Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

Sobre la constante de Yamabe de productos Riemannianos

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A

Juan Miguel Ruiz Zepeda

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Jimmy Petean Humen

Guanajuato, Gto. Abril de 2010

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi familia por haberme brindado su inagotable apoyo en todo momento.

Me gustaría también agradecer a mi supervisor, Dr. Jimmy Petean, por su guía durante mis estudios de doctorado, así como por valiosas observaciones y conversaciones sobre el problema de Yamabe y los temas de esta tesis.

A mis sinodales: Dr. Luis Hernández Lamoneda, Dr. Rafael Herrera Guzmán, Dr. Raúl Quiroga Barranco y Dra. Catherine Searle, por haber aceptado ayudarme con la lectura y el mejoramiento de este trabajo.

A CIMAT, por el apoyo institucional que me brindó durante mis estudios de maestría y doctorado. Así mismo, a los distintos investigadores de quienes recibí varios cursos y pláticas de matemáticas.

Por último, me gustaría agradecer a CONACYT, por haberme otorgado una beca que hizo posible mis estudios de maestría y doctorado (número de registro 183909).

Esta tesis fue realizada con apoyo de CONACYT. Becario con número de registro 183909.

Índice

Resumen

Sea (M^m, g) una variedad Riemanniana suave y cerrada ($m \geq 2$), con curvatura escalar positiva S_g. En esta tesis probamos que la constante de Yamabe de $(M \times \mathbf{R}^n, g + g_E)$, $n \geq 2$, es alcanzada por una métrica en la clase conforme de $(g + g_E)$, donde g_E es la métrica Euclideana. Mostramos además que el funcional de Yamabe de $(M \times \mathbf{R}^n, g + g_E)$ es mejorado por simetrizaciones de Steiner con respecto a M, y por tanto, que la dependencia de $\mathbf{R}^n$ del minimizante de Yamabe de $(M \times \mathbf{R}^n, g + g_E)$ es radial. Finalmente, mostramos que para $n > 1$, $(M^m \times \mathbf{R}^n, g + g_E)$ no es conforme a una variedad de Einstein positiva. Aún más, $(M^m \times \mathbf{R}^n, g + g_E)$ no es conforme a una variedad Riemanniana con curvatura de Ricci positiva, a través de una función suave, integrable y radial $\varphi : \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbf{R}^+$, para $n > 1$. Estos resultados fueron motivados por preguntas recientes sobre las constantes de Yamabe.

Notación

a una constante dimensional, $a = \frac{4(m-1)}{(m-2)}$, en una variedad de dimensión m

$C^\infty(M)$ el espacio de funciones suaves sobre M

$C_0^\infty(M)$ el espacio de funciones suaves sobre M con soporte compacto

$C^{2,\alpha}(M)$ el espacio de Hölder $(0 < \alpha < 1)$

$D^2\varphi$ el Hessiano de una función φ, dado por $D^2\varphi(X,Y) = X(Y\varphi) - (\nabla_X Y)\varphi$ para cualesquier X, Y campos vectoriales en la variedad

dV_g el elemento de volumen asociado a la métrica g

g_E la métrica Euclideana de $\mathbf{R}^n$

H un polarizador en $M \times \mathbf{R}^n$

$\mathbf{H_0}$ el conjunto de todos los polarizadores H tales que $M \times \{0\} \subset H$

$L^s(M)$ el espacio de Lebesgue sobre M

$L_1^s(M)$ el espacio de Sobolev sobre M

p una constante dimensional, $p = \frac{2m}{m-2}$, en una variedad de dimensión m

Q_g el funcional de Yamabe, $Q_g(f) = \frac{a \int_M |\nabla f|^2 dV_g + \int_M S_g f^2 dV_g}{(\int_M f^p dV_g)^{\frac{2}{p}}}$

R_g la curvatura de Ricci, asociada a la métrica g

S_g la curvatura escalar asociada a la métrica g

S^n la esfera de dimensión n

(S^n, g_0) la esfera de dimensión n con la métrica redonda, de radio 1

U^* la simetrización de Steiner de un conjunto U

U^c el complemento de un conjunto U

u^* la simetrización de Steiner de una función u

u^H la polarización de una función u por un polarizador H

$Y(M,g)$ la constante de Yamabe de la variedad Riemanniana (M,g)

$Y(M)$ el invariante de Yamabe de la variedad suave M

Y_n el invariante de Yamabe de S^n, también la constante de Yamabe de la esfera de dimensión n, con la métrica redonda y radio 1

Z_g el tensor sin traza de Ricci, $Z_g = R_g - \frac{S_g}{m} g$, en una variedad de dimensión m

Δ_g el laplaciano de la métrica g

$\nabla\varphi$ el gradiente de una función φ sobre la variedad

Σ un hiperplano afín $n-1$ dimensional de $\mathbf{R}^n$

$||\cdot||_s$ la norma sobre L^s

$||\cdot||_{s,1}$ la norma sobre L^s_1

Introducción

Sea (M^m, g_M) una variedad Riemanniana suave y cerrada (compacta sin frontera). Denotemos por $[g_M]$ la clase conforme de la métrica g_M. La constante de Yamabe de la clase conforme $(M^m, [g_M])$ está definida como el ínfimo de la curvatura escalar total restringida a $[g_M]$,

$$Y(M, [g_M]) = \inf_{h \in [g_M]} \frac{\int_M S_h dV_h}{Vol(M, h)^{\frac{m-2}{m}}}, \tag{1}$$

donde S_h y dV_h denotan la curvatura escalar y el elemento de volumen de h, respectivamente. Escribiendo $h = f^{\frac{4}{m-2}} g_M$ (f positiva y C^∞), para cualquier $h \in [g_M]$, podemos reescribir (1) en términos de funciones del espacio de Sobolev $L_1^2(M)$,

$$\begin{aligned} Y(M, [g_M]) &= \inf_{f \in L_1^2(M), f \neq 0} Q_{g_M}(f) \\ &:= \inf_{f \in L_1^2(M), f \neq 0} \frac{a \int_M |\nabla f|^2 dV_{g_M} + \int_M S_{g_M} f^2 dV_{g_M}}{\left(\int_M f^p dV_{g_M}\right)^{\frac{2}{p}}}, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $a = \frac{4(m-1)}{(m-2)}$, $p = \frac{2m}{m-2}$. Q_{g_M} es llamado el funcional de Yamabe. Para variedades cerradas, el ínfimo del funcional de Yamabe se alcanza en cada clase conforme. Éste es un resultado fundamental, y fue demostrado en varias etapas por H. Yamabe [30], N. Trudinger [29], T. Aubin [5] y R. Schoen [27]. La métrica que alcanza el ínfimo de (1), en una clase conforme, es llamada métrica de Yamabe y tiene curvatura escalar constante. Así mismo, la función que alcanza el ínfimo en (2), es llamada minimizante de Yamabe. Para cualquier clase conforme, como mostró T. Aubin en [5], la constante de Yamabe está acotada por arriba,

$$Y(M^m, [g_M]) \leq Y(S^m, [g_0]) = m(m-1)Vol(S^m),$$

donde g_0 es la métrica redonda de S^m con curvatura seccional constante 1. El invariante de Yamabe $Y(M)$ de M está definido como el supremo de las constantes de Yamabe sobre todas las clases conformes (cf. en [13], [28]). En consecuencia, $Y(M) \leq Y(S^m) = Y(S^m, [g_0])$. En adelante, denotaremos $Y(S^m) = Y(S^m, [g_0])$ por Y_m.

Para variedades no-compactas, completas, con curvatura escalar positiva, definimos la constante de Yamabe como

$$Y(M, [g_M]) := \inf_{f \in L_1^2(M) \cap L^p(N), f > 0} \frac{a \int_M |\nabla f|^2 dV_{g_M} + \int_M S_{g_M} f^2 dV_{g_M}}{\left(\int_M f^p dV_{g_M}\right)^{\frac{2}{p}}}. \tag{3}$$

En esta tesis estudiamos la constante de Yamabe de $(M^m \times \mathbf{R}^n, [g + g_E])$, donde M^m es una variedad cerrada con curvatura escalar positiva, y $m \geq 2$.

Para variedades compactas, cuando la constante de Yamabe es no-positiva, ésta está acotada por abajo,

$$Y(M, [g]) \geq \inf_M \{S_g\} Vol(M, g)^{2/m}, \tag{4}$$

como fue señalado por Kobayashi en [14]. Aún más, en este caso, sólo existe una métrica con curvatura escalar constante y volumen unitario en la clase conforme. Por otro lado, cuando la constante de Yamabe es positiva, la desigualdad (4) no es válida, y puede haber varias métricas con curvatura escalar constante y volumen unitario en la clase conforme. En este caso, encontrar una cota inferior es más difícil.

Es posible que el ejemplo más sencillo de una variedad con distintas métricas de curvatura escalar constante y volumen unitario, en una sola clase conforme, sea el siguiente: si (M_1^m, g_1) y (M_2^n, g_2) son variedades Riemannianas con curvatura escalar constante, volumen unitario y $S_{g_1} > 0$, entonces la métrica dada por $\delta^n g_1 + \delta^{-m} g_2$ (δ pequeña y positiva) tiene volumen uno y curvatura escalar constante mayor que Y_{m+n}. En consecuencia, en la clase conforme de $\delta^n g_1 + \delta^{-m} g_2$, existe otra métrica con curvatura escalar constante y volumen unitario, además de la métrica de Yamabe.

A través del estudio de casos como éstos, Akutagawa, Florit y Petean, encontraron que si (M_1^m, g_1) es una variedad cerrada ($m \geq 2$), con curvatura escalar positiva y (M_2^n, g_2) es cualquier variedad cerrada, entonces

$$\lim_{r \to \infty} Y(M \times N, [g_1 + r g_2]) = Y(M \times \mathbf{R}^n, [g + g_E]), \tag{5}$$

donde g_E es la métrica Euclideana en $\mathbf{R}^n$ (Teorema 1.1 en [1]). Haciendo así que la constante de Yamabe $Y(M \times \mathbf{R}^n, [g + g_E])$ sea de alta relevancia en el estudio del invariante de Yamabe de variedades producto. Por ejemplo, de (5) se sigue que el invariante de Yamabe de $M \times N$ está acotado por abajo:

$$Y(M \times \mathbf{R}^n, [g_1 + g_E]) \leq Y(M \times N).$$

De hecho la constante de Yamabe de $Y(S^m \times \mathbf{R}^n, [g + g_E])$ es fundamental para obtener una fórmula de cirugía para el invariante de Yamabe de una variedad compacta en el caso positivo, como se ha mostrado en resultados recientes de B. Ammann, M. Dahl y E. Humbert [3].

Así mismo, fue mediante el caso $n = 1$, que J. Petean encontró una cota inferior para el invariante de Yamabe de $M_1^m \times S^1$ (donde M_1^m es una variedad de Einstein), [23].

El problema de encontrar una métrica con curvatura escalar constante, en una clase conforme dada, para variedades no compactas aún no ha sido resuelto completamente. No obstante, se han publicado varios contraejemplos, así como condiciones y obstrucciones para la existencia de una métrica con curvatura escalar constante en la clase conforme de una métrica dada (cf. en [31]). Los resultados incluyen, *e.g.*, aquellos de K. Akutagawa y B. Botvinnik en [2], donde se estudian variedades completas con orillas cilíndricas y se resuelve de manera afirmativa la existencia de métricas con curvatura escalar constante en una clase conforme, para variedades cilíndricas. Los resultados incluyen, también, algunos casos para variedades completas no-compactas con curvatura escalar positiva. Citamos aquí el trabajo de S. Kim en [12], en el cual introduce la notación

$$\mathbf{Q}(\mathbf{M}) := \inf_{u \in C_0^\infty(M)} \frac{\int_M |\nabla f|^2 dV_{g_M} + 1/a \int_M S_{g_M} f^2 dV_{g_M}}{(\int_M f^p dV_{g_M})^{\frac{2}{p}}},$$

y

$$\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{M}) := \inf_{u \in C_0^\infty(M \setminus B_r)} \frac{\int_M |\nabla f|^2 dV_{g_M} + 1/a \int_M S_{g_M} f^2 dV_{g_M}}{(\int_M f^p dV_{g_M})^{\frac{2}{p}}}$$

(donde r es la distancia de x a un punto fijo $x_0 \in M$, y B_r la bola de radio r y centrada en x_0), y con ello prueba la existencia de una métrica con curvatura escalar constante en la clase conforme de (M, g_M), siempre que $Q(M) < \bar{Q}(M)$. Con este enfoque, sin embargo, queda el problema de calcular $Q(M)$ y $\bar{Q}(M)$.

En la primera parte de esta tesis, demostramos la existencia de un minimizante de Yamabe para $(M^m \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$ $(m, n \geq 2)$. Mostramos primero que la simetrización de Steiner de una función "mejora" el funcional de Yamabe, con respecto a la función original, convirtiendo así a las funciones Steiner-simetrizadas en las mejores candidatas para el minimizante de Yamabe. Luego, junto con este resultado, usamos el hecho de que

$$Y(M^m \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E) < Y_{m+n}$$

(un conocido resultado de Akutagawa, Florit y Petean, [1]) para demostrar que el minimizante de Yamabe existe y es positivo y C^∞.

El hecho de que las simetrizaciones de Steiner "mejoren" el funcional de Yamabe, es consecuencia de lo siguiente.

Teorema 1. Sea $(N, g) = (M^m \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$, y $u \in L_1^2(N)$ positiva. Sea u^* la simetrización de Steiner de u, con respecto de M. Entonces $u^* \in L_1^2(N)$, y

$$||\nabla u^*||_2 \leq ||\nabla u||_2. \tag{6}$$

Usando la desigualdad (6), y el hecho de que la norma se preserva bajo simetrizaciones de Steiner ($||u^*||_s = ||u||_s$, para cada $s > 1$), se sigue el corolario que se enuncia a continuación.

Corolario 2. Considere $(N, g) = (M^m \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$, y el funcional de Yamabe para $2 \leq s \leq p$:

$$Q_s(u) = \frac{a \int_N |\nabla u|^2 dV_g + \int_N S_g u^2 dV_g}{(\int_N u^s dV_g)^{\frac{2}{s}}}.$$

Entonces $Q_s(u^*) \leq Q_s(u)$.

El resultado principal de este trabajo, la existencia del minimizante de Yamabe de $(N, g) = (M^m \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$, es enunciado en el siguiente Teorema.

Teorema 3. Sea $(N, g) = (M^m \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$, con $m, n \geq 2$ y $S_{g_M} > 0$. El minimizante de Yamabe de (N, g) existe, y es positivo y C^∞.

En la segunda parte de esta tesis, estudiamos la existencia de métricas de Einstein y de métricas con curvatura de Ricci positiva en la clase conforme de la variedad producto $(M^m \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$, donde g_M sigue siendo una métrica en una variedad cerrada con curvatura escalar positiva, g_E la métrica Euclideana de $\mathbf{R}^n$, y $n > 1$.

El caso $n = 1$ fue estudiado recientemente por A. Moroianu y L. Ornea [20], quienes mostraron que cuando (M^m, g_M) es compacto y de Einstein, entonces $\left(M^m \times \mathbf{R}, g_M + dt^2\right)$ es conforme a una variedad de Einstein positiva. En este caso, la función conforme f depende sólo de t, y es de la forma $f(t) = \alpha^2 Cosh^{-2}(\beta t + \gamma)$, para algunas constantes reales α, β, γ.

