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}h. \quad (2.38)$$

Ya hemos mencionado que  $h$  es constante. Con esto tenemos la expresión matemática para la segunda ley de Kepler.

Ahora veamos cómo se deduce la tercera ley de Kepler.

Podemos integrar la ecuación (2.38) de 0 a  $T$ , donde  $T$  es el período de la órbita, como sigue:

$$A = \frac{h}{2}T. \quad (2.39)$$

Por otro lado, una vez que en base a la primera ley de Kepler sabemos que la órbita es una elipse, podemos escribir su área de la siguiente manera:

$$A = \pi ab, \quad (2.40)$$

donde  $a$  es el semieje mayor y  $b$  es el semieje menor de la elipse.



De las ecuaciones (2.39) y (2.40) tenemos que:

$$\frac{h}{2}T = \pi ab \quad (2.41)$$

lo cual implica que:

$$T = \frac{2\pi ab}{h}. \quad (2.42)$$

Tomando la ecuación (2.31) podemos ver que  $h^2 = \mu p$  donde sustituimos la ecuación (2.33) y podemos escribir:

$$h^2 = \mu a(1 - e^2). \quad (2.43)$$

Además  $a$  y  $b$  se relacionan de la siguiente forma:

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (2.44)$$

por lo que:

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}. \quad (2.45)$$

Tomando el cuadrado de la ecuación (2.42) conseguimos la ecuación:

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4(\pi ab)^2}{\mu a(1 - e^2)} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{\mu \frac{b^2}{a}} \\ &= \frac{4\pi^2 a^3}{\mu} \end{aligned} \quad (2.46)$$

con lo cual concluimos la deducción de la tercera ley de Kepler.

Una cosa que podemos observar de esta deducción es que la tercera ley de Kepler no es una ley exacta sino una ley aproximada ya que el término  $4\pi/\mu$  no es precisamente una constante sino que depende de la masa del planeta.

## 2.4 Elementos de la órbita: semieje mayor y excentricidad.

En esta sección queremos ver cómo encontrar los elementos de la órbita solución al problema de dos cuerpos, que ya sabemos que es una elipse, en base a la posición y

la velocidad de la partícula en un determinado tiempo.

El trabajo expuesto en esta sección viene de [7].

Como sabemos, el ángulo  $\theta$  recorre  $2\pi$  radianes en un periodo  $T$ . Con esto podemos dar la siguiente definición:

**Definición 2.0.2** Definimos la *velocidad angular promedio* denotada por  $n$  como:

$$n = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.47)$$

En base a esta definición y a la ecuación (2.46) podemos escribir:

$$\mu = n^2 a^3. \quad (2.48)$$

Para conocer el semieje mayor de la elipse en términos de la posición y la velocidad de la partícula en un instante dado consideremos la ecuación (2.9), de ahí se sigue que:

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2. \quad (2.49)$$

Luego tomamos la derivada de la ecuación (2.34) como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{a(1-e^2)e(\sin(\theta-\omega))\dot{\theta}}{(1+e\cos(\theta-\omega))^2} \\ &= \frac{r\dot{\theta}e\sin(\theta-\omega)}{1+e\cos(\theta-\omega)}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Anteriormente hemos dicho que  $h = r^2\dot{\theta}$  así que de las ecuaciones (2.43) y (2.48) tenemos que

$$r^2\dot{\theta} = \pm na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.51)$$

de donde obtenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} r\dot{\theta} &= \pm \frac{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \\ &= \pm \frac{na(1+e\cos(\theta-\omega))}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

la cual sustituimos en (2.50) y obtenemos que

$$\dot{r} = \pm \frac{n a e \sin(\theta - \omega)}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.53)$$

Ahora sustituimos (2.52) y (2.53) en (2.49) y obtenemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{n^2 a^2 e^2 \sin^2(\theta - \omega)}{(1 - e^2)} + \frac{n^2 a^2 (1 + e \cos(\theta - \omega))^2}{(1 - e^2)} \\ &= \frac{n^2 a^2}{(1 - e^2)} (e^2 \sin^2(\theta - \omega) + 1 + 2e \cos(\theta - \omega) + e^2 \cos^2(\theta - \omega)) \\ &= \frac{n^2 a^2}{(1 - e^2)} (e^2 + 1 + 2e \cos(\theta - \omega)). \end{aligned}$$

De la ecuación (2.34) podemos ver que

$$1 + e \cos(\theta - \omega) = \frac{a(1 - e^2)}{r}, \quad (2.54)$$

por lo que escribimos:

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{n^2 a^2}{(1 - e^2)} \left( \frac{2a(1 - e^2)}{r} - (1 - e^2) \right) \\ &= n^2 a^2 \left( \frac{2a}{r} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Luego usando la ecuación (2.48) tenemos que

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (2.56)$$

De la ecuación anterior finalmente podemos despejar  $a$  y nos queda

$$a = \left( \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right)^{-1}. \quad (2.57)$$

Para conocer la excentricidad de la elipse en base a la posición y velocidad de la partícula en un instante dado basta despejar  $e$  de la ecuación (2.43) y obtenemos que

$$e = \left( 1 - \frac{h^2}{\mu a} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.58)$$

## CAPÍTULO 2. EL PROBLEMA DE DOS CUERPOS.

---

donde  $a$  ya lo conocemos de la ecuación (2.57).

Recordando que  $h$  es la componente del momento angular en la dirección  $\hat{z}$  la cual es constante y depende de la posición y de la velocidad, con esto hemos encontrado  $a$  el semieje mayor de la elipse y  $e$  la excentricidad en términos de la posición y la velocidad de la partícula en un instante dado.

## Capítulo 3

# El problema restringido de tres cuerpos.

En este capítulo nos interesa conocer la trayectoria que describe un cuerpo que está bajo la influencia gravitacional de otros dos. Este problema es muy general y no podríamos abarcarlo ya que es aún un área activa de investigación, así que nos dedicaremos a estudiar el problema restringido de tres cuerpos.

Los resultados de la Sección 3.1 a la Sección 3.2 vienen de [7].

### 3.1 Descripción del problema y ecuaciones de movimiento

El problema consiste en estudiar la trayectoria de una partícula que está bajo influencia gravitacional de dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$ , la cual debido a que su masa es muy pequeña no influye en el movimiento de los otros dos cuerpos. Otra de las cosas que vamos a suponer es que  $m_1$  y  $m_2$ , como nos estaremos refiriendo a los cuerpos, tienen un movimiento circular, es decir una solución particular del movimiento de dos cuerpos, alrededor de su común centro de masa.

Debido a que las masas tienen un movimiento circular podemos decir que su separación es constante y tienen la misma velocidad angular constante  $n$ .

### CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

Escogeremos la unidad de masa y la unidad de longitud de tal forma que  $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$  y que la separación de las masas también sea la unidad, con lo cual podemos concluir que  $n = 1$ .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $m_1 > m_2$  y definimos:

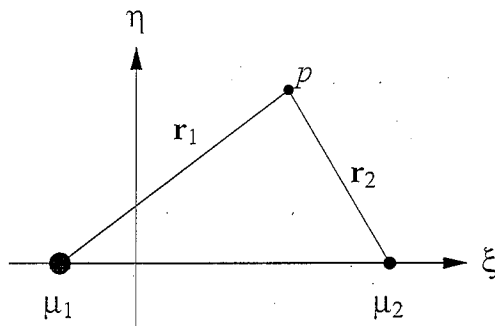
$$\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.1)$$

Con esto tenemos que las dos masas están descritas por los dos parámetros  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , donde

$$\mu_1 = Gm_1 = 1 - \bar{\mu}, \quad \mu_2 = Gm_2 = \bar{\mu}. \quad (3.2)$$

Nos estaremos refiriendo a la masa  $m_1$  como la masa primaria y a  $m_2$  como la masa secundaria.

Ahora veamos lo relacionado a los marcos de referencia para nuestro problema.



Vamos a considerar el marco de referencia inercial con origen en el centro de masa de  $m_1$  y  $m_2$  constituido por los ejes  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  de tal forma que el eje  $\xi$  esté a lo largo de la línea que une las dos masas en  $t = 0$ , el eje  $\eta$  sea ortogonal al eje  $\xi$  y esté en el plano de movimiento y el eje  $\zeta$  sea ortogonal a los ejes  $\xi$  y  $\eta$ .

### CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

En base a este sistema de coordenadas decimos que las coordenadas de  $m_1$  y  $m_2$  son  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  y  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  respectivamente. Las coordenadas de la partícula son  $(\xi, \eta, \zeta)$ .

Enseguida escribimos la posición de la partícula respecto a las masas:

$$\mathbf{r}_1 = (\xi - \xi_1, \eta - \eta_1, \zeta - \zeta_1), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{r}_2 = (\xi - \xi_2, \eta - \eta_2, \zeta - \zeta_2), \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{r}_1$  es la posición de la partícula respecto a  $m_1$  y  $\mathbf{r}_2$  la posición respecto a  $m_2$ .

Con esto podemos escribir la ecuación que describe el movimiento de la partícula usando la ley de la gravitación universal de Newton

$$m (\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}) = -\frac{Gm_1m}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{Gm_2m}{r_2^3} \mathbf{r}_2, \quad (3.5)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula y  $r_j$  es la magnitud de  $\mathbf{r}_j$  para  $j = 1, 2$ .

Usamos las ecuaciones (3.2) para escribir la ecuación anterior como sigue:

$$(\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}) = -\frac{\mu_1}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{\mu_2}{r_2^3} \mathbf{r}_2. \quad (3.6)$$

Enseguida descomponemos esta ecuación vectorial para escribir un sistema de tres ecuaciones escalares que describen el movimiento:

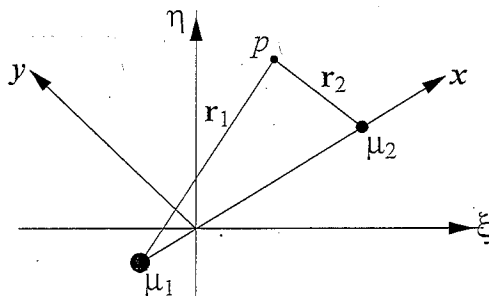
$$\ddot{\xi} = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}, \quad (3.7)$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3}, \quad (3.8)$$

$$\ddot{\zeta} = \mu_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3}. \quad (3.9)$$

Vamos a considerar un marco de referencia  $x, y, z$ , que tiene el mismo origen que nuestro sistema  $\xi, \eta, \zeta$  y se encuentra rotando con una velocidad angular  $n = 1$ . Como mencionamos en el capítulo 1 el sistema  $x, y, z$  no es inercial.

Para esto escogemos el eje  $x$  tal que las masas siempre estén a lo largo de él, el eje  $y$  ortogonal al eje  $x$  y en el plano de movimiento de las masas y el eje  $z$  ortogonal a



estos dos.

Con esto conseguimos que las dos masas tengan posiciones fijas respecto al marco de referencia en rotación.

En este nuevo sistema de coordenadas damos las posiciones de  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente:

$$(x_1, y_1, z_1) = (-\mu_2, 0, 0), \quad (3.10)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (\mu_1, 0, 0), \quad (3.11)$$

para todo tiempo  $t$ .

Si la posición de la partícula es  $(x, y, z)$  entonces podemos escribir:

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2, \quad (3.12)$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2. \quad (3.13)$$

Podemos pasar del sistema  $x, y, z$  al sistema en  $\xi, \eta, \zeta$  con una rotación que depende del tiempo  $t$  como sigue:



$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

De este mismo modo podemos encontrar la velocidad de la partícula en el sistema en rotación derivando la igualdad anterior respecto al tiempo  $t$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -n \sin nt & -n \cos nt & 0 \\ n \cos nt & -n \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Luego podemos calcular otra vez la derivada para obtener la aceleración:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - n\dot{y} \\ \ddot{y} + n\dot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -n \sin nt & -n \cos nt & 0 \\ n \cos nt & -n \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Podemos sustituir estas igualdades para obtener las ecuaciones de movimiento referentes al marco en rotación. Como ya conocemos  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\dot{\xi}$ ,  $\dot{\eta}$  y  $\dot{\zeta}$  en términos de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , las podemos sustituir en la ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.9) con lo cual obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos nt - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \sin nt \\
 &= \mu_1 \frac{x_1 \cos nt - y_1 \sin nt - x \cos nt + y \sin nt}{r_1^3} \\
 & \quad + \mu_2 \frac{x_2 \cos nt - y_2 \sin nt - x \cos nt + y \sin nt}{r_2^3},
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
 & (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \sin nt + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos nt \\
 &= \mu_1 \frac{x_1 \sin nt + y_1 \cos nt - x \sin nt - y \cos nt}{r_1^3} \\
 & \quad + \mu_2 \frac{x_2 \sin nt + y_2 \cos nt - x \sin nt - y \cos nt}{r_2^3},
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\ddot{z} = -\mu_1 \frac{z_1 - z}{r_1^3} + \mu_2 \frac{z_2 - z}{r_2^3}, \tag{3.19}$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son como en las ecuaciones (3.12) y (3.13).

Entonces las ecuaciones que teníamos anteriormente se convierten en las siguientes:

$$\begin{aligned}
 & (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos nt - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \sin nt \\
 &= \left( \mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right) \cos nt \\
 & \quad + \left( \mu_1 \frac{y - y_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y - y_2}{r_2^3} \right) \sin nt,
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 & (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \sin nt + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos nt \\
 &= \left( \mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right) \sin nt \\
 & \quad - \left( \mu_1 \frac{y - y_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y - y_2}{r_2^3} \right) \cos nt,
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\ddot{z} = \mu_1 \frac{z_1 - z}{r_1^3} + \mu_2 \frac{z_2 - z}{r_2^3}. \tag{3.22}$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

Podemos multiplicar la ecuación (3.20) por  $\cos nt$  y sumar al resultado de multiplicar la ecuación (3.21) por  $\sin nt$  como sigue:

$$\begin{aligned} & (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos^2 nt - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos nt \sin nt \\ & + (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \sin^2 nt + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos nt \sin nt \\ & = \left( \mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right) \cos^2 nt + \left( \mu_1 \frac{y - y_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y - y_2}{r_2^3} \right) \cos nt \sin nt \\ & + \left( \mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right) \sin^2 nt - \left( \mu_1 \frac{y - y_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y - y_2}{r_2^3} \right) \cos nt \sin nt \end{aligned}$$

de donde obtenemos:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = \left( \mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right). \quad (3.23)$$

Ahora hacemos un procedimiento parecido al anterior. Multiplicamos la ecuación (3.20) por  $-\sin nt$  y sumamos la ecuación (3.21) multiplicada por  $\cos nt$  para obtener que

$$\begin{aligned} & -(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos nt \sin nt + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \sin^2 nt \\ & + (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos nt \sin nt + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos^2 nt \\ & = - \left( \mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right) \cos nt \sin nt - \left( \mu_1 \frac{y - y_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y - y_2}{r_2^3} \right) \sin^2 nt \\ & + \left( \mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right) \sin nt \cos nt - \left( \mu_1 \frac{y - y_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y - y_2}{r_2^3} \right) \cos^2 nt. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos la siguiente ecuación:

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left( \mu_1 \frac{y - y_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y - y_2}{r_2^3} \right). \quad (3.24)$$

Usando las ecuaciones (3.10) y (3.11) en las ecuaciones (3.23), (3.24) y (3.22) finalmente tenemos el sistema de ecuaciones en el marco en rotación que describen el movimiento de la partícula como sigue:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = - \left( \mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right), \quad (3.25)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left( \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) y, \quad (3.26)$$

$$\ddot{z} = - \left( \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) z. \quad (3.27)$$

### 3.2 Constante de Jacobi y curvas de velocidad cero.

Para el problema restringido de tres cuerpos, en general no hay conservación de energía ni conservación del momento angular.

Sin embargo en esta sección veremos que para este problema existe otra constante de movimiento, llamada la constante de Jacobi.

Para ver esto consideramos la función  $U(x, y, z)$  definida por

$$U(x, y, z) := \frac{n^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (3.28)$$

mediante la cual podemos escribir las ecuaciones de movimiento (3.25), (3.26) y (3.27) como sigue:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (3.29)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (3.30)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3.31)$$

Ahora multiplicamos la ecuación (3.29) por  $\dot{x}$ , la ecuación (3.30) por  $\dot{y}$  y la ecuación (3.31) por  $\dot{z}$  y luego sumamos y obtenemos

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \frac{dU}{dt}. \quad (3.32)$$

Luego si integramos con respecto al tiempo  $t$  obtenemos

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2 = 2U - C_J, \quad (3.33)$$

donde  $v$  es la magnitud de la velocidad respecto al marco de referencia en rotación y  $C_J$  es una constante de integración.

Definición 3.0.3 Llamamos *Constante de Jacobi* a la cantidad

$$C_J = 2U - v^2. \quad (3.34)$$

Al igual que en la sección anterior podemos pasar los vectores de posición y velocidad de la partícula del marco en rotación al marco inercial con las siguientes relaciones.

Para la posición se tiene que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt & 0 \\ -\sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

y para la velocidad

$$\begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt & 0 \\ -\sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Podemos escribir

$$\begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \sin nt & -\cos nt & 0 \\ \cos nt & \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt & 0 \\ -\sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} \sin nt & -\cos nt & 0 \\ \cos nt & \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

La ecuación anterior la escribimos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} - n\mathbf{B} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt & 0 \\ -\sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sin nt & -\cos nt & 0 \\ \cos nt & \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculemos  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$  usando la ecuación (3.39):

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \\ &= \left( \begin{pmatrix} \dot{\xi} & \dot{\eta} & \dot{\zeta} \end{pmatrix} \mathbf{A}^T - \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} n\mathbf{B}^T \right) \\ &\quad \left( \mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} - n\mathbf{B} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\xi} & \dot{\eta} & \dot{\zeta} \end{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\ &\quad - n \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} + n^2 \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Calculemos

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin nt & -\cos nt & 0 \\ \cos nt & \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A} = (\mathbf{A}^T \mathbf{B})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \sin nt & -\cos nt & 0 \\ \cos nt & \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin nt & \cos nt & 0 \\ -\cos nt & \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Sustituyendo estas igualdades en la ecuación (3.40) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - n \begin{pmatrix} \dot{\xi} & \dot{\eta} & \dot{\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\ &\quad - n \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} \\ &\quad + n^2 \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - n \begin{pmatrix} \dot{\eta} & -\dot{\xi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\
 &\quad - n \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta & \xi & 0 \end{pmatrix} + n^2 \begin{pmatrix} \xi & \eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\
 &= \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - n (\dot{\eta}\xi - \dot{\xi}\eta) - n (-\eta\dot{\xi} + \xi\dot{\eta}) + n^2 (\xi^2 + \eta^2) \\
 &= \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - 2n (\dot{\eta}\xi - \dot{\xi}\eta) + n^2 (\xi^2 + \eta^2). \tag{3.45}
 \end{aligned}$$

Además  $x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2$ , que se puede ver de la ecuación (3.35). Entonces la ecuación (3.28) la podemos escribir como

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \frac{n^2}{2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}. \tag{3.46}$$

Si sustituimos la ecuación anterior y la ecuación (3.45) en la ecuación (3.34) obtenemos la siguiente ecuación:

$$C_J = 2 \left( \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) - \dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2 - \dot{\zeta}^2 + 2n (\dot{\eta}\xi - \dot{\xi}\eta), \tag{3.47}$$

la cual podemos escribir como

$$C_J = -2E_T + 2\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}, \tag{3.48}$$

donde  $E_T$  es la energía por unidad de masa de la partícula,  $\mathbf{h}$  es el momento angular por unidad de masa de la partícula y  $\mathbf{n} = (0, 0, n)$ .

Entonces tenemos que, en general, ni la energía total ni el momento angular total son cantidades conservadas.

Regresando a la ecuación (3.34) tenemos lo siguiente.

Como lo mencionamos en la definición,  $2U - v^2$  es constante, por lo que para el problema restringido de tres cuerpos tenemos una constante de movimiento la cual no nos ayudará a encontrar una solución exacta al problema sino que nos ayudará a



### CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

encontrar regiones donde la partícula puede o no moverse.

Consideremos el caso en que la partícula tiene velocidad cero en el marco en rotación; la ecuación (3.34) se vuelve:

$$C_J = 2U. \quad (3.49)$$

Esta ecuación define *superficies de velocidad cero*.

A partir de aquí nos restringimos al caso donde la partícula se mueve en el marco inercial en el plano de movimiento de las dos masas grandes. A este problema se le llama *el problema restringido de tres cuerpos en un plano*.

Una vez que hemos restringido el movimiento al plano estaremos hablando de que la ecuación (3.49) nos define *curvas de velocidad cero*; estas curvas definen regiones acotadas, de las que hablabamos anteriormente; aún no hemos hablado del movimiento de la partícula en sí. Solo estamos hablando de regiones donde la partícula no puede moverse y donde es posible que se dé el movimiento de la partícula.

Entonces nos interesa fijarnos en las regiones donde  $2U \geq C_J$  ya que de lo contrario por la ecuación (3.33) tendríamos que  $v$  es un número complejo con parte imaginaria distinta de cero.

Las siguientes gráficas muestran ejemplos de curvas de velocidad cero para distintas  $C_J$ .

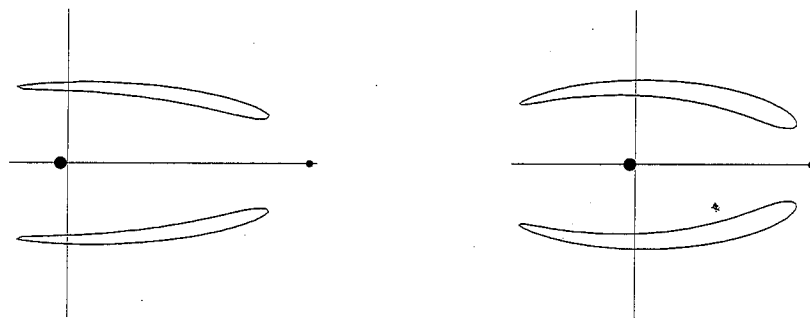


Figura 3.1:  $C_J = 2.9909$

$C_J = 3.0109$

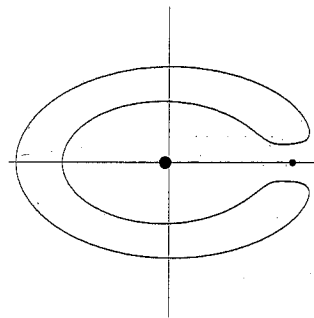
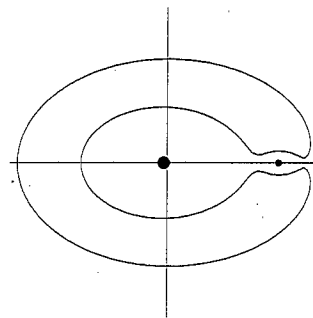


Figura 3.2:  $C_J = 3.0909$



$C_J = 3.2709$

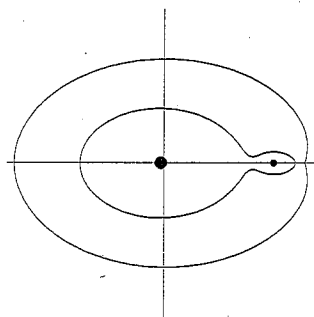
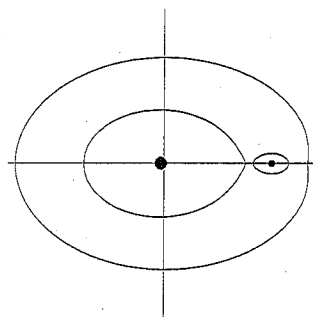


Figura 3.3:  $C_J = 3.3109$



$C_J = 3.3509$

### 3.3 Los puntos de equilibrio: su localización.

En esta sección queremos mostrar los puntos de equilibrio para las ecuaciones de movimiento.

El Teorema 3.4 viene de [1] y el resto de la Sección viene de [7].

Recordemos que nos hemos restringido al plano y que estamos trabajando en un marco en rotación. Entonces los puntos de equilibrio que buscamos son, por definición, aquellos puntos donde la partícula tiene una velocidad apropiada en el marco inercial de tal manera que en el marco en rotación tenga velocidad cero constante. Cabe recalcar que en el marco inercial estos puntos estarán en movimiento.

En resumen, consideremos las ecuaciones (3.29) y (3.30). Queremos encontrar los puntos tales que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0. \quad (3.51)$$

Referente a esto tenemos la siguiente proposición.

**Teorema 3.1** *Para cada valor de  $\mu_2 \in (0, 1)$  existen exactamente cinco puntos de equilibrio para el sistema de ecuaciones (3.25) y (3.26).*

**Demostración 3.1.1** Reescribimos las ecuaciones (3.50) y (3.51) de la siguiente manera:

$$x \left( 1 - \frac{\mu_1}{r_1^3} - \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) - \mu_2 \mu_1 \left( \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) = 0, \quad (3.52)$$

$$y \left( 1 - \frac{\mu_1}{r_1^3} - \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) = 0. \quad (3.53)$$

Primero supongamos que  $y \neq 0$  lo cual implica que

$$1 - \frac{\mu_1}{r_1^3} - \frac{\mu_2}{r_2^3} = 0. \quad (3.54)$$

La ecuación (3.52) se convierte en

$$-\mu_2 \mu_1 \left( \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) = 0 \quad (3.55)$$

lo cual implica que  $r_1 = r_2$ .

De la ecuación (3.54) tenemos que

$$0 = 1 - \frac{\mu_1}{r_1^3} - \frac{\mu_2}{r_1^3} = 1 - \frac{1}{r_1^3} (\mu_1 + \mu_2) \quad (3.56)$$

$$= 1 - \frac{1}{r_1^3} \quad (3.57)$$

de donde obtenemos que  $r_1 = 1 = r_2$ .

Esto quiere decir que hay exactamente dos puntos de equilibrio que son el vértice de un triángulo equilátero, cuyos otros dos vértices están en la posición de las dos

masas más grandes.

Ahora consideremos el caso  $y = 0$ .

La ecuación (3.28) se convierte en

$$U(x, 0) = \frac{x^2}{2} + \frac{\mu_1}{|x + \mu_2|} + \frac{\mu_2}{|x - \mu_1|}. \quad (3.58)$$

Encontrar los puntos de equilibrio con la condición de que  $y = 0$  significa que debemos encontrar los puntos críticos de la ecuación anterior.

Para esto notemos que  $U(x, 0) > 0$  y que  $U(x, 0) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , cuando  $x \rightarrow -\mu_2$  y cuando  $x \rightarrow \mu_1$  además de que  $U''(x, 0) > 0$ , lo cual quiere decir que existen tres mínimos locales de  $U(x, 0)$  cada uno en los intervalos  $(-\infty, -\mu_2)$ ,  $(-\mu_2, \mu_1)$  y  $(\mu_1, \infty)$  respectivamente. Además,  $\frac{\partial U}{\partial y}(x, 0) = 0$  para toda  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces, los tres puntos son puntos críticos de  $U(x, y)$ .

