Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Problemas de reparto de costos de producción

T E S I S

Que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias
con Orientación en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A :

Julio César Macías Ponce

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Francisco Sánchez Sánchez

GUANAJUATO, GTO MAYO 2010

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

PROBLEMAS DE REPARTO DE COSTOS DE PRODUCCIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS
CON ORIENTACIÓN EN

MATEMÁTICAS APLICADAS

P R E S E N T A :

JULIO CÉSAR MACÍAS PONCE

JURADO INTEGRADO POR:

DR. LUIS HERNÁNDEZ LAMONEDA	(CIMAT)
DR. FRANCISCO JAVIER SOLÍS LOZANO	(CIMAT)
DR. RUBÉN JUÁREZ GARCÍA	(CIMAT)
DR. LEOBARDO PEDRO PLATA PÉREZ	(CIMAT)
DR. FRANCISCO SÁNCHEZ SÁNCHEZ	(CIMAT)

____

Vo Bo. Director de Tesis

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres Julio y Blanca por su invaluable apoyo en cada una de las etapas de éste y de todos los proyectos que hemos alcanzado, su ejemplo de perseverancia está aquí reflejado.

A mis hermanos Marco y Tiberio por su apoyo y comprensión.

A mi compañera de vida Verónica por motivar y alegrar con su amor, sabiduría y paciencia cada uno de mis planes que ahora también son de ella.

A mis sobrinos Daniel, Melisa y Santiago por las lecciones de vida que me han dado a pesar de su corta edad.

AGRADECIMIENTOS

Durante este trabajo hubo muchas personas e instancias que me motivaron directa o indirectamente, conciente o inconcientemente a la culminación de esta tesis, quiero agradecer muy en especial:

A mi director de tesis Dr. Francisco Sánchez Sánchez por la confianza que depositó en mí, por su apoyo y su amistad.

Al Dr. Luis Hernández Lamoneda por su tiempo, su paciencia, sus importantes contribuciones y por su amistad.

Al Dr. Francisco Javier Solís Lozano por sus comentarios y sugerencias.

Al Dr Rubén Juárez García y al Dr. Leobardo Plata Pérez por los comentarios y sugerencias para éste y otros trabajos futuros.

A Sthepanie Dumbar por su disponibilidad e invaluables consejos.

A Lolita y Jannet porque me dieron el mejor trato en mi estancia en CIMAT.

A la señora Mary porque su trato y responsabilidad hicieron más confortable mi estancia en CIMAT.

A Claudia Reynoso porque me ha apoyado con sus consejos como excelente matemática pero más como persona y amiga.

A mis maestros y amigos Andrés Galván y Crescencio Medina por ser una motivación para siempre aprender más.

A mis amigos David Ávalos, Alejandro Escobar, Antonio Guerrero, Fausto Contreras, William Olvera e Ileana López por sus invaluables consejos en la preparación de todos los trabajos relativos a esta tesis.

A mi compañera de vida Verónica Medrano por sus acertadas sugerencias en la escritura de este trabajo.

A las siguientes personas que comparten mi alegría: Mario Medrano, Irma Ríos, Edith Medrano, Eliud Alejandro Álvarez, Alberto Medina, Arturo Urzúa, Berenice Ponce, Porfirio Toledo, Abel Castorena, Leticia Márquez, Oziel Martínez, Laura Castañeda, Irma Acero, Anna Hernández, Guillermina Ibarra, Hernán de Alba y Mónica Moreno.

Al CIMAT, por las facilidades y apoyo otorgado durante mi estancia.

Al pueblo de México, ya que por medio del CONACyT con la beca 85020 y el PROMEP con la beca 103.5/1869 fue posible cumplir con el programa de doctorado.

A la Universidad Autónoma de Aguascalientes por todas las facilidades otorgadas durante mi estancia en CIMAT, así como en los procesos posteriores para la culminación de este trabajo; en particular, al Centro de Ciencias Básicas y al Departamento de Matemáticas y Física por todo su apoyo.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En la década de 1940, Von Neumann y Morgenstern [12] hicieron las primeras aportaciones a la Teoría de Juegos tal y como las conocemos. Ellos estudiaban problemas de comportamiento económico como *juegos de estrategia.* Nash [11] por su parte introdujo el concepto de equilibro –que lleva su nombre–. A Nash también se debe la distinción actual entre los juegos no cooperativos, en que no puede haber acuerdos vinculantes, y los cooperativos, en que sí puede haberlos. [3]

El problema principal que se aborda en juegos cooperativos es la distribución de ganancias conjuntas o el reparto de costos comunes. La teoría más conocida que, actualmente, da una respuesta categórica a estos problemas es la de valores en juegos cooperativos. En ella, se agrupan problemas, se definen soluciones "razonables" y se pide que una solución satisfaga un conjunto de axiomas que la determinen unívocamente. El avance que se obtiene es sustancial: se aceptan o se eliminan soluciones, para toda clase de problemas con sólo aceptar "simples" supuestos generales. El artículo de Shapley de 1953 [18] es el mejor ejemplo de esta técnica que ha sido particularmente efectiva al resolver problemas de distribución de beneficios conjuntos y en la distribución de costos comunes, en estos últimos, Moulin en 1995 [10] contribuye de manera notable.

En este trabajo, modelamos y resolvemos el problema de repartición de costos de producción en el caso discreto; entendiéndose dicho problema como aquel donde un conjunto de agentes (jugadores) se unen para producir, para abaratar los costos o porque existe la necesidad de producir así. Cada agente tiene una demanda de producción y el tipo de bienes que se generan pueden ser distintos entre ellos.

Un problema queda determinado con la terna (N, m, c) donde N es el conjunto de agentes, m un vector de demandas a producir, donde m_i es la demanda del agente i y c es una función de costos de producción, mientras que las soluciones son operadores que a cada problema le asignan un vector, de manera que cada componente índica el pago asignado para el respectivo jugador.

Nosotros solucionamos estos problemas con la teoría de juegos cooperativos vía valores: de manera axiomática, es decir, pedimos que las soluciones satisfagan un conjunto de *simples supuestos generales* que nos permitan rechazar o aceptar soluciones hasta obtener, unívocamente, *la solución.*

Una herramienta apropiada para modelar los juegos de repartición de costos son los llamados juegos de elección múltiple, introducidos por Hsiao y Raghavan [7], un ejemplo de esto lo tenemos en Nouweland y Tijs. [13]. En particular, la solución que presentamos es una caracterización axiomática de la solución de Nouweland y Tijs, pero obtenida en un contexto distinto; la aportación más importante, en este trabajo, es la de relacionar soluciones entre juegos "cercanos" con un axioma; supongamos que c y c' son funciones de costos "idénticas salvo en un punto", entonces, ¿cómo deben variar las soluciones? Así, surge el concepto de *sensibilidad* para los problemas de repartición de costos. Podemos también, entonces, estudiar las soluciones ya existentes desde la perspectiva de la sensibilidad. –¿En qué sentido serán sensibles las soluciones existentes en la literatura?– Damos la respuesta para tres soluciones al menos:

1)Para el método más simple de costos de repartición, donde el costo total se divide proporcionalmente con respecto a la demanda a producir.

2)Para la *solución igualitaria* donde el costo total de producción se divide en partes iguales.

3)Para la solución de Nouweland y Tijs.

Otra de las aportaciones a resaltar, en este trabajo, es una aplicación de la teoría de representaciones a la teoría de juegos inspirada en el trabajo de Hernández et al [6] y que ya ha sido explotada por Sánchez [16]. Las técnicas de la teoría de representaciones son muy poderosas y permiten aprovechar la simetría de un problema dado. En particular, se trabajó el caso de dos jugadores con misma demanda; para este caso, presentamos la descomposición en suma directa de subespacios irreducibles para el espacio vectorial de juegos y para el espacio $\mathbb{R}^2$ de manera que la solución se determina en cada subespacio del espacio de juegos, lo que da pie al estudio de las soluciones lineales y simétricas; en este caso particular, nos situamos en el contexto de los juegos no cooperativos y presentamos soluciones de *equilibrio Nash,* que son lineales y simétricas.

El presente trabajo está organizado por capítulos. En el capítulo 2, se dan los conceptos básicos de la teoría de juegos cooperativos en forma de función característica, así como la axiomatización del valor de Shapley.

En el capítulo 3, se define y estudia el problema de repartición de costos de producción y se presentan dos axiomatizaciones importantes, una de las cuales, corresponde al resultado más significativo de esta tesis.

En el capítulo 4, se estudia el caso particular de problemas de reparto de costos donde hay dos jugadores con igual demanda; se encuentran soluciones, aplicando la teoría de representaciones y en el contexto de juegos no cooperativos bipersonales, se obtienen soluciones de equilibrio Nash.

El capítulo 5, consiste de una introducción a los juegos de elección múltiple, se presenta una solución axiomática que equivale a la solución que obtuvimos en este trabajo, para los problemas de reparto de costos de producción.

Las conclusiones se exponen en el capítulo 6, mientras que en el apéndice, se exponen las definiciones formales que hay dentro de la teoría de representaciones de grupos finitos. Una buena referencia para teoría de representaciones básica es Fulton y Harris (1991). También en el apéndice se tienen algunas demostraciones de resultados importantes de este trabajo.

Capítulo 2

Juegos cooperativos

La teoría de juegos es una colección de modelos matemáticos que estudia situaciones de conflicto y/o cooperación. Su función es la de explicar o dar una guía normativa para el comportamiento racional de agentes económicos, enfrentando decisiones estratégicas o interacciones sociales. La teoría concierne a un comportamiento estratégico, situaciones de equilibrio, negociación, formación de coaliciones, distribución justa y conceptos similares, enfocados a resolver diferencias entre grupos. La competencia, en muchas actividades sociales, ha hecho de la teoría de juegos un enfoque fundamental para modelar, por ejemplo en economía, ciencia política, investigación de operaciones.

El problema principal que se aborda en juegos cooperativos es la distribución de ganancias conjuntas o el reparto de costos comunes. En este capítulo, presentamos el principal valor que aparece en la literatura de juegos cooperativos *–El valor de Shapley–*. En lo sucesivo 2^N denota al conjunto potencia de N.

Definición 2.0.1 *Un juego en forma de función característica, se entenderá como una pareja* (N, v)*, donde* $N = \{1, ..., n\}$ *es un conjunto finito y* v *es una función* $v : 2^N \to \mathbb{R}$ *tal que* $v(\phi) = 0$*.*

La función $v : 2^N \to \mathbb{R}$ la llamaremos juego tradicional, y el conjunto de jugadores será un conjunto fijo a lo largo de todo este capítulo. Denotaremos por J al espacio de juegos tradicionales, es decir:

$$J = J^{(n)} := \left\{ v : 2^N \to \mathbb{R} \mid v(\phi) = 0 \right\}$$

y es fácil mostrar que este conjunto de juegos tradicionales forma un espacio vectorial sobre el campo de números reales si se define la suma y producto como sigue:

(a) $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$ para todo $v_1, v_2 \in J$.

(b)$(cv)(S) = cv(S)$ para todo $v \in J$ y $c \in \mathbb{R}$.

Se les llama *coaliciones* a los subconjuntos S de N y son subconjuntos de jugadores que potencialmente pueden jugar unidos. La coalición $S = N$ es denominada la *gran coalición.*

Dar soluciones axiomáticas (o valores) es definir operadores $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ y el problema de resolver todos los juegos en J se cambia a seleccionar una "adecuada" φ. Para ello, se pide que este operador satisfaga axiomas o propiedades deseables, para después demostrar que existe un único operador que los satisface.

2.1. Valor de Shapley

En esta sección, se presenta el principal valor que aparece en la literatura -El valor de Shapley- en honor de Lloyd Shapley quien demostró, en 1953, que sólo existe un operador $Sh : J \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de aditividad, simetría, eficiencia y nulidad que a continuación definimos.

Axioma 2.1.1 ***(Aditividad)*** $Sh(v_1 + v_2) = Sh(v_1) + Sh(v_2)$

Para cualquier par de juegos v_1 y v_2, se está pidiendo que la solución del "juego suma" sea igual a la suma de las soluciones.

Para el siguiente axioma, supongamos que θ es una permutación del conjunto N.

Axioma 2.1.2 ***(Axioma de Simetría)*** *$Sh(\theta \cdot v) = \theta \cdot Sh(v)$ para todo juego v y para toda permutación θ, donde el juego $\theta \cdot v$ se define como $(\theta \cdot v)(S) = v(\theta^{-1}(S))$ para cada $S \subseteq N$.*

Este axioma pide que si los jugadores intercambian papeles, entonces deben de intercambiar pagos, es decir la solución es anónima.

Axioma 2.1.3 ***(Axioma de Eficiencia)*** *$\sum_{i \in N} Sh_i(v) = v(N)$ para todo juego v.*

Se está pidiendo que el monto que se reparte entre los jugadores sea, exactamente, el monto $v(N)$ que puede conseguir la gran coalición.

El siguiente axioma requiere la definición de jugador nulo.

Se dirá que el jugador i es nulo en el juego v si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para toda coalición S.

Axioma 2.1.4 ***(Axioma de Nulidad)*** *Si el jugador i es un jugador nulo en v, entonces $Sh_i(v) = 0$.*

Así, la nulidad está pidiendo que los jugadores nulos obtengan cero.

Teorema 2.1.1 ***(Shapley, 1953)*** *Existe un único operador que satisface los axiomas de aditividad, simetría, eficiencia y nulidad, y está dado por:*

$$Sh_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \notin S}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right]$$

donde s es la cardinalidad del conjunto S.

Para comprender mejor el significado de la solución anterior, consideré el siguiente proceso aleatorio:

- Se elige la cardinalidad de una coalición que no contenga al jugador i de acuerdo con una distribución uniforme sobre el conjunto $\{0, ..., n-1\}$.
- Se elige, aleatoriamente, una coalición S con la cardinalidad dada anteriormente, de acuerdo con una distribución uniforme sobre las $\binom{n-1}{s}$ coaliciones disponibles.
- Se le da la utilidad marginal al jugador i que aporta a $v(N)$ al incorporarse a S, es decir, $v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

Entonces, $Sh_i(v)$ es el pago esperado para el jugador i en este proceso.