Como primer resultado de la segunda parte de esta tesis, mostramos que cuando $n > 1$, no existe una métrica de Einstein positiva en la clase conforme de $(M^m \times \mathbf{R}^n, g + g_E)$.

Teorema 4. Sea (M^m, g_M) una variedad Riemanniana cerrada, y g_E la métrica Euclideana de $\mathbf{R}^n$, con $n > 1$. Entonces $(M^m \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$ no es conforme a una variedad de Einstein positiva.

Recientemente, han sido estudiadas algunas obstrucciones tensoriales a la existencia de métricas de Einstein en una clase conforme. Véanse por ejemplo los artículos de Listing, [18], [19], y de Gover y Nurowski, [10]. Estas obstrucciones, sin embargo, funcionan sólo bajo algunas hipótesis de no degeneración en el tensor de Weyl, que no aplican en nuestro caso.

Como siguiente resultado, mostramos que en la clase conforme de la variedad producto $(M^m \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$, no existe una métrica con curvatura de Ricci positiva, al menos para funciones del factor $\mathbf{R}^n$ que sean radiales.

Teorema 5. Sea (M^m, g_M) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión m. Considere $(\mathbf{R}^n, g_E)$, con g_E la métrica Euclideana de $\mathbf{R}^n$. Entonces, para $n > 1$, no existe una función suave, integrable, radial y positiva, $\varphi : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}^+$, tal que, $(M^m \times \mathbf{R}^n, \varphi(g_M + g_E))$ tenga curvatura de Ricci positiva.

Nos parece razonable creer que este resultado podría extenderse de una función radial de $\mathbf{R}^n$ a cualquier factor conforme. La desigualdad $n > 1$ es estricta, debido a los resultados que se mencionaron antes de A. Moroianu y L. Ornea [20], que muestran que si (M^m, g) es una variedad de Einstein, compacta y con constante de Einstein positiva, entonces $\left(M^m \times \mathbf{R}, g + dt^2\right)$ es conforme a una variedad de Einstein positiva.

Como se mencionó antes, los conjuntos de métricas de Einstein, o de métricas con curvatura de Ricci positiva, en una clase conforme, han sido estudiados recientemente en distintos contextos. Sin embargo, nuestro interés por la existencia de métricas con curvatura de Ricci positiva en la clase conforme de $(M^m \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$, fue motivado originalmente por algunos resultados recientes sobre las constantes de Yamabe, así como por la relevancia de la constante de Yamabe de $(M^m \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$.

Mediante condiciones en la curvatura de Ricci, es posible obtener cotas inferiores en las constantes de Yamabe positivas. Por un teorema de Obata en [22], sabemos que una métrica de Einstein es la única métrica con curvatura escalar constante, de volumen unitario, en la clase conforme. Esto garantiza que una métrica de Einstein sea siempre una métrica de Yamabe.

Aún más, en [11], S. Ilias probó que si la curvatura de Ricci es postiva ($R_g \geq \lambda g$, con $\lambda > 0$), entonces la constante de Yamabe está acotada por abajo:

$$Y(M, [g]) \geq m\lambda (Vol(M, g))^{\frac{2}{m}}. \tag{7}$$

Por tanto, la existencia de métricas con curvatura de Ricci positiva en la clase conforme de $(M \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$, hubiera dado una manera de obtener cotas inferiores para la constante de Yamabe de $(M \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$, pero los Teoremas 4 y 5 nos dicen que éste no es el caso.

Esta tesis está organizada como se describe a continuación. En el capítulo 1 fijamos la notación y recordamos algunos resultados geométricos y analíticos que se utilizarán a lo largo de la tesis. En el capítulo 2, damos una prueba de que las simetrizaciones de Steiner en $(M \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$, con respecto de M, mejoran el funcional de Yamabe (Teorema 1). Varias de las pruebas y lemas que usamos en la demostración, se deben a Brock y Solynin [9] y a Jean Van Schaftingen [26], con algunas modificaciones menores. Enseguida, utilizando el resultado anterior, damos una demostración de la existencia del minimizante de Yamabe en $(M \times \mathbf{R}^n, [g_M + g_E])$ (Teorema 3). Para la prueba, seguimos las ideas de la demostración clásica del problema de Yamabe para variedades compactas (cf. en [15]), pero tomamos en cuenta la no-compacidad de la situación a través de las técnicas del principio de concentración-compacidad de Lions [16], [17]. En el capítulo 3, demostramos que no existen métricas de Einstein positivas en la clase conforme de $(M \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$, y que tampoco existe una métrica conforme con curvatura de Ricci positiva, al menos para funciones radiales del factor $\mathbf{R}^n$ (Teoremas 4 y 5). Utilizamos para las demostraciones algunas técnicas geométricas más o menos directas.

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de la presente tesis denotaremos por (M, g) a una variedad Riemanniana suave, cerrada (compacta y sin frontera), de dimensión $m > 1$, con métrica g. Excepto donde se indique lo contrario.

Comenzamos con las definiciones de los tensores de curvatura, de curvatura de Ricci, de curvatura escalar y del tensor de Ricci sin traza.

1.1 Curvatura

Definición 6. (cf. en [25]) Consideremos una variedad Riemanniana (M^m, g) de dimensión m y ∇ la conexión Riemanniana. El tensor de curvatura es un $(1, 3)$ tensor que está definido por

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,X}Z \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,
\end{aligned}
$$

para campos vectoriales X, Y, Z en M.

Haciendo uso de la métrica Riemanniana g, podemos convertir al tensor de curvatura en un $(0, 4)$-tensor. A saber, para campos vectoriales X, Y, Z, T en M,

$$R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T).$$

Llamaremos tensor de curvatura de Riemann de g, o simplemente tensor de curvatura, a este campo tensorial. En coordenadas locales tenemos,

$$R(X, Y, Z, T) = R_{ijkl}X^iY^jZ^kT^l.$$

La curvatura de Ricci de g es la traza del tensor de curvatura. Es un $(0, 2)$ tensor y lo denotamos por R_g. En coordenadas locales,

$$R_{g_{ij}} = g^{kl}R_{kilj},$$

donde g^{kl} denota a g^{-1}.

El tensor de Ricci sin traza Z_g, está dado por $Z_g = R_g - \frac{S_g}{m}g$.

Decimos que una variedad es de Einstein si tiene curvatura de Ricci constante, es decir, si R_g es un múltiplo de la métrica. Alternativamente, decimos que es de Einstein si su tensor de Ricci sin traza es cero ($Z_g = 0$). En este caso,

$$R_g = \lambda g,$$

y λ es llamada la constante de Einstein.

La curvatura escalar de g es la traza del tensor de Ricci. Es una función y la denotamos por S_g. En coordenadas locales,

$$S_g = g^{ij} R_{g_{ij}}.$$

En particular, si (M^m, g) es de Einstein, entonces S_g es constante y está relacionada con la constante de Einstein λ por,

$$S_g = \lambda m.$$

1.2 El Laplaciano

Denotamos por $\Delta\varphi = -div(\nabla\varphi)$ al Laplaciano de φ (cf. en [8]). Notemos que es el Laplaciano definido con eigenvalores positivos. En coordenadas locales tenemos,

$$\Delta\varphi = -g^{ij}(\partial_{ij}\varphi - \Gamma_{ij}^k \partial_k \varphi),$$

donde Γ_{ij}^k denota a los símbolos de Christoffel.

Denotamos por $\nabla\varphi$ al gradiente de φ, y por $D^2\varphi$ al Hessiano de φ, dado por

$$D^2\varphi(X, Y) = X(Y\varphi) - (\nabla_X Y)\varphi,$$

para cualesquier X, Y campos vectoriales en la variedad (cf. en [8]).

1.3 Cambios conformes de métrica

Definición 7. (cf. en [8]) Sea M una variedad suave de dimension m. Dos métricas Riemannianas g y $\tilde{g}$ se dicen conformes si existe una función positiva y C^∞, φ, en M, tal que $\tilde{g} = \varphi^{-2} g$.

Denotamos por $[g]$ a la clase conforme de g. Es decir, al conjunto de métricas que son conformes a g.

Consideremos un cambio de métrica conforme, g a $\tilde{g}$. Enseguida escribimos los invariantes asociados a la nueva métrica $\tilde{g}$, en términos de aquéllos asociados a g.

La transformación conforme del tensor de Ricci sin traza, Z_g, bajo esta transformación de la métrica, está dada por (cf. en [22], pág. 255):

$$Z_{\tilde{g}} = Z_g + \frac{m-2}{\varphi}\left(D^2\varphi + \frac{\Delta\varphi}{m} g\right). \tag{1.1}$$

Así mismo, la transformación conforme de la curvatura escalar S_g, bajo esta transformación conforme de la métrica, está dada por (cf. en [22], pág. 255):

$$S_{\tilde{g}} = \varphi^2 S_g - 2(m-1)\varphi\Delta\varphi - m(m-1)|\nabla\varphi|^2. \tag{1.2}$$

En el capítulo 3, en particular en la prueba del Teorema 5, será útil elegir el factor de un modo distinto para simplificar las expresiones. Bajo la transformación conforme de la métrica, $\tilde{g} = e^{2\psi}g$, la transformación conforme del tensor de Ricci está dado por (cf. ([8], pág 59):

$$R_{\tilde{g}} = R_g - (m-2)\left(D^2\psi - d\psi \otimes d\psi\right) + (\Delta\psi - (m-2)|\nabla\psi|^2)g. \qquad (1.3)$$

1.4 Los espacios de Sobolev

Definición 8. (cf. en [7]) Sea (M, g) una variedad Riemanniana C^∞ de dimensión m. Para $s \geq 1$, el espacio de Lebesgue $L^s(M)$ es el conjunto de funciones φ, localmente integrables en M, para las cuales la norma

$$||\varphi||_s = \left(\int_M |u|^s dV_g\right)^{1/s}$$

es finita.

Definimos también el espacio $L^\infty(M)$, como el conjunto de funciones φ, localmente integrables en M, tales que

$$||\varphi||_\infty = sup \;\; ess \;\; |\varphi(x)| < \infty,$$

donde "*sup ess*" denota el supremo escencial, definido por

$$sup \;\; ess \;\; \varphi(x) := \inf\{c \in \mathbf{R} \cup \infty : f(x) \leq c, \;\; para \;\; casi \;\; todo \;\; x \in M\}.$$

Teorema 9. (Desigualdad de Hölder, cf. en [7]) Sean $s, q \geq 1$, con $\frac{1}{s} + \frac{1}{q} = 1$ ($s = 1$ para $q = \infty$ y viceversa), $\varphi \in L^s(M)$, $\psi \in L^q(M)$. Entonces $\varphi\psi \in L^1(M)$ y

$$\int_M |\varphi\psi| dV_g \leq \left(\int_M |\varphi|^s dV_g\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_M |\varphi|^q dV_g\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Denotamos por $C^\infty(M)$ y $C_0^\infty(M)$, a los espacios de funciones suaves, y suaves con soporte compacto en M, respectivamente.

Teorema 10. (cf. en [7]) Si M es completo, entonces $C_0^\infty(M)$ es denso en $L^s(M)$ para $1 \leq s < \infty$.

Definición 11. (cf. en [7]) Dado un número entero no negativo k, el espacio de Sobolev $L_k^s(M)$ es la completación del espacio $\{\varphi \in C^\infty(M) : |\nabla^l\varphi| \in L^s(M), \forall \;\; 0 \leq l \leq k\}$, con la norma

$$||\varphi||_{s,k} = \sum_{l=0}^{k} ||\nabla^l \varphi||_s.$$

El espacio de Hölder $C^{k,\alpha}(M)$ está definido para $0 < \alpha < 1$ como el conjunto de funciones $\varphi \in C^k(M)$ para las que la norma

$$||\varphi||_{C^{k,\alpha}} = ||\varphi||_{C^k} + \sup_{x,y} \frac{|\nabla^k\varphi(x) - \nabla^k\varphi(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

es finita. El supremo es tomado sobre toda $x \neq y$, tal que y esté contenido en una vecindad normal de x. Por otra parte, $\nabla^k \varphi(y)$ es el tensor en x obtenido por transporte paralelo a lo largo de las geodésicas radiales de x a y.

Teorema 12. (Teorema de encaje de Sobolev para $\mathbf{R}^m$, cf. en [7])

1. Si
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s} - \frac{k}{n},$$
entonces $L_k^s(\mathbf{R}^n)$ está encajado en $L^r(\mathbf{R}^n)$, y el encaje $L_k^s(\mathbf{R}^n) \subset L^r(\mathbf{R}^n)$ es continuo. En particular, si $s = 2$, $k = 1$, $r = p = \frac{2n}{n-2}$, entonces tenemos la desigualdad de Sobolev,
$$||\varphi||_p^2 \leq \sigma_n \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla \varphi|^2 dx, \tag{1.4}$$
para todo $\varphi \in L_1^2(\mathbf{R}^n)$. A la mínima constante, σ_n, que satisface (1.4), la llamaremos la constante de Sobolev n-dimensional.

2. Sea $0 < \alpha < 1$. Si
$$\frac{1}{s} \leq \frac{k-\alpha}{n},$$
entonces $L_k^s(\mathbf{R}^n)$ está encajado en $C^\alpha(\mathbf{R}^n)$, y el encaje es continuo.

Teorema 13. (Teorema de Sobolev para variedades compactas, cf. en [7]). Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta de dimensión m (posiblemente con frontera C^1)

1. Si
$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{s} - \frac{k}{m}, \tag{1.5}$$
entonces $L_k^s(M)$ está encajado en $L^r(M)$, y el encaje es continuo.

2. (Teorema de Rellich-Kondrakov). Si la desigualdad de (1.5) es estricta, entonces el encaje $L_k^s(M) \subset L^r(M)$, es un operador compacto.

3. Sea $0 < \alpha < 1$. Si
$$\frac{1}{s} \leq \frac{k-\alpha}{m},$$
entonces $L_k^s(M)$ está encajado de manera continua en $C^\alpha(M)$.

Teorema 14. (cf. en [7]) El encaje de Sobolev funciona también para una variedad completa N, de dimensión n, con curvatura seccional acotada y radio de inyectividad $\delta > 0$. Esto es, si
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s} - \frac{k}{n},$$
entonces $L_k^s(N)$ está encajado en $L^r(N)$, y el encaje es continuo. Aún más, para cualquier $\epsilon > 0$, existe una constante $A_q(\epsilon)$, tal que para cada $\varphi \in L_1^2(N)$, se satisface:
$$||\varphi||_p \leq (\sigma_n + \epsilon)||\nabla\varphi||_2 + A_q(\epsilon)||\varphi||_2, \tag{1.6}$$
con $p = \frac{2n}{n-2}$, n la dimensión de N y σ_n la constante de Sobolev n-dimensional.

Teorema 15. (Regularidad Elíptica Global, cf. en [15]). Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta, y $u \in L^1_{loc}(M)$ (localmente $L^1(M)$) una solución débil para

$$\Delta u = f.$$

1. Si $f \in L^s_k(M)$, entonces $u \in L^s_{k+2}$, y
$$||u||_{s,k+2} \leq C\left(||\Delta u||_{s,k} + ||u||_s\right).$$

2. Si $f \in C^{k,\alpha}$, entonces $u \in C^{k+2,\alpha}(M)$, y
$$||u||_{C^{k+2,\alpha}} \leq C(||\Delta u||_{C^{k,\alpha}} + ||u||_{C^\alpha}).$$

Teorema 16. (Principio del Máximo Fuerte, cf. en [15]). Sea h una función suave y no negativa en una variedad conexa, y $u \in C^2(M)$ tal que se satisfaga

$$(\Delta + h)u \geq 0.$$

Si u alcanza su mínimo u_{min}, y $u_{min} \leq 0$, entonces u es constante en M.