Con esto hemos demostrado que existen exactamente cinco puntos de equilibrio para el problema.

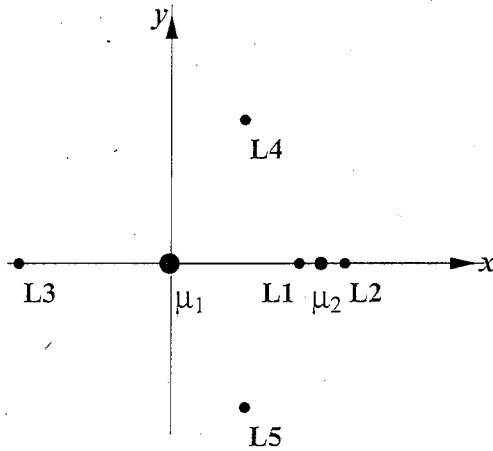


Figura 3.4: Puntos de equilibrio.

Notación: Denotamos L1 al punto de equilibrio que está en el intervalo  $(-\mu_2, \mu_1)$ ,

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

L2 al punto de equilibrio en el intervalo  $(\mu_1, \infty)$  y L3 al punto de equilibrio en el intervalo  $(-\infty, -\mu_2)$ ; a estos tres puntos les llamaremos *puntos colineales*. Llamaremos *puntos triangulares* a los puntos que cumplen que  $r_1 = r_2 = 1$  y los denotamos por L4 al punto superior y L5 al punto inferior. (Véase figura 3.4).

Ahora nos interesa conocer la posición de cada uno de los cinco puntos.

Para esto consideremos las ecuaciones (3.12) y (3.13) para el caso  $z = 0$ .

Multipliquemos (3.12) por  $\mu_1$  y (3.13) por  $\mu_2$  y sumemos:

$$\begin{aligned} \mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 &= (x + \mu_2)^2 \mu_1 + y^2 \mu_1 + (x - \mu_1)^2 \mu_2 + y^2 \mu_2 \\ &= x^2 (\mu_1 + \mu_2) + y^2 (\mu_1 + \mu_2) + \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Recordamos que  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ . La ecuación anterior se vuelve

$$\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 = x^2 + y^2 + \mu_1 \mu_2. \quad (3.60)$$

De aquí se sigue que

$$x^2 + y^2 = \mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 - \mu_1 \mu_2. \quad (3.61)$$

Con esto podemos escribir  $U$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} (\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 - \mu_1 \mu_2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \\ &= \mu_1 \left( \frac{r_1^2}{2} + \frac{1}{r_1} \right) + \mu_2 \left( \frac{r_2^2}{2} + \frac{1}{r_2} \right) - \frac{1}{2} \mu_1 \mu_2. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Haber escrito  $U$  como función de  $r_1$  y  $r_2$  nos facilitará encontrar los puntos de equilibrio ya que podemos escribir

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0, \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} = 0. \quad (3.64)$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

Ahora calculemos las derivadas parciales que desempeñan un papel en las ecuaciones anteriores:

$$\frac{\partial U}{\partial r_1} = \mu_1 \left( r_1 - \frac{1}{r_1^2} \right), \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r_2} = \mu_2 \left( r_2 - \frac{1}{r_2^2} \right), \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{x + \mu_2}{r_1}, \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{x - \mu_1}{r_2}, \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y} = \frac{y}{r_1}, \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial y} = \frac{y}{r_2}. \quad (3.70)$$

Sustituimos estas ecuaciones en las ecuaciones (3.63) y (3.64) para obtener

$$\mu_1 \left( r_1 - \frac{1}{r_1^2} \right) \frac{x + \mu_2}{r_1} + \mu_2 \left( r_2 - \frac{1}{r_2^2} \right) \frac{x - \mu_1}{r_2} = 0, \quad (3.71)$$

$$\mu_1 \left( r_1 - \frac{1}{r_1^2} \right) \frac{y}{r_1} + \mu_2 \left( r_2 - \frac{1}{r_2^2} \right) \frac{y}{r_2} = 0. \quad (3.72)$$

Para encontrar los puntos de equilibrio debemos resolver este sistema de ecuaciones no lineal para  $x$  y  $y$ .

Ya hemos demostrado que hay exactamente tres puntos colineales en el eje  $x$  y hemos encontrado los intervalos donde cada uno de estos se encuentra, así que consideremos cada uno de los casos por separado.

Empecemos por encontrar la posición de **L1**.

Debido a que hemos escogido la unidad de longitud de tal manera que la separación de las masas más grandes sea la unidad para el punto **L1** tenemos que  $r_1 + r_2 = 1$ .

Además, como hemos dicho, el punto **L1** es por definición el punto situado en el intervalo  $(-\mu_2, \mu_1)$  por tal motivo tenemos que  $-\mu_2 < x < \mu_1$  y de aquí que  $0 < x + \mu_2$  y  $x - \mu_1 < 0$ . Por lo tanto

$$r_1 = |x + \mu_2| = x + \mu_2, \quad r_2 = |x - \mu_1| = -x + \mu_1. \quad (3.73)$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

Si sustituimos  $r_1 = 1 - r_2$  en la ecuación (3.71) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\mu_1 \left( 1 - r_2 - \frac{1}{(1 - r_2)^2} \right) - \mu_2 \left( r_2 - \frac{1}{r_2^2} \right) = 0. \quad (3.74)$$

De aquí se sigue que

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{3r_2^3 \left( 1 - r_2 + \frac{r_2^2}{3} \right)}{(1 - r_2)^3 (1 + r_2 + r_2^2)}. \quad (3.75)$$

Definimos

$$\alpha = \left( \frac{\mu_2}{3\mu_1} \right)^{1/3}. \quad (3.76)$$

De la ecuación (3.75) tenemos que

$$\alpha = \frac{r_2 \left( 1 - r_2 + \frac{r_2^2}{3} \right)^{1/3}}{(1 - r_2) (1 + r_2 + r_2^2)^{1/3}}. \quad (3.77)$$

Usando la expansión binomial vamos a calcular cada uno de los factores en la expresión anterior; por las restricciones físicas del problema, sólo estaremos considerando la parte positiva de los intervalos de convergencia.

Así

$$r_2 \left( 1 - r_2 + \frac{r_2^2}{3} \right)^{1/3} = r_2 - \frac{r_2^2}{3} + \frac{r_2^4}{81} + O(r_2^5), \quad (3.78)$$

donde  $0 < r_2 < \frac{3+(21)^{1/2}}{2}$ .

$$(1 - r_2)^{-1} = 1 + r_2 + r_2^2 + r_2^3 + r_2^4 + O(r_2^5), \quad (3.79)$$

donde  $0 < r_2 < 1$ .

$$(1 + r_2 + r_2^2)^{-1/3} = 1 - \frac{r_2}{3} - \frac{r_2^2}{9} + \frac{22r_2^3}{81} - \frac{73r_2^4}{243} + O(r_2^5). \quad (3.80)$$

donde  $0 < r_2 < \frac{-1+(5)^{1/2}}{2}$ .

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

Haciendo la multiplicación de las expresiones anteriores obtenemos  $\alpha$  así:

$$\begin{aligned} \alpha &= \left( r_2 + \frac{2r_2^2}{3} + \frac{2r_2^3}{3} + \frac{55r_2^4}{81} + O(r_2^5) \right) \\ &\quad \left( 1 - \frac{r_2}{3} - \frac{r_2^2}{9} + \frac{22r_2^3}{81} - \frac{73r_2^4}{243} + O(r_2^5) \right) \\ &= r_2 + \frac{r_2^2}{3} + \frac{r_2^3}{3} + \frac{53r_2^4}{81} + O(r_2^5), \end{aligned} \quad (3.81)$$

esta serie converge en  $0 < r_2 < \frac{-1+(5)^{1/2}}{2}$ .

De la ecuación (3.81) tenemos que

$$r_2 = \alpha + \left(-\frac{1}{3}\right)\phi_1(r_2), \quad (3.82)$$

donde

$$\phi_1(r_2) = r_2^2 + r_2^3 + \frac{53}{27}r_2^4 + O(r_2^5). \quad (3.83)$$

Haber escrito de esta forma  $r_2$  nos permitirá usar el método de inversión de Lagrange para expresar  $r_2$  como función de  $\alpha$ .

El *método de Lagrange* nos dice que si una variable  $z$  puede ser expresada como una función de  $\psi$  de la forma

$$\psi = z + e\phi(\psi) \quad \text{con} \quad e < 1 \quad (3.84)$$

entonces  $\psi$  se puede escribir como función de  $z$  mediante la siguiente ecuación:

$$\psi = z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} (\phi(z))^j. \quad (3.85)$$

En [10] se hace un análisis detallado del radio de convergencia de este método, el cual no es nada trivial de calcular, también se muestra que dicho radio es positivo.

Enseguida calculamos lo que se pide en el método:



$$\phi_1(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^3 + \frac{53}{27}\alpha^4 + O(\alpha^5), \quad (3.86)$$

$$(\phi_1(\alpha))^2 = \alpha^4 + 2\alpha^5 + O(\alpha^6), \quad (3.87)$$

$$\frac{d}{d\alpha}(\phi_1(\alpha))^2 = 4\alpha^3 + 10\alpha^4 + O(\alpha^5), \quad (3.88)$$

$$(\phi_1(\alpha))^3 = \alpha^6 + O(\alpha^7), \quad (3.89)$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}(\phi_1(\alpha))^3 = 30\alpha^4 + O(\alpha^5). \quad (3.90)$$

Todas las series anteriores, supondremos convergen en  $|\alpha| < r_0$ , donde  $r_0 > 0$  es el radio de convergencia dado por el método de Lagrange.

Las derivadas calculadas anteriormente se pueden realizar término a término ya que estamos trabajando con series de potencias. Este argumento lo estaremos aplicando para la localización de los otros dos puntos de equilibrio, **L2** y **L3**.

Enseguida sustituimos estas expresiones en la ecuación (3.85) y escribimos

$$\begin{aligned} r_2 &= \alpha - \frac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha^3 + \frac{53}{27}\alpha^4 + O(\alpha^5)) \\ &\quad + \frac{(-\frac{1}{3})^2}{2!}(4\alpha^3 + 10\alpha^4 + O(\alpha^5)) + \frac{(-\frac{1}{3})^3}{3!}(30\alpha^4 + O(\alpha^5)) + O(\alpha^5) \\ &= \alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{23}{81}\alpha^4 + O(\alpha^5). \end{aligned} \quad (3.91)$$

donde  $|\alpha| < r_0$ .

Por lo tanto por la ecuación (3.73) tenemos que la posición del punto **L1** es

$$x = \mu_1 - \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{9}\alpha^3 + \frac{23}{81}\alpha^4 + \dots \quad y = 0. \quad (3.92)$$

Ahora encontremos la posición de **L2**.

Para el punto **L2** tenemos que  $r_1 - r_2 = 1$ .

Ya que por definición el punto **L2** es el punto que está en el intervalo  $(\mu_1, \infty)$  tenemos que  $-\mu_2 < \mu_1 < x$  y de aquí que  $x + \mu_2 > 0$  y  $x - \mu_1 > 0$ . Por lo tanto

$$r_1 = |x + \mu_2| = x + \mu_2, \quad r_2 = |x - \mu_1| = x - \mu_1. \quad (3.93)$$

Si sustituimos  $r_1 = 1 + r_2$  en la ecuación (3.71) tenemos

$$\mu_1 \left( 1 + r_2 - \frac{1}{(1 + r_2)^2} \right) + \mu_2 \left( r_2 - \frac{1}{r_2^2} \right) = 0 \quad (3.94)$$

y de aquí que

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{3r_2^3 \left( 1 + r_2 + \frac{r_2^2}{3} \right)}{(1 + r_2)^2 (1 - r_2^3)}. \quad (3.95)$$

Usando la definición para  $\alpha$  en la ecuación (3.76) tenemos que

$$\alpha = \frac{r_2 \left( 1 + r_2 + \frac{r_2^2}{3} \right)^{\frac{1}{3}}}{(1 + r_2)^{\frac{2}{3}} (1 - r_2^3)^{\frac{1}{3}}}. \quad (3.96)$$

Al igual que en el caso anterior calculemos la expansión binomial de cada uno de los factores en la expresión anterior:

$$r_2 \left( 1 + r_2 + \frac{r_2^2}{3} \right)^{1/3} = r_2 + \frac{r_2^2}{3} - \frac{r_2^4}{81} + O(r_2^5), \quad (3.97)$$

donde  $0 < r_2 < \frac{-3 + (21)^{1/2}}{2}$ .

$$(1 + r_2)^{-2/3} = 1 - \frac{2r_2}{3} + \frac{5r_2^2}{9} - \frac{40r_2^3}{81} + \frac{110r_2^4}{243} + O(r_2^5), \quad (3.98)$$

donde  $0 < r_2 < 1$ .

$$(1 - r_2^3)^{-1/3} = 1 + \frac{r_2^3}{3} + O(r_2^5). \quad (3.99)$$

donde  $0 < r_2 < 1$ .

Ahora sustituimos en (3.96) como sigue:

$$\alpha = \left( r_2 - \frac{r_2^2}{3} + \frac{r_2^3}{3} - \frac{26r_2^4}{81} + O(r_2^5) \right) \left( 1 + \frac{r_2^3}{3} + O(r_2^5) \right) \quad (3.100)$$

$$= r_2 - \frac{r_2^2}{3} + \frac{r_2^3}{3} + \frac{r_2^4}{81} + O(r_2^5). \quad (3.101)$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

esta serie converge en  $0 < r_2 < \frac{-3+(21)^{1/2}}{2}$ .

De la ecuación anterior tenemos que

$$r_2 = \alpha + \left(-\frac{1}{3}\right)\phi_2(r_2), \quad (3.102)$$

donde

$$\phi_2(r_2) = -r_2^2 + r_2^3 + \frac{1}{27}r_2^4 + O(r_2^5). \quad (3.103)$$

Nuevamente, usando la ecuación (3.85) podemos invertir la serie en (3.101) para escribir  $r_2$  como función de  $\alpha$ . Para esto calculamos primero las siguientes igualdades:

$$\phi_2(\alpha) = -\alpha^2 + \alpha^3 + \frac{\alpha^4}{27} + O(\alpha^5), \quad (3.104)$$

$$(\phi_2(\alpha))^2 = \alpha^4 - 2\alpha^5 + O(\alpha^6), \quad (3.105)$$

$$\frac{d}{d\alpha}(\phi_2(\alpha))^2 = 4\alpha^3 - 10\alpha^4 + O(\alpha^5), \quad (3.106)$$

$$(\phi_2(\alpha))^3 = -\alpha^6 + O(\alpha^7), \quad (3.107)$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}(\phi_2(\alpha))^3 = -30\alpha^4 + O(\alpha^5). \quad (3.108)$$

Sustituimos las igualdades anteriores en la ecuación (3.85) y obtenemos  $r_2$  así:

$$\begin{aligned} r_2 &= \alpha + \frac{-1}{3}(-\alpha^2 + \alpha^3 + \frac{\alpha^4}{27} + O(\alpha^5)) \\ &\quad + \frac{(-\frac{1}{3})^2}{2!}(4\alpha^3 - 10\alpha^4 + O(\alpha^5)) + \frac{(-\frac{1}{3})^3}{3!}(-30\alpha^4 + O(\alpha^5)) + O(\alpha^5) \\ &= \alpha + \frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^3}{9} - \frac{31\alpha^4}{81} + O(\alpha^5). \end{aligned} \quad (3.109)$$

Por la ecuación (3.93) tenemos que la posición del punto L2 es

$$x = \mu_1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^3}{9} - \frac{31\alpha^4}{81} + \dots, \quad y = 0. \quad (3.110)$$

Enseguida encontramos la posición de L3.

Para L3 tenemos que  $r_2 - r_1 = 1$ .

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

Debido a que L3 es el punto en el intervalo  $(-\infty, -\mu_2)$  tenemos que  $x < -\mu_2 < \mu_1$  y de aquí que  $x + \mu_2 < 0$  y  $x - \mu_1 < 0$ . Por lo tanto

$$r_1 = |x + \mu_2| = -x - \mu_2, \quad r_2 = |x - \mu_1| = -x + \mu_1. \quad (3.111)$$

Si sustituimos  $r_2 = 1 + r_1$  en la ecuación (3.71) tenemos la igualdad

$$\mu_1 \left( r_1 - \frac{1}{r_1^2} \right) + \mu_2 \left( 1 + r_1 - \frac{1}{(1 + r_1)^2} \right) = 0 \quad (3.112)$$

y de aquí se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\mu_2}{\mu_1} &= \frac{(1 - r_1^3)(1 + r_1)^2}{r_1^2((1 + r_1)^3 - 1)} \\ &= \frac{(1 - r_1^3)(1 + r_1)^2}{r_1^2(r_1^3 + 3r_1^2 + 3r_1)} \\ &= \frac{(1 - r_1^3)(1 + r_1)^2}{r_1^3(r_1^2 + 3r_1 + 3)}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Si hacemos  $r_1 = 1 + \beta$  la ecuación anterior se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{\mu_2}{\mu_1} &= \frac{(1 - (1 + \beta)^3)(2 + \beta)^2}{(1 + \beta)^3((1 + \beta)^2 + 3(2 + \beta))} \\ &= \frac{\beta(2 + \beta)^2(3 + 3\beta + \beta^2)}{(1 + \beta)^3(7 + 5\beta + \beta^2)}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Enseguida usamos la expansión binomial para cada uno de los factores de la expresión anterior como sigue:

$$\beta(2 + \beta)^2 = 4\beta + 4\beta^2 + \beta^3, \quad (3.115)$$

$$(1 + \beta)^{-3} = 1 - 3\beta + 6\beta^2 - 10\beta^3 + 15\beta^4 + O(\beta^5), \quad (3.116)$$

$$(7 + 5\beta + \beta^2)^{-1} = \frac{1}{7} - \frac{5\beta}{49} + \frac{18\beta^2}{343} - \frac{55\beta^3}{2401} + \frac{149\beta^4}{16807} + O(\beta^5). \quad (3.117)$$

Luego sustituimos estas igualdades en la ecuación (3.114) y tenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu_2}{\mu_1} &= -(12\beta + 24\beta^2 + 19\beta^3 + 7\beta^4 + O(\beta^5)) \\
 &\quad \cdot (1 - 3\beta + 6\beta^2 - 10\beta^3 + 15\beta^4 + O(\beta^5)) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{5\beta}{49} + \frac{18\beta^2}{343} - \frac{55\beta^3}{2401} + \frac{149\beta^4}{16807} + O(\beta^5)\right) \\
 &= -(12\beta - 12\beta^2 + 19\beta^3 - 26\beta^4 + O(\beta^5)) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{5\beta}{49} + \frac{18\beta^2}{343} - \frac{55\beta^3}{2401} + \frac{149\beta^4}{16807} + O(\beta^5)\right) \\
 &= -\frac{12\beta}{7} + \frac{144\beta^2}{49} - \frac{1567\beta^3}{343} + \frac{15745\beta^4}{2401} + O(\beta^5). \tag{3.118}
 \end{aligned}$$

Seguiremos usando el método de Lagrange para invertir la serie anterior y obtener una expresión para  $\beta$  como función de  $\mu_2/\mu_1$ .

Entonces escribimos

$$\beta = -\frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \frac{1}{7} \phi_3(\beta), \tag{3.119}$$

donde

$$\phi_3(\beta) = 12\beta^2 - \frac{1567}{84}\beta^3 + \frac{15745}{588}\beta^4 + O(\beta^5). \tag{3.120}$$

Seguimos con el mismo procedimiento que hemos estado usando a lo largo de esta sección. Para esto llamemos  $\sigma = -\frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)$  y calculemos

$$\phi_3(\sigma) = 12\sigma^2 - \frac{1567\sigma^3}{84} + \frac{15745\sigma^4}{588} + O(\sigma^5), \tag{3.121}$$

$$\phi_3(\sigma)^2 = 144\sigma^4 - \frac{3134\sigma^5}{7} + O(\sigma^6), \tag{3.122}$$

$$\frac{d}{d\sigma}(\phi_3(\sigma))^2 = 576\sigma^3 - \frac{15670\sigma^4}{7} + O(\sigma^5), \tag{3.123}$$

$$\phi_3(\sigma)^3 = 1728\sigma^6 + O(\sigma^7), \tag{3.124}$$

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}(\phi_3(\sigma))^3 = 51840\sigma^4 + O(\sigma^5). \tag{3.125}$$

Sustituimos estas relaciones en la ecuación (3.85) y obtenemos

$$\begin{aligned}
 \beta &= \sigma + \frac{1}{7}(12\sigma^2 - \frac{1567\sigma^3}{84} + \frac{15745\sigma^4}{588} + O(\sigma^5)) \\
 &\quad + \frac{(\frac{1}{7})^2}{2!}(576\sigma^3 - \frac{15670\sigma^4}{7} + O(\sigma^5)) + \frac{(\frac{1}{7})^3}{3!}(51840\sigma^4 + O(\sigma^5)) + O(\sigma^5) \\
 &= \sigma + \frac{12\sigma^2}{7} + \frac{1889\sigma^3}{588} + \frac{25405\sigma^4}{4116} + O(\sigma^5). \tag{3.126}
 \end{aligned}$$

Finalmente sustituimos el valor para  $\sigma$  como sigue

$$\begin{aligned}
 \beta &= -\frac{7}{12} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \frac{7}{12} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 - \frac{13223}{20736} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^3 \\
 &\quad + \frac{177835}{248832} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^4 + O \left( \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^5 \right). \tag{3.127}
 \end{aligned}$$

Así que la posición del punto L3 es

$$x = -1 - \mu_2 - \beta, \quad y = 0. \tag{3.128}$$

Con esto hemos encontrado los puntos de equilibrio colineales.

Sabemos que para los puntos triangulares se cumple que  $r_1 = r_2 = 1$ . Entonces debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones para encontrar las posiciones de L4 y L5:

$$(x + \mu_2)^2 + y^2 = 1, \tag{3.129}$$

$$(x - \mu_1)^2 + y^2 = 1. \tag{3.130}$$

De la ecuación (3.129) despejamos  $y^2$  y sustituimos en (3.130) como sigue:

$$(x - \mu_1)^2 + 1 - (x + \mu_2)^2 = 1. \tag{3.131}$$

Desarrollamos la ecuación anterior así:

$$0 = x^2 - 2x\mu_1 + \mu_1^2 - x^2 - 2x\mu_2 - \mu_2^2 \tag{3.132}$$

$$= -2x(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1^2 - \mu_2^2. \tag{3.133}$$

Entonces despejando  $x$  de la ecuación anterior obtenemos que

$$x = -\frac{\mu_2^2 - \mu_1^2}{2} \quad (3.134)$$

$$= -\frac{(\mu_2 + \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)}{2} = -\frac{2\mu_2 - 1}{2} \quad (3.135)$$

$$= \frac{1}{2} - \mu_2. \quad (3.136)$$

Ahora, de la ecuación (3.129) sabemos que

$$y^2 = 1 - (x + \mu_2)^2. \quad (3.137)$$

Entonces sustituimos el valor de  $x$  de la ecuación (3.136) en la ecuación anterior y tenemos

$$\begin{aligned} y^2 &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \mu_2 + \mu_2\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned} \quad (3.138)$$

lo cual implica que existen dos soluciones para  $y$ , a saber,

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3.139)$$

Con esto podemos decir que la posición para L4 es

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - \mu_2, \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

debido a que L4 es por definición el punto triangular superior.

Luego la posición para L5 es

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - \mu_2, \\ y &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

debido a que L5 es por definición el otro punto triangular.

### 3.4 Los puntos de equilibrio: su estabilidad.

En la sección anterior hemos encontrado la posición de los cinco puntos de equilibrio del problema que estamos tratando en este capítulo. Ahora nos interesa conocer su estabilidad. Para esto tenemos las siguientes definiciones.

Si  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  entonces se define su norma por

$$\|\mathbf{x}\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (3.140)$$

**Definición 3.1.1** Consideremos el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (3.141)$$

y consideremos una solución constante de (3.141)  $\mathbf{x}^*(t)$ .

Se dice que la solución  $\mathbf{x}^*(t)$  de (3.141) es *estable en el sentido de Liapunov* si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  (dependiendo sólo de  $\epsilon$  y no de el valor de  $t$ ) tal que para toda  $\mathbf{x}_0$  para el cual  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*(0)\| < \delta$  la solución  $\mathbf{x}(t)$  de (3.141) con condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  puede ser extendida para todo  $t > 0$  y satisface que  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \epsilon$  para todo  $t > 0$ .

**Definición 3.1.2** Una solución constante  $\mathbf{x}^*(t)$  de (3.141) es *asintóticamente estable* si es estable en el sentido de Liapunov y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| = 0 \quad (3.142)$$

para toda solución  $\mathbf{x}(t)$  con condición inicial  $\mathbf{x}(0)$  tal que  $\mathbf{x}(0)$  está en una vecindad suficientemente pequeña de  $\mathbf{x}^*(0)$ .

**Definición 3.1.3** Consideremos el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \quad (3.143)$$

y  $\mathbf{x}^*(t)$  una solución constante de (3.143).

Tomemos la expansión en series de Taylor de (3.143) alrededor de  $\mathbf{x}^*(t)$  obteniendo la siguiente expresión



$$\dot{x} = X(x) = Ax + h(x) \quad (3.144)$$

donde A es la matriz constante dada por

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right|_{x^*(t)} \quad (3.145)$$

y  $h(x)$  es de orden más alto que  $x$ .

A la ecuación

$$\dot{x} = Ax \quad (3.146)$$

le llamamos *la linealización de  $\dot{x} = X(x)$* .

Estaremos diciendo que un sistema es *estable* si una solución de él bajo consideración es estable. Por lo general, se trata de un equilibrio del sistema, a saber, una solución constante.

Aclarando lo anterior enunciamos el siguiente teorema.

**Teorema 3.2** *Consideremos el sistema  $\dot{x} = Ax$  con A una matriz constante con valores propios  $\lambda_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

- (i) *Si el sistema es estable, entonces  $Re(\lambda_i) \leq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .*
- (ii) *Si  $Re(\lambda_i) < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; o si  $Re(\lambda_i) \leq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  y no hay valor propio repetido; entonces el sistema es uniformemente estable.*
- (iii) *El sistema es asintóticamente estable si y solo si  $Re(\lambda_i) < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (y entonces es también uniformemente estable, por (ii)).*

Enseguida daremos la definición sobre la cual estaremos trabajando y después un teorema de mucha utilidad en nuestro trabajo.

### CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

**Definición 3.2.1** Decimos que una solución constante  $\mathbf{x}^*(t)$  (un punto de equilibrio) de un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$  es *linealmente estable* si la linealización alrededor de  $\mathbf{x}^*(t)$  cumple con la condición de la hipótesis del inciso (ii) del Teorema 3.2.

**Teorema 3.3** Consideremos  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  la linealización de (??) alrededor de  $\mathbf{x}^*(t)$  donde  $\mathbf{x}^*(t)$  es una solución constante de (??).

Supongamos que todos los valores propios  $\lambda$  de  $\mathbf{A}$  son tales que  $\text{Re}(\lambda) < 0$ . Entonces  $\mathbf{x}^*(t)$  es una solución asintóticamente estable de (??).

Hasta aquí las definiciones y resultados que hemos expuesto vienen de los textos [2] y [6] y los resultados que exponemos en el resto de la Sección vienen de [7].

Para conocer la estabilidad de los puntos L1, L2, L3, L4 y L5 debemos analizar el comportamiento de una partícula que inicialmente tiene posición en un punto cerca de cada uno de los puntos de equilibrio y velocidad muy pequeña.

Por simplificación analizaremos la estabilidad lineal de los puntos.

Consideremos pequeños desplazamientos  $(X, Y)$  de los puntos de equilibrio cuya posición estaremos denotando por  $(x_0, y_0)$ , de tal forma que:

$$x = x_0 + X, \quad y = y_0 + Y. \quad (3.147)$$

Sustituimos estas ecuaciones en las ecuaciones (3.29) y (3.30) y desarrollamos la expansión en series de Taylor para obtener

$$\begin{aligned} \ddot{X} - 2\dot{Y} &\approx \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 + X \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right)_0 + Y \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right)_0, \\ \dot{Y} + 2\dot{X} &\approx \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 + X \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right)_0 + Y \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right)_0. \end{aligned}$$

Estamos denotando con el subíndice cero la evaluación de las funciones en el punto de equilibrio.

Recordemos que los puntos de equilibrio cumplen que:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

Por lo tanto

$$\ddot{X} - 2\dot{Y} \approx X \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 + Y \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0, \quad (3.148)$$

$$\dot{Y} + 2\dot{X} \approx X \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0 + Y \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0. \quad (3.149)$$

Si denotamos

$$U_{xx} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0, \quad U_{xy} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0, \quad U_{yy} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0$$

podemos reescribir las ecuaciones (3.148) y (3.149) de la siguiente forma:

$$\ddot{X} - 2\dot{Y} = X U_{xx} + Y U_{xy},$$

$$\dot{Y} + 2\dot{X} = X U_{xy} + Y U_{yy},$$

con lo cual tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Escribimos el sistema anterior en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & 0 & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}. \quad (3.150)$$

Nos ha quedado una ecuación de la forma

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \mathbf{X}, \quad (3.151)$$

donde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & 0 & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.152)$$

Nos interesa conocer los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ . Para esto necesitamos calcular las raíces del polinomio característico, es decir resolver

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & -\lambda & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.153)$$

el cual nos queda de la siguiente forma

$$\lambda^4 + (4 - U_{xx} - U_{yy})\lambda^2 + U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = 0. \quad (3.154)$$

Observamos que el polinomio característico es cuadrático en  $\lambda^2$ . Por lo tanto sus raíces son de la forma:

$$\lambda_1 = -\lambda_2,$$

$$\lambda_3 = -\lambda_4.$$

Más específicamente tenemos

$$\lambda_1 = \left[ \frac{1}{2}(U_{xx} + U_{yy} - 4) - \frac{1}{2} [(4 - U_{xx} - U_{yy})^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2)]^{1/2} \right]^{1/2},$$

$$\lambda_3 = \left[ \frac{1}{2}(U_{xx} + U_{yy} - 4) + \frac{1}{2} [(4 - U_{xx} - U_{yy})^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2)]^{1/2} \right]^{1/2}.$$

De la definición de  $U$  sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 1 + \frac{3\mu_1(x + \mu_2)^2}{r_1^5} + \frac{3\mu_2(x - \mu_1)^2}{r_2^5} - \frac{\mu_1}{r_1^3} - \frac{\mu_2}{r_2^3}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= 3y \left( \frac{\mu_1(x + \mu_2)}{r_1^5} + \frac{\mu_2(x - \mu_1)}{r_2^5} \right), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= 1 + 3y^2 \left( \frac{\mu_1}{r_1^5} + \frac{\mu_2}{r_2^5} \right) - \frac{\mu_1}{r_1^3} - \frac{\mu_2}{r_2^3}, \end{aligned}$$

y si definimos

$$A = \frac{\mu_1}{(r_1^3)_0} + \frac{\mu_2}{(r_2^3)_0}, \quad (3.155)$$

$$B = 3 \left[ \frac{\mu_1}{(r_1^5)_0} + \frac{\mu_2}{(r_2^5)_0} \right] y_0^2, \quad (3.156)$$

$$C = 3 \left[ \mu_1 \frac{x_0 + \mu_2}{(r_1^5)_0} + \mu_2 \frac{x_0 - \mu_1}{(r_2^5)_0} \right] y_0, \quad (3.157)$$

$$D = 3 \left[ \mu_1 \frac{(x_0 + \mu_2)^2}{(r_1^5)_0} + \mu_2 \frac{(x_0 - \mu_1)^2}{(r_2^5)_0} \right], \quad (3.158)$$

podemos escribir

$$U_{xx} = 1 - A + D, \quad (3.159)$$

$$U_{xy} = C, \quad (3.160)$$

$$U_{yy} = 1 - A + B. \quad (3.161)$$

De este modo también podemos escribir el polinomio característico como sigue:

$$\lambda^4 + (2(1+A) - B - D)\lambda^2 + (1 - A + D)(1 - A + B) - C^2 = 0. \quad (3.162)$$

Podemos hacer más simples los cálculos de los valores propios si los analizamos por casos, es decir analizaremos primero la estabilidad para los puntos colineales y posteriormente analizaremos la estabilidad para los puntos triangulares.

### 3.4.1 Estabilidad de los puntos colineales.

Para los tres puntos colineales se cumple que:

$$y_0 = 0, \quad (r_1^2)_0 = (x_0 + \mu_2)^2, \quad (r_2^2)_0 = (x_0 - \mu_1)^2.$$

Así que podemos escribir

$$\begin{aligned} U_{xx} &= 1 + 2A, \\ U_{xy} &= 0, \\ U_{yy} &= 1 - A. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Con esto el polinomio característico, dado en la ecuación (3.154), para los puntos colineales se escribe de la siguiente forma:

$$\lambda^4 + (2 - A)\lambda^2 + (1 + A - 2A^2) = 0. \quad (3.164)$$

Sabemos que si  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  son raíces del polinomio anterior deben cumplir que

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = (1 + A - 2A^2). \quad (3.165)$$

Para satisfacer la condición de estabilidad debemos tener que

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 < 0, \quad (3.166)$$

$$\lambda_3^2 = \lambda_4^2 < 0, \quad (3.167)$$

lo cual quiere decir que

$$(1 + A - 2A^2) = (1 - A)(1 + 2A) > 0. \quad (3.168)$$

Esto implica que

$$1 - A < 0 \quad \text{y} \quad 1 + 2A < 0, \quad (3.169)$$

o

$$1 - A > 0 \quad \text{y} \quad 1 + 2A > 0. \quad (3.170)$$

La condición en (3.169) no se puede cumplir ya que si  $1 - A < 0$  entonces  $1 < A$  y que  $1 + 2A < 0$  implica que  $-\frac{1}{2} > A$  lo cual es imposible.

Así que las condiciones (3.169) y (3.170) se resumen en

$$-\frac{1}{2} < A < 1. \quad (3.171)$$

Para L1 tenemos que  $r_1 < 1$  y  $r_2 < 1$  lo cual implica que

$$r_1^3 < 1, \quad r_2^3 < 1. \quad (3.172)$$

Enseguida invertimos las desigualdades anteriores para obtener que

$$\frac{1}{r_1^3} > 1, \quad \frac{1}{r_2^3} > 1. \quad (3.173)$$

### CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

Luego si multiplicamos ambas desigualdades anteriores por  $\mu_1$  y  $\mu_2$  respectivamente y sumamos tenemos que

$$\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} > \mu_1 + \mu_2 = 1 \quad (3.174)$$

lo cual implica que

$$A > 1. \quad (3.175)$$

Por lo tanto el punto de equilibrio L1 es inestable.

Omitiremos el análisis para los puntos L2 y L3 debido a que para estos puntos los cálculos son más complicados además de que es bien conocido que los tres puntos colineales son inestables.

#### 3.4.2 Estabilidad de los puntos triangulares.

Como hemos dicho anteriormente para los puntos triangulares se cumple que  $r_1 = r_2 = 1$  y la posición de estos puntos está dada por  $x = 1/2 - \mu_2$ ,  $y = \pm\sqrt{3}/2$ .

Por lo tanto

$$\begin{aligned} U_{xx} &= \frac{3}{4}, \\ U_{xy} &= \pm \frac{3\sqrt{3}(1-2\mu_2)}{4}, \\ U_{yy} &= \frac{9}{4}. \end{aligned} \quad (3.176)$$

Sustituimos estos valores en la ecuación (3.154) y tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^4 + \left(4 - \frac{3}{4} - \frac{9}{4}\right)\lambda^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{4} - \left(\frac{3\sqrt{3}(1-2\mu_2)}{4}\right)^2 \\ &= \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{16} - \frac{27}{16}(1-2\mu_2)^2. \end{aligned} \quad (3.177)$$

Entonces el polinomio característico para los puntos triangulares se escribe como

AT  
ECA

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu_2(1 - \mu_2) = 0. \quad (3.178)$$

Entonces las raíces del polinomio característico para los puntos triangulares son:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{[-1 - (1 - 27\mu_2(1 - \mu_2))^{1/2}]^{1/2}}{2^{1/2}}, \quad (3.179)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \frac{[-1 + (1 - 27\mu_2(1 - \mu_2))^{1/2}]^{1/2}}{2^{1/2}}. \quad (3.180)$$

Para satisfacer la condición para estabilidad lineal, es decir que todas las raíces sean puramente imaginarias, debemos tener

$$1 - 27\mu_2(1 - \mu_2) \geq 0, \quad (3.181)$$

$$-1 < (1 - 27\mu_2(1 - \mu_2))^{1/2} < 1. \quad (3.182)$$

Para que la condición (3.181) se cumpla se debe cumplir que

$$\mu_2 \leq \frac{27 - (621)^{1/2}}{54} \quad \text{o} \quad \mu_2 \geq \frac{27 + (621)^{1/2}}{54} \approx .96. \quad (3.183)$$

Pero dado a que estamos suponiendo que  $\mu_2 < 1/2$  de la condición (3.181) tenemos que

$$\mu_2 \leq \frac{27 - (621)^{1/2}}{54}. \quad (3.184)$$

Una vez que la condición (3.181) sea satisfecha el lado izquierdo de la condición (3.182) se satisface inmediatamente y respecto al lado derecho tenemos que para que se cumpla que  $(1 - 27\mu_2(1 - \mu_2))^{1/2} < 1$  se debe cumplir

$$0 < \mu_2 < 1$$

lo cual es una condición satisfecha por el problema mismo.

Así que las tres condiciones para la estabilidad lineal, mencionadas anteriormente, se reducen a



$$\mu_2 \leq \frac{27 - (621)^{1/2}}{54} \approx 0.0385.$$

Ahora, suponiendo que los puntos triangulares sean estables, es decir que  $\mu_2 < 0.385$  para valores muy pequeños de  $\mu_2$  podemos escribir los eigenvalores como sigue:

$$\lambda_{1,2} \approx \pm \left( -1 + \frac{27}{4} \mu_2 \right)^{1/2}, \quad (3.185)$$

$$\lambda_{3,4} \approx \pm \left( -\frac{27}{4} \mu_2 \right)^{1/2}. \quad (3.186)$$

En nuestro sistema solar podemos encontrar que para algunos casos los puntos de equilibrio triangulares son estables como por ejemplo el sistema Tierra-Luna el cual tiene la constante  $\mu_2 \approx 10^{-2}$  o el sistema Sol-Jupiter el cual tiene la constante  $\mu_2 \approx 10^{-3}$  y para otros casos como el sistema Pluton-Caronte tenemos que todos los puntos de equilibrio son inestables ya que tiene la constante  $\mu_2 \approx 10^{-1}$ .

### 3.5 Renacuajos y herraduras.

En esta sección queremos mostrar algunos ejemplos de las soluciones a las ecuaciones de movimiento del problema restringido de tres cuerpos. Ya que el problema no es integrable vamos a estar trabajando con gráficas que se derivan de una solución numérica.

Nos interesa ver el comportamiento de la partícula alrededor de L4 y L5 ya que son los puntos de equilibrio estables, así que estaremos considerando como condiciones iniciales pequeños desplazamientos de estos ya que el análisis que hicimos no es válido para grandes desplazamientos.

Además de ver las trayectorias que se describen para casos específicos estaremos considerando el problema restringido de tres cuerpos como un problema de dos cuerpos perturbado a cada instante, donde la masa secundaria será la masa perturbadora.

Por lo visto en el capítulo 2 la partícula describiría una elipse si estuviéramos considerando sólo la presencia de la masa primaria. Al introducir la masa secundaria instantáneamente cambian los elementos de la elipse: semieje mayor y excentricidad.

### CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

Por lo dicho anteriormente nos dedicaremos a analizar cómo cambian el semieje mayor y excentricidad de la elipse que describiría la partícula a cada instante que se toma en cuenta la masa secundaria.

El procedimiento que llevamos a cabo para realizar las gráficas de variación de semieje mayor y excentricidad es el siguiente.

Al resolver numéricamente el problema obtenemos una tabla de pares ordenados que son la posición de la partícula a determinado tiempo en el marco en rotación, así como su velocidad.

Enseguida usamos las ecuaciones (3.14) y (3.15) para obtener la posición y la velocidad de la partícula a cada instante en el marco inercial. Una vez que nos encontremos en el marco inercial podremos usar las ecuaciones (2.57) y (2.58) deducidas en el capítulo 2 y finalmente graficaremos.

Veamos como primeros ejemplos trayectorias a las que nos estaremos refiriendo con el término *renacuajos* por su forma.

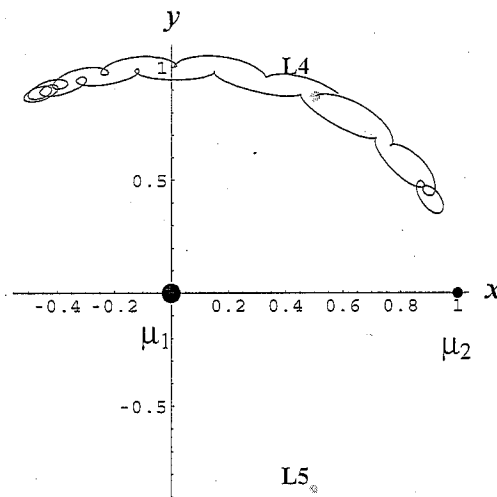


Figura 3.5: Renacuajo,  $\mu_2 = .001$ ,  $x(0) = 1/2 - \mu_2 + 0.0065$ ,  $y(0) = 3^{1/2}/2 + 0.0065$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

En la figura 3.5 mostramos como primer ejemplo la trayectoria de la partícula considerando  $\mu_2 = .001$ , como hemos mencionado anteriormente es un valor cercano

al del sistema Sol-Jupiter, y condiciones iniciales cercanas a L4.

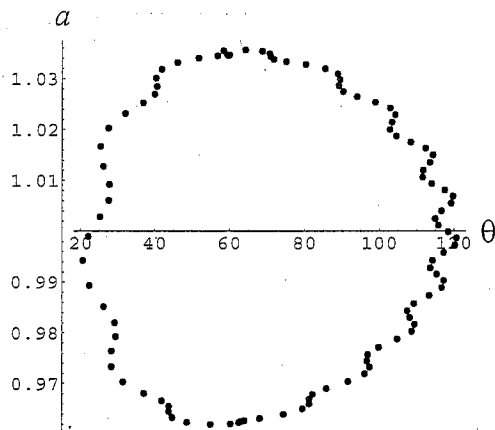


Figura 3.6: Variación del semieje mayor.

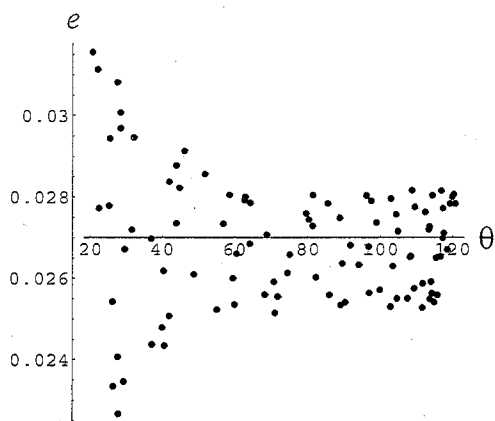


Figura 3.7: Variación de la excentricidad.

Subrayamos que las gráficas que estaremos viendo son las trayectorias que se describen en el marco en rotación, es decir el marco no inercial.

La figura 3.6 muestra la variación del semieje mayor correspondiente a la trayectoria anterior.

AT  
ECA

### CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

Estamos considerando que  $\theta = 0$  corresponde a la línea que une la masa primaria con la masa secundaria.

Como podemos observar esta primera trayectoria que mostramos se extiende aproximadamente de  $20^\circ$  a  $120^\circ$  y el semieje mayor varía aproximadamente de 0.96 a 1.04.

La figura 3.7 muestra la variación de la excentricidad correspondiente a la trayectoria mostrada en la figura 3.5.

La figura 3.8 muestra un segundo ejemplo de trayectoria renacuajo.  $\mu_2$  es como en el ejemplo anterior.

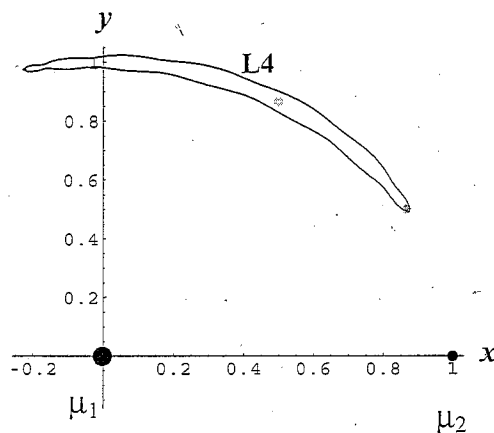


Figura 3.8: Renacuajo.  $\mu_2 = .001$ ,  $x(0) = (3)^{1/2}/2$ ,  $y(0) = 1/2$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

La figura 3.9 muestra la variación del semieje mayor correspondiente a la figura 3.8. En esta gráfica podemos observar que en este caso la trayectoria se extiende aproximadamente de  $30^\circ$  a  $102^\circ$  y el semieje mayor varía aproximadamente de 0.97 a 1.03.

La figura 3.10 muestra la variación de la excentricidad correspondiente a la trayectoria en la figura 3.8. Observamos que los valores son muy cercanos al cero.

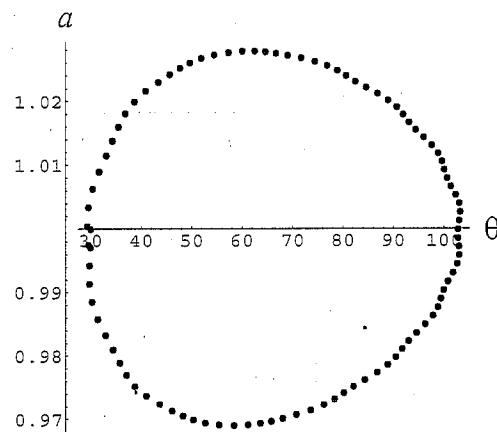


Figura 3.9: Variación del semieje mayor.

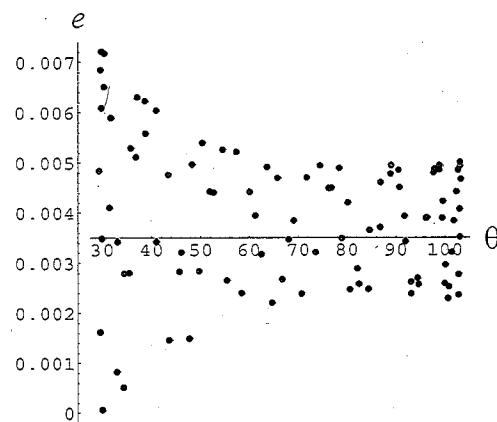


Figura 3.10: Variación de la excentricidad.

Enseguida mostramos un segundo tipo de trayectorias, que por su forma llamamos *Herraduras*, y se caracterizan por el hecho de que la trayectoria se observa alrededor de  $L_4$  y  $L_5$ .

La figura 3.11 es un primer ejemplo de herradura. El punto en el eje negativo de las  $x$  es el punto inicial.

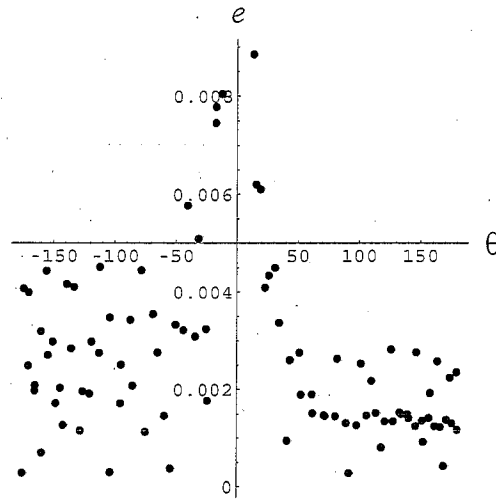


Figura 3.11: Herradura  $\mu_2 = .001$ ,  $x(0) = -1.02745$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0.0432$ .

La figura 3.12 muestra la variación del semieje mayor de este primer ejemplo de herradura. En este ejemplo la trayectoria se extiende aproximadamente de  $10^\circ$  a  $-10^\circ$  y el semieje varia aproximadamente de 0.94 a 1.06.

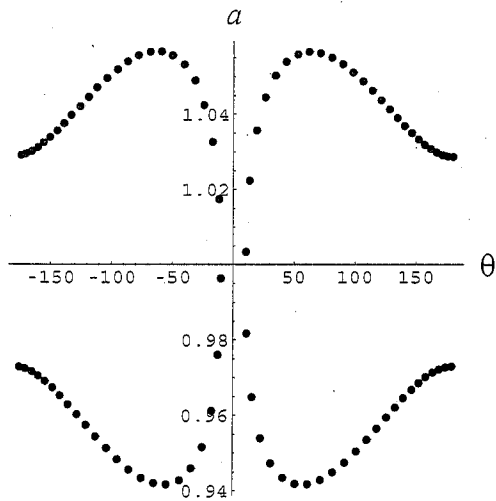


Figura 3.12: Variación del semieje mayor.

La figura 3.13 muestra la variación de la excentricidad para la trayectoria que se muestra en la figura 3.11.

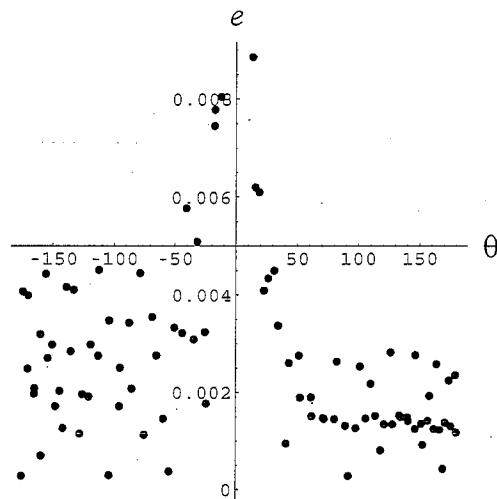


Figura 3.13: Variación de la excentricidad.

Enseguida se muestra un segundo ejemplo de herradura, el valor de  $\mu_2$  es igual que en todos los ejemplos anteriores. Además debemos observar que la velocidad inicial no es igual a 0 para los ejemplos de trayectorias herraduras que presentamos.

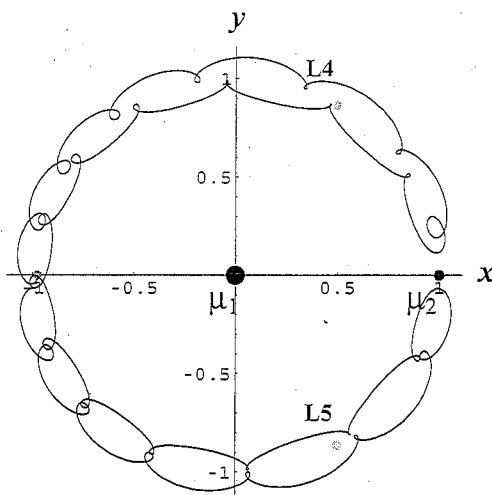


Figura 3.14: Herradura  $\mu_2 = .001$ ,  $x(0) = -0.97668$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = -0.06118$ .

La figura 3.15 muestra la variación del semieje mayor correspondiente al segundo ejemplo de herradura. En este ejemplo la trayectoria se extiende aproximadamente de  $10^\circ$  a  $-10^\circ$  y el semieje varía aproximadamente de 0.94 a 1.06.

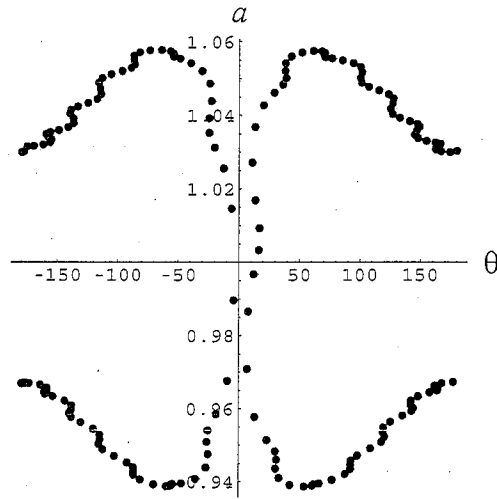


Figura 3.15: Variación del semieje mayor.

La figura 3.16 muestra la variación de la excentricidad para la trayectoria que se muestra en la figura 3.14.