Así el pago, que el Valor de Shapley asigna a cada jugador, es una medida ponderada de las contribuciones marginales de ese jugador a las coaliciones que se incorpora. Los factores de ponderación $\frac{1}{n\binom{n-1}{s}}$ forman una distribución de probabilidad sobre dichas coaliciones al escoger, de modo equiprobable, el cardinal de la coalición y, posteriormente, una de las coaliciones de dicho cardinal.

Capítulo 3

Problemas de repartición de costos de producción

El problema principal que se aborda en juegos cooperativos es la distribución de ganancias conjuntas o el reparto de costos comunes. En este capítulo, abordamos los segundos, en particular estudiamos los problemas donde un conjunto de agentes tienen que unirse para producir. Esta unión se justifica porque tienen que compartir máquinas o porque hacerlo así, reduce los costos o simplemente, porque es necesario producir conjuntamente. Los agentes o productores tienen una demanda de producción que satisfacer y no necesariamente, se producen los mismos tipos de bienes entre agentes. Por ejemplo, en una compañía editorial, un agente debe producir un tiraje de libros de texto y otro debe producir catálogos de la compañía, pero comparten la misma infraestructura; entonces, el problema consiste en repartir el costo total de producción conjunta entre los productores.

En diversas situaciones, se presenta el problema de repartir costos, los productores están trabajando de forma aislada pero al identificar incentivos (o necesidades) para actuar en conjunto, se requiere tener un pago "justo" que cada agente debe aportar si se acepta la producción común.

En esta sección, describimos el modelo matemático de nuestro problema. El desarrollo, los resultados y comentarios que presentamos, en el resto de la tesis, se basan en la

notación que aquí definimos: $N = \{1, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores y $m = (m_1, ..., m_n)$ el vector de demandas de productos, donde cada m_i es un entero mayor que cero que representa la cantidad que requiere producir el jugador i; sean
$M := \{0, 1, ...m_1\} \times \cdots \times \{0, 1, ...m_n\}$ y $M^o := M \backslash \{0, m\}$. Al producto cartesiano que define a M lo podemos ver como una retícula y a M^ocomo esa retícula después de quitarle el origen y el nodo terminal.

Dada la pareja (N, m) definimos el espacio de juegos $G_{N,m} := \{c : M \to \mathbb{R} | c(0) = 0\}$. $G_{N,m}$ es el espacio de funciones de costos para n jugadores con vector de demanda m. Definiendo la suma y el producto por escalar de manera usual, tenemos que $G_{N,m}$ es un espacio vectorial. Una solución es un operador $\varphi : G_{N,m} \to \mathbb{R}^n$, de manera que cada componente se interpreta como el pago asignado al jugador respectivo. A cada $r \in M$ le llamaremos *nodo* o *vector de producción parcial* si $r \neq m$ y *vector de producción total* si $r = m$.

Ejemplo 3.0.1 *Supongamos que en una empresa editorial, se tienen que producir de manera conjunta un tiraje de* 3000 *unidades de un nuevo libro de texto y* 4000 *catálogos, el jugador* 1 *es el responsable de la producción de libros; mientras que el jugador* 2*, de los catálogos, las producciones se dan en lotes de millares, es decir* $N = \{1, 2\}$ *y* $m = (3, 4)$*. Los costos de producción por millar en cierta unidad monetaria se listan a continuación:*

$c(0,4) = 24$	$c(1,4) = 29$	$c(2,4) = 35$	$c(3,4) = 40$
$c(0,3) = 21$	$c(1,3) = 23$	$c(2,3) = 30$	$c(3,3) = 33$
$c(0,2) = 20$	$c(1,2) = 22$	$c(2,2) = 26$	$c(3,2) = 28$
$c(0,1) = 12$	$c(1,1) = 19$	$c(2,1) = 20$	$c(3,1) = 25$
$c(0,0) = 0$	$c(1,0) = 8$	$c(2,0) = 14$	$c(3,0) = 15$

donde $c(i, j)$ *es el costo conjunto de producir* i *millares de libros para el jugador* 1 *y* j *millares de catálogos para el jugador 2; el costo total de producción conjunta es* $c(3, 4) = 40$.

3.1. El valor de Moulin

Ahora que ya tenemos definido tanto al espacio de problemas como las soluciones, necesitamos que éstas satisfagan un conjunto de *simples supuestos generales* que nos permitan rechazar o aceptar soluciones hasta obtener, unívocamente, *la solución*. El artículo de Shapley de 1953 es el mejor ejemplo de esta técnica que ha sido, particularmente, efectiva al resolver problemas de distribución de beneficios conjuntos y en la distribución de costos comunes. *El método de repartición en serie de costos* de Moulin, en 1995, es otro ejemplo de la técnica descrita para problemas de repartición de costos.

En esta sección, presentamos el valor de Moulin, que ilustra el proceso de obtención de soluciones axiomáticas para problemas de repartición de costos; y en la siguiente sección, se presenta una axiomatización diferente, siendo ésta la principal contribución de este trabajo. Primero introducimos las siguientes definiciones y notaciones:

Para x, y elementos de $\mathbb{R}^n$ escribimos $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ para todo $i \in N$ y denotamos por $x \wedge y$ el vector de $\mathbb{R}^n$ tal que $(x \wedge y)_i := \text{mín}\{x_i, y_i\}$ para todo $i \in N$. Para cada $T \subseteq N$, e_T denota el vector en $\mathbb{R}^n$ tal que $(e_T)_i = 1$, si $i \in T$, y $(e_T)_i = 0$,si $i \in N \setminus T$.

Para un $q = (q_1, ..., q_n)$ donde cada q_i es un entero fijo suficientemente grande, sean

$$[0, q] := [0, q_1] \times \cdots \times [0, q_n] \subseteq \mathbb{R}^n \text{ y } \mathcal{C} : = \{c : [0, q] \to \mathbb{R} | c \text{ es no decreciente y } c(0) = 0\}$$

donde no decreciente significa que para t y t' elementos de $[0, q]$, $t \leq t'$ implica que $c(t) \leq c(t')$. Luego denotamos el conjunto de problemas por

$$\mathcal{G}_q = \{(m, c) \,|0 \leq m \leq q, \, c \in \mathcal{C} \} \, .$$

Moulin demostró que sólo existe un operador $\mu : \mathcal{G}_q \to \mathbb{R}^n$ que satisface el siguiente conjunto de axiomas.[1]

[1] Los axiomas de repartición de costos, aditividad, nulidad y simetría son comunes en la literatura.

Axioma 3.1.1 ***(Repartición de costos)*** $\sum_{i\in N} \mu_i(m, c) = c(m)$ *para todo* $(m, c) \in \mathcal{G}_q$.

Axioma 3.1.2 ***(Aditividad)*** $\mu(m, c) + \mu(m, c') = \mu(m, c + c')$ *para cualesquiera* (m, c) *y* (m, c') *elementos de* $\mathcal{G}_q$.

Axioma 3.1.3 ***(Nulidad)*** *Si* $i \in N$ *y* $(m, c) \in \mathcal{G}_q$ *es tal que* $c(m' + e_{\{i\}}) = c(m')$ *para toda* m', *tal que* $0 \leq m' \leq m$, *entonces* $\mu_i(m, c) = 0$.

Axioma 3.1.4 ***(Simetría)*** *Sea* $(m, c) \in \mathcal{G}_q$ *y* $\{i, j\} \subseteq N$ *tal que* $m_i = m_j$ *y* $\tau : N \to N$ *una permutación, tal que* $\tau(i) = j, \tau(j) = i$ *y* $\tau(k) = k$ *si* $k \in N\backslash\{i, j\}$. *Si* c *es tal que* $c(m'_{\tau(1)}, ..., m'_{\tau(n)}) = c(m'_1, ..., m'_n)$, *para todo* $m' \leq m$, *entonces,* $\mu_l((m_{\tau(1)}, ..., m_{\tau(n)}), c) = \mu_{\tau(l)}((m_1, ..., m_n), c)$ *para toda* $l \in N$.

Axioma 3.1.5 ***(Cota superior)*** $\mu_i(m, c) \leq c(m \wedge m_i e_N)$ *para todo* $(m, c) \in \mathcal{G}_q$.

Este axioma pide que el pago del jugador i, no sea mayor que el costo por producir conjuntamente m_i unidades[2] cada uno de los productores.

Axioma 3.1.6 ***(Monotonía de la demanda)*** $\mu_i(m, c) \leq \mu_i(m + e_{\{i\}}, c)$ *para* $0 \leq m \leq q$ *y para toda* $i \in N$ *tal que* $m + e_{\{i\}} \leq q_i$.

Es natural pedir que los pagos individuales no decrezcan si se presenta un incremento en la demanda individual.

Axioma 3.1.7 ***(Monotonía cruzada)*** *Si* $\{i, j\} \subseteq N$ *es tal que* $c(m + e_{\{i,j\}}) - c(m + e_{\{i\}}) - c(m + e_{\{j\}}) + c(m) \geq 0$ *para todo* $m \in \left[0, r - e_{\{i,j\}}\right]$ *entonces se tiene que* $\mu_i(m + e_{\{j\}}, c) \geq \mu_i(m, c)$ $\forall m \in \left[0, r - e_{\{i,j\}}\right]$

[2] O la demanda individual, si ésta es menor a m_i.

Básicamente, este axioma se refiere a que si los costos de los productos de los jugadores i y j son complementarios[3], el pago del jugador i es no decreciente si se incrementa la demanda del jugador j.

Teorema 3.1.1 ***(Moulin, 1995)*** *Existe una única solución:* el método de repartición en serie de costos, *que satisface los axiomas de repartición de costos, aditividad, nulidad, simetría, cota superior, monotonía de la demanda y monotonía cruzada.*

Para dos jugadores, el método de repartición, en serie de costos, se puede calcular como sigue:

$$\mu_1(m,c) := \frac{1}{2}c(m_1,m_1) + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{m_1}[c(t,t-1) - c(t-1,t)]$$

$$\mu_2(m,c) := c(m_1,m_2) - \mu_1(m,c)$$

para todo (m,c) y $m_1 \leq m_2$. La fórmula para el caso $m_2 \leq m_1$ se obtiene permutando el juego. Para el ejemplo 3.0.1 la solución de Moulin es $\mu = (16, 24)$; es decir, el jugador 1 deberá pagar 16 unidades monetarias mientras que el jugador 2 pagará 24.

3.2. Una solución obtenida con dos propiedades

Ahora, presentamos el resultado principal de la tesis, un valor o solución obtenido, pidiendo que la solución tenga dos propiedades – $\widehat{s}$-*sensibilidad* y *separabilidad* – que a continuación definimos y explicamos. Es importante señalar que la solución de la que hablamos también satisface otras propiedades (de las cuales algunas son comunes en la literatura) pero como veremos, ésta se determina unívocamente con las dos propiedades

[3]Es decir, el costo de producción conjunta es mayor o igual que la suma de los costos de producción individual para los jugadores i, j.

mencionadas, entonces decimos que se caracterizó axiomáticamente y la $\widehat{s}$-sensibilidad y separabilidad toman así la categoría de axiomas –más que propiedades-.

El valor o solución que logramos es una caracterización axiomática de la solución de Nouweland y Tijs; pero obtenida en un contexto distinto; y dicha solución, tiene una interpretación natural, en la práctica[4].

Primero, presentamos una base para el espacio de juegos, para cada $r \in M \backslash \{0\}$ definimos los juegos E^r como sigue:

$$E^r(x) := \begin{cases} 1, & x = r \\ 0, & x \neq r. \end{cases}$$

En este momento es conveniente definir la propiedad de linealidad, aunque no sea una de las propiedades que determinen unívocamente la solución.

Propiedad de linealidad

φ es lineal si $\varphi(\beta c + \delta \acute{c}) = \beta\varphi(c) + \delta\varphi(\acute{c})$ para cualesquiera β y δ números reales, c y $\acute{c}$ elementos de $G_{N,m}$.

Considérese el juego suma de dos juegos dados, como los costos para cada nodo en el juego suma son, exactamente, la suma de los costos en cada nodo de los juegos originales, resulta natural, pedir que el pago asignado a cada jugador, en el juego suma, sea la suma de lo que se le asigne en los juegos originales. Así mismo, si un juego se obtiene a partir de otro por medio de la multiplicación de un factor por el costo en cada nodo, se requiere que el pago asignado a cada jugador, en el nuevo juego, sea el pago asociado en el juego original multiplicado por dicho factor.

Sensibilidad

Ahora introducimos el principal concepto en este trabajo; suponemos que de alguna manera cada jugador le asigna una *importancia* a cada nodo de producción parcial; es decir, cada nodo r tiene un significado para cada jugador, éste puede estar relacionado,

[4]Ver sección 3.2.2.

por ejemplo, por el número de productos fabricados de cada jugador en ese nodo, por el nivel que éste considere de atraso o retraso con respecto al nivel de producción de los demás productores. Hay diferentes maneras de asignar (o cuantificar) la importancia, más específicamente definimos un conjunto de funciones por medio de $S := \{s \mid s : M^0 \to \mathbb{R}^n\}$, a cada $s \in S$ le llamaremos una función de sensibilidad y $s_k(r)$ se interpreta como la importancia que el k-ésimo jugador le está dando al nodo r.

Una forma de asignar una importancia sería que cada jugador asocie a cada nodo el valor que se obtiene al dividir la producción individual entre la producción conjunta (en el nodo). Es decir, $s_i(r) = \frac{r_i}{r_1+\ldots+r_n}$ $i \in N$. En el ejemplo 3.0.1, tendríamos:

$$\begin{array}{llll}
s(0,4)=(0,1) & s(1,4)=\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right) & s(2,4)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) & \\
s(0,3)=(0,1) & s(1,3)=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) & s(2,3)=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right) & s(3,3)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\
s(0,2)=(0,1) & s(1,2)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) & s(2,2)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & s(3,2)=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right) \\
s(0,1)=(0,1) & s(1,1)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & s(2,1)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) & s(3,1)=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) \\
 & s(1,0)=(1,0) & s(2,0)=(1,0) & s(3,0)=(1,0)
\end{array}$$

Otros ejemplos de funciones de sensibilidad, se mencionan más adelante.