Teorema 17. (Trudinger, cf. en [29]). Sea (N, g), una variedad Riemanniana de dimensión n, y u una solución $L^2_1(N)$, de una ecuación de la forma

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u - Su = -\tilde{S}u^{\frac{n+2}{n-2}},$$

donde S es una función en $C^\infty(N)$ y $\tilde{S}$ una constante. Entonces $u \in C^\infty(N)$.

1.5 Simetrizaciones de Steiner

Consideremos $(N, g) = (M^m \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$, donde (M^m, g_M) es una variedad Riemanniana cerrada y g_E la métrica Euclideana. En el transcurso de esta tesis nos referiremos a las simetrizaciones de Steiner en (N, g), con respecto a M, simplemente como simetrizaciones de Steiner. Dada una función positiva y medible, $u : N \to \mathbf{R}$, la simetrización de Steiner de u será una función $u^* : N \to \mathbf{R}$ tal que $\forall x \in M$, $u(x, \cdot) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es una función positiva, radial y decreciente, tal que $||u^*||_s = ||u||_s$, para $s \geq 1$. Enseguida, damos los detalles de su definición. Nos basamos en [9] y en [26].

Definimos primero las simetrizaciones de Steiner para conjuntos. Sea U un conjunto medible en (N, g), definimos su simetrización de Steiner U^* como sigue.

Para cada $x_0 \in M$, si

$$Vol_{g_E}(U \cap (\{x_0\} \times \mathbf{R}^n)) > 0,$$

entonces

$$(U^* \cap (\{x_0\} \times \mathbf{R}^n)) = \begin{cases} \{x_0\} \times B_\rho(0), & si \;\; U \;\; es \;\; abierto, \\ \{x_0\} \times \bar{B}_\rho(0), & si \;\; U \;\; es \;\; compacto, \end{cases} \tag{1.7}$$

donde $B_\rho(0)$ es una bola abierta en $\mathbf{R}^n$, de radio $\rho > 0$, centrada en el origen, y ρ es tal que

$$Vol_{g_E}(U \cap (\{x_0\} \times \mathbf{R}^n)) = Vol_{g_E}(B_0(\rho)).$$

En particular, ρ depende de x_0.

Por otro lado, si U es medible, pero no es abierto ni compacto, entonces los conjuntos $U^* \cap (\{x_0\} \times \mathbf{R}^n)$ están definidos en el sentido de casi en todas partes por alguna opción de (1.7). Finalmente, si $Vol_{g_E}(U \cap (\{x_0\} \times \mathbf{R}^n)) = 0$, entonces $U^* \cap (\{x_0\} \times \mathbf{R}^n)$ es vacío o el punto $(x_0, 0)$, de acuerdo a si $U \cap (\{x_0\} \times \mathbf{R}^n)$ es vacío o no.

No es difícil ver que para cualquier conjunto A, $B \subset N$,

$$A \subset B \Rightarrow A^* \subset B^* \tag{1.8}$$

y que para subconjuntos medibles $A \subset B \subset N$,

$$Vol_g(B^* \backslash A^*) = Vol_g(B \backslash A). \tag{1.9}$$

En adelante, denotaremos al conjunto $\{x \in N | u(x) > c\}$, simplemente por $\{u > c\}$.

Definimos ahora las simetrizaciones de Steiner para funciones. Considere las funciones medibles $u : N \to \mathbf{R}$ para las que

$$Vol_g(\{u > c\}) < \infty, \tag{1.10}$$

$\forall c > \inf u$. Notemos que $L^s(N)$, $L_1^s(N)$ y $C_0(N)$ satisfacen (1.10), $\forall c > 0$.

Para una función medible $u : N \to \mathbf{R}^+$ que satisface (1.10), su simetrización de Steiner está definida como sigue. Sea $y \in N$, entonces

$$u^*(y) = \sup\{c \in \mathbf{R} | y \in \{u > c\}^*\}.$$

Se sigue que para toda $c \in \mathbf{R}$,

$$\{u > c\}^* = \{u^* > c\}. \tag{1.11}$$

Una propiedad importante de las simetrizaciones de Steiner es que son no-expansivas.

Lema 18. Dado $1 \leq s < \infty$, tenemos

$$||u^* - v^*||_s \leq ||u - v||_s \tag{1.12}$$

Demostración. El resultado del lema se sigue de las ecuaciones (1.9), (1.11) y de la igualdad

$$\int_N |u - v|^s dV_g = \int_{\{\sigma \leq \tau\}} \big(Vol_g\left(\{v > \tau\} \setminus \{u > \sigma\}\right)$$
$$+Vol_g\left(\{u > \tau\} \setminus \{v > \sigma\}\right)\big) \;\; s(s-1)|\sigma - \tau|^{s-2} d\sigma d\tau.$$

□

1.6 Polarizaciones

Sea Σ algún hiperplano afín $(n-1)$ dimensional en $\mathbf{R}^n$. Consideremos $M^m \times \Sigma$ y supongamos que H es uno de los espacios abiertos en los que $N = M^m \times \mathbf{R}^n$ es dividido por $M^m \times \Sigma$. Llamaremos a H un polarizador, y denotaremos a su complemento en N por H^c. Denotemos por $\bar{x}$ a la reflexión de x con respecto de $M^m \times \Sigma$. Esto es, para $x = (a, b) \in M^m \times \mathbf{R}^n$,

$$\bar{x} = (a, b^{\Sigma}),$$

donde b^{Σ} denota la reflexión de $b \in \mathbf{R}^n$, a través del hiperplano $\Sigma \subset \mathbf{R}^n$, que define a H.

La polarización de una función es un reacomodo de ésta con respecto a un polarizador H. Las polarizaciones tienen la ventaja de ser reacomodos más sencillos que las simetrizaciones de Steiner y por lo tanto, más manejables. En el capítulo 2 probamos que es posible aproximar una simetrización de Steiner por una sucesión de polarizaciones. Enseguida, definimos la polarización de una función y anotamos algunas de sus propiedades. Nos basamos en [9] y en [26].

Si u es medible, definimos su polarización con respecto a un polarizador H, u^H, por

$$u^H(x) = \begin{cases} \max\{u(x), u(\bar{x})\} & si \quad x \in H, \\ \min\{u(x), u(\bar{x})\} & si \quad x \in H^c. \end{cases} \tag{1.13}$$

En adelante, denotaremos por $L^s_{1+}(N)$ al conjunto de funciones positivas en $L^s_1(N)$, y por $C_{0+}(N)$ al conjunto de funciones continuas y positivas con soporte compacto.

Una propiedad muy útil de las polarizaciones es que las s-normas de los gradientes de una función $u \in L^s_1(M \times \mathbf{R}^n)$, no cambian bajo polarizaciones, como se muestra en el siguiente lema.

Lema 19. Sea $u \in L^s_{1+}(N)$, $(1 \leq s \leq \infty)$. Entonces, para cualquier polarizador H, $u^H \in L^s_{1+}(N)$. Además, $|\nabla u|$ y $|\nabla u^H|$ son reacomodos uno de otro. En particular, tenemos

$$||\nabla u^H||_s = ||\nabla u||_s \tag{1.14}$$

Demostración. Para demostrar las afirmaciones del lema, definimos las siguientes regiones en N,

$$\begin{aligned} R_1 &= \{x \in N : u(x) > u(\bar{x})\} \cap H, \\ R_2 &= \{x \in N : u(x) \leq u(\bar{x})\} \cap H, \\ R_3 &= \{x \in N : u(x) > u(\bar{x})\} \cap H^c, \\ R_4 &= \{x \in N : u(x) \leq u(\bar{x})\} \cap H^c, \end{aligned} \tag{1.15}$$

y observamos que $u^H = u$ en R_1 y R_4. Así, tenemos

$$\int_{R_1 \cup R_4} |\nabla u^H|^s dV_g = \int_{R_1 \cup R_4} |\nabla u|^s dV_g.$$

Notamos también que $\int_{R_3} |\nabla u^H|^s dV_g = \int_{R_2} |\nabla u|^s dV_g$ y $\int_{R_2} |\nabla u^H|^s dV_g = \int_{R_3} |\nabla u|^s dV_g$. Y así, la afirmación se sigue:

$$\int_N |\nabla u^H|^s dV_g = \int_{R_1 \cup R_4} |\nabla u^H|^s dV_g + \int_{R_2} |\nabla u^H|^s dV_g + \int_{R_3} |\nabla u^H|^s dV_g$$

$$= \int_{R_1 \cup R_4} |\nabla u|^s dV_g + \int_{R_3} |\nabla u|^s dV_g + \int_{R_2} |\nabla u|^s dV_g = \int_N |\nabla u|^s dV_g.$$

□

Observación 20. Siguiendo el esquema de la prueba del lema 19, es posible demostrar también que $||u||_s = ||u^H||_s$, para cualquier $1 \leq s \leq \infty$.

Observación 21. Las polarizaciones son no-expansivas (para $u,v \in L^s(N)$, $1 \leq s \leq \infty$, $||u^H - v^H||_s \leq ||u - v||_s$).

Capítulo 2

El minimizante de Yamabe de $(M^m \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$

Sea $(N, g) = (M^m \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E)$, donde (M^m, g_M) es una variedad cerrada con curvatura escalar positiva, g_E la métrica Euclideana y $m, n \geq 2$. En este capítulo probamos la existencia del minimizante de Yamabe para (N, g). Probamos también que para el minimizante de Yamabe de (N, g), la dependencia del factor $\mathbf{R}^n$ es radial.

Dividimos el capítulo en dos secciones. En la primera, mostramos que la simetrización de Steiner en (N, g) de una función, "mejora" el funcional de Yamabe, con respecto a la función original (corolario 2). Este resultado convierte a las funciones Steiner-simetrizadas en las mejores candidatas para el minimizante de Yamabe.

En la segunda sección, utilizamos el resultado anterior, junto con otras particularidades de (N, g), para demostrar que el minimizante de Yamabe existe, es positivo y es C^∞ (Teorema 3).

Una vez demostrada la existencia, se sigue del corolario 2 que, para el minimizante de Yamabe de (N, g), la dependencia del factor $\mathbf{R}^n$ es radial.

2.1 Approximación de simetrizaciones de Steiner por polarizaciones

En esta sección mostraremos que cualquier simetrización de Steiner, u^*, de una función u, puede ser aproximada por una sucesión de polarizaciones iteradas de u, $\{u^{H_i}\}$. Para hacerlo, mostraremos primero que las sucesiones de polarizaciones iteradas $\{u^{H_i}\}$ son secuencialmente compactas. Después, estableceremos algunas condiciones para la convergencia de una sucesión de polarizaciones iteradas de u, $\{u^{H_i}\}$, a la simetrización de Steiner de u, u^*.

Comenzamos esta sección uniendo los conceptos de las simetrizaciones de Steiner con los conceptos de las polarizaciones, para definir un conjunto especial de polarizadores en $N = M \times \mathbf{R}^n$. Sea Σ un hiperplano afín $(n-1)$ dimensional en $\mathbf{R}^n$. Consideremos $M^m \times \Sigma$ y sea H uno de los espacios abiertos en los que $N = M^m \times \mathbf{R}^n$ es dividido por $M^m \times \Sigma$. Recordemos que llamamos a H un polarizador. En adelante, denotaremos por $\mathbf{H}$ al conjunto de todos los polarizadores H, y por $\mathbf{H_0}$ al conjunto de todos los polarizadores $H \in \mathbf{H}$, tales que $M \times \{0\} \subset H$.

Observación 22. Se sigue de la definición de polarización, de la definición de $\mathbf{H}_0$, y de la simetría de las simetrizaciones de Steiner, que $u = u^*$, si, y sólo si, para cualquier polarizador $H \in \mathbf{H}_0$, $u = u^H$.

Otro hecho que hace de $\mathbf{H_0}$ un conjunto especial, es que siempre existe un polarizador $H \in \mathbf{H_0}$, tal que u^H es estrictamente más cercano a u^* de lo que u lo es.

Lema 23. Sea $u \in C_{0+}(N)$. Si $u \neq u^*$, entonces existe un polarizador $H \in \mathbf{H}_0$, tal que para cada $1 \leq s < \infty$,

$$||u^H - u^*||_s < ||u - u^*||_s.$$

Demostración. Primero, por la no expansividad de las polarizaciones, para todo $x \in N$,

$$|u(x) - u^*(x)|^s + |u(\bar{x}) - u^*(\bar{x})|^s \geq |u^H(x) - u^*(x)|^s + |u^H(x) - u^*(\bar{x})|^s. \quad (2.1)$$

Por otro lado, puesto que $u \neq u^*$, entonces

$$\{u > c\}\Delta\{u^* > c\} \neq \phi,$$

para algún $c > 0$. Luego, podemos escoger un punto $y \in \{u^* > c\}\backslash\{u > c\}$ y un polarizador $H \in \mathbf{H_0}$, tales que $\bar{y} \in \{u > c\}\backslash\{u^* > c\}$, donde $\bar{y}$ denota la reflexión por H de y (la reflexión con respecto a $M \times \Sigma$, donde Σ es el hiperplano que define a H).

Entonces, para una vecindad de y lo suficientemente pequeña, $W_y \subset \{u^* > c\}\backslash\{u > c\} \cap H$, tenemos que ${W_y}^H \subset \{u > c\}\backslash\{u^* > c\}$, donde hemos denotado por ${W_y}^H$ la reflexión de W_y, por H. Por tanto, $\forall x \in W_y$ $(\bar{x} \in {W_y}^H)$,

$$u^H(x) = u(\bar{x}) > c \geq u^*(\bar{x})$$

y

$$u^*(x) > c \geq u(x) = u^H(\bar{x}).$$

Procediendo por casos, tenemos, para $x \in W_y$ y $s \geq 1$,

$$|u(x) - u^*(x)|^s + |u(\bar{x}) - u^*(\bar{x})|^s > |u^H(x) - u^*(x)|^s + |u^H(x) - u^*(\bar{x})|^s. \quad (2.2)$$

Finalmente, integrando (2.2) sobre W_y y (2.1) sobre $H\backslash W_y$, obtenemos

$$||u^H - u^*||_s < ||u - u^*||_s.$$

□

Demostramos ahora que para una sucesión de polarizaciones iteradas de una función u, $\{u_k\}$ $(u_k = u^{H_1 \dots H_k})$, es suficiente que los polarizadores satisfagan $\{H_i\}_{i \leq k} \subset \mathbf{H}_0$, para garantizar la existencia de una función $f \in C_{0+}(N)$, tal que alguna subsucesión de $\{u_k\}$ converja a f.

Lema 24. Sea $u \in C_{0+}(N)$. Sea $\{u_k\}$ una sucesión de polarizaciones iteradas de u, con su respectiva sucesión de polarizadores $\{H_k\} \subset \mathbf{H}_0$, ($u_k = u^{H_1 \dots H_k}$). Entonces, existe una función $f \in C_{0+}(N)$, y una subsucesión $\{u_{k_j}\}$ de $\{u_k\}$, tal que, para cada s, ($1 \leq s < \infty$),

$$\lim_{j \to \infty} ||f - u_{k_j}||_s = 0.$$

Demostración. Este lema se sigue de una aplicación directa del Teorema de *Arzela-Ascoli* (cf. en [25]). Por tanto, para concluir que la sucesión $\{u_k\}$ es compacta, necesitamos probar que $\{u_k\}$ es equiacotada, equicontinua y que los soportes están uniformemente acotados.