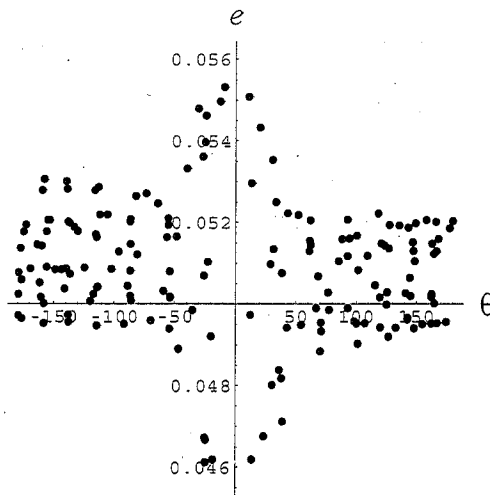


Figura 3.16: Variación de la excentricidad.



### 3.6 Efectos de fricción en el problema restringido de tres cuerpos.

En esta sección estaremos tratando los efectos que tienen las fuerzas de fricción en el problema restringido de tres cuerpos, particularmente estaremos viendo como afecta la posición de los puntos de equilibrio y su estabilidad, basandonos en el artículo de Carl D. Murray [8].

Dividiremos la sección en tres subsecciones: Localización de los puntos de equilibrio, estabilidad de los puntos de equilibrio y algunos ejemplos concretos.

#### 3.6.1 Localización de los puntos de equilibrio.

Estaremos trabajando con fuerzas de fricción  $\mathbf{F}$  tales que  $|\mathbf{F}| = O(k)$  donde  $k$  es muy pequeña y también cada derivada parcial de  $\mathbf{F}$  es de orden  $O(k)$ .

Nos dedicaremos a encontrar una aproximación a la localización de cada uno de los puntos de equilibrio.

Vamos a denotar  $F_\xi$  y  $F_\eta$  a las componentes de  $\mathbf{F}$  en  $\xi$  y  $\eta$  respectivamente las cuales se pueden escribir en términos de la posición y la velocidad de la partícula en el marco inercial.

Si consideramos las ecuaciones en el marco en rotación escribimos las ecuaciones de movimiento como sigue:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} + F_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad (3.187)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right)y + F_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad (3.188)$$

donde

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_\xi \\ F_\eta \end{pmatrix}. \quad (3.189)$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

Sean  $(x^*, y^*)$  puntos de equilibrio para el sistema anterior, es decir son puntos que satisfacen las ecuaciones

$$-\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} + x + F_x(x, y, 0, 0) = 0, \quad (3.190)$$

$$-\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} - 1\right)y + F_y(x, y, 0, 0) = 0. \quad (3.191)$$

Suponemos que bajo efectos de estas fuerzas de fricción los puntos de equilibrio tendrán desplazamientos pequeños de su posición para el caso  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  por lo cual los puntos de equilibrio para nuestro nuevo problema se pueden escribir como

$$x^* = x_0 + \bar{x}, \quad y^* = y_0 + \bar{y}, \quad (3.192)$$

donde  $x_0$  y  $y_0$  son las posiciones de los puntos de equilibrio para el caso  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ;  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  son pequeños desplazamientos.

Enseguida sustituimos los valores de  $x^*$  y  $y^*$  en las ecuaciones (3.190) y (3.191) y luego tomamos la expansión en series de Taylor alrededor de los equilibrios:

$$-\mu_1 \frac{x_0 + \bar{x} + \mu_2}{r_1^{*3}} - \mu_2 \frac{x_0 + \bar{x} - \mu_1}{r_2^{*3}} + x_0 + \bar{x} + f_x = 0, \quad (3.193)$$

$$-\left(\frac{\mu_1}{r_1^{*3}} + \frac{\mu_2}{r_2^{*3}} - 1\right)(y_0 + \bar{y}) + f_y = 0, \quad (3.194)$$

donde

$$r_1^* = [(x^* + \mu_2)^2 + (y^*)^2]^{1/2}, \quad (3.195)$$

$$r_2^* = [(x^* - \mu_1)^2 + (y^*)^2]^{1/2}, \quad (3.196)$$

y

$$f_x = F_x(x_0, y_0, 0, 0), \quad f_y = F_y(x_0, y_0, 0, 0). \quad (3.197)$$

Estaremos despreciando los términos de orden dos en adelante de  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  para obtener un sistema de ecuaciones lineales en  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ . Para esto trabajaremos primero con las ecuaciones (3.195) y (3.196) como sigue.

De la ecuación (3.195) se sigue que

$$\begin{aligned} r_1^{*-3} &= [(x_0 + \bar{x} + \mu_2)^2 + (y_0 + \bar{y})^2]^{-3/2} \\ &= [(x_0)^2 + \bar{x}^2 + \mu_2^2 + 2x_0\bar{x} + 2x_0\mu_2 + 2\bar{x}\mu_2 + (y_0)^2 + 2y_0\bar{y} + \bar{y}^2]^{-3/2} \\ &\approx [(x_0 + \mu_2)^2 + (y_0)^2 + 2(\bar{x}(x_0 + \mu_2) + y_0\bar{y})]^{-3/2} \end{aligned} \quad (3.198)$$

y análogamente de la ecuación (3.196) obtenemos

$$r_2^{*-3} \approx [(x_0 - \mu_1)^2 + (y_0)^2 + 2(\bar{x}(x_0 - \mu_1) + y_0\bar{y})]^{-3/2}. \quad (3.199)$$

Expandimos en serie binomial la ecuación (3.198) y obtenemos la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned} r_1^{*-3} &\approx ((x_0 + \mu_2)^2 + (y_0)^2)^{-3/2} \\ &\quad - \frac{3}{2} ((x_0 + \mu_2)^2 + (y_0)^2)^{-5/2} 2(\bar{x}(x_0 + \mu_2) + y_0\bar{y}) \\ &= ((x_0 + \mu_2)^2 + (y_0)^2)^{-3/2} \\ &\quad - 3 ((x_0 + \mu_2)^2 + (y_0)^2)^{-5/2} (\bar{x}(x_0 + \mu_2) + y_0\bar{y}). \end{aligned} \quad (3.200)$$

Análogamente para la ecuación (3.199) obtenemos que

$$\begin{aligned} r_2^{*-3} &\approx ((x_0 - \mu_1)^2 + (y_0)^2)^{-3/2} \\ &\quad - 3 ((x_0 - \mu_1)^2 + (y_0)^2)^{-5/2} (\bar{x}(x_0 - \mu_1) + y_0\bar{y}). \end{aligned} \quad (3.201)$$

Ahora sustituimos las ecuaciones (3.200) y (3.201) en las ecuaciones (3.193) y (3.194) como sigue:

$$\begin{aligned} &- \mu_1(x_0 + \bar{x} + \mu_2)[((x_0 + \mu_2)^2 + (y_0)^2)^{-3/2} \\ &\quad - 3((x_0 + \mu_2)^2 + (y_0)^2)^{-5/2}(\bar{x}(x_0 + \mu_2) + y_0\bar{y})] \\ &- \mu_2(x_0 + \bar{x} - \mu_1)[((x_0 - \mu_1)^2 + (y_0)^2)^{-3/2} \\ &\quad - 3((x_0 - \mu_1)^2 + (y_0)^2)^{-5/2}(\bar{x}(x_0 - \mu_1) + y_0\bar{y})] \\ &\quad + x_0 + \bar{x} + f_x = 0, \end{aligned} \quad (3.202)$$

$$\begin{aligned}
 & -[\mu_1 \{((x_0 + \mu_2)^2 + (y_0)^2)^{-3/2} \\
 & \quad - 3((x_0 + \mu_2)^2 + (y_0)^2)^{-5/2} (\bar{x}(x_0 + \mu_2) + y_0 \bar{y})\} \\
 & + \mu_2 \{((x_0 - \mu_1)^2 + (y_0)^2)^{-3/2} \\
 & \quad - 3((x_0 - \mu_1)^2 + (y_0)^2)^{-5/2} (\bar{x}(x_0 - \mu_1) + y_0 \bar{y})\} - 1](y_0 + \bar{y}) + f_y = 0.
 \end{aligned} \tag{3.203}$$

Por otro lado dado que  $(x_0, y_0)$  es la posición de los puntos de equilibrio para el caso  $F = 0$  sabemos que se cumple que

$$-\mu_1 \frac{x_0 + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x_0 - \mu_1}{r_2^3} + x_0 = 0, \tag{3.204}$$

$$-\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} - 1\right) y_0 = 0, \tag{3.205}$$

con  $r_1$  y  $r_2$  evaluados en  $(x_0, y_0)$ .

Así que si restamos la ecuación (3.204) a la ecuación (3.202) y la ecuación (3.205) a la ecuación (3.203) y despreciando los términos de orden dos en adelante de  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  obtenemos el sistema de ecuaciones lineales en  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  que queremos, el cual mostramos a continuación:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} + \mu_1 \left( \frac{3(x_0 + \mu_2) [(x_0 + \mu_2) \bar{x} + y_0 \bar{y}]}{[(x_0 + \mu_2)^2 + y_0^2]^{5/2}} - \frac{\bar{x}}{[(x_0 + \mu_2)^2 + y_0^2]^{3/2}} \right) \\
 + \mu_2 \left( \frac{3(x_0 - \mu_1) [(x_0 - \mu_1) \bar{x} + y_0 \bar{y}]}{[(x_0 - \mu_1)^2 + y_0^2]^{5/2}} - \frac{\bar{x}}{[(x_0 - \mu_1)^2 + y_0^2]^{3/2}} \right) + f_x = 0,
 \end{aligned} \tag{3.206}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{y} + \mu_1 \left( \frac{3y_0 [(x_0 + \mu_2) \bar{x} + y_0 \bar{y}]}{[(x_0 + \mu_2)^2 + y_0^2]^{5/2}} - \frac{\bar{y}}{[(x_0 + \mu_2)^2 + y_0^2]^{3/2}} \right) \\
 + \mu_2 \left( \frac{3y_0 [(x_0 - \mu_1) \bar{x} + y_0 \bar{y}]}{[(x_0 - \mu_1)^2 + y_0^2]^{5/2}} - \frac{\bar{y}}{[(x_0 - \mu_1)^2 + y_0^2]^{3/2}} \right) + f_y = 0,
 \end{aligned} \tag{3.207}$$

las cuales resolvemos para cada caso sustituyendo el valor de  $x_0$  y  $y_0$  de cada uno de los puntos de equilibrio.

Enseguida mostramos en primer lugar la solución del sistema de ecuaciones para los puntos colineales.

Empecemos por sustituir  $y_0 = 0$  en las ecuaciones (3.206) y (3.207) como sigue

$$\begin{aligned} & \bar{x} + \mu_1 \left( -\frac{3(x_0 + \mu_2)[(x_0 + \mu_2)\bar{x}]}{[(x_0 + \mu_2)^2]^{5/2}} - \frac{\bar{x}}{[(x_0 + \mu_2)^2]^{3/2}} \right) \\ & + \mu_2 \left( \frac{3(x_0 - \mu_1)[(x_0 - \mu_1)\bar{x}]}{[(x_0 - \mu_1)^2]^{5/2}} - \frac{\bar{x}}{[(x_0 - \mu_1)^2]^{3/2}} \right) + f_x = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{y} + \mu_1 \left( -\frac{\bar{y}}{[(x_0 + \mu_2)^2]^{3/2}} \right) \\ & + \mu_2 \left( -\frac{\bar{y}}{[(x_0 - \mu_1)^2]^{3/2}} \right) + f_y = 0, \end{aligned}$$

Si simplificamos nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{x} + \frac{2\mu_2\bar{x}}{[(x_0 - \mu_1)^2]^{3/2}} + \frac{2\mu_1\bar{x}}{[(x_0 + \mu_2)^2]^{3/2}} + f_x &= 0, \\ \bar{y} - \frac{\mu_1\bar{y}}{[(x_0 + \mu_2)^2]^{3/2}} - \frac{\mu_2\bar{y}}{[(x_0 - \mu_1)^2]^{3/2}} + f_y &= 0. \end{aligned}$$

Si resolvemos el sistema anterior para  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  obtenemos que

$$\bar{x} = -\frac{f_x}{1 + \frac{2\mu_2}{[(x_0 - \mu_1)^2]^{3/2}} + \frac{2\mu_1}{[(x_0 + \mu_2)^2]^{3/2}}}, \quad (3.208)$$

$$\bar{y} = -\frac{f_y}{1 - \frac{\mu_2}{[(x_0 + \mu_2)^2]^{3/2}} - \frac{\mu_1}{[(x_0 - \mu_1)^2]^{3/2}}}. \quad (3.209)$$

Sólo resta sustituir el valor de  $x_0$  para cada uno de los puntos colineales para obtener su desplazamiento.

Enseguida daremos solamente la solución del sistema para el punto colineal L1.

En las igualdades anteriores sustituimos el valor de  $x_0$  para L1 (ver (3.92)) y expandimos en serie binomial el resultado. Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{-f_x}{9} + \frac{4\mu_2^{1/3}f_x}{27 \cdot 3^{1/3}} - \frac{3047\mu_2 f_x}{30618} + O(\mu_2^2), \\ \bar{y} &= \frac{f_y}{3} - \frac{2\mu_2^{1/3}f_y}{3 \cdot 3^{1/3}} + \frac{4\mu_2^{2/3}f_y}{9 \cdot 3^{2/3}} + \frac{2375\mu_2 f_y}{6804} + O(\mu_2^2). \end{aligned} \quad (3.210)$$

Ahora bien, para los puntos triangulares sabemos que  $x_0 = 1/2 - \mu_2$ , así que sustituimos este valor en las ecuaciones (3.206) y (3.207) y utilizamos el hecho que  $\mu_1 = 1 - \mu_2$  para escribir el sistema de ecuaciones como sigue

$$\begin{aligned} & \bar{x} + \mu_1 \left( \frac{3(1/2)[(1/2)\bar{x} + y_0\bar{y}]}{[(1/2)^2 + y_0^2]^{5/2}} - \frac{\bar{x}}{[(1/2)^2 + y_0^2]^{3/2}} \right) \\ & + \mu_2 \left( \frac{3(-1/2)[(-1/2)\bar{x} + y_0\bar{y}]}{[(-1/2)^2 + y_0^2]^{5/2}} - \frac{\bar{x}}{[(-1/2)^2 + y_0^2]^{3/2}} \right) + f_x = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{y} + \mu_1 \left( \frac{3y_0[(1/2)\bar{x} + y_0\bar{y}]}{[(1/2)^2 + y_0^2]^{5/2}} - \frac{\bar{y}}{[(1/2)^2 + y_0^2]^{3/2}} \right) \\ & + \mu_2 \left( \frac{3y_0[(-1/2)\bar{x} + y_0\bar{y}]}{[(-1/2)^2 + y_0^2]^{5/2}} - \frac{\bar{y}}{[(-1/2)^2 + y_0^2]^{3/2}} \right) + f_y = 0. \end{aligned}$$

Si simplificamos obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} & \bar{x} + \frac{3 \left[ \frac{1}{2}\bar{x} + y_0\bar{y}(1 - 2\mu_2) \right]}{2[(1/4) + y_0^2]^{5/2}} - \frac{\bar{x}}{[(1/4) + y_0^2]^{3/2}} + f_x = 0, \\ & \bar{y} + \frac{3y_0 \left[ \frac{1}{2}\bar{x}(1 - 2\mu_2) + y_0\bar{y} \right]}{[(1/4) + y_0^2]^{5/2}} - \frac{\bar{y}}{[(1/4) + y_0^2]^{3/2}} + f_y = 0. \end{aligned} \quad (3.211)$$

Este es el sistema de ecuaciones que tenemos que resolver para encontrar los desplazamientos de los puntos triangulares.

Enseguida resolveremos el sistema para el punto triangular L4.

Si sustituimos el valor de  $y_0 = 3^{1/2}/2$  que es el valor de  $y_0$  para L4 obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4}\bar{x} + \frac{3 \cdot 3^{1/2}}{4}\bar{y}(1 - 2\mu_2) + f_x = 0, \\ & \frac{3 \cdot 3^{1/2}}{4}\bar{x}(1 - 2\mu_2) + \frac{9}{4}\bar{y} + f_y = 0, \end{aligned} \quad (3.212)$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{3f_x + 3^{1/2}f_y(2\mu_2 - 1)}{9(\mu_2 - 1)\mu_2}, \\ \bar{y} &= \frac{f_y + 3^{1/2}f_x(2\mu_2 - 1)}{9(\mu_2 - 1)\mu_2}. \end{aligned} \quad (3.213)$$

Ahora expandimos en series de potencias la solución del sistema y obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= -\frac{f_x}{3\mu_2} + \frac{3^{1/2}f_y}{9\mu_2} - \frac{f_x}{3} - \frac{3^{1/2}f_y}{9} - \frac{\mu_2 f_x}{3} - \frac{3^{1/2}\mu_2 f_y}{9} + O(\mu_2^2), \\ \bar{y} &= \frac{3^{1/2}f_x}{9\mu_2} - \frac{f_y}{9\mu_2} - \frac{3^{1/2}f_x}{9} - \frac{f_y}{9} - \frac{3^{1/2}\mu_2 f_x}{9} - \frac{\mu_2 f_y}{9} + O(\mu_2^2).\end{aligned}\quad (3.214)$$

El procedimiento es análogo para L5.

En resumen tenemos la posición para todos los puntos de equilibrio desplazados.

L1:

$$x^* = x_0 - \frac{f_x}{9}, \quad y^* = y_0 + \frac{f_y}{3}. \quad (3.215)$$

L2:

$$x^* = x_0 - \frac{f_x}{9}, \quad y^* = y_0 + \frac{f_y}{3}. \quad (3.216)$$

L3:

$$x^* = x_0 - \frac{f_x}{3}, \quad y^* = y_0 + \frac{8f_y}{7\mu_2}. \quad (3.217)$$

L4:

$$x^* = x_0 - \frac{f_x}{3\mu_2} + \frac{3^{1/2}f_y}{9\mu_2}, \quad y^* = y_0 + \frac{3^{1/2}f_x}{9\mu_2} - \frac{f_y}{9\mu_2}. \quad (3.218)$$

L5:

$$x^* = x_0 - \frac{f_x}{3\mu_2} + \frac{3^{1/2}f_y}{9\mu_2}, \quad y^* = y_0 - \frac{3^{1/2}f_x}{9\mu_2} - \frac{f_y}{9\mu_2}. \quad (3.219)$$

Con esto tenemos la posición de cada uno de los puntos de equilibrio para nuestro nuevo problema, que como hemos mencionado, son un desplazamiento de los puntos de equilibrio para el caso  $F = 0$ .

Cabe recordar que estas fórmulas solo nos servirán para encontrar la posición de los puntos de equilibrio que han sido desplazados por influencia de una fuerza de fricción externa de orden  $k$  con  $k$  suficientemente pequeña.

### 3.6.2 Estabilidad de los puntos de equilibrio.

Estamos interesados en la estabilidad de los puntos L4 y L5 ya que en el problema restringido de tres cuerpos son los únicos puntos estables, y queremos ver en el caso en que introducimos una fuerza de fricción bajo qué condiciones mantienen la estabilidad.

El siguiente procedimiento nos permitirá estimar los valores propios de la linealización en los puntos de equilibrio, tal procedimiento es equivalente al procedimiento usual, el de linealizar el sistema en cada punto de equilibrio y luego calcular los valores propios de la matriz correspondiente.

Nuevamente consideramos desplazamientos pequeños  $(X_0, Y_0)$  de los puntos de equilibrio.

Sea la solución del problema (3.187)-(3.188) con condición inicial  $x(0) = x^* + X_0$ ,  $y(0) = y^* + Y_0$  de la forma  $x(t) = x^* + X$ ,  $y(t) = y^* + Y$  donde

$$X = X_0 e^{\lambda t} \quad \text{y} \quad Y = Y_0 e^{\lambda t} \quad (3.220)$$

con  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Enseguida sustituimos la solución en las ecuaciones (3.187) y (3.188). Para esto tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{x} = \dot{X} &= \lambda X_0 e^{\lambda t} = \lambda X & \ddot{x} = \ddot{X} &= \lambda^2 X_0 e^{\lambda t} = \lambda^2 X \\ \dot{y} = \dot{Y} &= \lambda Y_0 e^{\lambda t} = \lambda Y & \ddot{y} = \ddot{Y} &= \lambda^2 Y_0 e^{\lambda t} = \lambda^2 Y \end{aligned} \quad (3.221)$$

por lo tanto tomando la expansión en series de Taylor tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda^2 X - 2\lambda Y &= -\mu_1 \frac{x^* + X + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x^* + X - \mu_1}{r_2^3} + (x^* + X) \\ &+ (F_x)_* + X \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_* + Y \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_* + \lambda X \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right)_* + \lambda Y \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right)_*, \end{aligned} \quad (3.222)$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 Y + 2\lambda X &= -\left( \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) (y^* + Y) + (y^* + Y) \\ &+ (F_y)_* + X \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} \right)_* + Y \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_* + \lambda X \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right)_* + \lambda Y \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_*. \end{aligned} \quad (3.223)$$



donde  $()_*$  denota la evaluación en los puntos de equilibrio.

Ahora, tomando la expansión binomial de  $r_1^{-3}$  y de  $r_2^{-3}$  obtenemos

$$\begin{aligned} r_1^{-3} &= [(x^* + X + \mu_2)^2 + (y^* + Y)^2]^{-3/2} \\ &\approx ((x^* + \mu_2)^2 + (y^*)^2)^{-3/2} - 3((x^* + \mu_2)^2 + (y^*)^2)^{-5/2} \\ &\quad \cdot (X(x^* + \mu_2) + y^*Y) \\ &= (r_1^*)^{-3} - 3(r_1^*)^{-5}(X(x^* + \mu_2) + y^*Y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} r_2^{-3} &= [(x^* + X - \mu_1)^2 + (y^* + Y)^2]^{-3/2} \\ &\approx ((x^* - \mu_1)^2 + (y^*)^2)^{-3/2} - 3((x^* - \mu_1)^2 + (y^*)^2)^{-5/2} \\ &\quad \cdot (X(x^* - \mu_1) + y^*Y) \\ &= (r_2^*)^{-3} - 3(r_2^*)^{-5}(X(x^* - \mu_1) + y^*Y). \end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos que

$$-\mu_1 \frac{x^* + \mu_2}{(r_1^*)^3} - \mu_2 \frac{x^* - \mu_1}{(r_2^*)^3} + x^* + (F_x)_* = 0, \quad (3.224)$$

$$-\left(\frac{\mu_1}{(r_1^*)^3} + \frac{\mu_2}{(r_2^*)^3} - 1\right) y^* + (F_y)_* = 0, \quad (3.225)$$

ya que  $(x^*, y^*)$  es la posición de los puntos de equilibrio.

Entonces, hacemos el mismo procedimiento de la sección anterior de restar las ecuaciones anteriores a las ecuaciones (3.222) y (3.223) para obtener hasta el primer orden en  $X$  y en  $Y$  lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lambda^2 X - 2\lambda Y &= X + \mu_1 \left( \frac{3(x^* + \mu_2)[(x^* + \mu_2)X + y^*Y]}{(r_1^*)^5} - \frac{X}{(r_1^*)^3} \right)_* \\ &\quad + \mu_2 \left( \frac{3(x^* - \mu_1)[(x^* - \mu_1)X + y^*Y]}{(r_2^*)^5} - \frac{X}{(r_2^*)^3} \right)_* + X \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_* \\ &\quad + Y \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_* + \lambda X \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right)_* + \lambda Y \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right)_* \end{aligned} \quad (3.226)$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 Y + 2\lambda X = Y + \mu_1 \left( \frac{3y^* [(x^* + \mu_2)X + y^*Y]}{(r_1^*)^5} - \frac{Y}{(r_1^*)^3} \right) \\ + \mu_2 \left( \frac{3y^* [(x^* - \mu_1)X + y^*Y]}{(r_2^*)^5} - \frac{Y}{(r_2^*)^3} \right) + X \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} \right)_* \\ + Y \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_* + \lambda X \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right)_* + \lambda Y \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_* \end{aligned} \quad (3.227)$$

Si factorizamos obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} X \left[ \lambda^2 + \frac{\mu_1}{(r_1^*)^3} \left( 1 - \frac{3(x^* + \mu_2)^2}{(r_1^*)^2} \right) + \frac{\mu_2}{(r_2^*)^3} \left( 1 - \frac{3(x^* - \mu_1)^2}{(r_2^*)^2} \right) \right. \\ \left. - 1 - \lambda \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right)_* - \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_* \right] \\ + Y \left[ -2\lambda - \frac{3\mu_1 y^* (x^* + \mu_2)}{(r_1^*)^5} - \frac{3\mu_2 y^* (x^* - \mu_1)}{(r_2^*)^5} \right. \\ \left. - \lambda \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right)_* - \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_* \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.228)$$

$$\begin{aligned} X \left[ 2\lambda - \frac{3\mu_1 y^* (x^* + \mu_2)}{(r_1^*)^5} - \frac{3\mu_2 y^* (x^* - \mu_1)}{(r_2^*)^5} - \lambda \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right)_* - \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} \right)_* \right] \\ + Y \left[ \lambda^2 + \frac{\mu_1}{(r_1^*)^3} \left( 1 - \frac{3(y^*)^2}{(r_1^*)^2} \right) + \frac{\mu_2}{(r_2^*)^3} \left( 1 - \frac{3(y^*)^2}{(r_2^*)^2} \right) \right. \\ \left. - 1 - \lambda \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_* - \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_* \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.229)$$

Si definimos

$$A^* = \frac{\mu_1}{(r_1^*)^3} + \frac{\mu_2}{(r_2^*)^3}, \quad (3.230)$$

$$B^* = 3 \left[ \frac{\mu_1}{(r_1^*)^5} + \frac{\mu_2}{(r_2^*)^5} \right] y^{*2}, \quad (3.231)$$

$$C^* = 3 \left[ \mu_1 \frac{x^* + \mu_2}{(r_1^*)^5} + \mu_2 \frac{x^* - \mu_1}{(r_2^*)^5} \right] y^*, \quad (3.232)$$

$$D^* = 3 \left[ \mu_1 \frac{(x^* + \mu_2)^2}{(r_1^*)^5} + \mu_2 \frac{(x^* - \mu_1)^2}{(r_2^*)^5} \right], \quad (3.233)$$

y

$$\begin{aligned} F_{x,x} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_*, \quad F_{x,y} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_*, \\ F_{x,\dot{x}} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right)_*, \quad F_{x,\dot{y}} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right)_* \end{aligned}$$

$$F_{y,x} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} \right)_*, \quad F_{y,y} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_*,$$

$$F_{y,\dot{x}} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right)_*, \quad F_{y,\dot{y}} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_*.$$

podemos escribir las ecuaciones (3.228) y (3.229) de la siguiente forma:

$$X(\lambda^2 + A^* - D^* - 1 - \lambda F_{x,\dot{x}} - F_{x,x}) + Y(-2\lambda - C^* - \lambda F_{x,\dot{y}} - F_{x,y}) = 0,$$

$$X(2\lambda - C^* - \lambda F_{y,\dot{x}} - F_{y,x}) + Y(\lambda^2 + A^* - B^* - 1 - \lambda F_{y,\dot{y}} - F_{y,y}) = 0.$$

Para que exista una solución no trivial del sistema anterior se tiene que cumplir que el determinante sea igual a cero; para ver esto vamos a calcular el determinante y a despreciar los términos de orden  $O(k^2)$ . Haciendo esto tenemos el siguiente polinomio

$$\begin{aligned} & \lambda^4 - (F_{x,\dot{x}} + F_{y,\dot{y}}) \lambda^3 + [2(1 + A^*) - B^* - D^* - F_{x,x} \\ & \quad + 2(F_{x,\dot{y}} - F_{y,\dot{x}}) - F_{y,y}] \lambda^2 \\ & + [(1 - A^* + B^*)F_{x,\dot{x}} + (1 - A^* + D^*)F_{y,\dot{y}} \\ & \quad + 2(F_{x,y} - F_{y,x}) - C^*(F_{x,\dot{y}} + F_{y,\dot{x}})] \lambda \\ & + [(A^* - D^* - 1)(A^* - B^* - 1) - (C^*)^2 + (1 - A^* + B^*)F_{x,x} \\ & \quad + (1 - A^* + D^*)F_{y,y} - C^*(F_{x,y} + F_{y,x})] = 0. \end{aligned}$$

Podemos escribir este determinante como sigue:

$$\lambda^4 + a_3 \lambda^3 + (a_{20} + a_2) \lambda^2 + a_1 \lambda + (a_{00} + a_0) = 0, \quad (3.234)$$

donde

$$\begin{aligned} a_3 &= -(F_{x,\dot{x}} + F_{y,\dot{y}}), \\ a_2 &= -F_{x,x} + 2(F_{x,\dot{y}} - F_{y,\dot{x}}) - F_{y,y}, \\ a_{20} &= 2(1 + A^*) - B^* - D^*, \\ a_1 &= (1 - A^* + B^*)F_{x,\dot{x}} + (1 - A^* + D^*)F_{y,\dot{y}} + 2(F_{x,y} - F_{y,x}) \\ & \quad - C^*(F_{x,\dot{y}} + F_{y,\dot{x}}), \\ a_0 &= (1 - A^* + B^*)F_{x,x} + (1 - A^* + D^*)F_{y,y} - C^*(F_{x,y} + F_{y,x}), \\ a_{00} &= (A^* - D^* - 1)(A^* - B^* - 1) - (C^*)^2. \end{aligned} \quad (3.235)$$

### CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

---

Hay que notar que los  $a_i$  y  $a_{i0}$  se calculan evaluando  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$  y las parciales de la fuerza de fricción en cada uno de los puntos de equilibrio.