Ahora estamos en condiciones de enunciar la propiedad de s-sensibilidad:

Propiedad de s-sensibilidad

Dada $s \in S$, decimos que φ es s-sensible si para toda $c \in G_{N,m}$,

$$\frac{\partial \varphi(c)}{\partial E^r} = s(r)$$

para toda $r \in M^o$ donde $\frac{\partial \varphi(c)}{\partial (E^r)} := \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(c+hE^r)-\varphi(c)}{h}$ siempre que tal límite exista.

Esta propiedad indica que la variación de la solución con respecto a la variación del costo en un nodo debe de ser igual a la sensibilidad en dicho nodo. En particular, si φ es lineal, la s-sensibilidad nos está determinando la solución en casi todos los elementos de la base, ya que las dos últimas expresiones nos llevan a $\varphi(E^r) = s(r)\ \forall r \in M^o$.

Es necesario poder identificar a las soluciones s-sensibles, para tal efecto, presentamos algunos resultados útiles para nuestro trabajo.

3.2.1. Soluciones s-sensibles

En lo que resta del trabajo, haremos la siguiente convención: Si $A \subseteq N$ y $x \in \mathbb{R}^n$ entonces $x(A) := \sum_{i \in A} x_i$.

Dadas $s \in S$ y $c \in G_{N,m}$, definimos:

$$\varphi^{h,s}(c) := h(c(m)) + \sum_{r \in M^o} c(r)s(r)$$

donde h es cualquier función con dominio $\mathbb{R}$ y contradominio $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.2.1 *Para cada $s \in S$ y $c \in G_{N,m}$, φ es s-sensible si, y sólo si $\varphi(c) = \varphi^{h,s}(c)$.*

Prueba. Si $\varphi(c) = h(c(m)) + \sum_{r \in M^o} c(r)s(r)$, entonces, $\frac{\partial \varphi(c)}{\partial (E^r)} = s(r)$ para $r \in M^o$; luego φ es s-sensible. Supongamos ahora que φ es s-sensible; entonces, dado s, $\frac{\partial \varphi_i(c)}{\partial (E^r)} = s_i(r)$ para toda $c \in G_{N,m}$ y $r \in M^o$. Para $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $\frac{\partial \varphi_i(c+t\ E^r)}{\partial (E^r)} = s_i(r)$; luego $\varphi_i(c + tE^r) = s_i(r)t + K(i, r, c)$; si evaluamos en $t = 0$: $\varphi_i(c) = K(i, r, c)$, por lo que:

$$\varphi(c) = \sum_{r \in M^o} c(r)s(r) + h(c(m)).$$

■

El siguiente lema identifica a las soluciones lineales y s-sensibles.

Lema 3.2.2 *φ es lineal y s-sensible si, y sólo si $\varphi(c) = \varphi^{h,s}(c)$ para toda función lineal h.*

Prueba. Para c, $c' \in G_{N,m}$; β, $\delta \in \mathbb{R}$ y h lineal se tiene que:

$$\varphi^{h,s}(\beta c + \delta c') = h(\beta c(m) + \delta c'(m)) + \sum_{r \in M^o} (\beta c(r) + \delta c'(r))s(r) =$$

$$\beta h(c(m)) + \beta \sum_{r \in M^o} c(r)s(r) + \delta h(c'(m)) + \delta \sum_{r \in M^o} c'(r)s(r)) = \beta\varphi^{h,s}(c) + \delta\varphi^{h,s}(c')$$

luego, φ es lineal. Además, $\frac{\partial\varphi^{h,s}(c)}{\partial(E^r)} = \varphi^{h,s}(E^r) = s(r)$ para $r \in M^o$; entonces, $\varphi^{h,s}$ es s-sensible. Por otra parte, si suponemos que φ es lineal y s-sensible, como $c = c(m)E^m + \sum_{r \in M^o} c(r)E^r$ entonces, por linealidad y s-sensibilidad se tiene que $\varphi(c) = c(m)\varphi(E^m) + \sum_{r \in M^o} c(r)s(r)$, haciendo $h(c(m)) = c(m)\varphi(E^m)$ se obtiene el resultado. ■

Separabilidad

Primero definimos a los *juegos con costos independientes entre jugadores:*
Sea $c \in G_{N,m}$, c es un juego con costos independientes entre jugadores si existen funciones reales de variable real $f_1, ..., f_n$ con $f_i(0) = 0$, tal que $c(r) = \sum_{i \in N} f_i(r_i)$ para todo $r = (r_1, ..., r_n) \in M$.

Ahora enunciamos la propiedad:

Propiedad de separabilidad

φ es separable si para todo juego c con costos independientes entre jugadores, se cumple que

$\varphi(c) = (f_1(m_1), ..., f_n(m_n))$.

Si los costos son independientes entre los productores, entonces cada jugador paga el costo de su producción.

3.2.2. Sensibilidad inducida por caminos

Supongamos que se tiene una secuencia de producción la cual consiste de $m(N)$ etapas de tal forma que en la etapa 1, se fabrica el primer producto de un jugador, en la segunda etapa, puede ser, la fabricación del segundo producto del mismo jugador o el primer producto de un jugador distinto y así sucesivamente hasta que en la última etapa, se produce la demanda total del conjunto de jugadores, un pago "natural" para la secuencia sería que cada jugador pague el costo de sus productos, es decir, si el $k-\acute{e}simo$ producto de la secuencia se asigna al jugador j, entonces j paga $c(r+e^j)-c(r)$ donde $c(r+e^j)$ es el costo de producción conjunta, después de que el $k-\acute{e}simo$ artículo ha sido fabricado y $c(r)$ es el costo de producción conjunta, exactamente, antes de que se produzca éste; si se suman todos los pagos para cada jugador, se obtiene un vector formado por el pago total por jugador correspondiente a la secuencia. Existen $\frac{m(N)!}{m_1!\cdots m_n!}$ secuencias o caminos diferentes; el objetivo de la sección es definir una función de sensibilidad, basada en vectores de pagos, asignados para cada secuencia que junto con la condición de separabilidad, nos determine una única solución, la cual corresponde a tomar el promedio de los pagos sobre todas las secuencias posibles.

Definimos primero el concepto de camino: Un camino es una función

$$\pi : \{0, 1, ..., m(N)\} \to M$$

con $\pi(0) = 0$, $\pi(m(N)) = m$ y para todo $t \in \{1, 2, ..., m(N)\}$ $\pi(t) - \pi(t-1) = e^i$ para algún $i \in N$ donde e^i es el i-ésimo vector de la base canónica en $\mathbb{R}^n$. Debemos de ver a un camino como una secuencia de producción, en el ejemplo 3.0.1 un camino es el siguiente:

$$\pi(0) = 0 \quad \pi(1) = (0,1) \quad \pi(2) = (1,1) \quad \pi(3) = (2,1)$$

$$\pi(4) = (3,1) \quad \pi(5) = (3,2) \quad \pi(6) = (3,3) \quad \pi(7) = (3,4)$$

lo que significa que el jugador 2 realiza el primer producto; el segundo lo produce el jugador 1 y así, sucesivamente, hasta el último objeto que lo produce el jugador 2.

Al conjunto de caminos lo denotamos con Π y el total de caminos es $|\Pi| = \frac{m(N)!}{m_1!\cdots m_n!}$. Dado $\pi \in \Pi$, generamos un vector de pagos para cada juego $c \in G_{N,m}$:

$$\pi_c = \sum_{t=1}^{m(N)} \left[c(\pi(t)) - c(\pi(t-1))\right]\left[\pi(t) - \pi(t-1)\right];$$

π_c asigna a cada camino los costos marginales inducidos, por el camino en cada jugador. Además, π es lineal en el sentido de que para $\beta \in \mathbb{R}$ y c, d elementos de $G_{N,m}$, se cumple que $\pi_{\beta c} = \beta\pi_c$ y $\pi_{c+d} = \pi_c + \pi_d$. En el caso del camino anterior para el ejemplo 3.0.1, se tiene que $\pi_c = (13, 27)$

Sea π un camino y supongamos que t_0 es tal que $\pi(t_0) = r$; entonces, si $0 < t_0 < m(N)$ tenemos la siguiente situación:

$$\pi(t_0) - \pi(t_0 - 1) = \pi(t_0 + 1) - \pi(t_0)$$

o

$$\pi(t_0) - \pi(t_0 - 1) \neq \pi(t_0 + 1) - \pi(t_0).$$

Para el primer caso, en el juego E^r, $\pi_{E^r} = 0$. Para el segundo caso, supongamos que $\pi(t_0) - \pi(t-1) = e^l$ y $\pi(t_0 + 1) - \pi(t_0) = e^j$; entonces, $\pi_{E^r} = e^l - e^j$, luego, el jugador l paga 1 mientras que el jugador j recibe 1 (paga -1). Así para cada $i \in N$ y $r \in M^o$ definimos los conjuntos: $D_i(r) = \{\pi \in \Pi \mid [\pi_{E^r}]_i = 1\}$ y $A_i(r) = \{\pi \in \Pi \mid [\pi_{E^r}]_i = -1\}$.

$D_i(r)$ está contando el total de caminos donde el jugador i paga en el juego E^r, mientras que $A_i(r)$ cuenta los caminos donde al jugador i le pagan. Ahora, definimos la función $\widehat{s}$ como sigue: $\widehat{s} : M^o \to \mathbb{R}^n$, tal que:

$$\widehat{s_i}(r) = \frac{1}{|\Pi|}\left[\mid D_i(r)\mid - \mid A_i(r)\mid\right]$$

a $\widehat{s}$ le llamaremos sensibilidad inducida por caminos. Para el ejemplo 3.0.1, tenemos que:

$$
\begin{array}{llll}
\widehat{s}(0,4)=\left(-\frac{1}{35},\frac{1}{35}\right) & \widehat{s}(1,4)=\left(-\frac{4}{35},\frac{4}{35}\right) & \widehat{s}(2,4)=\left(-\frac{2}{7},\frac{2}{7}\right) & \\
\widehat{s}(0,3)=\left(-\frac{3}{35},\frac{3}{35}\right) & \widehat{s}(1,3)=\left(-\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right) & \widehat{s}(2,3)=\left(-\frac{2}{35},\frac{2}{35}\right) & \widehat{s}(3,3)=\left(\frac{2}{7},-\frac{2}{7}\right) \\
\widehat{s}(0,2)=\left(-\frac{6}{35},\frac{6}{35}\right) & \widehat{s}(1,2)=\left(-\frac{3}{35},\frac{3}{35}\right) & \widehat{s}(2,2)=\left(\frac{3}{35},-\frac{3}{35}\right) & \widehat{s}(3,2)=\left(\frac{6}{35},-\frac{6}{35}\right) \\
\widehat{s}(0,1)=\left(-\frac{2}{7},\frac{2}{7}\right) & \widehat{s}(1,1)=\left(\frac{2}{35},-\frac{2}{35}\right) & \widehat{s}(2,1)=\left(\frac{1}{7},-\frac{1}{7}\right) & \widehat{s}(3,1)=\left(\frac{3}{35},-\frac{3}{35}\right) \\
 & \widehat{s}(1,0)=\left(\frac{2}{7},-\frac{2}{7}\right) & \widehat{s}(2,0)=\left(\frac{4}{35},-\frac{4}{35}\right) & \widehat{s}(3,0)=\left(\frac{1}{35},-\frac{1}{35}\right)
\end{array}
$$

3.2.3. La solución

El principal resultado de la tesis es un valor (solución) caracterizado con dos axiomas: $\widehat{s}$-sensibilidad y separabilidad, podemos interpretar esta solución como el *promedio de los valores de los caminos,* es decir, que se promedian los costos marginales inducidos por cada camino. Además, mostramos la independencia entre los dos axiomas. La linealidad, simetría y eficiencia se obtienen como propiedad y no se piden como axiomas. El teorema más importante del trabajo es el siguiente:

Teorema 3.2.1 *Sea $\psi : G_{N,m} \to \mathbb{R}^n$ definida como sigue:*

$$\psi(c) := \frac{c(m)}{m(N)}m + \sum_{r \in M^o} c(r)\widehat{s}(r) = \frac{1}{|\Pi|}\sum_{\pi \in \Pi} \pi_c.$$

ψ es la única solución $\widehat{s}$-sensible y separable. Además, estas propiedades son independientes.

Antes de ver la demostración, observemos que el término $\frac{c(m)}{m(N)}m$ se puede interpretar como un reparto de costos proporcional a la demanda y la suma $\sum\limits_{r \in M^o} c(r)\widehat{s}(r)$ como el término de “corrección” que depende de s y de los nodos.

Prueba. Mostraremos que

$$\psi := \frac{c(m)}{m(N)}m + \sum_{r\in M^o} c(r)\widehat{s}(r)$$

es $\widehat{s}$-sensible y separable, que es única y que

$$\frac{c(m)}{m(N)}m + \sum_{r\in M^o} c(r)\widehat{s}(r) = \frac{1}{|\Pi|}\sum_{\pi\in\Pi}\pi_c.$$

Primero mostramos la última aserción; sabemos por el lema 3.2.1 que ψ es una solución $\widehat{s}$- sensible. Para cualquier $\pi \in \Pi$ y $x \in M^o$, ya vimos que $\pi_{E^x} = 0$ o $\pi_{E^x} = e^l - e^j$ para algún l y j en N con $l \neq j$ y así $\sum\limits_{\pi\in\Pi} [\pi_{E^x}]_i = |\ D_i(x)| - |\ A_i(x)|$ para todo $i \in N$. Luego entonces

$$\psi(E^x) = \frac{E^x(m)}{m(N)}m + \sum_{r\in M^o} E^x(r)\widehat{s}(x) = \widehat{s}(x) = \frac{1}{|\Pi|}\sum_{\pi\in\Pi}\pi_{E^x} \text{ si } x \neq m$$

y

$$\psi(E^m) = \frac{E^m(m)}{m(N)}m + \sum_{r\in M^o} E^m(r)\widehat{s}(r) = \frac{1}{m(N)}m = \frac{1}{|\Pi|}\sum_{\pi\in\Pi}\pi_{E^m}.$$

Así que, para cada $x \in M\setminus\{0\}$, $\psi(E^x)$, está tomando el promedio de los costos marginales inducidos por los caminos y como $\{E^x\}_{x\in M\setminus\{0\}}$ es una base y π es lineal con respecto a los juegos en $G_{N,m}$, entonces, $\psi(c) = \frac{1}{|\Pi|}\sum\limits_{\pi\in\Pi}\pi_c$.