1. La sucesión $\{u_k\}$ es equiacotada.

   Puesto que $||u||_s = ||u^H||_s$, para cualquier polarizador $H \subset \mathbf{H}_0$ (observación 20), se sigue que $||u||_s = ||u_k||_s$ para k finito. Así, las funciones u_k son equiacotadas para toda k.

2. Las funciones $\{u_k\}$ son equicontinuas.

   Dado $\delta > 0$, considere el módulo de continuidad de una función u,

   $$w_u(\delta) = \sup_{x,y \in N} \{u(x) - u(y) | d(x,y) \leq \delta\}.$$

   Dado $\delta > 0$, sea $B_\delta(y_0)$ cualquier bola en el dominio de u, tal que

   $$w_u(\delta) = \sup_{B_\delta(y_0)} \{u(x) - u(y)\}.$$

   Dada cualquier polarización $H \subset \mathbf{H}_0$, probaremos que $w_{u^H}(\delta) \leq w_u(\delta)$.

   Por simplicidad, definimos primero la reflexión de $u(x)$ por H, $v(x) := u(\bar{x})$. Procedemos por casos.

   Primero, supongamos que $B_\delta(y_0) \subset H$. Como u es continua, vemos que no pueden existir $x_M, x_m \in B_\delta(y_0)$ $(u(x_M) > u(x_m))$ tales que

   $$u^H(x_M) - u^H(x_m) > w_u.$$

   Sabemos que,

   (a) Si $u^H(x_M) = v(x_M)$ y $u^H(x_m) = v(x_m)$, entonces

   $$u^H(x_M) - u^H(x_m) = v(x_M) - v(x_m) \leq w_u.$$

   (b) Si $u^H(x_M) = v(x_M)$ y $u^H(x_m) = u(x_m)$, entonces $u(x_m) \geq v(x_m)$, y por tanto,

   $$u^H(x_M) - u^H(x_m) = v(x_M) - u(x_m) \leq v(x_M) - v(x_m) \leq w_u.$$

   (c) Si $u^H(x_M) = u(x_M)$ y $u^H(x_m) = u(x_m)$, entonces

   $$u^H(x_M) - u^H(x_m) = u(x_M) - u(x_m) \leq w_u.$$

(d) Si $u^H(x_M) = u(x_M)$ y $u^H(x_m) = v(x_m)$, entonces $v(x_m) \geq u(x_m)$, y por tanto,

$$u^H(x_M) - u^H(x_m) = u(x_M) - v(x_m) \leq u(x_M) - u(x_m) \leq w_u.$$

Por lo tanto, $|u^H(x_1) - u^H(x_2)| \leq w_u$, $\forall x_1, x_2 \in B_\delta(y_0)$. Esto es, $w_{u^H}(\delta) \leq w_u(\delta)$.

Segundo, para el caso en el que $B_\delta(y_0) \subset H^c$, procedemos de manera similar.

Por último, si $B_\delta(y_0) \cap H \neq \phi$ y $B_\delta(y_0) \cap H^c \neq \phi$, entonces, notamos que $\forall x \in B_\delta(y_0)$, tanto $u(x)$ como $v(x)$ pertenecen a $u\left(B_\delta(y_0)\right)$. Por tanto,

$$w_u \geq u^H(x_M) - u^H(x_m).$$

Se sigue entonces que

$$w_{u^H} \leq w_u,$$

para cualquier caso.

Por tanto, procediendo por inducción, se obtiene $w_{u_k} \leq w_u$, $\forall k \geq 1$. Finalmente, puesto que $u \in C_{0+}(N)$, entonces u es uniformemente continua y por lo tanto, la sucesión $\{u_k\}$ es equicontinua.

3. Para todo k, u_k tiene su soporte dentro de un mismo compacto $K \subset N$.

   En efecto, como $u \in C_{0+}(N)$, entonces existe algún $R > 0$, y algún $y_0 \in N$, tal que *Supp* $u \subseteq B_R(y_0)$. Aún más,

$$\textit{Supp} \quad u \subseteq B_R(y_0), \quad \text{implica que} \quad \textit{Supp} \quad u^H \subseteq B_R(y_0)^H = B_R(y_0),$$

   puesto que las polarizaciones son monótonas. Se sigue entonces que

$$\textit{Supp} \quad u_k \subseteq B_R(y_0),$$

   para cualquier $k \geq 1$.

Concluimos por el Teorema de *Arzela-Ascoli* que existe alguna $f \in C_{0+}(N)$, tal que existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}$ de $\{u_k\}$, y que $u_{k_j} \to f$.

□

Construiremos ahora una sucesión de polarizaciones de $u \in C_{0+}(N)$, que converja a u^*. Sea $1 \leq s < \infty$. Procedemos de manera inductiva.

Sea $u_0 = u$. Para elegir $H_{k+1} \in \mathbf{H_0}$, consideramos

$$\alpha_k = \sup_{H \in \mathbf{H_0}} \{||u_k - u^*||_s - ||u_k^H - u^*||_s\}.$$

Por el lema 23, sabemos que $\alpha_k > 0$, si $u_k \neq u^*$. Ahora, para algún λ fijo $(0 < \lambda < 1)$, tomamos ϵ_k, $0 < \epsilon_k < \alpha_k(1-\lambda)$. Notemos que como α_k es un supremo, siempre podemos elegir algún $H_{k+1} \in \mathbf{H_0}$, de modo que,

$$0 < \alpha_k < ||u_k - u^*||_s - ||u_k^{H_{k+1}} - u^*||_s + \epsilon_k < ||u_k - u^*||_s - ||u_k^{H_{k+1}} - u^*||_s + \alpha_k(1-\lambda).$$

Por tanto,

$$\lambda \sup_{H \in \mathbf{H_0}} \{||u_k - u^*||_s - ||u_k^H - u^*||_s\} < ||u_k - u^*||_s - ||u_k^{H_{k+1}} - u^*||_s. \qquad (2.3)$$

Enseguida probamos que, si una sucesión de polarizaciones de u satisface (2.3), entonces converge a u^*.

Lema 25. Sea $u \in C_{0+}(N)$. Sea $\{u_k\}$ una sucesión de polarizaciones iteradas de u, tal que la ecuación (2.3) se satisface. Entonces, $u_k \to u^*$ para cualquier s-norma $(1 \leq s < \infty)$.

Demostración. Se sigue del lema 24 que existe alguna $f \in C_{0+}(N)$, y alguna subsucesión $\{u_{k_j}\}$ de $\{u_k\}$, tal que $\{u_{k_j}\}$ converge a f, para cualquier norma L^s. Ahora, como $u^* = (u^*)^H$ (observación 22),

$$||u^* - f^*||_s = \lim_{j \to \infty} ||u_{k_j}^* - f^*||_s,$$

y como la simetrización de Steiner es un reacomodo no-expansivo, tenemos

$$||u_{k_j}^* - f^*||_s \leq ||u_{k_j} - f||_s.$$

Se sigue que

$$||u^* - f^*||_s = \lim_{j \to \infty} ||u_{k_j}^* - f^*||_s \leq \lim_{j \to \infty} ||u_{k_j} - f||_s = 0,$$

esto es, $f^* = u^*$.

Probaremos ahora que $f = f^* = u^*$. Primero, por la ecuación (2.3), para cualquier polarizador $H \in \mathbf{H_0}$ tenemos,

$$||u_{k_j+1} - u^*||_s \leq ||u_{k_j} - u^*||_s + \lambda(||u_{k_j}^H - u^*||_s - ||u_{k_j} - u^*||_s)$$

$$= (1 - \lambda)||u_{k_j} - u^*||_s + \lambda||u_{k_j}^H - u^*||_s \leq ||u_{k_j} - u^*||_s, \qquad (2.4)$$

puesto que $\lambda(||u_{k_j}^H - u^*||_s - ||u_{k_j} - u^*||_s) \leq 0$, por la no-expansividad de las polarizaciones.

Por tanto, haciendo $k_j \to \infty$ en (2.4) tenemos,

$$||f - u^*||_s \leq (1 - \lambda)||f - u^*||_s + \lambda||f^H - u^*||_s \leq ||f - u^*||_s,$$

esto es

$$||f - u^*||_s = ||f^H - u^*||_s. \qquad (2.5)$$

Ahora, puesto que $f^* = u^*$, entonces $||f - f^*||_s = ||f^H - f^*||_s$.

Así, no podemos tener $f \neq u^* = f^*$, porque en ese caso,

$$||f - f^*||_s > ||f^{H_l} - f^*||_s,$$

para algún $H_l \in \mathbf{H_0}$, por el lema 23, lo cual contradice la ecuación (2.5). Entonces, sólo podemos tener que $\{u_{k_j}\}$ converge a u^* en $L^s(N)$.

Finalmente, de nuevo por la no-expansividad de las polarizaciones, notamos que

$$\lim_{j \to \infty} ||u_j - u^*||_s \leq \lim_{j \to \infty} ||u_{k_j} - u^*||_s = 0.$$

□

Por último, como $C_{0+}(N)$ es denso en $L^s_+(N)$ $(1 \leq s < \infty)$, mostramos que los mismos resultados del lema 25 se satisfacen para funciones en $L^s_+(N)$.

Lema 26. Sea $u \in L^s_+(N)$ $(1 \leq s < \infty)$. Entonces, existe una sucesión de polarizadores $\{H_k\} \subset \mathbf{H}_0$, tales que $\{u_k\} = \{u^{H_1 \cdots H_k}\}$, converge a u^* en $L^s_+(N)$.

Demostración. Primero, recordemos que existe un subconjunto numerable $V \subset C_{0+}(N)$ que es denso en $L^s_+(N)$, ya que N es completo. Enseguida, escogemos una sucesión $\{H_k\}$, para la cual (2.3) se satisface para toda $f \in V$. Entonces, tomamos cualquier $f \in V$, lo suficientemente cerca de u, $||u - f||_s < \epsilon/3$. Por contracción, tenemos

$$||u_k - u^*||_s \leq ||u_k - f_k||_s + ||f_k - f^*||_s + ||f^* - u^*||_s,$$

donde $f_k = f^{H_1 \cdots H_k}$. Resta mostrar que la parte derecha está acotada por ϵ.

Primero, por la no-expansividad de la polarización, tenemos que $||u_k - f_k||_s \leq ||u - f||_s$. Segundo, por la no-expansividad de la simetrización de Steiner tenemos $||f^* - u^*||_s \leq ||f - u||_s$. Entonces, puesto que $f \in V \subset C_{0+}(N)$, eligiendo k lo suficientemente grande, tenemos $||f_k - f^*||_s < \epsilon/3$, y entonces

$$||u_k - u^*||_s \leq ||u_k - f_k||_s + ||f_k - f^*||_s + ||f^* - u^*||_s < \epsilon,$$

como se quería mostrar. □

2.2 Demostración del Teorema 1

Ahora estamos en posición de demostrar el Teorema 1 y concluir que $||\nabla u^*||_2 \leq ||\nabla u||_2$.

Demostración. (del Teorema 1)

Sea $u \in L^2_{1+}(N)$, y consideremos la sucesión $\{u_k\}$ de polarizaciones de u, dada por el lema 26. Entonces,

$$\lim_{k \to \infty} ||u_k - u^*||_2 = 0.$$

Además, $||\nabla u^H||_2 = ||\nabla u||_2$, por el lema 19. Entonces, existe alguna función $f \in L^2_1(N)$, y una subsucesión $\{u_{k_j}\}$ de $\{u_k\}$, tal que f es el límite débil de u_{k_j} en $L^2_{1+}(N)$.

Desde luego, esto significa que $f = u^*$. Finalmente, como la norma es débilmente semicontinua por abajo y puesto que $u_{k_j} \rightharpoonup u^*$ débilmente en $L^2_1(N)$, entonces

$$||\nabla u^*||_2 \leq \liminf_{j \to \infty} ||\nabla u_{k_j}||_2.$$

Por tanto

$$||\nabla u^*||_2 \leq ||\nabla u||_2,$$

puesto que $||\nabla u^H||_2 = ||\nabla u||_2$ para toda H (lema 19).

□

El corolario 2 es una consecuencia directa del Teorema 1 y del hecho de que las simetrizaciones de Steiner preservan las s-normas,

$$||u||_s = ||u^*||_s,$$

para $1 \leq s < \infty$.

2.3 Demostración del Teorema 3

En esta sección demostramos el Teorema 3. El esquema básico de la demostración es el siguiente. Primero notamos que la ecuación subcrítica de Yamabe para (N, g),

$$a\Delta u + S_g u^2 = \lambda_s u^s, \tag{2.6}$$

donde S_g es la curvatura escalar de (N, g), $a = \frac{4(n+m-1)}{n+m-2}$ y λ_s una constante positiva, puede ser resuelta para $s < p = \frac{2(n+m)}{n+m-2}$ por una función positiva y C^∞, u_s. Hacemos esto mediante el uso de las técnicas para el problema de Yamabe en el caso compacto (cf. en [15]), y aquéllas del principio de concentración-compacidad de Lions, ([16], [17]). Después, para la familia de funciones solución $\{u_s\}$ ($s < p$, s suficientemente cerca de p), encontramos una cota uniforme en $L^r(N)$ (para algún $r > p$). Luego, usando teoría de regularidad estándar, y el Teorema de encaje de Sobolev, notamos que las funciones $\{u_s\}$ están acotadas en $C^{2,\alpha}(K_R)$, para cada subconjunto compacto $K_R = M \times B_R \subset (N, g)$, y que, por tanto, $\{u_s\}$ tiene una subsucesión que converge de manera uniforme en cada subconjunto compacto K_R, conforme $s \to p$, por el Teorema de Arzela-Ascoli. Como paso final, usamos de nuevo las técnicas del principio de concentración-compacidad para probar que $\{u_s\}$ tiene una subsucesión que converge de manera uniforme, en todo N, a una función u, positiva y C^∞ que resuelve la ecuación de Yamabe (ecuación (2.6) con $s = p$).

2.3.1 El problema subcrítico para (N, g)

En esta sección probamos que la ecuación (2.6) tiene una solución positiva y suave, u_s, para $s < p$, s lo suficientemente cerca de p.

Sea

$$Q_s(\varphi) = \frac{\int_N (a|\nabla\varphi|^2 + S_g\varphi^2)dV_g}{(\int_N \varphi^s dV_g)^{2/s}}, \tag{2.7}$$

y

$$\lambda_s = \inf\{Q_s(\varphi) | \varphi \in L_1^2(M) \cap L^p(N), \varphi > 0\}. \tag{2.8}$$

Ahora, fijemos $s < p$, y elijamos una sucesión minimizante $\{u_i\}$ de funciones positivas en $L_1^2(M) \cap L^p(N)$, tal que $Q_s(u_i) \to \lambda_s$, y que $||u_i||_s = 1$, $\forall i$. Recordemos además que, por el Teorema 1, podemos escoger una sucesión minimizante tal que $u_i = u_i^*$.

Enseguida, notamos que

$$||u_i||_{1,2} \leq C_1, \tag{2.9}$$

donde C_1 es una constante, independiente de i y de s. Para probar (2.9) comenzamos con lo siguiente.

Lema 27. Considere el conjunto $\{\lambda_s\}$, $2 \leq s \leq p$, con λ_s definido por la ecuación (2.8). Entonces, λ_s es semicontinua por arriba en p, como función de s (para cualquier $\epsilon > 0$, existe un δ tal que $\lambda_s \leq \lambda_p + \epsilon$, para todo $s \in (p - \delta, p)$).