Tomando en cuenta que los puntos de equilibrio tienen un desplazamiento de orden  $O(k)$  a lo más, el cual es pequeño, podemos calcular los coeficientes del polinomio característico en los puntos de equilibrio para el caso de fricción cero. Esto introduce un error de orden  $O(k^2)$  en los valores de los  $a_i$  y los  $a_{i0}$ .

Con esto podemos decir que los  $a_i$  son la parte de los coeficientes en los que interviene alguna expresión que tiene que ver con la fuerza de fricción y los  $a_{i0}$  son los valores de los coeficientes del polinomio característico para el caso  $F = 0$  (ver (3.162)).

Hasta este momento todo el procedimiento que hemos hecho nos sirve para estudiar la estabilidad de los cinco puntos de equilibrio pero como mencionamos en un principio estamos interesados únicamente en la estabilidad de los puntos triangulares. De aquí en adelante centraremos nuestra atención en L4 y L5.

Podemos usar las soluciones del polinomio característico para el caso de  $F = 0$  para analizar la estabilidad del caso de fricción no cero.

Para el caso  $F = 0$  el polinomio característico está dado por

$$\lambda^4 + a_{20}\lambda^2 + a_{00} = 0, \quad (3.236)$$

donde, comparando con el polinomio (3.178) podemos ver que

$$a_{20} = 1, \quad a_{00} = \frac{27}{4}\mu_2. \quad (3.237)$$

Hay que recordar que estamos despreciando los terminos de orden  $O(\mu_2^2)$ .

Podemos suponer que al introducir una fuerza de fricción las raíces del polinomio (3.234) están dadas por

$$\lambda = \lambda_n(1 + \gamma + \eta i) \quad (3.238)$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

donde  $\gamma$  y  $\eta$  son reales y pequeñas y las  $\lambda_n$  para  $n = 1, 2, 3, 4$  son las raíces del polinomio (3.236) (ver (3.185) y (3.186)), que haciendo las aproximaciones están dadas por

$$\lambda_{1,2} = \pm \left( -1 + \frac{27}{4} \mu_2 \right)^{1/2},$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \left( -\frac{27}{4} \mu_2 \right)^{1/2}.$$

Ya sabemos que los puntos triangulares son estables cuando  $\mu_2 \leq \frac{27-621^{1/2}}{54}$  y las  $\lambda_n$  tienen la forma

$$\lambda_n = \pm Z i, \quad (3.239)$$

donde

$$Z = \left( 1 - \frac{27}{4} \mu_2 \right)^{1/2} \quad \text{o} \quad Z = \left( \frac{27}{4} \mu_2 \right)^{1/2} \quad (3.240)$$

para cada caso.

Así que

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm Z i (1 + \gamma + \eta i) \\ &= Z (\mp \eta \pm (1 + \gamma) i). \end{aligned} \quad (3.241)$$

Ya que tenemos una expresión para  $\lambda$  podemos calcular sus potencias hasta primer orden en  $\gamma$  y  $\eta$ ,

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= Z^2 (-(1 + 2\gamma) - 2\eta i), \\ \lambda^3 &= Z^3 (\pm 3\eta \mp (1 + 3\gamma) i), \\ \lambda^4 &= Z^4 ((1 + 4\gamma) + 4\eta i) \end{aligned}$$

y sustituirlas en (3.234) como sigue:

$$\begin{aligned} &Z^4 ((1 + 4\gamma) + 4\eta i) \mp a_3 Z^3 (-3\eta + (1 + 3\gamma) i) \\ &+ (a_{20} + a_2) Z^2 (-(1 + 2\gamma) - 2\eta i) \pm a_1 Z i (1 + \gamma + \eta i) + a_{00} + a_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.242)$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

Enseguida escribimos la ecuación anterior como un sistema de ecuaciones en donde hemos tomado por separado la parte real y la parte imaginaria de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} Z^4(1+4\gamma) \pm 3a_3 Z^3 \eta - (a_{20} + a_2)Z^2(1+2\gamma) \mp a_1 Z \eta + (a_{00} + a_0) &= 0, \\ 4Z^4 \eta \mp a_3 Z^3(1+3\gamma) - 2(a_{20} + a_2)Z^2 \eta \pm a_1 Z(1+\gamma) &= 0. \end{aligned} \quad (3.243)$$

Ahora factorizamos para escribir el sistema como un sistema de ecuaciones lineales en  $\gamma$  y  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \gamma(4Z^4 - 2(a_{20} + a_2)Z^2) \pm \eta(3a_3 Z^3 - a_1 Z) \\ + Z^4 - (a_{20} + a_2)Z^2 + (a_{00} + a_0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.244)$$

$$\gamma(\mp 3a_3 Z^3 \pm a_1 Z) + \eta(4Z^4 - 2(a_{20} + a_2)Z^2) \mp a_3 Z^3 \pm a_1 Z = 0. \quad (3.245)$$

Notemos que  $Re(\lambda) = \mp \eta Z$  así que para estudiar la estabilidad en los puntos de equilibrio triangulares nos interesa conocer  $\eta$ , que podemos calcular del sistema anterior.

Si despreciamos los productos de  $\eta$  y  $\gamma$  con los  $a_i$  y resolvemos la ecuación (3.245) para  $\eta$  conseguimos que

$$\eta = \frac{\pm a_3 Z^2 \mp a_1}{2Z(2Z^2 - a_{20})}. \quad (3.246)$$

Entonces, usando (3.237) y  $Re(\lambda) = \mp \eta Z$ , se sigue que

$$Re(\lambda) = \frac{a_1 - a_3 Z^2}{2(2Z^2 - 1)}. \quad (3.247)$$

Sabemos que si  $\eta \neq 0$  los puntos de equilibrio serán asintóticamente estables solo si  $Re(\lambda) < 0$ , es decir

$$\frac{a_1 - a_3 Z^2}{2(2Z^2 - 1)} < 0. \quad (3.248)$$

Tomamos en cuenta las ecuaciones (3.240) y las sustituimos en la ecuación anterior para dar las condiciones de estabilidad asintótica

$$\frac{a_1 - a_3 \left(1 - \frac{27}{4}\mu_2\right)}{2\left(2\left(1 - \frac{27}{4}\mu_2\right) - 1\right)} < 0 \quad (3.249)$$

### CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

y

$$\frac{a_1 - a_3 \left(\frac{27}{4}\mu_2\right)}{2\left(2\left(\frac{27}{4}\mu_2\right) - 1\right)} < 0. \quad (3.250)$$

Si simplificamos obtenemos las siguientes condiciones:

$$\frac{a_1 - a_3 \left(1 - \frac{27}{4}\mu_2\right)}{2 - 27\mu_2} < 0 \quad (3.251)$$

y

$$\frac{a_1 - a_3 \left(\frac{27}{4}\mu_2\right)}{27\mu_2 - 2} < 0. \quad (3.252)$$

Dado que estamos considerando que  $\mu_2$  es muy pequeño podemos decir que  $2 - 27\mu_2 > 0$  por lo tanto las condiciones anteriores se reducen a

$$a_1 - a_3 \left(1 - \frac{27}{4}\mu_2\right) < 0 \quad (3.253)$$

y

$$a_1 - a_3 \left(\frac{27}{4}\mu_2\right) > 0. \quad (3.254)$$

Cuando  $\mu_2 \rightarrow 0$  las condiciones de estabilidad asintótica se reducen a

$$0 < a_1 < a_3. \quad (3.255)$$

Cabe recalcar que esta condición de estabilidad asintótica es válida solo en caso en que  $k \ll \mu_2$ .

Con esto vemos que bajo la condición (3.255) los puntos de equilibrio L4 y L5 no sólo mantienen la estabilidad sino que se vuelven asintóticamente estables.

#### 3.6.3 Ejemplos de fuerzas de fricción introducidas en el problema restringido de tres cuerpos.

En esta subsección queremos mostrar algunos ejemplos concretos de fuerzas de fricción en los cuales analizaremos la estabilidad de los puntos triangulares basados en el

### CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

resultado de la subsección anterior.

**Fuerza de fricción inercial.**

En primer lugar consideremos una fuerza por unidad de masa de la forma

$$\mathbf{F}_{in} = k\mathbf{V}g(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad (3.256)$$

donde  $\mathbf{V} = (\dot{x} - y, \dot{y} + x)$  es la velocidad de la partícula en el marco inercial escrita en términos de las coordenadas del marco en rotación (ver (3.36)),  $i$  y  $j$  son números reales y de manera muy particular consideremos que  $g(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = V^i r^j$  donde  $V$  y  $r$  son las magnitudes de la velocidad y la posición de la partícula en el marco inercial respectivamente.

Nos estaremos refiriendo a este tipo de fuerzas con el término *fuerza de fricción inercial*.

Los valores que necesitamos de las derivadas parciales evaluadas en los puntos de equilibrio L4 y L5 son

$$F_{x,y} \approx -k \left(1 + \frac{3}{4}(i+j)\right), \quad F_{y,x} \approx k \left(1 + \frac{1}{4}(i+j)\right), \quad (3.257)$$

$$F_{x,\dot{x}} \approx k \left(1 + \frac{3}{4}i\right), \quad F_{y,\dot{x}} \approx \mp k \left(\frac{3^{1/2}}{4}i\right), \quad (3.258)$$

$$F_{x,\dot{y}} \approx \mp k \left(\frac{3^{1/2}}{4}i\right), \quad F_{y,\dot{y}} \approx k \left(1 + \frac{1}{4}i\right), \quad (3.259)$$

una vez que hemos despreciado los términos de orden dos y más alto en  $k$  y  $\mu_2$  y donde los signos corresponden a L4 y L5 respectivamente.

Para usar la definición de  $a_1$  y  $a_3$  en (3.235) tenemos que evaluar primero  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  y  $D^*$  en L4 y L5 como sigue (ver (3.230)-(3.233)):

$$A^* = 1, \\ B^* = 3[1 - \mu_2 + \mu_2] \left(\frac{3^{1/2}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \quad (3.260)$$



$$C^* = 3 \left[ \frac{1}{2}(1 - \mu_2) - \frac{1}{2}\mu_2 \right] \left( \pm \frac{3^{1/2}}{2} \right) = \pm \frac{3 \cdot 3^{1/2}}{2} \left( \frac{1}{2} - \mu_2 \right),$$

$$D^* = 3 \left[ \frac{1}{4}(1 - \mu_2) + \frac{1}{4}\mu_2 \right] = \frac{3}{4},$$

de aquí que

$$a_1 \approx k \left( \frac{9}{4} \right) \left( 1 + \frac{3}{4}i \right) + k \left( \frac{3}{4} \right) \left( 1 + \frac{1}{4}i \right) + 2 \left( -k \left( 1 + \frac{3}{4}(i+j) \right) - k \left( 1 + \frac{1}{4}(i+j) \right) \right) \mp \frac{3 \cdot 3^{1/2}}{2} \left( \frac{1}{2} - \mu_2 \right) \left( \mp k \left( \frac{3^{1/2}}{4}i \right) \mp k \left( \frac{3^{1/2}}{4}i \right) \right), \quad (3.261)$$

$$a_3 \approx - \left( k \left( 1 + \frac{3}{4}i \right) + k \left( 1 + \frac{1}{4}i \right) \right), \quad (3.262)$$

por lo tanto

$$a_1 \approx -k(1 - i + 2j), \quad a_3 \approx -k(2 + i). \quad (3.263)$$

Si tomamos  $k < 0$  para que se cumpla que  $a_1 > 0$  se debe cumplir que  $1 - i + 2j > 0$ . Así mismo para que  $a_3 > 0$  se debe cumplir que  $2 + i > 0$ .

Así que, en base a la condición dada en (3.255) para tener estabilidad asintótica de los puntos triangulares cuando introducimos una fuerza de fricción inercial se debe cumplir que

$$0 < (1 - i + 2j) < (2 + i). \quad (3.264)$$

Enseguida mostramos algunas gráficas que describen el movimiento de la partícula para casos específicos de este problema.

Estaremos usando el valor de  $\mu_2 = .001$  como en los ejemplos de las trayectorias para el problema restringido de tres cuerpos y  $k = 0.0001$  para todos los casos.

Mostraremos un par de gráficas del mismo caso, en la primera gráfica de cada caso se mostrará solo la trayectoria de la partícula sujeta a las condiciones que ahí se

indican y en la segunda gráfica se mostrará la misma trayectoria en color negro comparada con la solución en el caso  $k = 0$ , que aparecerá en color gris, con condiciones iniciales idénticas al caso  $k = 0.0001$ .

El punto **L4** que se marca en las gráficas es el punto de equilibrio para el problema con fricción mientras que los puntos de equilibrio para el problema restringido de tres cuerpos aparecerán en tono gris.

En la figura 3.17 podemos ver que la trayectoria para este ejemplo se trata de un renacuajo.

Ahora bien si consideramos las ecuaciones del problema restringido de tres cuerpos con condiciones iniciales iguales al ejemplo con fricción también tenemos un renacuajo que se extiende un poco más que el renacuajo del problema con fricción tal como se muestra en la figura 3.18.

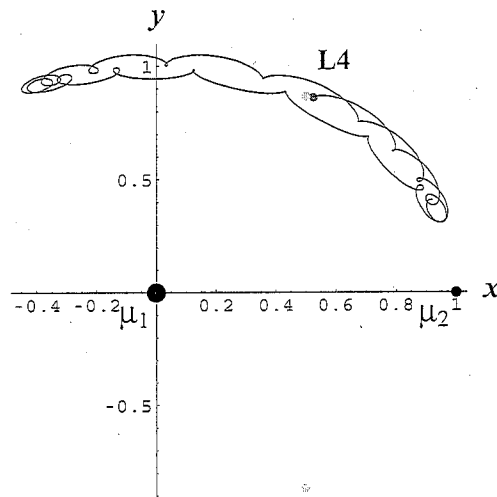


Figura 3.17: Renacuajo.  $i = 1/2$ ,  $j = 1/3$ ,  $(x(0), y(0)) = L4 + (0.0065, 0.0065)$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

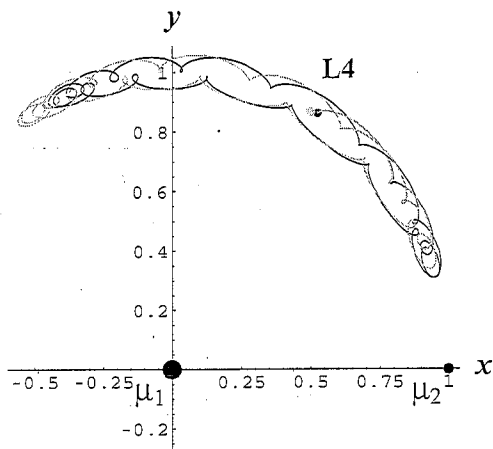


Figura 3.18: Renacuajos.

En el ejemplo mostrado en la figura 3.19 también observamos un renacuajo para el problema con fricción.

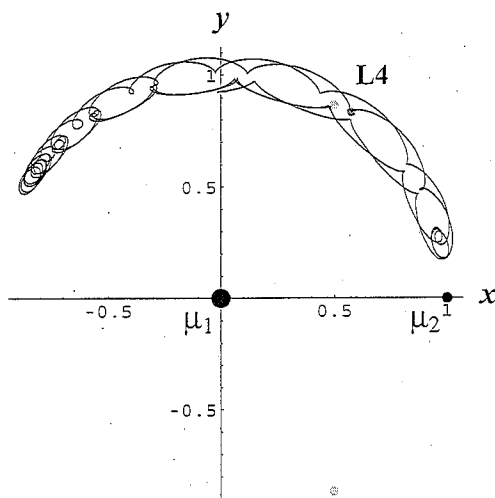


Figura 3.19: Renacuajo.  $i = 2$ ,  $j = 1$ ,  $(x(0), y(0)) = L4 + (0.0065, 0.0065)$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

A diferencia del ejemplo anterior si consideramos las ecuaciones del problema restringido de tres cuerpos con condiciones iniciales iguales a las consideradas en la figura 3.19 obtenemos una herradura (ver figura 3.20).

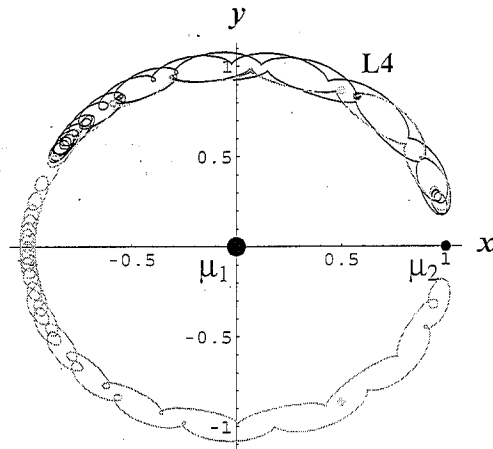


Figura 3.20: Renacuajo y herradura.

En el ejemplo que mostramos en la figura 3.21 obtenemos una herradura y podemos observar que el punto de equilibrio  $L_4$  tiene un mayor desplazamiento al que tuvo en los ejemplos anteriores.

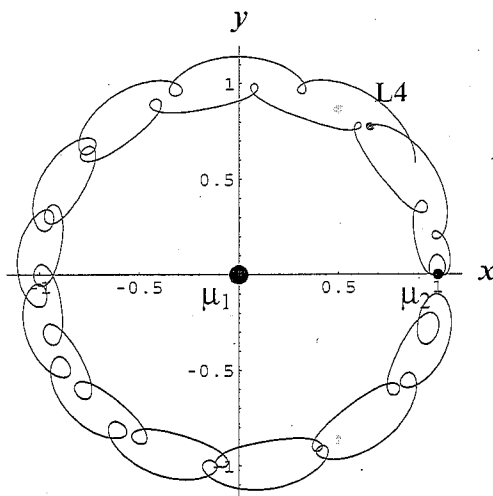


Figura 3.21: Herradura.  $i = 4, j = 3, (x(0), y(0)) = L_4 + (0.0065, 0.0065), \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

Si consideramos de nuevo las ecuaciones del problema restringido de tres cuerpos con condiciones iniciales iguales a las del ejemplo que se muestra en la figura 3.21 obtenemos una trayectoria completamente diferente a renacuajos y herraduras (ver figura 3.22), ya que las condiciones iniciales son muy lejanas al punto de equilibrio

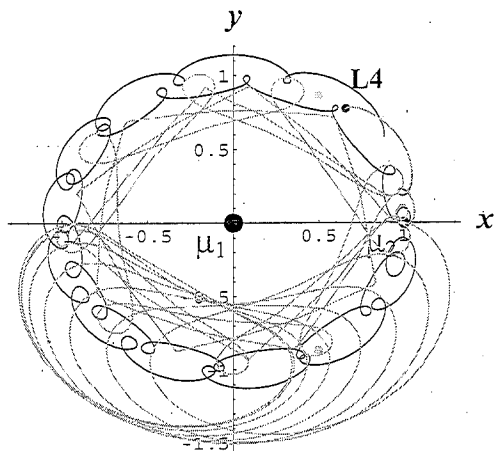


Figura 3.22: Herradura y algo nuevo

L4 para el problema restringido de tres cuerpos .

Fricción nebular simple.

Consideremos ahora una fuerza de fricción de la forma

$$\mathbf{F} = k(\dot{x}, \dot{y}) \quad (3.265)$$

que corresponde a una fuerza proporcional a la velocidad de la partícula en el marco en rotación. Este tipo de fuerza se llama una fuerza de *fricción nebular simple*.

Una cosa importante de notar para este tipo de fuerzas es que no hay desplazamientos de los puntos de equilibrio para el problema restringido de tres cuerpos pues  $f_x = f_y = 0$  (ver (3.197) y (3.215)-(3.219)).

En cuanto a la estabilidad de los puntos triangulares para este nuevo problema tenemos que los únicos valores distintos de cero para las parciales de la fuerza evaluadas en los puntos de equilibrio son

$$F_{x,\dot{x}} = k, \quad F_{y,\dot{y}} = k. \quad (3.266)$$

Recordemos que  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  y  $D^*$  están evaluados en los puntos de equilibrio del problema restringido de tres cuerpos. Por lo tanto debemos tomar los mismos valores

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS.

que en (??).

Así, usando (3.235) tenemos que

$$a_1 \approx \frac{9}{4}k + \frac{3}{4}k \qquad a_3 \approx -(k+k) \qquad (3.267)$$

de aquí que

$$a_1 \approx 3k \qquad a_3 \approx -2k \qquad (3.268)$$

donde podemos ver que es imposible que se cumplan las condiciones de estabilidad asintótica ya que si  $k < 0$  tendríamos que  $a_1 < 0$  y si  $k > 0$  tendríamos que  $a_3 < 0$ .

**Fricción Poynting-Robertson.**

Consideremos una fuerza de la forma

$$\begin{aligned} F_x &= k \frac{1}{r^2} \left( \dot{x} - y + \frac{x}{r^2} (x\dot{x} + y\dot{y}) \right), \\ F_y &= k \frac{1}{r^2} \left( \dot{y} + x + \frac{y}{r^2} (x\dot{x} + y\dot{y}) \right), \end{aligned} \qquad (3.269)$$

donde  $F_x$  y  $F_y$  son las coordenadas de la fuerza.

Este tipo de fuerza se llama una fuerza de *fricción Poynting-Robertson*.

Empecemos por calcular los valores aproximados de la evaluación de las derivadas parciales que nos interesan para calcular  $a_1$  y  $a_3$ :

$$\begin{aligned} F_{x,y} &\approx \frac{1}{2}k, & F_{x,\dot{x}} &\approx \frac{5}{4}k, & F_{x,\dot{y}} &\approx \pm \frac{3^{1/2}}{4}k, \\ F_{y,x} &\approx \frac{1}{2}k, & F_{y,\dot{x}} &\approx \pm \frac{3^{1/2}}{4}k, & F_{y,\dot{y}} &\approx \frac{7}{4}k. \end{aligned} \qquad (3.270)$$

Nuevamente ya conocemos los valores de  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  y  $D^*$ . Así que ya podemos calcular  $a_1$  y  $a_3$  usando (3.235) como sigue

$$\begin{aligned}
 a_1 &\approx \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{4}k + \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4}k + 2 \left( \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k \right) \\
 &\quad \mp \frac{3 \cdot 3^{1/2}}{2} \left( \frac{1}{2} - \mu_2 \right) \left( \pm \frac{3^{1/2}}{4}k \pm \frac{3^{1/2}}{4}k \right), \\
 a_3 &\approx - \left( \frac{5}{4}k + \frac{7}{4}k \right). \tag{3.271}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a_1 \approx 3k, \quad a_3 \approx -3k \tag{3.272}$$

y por la misma razón que el caso anterior vemos que es imposible que las condiciones de la estabilidad asintótica para los puntos de equilibrio triangulares en este problema se cumplan.

## Capítulo 4

# Efectos de fricción en las ecuaciones de Hill.

La parte medular de mi trabajo es estudiar el movimiento que describe una partícula muy pequeña en una vecindad de la masa secundaria cuando introducimos una fuerza de fricción externa.

Hemos estado estudiando el problema restringido de tres cuerpos con el propósito de tener una visión general del problema y un preámbulo para abordar el tema de las ecuaciones de Hill.

Dichas ecuaciones nos proporcionan información acerca de cómo se mueve una partícula pequeña en una vecindad de la masa secundaria así que en la primera sección de este capítulo haremos un breve estudio de estas ecuaciones.

En la segunda sección de este capítulo estaré exponiendo los resultados que obtuve al estudiar las ecuaciones de Hill cuando introduzco fuerzas de fricción. Estos resultados, que son nuevos hasta donde sabemos, son la parte esencial de mi trabajo.

### 4.1 Breve estudio de las ecuaciones de Hill.

Los resultados que se exponen en esta sección vienen de [7].



CAPÍTULO 4. EFECTOS DE FRICCIÓN EN LAS ECUACIONES DE HILL.

Empecemos por derivar las ecuaciones de Hill.