Por otro lado, si suponemos que c es un juego con costos independientes entre jugadores con $c(y) = \sum\limits_{i\in N} f_i(y_i)$, entonces, para cualquier $\pi \in \Pi$,

$$\begin{aligned}\pi_c \quad = \quad & \sum_{t=1}^{m(N)} \left[c(\pi(t)) - c(\pi(t-1))\right]\left[\pi(t) - \pi(t-1)\right] = \\ & \sum_{t=1}^{m(N)} \left[\sum_{i\in N}\left[f_i(\pi_i(t)) - f_i(\pi_i(t-1))\right]\right]\left[\pi(t) - \pi(t-1)\right].\end{aligned}$$

Para cada $k \in N$, sea $T_k = \left\{t \mid \pi(t) - \pi(t-1) = e^k\right\}$ entonces, la k-ésima componente de π_c es $(\pi_c)_k = \sum_{t \in T_k} \left[\sum_{i \in N} [f_i(\pi_i(t)) - f_i(\pi_i(t-1))]\right]$ obsérvese que $i \neq k$ implica que $f_i(\pi_i(t)) = f_i(\pi_i(t-1))$, luego:

$$(\pi_c)_k = \sum_{t \in T_k} [f_k(\pi_k(t)) - f_k(\pi_k(t-1))] = f_k(m_k) - f_k(0) = f_k(m_k)$$

y como esta igualdad es válida para todo $\pi \in \Pi$, entonces:

$$\psi(c) = \frac{1}{|\Pi|} \sum_{\pi \in \Pi} \pi_c = (f_1(m_1), ..., f_n(m_n)).$$

La unicidad se sigue también del lema 3.2.1, ya que para cada juego separable c con $c(r) = \sum_{i \in N} f_i(r_i)$ se debe satisfacer la ecuación:

$$h(\sum_{i \in N} f_i(m_i)) + \sum_{r \in M^o} \left[\sum_{i \in N} f_i(r_i)\right] s(r) = (f_1(m_1), ..., f_n(m_n)) \Leftrightarrow$$

$$h(\sum_{i \in N} f_i(m_i)) = (f_1(m_1), ..., f_n(m_n)) - \sum_{r \in M^o} \left[\sum_{i \in N} f_i(r_i)\right] s(r)$$

es decir, a lo más existe una forma de elegir la función h.

Falta mostrar que ninguna de las dos propiedades ($\widehat{s}$-sensibilidad y separabilidad) implica a la otra:

Sean $\theta(c) = \sum_{r \in M^o} c(r)\widehat{s}(r)$ y $\omega(c) = (\omega_1(c), ..., \omega_n(c))$, donde $\omega_i(c) = c(0, ..., m_i, ..,0)$.

De manera trivial, obtenemos que θ es una solución $\widehat{s}$-sensible, pero no separable mientras que ω es separable, pero no $\widehat{s}$-sensible ■

Ahora definimos algunas otras propiedades deseables en la solución y mostramos que las solución ψ satisface dichas propiedades. Comenzamos con la simetría.

Simetría

Definimos la simetría en dos pasos: σ-simetría y τ-simetría, y si una solución satisface ambas, le llamaremos simétrica a la solución.

σ-simetría

Definimos la función σ como sigue:

$$\sigma : G_{N,m} \to G_{N,m}$$
$$\sigma(c(r)) := c(m) - c(m-r)$$

Propiedad de σ-simetría

φ es σ-simétrica si $\varphi(c) = \varphi(\sigma(c))$.

La σ-simetría le está dando la misma importancia tanto a la producción parcial como a la producción restante: dado el juego c, cuando la producción actual es r, la producción restante es $(m-r)$, entonces en el juego $\sigma(c)$ se está asignando en el nodo r la diferencia entre el costo total y el costo de producir el "bloque complemento" $(m-r)$ (ambos costos en el juego c) y en ambos juegos se desea tener la misma solución.

Para el ejemplo 3.0.1 el juego $\sigma(c)$ que para simplificar, escribimos σc es el siguiente:

$\sigma c(0,4) = 25$	$\sigma c(1,4) = 26$	$\sigma c(2,4) = 32$	$\sigma c(3,4) = 40$
$\sigma c(0,3) = 15$	$\sigma c(1,3) = 20$	$\sigma c(2,3) = 21$	$\sigma c(3,3) = 28$
$\sigma c(0,2) = 12$	$\sigma c(1,2) = 14$	$\sigma c(2,2) = 18$	$\sigma c(3,2) = 20$
$\sigma c(0,1) = 7$	$\sigma c(1,1) = 10$	$\sigma c(2,1) = 17$	$\sigma c(3,1) = 19$
$\sigma c(0,0) = 0$	$\sigma c(1,0) = 5$	$\sigma c(2,0) = 11$	$\sigma c(3,0) = 16$

y estamos pidiendo que ambos juegos tengan la misma solución.

τ-simetría

Si i y j son tales que $m_i = m_j$ y $\tau : N \to N$ es una permutación, tal que: $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ y $\tau(k) = k$ si $k \in N \backslash \{i, j\}$.

Entonces definimos:

$$\tau : G_{N,m} \to G_{N,m}$$
$$\tau(c)(r_1, ..., r_n) := c(r_{\tau(1)}, ..., r_{\tau(n)})$$

Propiedad de τ-simetría

φ es τ-simétrica si para i, j y τ con las condiciones anteriores $\varphi(\tau(c)) = \tau(\varphi(c))$ donde: $\tau(\varphi(c)) := (\varphi_{\tau(1)}(c), ..., \varphi_{\tau(n)}(c))$.

La τ-simetría es la simetría estándar en la literatura. Es decir, se pide que la solución no dependa de los atributos personales de los jugadores; en otras palabras, que sea *anónima.*

Los lemas 3.2.3 y 3.2.4 nos señalan cómo deben de ser las funciones de sensibilidad para tener simetría.

Lema 3.2.3 *Si s es una función de sensibilidad tal que $s(m-r) = -s(r)$ para toda $r \in M^o$, entonces, $\varphi^{h,s}(c)$ es lineal, s-sensible y σ-simétrica.*

Prueba. Teniendo presente que $\sigma c(m) = c(m)$ se sigue que:

$$\varphi^{h,s}(\sigma c) = h(\sigma c(m)) + \sum_{r \in M^o} [c(m) - c(m-r)]\, s(r) =$$

$$h(c(m)) + c(m) \sum_{r \in M^o} s(r) - \sum_{r \in M^o} c(m-r)s(r) = h(c(m)) - \sum_{r \in M^o} c(m-r)s(r) =$$

$h(c(m)) + \sum\limits_{r \in M^o} c(r)s(r) = \varphi^{h,s}(c)$. ■

Lema 3.2.4 *Si s es una función de sensibilidad tal que $s_i(\tau r) = s_{\tau(i)}(r)$ para $i \in N$, $r \in M^o$, entonces, $\varphi^{h,s}(c)$ es lineal, s-sensible y τ-simétrica.*

Prueba. Basta con demostrar que $\varphi_i^{h,s}(\tau c) = \varphi_{\tau(i)}^{h,s}(c)$: como $\tau c(m) = c(m)$, entonces:

$$\varphi_i^{h,s}(\tau c) = h_i(\tau c(m)) + \sum_{r \in M^o} \tau c(r) s_i(r) = h_{\tau(i)}(c(m)) + \sum_{r \in M^o} c(r_{\tau(1)}, ..., r_{\tau(n)}) s_i(r_1, ..., r_n)$$

recordemos que $m_i = m_{\tau(i)}$, entonces:

$$\varphi_i^{h,s}(\tau c) = h_{\tau(i)}(c(m)) + \sum_{r\in M^o} c(r_1,...,r_n)s_i(r_{\tau(1)},....,r_{\tau(n)})$$

$$= \frac{c(m)}{m(n)} m_{\tau(i)} + \sum_{r\in M^o} c(r_1,...,r_n)s_{\tau(i)}(r_1,...,r_n) = \varphi_{\tau(i)}^{h,s}(c).$$

■

Eficiencia

Propiedad de eficiencia

φ es eficiente si $\sum\limits_{i\in N} \varphi_i(c) = c(m)$.
El costo que se reparte entre los jugadores debe de ser el costo de la producción total.

El corolario 3.2.1 nos muestra algunas propiedades adicionales de la solución ψ.

Lema 3.2.5

$$i)\widehat{s}_i(\tau r) = \widehat{s_{\tau(i)}}(r)$$

$$ii)\widehat{s}(m-r) = -\widehat{s}(r)$$

Prueba. Ver apéndice 1. ■

Corolario 3.2.1

$$\psi(c) = \frac{c(m)}{m(N)} m + \sum_{r\in M^o} c(r)\widehat{s}(r) = \frac{1}{|\Pi|}\sum_{\pi\in\Pi} \pi_c$$

es lineal, simétrica y eficiente.

Prueba. Como $\sum\limits_{i\in N} [\pi_c]_i = c(m)$, entonces, ψ es eficiente. Por los lemas 3.2.3, 3.2 4 y 3.2.5 se tienen la simetría y la linealidad. ■

3.3. Otras soluciones y funciones de sensibilidad

A manera de síntesis de los resultados hasta ahora mencionados, en esta sección diremos que la solución de los promedios de los caminos, que denotamos con ψ, ha sido caracterizada con los axiomas de $\widehat{s}$-sensibilidad y separabilidad y que la linealidad, simetría y eficiencia se tienen como propiedad. Esta solución corresponde a un valor caracterizado por Nouweland en el contexto de los *juegos de elección múltiple*, los cuales se presentan en el capítulo 5 de esta tesis.

Es importante señalar que en este trabajo no se está suponiendo que la función de costos sea creciente, lo que sí sucede con frecuencia, en la literatura. Otro resultado útil que obtuvimos es la expresión de las soluciones s-sensibles para cualquier función de sensibilidad[5] s. En particular, debemos observar que a lo más, existe una solución s-sensible y separable para cada s. Nótese que φ s-sensible implica que $\varphi(E^m) = h(1)$; luego, obtener más soluciones axiomáticas que sean s-sensibles, equivale a definir adecuadamente h de manera que otras propiedades sean satisfechas. Por otra parte, podemos identificar algunas funciones de sensibilidad para soluciones ya conocidas en la literatura, por ejemplo, las soluciones igualitaria: $\epsilon_i = \frac{c(m)}{n}$, y proporcional: $\rho_i = \frac{c(m)}{m(N)}m$ son 0-*sensibles*, es decir, $s \equiv 0$.

Otro ejemplo de sensibilidad es la definida por $\overleftrightarrow{s_i}(r) = \frac{r_i}{m_i} - \frac{r(N)}{m(N)}$; aquí se está comparando el porcentaje de producción individual con el porcentaje de producción conjunta. Se tiene también que $\overleftrightarrow{s_i}(m-r) = \frac{m_i - r_i}{m_i} - \frac{m(N)-r(N)}{m(N)} = -\frac{r_i}{m_i} + \frac{r(N)}{m(N)} = -\overleftrightarrow{s_i}(r)$ y $\overleftrightarrow{s_i}(\tau r) = \frac{r_{\tau(i)}}{m_i} - \frac{r(N)}{m(N)} = \frac{r_{\tau(i)}}{m_{\tau(i)}} - \frac{r(N)}{m(N)} = \overleftrightarrow{s}_{\tau(i)}(r)$; así, la solución

$$\xi(c) = \frac{c(m)}{m(N)}m + \sum_{r \in M^o} c(r)\overleftrightarrow{s}(r)$$

es lineal, simétrica y $\overleftrightarrow{s}$-sensible, pero no es separable y tampoco eficiente.

[5] Ver subsección 3.2.1.

Para el ejemplo 3.0.1 tenemos:

$$\overleftrightarrow{s}(0,4)=\left(-\tfrac{4}{7},\tfrac{3}{7}\right)\quad \overleftrightarrow{s}(1,4)=\left(-\tfrac{8}{21},\tfrac{2}{7}\right)\quad \overleftrightarrow{s}(2,4)=\left(-\tfrac{4}{21},\tfrac{1}{7}\right)$$

$$\overleftrightarrow{s}(0,3)=\left(-\tfrac{3}{7},\tfrac{9}{28}\right)\quad \overleftrightarrow{s}(1,3)=\left(-\tfrac{5}{21},\tfrac{5}{28}\right)\quad \overleftrightarrow{s}(2,3)=\left(-\tfrac{1}{21},\tfrac{1}{28}\right)\quad \overleftrightarrow{s}(3,3)=\left(\tfrac{1}{7},-\tfrac{3}{28}\right)$$

$$\overleftrightarrow{s}(0,2)=\left(-\tfrac{2}{7},\tfrac{3}{14}\right)\quad \overleftrightarrow{s}(1,2)=\left(-\tfrac{2}{21},\tfrac{1}{14}\right)\quad \overleftrightarrow{s}(2,2)=\left(\tfrac{2}{21},-\tfrac{1}{14}\right)\quad \overleftrightarrow{s}(3,2)=\left(\tfrac{2}{7},-\tfrac{3}{14}\right)$$

$$\overleftrightarrow{s}(0,1)=\left(-\tfrac{1}{7},\tfrac{3}{28}\right)\quad \overleftrightarrow{s}(1,1)=\left(\tfrac{1}{21},-\tfrac{1}{28}\right)\quad \overleftrightarrow{s}(2,1)=\left(\tfrac{5}{21},-\tfrac{5}{28}\right)\quad \overleftrightarrow{s}(3,1)=\left(\tfrac{3}{7},-\tfrac{9}{28}\right)$$

$$\overleftrightarrow{s}(1,0)=\left(\tfrac{4}{21},-\tfrac{1}{7}\right)\quad \overleftrightarrow{s}(2,0)=\left(\tfrac{8}{21},-\tfrac{2}{7}\right)\quad \overleftrightarrow{s}(3,0)=\left(\tfrac{4}{7},-\tfrac{3}{7}\right)$$

Lo anterior nos motiva a plantear el problema de encontrar condiciones para h y s tal que $\varphi^{h,s}$ sea eficiente.