Demostración. Sea $\varphi \in L_1^2(N)$. Dados $s', s \leq p$, puesto que

$$Q_s(\varphi) = \frac{a \int_N |\nabla \varphi|^2 dV_g + \int_M S_g \varphi^2 dV_g}{||\varphi||_s^2},$$

entonces

$$Q_s(\varphi) = Q_{s'}(\varphi) \frac{||\varphi||_{s'}^2}{||\varphi||_s^2}. \tag{2.10}$$

Ahora, puesto que λ_p es un ínfimo, dado $\epsilon > 0$ podemos escoger φ_0 tal que

$$\lambda_p + \epsilon > Q_p(\varphi_0). \tag{2.11}$$

Por otro lado, por continuidad de la norma, tenemos, para algún $\delta > 0$,

$$1 - \epsilon \leq \frac{||\varphi_0||_p^2}{||\varphi_0||_s^2} \leq 1 + \epsilon,$$

para todo $s \in (p - \delta, p + \delta)$. Por tanto,

$$\frac{||\varphi_0||_p^2}{||\varphi_0||_s^2} Q_p(\varphi_0) \leq Q_p(\varphi_0)(1 + \epsilon),$$

para todo $s \in (p - \delta, p)$. Entonces, tomando en cuenta la ecuación (2.10), tenemos

$$Q_s(\varphi_0) \leq Q_p(\varphi_0)(1 + \epsilon),$$

y entonces, por (2.11),

$$Q_s(\varphi_0) \leq Q_p(\varphi_0)(1 + \epsilon) < (\lambda_p + \epsilon)(1 + \epsilon).$$

Finalmente, puesto que $\lambda_s \leq Q_s(\varphi_0)$, tenemos

$$\lambda_s < \lambda_p + C\epsilon + \epsilon^2.$$

para todo $s \in (p - \delta, p + \delta)$, con $C = \lambda_p + 1$.

□

Observación 28. De acuerdo a un resultado reciente de Akutagawa, Florit y Petean (Teorema 1.3 en [1]) $\lambda_p = Y(M \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E) < Y(S^{n+m}, g_0) = Y_{m+n}$, cuando M es cerrada, con curvatura escalar positiva y $m, n \geq 2$. Por tanto, puesto que la desigualdad $Y(M \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E) < Y_{m+n}$ es estricta, podemos elegir $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño de modo que $\lambda_p + \epsilon < c < Y_{n+m}$, para algún $c \in \mathbf{R}$. Se sigue entonces, del lema 27, que para algún $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, existe un δ, tal que

$$\lambda_s \leq \lambda_p + \epsilon < Y_{n+m},$$

para cada $s \in (p - \delta, p)$. Esto es

$$\frac{\lambda_s}{Y_{n+m}} < 1, \tag{2.12}$$

para s lo suficientemente cerca de p.

Regresamos ahora a la demostración de (2.9). Notemos que

$$||u_i||_{1,2} = \int_N |\nabla u_i|^2 + \int_N u_i^2 \leq \frac{\lambda_s + 1}{a} + \frac{\lambda_s + 1}{\min_M\{S_g\}}$$
$$\leq \frac{Y_{n+m} + 1}{a} + \frac{Y_{n+m} + 1}{\min_M\{S_g\}} = C_1,$$

para s lo suficientemente cerca de p, por (2.12). Esto es $\{u_i\}$ es $L_1^2(N)$ acotado independientemente de i y de s.

Se sigue entonces del Teorema de Rellich-Kondrakov (cf. en [15]), que para cada compacto $K \subset N$, existe una subsucesión $\{u_{i_k}\} \subset \{u_i\}$ que converge débilmente en $L_1^2(K)$ y fuertemente en $L^s(K)$, a una función que denotaremos por $u_s|_K$.

Procedemos ahora de manera inductiva para construir una función límite u_s definida en todo N. Consideremos los subconjuntos compactos $K_R = M \times B_R \subset N$. Para $R = 1$, consideremos la subsucesión $\{u_{i_k}\} \subset \{u_i\}$ tal que $u_{i_k} \to u_s|_{K_R}$, débilmente en $L_1^2(K_R)$ y fuertemente en $L^s(K)$. De ella, extraemos otra subsucesión $\{u_{i_j}\} \subset \{u_{i_k}\}$ tal que $u_{i_j} \to u_s|_{K_{R+1}}$, débilmente en $L_1^2(K_{R+1})$ y fuertemente en $L^s(K_{R+1})$. Procediendo de manera inductiva, obtenemos la función límite $u_s := lim_{R\to\infty} u_s|_{K_R}$, que está bien definida en todo N.

Aún más, en cada K_R, por la convergencia débil en $L_1^2(K_R)$, tenemos

$$||\nabla u_s|_{K_R}||_2^2 = \lim_{k\to\infty} \int_{K_R} \langle \nabla u_s|_{K_R}, \nabla u_{i_k} \rangle \, dV_g,$$

y esto implica que

$$||\nabla u_s|_{K_R}||_2^2 \leq \limsup_{k\to\infty} ||(\nabla u_{i_k})|_{K_R}||_2^2.$$

Por otro lado, por la convergencia fuerte de u_{i_k} a $u_s|_{K_R}$ en $L^s(K_R)$, y por la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\int_{K_R} u_s|_{K_R}^2 dV_g = \lim_{k\to\infty} \int_{K_R} u_{i_k}^2 dV_g,$$

y así, se sigue que, para cada $R > 0$,

$$\lambda_s \left(\int_{K_R} u_s|_{K_R}^s dV_g \right)^{2/s} \leq \int_{K_R} (a|\nabla u_s|_{K_R}|^2 + S_g u_s|_{K_R}^2) dV_g$$
$$\leq \limsup_{k\to\infty} \int_{K_R} (a|\nabla u_{i_k}|^2 + S_g u_{i_k}^2) dV_g \leq \lim_{k\to\infty} \int_N (a|\nabla u_{i_k}|^2 + S_g u_{i_k}^2) dV_g = \lambda_s. \tag{2.13}$$

Por tanto, para probar que u_s minimiza a Q_s en N, hace falta mostrar que $||u_s||_s = 1$. Para este propósito, introducimos en los siguientes lemas las técnicas del principio de concentración-compacidad, debidas a Lions ([16], [17]).

Lema 29. Considere una sucesión $\{\rho_k\}$ de funciones positivas, tales que $\rho_k = \rho_k^*$, y

$$\int_N \rho_k dV_g = 1.$$

Entonces, existe una subsucesión $\{\rho_{k_j}\} \subset \{\rho_k\}$, y algún α $(0 \leq \alpha \leq 1)$, tales que lo siguiente se satisface: para todo $\epsilon > 0$, existe algún R_ϵ $(0 < R_\epsilon < \infty)$, y algún $j_0 > 1$ tales que

$$\int_{M \times B_{R_\epsilon}} \rho_{k_j} dVg \geq \alpha - \epsilon,$$

$\forall j > j_0$.

Aún más, para cada $R > 0$, dado $\epsilon > 0$, existe algún $j_1 > 1$ tal que

$$\int_{M \times B_R} \rho_{k_j} dVg \leq \alpha + \epsilon,$$

$\forall j > j_1$.

Demostración. Notemos primero que, puesto que $\rho_k = \rho_k^*$ para cada $k > 1$, entonces, para cada R tenemos

$$\sup_{y \in \mathbf{R}^n} \int_{M \times \{y + B_R\}} \rho_k dV_g = \int_{M \times B_R} \rho_k dV_g,$$

donde B_R es la bola de radio R centrada en 0, y $y + B_R$ es la bola de radio R centrada en y. Ahora, consideremos las funciones

$$Q_k(t) = \int_{M \times B_t} \rho_k dV_g.$$

Se sigue que para cada k, $0 \leq Q_k(t) \leq 1$. Así, las funciones $Q_k(t)$ son positivas y uniformemente acotadas en $\mathbf{R}$. Aún más, puesto que, las ρ_k son positivas, las funciones $Q_k(t)$ son crecientes como funciones de t.
Se sigue entonces, de un lema clásico de análisis (véase por ejemplo el lema 2 en [21], p. 221), que existe una subsucesión $\{Q_{k_j}\} \subset \{Q_k\}$, y una función no-negativa $Q(t)$, tal que

$$\lim_{j \to \infty} Q_{k_j}(t) = Q(t),$$

para cada $t \geq 0$.

Ahora, sea $\alpha = \lim_{t \to \infty} Q(t)$. Notemos que $0 \leq \alpha \leq 1$. Además, como $Q(t)$ es no-decreciente, y $\lim_{t \to \infty} Q(t) = \alpha$, entonces, dado $\epsilon > 0$, podemos escoger algún t_ϵ tal que $Q(t_\epsilon) > \alpha - \epsilon$. Desde luego, esto implica que

$$\int_{M \times B_{t_\epsilon}} \rho_{k_j} dV_g \geq \alpha - \epsilon, \tag{2.14}$$

para todo $j > j_0$, con j_0 lo suficientemente grande. Aún más, puesto que $Q(t)$ es no-decreciente, entonces para todo $t > 0$ tenemos $Q(t) \leq \alpha$. Esto implica que

$$\int_{M \times B_t} \rho_{k_j} dV_g \leq \alpha + \epsilon, \tag{2.15}$$

para todo $j > j_1$, con j_1 lo suficientemente grande.

□

Podemos mostrar ahora que dado $\beta \in (2, p)$, los u_k^β se "concentran" en un conjunto compacto.

Lema 30. Considere una sucesión $\{u_k^{b_k}\}$ de funciones positivas ($b_k > 2, \forall k$), tales que $u_k = u_k^*$, y

$$\int_N u_k^{b_k} dV_g = 1,$$

para cada k. Supongamos también que la sucesión $\{u_k\}$ está acotada en $L_1^2(N)$.

Entonces, existe una subsucesión $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$, tal que para cada β ($\beta \in (2, p)$), tenemos que, dado $\epsilon > 0$, existe algún R_ϵ ($0 < R_\epsilon < \infty$), tales que

$$\int_{N \setminus (M \times B_{R_\epsilon})} u_{k_j}^\beta dVg \leq \epsilon,$$

$\forall j > j_0$, para algún $j_0 > 1$.

Demostración. Tomemos $\rho_k = u_k^{b_k}$. Entonces, por el lema 29, tenemos una subsucesión $\{u_{k_j}^{b_{k_j}}\}$ de $\{u_k^{b_k}\}$, y un α, $0 \leq \alpha \leq 1$, tal que, para cada $\epsilon/2 > 0$, existe algún $R_{\epsilon/2}$, tal que

$$\alpha - \epsilon/2 < \int_{M \times B_{R_{\epsilon/2}}} u_j^{b_j} dV_g < \alpha + \epsilon/2, \tag{2.16}$$

para todo $j > j_0$, para algún j_0 (por sencillez, denotaremos $u_{k_j}^{b_{k_j}}$ por $u_j^{b_j}$).

Además, como para todo $R > 0$ tenemos $\int_{M \times B_R} \rho_{k_j} dVg \leq \alpha + \epsilon/2$ (para $j > j_1$, j_1 lo suficientemente grande), entonces, se sigue de (2.16) que para todo compacto K, $K \subset N \setminus M \times B_{R_{\epsilon/2}}$, tenemos

$$\int_K u_j^{b_j} dV_g < \epsilon,$$

para todo $j > j_1$.

Ahora escogemos $R_0 > 0$ tal que $Vol(M \times B_{R_0}) \leq 1$. Entonces, por la desigualdad de Hölder, para toda $y \in B_{R_\epsilon}^c$

$$\int_{M \times \{y + B_{R_0}\}} u_j^2 dV_g \leq \int_{M \times \{y + B_{R_0}\}} u_j^{b_j} dV_g < \epsilon,$$

pues $b_j > 2$, $\forall j$. Ahora, sea $R_1 = R_\epsilon + R_0$, entonces,

$$\sup_{y \in B_{R_1}^c} \int_{M \times \{y + B_{R_0}\}} u_j^2 dV_g < \epsilon. \tag{2.17}$$

Desde luego, podemos hacer $\epsilon \to 0$, haciendo R_ϵ (y por tanto R_1) tender a infinito.

Enseguida, dividimos la demostración en casos.

Caso 1. La sucesión $\{u_j\}$ está acotada en $L^\infty(N)$.

Sea $\beta > 2$. Por el Teorema de encaje de Sobolev, para cualquier $\gamma \in (1, \frac{m+n}{m+n-1})$, existe una constante c_0, independiente de y, tal que

$$\left(\int_{M \times \{y + B_{R_0}\}} u_j^{\beta\gamma} dV_g \right)^{1/\gamma} \leq c_o \int_{M \times \{y + B_{R_0}\}} u_j^\beta + |\nabla(u_j)^\beta| dV_g \tag{2.18}$$

para cualquier $y \in B^c_{R_1}$. Mostramos ahora que el lado derecho está acotado por arriba. Primero, sea $||u_k||_\infty < A$ $(A > 1)$, entonces,

$$\int_{M\times\{y+B_{R_0}\}} u_j^\beta dV_g \le A^{\beta-2}\int_{M\times\{y+B_{R_0}\}} u_j^2 dV_g < A^{\beta-2}\epsilon. \tag{2.19}$$

por (2.17). Por otro lado, como $2 < 2(\beta-1) < \infty$, entonces, por la desigualdad de Hölder, para cualquier $y \in B^c_{R_1}$

$$\begin{aligned}
&\int_{M\times\{y+B_{R_0}\}} \beta|u_j|^{\beta-1}|\nabla u_j| dV_g \\
&\le \beta\left(\int_{M\times\{y+B_{R_0}\}} |u_j|^{2(\beta-1)}dV_g\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{M\times\{y+B_{R_0}\}} |\nabla u_j|^2 dV_g\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le (A^{(\beta-2)}\epsilon^{1/2})C_1,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

donde la última desigualdad se sigue de (2.19) y C_1 es una cota uniforme para $\{u_j\}$ en $L^2_1(N)$. Por tanto, de (2.18), tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{M\times\{y+B_{R_0}\}} u_j^{\beta\gamma} dV_g &\le C_o\left(\int_{M\times\{y+B_{R_0}\}} u_j^\beta + \beta(u_j)^{\beta-1}|\nabla u_j| dV_g\right)^\gamma \\
&\le C_o\left(A^{\beta-2}\epsilon + C_1(A^{(\beta-2)}\epsilon^{1/2})\right)^{\gamma-1}\left(\int_{M\times\{y+B_{R_0}\}} u_j^\beta + \beta(u_j)^{\beta-1}|\nabla u_j| dV_g\right) \\
&\le C_2 A^{(\beta-2)}\epsilon^{(\gamma-1)/2}\left(\int_{M\times\{y+B_{R_0}\}} u_j^\beta + \beta(u_j)^{\beta-1}|\nabla u_j| dV_g\right),
\end{aligned}$$

por (2.19) y (2.20) $(C_2 = \max\{C_0, C_1^{\gamma-1}\})$.