Recordemos las ecuaciones de movimiento para el problema restringido de tres cuerpos:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = - \left( \mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right), \quad (4.1)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left( \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) y. \quad (4.2)$$

Nuestra primera suposición es que  $\mu_2$  es suficientemente pequeña de tal forma que podemos tomar  $\mu_1 \approx 1$ . Así, si tomamos  $n = 1$  y despreciamos el término  $\mu_1 \mu_2 / r_1^3$  tenemos el siguiente sistema:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = - \frac{x}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - 1}{r_2^3}, \quad (4.3)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = - \frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3}. \quad (4.4)$$

Ahora transformamos el eje  $x$  tal que  $x \rightarrow 1 + x$  sin cambiar el eje  $y$ . Como estamos considerando que la partícula se mueve muy cerca de la masa secundaria podemos suponer que  $x$  y  $y$  son muy pequeños.

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} r_1^2 &\approx (x + 1)^2 + y^2 \approx 2x + 1, \\ r_2^2 &\approx x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Enseguida calculamos una aproximación para  $r_1^{-3}$  y obtenemos que

$$r_1^{-3} \approx (2x + 1)^{-3/2} \approx 1 - 3x. \quad (4.6)$$

Entonces, haciendo la transformación en el sistema de ecuaciones y sustituyendo los valores para  $r_1$  y  $r_2$  tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= x + 1 - (x + 1)(1 - 3x) - \mu_2 x(x^2 + y^2)^{-3/2}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= y - y(1 - 3x) - \mu_2 y(x^2 + y^2)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

#### CAPÍTULO 4. EFECTOS DE FRICCIÓN EN LAS ECUACIONES DE HILL.

Al despreciar los términos de orden  $x^2$  y de orden  $xy$  en el sistema anterior obtenemos el siguiente sistema

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \left(3 - \frac{\mu_2}{\Delta^3}\right) x, \quad (4.8)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\mu_2}{\Delta^3} y, \quad (4.9)$$

donde

$$\Delta^2 = x^2 + y^2. \quad (4.10)$$

Si consideramos la función

$$U_H = \frac{3}{2}x^2 + \frac{\mu_2}{\Delta} \quad (4.11)$$

podemos escribir el sistema anterior como sigue:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U_H}{\partial x}, \quad (4.12)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U_H}{\partial y}. \quad (4.13)$$

Las ecuaciones (4.12) y (4.13) son las llamadas *ecuaciones de Hill*.

Si multiplicamos la ecuación (4.12) por  $\dot{x}$  y la ecuación (4.13) por  $\dot{y}$  y las sumamos obtenemos la siguiente ecuación

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \frac{\partial U_H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U_H}{\partial y}\dot{y} = \frac{dU_H}{dt} \quad (4.14)$$

al integrar obtenemos la constante de Jacobi modificada dada por

$$C_H = 3x^2 + 2\frac{\mu_2}{\Delta} - \dot{x}^2 - \dot{y}^2. \quad (4.15)$$

Con esto podemos graficar las curvas de velocidad cero para las ecuaciones de Hill.

Enseguida mostramos algunos ejemplos para distintas  $C_H$ .

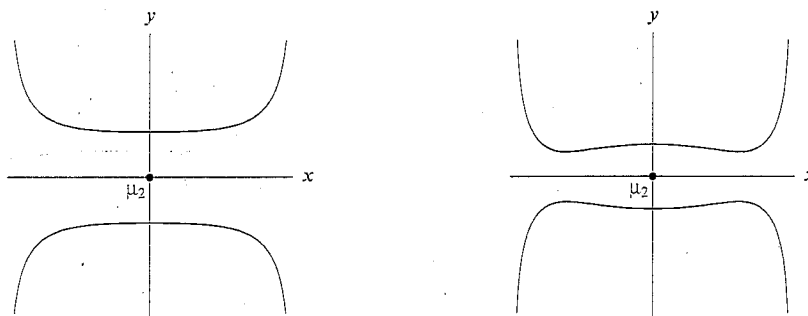


Figura 4.1: Curvas de velocidad cero.  $\mu_2 = 0.0001$ ,  $C_H = 0.02$ ,  $C_H = 0.04$

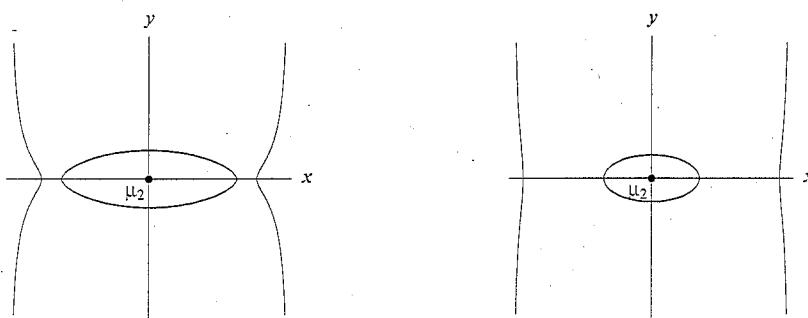


Figura 4.2: Curvas de velocidad cero.  $\mu_2 = 0.0001$ ,  $C_H = 0.05$ ,  $C_H = 0.08$

Para encontrar la posición de los puntos de equilibrio debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left(3 - \frac{\mu_2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) x = 0, \quad (4.16)$$

$$\left(\frac{-\mu_2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) y = 0 \quad (4.17)$$

que se deriva de tomar  $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0$ .

Notamos que en  $(x, y) = (0, 0)$  hay una singularidad así que supongamos primero que  $y = 0$  y  $x \neq 0$ . Entonces el sistema se resume en una ecuación no lineal en  $x$  de esta forma

$$\left(3 - \frac{\mu_2}{(x^2)^{3/2}}\right) x = 0 \quad (4.18)$$

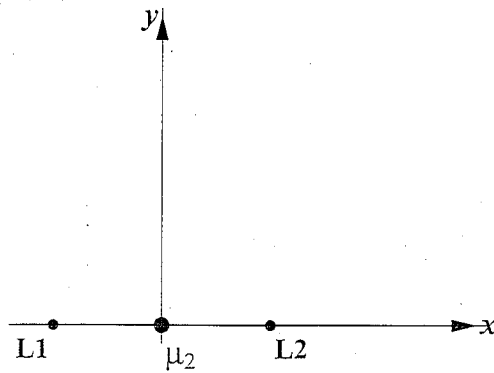
la cual tiene solución

$$x = \pm \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{1/3} \quad (4.19)$$

Ahora supongamos que  $x = 0$  y  $y \neq 0$ . Así obtenemos la siguiente ecuación

$$\left(\frac{-\mu_2}{(y^2)^{3/2}}\right) y = 0 \quad (4.20)$$

que es una ecuación que bajo nuestras condiciones no tiene solución.



En resumen, tenemos dos puntos de equilibrio de la forma

$$(x_e, y_e) = \left(\pm \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{1/3}, 0\right) \quad (4.21)$$

que corresponden a los puntos L1 y L2. Tomamos el signo positivo para L2 y el signo negativo para L1.

Para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio hagamos el mismo procedimiento que en la sección 3.4. Tomamos un pequeño desplazamiento de los puntos de equilibrio

$$x = x_e + X \quad y = y_e + Y \quad (4.22)$$

y desarrollamos la expansión en series de Taylor de las ecuaciones (4.12) y (4.13) para obtener

$$\ddot{X} - 2\dot{Y} \approx X \left( \frac{\partial^2 U_H}{\partial x^2} \right)_e + Y \left( \frac{\partial^2 U_H}{\partial x \partial y} \right)_e, \quad (4.23)$$

$$\dot{Y} + 2\dot{X} \approx X \left( \frac{\partial^2 U_H}{\partial x \partial y} \right)_e + Y \left( \frac{\partial^2 U_H}{\partial y^2} \right)_e. \quad (4.24)$$

Aquí estamos denotando con el subíndice  $e$  la evaluación de las parciales en los puntos  $(x_e, y_e)$ .

Si denotamos

$$UH_{xx} = \left( \frac{\partial^2 U_H}{\partial x^2} \right)_e, \quad UH_{xy} = \left( \frac{\partial^2 U_H}{\partial x \partial y} \right)_e, \quad UH_{yy} = \left( \frac{\partial^2 U_H}{\partial y^2} \right)_e,$$

podemos escribir el sistema de ecuaciones (4.23) y (4.24) como sigue

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ UH_{xx} & UH_{xy} & 0 & 2 \\ UH_{xy} & UH_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

cuyo polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda^4 + (4 - UH_{xx} - UH_{yy})\lambda^2 + UH_{xx}UH_{yy} - UH_{xy}^2 = 0. \quad (4.26)$$

Primero analicemos la estabilidad para  $L2$ .

Si evaluamos en  $L2$  cada una de las parciales requeridas obtenemos el siguiente polinomio

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 - 27 = 0 \quad (4.27)$$

cuyas raíces son

$$\lambda_{1,2} = \pm (-1 + 2(7)^{1/2})^{1/2} i \quad \lambda_{3,4} = \pm (1 + 2(7)^{1/2})^{1/2} \quad (4.28)$$

#### CAPÍTULO 4. EFECTOS DE FRICCIÓN EN LAS ECUACIONES DE HILL.

lo cual indica que  $L2$  es linealmente inestable.

Análogamente para  $L1$  obtenemos el mismo polinomio (4.27) y por lo tanto  $L1$  también es linealmente inestable.

Enseguida presentamos una serie de gráficas donde podemos ver el tipo de soluciones para las ecuaciones de Hill.

En las figuras 4.3 y 4.4 mostramos trayectorias cuyas condiciones iniciales (los puntos que aparecen en tono gris) son muy cercanas a los puntos de equilibrio  $L1$  y  $L2$ , los cuales ya hemos mencionado que son inestables.

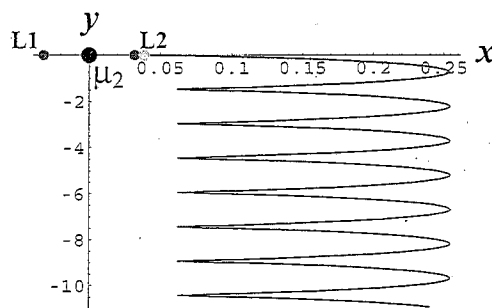


Figura 4.3:  $\mu_2 = 0.0001$ ,  $(x(0), y(0)) = L2 + (0.0065, 0.0065)$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

CAPÍTULO 4. EFECTOS DE FRICCIÓN EN LAS ECUACIONES DE HILL.

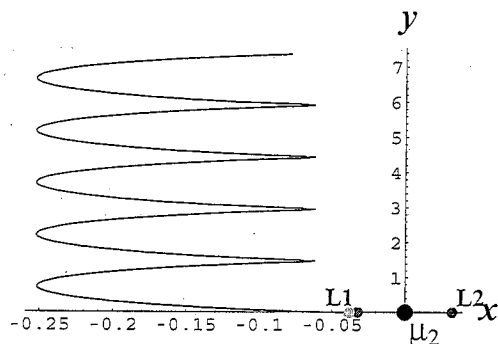


Figura 4.4:  $\mu_2 = 0.0001$ ,  $(x(0), y(0)) = L1 - (0.006, 0.006)$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

En las figuras 4.5 - 4.8 estaremos considerando  $\mu_2 = 0.001$ ,  $y(0) = 20$  y  $\dot{x}(0) = 0$ . Así que solo estaremos variando el valor de  $x(0)$  y  $\dot{y}(0)$ .

Como vamos observar, las condiciones iniciales en estas últimas figuras son muy lejanas a los puntos de equilibrio.

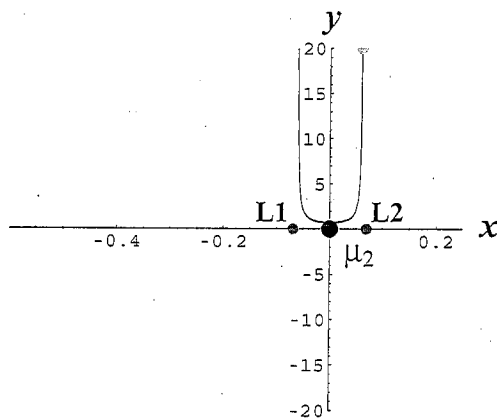


Figura 4.5:  $x(0) = 0.06$ ,  $\dot{y}(0) = -0.09$ .

En la figura 4.6 podemos ver que se empiezan a presentar pequeñas oscilaciones

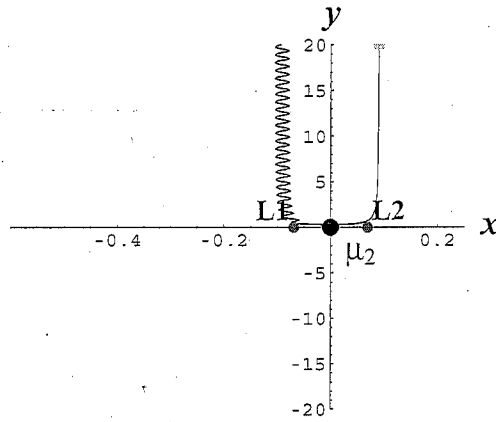


Figura 4.6:  $x(0) = 0.09$ ,  $\dot{y}(0) = -0.135$ .

cuando la partícula se acerca al punto L1.

En la figura 4.7 vemos que las oscilaciones tienen mayor amplitud.

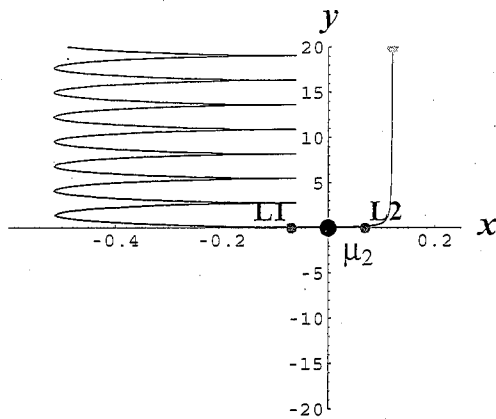


Figura 4.7:  $x(0) = 0.12$ ,  $\dot{y}(0) = -0.18$ .

Por último en la figura 4.8 vemos un cambio en el comportamiento comparado con los ejemplos anteriores.



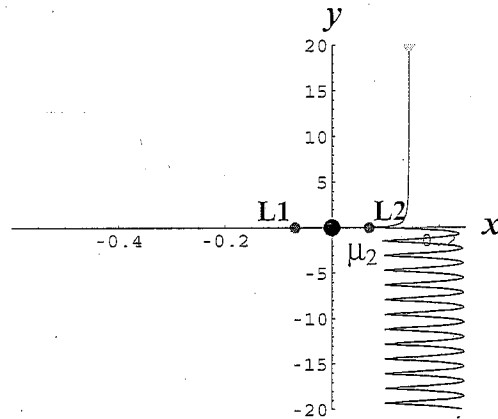


Figura 4.8:  $x(0) = 0.144$ ,  $\dot{y}(0) = -0.216$ .

## 4.2 Efectos de fricción en las ecuaciones de Hill.

Hasta aquí hemos dado un breve análisis de las ecuaciones de Hill y continuaremos con el estudio de los efectos de fricción para este problema.

Nuevamente estaremos trabajando con fuerzas de fricción  $\mathbf{F}$  tales que  $|\mathbf{F}| = O(k)$  y cuyas derivadas parciales son también de orden  $O(k)$  donde  $k$  es muy pequeña. Desarrollaremos el mismo método que en el capítulo anterior para analizar qué efecto tiene en la posición y la estabilidad de los puntos de equilibrio al introducir este tipo de fuerzas.

Como hemos mencionado anteriormente en las ecuaciones de Hill solo tenemos dos puntos de equilibrio y ambos son linealmente inestables, así que nos interesa saber si existen condiciones para la fuerza externa con las cuales los puntos de equilibrio se vuelven linealmente estables.

El sistema de ecuaciones con el que estaremos trabajando es el siguiente

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \left(3 - \frac{\mu_2}{\Delta^3}\right)x + F_x, \quad (4.29)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\mu_2}{\Delta^3}y + F_y, \quad (4.30)$$

donde  $\Delta$  cumple (4.10) y  $F_x$  y  $F_y$  son las componentes de la fuerza  $F$  en  $x$  y  $y$  respectivamente.

#### 4.2.1 Posición de los puntos de equilibrio.

Para conocer la posición de los puntos de equilibrio para este sistema nos apoyaremos en que conocemos la posición de los puntos de equilibrio para las ecuaciones de Hill y supondremos que los nuevos puntos de equilibrio, que denotaremos por  $(x_e^*, y_e^*)$ , son pequeños desplazamientos de  $(x_e, y_e)$ , es decir

$$x_e^* = x_e + \tilde{x}, \quad y_e^* = y_e + \tilde{y}, \quad (4.31)$$

donde  $\tilde{x}$  y  $\tilde{y}$  son cantidades pequeñas.

Por ser  $(x_e^*, y_e^*)$  puntos de equilibrio deben cumplir las ecuaciones

$$\left(3 - \frac{\mu_2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) x + F_x(x, y, 0, 0) = 0, \quad (4.32)$$

$$\left(-\frac{\mu_2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) y + F_y(x, y, 0, 0) = 0. \quad (4.33)$$

Si tomamos la expansión en series de Taylor alrededor de los puntos de equilibrio y sustituimos los valores de  $x_e^*$  y  $y_e^*$  en las ecuaciones anteriores tenemos el siguiente sistema

$$\left(3 - \frac{\mu_2}{\Delta^{*3}}\right) (x_e + \tilde{x}) + \tilde{f}_x = 0, \quad (4.34)$$

$$\left(-\frac{\mu_2}{\Delta^{*3}}\right) (y_e + \tilde{y}) + \tilde{f}_y = 0, \quad (4.35)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta^{*3} &= ((x_e^*)^2 + (y_e^*)^2)^{3/2} \\ &= [(x_e + \tilde{x})^2 + (y_e + \tilde{y})^2]^{3/2} \end{aligned} \quad (4.36)$$

y

$$\tilde{f}_x = F_x(x_e, y_e, 0, 0), \quad \tilde{f}_y = F_y(x_e, y_e, 0, 0). \quad (4.37)$$

Si despreciamos los términos de orden dos en adelante de  $\tilde{x}$  y  $\tilde{y}$  tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta^{*-3} &= [(x_e)^2 + \tilde{x}^2 + 2x_e\tilde{x} + (y_e)^2 + 2y_e\tilde{y} + \tilde{y}^2]^{-3/2} \\ &\approx [(x_e)^2 + (y_e)^2 + 2(x_e\tilde{x} + y_e\tilde{y})]^{-3/2}.\end{aligned}\quad (4.38)$$

Expandimos en serie binomial la ecuación anterior y obtenemos la siguiente aproximación

$$\begin{aligned}\Delta^{*-3} &\approx ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-3/2} - \frac{3}{2} ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-5/2} 2(x_e\tilde{x} + y_e\tilde{y}) \\ &= ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-3/2} - 3 ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-5/2} (x_e\tilde{x} + y_e\tilde{y}).\end{aligned}\quad (4.39)$$

Luego sustituimos esta expresión en las ecuaciones (4.34) y (4.35) como sigue

$$\begin{aligned}\left[ 3 - \mu_2 \left( ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-3/2} \right. \right. \\ \left. \left. - 3 ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-5/2} (x_e\tilde{x} + y_e\tilde{y}) \right) \right] (x_e + \tilde{x}) + \tilde{f}_x = 0,\end{aligned}\quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}- \mu_2 \left( ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-3/2} \right. \\ \left. - 3 ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-5/2} (x_e\tilde{x} + y_e\tilde{y}) \right) (y_e + \tilde{y}) + \tilde{f}_y = 0.\end{aligned}\quad (4.41)$$

Como sabemos que

$$\left( 3 - \frac{\mu_2}{((x_e)^2 + (y_e)^2)^{3/2}} \right) x_e = 0,\quad (4.42)$$

$$\left( \frac{-\mu_2}{((x_e)^2 + (y_e)^2)^{3/2}} \right) y_e = 0,\quad (4.43)$$

por ser  $(x_e, y_e)$  los puntos de equilibrio para el caso  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , podemos restar la ecuación (4.42) a la ecuación (4.40) y la ecuación (4.43) a la ecuación (4.41) como sigue

$$\begin{aligned}\left[ 3 - \mu_2 \left( ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-3/2} - 3 ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-5/2} (x_e\tilde{x} + y_e\tilde{y}) \right) \right] (x_e + \tilde{x}) \\ - \left( 3 - \frac{\mu_2}{((x_e)^2 + (y_e)^2)^{3/2}} \right) x_e + \tilde{f}_x = 0,\end{aligned}\quad * (4.44)$$

$$\begin{aligned}- \mu_2 \left( ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-3/2} - 3 ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-5/2} (x_e\tilde{x} + y_e\tilde{y}) \right) (y_e + \tilde{y}) \\ - \left( \frac{-\mu_2}{((x_e)^2 + (y_e)^2)^{3/2}} \right) y_e + \tilde{f}_y = 0.\end{aligned}\quad (4.45)$$

De la ecuación (4.44) tenemos que

$$3\mu_2 ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-5/2} (x_e \tilde{x} + y_e \tilde{y}) x_e + \left(3 - \mu_2 ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-3/2}\right) \tilde{x} + 3\mu_2 ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-5/2} (x_e \tilde{x} + y_e \tilde{y}) \tilde{x} + \tilde{f}_x = 0. \quad (4.46)$$

y si despreciamos nuevamente los términos de orden dos en adelante en  $\tilde{x}$  y  $\tilde{y}$  tenemos

$$3\mu_2 ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-5/2} (x_e \tilde{x} + y_e \tilde{y}) x_e + \left(3 - \mu_2 ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-3/2}\right) \tilde{x} + \tilde{f}_x = 0. \quad (4.47)$$

Además sabemos que  $y_e = 0$  así que

$$\begin{aligned} 0 &= 3\mu_2 ((x_e)^2)^{-5/2} (x_e \tilde{x}) x_e + \left(3 - \mu_2 ((x_e)^2)^{-3/2}\right) \tilde{x} + \tilde{f}_x \\ &= \tilde{x} \left(3 \frac{\mu_2}{|x_e|^3} + 3 - \frac{\mu_2}{|x_e|^3}\right) + \tilde{f}_x \\ &= \tilde{x} \left(2 \frac{\mu_2}{|x_e|^3} + 3\right) + \tilde{f}_x. \end{aligned} \quad (4.48)$$

De esta ecuación podemos resolver para  $\tilde{x}$  de la siguiente forma:

$$\tilde{x} = -\frac{\tilde{f}_x}{2 \frac{\mu_2}{|x_e|^3} + 3}. \quad (4.49)$$

Ahora bien, de la ecuación (4.45) tenemos que

$$3\mu_2 ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-5/2} (x_e \tilde{x} + y_e \tilde{y}) y_e - \mu_2 ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-3/2} \tilde{y} + 3\mu_2 ((x_e)^2 + (y_e)^2)^{-5/2} (x_e \tilde{x} + y_e \tilde{y}) \tilde{y} + \tilde{f}_y = 0. \quad (4.50)$$

Si despreciamos los términos de orden dos en adelante en  $\tilde{x}$  y  $\tilde{y}$  y usamos el hecho que  $y_e = 0$  tenemos la siguiente ecuación

$$-\mu_2 ((x_e)^2)^{-3/2} \tilde{y} + \tilde{f}_y = 0. \quad (4.51)$$

De aquí despejamos  $\tilde{y}$  y obtenemos

$$\tilde{y} = \frac{\tilde{f}_y |x_e|^3}{\mu_2}. \quad (4.52)$$

Así que si sustituimos los valores de  $x_e$  y  $y_e$  de cada uno de los puntos de equilibrio tenemos su nueva posición que es el resultado de introducir una fuerza externa al problema.

Entonces las posiciones de los nuevos puntos de equilibrio están dadas por

$$\begin{aligned} \text{L1:} \quad & x_e^* = x_e - \frac{\tilde{f}_x}{9}, & y_e^* &= \frac{\tilde{f}_y}{3}, \\ \text{L2:} \quad & x_e^* = x_e - \frac{\tilde{f}_x}{9}, & y_e^* &= \frac{\tilde{f}_y}{3}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Cabe señalar que para cada caso  $x_e$ ,  $y_e$ ,  $\tilde{f}_x$  y  $\tilde{f}_y$  son distintas.

#### 4.2.2 Estabilidad de los puntos de equilibrio.

Para ver si existen condiciones bajo las cuales los nuevos puntos de equilibrio se vuelven asintóticamente estables y si existen saber cuales son consideremos nuevamente pequeños desplazamientos  $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$  de los puntos de equilibrio.

Sea la solución del problema (4.29)-(4.30) con condición inicial  $x(0) = x_e^* + \tilde{X}_0$ ,  $y(0) = y_e^* + \tilde{Y}_0$  de la forma

$$x(t) = x_e^* + \tilde{X}, \quad y(t) = y_e^* + \tilde{Y} \quad (4.54)$$

donde

$$\tilde{X} = \tilde{X}_0 e^{\lambda t} \quad \tilde{Y} = \tilde{Y}_0 e^{\lambda t} \quad (4.55)$$

con  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Para sustituir la solución dada en las ecuaciones de movimiento debemos calcular lo que sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x} = \dot{\tilde{X}} &= \lambda \tilde{X}_0 e^{\lambda t} = \lambda \tilde{X}, & \ddot{x} = \ddot{\tilde{X}} &= \lambda^2 \tilde{X}_0 e^{\lambda t} = \lambda^2 \tilde{X}, \\ \dot{y} = \dot{\tilde{Y}} &= \lambda \tilde{Y}_0 e^{\lambda t} = \lambda \tilde{Y}, & \ddot{y} = \ddot{\tilde{Y}} &= \lambda^2 \tilde{Y}_0 e^{\lambda t} = \lambda^2 \tilde{Y}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

CAPÍTULO 4. EFECTOS DE FRICCIÓN EN LAS ECUACIONES DE HILL.

Si sustituimos estas ecuaciones en las ecuaciones (4.29) y (4.30) y tomamos la expansión en series de Taylor hasta orden uno alrededor de los puntos de equilibrio tenemos

$$\begin{aligned} \lambda^2 \tilde{X} - 2\lambda \tilde{Y} &= \left(3 - \frac{\mu_2}{\Delta^3}\right) (x_e^* + \tilde{X}) \\ &+ (F_x)_e + \tilde{X} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_e + \tilde{Y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_e + \lambda \tilde{X} \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}}\right)_e + \lambda \tilde{Y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}}\right)_e, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 \tilde{Y} + 2\lambda \tilde{X} &= \left(-\frac{\mu_2}{\Delta^3}\right) (y_e^* + \tilde{Y}) \\ &+ (F_y)_e + \tilde{X} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_e + \tilde{Y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_e + \lambda \tilde{X} \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}}\right)_e + \lambda \tilde{Y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}\right)_e, \end{aligned} \quad (4.58)$$

donde  $()_e$  denota la evaluación en los puntos de equilibrio.