Si suponemos que para s se satisface que $\sum\limits_{i\in N} s_i(r)=0$ para todo $r\in M^o$, entonces $\varphi^{h,s}$ es eficiente si, y sólo si $\sum\limits_{i\in N} h_i(c(m))=c(m)$ para todo c.

La interpretación de la expresión $\sum\limits_{i\in N} s_i(r)=0$ es que las importancias entre los jugadores se nulifican para cada nodo. Para efectos prácticos, es razonable pedir que la importancia sea de suma cero; es decir, lo que es favorable para unos va en detrimento de otros.

La función $\widehat{s}$ satisface la condición de "suma cero", es decir, las importancias se nulifican mientras que $\overleftrightarrow{s}$ no satisface la condición en el caso general pero si c es un juego *cuadrado,* es decir si el vector de demandas es de la forma $m=(w,...,w)$ para algún $w\in\mathbb{N}$ entonces $\sum\limits_{i\in N}\overleftrightarrow{s_i}(r)=\sum\limits_{i\in N}\left[\frac{r_i}{w}-\frac{r(N)}{nw}\right]=\sum\limits_{i\in N}\left[\frac{nr_i-r(N)}{nw}\right]=\frac{1}{nw}\left[nr(N)-nr(N)\right]=0.$ Por lo tanto ξ es eficiente para este caso particular.

A continuación, presentamos una tabla con todas las soluciones citadas en este capítulo aplicadas en el ejemplo 3.0.1, la solución de Moulin la denotamos con μ.

$$
\begin{array}{rcccc}
\psi & = & \left(\frac{506}{35}, \frac{894}{35}\right) & \approxeq & (14.46, 25.54) \\
\mu & = & (16, 24) & \approxeq & (16, 24) \\
\theta & = & \left(\frac{-94}{35}, \frac{94}{35}\right) & \approxeq & (-2.69, 2.69) \\
\omega & = & (15, 24) & \approxeq & (15, 24) \\
\epsilon & = & (20, 20) & \approxeq & (20, 20) \\
\rho & = & \left(\frac{120}{7}, \frac{160}{7}\right) & \approxeq & (17.14, 22.86) \\
\xi & = & \left(\frac{51}{7}, \frac{121}{4}\right) & \approxeq & (7.2857, 30.250)
\end{array}
$$

En este caso, la solución θ no tiene sentido, más bien es un término de "corrección"[6], ya que para todo juego c, $\psi(c) = \rho(c) + \theta(c)$.

[6] Ver teorema 3.2.1

Capítulo 4

El caso de 2 jugadores con igual demanda

El propósito de este capítulo es presentar una aplicación de la teoría de representaciones a la solución del problema de repartición de costos, nos restringimos al caso particular de dos jugadores con igual demanda, es decir, se tiene que: $N = \{1, 2\}$ y $m = (m_1, m_2)$ con $m_1 = m_2 = w$ para algún entero positivo w. En particular, se descomponen el espacio de juegos $G_{\{1,2\},(w,w)}$ y el espacio $\mathbb{R}^2$ en suma directa de subespacios irreducibles de manera que la solución se determina en cada subespacio de la descomposición. Luego entonces, estudiamos soluciones $\varphi : G_{\{1,2\},(w,w)} \to \mathbb{R}^2$ que son lineales y simétricas.

Convención: Para simplificar, en este capítulo denotaremos con $G_{w,w}$ al espacio de juegos $G_{\{1,2\},(w,w)}$.

4.1. Soluciones lineales, simétricas y eficientes (LSE):

Descomposición de $G_{w,w}$ y $\mathbb{R}^2$

Para el espacio vectorial $G_{w,w}$ tenemos que una base consiste de $w^2 + 2w$ elementos (recordemos la base $\{E^r\}_{r \in M \setminus \{0\}}$) luego $\dim G_{w,w} = w^2 + 2w$; y está actuando el grupo $H = \{e, \tau, \sigma, \tau\sigma\}$, τ y σ conmutan. Además en $\mathbb{R}^2$, $\tau(x, y) = (y, x)$ y $\sigma(x, y) = (x, y)$.

Sean

$$U = \{(t,t) \mid t \in \mathbb{R}\} \text{ y } U^{\perp} = \{(t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

entonces

$$\mathbb{R}^2 \approxeq U \oplus U^{\perp} \approxeq (U \otimes U) \oplus (U^{\perp} \otimes U)$$

Si w es par:

$$G_{w,w} = (U \otimes U)^{\frac{w^2+2w}{4}} \oplus (U^{\perp} \otimes U)^{\frac{w^2+2w}{4}} \oplus (U \otimes U^{\perp})^{\frac{w^2+4w}{4}} \oplus (U^{\perp} \otimes U^{\perp})^{\frac{w^2}{4}}$$

si w es impar:

$$G_{w,w} = (U \otimes U)^{\frac{(w+1)^2}{4}} \oplus (U^{\perp} \otimes U)^{\frac{(w+1)^2}{4}} \oplus (U \otimes U^{\perp})^{\frac{w^2+4w-1}{4}} \oplus (U^{\perp} \otimes U^{\perp})^{\frac{w^2-1}{4}}$$

(ver apéndice 2).

Soluciones lineales y simétricas

Por el Lema de Schur[1] tenemos que para φ lineal y simétrica $\varphi(c) = 0$ si $c \in (U \otimes U^{\perp}) \oplus (U^{\perp} \otimes U^{\perp})$.

El siguiente lema nos dice como deben ser las soluciones en el subespacio $U \otimes U$.

Lema 4.1.1 *Si φ es LSE y $c \in U \otimes U$ entonces $\varphi(c) = c(w,w)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.*

Prueba. Por simetría se tiene que $\tau(\varphi_1(c)) = \varphi_2(\tau(c))$ pero como $c \in U \otimes U$ entonces $\tau(c) = c$, luego $\varphi_1(c) = \varphi_2(c)$ y por eficiencia $\varphi_1(c) = \varphi_2(c) = \frac{c(w,w)}{2}$. ■

Ahora resta obtener las soluciones para el subespacio $U^{\perp} \otimes U$, el siguiente teorema es útil para el estudio de la proyección de un juego en este subespacio.

Teorema 4.1.1 *Si $V = \oplus V_i^{\oplus a_i}$ Entonces la proyección de V sobre $V_i^{\oplus a_i}$ está dada por:*

$$\pi_i = \frac{\dim V_i}{|H|} \sum_{h \in H} \overline{\chi_{V_i}(h)} \cdot h.$$

[1] Lema .2.1 del apéndice.

En nuestro caso $\pi_1 c = \frac{1}{4}\left[c + \tau(c) + \sigma(c) + \tau\sigma(c)\right]$ (ya que $V_1 = U \otimes U$) luego para $c \in G_{w,w}$ se tiene que $\pi_1(c)(w,w) = c(w,w)$ y por el lema anterior

$$\varphi(\pi_1 c) = [\pi_1 c(w,w)](\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = c(w,w)(\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

También se verifica que $\pi_2 c = \frac{1}{4}\left[c - \tau(c) + \sigma(c) - \tau\sigma(c)\right]$ (ya que $V_2 = U^{\perp} \otimes U$).

Si definimos el producto interior: $\langle c, c' \rangle = \sum\limits_{i,j} c(i,j)c'(i,j)$, tenemos la base ortonormal

$$\{c^{k,l} \mid k < l \quad k = 0,1,\ldots,w-1 \quad l = 1,\ldots,w\}$$

dada por:

Para $i < j$:

$$c^{k,l}(i,j) = c^{k,l}(w-j, w-i),$$

$$c^{k,l}(j,i) = -c^{k,l}(i,j),$$

$$c^{k,l}(i,j) = \begin{cases} \beta_{kl} & \text{si} \quad (i,j) = (k,l) \\ & 0 \text{ otro caso} \end{cases}$$

$$\text{donde } \beta_{kl} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si} \quad k + l = w \\ & \frac{1}{2} \text{ otro caso} \end{cases}$$

y $c^{k,l}(t,t) = 0$; entonces $\pi_2^{k,l} c = \langle \pi_2 c, c^{k,l} \rangle c^{k,l}$ pero $\langle \pi_2 c, c^{k,l} \rangle = \langle \frac{1}{4}\left[c - \tau(c) + \sigma(c) - \tau\sigma(c)\right], c^{k,l} \rangle$

Si $k + l \neq w$ se tiene:

$$\langle c, c^{k,l} \rangle = \beta_{kl}[c(k,l) + c(w-l, w-k) - c(l,k) - c(w-k, w-l)]$$

$$\langle \tau(c), c^{k,l} \rangle = \beta_{kl}[c(l,k) + c(w-k, w-l) - c(k,l) - c(w-l, w-k)]$$

$$\langle c, c^{k,l} \rangle - \langle \tau(c), c^{k,l} \rangle = 2\beta_{kl}[c(k,l) + c(w-l, w-k) - c(l,k) - c(w-k, w-l)]$$

$$\langle \sigma(c), c^{k,l} \rangle =$$

$$\beta_{kl}[c(w,w)-c(w-k,w-l)+c(w,w)-c(l,k)-c(w,w)+c(w-l.w-k)-c(w,w)+c(k,l)]$$

$$\langle \tau\sigma(c), c^{k,l}\rangle =$$

$$\beta_{kl}[c(w,w)-c(w-l,w-k)+c(w,w)-c(k,l)-c(w,w)+c(w-k.w-l)-c(w,w)+c(l,k)]$$

$$\langle \sigma(c), c^{k,l}\rangle - \langle \tau\sigma(c), c^{k,l}\rangle =$$

$$2\beta_{kl}[-c(w-k,w-l)-c(l,k)+c(w-l.w-k)+c(k,l)]$$

$$\therefore \langle \pi_2 c, c^{k,l}\rangle = \frac{1}{2}[c(k,l)+c(w-l,w-k)-c(l,k)-c(w-k,w-l)]$$

Si $k+l=w$ se tiene:

$$\langle c, c^{k,l}\rangle = \beta_{kl}[c(k,l)-c(l,k)]$$

$$\langle \tau(c), c^{k,l}\rangle = \beta_{kl}[c(l,k)-c(k,l)]$$

$$\langle c, c^{k,l}\rangle - \langle \tau(c), c^{k,l}\rangle = 2\beta_{kl}[c(k,l)-c(l,k)]$$

$$\langle \sigma(c), c^{k,l}\rangle = \beta_{kl}[c(w,w)-c(w-k,w-l)-c(w,w)+c(w-l.w-k)]$$

$$\langle \tau\sigma(c), c^{k,l}\rangle = \beta_{kl}[c(w,w)-c(w-l,w-k)-c(w,w)+c(w-k.w-l)]$$

$$\sigma(c), c^{k,l}\rangle - \langle \tau\sigma(c), c^{k,l}\rangle = 2\beta_{kl}[-c(w-k,w-l)+c(w-l.w-k)] = 2\beta_{kl}[-c(l,k)+c(k,l)]$$

$$\therefore \langle \pi_2 c, c^{k,l}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[c(k,l)-c(l,k)].$$

Teorema de soluciones LSE :

De todo lo anterior, si hacemos la asignación $\lambda_{kl} := \beta_{kl}\varphi_1(c^{k,l})$, las proyecciones anteriores nos conducen al siguiente teorema:

Teorema 4.1.2 *Una solución φ es LSE si, y sólo si*

$$\varphi_1(c) = \frac{C(w,w)}{2} + \sum_{\substack{i<j \\ 0\leq i\leq w-1}} \lambda_{ij}(c(i,j) - c(j,i))$$

$$\varphi_2(c) = \frac{C(w,w)}{2} - \sum_{\substack{i<j \\ 0\leq i\leq w-1}} \lambda_{ij}(c(i,j) - c(j,i))$$

$$\lambda_{ij} = \lambda_{w-j,w-i}$$

Este teorema es otro resultado importante en este trabajo; ya que nos dice como deben de ser las soluciones lineales, simétricas y eficientes para el caso de dos jugadores con igual demanda, es decir, si restringimos todas las soluciones de la literatura que tengan las tres propiedades a este caso particular, entonces, éstas se pueden escribir en la forma que señala el teorema con valores particulares de los λ_{ij}.

Total de soluciones LSE :

Las soluciones dependen de los valores de cada λ_{ij}, el total de soluciones LSE está dado como sigue:

- Si w es par se tienen $\frac{w^2+2w}{4}$ soluciones LSE.
- Si w es impar se tienen $\frac{w^2+2w+1}{4}$ soluciones LSE.

Ejemplos de soluciónes LSE

A continuación identificamos los valores de los λ_{ij} para las soluciones ψ[2] y μ[3].