Ahora cubrimos $\mathbf{R}^n \setminus B_{R_1}$ con bolas de radio R_0 de alguna manera en que cualquier punto $y \in (\mathbf{R}^n \setminus B_{R_1})$ no sea cubierto por más de un número prescrito de bolas b. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}
&\int_{N\setminus M\times B_{R_1}} u_j^{\beta\gamma} dV_g \\
&\le b\left(C_2 A^{(\beta-2)}\epsilon^{(\gamma-1)/2}\right)\left(\int_{N\setminus(M\times B_{R_1})} u_j^\beta + \beta(u_j)^{\beta-1}|\nabla u_j| dV_g\right) \\
&\le b\left(C_2 A^{(\beta-2)}\epsilon^{(\gamma-1)/2}\right)(A^{\beta-2}C_1 + C_1 A^{\beta-2}) \\
&\le C_3 A^{2(\beta-2)}\epsilon^{(\gamma-1)/2},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

pues C_1 es una cota uniforme para $\{u_j\}$ en $L^2_1(N)$, y además, se ha elegido $C_3 = 2bC_1C_2$. Finalmente, notando que C_3 no depende de $y \in \mathbf{R}^n$, podemos hacer $\epsilon \to 0$, haciendo R_ϵ (y por tanto R_1) tender a infinito. Esto es, dado $\bar{\beta} \in (2, p)$, para cada $\delta > 0$, podemos encontrar R_δ tal que

$$\int_{N\setminus M\times B_{R_\delta}} u_j^{\bar{\beta}} dV_g < \delta.$$

Esto concluye la prueba del caso 1. Enseguida, retiramos la suposición de que $\{u_j\}$ está acotado en $L^\infty(N)$.

Caso 2. La sucesión $\{u_j\}$ no está acotada en $L^\infty(N)$.

Notamos que para cada $A > 1$, la función $v_j = \min\{u_j, A\}$ está acotada en $L^\infty(N)$, y además satisface las condiciones necesarias para la demostración anterior, de manera que para cada β_1 $(2 < \beta_1 < p)$, dado $\epsilon > 0$, existe, por la ecuación (2.21), algún $R_1 > 0$ tal que

$$\int_{N\setminus M\times B_{R_1}} v_j^{\beta_1} < C_3 A^{2(p-2)}\epsilon. \tag{2.22}$$

donde C_3 es una constante que no depende de A. Tenemos también

$$\int_{N\setminus M\times B_{R_1}} u_j^{\beta_1} dV_g \leq \int_{N\setminus M\times B_{R_1}} v_j^{\beta_1} dV_g + \int_{N\setminus M\times B_{R_1}} (u_j|_{\{u_j>A\}})^{\beta_1} dV_g. \tag{2.23}$$

Enseguida escogemos $\beta_2 \in (\beta_1, p)$. Entonces,

$$A^{\beta_2-\beta_1} \int_{N\setminus M\times B_{R_1}} (u_j|_{\{u_j>A\}})^{\beta_1} dV_g \leq \int_{N\setminus M\times B_{R_1}} (u_j|_{\{u_j>A\}})^{\beta_2} dV_g,$$

se sigue que

$$\int_{N\setminus M\times B_{R_1}} (u_j|_{\{u_j>A\}})^{\beta_1} dV_g \leq \frac{K}{A^{\beta_2-\beta_1}}, \tag{2.24}$$

puesto que $\int_N u_j^{\beta_2} dV_g < K$, para algún $K > 0$, porque u_j está acotado en $L_1^2(N)$ y por tanto en $L^{\beta_2}(N)$, $\beta_2 < p$. Así, de (2.22), (2.23) y (2.24),

$$\int_{N\setminus M\times B_{R_1}} u_j^{\beta_1} < C_3 A^{2(p-2)}\epsilon + \frac{K}{A^{\beta_2-\beta_1}}. \tag{2.25}$$

Entonces, dado $\delta > 0$, podemos escoger primero un número A tal que $\frac{K}{A^{\beta_2-\beta_1}} < \frac{\delta}{2}$, y después escoger $\epsilon > 0$, tal que $C_3 A^{2(p-2)}\epsilon < \frac{\delta}{2}$. Desde luego, para este ϵ existe algún R_1 tal que $\int_{N\setminus M\times B_{R_1}} v_j^{\beta_1} < C_3 A^{2(p-2)}\epsilon$, y entonces, por la ecuación (2.25),

$$\int_{N\setminus M\times B_{R_1}} u_j^{\beta_1} < \delta. \tag{2.26}$$

De aquí se sigue la conclusión del lema.

□

Regresamos ahora a demostrar que $||u_s||_s = 1$. Tomando $b_k = s$, notamos que la sucesión minimizante $\{u_k\}$ satisface las hipótesis del lema 30, puesto que en su construcción asumimos que dicha sucesión estaba simetrizada ($u_k = u_k^*$), y que $||u_k||_s = 1$, para todo $k > 1$. Por otro lado, por la ecuación (2.9), $\{u_k\}$ está uniformemente acotada en $L_1^2(N)$. Así, tomando $\beta = s < p$ en el lema 30, tenemos que para cada $\delta > 0$ existe algún R_1 tal que

$$\int_{N\setminus M\times B_{R_1}} u_j^s dV_g < \delta.$$

Desde luego, esto implica que $\alpha = 1$. Esto es, $||u_s||_s = 1$. Por tanto, u_s es una solución débil para la ecuación (2.6). Se sigue de un resultado de N. Trudinger (Teorema 3 en [29]) que u_s es suave, puesto que es una solución débil de (2.6). Además, por el principio del máximo (cf. en [15]) u_s es positiva, puesto que S_g es positiva.

Resumimos en el lema siguiente lo que acabamos de demostrar.

Lema 31. Para $s \in (2, p)$ lo suficientemente cerca de p (lo suficientemente cerca como para que la ecuación (2.12) se satisfaga), la ecuación (2.6) tiene una solución positiva $u_s \in C^\infty$, tal que $Q_s(u_s) = \lambda_s$, y $||u_s||_s = 1$.

2.3.2 El límite conforme $s \to p$

Investigamos ahora el límite de las funciones u_s, conforme $s \to p$. Mostraremos que las funciones u_s convergen a una función u, que a su vez será el minimizante de Yamabe para (N, g). Mostraremos además que u es positiva y C^∞.

Por el lema 31, tenemos una familia $\{u_s\}$ de funciones que resuelven la ecuación (2.6), para $s < p$, y que son tales que $||u_s||_s = 1$. A continuación, demostraremos que esta familia está acotada uniformemente $C^{2,\alpha}(K_R)$ en cada conjunto compacto $K_R = M \times B_R \subset N$. Haremos esto encontrando primero una cota uniforme para $||u_s||_r$ (para algún $r > p$), y entonces, usando el Teorema de regularidad elíptica (Teorema 15), y el Teorema de encaje de Sobolev (Teorema 13), encontraremos nuestra cota $C^{2,\alpha}(K_R)$. Seguiremos las técnicas de Parker y Lee [15].

Comenzamos demostrando que las funciones $||u_s||$ están acotadas uniformemente en $L^r(N)$, para algún $r > p$, para s cerca de p.

Proposición 32. Dada la colección de funciones del lema (31), $\{u_s\}$, existen algunas constantes $s_0 < p$, $r > p$, y $C > 0$, tales que

$$||u_s||_r \leq C,$$

para todo $s > s_0$.

Demostración. Consideremos la ecuación subcrítica de Yamabe (2.6). Sea $\delta > 0$ y multipliquemos (2.6) por $u_s^{1+2\delta}$. Entonces, integrando sobre N, tenemos

$$a\int_N u_s^{1+2\delta}\Delta u_s dV_g + \int_N S_g u_s^{2+2\delta} dV_g = \int_N \lambda_s u_s^{s+2\delta} dV_g. \tag{2.27}$$

Luego, escribiendo $w = u_s^{1+\delta}$, obtenemos $dw = (1+\delta)u_s^\delta du_s$. Y así, multiplicando ambos lados de (2.27), por $(1+\delta)^2$, aquélla se simplifica a

$$\frac{1+2\delta}{(1+\delta)^2} a \int_N |dw|^2 dV_g = \lambda_s \int_N u_s^{s-2} w^2 dV_g - \int_N S_g w^2 dV_g.$$

Así,

$$\int_N |dw|^2 dV_g \leq \frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta}\frac{\lambda_s}{a}\int_N u_s^{s-2} w^2 dV_g. \tag{2.28}$$

Ahora, puesto que (N, g) es una variedad completa, y tiene curvatura seccional acotada, y radio de inyectividad estrictamente positivo, entonces el Teorema de encaje de Sobolev es válido (cf. en [6]), es decir, para cada $\epsilon > 0$, existe algún C_ϵ tal que

$$||w||_p^2 \leq (1+\epsilon)\frac{a}{Y_{m+n}}\int_N |dw|^2 dV_g + C_\epsilon \int_N w^2 dV_g,$$

por tanto, por la ecuación (2.28),

$$||w||_p^2 \leq (1+\epsilon)\frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta}\frac{\lambda_s}{Y_{m+n}}\int_N u_s^{s-2} w^2 dV_g + C_\epsilon \int_N w^2 dV_g,$$

y así, por la desigualdad de Hölder,

$$||w||_p^2 \leq (1+\epsilon)\frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta}\frac{\lambda_s}{Y_{m+n}}||u_s||_{(s-2)(m+n)/2}^{s-2}||w||_p^2 + C_\epsilon ||w||_2^2. \tag{2.29}$$

Ahora, por la observación 28, existe algún $\delta_1 > 0$ tal que

$$\frac{\lambda_s}{Y_{m+n}} < 1,$$

para todo $s \in (p - \delta_1, p)$.

Por otro lado, notemos que, $\forall \delta > 0$, si $p - \delta \leq s \leq p$, entonces

$$0 \leq s - \left((s-2)\frac{n+m}{2}\right) \leq \delta\left(\frac{n+m}{2}\right).$$

Mientras tanto, por la continuidad de la norma, dado $\epsilon > 0$, existe algún $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$||u_s||_{s'} \leq ||u_s||_s + \epsilon,$$

si $|s - s'| \leq \delta_\epsilon$. Entonces, tomando $\delta_2 = \delta_\epsilon(\frac{2}{n+m})$, tenemos que para $s \in (p - \delta_2, p)$,

$$||u_s||_{(s-2)(n+m)/2} \leq ||u_s||_s + \epsilon = 1 + \epsilon, \tag{2.30}$$

puesto que $0 \leq s - ((s-2)(n+m)/2) \leq \delta_\epsilon$.

Así, en (2.29), podemos elegir δ y ϵ lo suficientemente pequeños, tales que el coeficiente del primer término sea menor a 1 y por tanto, pueda ser absorbido por el lado izquierdo de la ecuación. Notemos que es necesario que s esté lo suficientemente cerca de p, de modo que tanto (2.30) como (2.12) se satisfagan.

Tenemos entonces, de (2.29),

$$||w||_p^2 \leq C||w||_2^2. \tag{2.31}$$

Por tanto, para terminar la demostración, sólo hace falta probar que

$$||w||_2^2 = ||u_s||_{2(1+\delta)}^{1+\delta}$$

está acotada independientemente de s. Procedemos como sigue. Primero, dividimos el soporte de u_s en $\Omega_s = u_s^{-1}((1,\infty))$ y Ω_s^c. Notamos entonces que

$Vol(\Omega_s) \leq 1$, independientemente de s, puesto que $||u_s||_s = 1$. Luego, por la desigualdad de Hölder, puesto que $s > 2(1+\delta)$,

$$\left(\int_{\Omega_s} u_s^{2(1+\delta)}\right)^{\frac{1+\delta}{2(1+\delta)}} \leq \left(\int_{\Omega_s} u_s^s\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\int_N u_s^s\right)^{\frac{1}{2}} = 1. \qquad (2.32)$$

Mientras tanto, fuera de Ω_s, puesto que $u_s < 1$, entonces

$$u_s^{2(1+\delta)} < u_s^2,$$

y por tanto

$$\int_{\Omega_s^c} u_s^{2(1+\delta)} < \int_N u_s^2 < C_1, \qquad (2.33)$$

donde C_1 es independiente de s, por (2.9). Se sigue de (2.32) y (2.33) que $||u_s||_{2(1+\delta)}^{1+\delta}$ está acotada uniformemente. Y entonces, por (2.31),

$$||w||_p = ||u_s||_{p(1+\delta)}^{1+\delta}$$

está acotada independientemente de s.

□

Se sigue de está cota en $L^r(N)$ que podemos encontrar una cota en $C^{2,\alpha}(K_R)$ para la familia $\{u_s\}$, en cada subconjunto compacto $K_R \subset N$.

Lema 33. Para la familia de funciones $\{u_s\}$ en la proposición 32, que están acotadas uniformemente en $L^r(N)$, existe una cota en $C^{2,\alpha}(K_R)$ para cada compacto $K_R = M \times B_R \subset N$.

Demostración. Consideremos cualquer subconjunto compacto $M \times B_R \subset N$, y tomemos R_0, R_1, R_2, $(R < R_0 < R_1 < R_2)$ lo suficientemente grandes. Desde luego, para cualquier $r > 0$, $Y(M \times B_r, g_M + g_E) \leq Y(M \times \mathbf{R}^n, g_M + g_E) < Y_{m+n}$. Ahora, puesto que $u_s \in L^r(N)$ (proposición 32), entonces, por (2.6),

$$|\Delta u_s| = |\lambda_s u_s^{s-1} - \frac{S_g}{a} u_s| \in L^q(M \times B_{R_2}),$$

con $q = \frac{r}{s-1}$. Entonces, por el Teorema de regularidad elíptica (cf. en [15]), tenemos $u_s \in L_2^q(M \times B_{R_1})$. Y entonces, del Teorema de encaje de Sobolev, $u_s \in L^{r'}(M \times B_{R_1})$, con $r' = \frac{(n+m)r}{(n+m)s-(n+m)-2r}$. Y así, $r' > r$, puesto que $r > p = \frac{(n+m)(p-2)}{2} > \frac{(n+m)(s-2)}{2}$. Iterando este procedimiento tenemos que $u_s \in L_2^q(M \times B_{R_1})$ para todo $q > 1$.

Entonces, de nuevo por el Teorema de encaje de Sobolev, tenemos que $u_s \in C^\alpha(M \times B_{R_0})$ para algún $\alpha > 0$. Así, usando el Teorema de regularidad elíptica una vez más, concluimos que $u_s \in C^{2,\alpha}(M \times B_R)$.

Esto implica que tenemos una cota uniforme $C^{2,\alpha}(K_R)$ en cada subconjunto compacto $K_R = M \times B_R \subset N$.

□

Se sigue ahora del Teorema de Arzela-Ascoli que podemos encontrar una subsucesión $\{u_{s_j}\} \subset \{u_s\}$ que converja a su límite u en cada subconjunto compacto de (N, g). Por tanto, podemos construir la función límite u tal que una subsucesión de u_{s_j} converja a u en todo N. Una vez hecho esto, usando el lema

30 probaremos que $\lim_{j\to\infty} ||u_{s_j}||_p = 1$. Naturalmente, la función límite u será una solución a la ecuación de Yamabe, completando así la demostración del Teorema 3.

Lema 34. Sea $\{u_s\}$ la sucesión de funciones dadas por el lema 31, entonces, conforme $s \to p$ existe una subsucesión $\{u_{s_j}\} \subset \{u_s\}$, tal que $\{u_{s_j}\}$ converge a una solución positiva y C^∞ de

$$a\Delta u + S_g u = \lambda u^{p-1},$$

con

$$||u||_p = 1$$

y

$$Q_p(u) = Y(N, [g]) = \lambda.$$

Demostración. Por el lema 33, tenemos que la sucesión $\{u_s\}$ tiene una cota uniforme en $C^{2,\alpha}(K_R)$ para cada compacto $K_R = M \times B_R \subset N$. Entonces, por el Teorema de Arzela-Ascoli (cf. en [25]), esto implica que para cada compacto K_R, existe una subsucesión $\{u_{s_j}\} \subset \{u_s\}$ tal que converge en norma C^2 a una función que denotaremos por $u|_{K_R}$. Construimos ahora una función límite u, definida en todo N. Para $R = 1$, consideremos la subsucesión $\{u_{s_j}\} \subset \{u_s\}$, tal que $u_{s_j} \to u|_{K_R}$, en norma C^2 en K_R. De esta subsucesión, extraemos otra subsucesión $\{u_{s_k}\} \subset \{u_{s_j}\}$ tal que $u_{s_k} \to u|_{K_{R+1}}$ en norma C^2 en K_{R+1}. Procediendo de manera inductiva, obtenemos una función límite $u = lim_{R\to\infty} u|_{K_R}$, que está bien definida en todo N.