Seguimos despreciando los términos de orden dos en adelante de  $\tilde{X}$  y  $\tilde{Y}$  al tomar la expansión binomial de  $\Delta^3$  como sigue

$$\begin{aligned} \Delta^{-3} &= \left[(x_e^*)^2 + \tilde{X}^2 + 2x_e^* \tilde{X} + (y_e^*)^2 + 2y_e^* \tilde{Y} + \tilde{Y}^2\right]^{-3/2} \\ &\approx \left[(x_e^*)^2 + (y_e^*)^2 + 2(x_e^* \tilde{X} + y_e^* \tilde{Y})\right]^{-3/2} \\ &\approx ((x_e^*)^2 + (y_e^*)^2)^{-3/2} - \frac{3}{2} ((x_e^*)^2 + (y_e^*)^2)^{-5/2} 2(x_e^* \tilde{X} + y_e^* \tilde{Y}) \\ &= ((x_e^*)^2 + (y_e^*)^2)^{-3/2} - 3((x_e^*)^2 + (y_e^*)^2)^{-5/2} (x_e^* \tilde{X} + y_e^* \tilde{Y}) \\ &= (\Delta^*)^{-3} - 3(\Delta^*)^{-5} (x_e^* \tilde{X} + y_e^* \tilde{Y}), \end{aligned} \quad (4.59)$$

donde  $\Delta^*$  está definida en (4.36).

Si sustituimos la ecuación anterior en las ecuaciones (4.57) y (4.58) tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda^2 \tilde{X} - 2\lambda \tilde{Y} &= \left[3 - \mu_2 \left((\Delta^*)^{-3} - 3(\Delta^*)^{-5} (x_e^* \tilde{X} + y_e^* \tilde{Y})\right)\right] (x_e^* + \tilde{X}) \\ &+ (F_x)_e + \tilde{X} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_e + \tilde{Y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_e + \lambda \tilde{X} \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}}\right)_e + \lambda \tilde{Y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}}\right)_e, \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 \tilde{Y} + 2\lambda \tilde{X} &= -\mu_2 \left((\Delta^*)^{-3} - 3(\Delta^*)^{-5} (x_e^* \tilde{X} + y_e^* \tilde{Y})\right) (y_e^* + \tilde{Y}) \\ &+ (F_y)_e + \tilde{X} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_e + \tilde{Y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_e + \lambda \tilde{X} \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}}\right)_e + \lambda \tilde{Y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}\right)_e. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Por ser  $(x_e^*, y_e^*)$  puntos de equilibrio sabemos que

$$(3 - \mu_2(\Delta^*)^{-3}) x_e^* + (F_x)_e = 0, \quad (4.62)$$

$$(-\mu_2(\Delta^*)^{-3}) y_e^* + (F_y)_e = 0. \quad (4.63)$$

Si restamos la ecuación (4.62) a la ecuación (4.60) y la ecuación (4.63) a la ecuación (4.61) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \tilde{X} - 2\lambda \tilde{Y} = & \left[ 3 - \mu_2 \left( (\Delta^*)^{-3} - 3(\Delta^*)^{-5} (x_e^* \tilde{X} + y_e^* \tilde{Y}) \right) \right] (x_e^* + \tilde{X}) \quad (4.64) \\ & - \left[ (3 - \mu_2(\Delta^*)^{-3}) x_e^* + (F_x)_e \right] + (F_x)_e + \tilde{X} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_e \\ & + \tilde{Y} \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_e + \lambda \tilde{X} \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right)_e + \lambda \tilde{Y} \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right)_e, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 \tilde{Y} + 2\lambda \tilde{X} = & -\mu_2 \left( (\Delta^*)^{-3} - 3(\Delta^*)^{-5} (x_e^* \tilde{X} + y_e^* \tilde{Y}) \right) (y_e^* + \tilde{Y}) \quad (4.65) \\ & - \left[ (-\mu_2(\Delta^*)^{-3}) y_e^* + (F_y)_e \right] + (F_y)_e + \tilde{X} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} \right)_e \\ & + \tilde{Y} \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_e + \lambda \tilde{X} \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right)_e + \lambda \tilde{Y} \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_e. \end{aligned}$$

Si despreciamos los términos de orden dos en adelante de  $\tilde{X}$  y  $\tilde{Y}$  en (4.64) y simplificamos obtenemos que

$$\begin{aligned} \lambda^2 \tilde{X} - 2\lambda \tilde{Y} = & \frac{3\mu_2 (x_e^* \tilde{X} + y_e^* \tilde{Y}) x_e^*}{(\Delta^*)^5} + 3\tilde{X} - \frac{\mu_2 \tilde{X}}{(\Delta^*)^3} + \tilde{X} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_e \\ & + \tilde{Y} \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_e + \lambda \tilde{X} \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right)_e + \lambda \tilde{Y} \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right)_e. \quad (4.66) \end{aligned}$$

Análogamente para la ecuación (4.65) tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda^2 \tilde{Y} + 2\lambda \tilde{X} = & \frac{3\mu_2 (x_e^* \tilde{X} + y_e^* \tilde{Y}) y_e^*}{(\Delta^*)^5} - \frac{\mu_2 \tilde{Y}}{(\Delta^*)^3} + \tilde{X} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} \right)_e \\ & + \tilde{Y} \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_e + \lambda \tilde{X} \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right)_e + \lambda \tilde{Y} \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_e. \quad (4.67) \end{aligned}$$

Si factorizamos las ecuaciones (4.66) y (4.67) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales en  $\tilde{X}$  y  $\tilde{Y}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X} \left[ \lambda^2 - \frac{3\mu_2(x_e^*)^2}{(\Delta^*)^5} - 3 + \frac{\mu_2}{(\Delta^*)^3} - \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_e - \lambda \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right)_e \right] \\ + \tilde{Y} \left[ -2\lambda - \frac{3\mu_2 x_e^* y_e^*}{(\Delta^*)^5} - \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_e - \lambda \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right)_e \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X} \left[ 2\lambda - \frac{3\mu_2 x_e^* y_e^*}{(\Delta^*)^5} - \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} \right)_e - \lambda \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right)_e \right] \\ + \tilde{Y} \left[ \lambda^2 - \frac{3\mu_2 (y_e^*)^2}{(\Delta^*)^5} + \frac{\mu_2}{(\Delta^*)^3} - \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_e - \lambda \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_e \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Si definimos

$$\begin{aligned} a = \frac{\mu_2}{(\Delta^*)^3}, & \quad b = \frac{3\mu_2 (y_e^*)^2}{(\Delta^*)^5}, \\ c = \frac{3\mu_2 x_e^* y_e^*}{(\Delta^*)^5}, & \quad d = \frac{3\mu_2 (x_e^*)^2}{(\Delta^*)^5}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

y denotamos

$$\begin{aligned} F_x^x &= \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_e, & F_y^x &= \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_e, & F_{\dot{x}}^x &= \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right)_e, & F_{\dot{y}}^x &= \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right)_e, \\ F_x^y &= \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} \right)_e, & F_y^y &= \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_e, & F_{\dot{x}}^y &= \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right)_e, & F_{\dot{y}}^y &= \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_e, \end{aligned} \quad (4.71)$$

podemos escribir el sistema de ecuaciones anterior como sigue:

$$\begin{aligned} \tilde{X} [\lambda^2 - 3 + a - d - F_x^x - \lambda F_{\dot{x}}^x] + \tilde{Y} [-2\lambda - c - F_y^x - \lambda F_{\dot{y}}^x] = 0, \\ \tilde{X} [2\lambda - c - F_x^y - \lambda F_{\dot{x}}^y] + \tilde{Y} [\lambda^2 + a - b - F_y^y - \lambda F_{\dot{y}}^y] = 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Hay que notar que en la notación para las derivadas parciales nos estamos refiriendo con el superíndice a la componente de la fuerza de fricción y con el subíndice a la variable respecto a la que estamos derivando.



CAPÍTULO 4. EFECTOS DE FRICCIÓN EN LAS ECUACIONES DE HILL.

Como hemos mencionado anteriormente para que exista una solución no trivial de la forma (4.54) se debe cumplir que el determinante del sistema anterior sea igual a cero.

Entonces si calculamos el determinante y despreciamos los términos de orden  $O(k^2)$ , dado que estamos suponiendo que las parciales de  $\mathbf{F}$  también son de orden  $O(k)$ , obtenemos el siguiente polinomio

$$\begin{aligned} Q(\lambda) = & \lambda^4 - (F_x^x + F_y^y) \lambda^3 + [1 + 2a - b - d - F_x^x + 2(F_y^x - F_x^y) - F_y^y] \lambda^2 \\ & + [(b - a)F_x^x + (3 - a + d)F_y^y + 2(F_y^x - F_x^y) - c(F_y^x + F_x^y)] \lambda \\ & + [(a - d - 3)(a - b) - c^2 + (b - a)F_x^x + (3 - a + d)F_y^y \\ & - c(F_x^y + F_y^x)] = 0. \end{aligned}$$

Si denotamos

$$\begin{aligned} q_{00} &= (a - d - 3)(a - b) - c^2, \\ q_{20} &= 1 + 2a - b - d, \\ q_0 &= (b - a)F_x^x + (3 - a + d)F_y^y - c(F_x^y + F_y^x), \\ q_1 &= (b - a)F_x^x + (3 - a + d)F_y^y + 2(F_y^x - F_x^y) - c(F_y^x + F_x^y), \\ q_2 &= -F_x^x + 2(F_y^x - F_x^y) - F_y^y, \\ q_3 &= -F_x^x - F_y^y, \end{aligned} \tag{4.73}$$

podemos escribir  $Q(\lambda)$  como sigue

$$Q(\lambda) = \lambda^4 + q_3 \lambda^3 + (q_{20} + q_2) \lambda^2 + q_1 \lambda + (q_{00} + q_0) = 0. \tag{4.74}$$

Dado que los puntos de equilibrio son un desplazamiento de orden  $O(k)$  de los puntos de equilibrio para las ecuaciones de Hill podemos evaluar cada uno de los coeficientes de  $Q(\lambda)$  en  $(x_e, y_e)$  con lo cual introduciremos un error de orden  $O(k^2)$  en los valores de los  $q_i$ .

Note que los  $q_i$  son de orden  $O(k)$ , a diferencia de los  $q_{i0}$ .

Si hacemos  $\mathbf{F} = 0$  entonces  $Q(\lambda) = P(\lambda)$  (ver (4.27)) y por lo tanto

$$q_{00} = -27 \quad \text{y} \quad q_{20} = -2 \quad (4.75)$$

para ambos puntos de equilibrio.

Podemos suponer que las cuatro raíces de  $Q(\lambda)$  están dadas por

$$\lambda = \pm Z_1(1 + \delta + \sigma i), \quad (4.76)$$

$$\lambda = \pm Z_2(1 + \alpha + \beta i), \quad (4.77)$$

dónde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  y  $\delta$  son reales y pequeños y

$$Z_1 = \left(-1 + 2(7)^{1/2}\right)^{1/2}, \quad Z_2 = \left(1 + 2(7)^{1/2}\right)^{1/2},$$

que son las raíces de  $P(\lambda)$  (ver (4.28)).

Tomemos (4.76) y calculemos sus potencias hasta orden uno en  $\delta$  y  $\sigma$ :

$$\lambda^2 = (Z_1)^2(-1 + 2\delta) - 2\sigma i,$$

$$\lambda^3 = (Z_1)^3(\pm 3\sigma \mp (1 + 3\delta)i),$$

$$\lambda^4 = (Z_1)^4((1 + 4\delta) + 4\sigma i).$$

Al sustituirlas en (4.74) se tiene que

$$\begin{aligned} (Z_1)^4((1 + 4\delta) + 4\sigma i) \mp q_3 (Z_1)^3(-3\sigma + (1 + 3\delta)i) \\ - (q_{20} + q_2)(Z_1)^2((1 + 2\delta) + 2\sigma i) \pm q_1 Z_1(1 + \delta + \sigma i) + (q_{00} + q_0) = 0. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Enseguida separamos la parte imaginaria y la parte real del polinomio

$$(Z_1)^4(1 + 4\delta) \pm 3q_3 (Z_1)^3\sigma - (q_{20} + q_2)(Z_1)^2(1 + 2\delta) \mp q_1 Z_1\sigma + (q_{00} + q_0) = 0,$$

$$4(Z_1)^4\sigma \mp q_3 (Z_1)^3(1 + 3\delta) - 2(q_{20} + q_2)(Z_1)^2\sigma \pm q_1 Z_1(1 + \delta) = 0,$$

y factorizamos para escribir las ecuaciones como un sistema de ecuaciones lineales en  $\delta$  y  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \delta(4(Z_1)^4 - 2(q_{20} + q_2)(Z_1)^2) \pm \sigma(3q_3(Z_1)^3 - q_1 Z_1) + (Z_1)^4 \\ - (q_{20} + q_2)(Z_1)^2 + (q_{00} + q_0) = 0, \\ \delta(\mp 3q_3(Z_1)^3 \pm q_1 Z_1) + \sigma(4(Z_1)^4 - 2(q_{20} + q_2)(Z_1)^2) \mp q_3(Z_1)^3 \pm q_1 Z_1 = 0. \end{aligned}$$

Nuevamente, como ya hemos visto en (3.245), nos interesa  $Re(\lambda) = \mp Z_1 \sigma$ . Despreciando los productos de  $\delta$  y  $\sigma$  con los  $q_i$  y resolviendo la siguiente ecuación que viene de la ecuación anterior para  $\sigma$

$$\sigma(4(Z_1)^4 - 2q_{20}(Z_1)^2) = -(\mp q_3(Z_1)^3 \pm q_1 Z_1), \quad (4.79)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\pm q_3(Z_1)^3 \mp q_1 Z_1}{4(Z_1)^4 - 2q_{20}(Z_1)^2} = \frac{Z_1(\pm q_3(Z_1)^2 \mp q_1)}{2(Z_1)^2(2(Z_1)^2 - q_{20})} \\ &= \frac{\pm q_3(Z_1)^2 \mp q_1}{2(Z_1)(2(Z_1)^2 - q_{20})}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Por lo tanto

$$Re(\lambda) = \frac{q_1 - q_3(Z_1)^2}{2(2(Z_1)^2 - q_{20})}. \quad (4.81)$$

Ahora bien, para tener estabilidad queremos que  $Re(\lambda) < 0$ , es decir que el numerador satisfaga

$$q_1 - q_3(Z_1)^2 < 0 \quad (4.82)$$

dado que el denominador satisface

$$\begin{aligned} 2(2(Z_1)^2 - q_{20}) &= 2(2(-1 + 2(7)^{1/2}) + 2) \\ &= 8(7)^{1/2} > 0. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Entonces una primera condición para que los puntos de equilibrio sean asintóticamente estables es

$$q_1 < q_3(Z_1)^2. \quad (4.84)$$

CAPÍTULO 4. EFECTOS DE FRICCIÓN EN LAS ECUACIONES DE HILL.

Ahora consideremos la ecuación (4.77) y calculemos sus potencias hasta orden uno en  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= (Z_2)^2(1 + 2\alpha + 2\beta i), \\ \lambda^3 &= \pm(Z_2)^3(1 + 3\alpha + 3\beta i), \\ \lambda^4 &= (Z_2)^4(1 + 4\alpha + 4\beta i).\end{aligned}$$

Al sustituir estas ecuaciones en (4.74) obtenemos

$$\begin{aligned}(Z_2)^4(1 + 4\alpha + 4\beta i) \pm q_3(Z_2)^3(1 + 3\alpha + 3\beta i) \\ + (q_{20} + q_2)(Z_2)^2(1 + 2\alpha + 2\beta i) \pm q_1 Z_2(1 + \alpha + \beta i) + (q_{00} + q_0) = 0.\end{aligned}$$

Igual como hemos estado haciendo separamos la parte real y la parte imaginaria del polinomio como sigue:

$$\alpha(4(Z_2)^4 \pm 3q_3(Z_2)^3 + 2(q_{20} + q_2)(Z_2)^2 \pm q_1 Z_2) \quad (4.85)$$

$$+ (Z_2)^4 \pm q_3(Z_2)^3 + (q_{20} + q_2)(Z_2)^2 \pm q_1(Z_2) + q_{00} + q_0 = 0,$$

$$\beta(4(Z_2)^4 \pm 3q_3(Z_2)^3 + 2(q_{20} + q_2)(Z_2)^2 \pm q_1 Z_2) = 0. \quad (4.86)$$

Como ya dijimos estamos interesados en  $Re(\lambda)$  y como

$$Re(\lambda) = \pm Z_2(1 + \alpha) \quad (4.87)$$

debemos resolver el sistema de ecuaciones anterior para  $\alpha$ .

Despreciamos los productos de  $\alpha$  y  $\beta$  con los  $q_i$ . De la ecuación (4.85) tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha(4(Z_2)^4 + 2q_{20}(Z_2)^2) + (Z_2)^4 \pm q_3(Z_2)^3 \\ + (q_{20} + q_2)(Z_2)^2 \pm q_1(Z_2) + q_{00} + q_0 = 0\end{aligned} \quad (4.88)$$

lo cual implica que

$$\alpha = -\frac{(Z_2)^4 \pm q_3(Z_2)^3 + (q_{20} + q_2)(Z_2)^2 \pm q_1(Z_2) + q_{00} + q_0}{2(Z_2)^2(2(Z_2)^2 + q_{20})} \quad (4.89)$$

y por lo tanto

$$Re(\lambda) = \pm Z_2 \left( 1 - \frac{(Z_2)^4 \pm q_3(Z_2)^3 + (q_{20} + q_2)(Z_2)^2 \pm q_1(Z_2) + q_{00} + q_0}{2(Z_2)^2(2(Z_2)^2 + q_{20})} \right). \quad (4.90)$$

Si simplificamos la expresión anterior tenemos

$$\begin{aligned} Re(\lambda) &= \pm Z_2 \left( 2(Z_2)^2(2(Z_2)^2 + q_{20}) - [(Z_2)^4 \pm q_3(Z_2)^3 + (q_{20} + q_2)(Z_2)^2 \right. \\ &\quad \left. \pm q_1(Z_2) + q_{00} + q_0] \right) / 2(Z_2)^2(2(Z_2)^2 + q_{20}) \\ &= \pm \left( 2(Z_2)^2(2(Z_2)^2 + q_{20}) - [(Z_2)^4 \pm q_3(Z_2)^3 + (q_{20} + q_2)(Z_2)^2 \right. \\ &\quad \left. \pm q_1(Z_2) + q_{00} + q_0] \right) / 2(Z_2)(2(Z_2)^2 + q_{20}) \\ &= \pm \left( 4(Z_2)^4 + 2q_{20}(Z_2)^2 - (Z_2)^4 \mp q_3(Z_2)^3 - (q_{20} + q_2)(Z_2)^2 \right. \\ &\quad \left. \mp q_1(Z_2) - q_{00} - q_0 \right) / 2(Z_2)(2(Z_2)^2 + q_{20}) \\ &= \pm \left( 3(Z_2)^4 \mp q_3(Z_2)^3 - (q_2 - q_{20})(Z_2)^2 \right. \\ &\quad \left. \mp q_1(Z_2) - q_{00} - q_0 \right) / 2(Z_2)(2(Z_2)^2 + q_{20}). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} 2(Z_2)(2(Z_2)^2 + q_{20}) &= 2(Z_2) \left( 2 \left( 1 + 2(7)^{1/2} \right) - 2 \right) \\ &= 8(7)^{1/2} Z_2 > 0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Por lo tanto si queremos que  $Re(\lambda) < 0$  se debe cumplir que

$$\pm \left( 3(Z_2)^4 \mp q_3(Z_2)^3 - (q_2 - q_{20})(Z_2)^2 \mp q_1(Z_2) - q_{00} - q_0 \right) < 0. \quad (4.93)$$

Entonces de aquí se derivan dos condiciones más para la estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio que son las siguientes:

$$\begin{aligned} 3(Z_2)^4 - q_3(Z_2)^3 - (q_2 - q_{20})(Z_2)^2 - q_1(Z_2) - q_{00} - q_0 &< 0, \\ -3(Z_2)^4 - q_3(Z_2)^3 + (q_2 - q_{20})(Z_2)^2 - q_1(Z_2) + q_{00} + q_0 &< 0. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Ahora bien, si definimos

$$U = 3(Z_2)^4 - (q_2 - q_{20})(Z_2)^2 - q_{00} - q_0 \quad (4.95)$$

podemos escribir las desigualdades anteriores como sigue

$$\begin{aligned} -q_3(Z_2)^3 - q_1(Z_2) &< -\mathcal{U} \\ -q_3(Z_2)^3 - q_1(Z_2) &< \mathcal{U} \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a

$$-q_3(Z_2)^3 - q_1(Z_2) < -|\mathcal{U}|. \quad (4.96)$$

Hay que recordar que estas condiciones de estabilidad son válidas solo en el caso en que  $k$  sea suficientemente pequeña.

Una cosa interesante que hay que notar es que para conocer las condiciones de estabilidad asintótica para los puntos colineales en el problema restringido de tres cuerpos con fricción el procedimiento es análogo al que hemos realizado en esta sección.

Estamos hablando de que hemos trabajado con el mismo tipo de polinomio característico y el mismo tipo de raíces de dicho polinomio, podemos comparar el polinomio (3.234) y el polinomio (4.74).

En cuanto a las raíces del polinomio característico hemos visto que las raíces del polinomio característico de las ecuaciones de Hill son de la forma

$$\lambda_{1,2} = \pm Z_1 i, \quad \lambda_{3,4} = \pm Z_2, \quad (4.97)$$

y en base a [8] vemos que las raíces del polinomio característico para los puntos colineales en el problema restringido de tres cuerpos son de la forma

$$\lambda_{1,2} = \pm S_1 i, \quad \lambda_{3,4} = \pm S_2, \quad (4.98)$$

donde las  $S_i$  son números reales positivos y sus valores para cada uno de los puntos colineales L1, L2 y L3 están dados por

L1 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \left( - \left( 1 - 2(7)^{1/2} + \frac{3^{2/3}}{14} (7 - 8(7)^{1/2}) \mu_2^{1/3} \right) \right)^{1/2} \\ S_2 &= \left( 1 + 2(7)^{1/2} + \frac{3^{2/3}}{14} (7 + 8(7)^{1/2}) \mu_2^{1/3} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.99)$$

L2 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \left( - \left( 1 - 2(7)^{1/2} - \frac{3^{2/3}}{14} (7 - 8(7)^{1/2}) \mu_2^{1/3} \right) \right)^{1/2} \\ S_2 &= \left( - \left( 1 + 2(7)^{1/2} - \frac{3^{2/3}}{14} (7 + 8(7)^{1/2}) \mu_2^{1/3} \right) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

L3 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \left( 1 + \frac{7}{4} \mu_2 \right)^{1/2} \\ S_2 &= \left( \frac{21}{8} \mu_2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.100)$$

Por lo dicho anteriormente, para tener estabilidad asintótica en los puntos colineales en el problema restringido de tres cuerpos con fricción se tienen que cumplir las siguientes condiciones (ver (4.81) y (4.91)):

$$\begin{aligned} Re(\lambda) &= \frac{a_1 - a_3(S_1)^2}{2(2(S_1)^2 - a_{20})} < 0, \\ Re(\lambda) &= \pm \frac{(3(S_2)^4 \mp a_3(S_2)^3 - (a_2 - a_{20})(S_2)^2 \mp a_1(S_2) - a_{00} - a_0)}{2(S_2)(2(S_2)^2 - a_{20})} < 0. \end{aligned}$$

Solo nos falta checar que

$$2(2(S_1)^2 - a_{20}) > 0 \quad \text{y} \quad 2(S_2)(2(S_2)^2 + a_{20}) > 0 \quad (4.101)$$

para cada uno de los tres casos.

En nuestro trabajo no hemos detallado los cálculos para conocer  $a_{20}$  para los puntos colineales así que haremos uso de la información que nos proporciona [8]:

CAPÍTULO 4. EFECTOS DE FRICCIÓN EN LAS ECUACIONES DE HILL.

Para L1,  $a_{20} = -2 - 3^{2/3}\mu_2^{1/3}$ , para L2,  $a_{20} = -2 + 3^{2/3}\mu_2^{1/3}$  y para L3,  $a_{20} = 1 - 7/8(\mu_2)$ .

Entonces para L1 tenemos que

$$\begin{aligned} 2(2(S_1)^2 - a_{20}) &= 2\left(2\left(-\left(1 - 2(7)^{1/2} + \frac{3^{2/3}}{14}(7 - 8(7)^{1/2})\mu_2^{1/3}\right)\right)\right. \\ &\quad \left.- \left(-2 - 3^{2/3}\mu_2^{1/3}\right)\right) \\ &= \frac{8}{(7)^{1/2}}(7 + 2 \cdot 3^{2/3}\mu_2^{1/3}) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(S_2)(2(S_2)^2 + a_{20}) &= 2\left(1 + 2(7)^{1/2} + \frac{3^{2/3}}{14}(7 + 8(7)^{1/2})\mu_2^{1/3}\right)^{1/2} \\ &\quad \left(2\left(1 + 2(7)^{1/2} + \frac{3^{2/3}}{14}(7 + 8(7)^{1/2})\mu_2^{1/3}\right)\right. \\ &\quad \left.+ \left(-2 - 3^{2/3}\mu_2^{1/3}\right)\right) \\ &= \frac{8}{(7)^{1/2}}(7 + 2 \cdot 3^{2/3}\mu_2^{1/3})S_2 > 0. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Para L2 tenemos

$$\begin{aligned} 2(2(S_1)^2 - a_{20}) &= 2\left(2\left(-\left(1 - 2(7)^{1/2} - \frac{3^{2/3}}{14}(7 - 8(7)^{1/2})\mu_2^{1/3}\right)\right)\right. \\ &\quad \left.- \left(-2 + 3^{2/3}\mu_2^{1/3}\right)\right) \\ &= \frac{8}{(7)^{1/2}}(7 - 2 \cdot 3^{2/3}\mu_2^{1/3}) > 0 \\ 2(S_2)(2(S_2)^2 + a_{20}) &= 2\left(1 + 2(7)^{1/2} - \frac{3^{2/3}}{14}(7 + 8(7)^{1/2})\mu_2^{1/3}\right)^{1/2} \\ &\quad \left(2\left(1 + 2(7)^{1/2} - \frac{3^{2/3}}{14}(7 + 8(7)^{1/2})\mu_2^{1/3}\right)\right. \\ &\quad \left.+ \left(-2 + 3^{2/3}\mu_2^{1/3}\right)\right) \\ &= \frac{8}{(7)^{1/2}}(7 - 2 \cdot 3^{2/3}\mu_2^{1/3})S_2 > 0. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Y para L3 tenemos que



$$\begin{aligned}
 2(2(S_1)^2 - a_{20}) &= 2 \left( 2 \left( 1 + \frac{7}{4} \mu_2 \right) - (1 - 7/8(\mu_2)) \right) \\
 &= 2 + \frac{35}{4} \mu_2 > 0 \\
 2(S_2) (2(S_2)^2 + a_{20}) &= 2 \left( \frac{21}{8} \mu_2 \right)^{1/2} \left( 2 \left( \frac{21}{8} \mu_2 \right) + (1 - 7/8(\mu_2)) \right) \\
 &= 2 + \frac{35}{4} \mu_2 S_2 > 0.
 \end{aligned} \tag{4.104}$$

Así que, como habíamos mencionado las condiciones de estabilidad asintótica en el problema restringido de tres cuerpos con fricción para los tres puntos colineales son análogas a las condiciones en las ecuaciones de Hill con fricción.