"Solución de los promedios"

La solución ψ, que ya presentamos y que interpretamos como el promedio sobre todas las secuencias de producción, en el caso particular de dos jugadores con igual demanda, es LSE y los valores para los λ_{ij} son los siguientes:

$$\lambda_{0j} = \frac{-\binom{2w-1-j}{w-1}}{\binom{2m}{m}} \qquad\qquad j = 1, ..., w$$

$$\lambda_{ij} = \frac{\binom{i-1+j}{i-1}\binom{2w-i-j}{w-i} - \binom{i+j}{i}\binom{2w-i-j-1}{w-i-1}}{\binom{2w}{w}} \qquad \begin{array}{l} i = 1, ..., w-1 \\ j = i+1, ..., w \end{array}$$

Solución de Moulin

La solución de Moulin restringida al caso particular de los problemas de dos jugadores con igual demanda es LSE, en particular se puede ver en la siguiente expresión que los valores de los λ_{ij} pertenecen al conjunto $\left\{\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$.

$$\mu_1(c) = \frac{c(w,w)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{w}[c(t-1,t) - c(t,t-1)]$$

$$\mu_2(c) = \frac{c(w,w)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{w}[c(t-1,t) - c(t,t-1)]$$

[2] La solución principal de este trabajo.
[3] La solución de Moulin.

4.2. Juegos no cooperativos

La teoría de juegos tiene dos grandes ramas: la teoría de juegos cooperativos y los no-cooperativos. El tratamiento de un juego requiere distinguir entre aquellas en las que los individuos tienen la posibilidad de alcanzar acuerdos "contractuales" por los que se comprometen a realizar determinadas acciones, de aquellas en las que los acuerdos contractuales no son posibles.

Si los jugadores pueden comunicarse entre ellos y negociar los resultados, se tratará de juegos con transferencia de utilidad o juegos cooperativos, en los que la problemática se concentra en el análisis de las posibles coaliciones y su estabilidad. En los juegos sin transferencia de utilidad o juegos no cooperativos, los jugadores no pueden llegar a acuerdos previos. En esta subsección, abordamos[4] los conceptos básicos de la teoría de juegos no cooperativos. En particular, estaremos interesados en juegos bipersonales, es decir, hay dos jugadores y situamos el problema de repartición de costos con dos jugadores e igual demanda, en el contexto de juegos no cooperativos, en particular, veremos que las soluciones lineales, simétricas y eficientes son en algún sentido, soluciones para los juegos no cooperativos correspondientes.

4.2.1. Juegos estáticos y dinámicos: forma normal y extensiva

Hay juegos no cooperativos donde cada jugador toma su decisión sin conocer las decisiones de los demás jugadores y el conjunto de estas decisiones determina el resultado del juego. Los jugadores nunca más interactúan. En estos juegos, los jugadores deciden sus acciones sobre la base de la información disponible inicialmente y durante el proceso no se genera información adicional. A estos juegos se les conoce como *juegos estáticos.*

Cualquier juego estático puede representarse en forma normal (una representación análoga a la matriz de pagos en problemas de decisión individual) o en forma extensiva

[4] Basándonos en los apuntes de "Teoría de Decisión y de los Juegos". Universidad Carlos III de Madrid. Curso 2001-02.

(análoga a los árboles de decisión). Sin embargo, la forma normal es una representación económica y precisa de un juego estático. Nuestro propósito es definir un juego estático que garantice la existencia de *soluciones de equilibrio Nash* que en el contexto del problema de repartición de costos sean lineales, simétricas y eficientes. Por lo cual nos restringiremos a los juegos estáticos representados en forma normal.

Juegos Estáticos: forma normal

Los elementos que describen un juego en forma normal G son:

- Un conjunto de jugadores $N = \{1, ..., n\}$.
- Un conjunto de acciones o estrategias posibles S_i para cada jugador $i \in N$.
- Una función de utilidad (esperada) sobre los perfiles de acciones posibles

$$(s_1, ..., s_n) \in S = S_1 \times \cdots \times S_n,\ u_i : S \to \mathbb{R},$$

  para cada jugador $i \in N$.

Así, un juego en forma normal está descrito por una terna (N, S, u).

Ejemplo 4.2.1 ***(Pares/*Im*pares)*** *En este juego, dos individuos eligen simultáneamente un número par o impar; si la suma es par (impar), el jugador* 2 *(*1*) paga un peso al jugador 1 (2). Este juego puede representarse en forma normal como* $G = (N, S, u)$*, donde* $N = \{1, 2\}$ *y para* $i \in N$*,* $S_i = \{Pi, Ii\}$ *(P por par y N por impar) y*

$$1 = u_1(P_1, P_2) = u_1(I_1, I_2) = -u_2(P_1, P_2) = -u_2(I_1, I_2) =$$

$$-u_1(P_1, N_2) = -u_1(I_1, P_2) = u_2(P_2, I_2) = u_2(I_1, P_2).$$

Podemos escribir todo lo anterior en forma compacta en una tabla:

$jug1\backslash jug2$	P_2	I_2
P_1	$1,-1$	$-1,1$
I_1	$-1,1$	$1,-1$

En la tabla, la fila representa la estrategia elegida por el del jugador 1 y la columna, la elegida por el jugador 2. Para cada perfil de estrategias (fila, columna), el primer (segundo) número de cada casilla representa la utilidad esperada del jugador 1 (2).

En los siguientes ejemplos, mantenemos esta convención.

Ejemplo 4.2.2 ***(Dilema del Prisionero)*** *Dos individuos son detenidos e incomunicados. La policía sospecha que estos individuos han cometido un delito grave (penado con 4 años de cárcel), aunque sólo dispone de pruebas para condenarles por un delito menor (penado con 1 año de cárcel). La policía propone a cada preso el mismo trato: si delata a su compañero (D) quedará libre (y por supuesto, éste será condenado a 4 años de cárcel). Si ambos se acusan mutuamente, la pena se reduciría de 4 a 3 años (para cada uno), mientras que si ambos guardan silencio (C) entonces, con la evidencia circunstancial de que dispone la policía, sólo podrían ser condenados a un año de cárcel.*

Este juego puede representarse en forma normal, mediante la siguiente tabla:

jug1\jug2	C_2	D_2
C_1	$-1,1$	$-4,0$
D_1	$0,-4$	$-3,-3$

El ejemplo 4.2.1 pertenece a una clase de juegos que se denominan de suma cero o estrictamente competitivos. En estos juegos, los intereses de los jugadores son diametralmente opuestos: en cada circunstancia posible, las ganancias de cada jugador son pérdidas del oponente. Obviamente, los juegos de suma cero representan situaciones de puro conflicto. Mientras que en el ejemplo 4.2.2 aunque existen amplias posibilidades de cooperación, la existencia de ganancias substanciales derivadas de la desviación del comportamiento cooperativo impiden que éste se materialice.

Racionalidad e información

Las propuestas de solución, que se presentan a continuación, están justificadas bajo dos hipótesis fundamentales sobre la conducta de los individuos y su información básica.

Estas hipótesis son:

Racionalidad: El objetivo de cada individuo es maximizar su bienestar. Esta hipótesis no excluye la posibilidad de que el bienestar de un individuo dependa de la situación de otros individuos y, por tanto, admite la posibilidad de comportamientos tanto individualistas como altruistas. Ahora bien, cualquier consideración sobre el bienestar de los demás debe estar recogida expresamente en la función de utilidad esperada de cada jugador.

Conocimiento: El hecho de que los individuos son racionales es de conocimiento público; es decir, todos lo saben, todos saben que todos lo saben, todos saben que todos saben que todos lo saben, ...(ad infinitum).

Soluciones a juegos estáticos

Predecir el comportamiento de los jugadores de un juego estático requiere identificar un perfil de estrategias o acciones y, por tanto, identificar indirectamente el resultado del juego. Proponemos un concepto de solución para los juegos estáticos no cooperativos: el conjunto de equilibrios de Nash.

Equilibrio de Nash

El concepto de equilibrio de Nash identifica los perfiles de estrategias que son estables, en el sentido de que ningún jugador quiera desviarse, si espera que los demás adopten las acciones que se prescribe para ellos. El equilibrio de Nash indica el desenlace predecible del juego y puede interpretarse como un “acuerdo” o una “norma” que tiene la propiedad de que es autosostenible: una vez aceptado, ningún jugador tiene incentivos para modificarlo unilateralmente. Otra interpretación interesante contempla al concepto de equilibrio de Nash como perfil de expectativas que se "autoconfirman", en el sentido de que si los jugadores esperan que los demás se comporten de acuerdo con lo prescrito, entonces, estas acciones ocurren como consecuencia de la conducta óptima de los jugadores; es decir, las expectativas de los jugadores son "racionales" porque son consistentes con la conducta racional.

Consideremos un juego en forma normal $G = (N, S, u)$. Para $i \in N$ escribiremos $s = (s_i, s_{-i})$ donde $s_{-i} \in S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$; s es un perfil de estrategias que especifica una acción para cada jugador excepto el i–ésimo.

Equilibrio de Nash. Un equilibrio de Nash (EN) de G es un perfil $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ tal que para cada jugador i y cada estrategia $s_i \in S_i$ se cumple que $u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{i-1}^*)$.

Escribimos $EN(G)$ para denotar el conjunto de equilibrios de Nash del juego G.

El conjunto $EN(G)$ puede contener más de un elemento o puede ser vacío (como en el ejemplo 4.2.1).

Un equilibrio de Nash se caracteriza porque cada jugador responde óptimamente a las estrategias de los demás jugadores. Esta interpretación permite reformular el concepto de equilibrio de Nash como una solución a un sistema de ecuaciones. Para cada jugador $i \in N$ y para cada perfil de estrategias $s_{-i} \in S$ para los demás jugadores, identifiquemos la estrategia que maximiza la utilidad del jugador i, $R_i(s_{-i})$.

Decimos que $R_i(s_{-i})$ es el conjunto de *mejores respuestas* del jugador i al perfil s_{-i}.

Con esta notación, podemos caracterizar a los equilibrios de Nash como aquellas soluciones que satisfacen lo siguiente:

$s_i \in R_i(s_{-i})\ i \in N$.

Para mostrar la utilidad de esta formulación, para el cálculo de los equilibrios de Nash de un juego, discutimos los ejemplos anteriores.

En "el dilema del prisionero" tenemos lo siguiente:

La mejor respuesta para el jugador 1 a la estrategia de no delatar del jugador 2, es la de delatar: $R_1(C_2) = D_1$.

La mejor respuesta para el jugador 1 a la estrategia de delatar del jugador 2, es la de delatar: $R_1(D_2) = D_1$.

La mejor respuesta para el jugador 2 a la estrategia de no delatar del jugador 1, es la de delatar: $R_2(C_1) = D_2$.

La mejor respuesta para el jugador 2 a la estrategia de delatar del jugador 1, es la de delatar: $R_2(D_1) = D_2$.

Así que (D_1, D_2) es el único equilibrio Nash del juego.

Mientras que para el juego de "pares e impares" tenemos que la mejor respuesta para el jugador 1 a la estrategia de "par" del jugador 2 es la de "par": $R_1(P_2) = P_1$.

La mejor respuesta para el jugador 1 a la estrategia de "impar" del jugador 2 es la de "impar": $R_1(I_2) = I_1$.

La mejor respuesta para el jugador 2 a la estrategia de "par"del jugador 1 es la de "impar": $R_2(P_1) = I_2$.

La mejor respuesta para el jugador 2 a la estrategia de "impar" del jugador 1 es la de "par": $R_2(I_1) = P_2$.

Por lo tanto, no tenemos puntos de equilibrio Nash.

Equilibrios Nash lineales, simétricos y eficientes para el problema de repartición de costos de producción

Ahora, retomando el problema de repartición de costos de producción, en particular el espacio $G_{w,w}$, definiremos juegos no cooperativos de manera que existan soluciones lineales, simétricas y eficientes como soluciones de equilibrio Nash.

Primero definimos la función h que indicará el número en el que dos caminos *difieren por primera vez*:

$$h : \Pi \times \Pi \rightarrow \mathbb{N}$$

es la función definida de acuerdo a lo siguiente:

$i)h(\pi, \pi) = 2w + 1$ para todo π

$ii)$Si $\pi \neq \pi'$, $h(\pi, \pi')$ es tal que:

$$[\pi_c(0)]_1 = [(\pi'_c(0)]_1, [(\pi_c(1))]_1 = [\pi'_c(1)]_1, ..., [\pi_c(h(\pi, \pi') - 1)]_1 < [\pi'_c(h(\pi, \pi') - 1)]_1$$

y

$$[\pi_c(h(\pi, \pi'))]_1 \neq [\pi'_c(h(\pi, \pi'))]_1.$$

Obsérvese que $h(\pi, \pi') = h(\pi', \pi)$.

Ahora, para cada juego c definimos la relación de orden $\preceq_c$ en Π como sigue:
$\pi \preceq_c \pi'$ si se satisface cualquiera de las tres condiciones siguientes:

- $\pi = \pi'$, o
- $(\pi_c)_1 < (\pi'_c)_1$, o
- $(\pi_c)_1 = (\pi'_c)_1$ y $[\pi_c(h(\pi, \pi'))]_1 < [\pi'_c(h(\pi, \pi')]_1$.

Es fácil demostrar que para cada c, $\leq_c$ es un orden en Π:

1) $\preceq_c$ **es reflexiva:** Como $\pi = \pi'$ luego de la definición se sigue que $\pi \preceq_c \pi$.

2) $\preceq_c$ **es antisimétrica:** Supongamos que $\pi \preceq_c \pi'$ y $\pi' \preceq_c \pi$. Por la tricotomía la única posibilidad para satisfacer la definición es que $\pi = \pi'$.