Demostramos ahora que $\lim_{j\to\infty} ||u_{s_j}||_{s_j} = ||u||_p = 1$. Usamos el lema 30. Primero, notamos que las hipótesis son satisfechas por $\{u_{s_j}\}$. Sabemos además que $u_{s_j} = u^*_{s_j}$ y que $||u_{s_j}||_{s_j} = 1$, para cada $j > 1$. Por otro lado, por la ecuación (2.9), las u_{s_j} están acotadas uniformemente en $L^2_1(N)$.

Notamos ahora que las funciones u_{s_j} están acotadas de manera uniforme en $L^\infty(N)$: como $u_{s_j} \to u|_{K_1}$ en $K_1 = M \times B_1$, con norma C^2, entonces, para toda j lo suficientemente grande,

$$\sup_{K_1} u_{s_j} \leq (\sup_{K_1} u|_{K_1}) + 1 < A,$$

donde A es una constante. Además, puesto que $u_{s_j} = u^*_{s_j}$ para toda $j > 1$, sabemos que

$$\sup_N u_{s_j} = \sup_{K_1} u_{s_j}.$$

Por tanto, $(\sup_N u_{s_j}) \leq (\sup_{K_1} u|_{K_1}) + 1 < A$, y así, las funciones u_{s_j} están uniformemente acotadas en $L^\infty(N)$ para toda j lo suficientemente grande.

Ahora, sea $\beta \in (2, p)$. Sea $\epsilon > 0$, entonces, por el lema 30, existe algún $R_\epsilon > 0$ y algún $j_2 > 1$ tales que

$$\int_{N\setminus(M\times B_{R_\epsilon})} u^\beta_{s_j} dV_g < \epsilon \tag{2.34}$$

para toda $j > j_2$.

Por otro lado, puesto que u_{s_j} está acotada uniformemente en $L^\infty(N)$, sea $A > 1$ tal que $u_{s_j} \leq A$ (para toda $j > j_3$, para algún $j_3 > 1$). Entonces

$$\int_{N\setminus(M\times B_{R_\epsilon})} u_{s_j}^{s_j} dV_g \leq A^{s_j-\beta} \int_{N\setminus(M\times B_{R_\epsilon})} u_{s_j}^{\beta} dV_g \leq A^{2(p-2)}\epsilon, \tag{2.35}$$

donde la última desigualdad es una aplicación directa de (2.34). Se sigue entonces, de (2.35), que

$$\lim_{j\to\infty} ||u_{s_j}||_{s_j} = 1.$$

Por tanto $||u||_p = 1$. Desde luego, esto implica que u satisface

$$a\Delta u + S_g u = \lambda u^{p-1},$$

con

$$Q_p(u) = \lambda,$$

donde $\lambda = \lim_{s\to p} \lambda_s$. El siguiente lema de continuidad implica que $\lambda = \lambda_p = Y(N, [g])$.

Lema 35. Considere el conjunto $\{\lambda_s\}$ como está definido por la ecuación (2.8), entonces $\lambda_s \to \lambda_p$ conforme $s \to p$.

Demostración. Puesto que $\lim_{j\to\infty} ||u_{s_j}||_p = 1$, recordando que $||u_{s_j}||_{s_j} = 1$ y $Q_{s_j}(u_{s_j}) = \lambda_{s_j}$, tenemos, por (2.10),

$$Q_p(u_{s_j}) = \frac{\lambda_{s_j}}{||u_{s_j}||_p}.$$

Entonces, por continuidad de la norma, $\forall\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $s_j \in (p-\delta, p)$,

$$\lambda_p \leq Q_p(u_{s_j}) = \frac{\lambda_{s_j}}{||u_{s_j}||_p} \leq \lambda_{s_j}(1+\epsilon) \leq \lambda_{s_j} + \epsilon Y_{n+m},$$

puesto que $\lambda_{s_j} < Y_{n+m}$, para toda $s_j \leq p$, por (2.12) (s_j lo suficientemente cerca de p).

Por otro lado, por el lema 27, tenemos que $\lambda_{s_j} - \epsilon \leq \lambda_p$, para $s_j \in (p-\delta, p)$. Concluimos que $\lambda_s \to \lambda_p$ conforme $s \to p$. □

Finalmente, la regularidad de u se sigue de un resultado de N. Trudinger (Teorema 3 en [29]), puesto que u es una solución $L_1^2(N, g)$ de la ecuación (2.6).

Por otro lado, puesto que $S_g > 0$ y u es suave, se sigue del principio del máximo (cf. en [15]) que u es positiva.

□

Desde luego, del lema 34, se sigue el Teorema 3.

Capítulo 3

Métricas de Einstein en $(M \times \mathbf{R}^n, [g + g_E])$

Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana cerrada, y g_E la métrica Euclideana en $\mathbf{R^n}$. En la primera sección del presente capítulo mostraremos que no existen métricas de Einstein positvas en la clase conforme de $(M \times \mathbf{R}^n, g + g_E)$, para $n > 1$.

En la segunda sección, mostraremos que en la clase conforme de $(M \times \mathbf{R}^n, g + g_E)$ $(n > 1)$, no existen métricas con curvatura de Ricci positiva, al menos para funciones radiales del factor $\mathbf{R}^n$.

Estos resultados son motivados por nuestro interés en la constante de Yamabe de $(M \times \mathbf{R}^n, g + g_E)$.

3.1 Métricas conformes de Einstein

Una vez demostrada la existencia de una métrica de Yamabe en la clase conforme de $(M \times \mathbf{R}^n, g_1 + g_E)$ en el capítulo 2, nuestro interés por el valor de su constante de Yamabe nos lleva a preguntarnos sobre la existencia de una métrica de Einstein en su clase conforme.

Como se mencionó en la introducción, cuando $n = 1$, la respuesta es afirmativa, como mostraron recientemente A. Moroianu y L. Ornea [20]. Sin embargo, esto no sucede cuando $n > 1$. En este caso, no existe una métrica de Einstein positiva en la clase conforme de $(M \times \mathbf{R}^n, [g_1 + g_E])$ como lo indica el Teorema 4.

3.1.1 Demostración del Teorema 4

Demostración. Sea (M^m, g) una variedad cerrada de dimensión m, y denotemos por g_E la métrica Euclideana de $\mathbf{R}^n$, $n > 1$. Sea $h = g + g_E$.

Procedemos por contradicción. Supongamos que existe una función suave y positiva $u : M \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$, tal que $(M \times \mathbf{R}^n, u^{-2}h)$ es Einstein positiva.

Sea $\tilde{h} = u^{-2}h$. Luego, puesto que $(M \times \mathbf{R}^n, \tilde{h})$ es Einstein, tenemos de (1.1) que

$$0 = Z_h + \frac{n+m-2}{u}(D^2 u + \frac{\Delta u}{n+m} h).$$

Entonces, puesto que $Z_h = R_h - \frac{S_h}{n+m} h$, se sigue que

$$D^2 u = \frac{-u}{n+m-2} R_h + \left(\frac{u S_h}{(n+m-2)(n+m)} - \frac{\Delta u}{n+m} \right) h. \tag{3.1}$$

Sea $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$ el marco ortonormal usual global para $T\mathbf{R}^n$ y sea $X \in TM$. Denotaremos por $\tilde{X}$ a un campo vectorial en M que extienda al vector tangente X. Por (3.1) tenemos

$$D^2 u(\partial_i, \tilde{X}) = D^2 u(\tilde{X}, \partial_i) = 0, \tag{3.2}$$

$\forall i \leq n$, y por tanto,

$$0 = D^2 u(\tilde{X}, \partial_i) = \partial_i(\tilde{X} u) - (\nabla_{\partial_i} \tilde{X}) u,$$
$$0 = D^2 u(\partial_i, \tilde{X}) = \tilde{X}(\partial_i u) - (\nabla_{\tilde{X}} \partial_i) u.$$

Notemos además que $\nabla_{\partial_i} \tilde{X} = \nabla_{\tilde{X}} \partial_i = 0$, ya que h es una métrica producto. Se sigue que para cualquier campo vectorial $\tilde{X}$ en M,

$$\partial_i(\tilde{X} u) = 0, \tag{3.3}$$

$$\tilde{X}(\partial_i u) = 0, \tag{3.4}$$

$\forall i \leq n$.

Por (3.4), si escribimos $u = u(x,t)$, donde $x \in M$ y $t \in \mathbf{R}^n$, para cualquier $i = 1, .., n$, tenemos

$$\partial_i u(x,t) = \partial_i u(x_0, t),$$

$\forall x, x_0 \in M$. Por tanto

$$u(x,t) - u(x_0,t) = w(x),$$

para alguna función suave w en M. Esto es, u es la suma de una función que depende sólo de M y de una función que depende sólo de $\mathbf{R}^n$. Escribimos entonces

$$u(x,t) = v(t) + w(x). \tag{3.5}$$

Por tanto, puesto que h es un producto Riemanniano, $\Delta_h u = \Delta_g w + \Delta_{g_E} v$, $|\nabla u|^2 = |\nabla_g w|^2 + |\nabla_{g_E} v|^2$.

Por otro lado, también es consecuencia de (3.1) que

$$D^2 u(\partial_i, \partial_j) = \left(\frac{u S_h}{(n+m-2)(n+m)} - \frac{\Delta_g w + \Delta_{g_E} v}{n+m} \right) \delta_{ij}, \tag{3.6}$$

para cualquier $i, j \leq n$.

Además

$$D^2 u(\partial_i, \partial_j) = \partial_i(\partial_j u) - (\nabla_{\partial_i} \partial_j) u,$$

donde el último término es cero, puesto que ∂_i y ∂_j pertenecen al marco ortonormal de $T\mathbf{R}^n$, con la métrica Euclideana. Así, (3.6) puede ser reescrito como

$$D^2 u(\partial_i, \partial_j) = \partial_i(\partial_j v) = \left(\frac{uS_h}{(n+m-2)(n+m)} - \frac{\Delta_g w + \Delta_{g_E} v}{n+m} \right) \delta_{ij}, \quad (3.7)$$

para cualquier $i, j \leq n$.

Ahora, dado $X \in TM$, $D^2 u(\tilde{X}, \tilde{X}) = D^2 w(\tilde{X}, \tilde{X})$ depende sólo de M, así

$$\partial_i(D^2 u(\tilde{X}, \tilde{X})) = 0. \quad (3.8)$$

También, para cualquier $i = 1, .., n$, y cualquier $k = 1, .., n, i \neq k$,

$$\partial_i(D^2 u(\partial_k, \partial_k)) = 0, \quad (3.9)$$

puesto que

$$\partial_i(D^2 u(\partial_k, \partial_k)) = \partial_i(\partial_k(\partial_k u)) = \partial_k(\partial_i(\partial_k u)) = 0,$$

donde la última igualdad se sigue de (3.7).

Ahora, sea

$$z := \left(\frac{uS_h}{(n+m-2)(n+m)} - \frac{\Delta u}{n+m} \right),$$

y sea $i \in \{1, ..., n\}$. Puesto que $n > 1$, podemos elegir $k \leq n$, de manera que $k \neq i$. Entonces, por (3.9) y (3.6), se tiene

$$\partial_i(D^2 u(\partial_k, \partial_k)) = \partial_i z = 0. \quad (3.10)$$

Es decir, z no depende de $\mathbf{R}^n$. Para terminar la prueba consideraremos dos casos distintos: cuando g es Ricci plana y cuando no lo es.

Caso 1. (M, g) es Ricci plana.

Puesto que (M, g) es Ricci plana, se sigue de (3.1) que

$$D_g^2 w = \frac{-\Delta_g w - \Delta_{g_E} v}{n+m} g, \quad (3.11)$$

$$D_{g_E}^2 v = \frac{-\Delta_g w - \Delta_{g_E} v}{n+m} g_E. \quad (3.12)$$

Tomando la traza de (3.11) con respecto de g tenemos

$$-\Delta_g w = \frac{-\Delta_g w - \Delta_{g_E} v}{n+m} m,$$

es decir,

$$\frac{n}{m} \Delta_g w = \Delta_{g_E} v = c, \quad (3.13)$$

para alguna constante c, puesto que $\Delta_g w$ depende sólo de M y $\Delta_{g_E} v$, sólo de $\mathbf{R}^n$.

Se sigue que $c = 0$ puesto que, siendo M compacta y sin frontera,

$$0 = \int_M \Delta_g w dV_g = c \int_M dV_g,$$

y por tanto w es constante.

Finalmente, puesto que $\Delta_g w = \Delta_{g_E} v = 0$, se sigue de (3.12) que

$$\partial_i(\partial_j v) = 0,$$

para todo $i, j \leq n$. Esto implica que v es una función afín de $\mathbf{R}^n$ y como u es positiva, v tiene que ser constante. Claramente, si u es constante, $\tilde{h}$ es Ricci plana.

Caso 2. (M, g) no es Ricci plana.

Sea $K = \{y \in M | R_g(\tilde{X}, \tilde{X})(y) = 0, \forall X \in TM\}$. Puesto que (M, g) no es Ricci plana, $K^c \neq \phi$. Además, K es cerrado y por tanto, K^c es abierto. Ahora, dado $y \in K$, elegimos algún abierto $V \subset K^c$, $y \in V$, y algún $X \in TM$ tal que $R_g(\tilde{X}, \tilde{X}) \neq 0$ en V. Evaluando (3.1) en $\tilde{X}$, tenemos

$$D^2 w(\tilde{X}, \tilde{X}) = \frac{-u}{n+m-2} R_h(\tilde{X}, \tilde{X}) + z \quad g(\tilde{X}, \tilde{X}).$$

Diferenciando esta ecuación por ∂_i, para cualquier $i \leq n$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \partial_i(D^2 u(\tilde{X}, \tilde{X})) &= \partial_i \left(\frac{-u}{n+m-2} R_h(\tilde{X}, \tilde{X}) \right) + \partial_i \left(z \quad h(\tilde{X}, \tilde{X}) \right) \\ &= \frac{-\partial_i u}{n+m-2} R_h(\tilde{X}, \tilde{X}), \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde la primera igualdad se sigue de (3.8), y la última, del hecho de que tanto $R_h(\tilde{X}, \tilde{X})$ como $h(\tilde{X}, \tilde{X})$ no dependen de $\mathbf{R}^n$. Aún más, z tampoco depende de $\mathbf{R}^n$, por (3.10). Esto implica que v es constante y que $\Delta_{g_E} v = 0$ en V. Por tanto, podemos escribir $u = w$, por (3.5). Entonces, tanto el hecho de que $D^2 u(\partial_k, \partial_k) = 0$, $\forall k \leq n$, como (3.6), implican que

$$S_h = \frac{n+m-2}{w} \Delta_g w. \tag{3.15}$$

Por otro lado, puesto que $(M \times \mathbf{R}^n, \tilde{h})$ es Einstein, $S_{\tilde{h}} = \lambda(n+m)$, donde λ es la constante de Einstein. Por tanto, de (1.2) tenemos

$$S_h = \frac{\lambda(n+m)}{w^2} + 2(n+m-1)\frac{\Delta_g w}{w} + (n+m)(n+m-1)\frac{|\nabla_g w|^2}{w^2}. \tag{3.16}$$

Combinando (3.15) y (3.16), obtenemos

$$\lambda + w\Delta_g w + (n+m-1)|\nabla_g w|^2 = 0. \tag{3.17}$$

Luego, como $\lambda > 0$, de (3.17) se sigue que $\Delta_g w < 0$ en V. Por tanto, $\Delta_g w < 0$ y $\Delta_{g_E} v = 0$ en K^c. En adelante suponemos que $K \neq \phi$, pues de lo contrario, $0 = \int_M \Delta_g w dV_g = \int_{K^c} \Delta_g w dV_g < 0$.