Entonces vemos que para que  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  en el problema restringido de tres cuerpos bajo efectos de fricción sean asintóticamente estables se debe de cumplir que

$$a_1 < a_3(S_1)^2 \tag{4.105}$$

y

$$-a_3(S_2)^3 - a_1(S_2) < -|\tilde{U}|, \tag{4.106}$$

donde

$$\tilde{U} = 3(S_2)^4 - (a_2 - a_{20})(S_2)^2 - a_{00} - a_0 \tag{4.107}$$

y los valores de los  $a_i$  son dados por las ecuaciones (3.235).

### 4.2.3 Ejemplos de fuerzas de fricción introducidas en las ecuaciones de Hill.

En esta subsección analizaremos las condiciones de estabilidad para los puntos  $L_1$  y  $L_2$  en problemas específicos.

Los ejemplos que mostraremos consisten en introducir en las ecuaciones de Hill las mismas fuerzas que utilizamos en la Sección 3.6.3: fuerza de fricción inercial, fricción

nebular simple y fricción Poynting-Robertson.

Fuerza de fricción inercial.

Recordemos que este tipo de fuerza tiene la forma

$$F_i = kVg(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \quad (4.108)$$

con  $V = (\dot{x} - y, \dot{y} + x)$ ,  $i$  y  $j$  números reales y

$$g(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = V^i r^j \quad (4.109)$$

En primer lugar queremos conocer la posición de los puntos de equilibrio. Para esto consideremos la ecuación (4.53) y calculemos  $\tilde{f}_x$  y  $\tilde{f}_y$  (ver (4.37))

$$\begin{aligned} \tilde{f}_x &= k(\dot{x} - y)((\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2)^{i/2}(x^2 + y^2)^{j/2} \Big|_{(x_e, y_e, 0, 0)} \\ &= 0, \\ \tilde{f}_y &= k(\dot{y} + x)((\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2)^{i/2}(x^2 + y^2)^{j/2} \Big|_{(x_e, y_e, 0, 0)} \\ &= \pm k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{i/3} \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{j/3} \\ &= \pm k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(1+i+j)}, \end{aligned} \quad (4.110)$$

donde el signo + corresponde a L2 y el signo - corresponde a L1.

Por lo tanto la posición para L1 es

$$x_e^* = -\left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{1/3}, \quad y_e^* = -\frac{1}{3}k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(1+i+j)}, \quad (4.111)$$

y la posición para L2 es

$$x_e^* = \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{1/3}, \quad y_e^* = \frac{1}{3}k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(1+i+j)} \quad (4.112)$$

Enseguida calculamos las derivadas parciales de la fuerza dándonos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right) &= i k (\dot{x} - y) (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (x + \dot{y}) \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{-1+\frac{1}{2}} \\ &\quad + j k x (\dot{x} - y) (x^2 + y^2)^{-1+\frac{1}{2}} \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right) &= - \left( i k (\dot{x} - y)^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{-1+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + j k (\dot{x} - y) y (x^2 + y^2)^{-1+\frac{1}{2}} \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - k (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}}\right) &= i k (\dot{x} - y)^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{-1+\frac{1}{2}} \\ &\quad + k (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}}\right) = i k (\dot{x} - y) (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (x + \dot{y}) \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{-1+\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right) &= i k (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (x + \dot{y})^2 \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{-1+\frac{1}{2}} \\ &\quad + k (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + j k x (x^2 + y^2)^{-1+\frac{1}{2}} (x + \dot{y}) \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right) &= - \left( i k (\dot{x} - y) (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (x + \dot{y}) \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{-1+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + j k y (x^2 + y^2)^{-1+\frac{1}{2}} (x + \dot{y}) \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}}\right) = i k (\dot{x} - y) (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (x + \dot{y}) \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{-1+\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}\right) &= i k (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (x + \dot{y})^2 \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{-1+\frac{1}{2}} \\ &\quad + k (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \left((\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4. EFECTOS DE FRICCIÓN EN LAS ECUACIONES DE HILL.

Recordemos que nuestro análisis lo hicimos evaluando cada uno de los coeficientes del polinomio característico en los puntos de equilibrio para las ecuaciones de Hill así que enseguida evaluamos las derivadas parciales y  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , y  $d$  en  $(x_e, y_e) = (\pm(\frac{\mu_2}{3})^{1/3}, 0)$  y  $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$  (ver (4.70) y (4.71)):

$$\begin{aligned}
 F_x^x &= 0, & F_y^x &= -k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(i+j)}, \\
 F_x^x &= k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(i+j)}, & F_y^x &= 0, \\
 F_x^y &= (1+i+j) k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(i+j)}, & F_y^y &= 0, \\
 F_x^y &= 0, & F_y^y &= (1+i) k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(i+j)}, \\
 a &= 3, & b &= 0, & c &= 0, & d &= 9. \quad (4.113)
 \end{aligned}$$

Usando las expresiones anteriores podemos calcular los coeficientes del polinomio característico los cuales están definidos en las ecuaciones (4.73) teniendo como resultado lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 q_0 &= 0, & q_1 &= (2+7i-2j) k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(i+j)}, \\
 q_2 &= 0, & q_3 &= -(2+i) k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(i+j)}.
 \end{aligned}$$

Hay que notar que los coeficientes son iguales para los dos puntos, así que las condiciones de estabilidad asintótica que se derivan del siguiente análisis son iguales para  $L1$  y  $L2$ .

En primer lugar según (4.84) queremos que  $q_1 < q_3 (Z_1)^2$  así que

$$(2+7i-2j) k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(i+j)} < -(2+i) k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(i+j)} (-1+2(7)^{1/2}). \quad (4.114)$$

Si  $k < 0$  entonces

$$2+7i-2j > -(2+i) (-1+2(7)^{1/2}) \quad (4.115)$$

o de manera equivalente

$$(6 + 2(7)^{1/2}) i > 2 (j - 2(7)^{1/2}). \quad (4.116)$$

Esta es la primera condición que se tiene que cumplir para que L1 y L2 sean asintóticamente estables.

Para sacar la segunda condición primero usando (4.95) calculamos  $\mathcal{U}$  como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= 3 (1 + 2(7)^{1/2})^2 - (-2) (1 + 2(7)^{1/2}) + 27 \\ &= 4 (29 + 4(7)^{1/2}) \approx 158.332 > 0. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Una vez calculada  $\mathcal{U}$  de la desigualdad (4.96) podemos escribir la condición para la estabilidad lineal para este caso de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (2 + i) k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(i+j)} (1 + 2(7)^{1/2})^{3/2} \\ - (2 + 7i - 2j) k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(i+j)} (1 + 2(7)^{1/2})^{1/2} < -4 (29 + 4(7)^{1/2}). \end{aligned}$$

Si factorizamos podremos escribir esta desigualdad como sigue

$$\begin{aligned} k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(i+j)} (1 + 2(7)^{1/2})^{1/2} \\ \left[ (-6 + 2(7)^{1/2}) i + 2 (2(7)^{1/2} + j) \right] < -4 (29 + 4(7)^{1/2}). \end{aligned}$$

En resumen, para que L1 y L2 sean asintóticamente estables se debe cumplir que

$$(6 + 2(7)^{1/2}) i > 2 (j - 2(7)^{1/2}) \quad (4.118)$$

y

$$\begin{aligned} k \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}(i+j)} (1 + 2(7)^{1/2})^{1/2} \\ \left[ (-6 + 2(7)^{1/2}) i + 2 (2(7)^{1/2} + j) \right] < -4 (29 + 4(7)^{1/2}). \end{aligned} \quad (4.119)$$

Sin embargo investigaciones numéricas nos sugieren que las condiciones dadas no se pueden cumplir simultáneamente, o si se llegasen a cumplir se perdería alguna de

#### CAPÍTULO 4. EFECTOS DE FRICCIÓN EN LAS ECUACIONES DE HILL.

las hipótesis como es el caso en que  $k = -.00001$ ,  $\mu_2 = .001$ ,  $i = -1.4$  y  $j = -5.1$ , con estos valores se satisfacen las condiciones anteriores y se pierde la hipótesis de que el desplazamiento de los puntos de equilibrio con respecto a los puntos de equilibrio de las ecuaciones de Hill es muy pequeño.

No tenemos un análisis formal del ejemplo ya que nuestro trabajo se enfoca a las condiciones para que los puntos de equilibrio se vuelvan asintóticamente estables y no a los ejemplos.

Otro caso particular importante que hay que notar es que cuando  $i + j > 3$  no se cumplen las condiciones de estabilidad asintótica para los puntos de equilibrio ya que debido a que estamos tomando una aproximación hasta  $O(\mu_2)$  la condición (4.119) quedaría como sigue

$$0 < -4 \left( 29 + 4(7)^{1/2} \right) \quad (4.120)$$

la cual evidentemente no es cierta.

Enseguida tenemos algunas gráficas donde mostramos la solución de este modelo para algunos casos específicos.

Los puntos que aparecen en tono gris son los puntos de equilibrio de las ecuaciones de Hill, y los puntos marcados por L2 son los puntos de equilibrio de las ecuaciones de Hill con fricción.

En la figura 4.9 mostramos el caso en que las condiciones (4.118) y (4.119) se cumplen pero el desplazamiento del punto de equilibrio respecto al punto de equilibrio de las ecuaciones de Hill es muy grande.

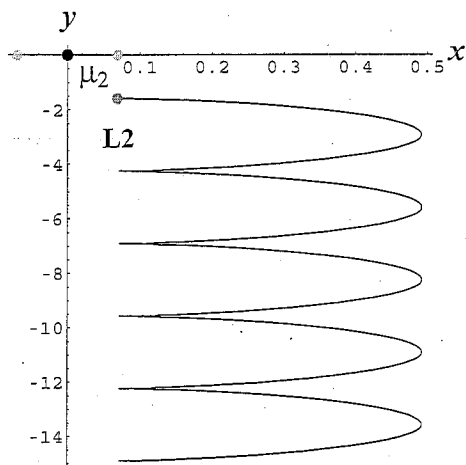


Figura 4.9:  $\mu_2 = 0.001$ ,  $k = -0.00001$ ,  $i = -1.4$ ,  $j = -4.5$ ,  $(x(0), y(0)) = \mathbf{L2} + (0.00065, 0.00065)$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

En la figura 4.10 mostramos un ejemplo donde el desplazamiento sí es muy pequeño, la condición (4.118) se cumple y la condición (4.119) no se cumple.

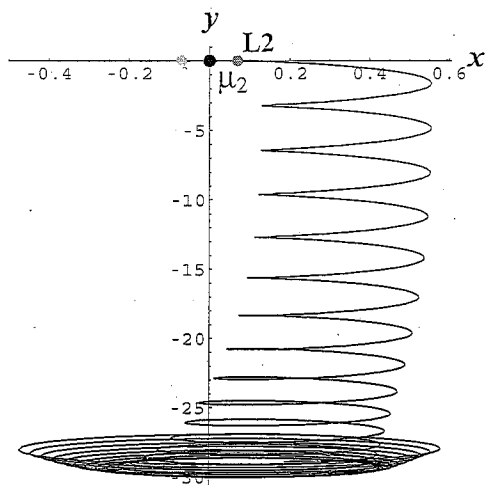


Figura 4.10:  $\mu_2 = 0.001$ ,  $k = -0.00001$ ,  $i = 1$ ,  $j = 1$ ,  $(x(0), y(0)) = \mathbf{L2} + (0.00065, 0.00065)$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

La figura 4.11 muestra un ejemplo donde el desplazamiento del punto de equilibrio es pequeño, la condición (4.119) se cumple y la condición (4.118) no se cumple.

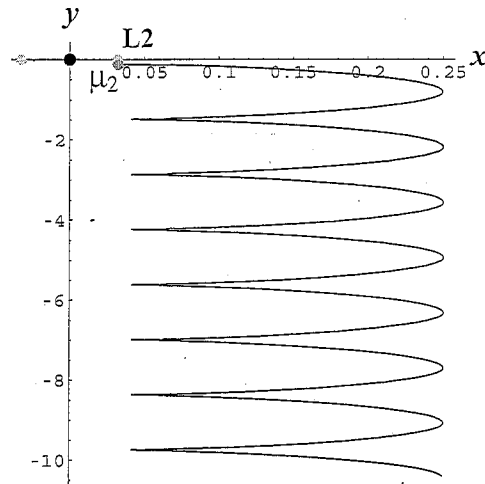


Figura 4.11:  $\mu_2 = 0.0001$ ,  $k = -0.00001$ ,  $i = -4$ ,  $j = -0.05$ ,  $(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = L2 + (0.0065, 0.0065)$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

#### Fricción nebular simple

De acuerdo a la ecuación (3.265) este tipo de fuerza tiene la forma

$$\mathbf{F} = k(\dot{x}, \dot{y}) \quad (4.121)$$

y por la misma razón que hemos mencionado en el capítulo anterior en este caso tampoco hay desplazamiento de los puntos de equilibrio, es decir

$$x_e^* = x_e, \quad y_e^* = y_e. \quad (4.122)$$

Ahora calculemos las derivadas parciales de  $\mathbf{F}$  como sigue

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right) &= 0, & \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right) &= 0, & \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}}\right) &= k, & \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}}\right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right) &= 0, & \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right) &= 0, & \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}}\right) &= 0, & \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}\right) &= k. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Y obviamente si evaluamos las derivadas parciales en los puntos de equilibrio de las ecuaciones de Hill obtenemos que



CAPÍTULO 4. EFECTOS DE FRICCIÓN EN LAS ECUACIONES DE HILL.

$$\begin{array}{cccc} F_x^x = 0, & F_y^x = 0, & F_x^x = k, & F_y^x = 0, \\ F_x^y = 0, & F_y^y = 0, & F_x^y = 0, & F_y^y = k. \end{array}$$

Los valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , y  $d$  los conocemos de la ecuación (4.113) ya que estamos evaluando en los mismos puntos.

Con esto ya podemos calcular los coeficientes  $q_i$  (ver (4.73)) del polinomio característico que nos dan el siguiente resultado:

$$\begin{array}{ll} q_0 = 0, & q_1 = 6k, \\ q_2 = 0, & q_3 = -2k. \end{array} \quad (4.124)$$

De nuevo tenemos los mismos coeficientes para los dos puntos de equilibrio.

Así que la condición (4.84) nos da

$$6k < -2k \left( -1 + 2(7)^{1/2} \right) \quad (4.125)$$

que se cumple si y solo si  $k < 0$ .

Ahora calculemos  $\mathcal{U}$  que al igual como en el ejemplo anterior (ver (4.117)) nos da

$$\mathcal{U} = 4 \left( 29 + 4(7)^{1/2} \right) > 0. \quad (4.126)$$

Por lo tanto usando (4.96) se tiene que cumplir que

$$-q_3(Z_2)^3 - q_1(Z_2) < -\mathcal{U}, \quad (4.127)$$

es decir

$$2k \left( 1 + 2(7)^{1/2} \right)^{3/2} - 6k \left( 1 + 2(7)^{1/2} \right)^{1/2} < -4 \left( 29 + 4(7)^{1/2} \right). \quad (4.128)$$

Si factorizamos obtenemos que

$$\begin{aligned} -4(29 + 4(7)^{1/2}) &> 2k(1 + 2(7)^{1/2})^{1/2} \left( (1 + 2(7)^{1/2}) - 3 \right) \\ &= 4k(1 + 2(7)^{1/2})^{1/2} (-1 + (7)^{1/2}). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Ahora despejamos  $k$  obteniendo el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} k &< \frac{-4(29 + 4(7)^{1/2})}{4(1 + 2(7)^{1/2})^{1/2} (-1 + (7)^{1/2})} \\ &= -\frac{1(57 + 33(7)^{1/2})}{6(1 + 2(7)^{1/2})^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.130)$$

Como estamos suponiendo que  $k < 0$  debemos tener la siguiente condición

$$|k| > \frac{1(57 + 33(7)^{1/2})}{6(1 + 2(7)^{1/2})^{1/2}} \approx 9.588 \quad (4.131)$$

la cual no es posible ya que estamos suponiendo que  $k$  es muy pequeña.

Por lo tanto, bajo efectos de fricción nebular simple, los puntos de equilibrio **L1** y **L2** no cumplen con las condiciones de estabilidad asintótica.

En la figura 4.12 mostramos un ejemplo de la solución de las ecuaciones de Hill cuando introducimos una fuerza de fricción nebular simple.

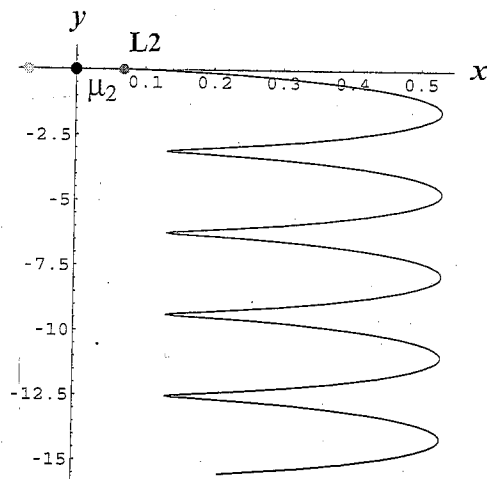


Figura 4.12:  $\mu_2 = 0.0001$ ,  $k = -0.00001$ ,  $(x(0), y(0)) = L2 + (0.0065, 0.0065)$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

#### Fricción Poynting-Robertson

Sabemos de (3.269) que las componentes de este tipo de fuerza son:

$$\begin{aligned} F_x &= k \frac{1}{r^2} \left( \dot{x} - y + \frac{x}{r^2} (x\dot{x} + y\dot{y}) \right), \\ F_y &= k \frac{1}{r^2} \left( \dot{y} + x + \frac{y}{r^2} (x\dot{x} + y\dot{y}) \right). \end{aligned} \quad (4.132)$$

Calculamos la posición de  $L1$  y  $L2$  cuando consideramos este tipo de fuerza externa y tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}_x &= k \frac{1}{r^2} \left( \dot{x} - y + \frac{x}{r^2} (x\dot{x} + y\dot{y}) \right) \Big|_{(x_e, y_e, 0, 0)} \\ &= 0, \\ \tilde{f}_y &= k \frac{1}{r^2} \left( \dot{y} + x + \frac{y}{r^2} (x\dot{x} + y\dot{y}) \right) \Big|_{(x_e, y_e, 0, 0)} \\ &= \frac{kx}{r^2} = \pm \frac{k \left( \frac{\mu_2}{3} \right)^{1/3}}{\left( \frac{\mu_2}{3} \right)^{2/3}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando (4.53), se tiene que

$$x_e^* = \pm \left( \frac{\mu_2}{3} \right)^{1/3}, \quad y_e^* = \pm \frac{1}{3} k \left( \frac{3}{\mu_2} \right)^{1/3}, \quad (4.133)$$

CAPÍTULO 4. EFECTOS DE FRICCIÓN EN LAS ECUACIONES DE HILL.

donde el signo positivo corresponde a L2 y el signo negativo corresponde a L1.

Ahora calculamos las derivadas parciales de la fuerza

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right) &= \frac{k(2xy^3 + x^3(-4x + 2y) - 3x^2y\dot{y} + y^3\dot{y})}{(x^2 + y^2)^3}, \\
 \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right) &= \frac{k(-x^4 - 6x^2x\dot{y} + y^3(-2x + y) + x^3\dot{y} - 3xy^2\dot{y})}{(x^2 + y^2)^3}, \\
 \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}}\right) &= \frac{k(2x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\
 \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}}\right) &= \frac{kxy}{(x^2 + y^2)^2}, \\
 \\
 \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right) &= \frac{-k(x^4 + 3x^2x\dot{y} - y^3(x + y) + 2x^3\dot{y} + 6xy^2\dot{y})}{(x^2 + y^2)^3}, \\
 \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right) &= \frac{k(x^3(x - 2y) - xy^2(3x + 2y) - 4y^3\dot{y})}{(x^2 + y^2)^3}, \\
 \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}}\right) &= \frac{kxy}{(x^2 + y^2)^2}, \\
 \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}\right) &= \frac{k(x^2 + 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \tag{4.134}
 \end{aligned}$$

que evaluadas en los puntos de equilibrio de las ecuaciones de Hill nos dan

$$\begin{aligned}
 F_x^x &= 0, & F_y^x &= -k\left(\frac{3}{\mu_2}\right)^{2/3}, \\
 F_x^{\dot{x}} &= 2k\left(\frac{3}{\mu_2}\right)^{2/3}, & F_y^{\dot{x}} &= 0, \\
 \\
 F_x^y &= -k\left(\frac{3}{\mu_2}\right)^{2/3}, & F_y^y &= 0, \\
 F_x^{\dot{y}} &= 0, & F_y^{\dot{y}} &= k\left(\frac{3}{\mu_2}\right)^{2/3},
 \end{aligned}$$

y  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  ya los conocemos de la ecuación (4.113).

Entonces por (4.73)

CAPÍTULO 4. EFECTOS DE FRICCIÓN EN LAS ECUACIONES DE HILL.

$$\begin{aligned} q_0 &= 0, & q_1 &= 3k \left( \frac{3}{\mu_2} \right)^{2/3}, \\ q_2 &= 0, & q_3 &= -3k \left( \frac{3}{\mu_2} \right)^{2/3}, \end{aligned}$$

y otra vez tenemos los mismos coeficientes para ambos puntos de equilibrio.

Así que de la condición (4.84) tenemos

$$3k \left( \frac{3}{\mu_2} \right)^{2/3} < -3k \left( \frac{3}{\mu_2} \right)^{2/3} (-1 + 2(7)^{1/2}) \quad (4.135)$$

lo cual es posible si y solo si  $k < 0$ .

Luego observamos que  $\mathcal{U}$  es igual como en los dos casos anteriores (ver (4.117) y (4.126)). Por lo tanto hay que ver que

$$-q_3(Z_2)^3 - q_1(Z_2) < -\mathcal{U}, \quad (4.136)$$

es decir

$$\begin{aligned} 3k \left( \frac{3}{\mu_2} \right)^{2/3} (1 + 2(7)^{1/2})^{3/2} \\ - 3k \left( \frac{3}{\mu_2} \right)^{2/3} (1 + 2(7)^{1/2})^{1/2} < -4(29 + 4(7)^{1/2}) \end{aligned} \quad (4.137)$$

que es lo mismo que

$$\begin{aligned} -4(29 + 4(7)^{1/2}) > 3k \left( \frac{3}{\mu_2} \right)^{2/3} (1 + 2(7)^{1/2})^{1/2} (1 + 2(7)^{1/2} - 1) \\ = 3k \left( \frac{3}{\mu_2} \right)^{2/3} (1 + 2(7)^{1/2})^{1/2} (2(7)^{1/2}). \end{aligned} \quad (4.138)$$

Si despejamos  $k$  obtenemos

$$k < -\frac{4(29 + 4(7)^{1/2})}{6(7)^{1/2} (1 + 2(7)^{1/2})^{1/2}} \left( \frac{\mu_2}{3} \right)^{2/3} \quad (4.139)$$

CAPÍTULO 4. EFECTOS DE FRICCIÓN EN LAS ECUACIONES DE HILL.

Igual como en el ejemplo anterior podemos escribir la desigualdad anterior como

$$|k| > \frac{4(29 + 4(7)^{1/2})}{6(7)^{1/2} (1 + 2(7)^{1/2})^{1/2}} \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{2/3} \quad (4.140)$$

ya que estamos suponiendo  $k < 0$ .

Dado que nuestro análisis es valido solo cuando  $k \ll \mu_2$  vemos que no es posible que se cumpla la condición anterior.

En la figura 4.13 mostramos el comportamiento de la partícula en una vecindad de  $\mu_2$  con condición inicial cerca de  $L_2$  bajo influencia de fricción Poynting-Robertson.

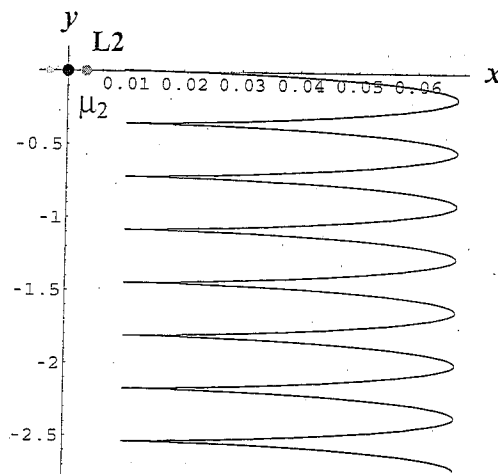


Figura 4.13:  $\mu_2 = 0.0001$ ,  $k = -0.000001$ ,  $(x(0), y(0)) = L_2 + (0.0065, 0.0065)$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

# Bibliografía

- [1] Arnold, V. I., Kozlov, V. V., Neishtadt, A. I., *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Springer, 1997.
- [2] Arnold, V. I., *Ordinary Differential Equations*, Springer, 3a ed., 1992.
- [3] Bromwich, T. J., *Infinite Series*, Macmillan, 1926.
- [4] Collinson, C. D., *Introductory Mechanics*, Arnold, 1980.
- [5] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 1957.
- [6] Jordan, D. W., Smith, P., *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford, 1987.
- [7] Murray, C. D., Dermott, S. F., *Solar System Dynamics*, Cambridge, 1999.
- [8] Murray, C. D., *Dynamical Effects of Drag in the Circular Restricted Three-Body Problem*, *Icarus* 112, 465-484, 1994.
- [9] Symon, K. R., *Mechanics*, Addison-Wesley, 2a ed., 1960.
- [10] Whittaker, E. t., Watson G.N., *A Course of Modern Analysis*, Cambridge, 1992.