3) $\preceq_c$ **es transitiva:** Supongamos que $\pi \preceq_c \pi'$ y $\pi' \preceq_c \pi''$. Supongamos que $\pi \neq \pi'$ y $\pi' \neq \pi''$ y $\pi' \neq \pi''$ luego tenemos cuatro posibilidades:

a) Si $(\pi_c)_1 \ < (\pi'_c)_1$ y $(\pi'_c)_1 \ < (\pi''_c)_1$ entonces por transitividad se tiene que $(\pi_c)_1 < (\pi''_c)_1$ por lo tanto $\pi \preceq_c \pi''$.

b) Si $(\pi_c)_1 \ < (\pi'_c)_1$ y $(\pi'_c)_1 \ = (\pi''_c)_1, \ [\pi'_c(h(\pi',\pi''))]_1 \ < [\pi''_c(h(\pi',\pi''))]_1$ entonces $(\pi_c)_1 \ = (\pi''_c)_1$ por lo que $\pi \preceq_c \pi''$.

c)Si $(\pi_c)_1 \ = (\pi'_c)_1, \ [\pi_c(h(\pi,\pi'))]_1 \ < [\pi'_c(h(\pi,\pi')]_1$**y** $(\pi'_c)_1 \ < (\pi''_c)_1$ entonces $(\pi_c)_1 < (\pi''_c)_1$ lo que significa que $\pi \preceq_c \pi''$.

d)Si $(\pi_c)_1 \ = (\pi'_c)_1, \ [\pi_c(h(\pi,\pi'))]_1 \ < [\pi'_c(h(\pi,\pi')]_1$ y $(\pi_c)_1 \ = (\pi'_c)_1$, $[\pi_c(h(\pi,\pi'))]_1 \ < [\pi'_c(h(\pi,\pi')]_1$ entonces se tiene que $(\pi_c)_1 \ = (\pi''_c)_1$ y $[\pi_c(h(\pi,\pi'))]_1 \ < [\pi''_c(h(\pi',\pi'')]_1$ por lo tanto $\pi \preceq_c \pi''$.

Para cada juego c, si ordenamos los caminos de Π mediante el orden inducido por $\preceq_c$ obtenemos $\pi^1, \pi^2, ..., \pi^{\binom{2w}{w}}$ de tal forma que $\pi^1 \preceq_c \pi^2 \preceq_c, ..., \preceq \pi_c^{\binom{2w}{w}}$. Así para cada $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{\binom{2w}{w}}) \in \mathbb{R}^{\binom{2w}{w}}$ con $\alpha_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{\binom{2w}{w}} \alpha_i = 1$ definimos:

- La combinación convexa $(x_\alpha, y_\alpha) = \sum_{i=1}^{\binom{2w}{w}} \alpha \pi^i(c)$.
- El juego no cooperativo $G^{\alpha,c}$ por medio de una terna: $G^{\alpha,c} = (\{1,2\}, \Pi \times \Pi, P_\alpha(c))$ donde

$$P_\alpha(c) : \Pi \times \Pi \to \mathbb{R}^2$$

  con

$$P_\alpha(c)(\pi^i, \pi^j) = (a_{ij}, b_{ij}) = \begin{cases} \pi^i(c) & i = j \\ (x_\alpha, y_\alpha) & i \neq j \end{cases}$$

La interpretación de este juego es que un juez confronta a los dos jugadores y les pide que elijan cada uno el camino de su preferencia. Si ambos jugadores optan por el mismo, entonces, cada uno deberá pagar el costo asociado para ese camino. En caso de no coincidir, el juez fija un vector α y les asigna como pagos el vector (x_α, y_α). El siguiente teorema muestra que (x_α, y_α) es un punto de equilibrio de Nash (para cualquier α)

Teorema 4.2.1 *Existe un (i^*, j^*) tal que $a_{i^*j^*} \leq a_{ij^*} \forall i$ y $b_{i^*j^*} \leq b_{i^*j} \forall j$. Es decir, existe un punto de equilibrio de Nash en estrategias puras dado por (π^{i^*}, π^{j^*}). Además (x_α, y_α) es el pago asociado a dicho equilibrio.*

Prueba. Sea $t \in \mathbb{N}$ tal que

$a_{(t-1)(t-1)} \leq x_\alpha \leq a_{tt} \leq a_{(t+s)(t+s)}$ $\forall s \in \left\{1, ..., \binom{2w}{w} - t\right\}$ entonces

$b_{tt} \leq y_\alpha \leq b_{(t-1)(t-1)} \leq b_{(t-r)(t-r)} \forall r \in \{2, ..., t-1\}$.

Para (x_α, y_α) tenemos dos posibilidades:

1) $(x_\alpha, y_\alpha) = \pi^i$ para algún $i \in N$. En este caso $a_{ii} = a_{ij}$ $\forall j \in \left\{1, ..., \binom{2w}{w}\right\}$ y $b_{ii} = b_{ki}$ $\forall k \in \left\{1, ..., \binom{2w}{w}\right\}$.

Por lo tanto $(x_\alpha, y_\alpha) \in EN(G^{\alpha,c})$ (observe que $i^* = j^* = i = i$).

2) $(x_\alpha, y_\alpha) \neq \pi^i$ $\forall i \in N$. Sea $t \in \mathbb{N}$ tal que $a_{(t-1)(t-1)} \leq x_\alpha \leq a_{tt} \leq a_{(t+s)(t+s)}$ $\forall s \in \left\{1, ..., \binom{2w}{w} - t\right\}$.

Entonces $b_{tt} \leq y_\alpha \leq b_{(t-1)(t-1)} \leq b_{(t-r)(t-r)} \forall r \in \{2, ..., t-1\}$.

Sean k^0 y l^0 números fijos con $k^0 \in \{1, ..., t-1\}$ y $l^0 \in \left\{0, ..., \binom{2w}{w} - t\right\}$.

Entonces se tiene lo siguiente:

$a_{(t-k^0)(t+l^0)} = x_\alpha \leq a_{i(t+l^0)}$ $\forall i \in \left\{1, ..., \binom{2w}{w}\right\}$

$b_{(t-k^0)(t+l^0)} = y_\alpha \leq b_{(t-k^0)j}$ $\forall j \in \left\{1, ..., \binom{2w}{w}\right\}$

Así que $i^* = t - k^0$ y $j^* = t + l^0$. Por lo tanto $(x_\alpha, y_\alpha) \in EN(G^{\alpha,c})$. ■

Regresando a la interpretación del juego $G^{\alpha,c}$, el teorema sugiere que cualquier combinación convexa[5] de los costos marginales, inducidos por los caminos determina un equilibrio Nash.

[5] Es fácil ver que con combinaciones adecuadas se obtienen soluciones LSE.

Capítulo 5

Juegos de elección múltiple

Una herramienta apropiada para modelar los juegos de repartición de costos son los llamados juegos de elección múltiple introducidos por Hsia and Raghavan [7] en 1992. Un juego de elección múltiple es una generalización de un juego cooperativo, en donde cada jugador tiene varios niveles de actividad.

En este capítulo, se abordan, de manera breve, los juegos de elección múltiple y su correspondencia con los juegos de repartición de costos de producción; en particular, presentamos la solución de Nouweland et al [13] para juegos de elección múltiple, cuyo equivalente en problemas de reparto de costos de producción es la solución ψ obtenida en el capítulo 3 con los axiomas de $\widehat{s}$-sensibilidad y separabilidad.

5.1. Preliminares

Sea $N := \{1, ..., n\}$ el conjunto de jugadores. En un juego de elección múltiple, cada jugador $i \in N$ tiene un número finito de niveles de actividad en el que él puede jugar. En particular, cualquier par de jugadores puede tener un número diferente de nivel de actividad. La recompensa, que un grupo de jugadores puede obtener, depende del esfuerzo de los jugadores del grupo. Más formalmente, supongamos que cada jugador tiene $m_i + 1$

niveles de actividad que puede ejercer, donde $m_i \in \mathbb{N}$. El conjunto $M_i := \{0, ..., m_i\}$ indica el espacio de acción para le jugador i, donde 0 significa la no participación del jugador. Los elementos del conjunto $\mathcal{M}^N := \prod_{i \in N} M_i$ son llamados coaliciones (multielección). La coalición $m = (m_1, ..., m_n)$ juega el papel de la gran coalición. Además, introducimos la notación $M_i^+ := M_i \setminus \{0\}$ y $M_+^N := \mathcal{M}^N \setminus \{(0, ..., 0)\}$. Una función característica es una función $v : \mathcal{M}^N \to \mathbb{R}$ con $v(0, ..., 0) = 0$ que asigna a cada coalición $s = (s_1, ..., s_n) \in \mathcal{M}^N$ la utilidad conjunta que pueden obtener si cada jugador i ejerce el nivel $s_i \in M_i$.

Para cada $s \in \mathcal{M}^N$ se define el subconjunto de jugadores activos en s como $port(s) := \{i \in N \mid s_i > 0\}$.

Si v y ω son funciones características, el juego suma $v + \omega$ se define como $(v + \omega)(s) = v(s) + \omega(s)$.

También definimos para s y t en $\mathcal{M}^N$ la coalición $(s \wedge t)$ por medio de $(s \wedge t)_i := \text{mín}\{s_i, t_i\}$ para todo $i \in N$.

Definición 5.1.1 *Un juego de elección múltiple es una terna (N, m, v) donde N es el conjunto de jugadores, $m \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ es el vector que describe los números de niveles de actividades para todos los jugadores y v es la función característica.*

Denotamos por $MC^{N,m}$ al conjunto de todos los juegos de elección múltiple que tienen como conjunto de jugadores a N y vector de niveles de actividad a m. Una solución en $MC^{N,m}$ es un operador $\Psi : MC^{N,m} \to \mathbb{R}^{M^+}$. Cuando no haya lugar a confusión escribiremos $\Psi(v)$ en lugar de $\Psi((N, M, v))$.

Si $\Psi_{ij}(N, m, v)$ para $i \in N$ y $j \in M_i^+$ es una solución de un juego de elección múltiple, existe una manera natural de asignar una solución φ para el problema de repartición de costos por medio de $\varphi_i = \sum_{j \in M_i^+} \Psi_{ij}$.

5.2. La solución de Nouweland

Ahora presentamos la solución de Nouweland (1995) la cual es una extensión del valor de Shapley.

Sea $v \in MC^{N,m}$. Supongamos que la gran coalición $m = (m_1, ..., m_n)$ se forma paso a paso, comenzando con la coalición $(0, ..., 0)$ de manera que en cada paso el nivel de actividad de algún jugador se incrementa en 1. En particular, tenemos un total de $\sum_{i \in N} m_i$ pasos y hay diferentes formas de generar estas secuencias que comienzan en $(0, ..., 0)$ y terminan en m, a saber hay $\frac{\left(\sum_{i \in N} m_i\right)!}{m_1! \cdots m_n!}$ secuencias distintas. Para cada secuencia, en cada paso, se induce un valor marginal para cada jugador, el cual se describe a continuación:

Primero, diremos que un orden (para v) es una biyección $\theta : M_+^N \to \left\{1, ..., \sum_{i \in N} m_i\right\}$ tal que $\theta((i,j)) < \theta((i, j+1))$ para todo $i \in N$ y $j \in \{1, ..., m_i - 1\}$. El número de órdenes permitidos es $\frac{\left(\sum_{i \in N} m_i\right)!}{m_1! \cdots m_n!}$. El conjunto de todos los órdenes permitidos lo denotaremos con Θ. Sea θ un orden y $k \in \left\{1, ..., \sum_{i \in N} m_i\right\}$. La coalición que está presente después de k pasos de acuerdo al orden θ, la denotamos por $s^{\theta,k}$ y está dada por

$$s_i^{\theta,k} := \text{máx}\left(\{j \in M_i \mid \theta\left((i,j)\right) \leq k\} \cup \{0\}\right)$$

para toda $i \in N$. Definimos el vector marginal correspondiente a θ como:

$$\omega^\theta : M_+^N \to \mathbb{R}$$

donde

$$\omega_{ij}^\theta := v\left(s^{\theta,\theta((i,j))}\right) - v\left(s^{\theta,\theta((i,j))-1}\right)$$

para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$.

Un concepto importante en esta teoría es el de juego de mínimo esfuerzo:

Definición 5.2.1 *El juego de mínimo esfuerzo $u_s \in MC^{N,m}$ con $s \in M_+^N$ se define como:*

$$u_s(t) := \begin{cases} 1, & si\ t_i \geq s_i \ para\ toda\ i \in N \\ 0, & otro\ caso, \end{cases}$$

para toda $t \in \mathcal{M}^N$.

A continuación definimos el valor de Nouweland:

Definición 5.2.2 *Sea $v \in MC^{N,m}$. Entonces, la solución de Nouweland es la media de todos los vectores marginales de v, en fórmula:*

$$\Phi(v) := \frac{m_1! \cdots m_n!}{\left(\sum_{i \in N} m_i\right)!} \sum_{\theta \in \Theta} \omega^\theta.$$

El valor Φ puede ser caracterizado con *aditividad*, *la propiedad del portador* y *fuerza jerárquica.*

- **Propiedad de aditividad** Ψ es aditiva si para todo $v, \omega \in MC^{N,m}$ se verifica que $\Psi(v + \omega) = \Psi(v) + \Psi(\omega)$.

- **Propiedad del portador** Si $t \in \mathcal{M}^N$ es un portador de $v \in MC^{N,m}$, es decir: $v(s) = v\,(s \wedge t)$ para toda $s \in \mathcal{M}^N$, entonces Ψ tiene la propiedad de portador si se satisface que $\sum\limits_{i \in port(t)} \sum\limits_{j=1}^{t_i} \Psi_{ij}(v) = v(m)$.

- **Propiedad de fuerza jerárquica** Ψ tiene la propiedad de fuerza jerárquica si para cada $v \in MC^{N,m}$ que es un múltiplo de un juego de mínimo esfuerzo, digamos: $v = \beta u_s$ con $s \in \mathcal{M}_+^N$ y $\beta \in \mathbb{R}$, se tiene que para todo $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in M^+$

$$\Psi_{i_1,j_1}(v) \cdot h_s(i_2, j_2) = \Psi_{i_2,j_2}(v) \cdot h_s(i_1, j_1).$$

Donde:

$$h_s(i,j) = \frac{m_1! \cdots m_n!}{\left(\sum_{i \in N} m_i\right)!} \left| \left\{ \theta \in \Theta \mid \theta((i,j)) = \max_{(k,l): l \leq s_k} \theta\left((k,l)\right) \right\} \right|.$$

Lo que sigue es enunciar el teorema del valor de Nouweland:

Teorema 5.2.1 *La solución Φ es la única que satisface aditividad, la propiedad del portador y fuerza jerárquica.*

Observemos que la solución $\Phi : MC^{N,m} \to \mathbb{R}^{M^+}$ equivale a la solución $\psi : G_{N,m} \to \mathbb{R}^n$, ya que:

$$\psi_i = \sum_{j \in M_i^+} \Psi_{ij.}$$

para todo $i \in N$. Es decir, si interpretamos un orden θ, como una secuencia o camino π, entonces Φ equivale a tomar el promedio sobre todos los caminos de los costos marginales inducidos por cada uno de éstos, los cuales se definieron en el capítulo 3.