Consideremos ahora la frontera de K, ∂K. Como K es cerrado, $\partial K \subset K$. Y así, por (3.13), $\forall y \in K$ (en particular, $\forall y \in \partial K$),

$$c = \frac{n}{m} \Delta_g w = \Delta_{g_E} v \tag{3.18}$$

donde c es una constante. Por otro lado, como $\Delta_{g_E} v = 0$ en K^c, por la continuidad de $\Delta_{g_E} v$, se sigue que $\forall y \in \partial K$, $\Delta_{g_E} v = 0$. Por tanto, de (3.18), tenemos que $\Delta_g w = \Delta_{g_E} v = 0$ en K. Finalmente, como $\Delta_g w < 0$ en K^c, integrando $\Delta_g w$ sobre M, obtenemos una contradicción,

$$0 = \int_M \Delta_g w dV_g = \int_K \Delta_g w dV_g + \int_{K^c} \Delta_g w dV_g = 0 + \int_{K^c} \Delta_g w dV_g < 0.$$

Esto concluye la demostración del Teorema 4.

□

3.2 Métricas conformes Ricci positivas

Una vez visto que no existen métricas de Einstein positivas en la clase conforme de $(M \times \mathbf{R}^n, g + g_E)$, la existencia de una métrica con curvatura de Ricci positiva, en dicha clase conforme, pudiera resultar de interés. Como se mencionó en la introducción, para una variedad Riemanniana cerrada, (M^m, g), con curvatura de Ricci positiva, $R_g \geq \lambda g$ (con $\lambda > 0$) la constante de Yamabe está acotada por abajo: $Y(M, [g]) \geq m\lambda (Vol(M, g))^{\frac{2}{m}}$, (cf. en [11]).

En la presente sección mostramos que en la clase conforme de $(M \times \mathbf{R}^n, g + g_E)$, $n > 1$, no existen métricas con curvatura de Ricci positiva, al menos para funciones radiales del factor $\mathbf{R}^n$ (Teorema 5).

3.2.1 Demostración del Teorema 5

Demostración. Sea (M^m, g) una variedad Riemanniana completa y g_E la métrica Euclideana de $\mathbf{R}^n$, $n > 1$. Sea $h = g + g_E$. Procedemos por contradicción. Supongamos que el Teorema 5 es falso. Sea $\varphi = \varphi(r)$ (con $r = \sqrt{\sum_i x_i^2}$) una función C^2, integrable, radial y positiva, $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$, tal que $(M^m, \varphi h)$ es Ricci positiva. Sea $f(r) = -\frac{1}{2} Log[\varphi(r)]$, de modo que $\varphi(r) = e^{2(-f(r))}$.

Denotemos por $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$ el marco ortonormal global usual para $\mathbf{R}^n$. Sean $X, Y \in TM$. Denotaremos por $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ a campos vectoriales en M que extiendan a vectores tangentes X y Y respectivamente. De (1.3), tenemos que

$$R_{\tilde{h}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = R_h(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \left(-\Delta f - (n + m - 2)|\nabla f|^2\right) g(\tilde{X}, \tilde{Y}), \tag{3.19}$$

$$R_{\tilde{h}}(\partial_i, \partial_j) = (n + m - 2) \left(D^2 f(\partial_i, \partial_j) + df \otimes df(\partial_i, \partial_j)\right)$$

$$+(-\Delta f - (n + m - 2)|\nabla f|^2)\delta_{ij}, \tag{3.20}$$

y

$$R_{\tilde{h}}(\partial_i, \tilde{X}) = 0.$$

Por tanto, para que $R_{\tilde{h}}$ sea positivo, es necesario que tanto (3.19) como (3.20), sean positivo definidos.

En adelante, denotaremos $\partial_i f$ por f_i y $\partial_j(\partial_k f)$ por f_{jk}. Como $f = f(r)$, tenemos,

$$f_j = \frac{f'}{r} x_j,$$
$$f_{jk} = \frac{rf'' - f'}{r^3} x_j x_k + \frac{f'}{r} \delta_{jk},$$

donde la prima denota la derivada con respecto de r. Así,

$$f_j f_k = \frac{f'^2}{r^2} x_j x_k,$$

$$\Delta f = -f'' - (n-1)\frac{f'}{r},$$
$$|\nabla f|^2 = f'^2.$$

Entonces, para que el 2-tensor en $\mathbf{R}^n$, dado por (3.20), sea positivo definido, es necesario que el 2-tensor $\alpha T + \beta Id_m$, sea positivo definido, donde α, β son las funciones dadas por,

$$\alpha = (n+m-2)\frac{-f' + rf'' + f'^2 r}{r^3},$$
$$\beta = f'' + (n-1)\frac{f'}{r} - (n+m-2)f'^2 + (n+m-2)\frac{f'}{r},$$

mientras que T es el 2-tensor dado en coordenadas ortonormales por,

$$T_{jk} = x_j x_k.$$

Así, para tener un tensor de Ricci positivo definido, $R_{\tilde{h}}$, necesitamos que los eigenvalores del 2-tensor $\alpha T + \beta Id_n$ sean positivos.

Notemos que los eigenvalores de T son $\{0, ..., 0, r^2\}$ y por tanto los eigenvalores de $\alpha T + \beta Id_n$ son $\{\beta, ..., \beta, \alpha r^2 + \beta\}$. Por tanto, si $\tilde{h}$ tiene curvatura de Ricci positiva, entonces f debe de satisfacer

$$\alpha r^2 + \beta = (n+m-1)f'' + (n-1)\frac{f'}{r} > 0, \tag{3.21}$$

y

$$\beta = f'' + (2n+m-3)\frac{f'}{r} - (m+n-2)f'^2 > 0. \tag{3.22}$$

Reunimos ahora algunas observaciones inmediatas:

a) La función de la hipótesis, $\varphi = e^{-2f}$, es integrable, por tanto se aproxima a cero conforme $r \to \infty$. En consecuencia, debemos tener $f \to \infty$ conforme $r \to \infty$.

b) Como f no puede tener máximos locales, por (3.21), sólo puede tener un mínimo local. De este modo, $f' = 0$ sólo puede ocurrir a lo más una vez; puesto que f es radial y suave, esto sólo puede ocurrir en $r = 0$.

c) Puesto que $f(r) \to \infty$ conforme $r \to \infty$ (por **a)**) y $f'(r) \neq 0$ para $r > 0$, entonces $f'(r) > 0$ para $r > 0$.

A continuación, obtenemos una cota superior para $f(r)$.

Consideremos (3.22). Sean $q_1 = (2n + m - 3)$, $q_2 = (m + n - 2)$. Puesto que $f' > 0$, tenemos

$$\frac{f''}{f'} + \frac{q_1}{r} > q_2 f' > 0.$$

Entonces, para cualquier $r_1 > 0$ y $r > 0$, integramos de r_1 a r para obtener

$$Log\left(\frac{f'(r)}{f'(r_1)}\right) + Log\left(\frac{r^{q_1}}{{r_1}^{q_1}}\right) > q_2 f(r) - q_2 f(r_1) > 0.$$

Puesto que la función exponencial es creciente tenemos

$$f'(r)r^{q_1} > e^{q_2 f(r)}(e^{-q_2 f(r_1)}{r_1}^{q_1} f'(r_1)) > 1 > 0.$$

Y entonces,

$$f'(r)e^{-q_2 f(r)} > \frac{C_1}{r^{q_1}} > 0,$$

con $C_1 = (e^{-q_2 f(r_1)}{r_1}^{q_1} f'(r_1)) > 0$.

Para $s > r_1$, integramos ahora de s a r para obtener

$$-\frac{1}{q_2}e^{-q_2 f(r)} + \frac{1}{q_2}e^{-q_2 f(s)} > C_1 \frac{1}{(1-q_1)}\left(\frac{1}{r^{q_1-1}} - \frac{1}{s^{q_1-1}}\right) > 0.$$

Puesto que esto funciona para $r > s > r_1$, la desigualdad es preservada en el límite conforme $r \to \infty$,

$$\frac{1}{q_2}e^{-q_2 f(s)} \geq \frac{C_1}{(q_1-1)}\left(\frac{1}{s^{q_1-1}}\right) \geq 0,$$

puesto que $\frac{1}{r^{q_1-1}} \to 0$ y $e^{-f(r)} \to 0$, como observamos antes.

Tenemos entonces una cota superior para $f(s)$, $s > r_1 > 0$.

$$f(s) < Log[C_2 s^{\frac{q_1-1}{q_2}}] = K_1 + K_2 Log[s]. \tag{3.23}$$

para algunas constantes K_1, K_2.

A continuación obtenemos una cota inferior para $f(r)$. Sea $m_0 = (m-1)/(n+m-1)$, y notemos que $0 < m_0 < 1$. Por (3.21),

$$f''(r) + m_0 \frac{f'(r)}{r} > 0,$$

y como $f'(r) > 0$ tenemos

$$\frac{m_0}{r} > -\frac{f''(r)}{f'(r)}.$$

Fijamos $r_0 > 0$ y elegimos r_1, $r_0 < r_1 < r$. Integrando de r_1 a r la desigualdad anterior, obtenemos

$$m_0 \;\; Log[\frac{r}{r_1}] > -Log[\frac{f'(r)}{f'(r_1)}].$$

Entonces, puesto que la exponencial es creciente, tenemos

$$\frac{r^{m_0}}{{r_1}^{m_0}} > \frac{f'(r_1)}{f'(r)},$$

o bien,

$$f'(r) > \frac{f'(r_1){r_1}^{m_0}}{r^{m_0}}.$$

Integramos de nuevo, ahora de $r_2 > r_1$ a $r > r_2$, para obtener

$$f(r) - f(r_2) > \frac{f'(r_1){r_1}^{m_0}}{(1 - m_0)}(r^{1-m_0} - {r_2}^{1-m_0}).$$

Así, existen constantes positivas c_1 y c_2, tales que

$$f(r) > c_1 r^{1-m_0} + c_2. \tag{3.24}$$

Esta cota inferior contradice la cota superior obtenida en (3.23), porque la desigualdad

$$c_1 r^{\frac{n}{n+m-1}} + c_2 < f(r) < K_1 + K_2 Log[r],$$

no se sostiene conforme $r \to \infty$.

Concluimos que una función $\varphi = e^{-2f}$ como en el Teorema 5, no puede existir.

$\square$

Bibliografía

[1] K. Akutagawa, L. Florit, y J. Petean, *On Yamabe constants of Riemannian products*, Comm. Anal. Geom. 15 (2008), 947-969.

[2] K. Akutagawa, B. Botvinnik, *Yamabe metrics on cylindrical manifolds*, Geometric and Functional Analysis. Vol. 13, No. 2 (2003), 259-333.

[3] B. Amman, M. Dahl y E. Humbert, *Smooth Yamabe invariant and surgery*, arXiv:0804.1418v3 [math.DG] (2008).

[4] T. Aubin, *Some non-linear problems in Riemannian geometry*, Springer monographs in mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[5] T. Aubin, *Equations diférentielles non linéaires et probléme de Yamabe concernant la corboure scalaire*, J. Math. Pures Appl. 55 (1976), 269-296.

[6] T. Aubin, *Espaces de Sobolev sur les variétés Riemanniennes*, Bull. Sci. Math. 100 (1976), 149-173.

[7] T. Aubin, *Some non-linear problems in Riemannian geometry*, Springer, Berlin, 1998.

[8] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb 10, Springer, Berlin, 1987.

[9] F. Brock y A. Yu. Solynin, *An approach to symmetrization via polarization*, Transactions of the American Mathematical Society, 352, no. 4 (2000), 1759-1796.

[10] R. Gover, P. Nurowski, *Obstructions to conformally Einstein metrics in n dimensions*, J. Geom. Phys. 56 (2006), 450-484.

[11] S. Ilias, *Constantes explicites pour les inegalites de Sobolev sur les varietes riemannianes compactes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 33 no. 2, (1983), 151-165.

[12] S. Kim, *Scalar curvature on non-compact complete Riemannian manifolds*, Nonlinear Analysis T.M. & A. Vol. 26 no. 12 (1996), 1985-1993.

[13] O. Kobayashi, *On the large scalar curvature*, Research Report 11, Dept. Math. Keio Univ. (1985).

[14] O. Kobayashi, *Scalar curvature of a metric with unit volume*, Math. Ann 279 (1987), 253-265.

[15] J.M. Lee y T. Parker *The Yamabe Problem*, Bulletin (New Series) of the AMS Vol. 17 number 1 (1987), 37-91.

[16] P.L. Lions *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1.* Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Nonlin., Vol. 1 no. 2 (1984), 109-145.

[17] P.L. Lions *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 2.* Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Nonlin., Vol. 1 no. 4 (1984), 223-283.

[18] M. Listing *Conformal Einstein spaces in N-dimensions*, Ann Global Anal. Geom. 20 (2001), 183-197.

[19] M. Listing *Conformal Einstein spaces in N-dimensions II*, J. Geom. Phys. 56 (2006), 386-404.

[20] A. Moroianu y L. Ornea, *Conformally Einstein products and Nearly Kähler manifolds*, arXiv:math./0610599v3 [math.DG] (2007). Ann. Global Anal. Geom. 33, no. 1 (2008), 11-18.

[21] I. Natanson, *Theory of functions of a real variable*, Vol. 1. Frederick Unger Publishing, New York, 1974.

[22] M. Obata, *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry 6 (1971), 247-248.

[23] J. Petean, *Isoperimetric regions in spherical cones and Yamabe constants of $M \times S^1$*, Geometriae Dedicata, 143 (2009), 37-48. ArXiv:0710.2536v2 [math.DG].

[24] J. Petean, *Metrics of constant scalar curvature conformal to a Riemannian product with a sphere* , arXiv:0812.4328v1 [math.DG] (2008).

[25] P. Petersen, *Riemannian Geometry.* Second edition. Springer, New York, 2006.

[26] J.Van Schaftingen, *Universal approximation of symmetrizations by polarizations*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 134, Number 1 (2005), 177-186.

[27] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Differential Geometry 20 (1984), 479-495.

[28] R. Schoen, *Variational Theory for the Total Scalar Curvature Functional for Riemannian Metrics and Related Topics*, Lecture Notes in Math. 1365, Springer-Verlag, Berlin (1987), 120-154.

[29] N. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1968), 265-274.

[30] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J, 12 (1960), 21-37.

[31] Zhang, *Nonlinear parabolic problems on manifolds, and a nonexistence result for the noncompact Yamabe problem*, Electronic Res. Announcements of the AMS, Vol. 3 (1997), 45-51.