Capítulo 6

Conclusiones

A manera de conclusiones, se presentan las aportaciones de esta tesis. Primero, en el capítulo 3, tenemos el concepto de s-sensibilidad. En muchas áreas de la Matemática y Física se tiene el problema de estudiar la sensibilidad de soluciones ante pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, podemos citar entre otras la programación lineal, las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos; en estos últimos, existe el concepto de *sensibilidad a condiciones iniciales* el cual se asocia con los sistemas "caóticos".

El concepto principal en este trabajo, el de sensibilidad tiene su origen precisamente en relacionar soluciones entre juegos "parecidos", donde existen "pequeñas" variaciones en las condiciones iniciales, atribuibles quizás a errores de medición o a otras circunstancias.

El concepto de sensibilidad da pie a estudiar las soluciones ya existentes y las futuras, desde la perspectiva de la sensibilidad. La propiedad de s-sensibilidad es una condición "fuerte" que se le está pidiendo a la solución, si la solución es lineal, entonces salvo por un elemento, la sensibilidad nos está determinando cómo debe de ser la solución en la base del espacio vectorial de juegos. El resultado obtenido con la $\widehat{s}$-sensibilidad y separabilidad que denotamos con ψ, corresponde a la solución de Nouweland en el contexto de juegos de elección múltiple, es decir, dimos una caracterización diferente, incluso, es importante señalar que en este trabajo no se está suponiendo que la función de costos sea creciente, lo que sí se supone con frecuencia en la literatura de los problemas de repartición de costos; además la solución ψ es una solución natural si se plantea desde la óptica de que cada secuencia o itinerario de producción induce un pago para cada jugador de acuerdo a la secuencia: si el $k-ésimo$ producto de la secuencia lo fabrica el jugador j, j lo pagará, el pago del producto se cuantifica mediante $c(r+e^j)-c(r)$ donde $c(r+e^j)$ es el costo de producción conjunta, después de que el $k-ésimo$ artículo ha sido fabricado y $c(r)$ es el costo de producción conjunta exactamente antes de que se produzca éste; luego, con la suma de los costos de cada producto con su respectivo productor obtenemos el vector de pagos para la secuencia, tomar el promedio de los pagos sobre todas las secuencias posibles y asignar este pago promedio como solución, equivale a aceptar la solución ψ.

Por otra parte, en el capítulo 4, se utilizó la teoría de representaciones para resolver el caso de dos jugadores con igual demanda, en particular encontramos todas las soluciones lineales, simétricas y eficientes. De manera breve, la idea clave fue descomponer el espacio de juegos $G_{w,w}$ y el espacio de vector de pagos $\mathbb{R}^2$ en suma directa de piezas "elementales". Más aún, cualquier solución lineal y simétrica restringida a cualquier subespacio elemental, es cero o una multiplicación por un escalar -esto se sigue del llamado lema de Schurt- por lo que toda solución lineal y simétrica, se puede escribir como suma de mapeos triviales. Además, en este caso, nos situamos en el contexto de juegos no cooperativos y se presentaron soluciones en equilibrio de Nash que son lineales, simétricas y eficientes.

Por último, en el capítulo 5, a manera de ilustración, se introduce la teoría de los juegos de elección múltiple para observar la analogía de las soluciones de estos juegos con los de reparto de costos en particular, se propone una manera "natural" por medio de la cual una solución Ψ para juegos de elección múltiple, induce una solución φ para juegos de reparto de costos. Específicamente, se tiene que la solución Φ de Nouweland para los primeros juegos induce la solución ψ (caracterizada con los axiomas de $\widehat{s}$-sensibilidad y separabilidad) para los segundos.

.1. Demostración de la proposición de las propiedades de $\hat{s}$

Introduzcamos las siguientes designaciones:

Si A es un conjunto que contiene elementos de k tipos diferentes, entonces, el número de permutaciones de A que contiene a_1 elementos del tipo 1, a_2 elementos del tipo 2, etcétera; a_k elementos del tipo k será:

$$P(a_1, ..., a_k) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)!}{a_1! \cdots a_k!}.$$

Para cada $r = (r_1, ..., r_n)$ sean

$$r^{i^-} = r - e^i$$
$$r^{i+} = r + e^i$$

así, para cada i el total de caminos con origen 0 y punto final r^{i^-} es:

$$P(r_1, ..., r_i - 1, ..., r_n),$$

y para $l \neq i$ el total de caminos con origen r^{l^+} y punto final m es:

$$P(m_1 - r_1, ..., m_l - r_l - 1, ..., m_n - r_n).$$

Por lo tanto:

$$\widehat{s_i}(r) = \left[P(r^{i^-}) \sum_{l \in N \setminus \{i\}} P(m - r^{l^+})\right] - \left[P(m - r^{i+}) \sum_{l \in N \setminus \{i\}} P(m - r^{l^-})\right] =$$

$$\frac{P(m-r)P(r)}{[m(N)-r(N)]\,r(N)}\left\{\left[r_i\sum_{l\in N\diagdown\{i\}}(m_l-r_l)\right]-\left[(m_i-r_i)\sum_{l\in N\diagdown\{i\}}r_l\right]\right\}=$$

$$\frac{P(m-r)P(r)}{[m(N)-r(N)]\,r(N)}\left\{[r_i m(N\diagdown\{i\})]-[(m_i r(N\diagdown\{i\})]\right\}.$$

$$Nota: P(x)=0 \text{ si } x_i<0 \text{ para algún } i.$$

Prueba del teorema 3.2.5

- $$i)\widehat{S}_i(\tau r)=\widehat{S}_i(r_{\tau(1)},...,r_{\tau(n)})=$$

$$\frac{P(m-r)P(r)}{[m(N)-r(N)]\,r(N)}\left\{r_{\tau(i)}m(N\diagdown\{\tau(i)\})-m_{\tau(i)}r(N\diagdown\{\tau(i)\})\right\}=\widehat{S_{\tau(i)}}(r).$$

- $$ii)\;\widehat{S_i}(m{-}r)=\frac{P(r)P(m-r)}{[m(N)-r(N)]\,r(N)}\left\{r(N\diagdown\{i\})(m_i-r_i)-r_i\left[m(N\diagdown\{i\})-r(N\diagdown\{i\}\right]\right\}=$$

$$-\widehat{s}_i(r).$$

.2. Teoría de representaciones de grupos finitos

En este apéndice, se presentan los conceptos y resultados básicos de la teoría de representaciones de grupos finitos, así como una breve introducción a la teoría de caracteres. La teoría es extensa, pero en este trabajo, escribimos sólo las definiciones y resultados necesarios para el mismo[1].

.2.1. Representaciones de grupos finitos

Primero, se formalizará la noción de un grupo, para después definir lo que es una representación de un grupo finito.

Definición .2.1 *Un conjunto no vacío de elementos G, se dice que forma un grupo si en G está definida una operación binaria $\cdot : H \times H \to H$ tal que*

i) $h_1 \cdot h_2 \in H$ *para todo* $h_1, h_2 \in H$*.*

ii) $h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3) = (h_1 \cdot h_2) \cdot h_3$ *para todo* $h_1, h_2,\ h_3 \in H$*.*

iii) $\exists\ e \in H$ *tal que* $h \cdot e = e \cdot h$ *para todo* $h \in H$*.*

iv) *Para todo* $h \in H, \exists\ h^{-1} \in H$ *tal que* $h \cdot h^{-1} = h^{-1} \cdot h = e$*.*

Definición .2.2 *Una representación de un grupo finito G en un espacio vectorial complejo V de dimensión finita es un homomorfismo $\rho : G \to GL(V)$. En tal caso, se dice que V es una representación de G y que ρ le da estructura de G-módulo a V.*

En otras palabras, una representación para H es un mapeo que asigna a cada elemento $h \in H$ una trasformación lineal $\rho(h) : V \to V$ que preserva multiplicación: $\rho(h_1 h_2) = \rho(h_1)\rho(h_2)$ para todo $h_1, h_2 \in H$.

[1] Usamos como referencias [4], [17] y [19].

Definición .2.3 *Una función δ G-equivariante entre dos G-módulos V y W es una función $\delta : V \to W$ tal que $g(\delta(v)) = \delta(g(v))$ $\forall v \in V$, $\forall g \in G$.*

Definición .2.4 *Una representación V es llamada irreducible si no existen subespacios propios (de V) diferentes de cero que sean invariantes.*

Ahora mencionamos algunos resultados útiles en la teoría de representaciones que usaremos para estudiar soluciones para los problemas de reparto de costos de producción, es decir, operadores que van del espacio vectorial de juegos a $\mathbb{R}^2$:

- **Teorema .2.1** *Si V y W son G-módulos entonces $V \oplus W$ también es un G-módulo.*

- **Lema .2.1** ***(Lema de Schur)*** *Si V y W son representaciones irreducibles de G y $\delta : V \to W$ es un homomorfismo G-equivariante de G-módulos, entonces:*

  1) δ es un isomorfismo, o $\delta \equiv 0$.

  2) Si $V = W$, entonces $\delta \equiv \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

- **Teorema .2.2** *Toda representación V de un grupo finito G tiene una descomposición: $V \approxeq V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$*

  donde los V_i son representaciones irreducibles distintas.

.2.2. Caracteres:

La teoría de caracteres es una herramienta efectiva para determinar las representaciones de un grupo finito. Los siguientes resultados son útiles para obtener la descomposición de los espacios donde estarán definidas las soluciones de los problemas de repartición de costos de producción:

- Sea V una representación de G. El caracter de V es la función $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ dada por $\chi_V(g) = tr(g)$.

- Propiedades: Para V y W representaciones de G, g y h elementos de G se tiene:

    - $\chi_V(e) = \dim V$.
    - $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$.
    - $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$.
    - $\chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$.
    - $\chi_{V\otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g)$.

- Producto interno: Si χ y ψ son dos caracteres se define un producto interno:

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi(g)\overline{\psi(g)}.$$

- Más propiedades:

    - χ es el caracter de una representación irreducible si y sólo si $\langle \chi, \chi \rangle = 1$
    - Si χ y χ' son los caracteres de dos representaciones irreducible no isomorfas, entonces $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$.
    - Si V es un G-módulo y $V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$ donde los V_i son distintos e irreducibles entonces:
        - $\chi_V = \sum a_i \chi_{V_i}$.
        - $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \sum a_i^2$.
        - $a_i = \langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle$.
    - Si V_1 y V_2 son respectivamente G_1-módulo y G_2-módulo entonces:

$$(g_1 \otimes g_2)(v_1 \otimes v_2) = g_1(v_1) \otimes g_2(v_2).$$

induce un homomorfismo de $G_1 \times G_2$ en $GL(V_1 \otimes V_2)$ luego entonces, denotaremos con $V_1 \boxtimes V_2$ a la representación de $G_1 \times G_2$ y se satisface que $\chi_{V_1 \boxtimes V_2} = \chi_{V_1}\chi_{V_2}$.

.2.3. Cálculos para la descomposición de $G_{w,w}$ y $\mathbb{R}^2$

Tenemos que $H = \langle\tau\rangle \times \langle\sigma\rangle \approxeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ luego:

$\langle\tau\rangle$	e	τ
$\chi_{trivial}$	1	1
χ_{signo}	1	-1

$\langle\sigma\rangle$	e	σ
$\chi_{trivial}$	1	1
χ_{signo}	1	-1

H	e (e,e)	τ (τ,e)	σ (e,σ)	$\tau\sigma$ (τ,σ)
$\chi_{U\otimes U}$	1	1	1	1
$\chi_{U^\perp\otimes U}$	1	-1	1	-1
$\chi_{U\otimes U^\perp}$	1	1	-1	-1
$\chi_{U^\perp\otimes U^\perp}$	1	-1	-1	1
χ_{Gww}	w^2+2w	w	$w \bmod 2$	$-w$

Bibliografía

[1] Albizurri, M.J., J.C. Santos y J.M. Zarzuelo (2002). "On the Serial Cost Sharing Rule". *International Journal of Game Theory* (31): 437-446.

[2] Aumman, R.J. y S. Hart (1994). *Handbook of Game Theory With Economic Applications.* Vol. 2. Elseiver.

[3] Fernández J (2002). "Teoría de juegos: su aplicación en economía". *El colegio de México.*

[4] Fulton,W y J. Harris (1991) *Representation Theory A First Course.* Springer-Verlag.

[5] Haimanko, O. (2002). "Marginal Cost Price Rule for Homogeneous Cost Functions". *International Journal of Game Theory* (31): 19-28.

[6] Hernández L.,G. Juárez y F. Sánchez (2006). "Disection of solutions in cooperative game theory using representation techniques". *International Journal of Game Theory* (35): 395-426.

[7] Hsiao, C.R. y TES Raghavan (1992). "Monotonicity and dummy free property for multi-choice cooperative games". *International Journal of Game Theory* (21): 301-312.

[8] James G. y M Liebeck. (1993) *Representations and Characters of Groups.* Cambridge.

[9] Kuhn, H.W. (1997). *Classics in Game Theory.*Princeton.

[10] Moulin, H. (1995). "On Additive Methods to Share Joint Costs". *The Japanese Economic Review* (46): 303-332.

[11] Nash, J.F. (1951). "Non-cooperative Games, *Annals of Mathematics* (54): 155-162.

[12] Neumann, J.V. y O. Morgenstern. (1944) "Theory of Games and Economics Behavior". *Princeton.*

[13] Nouweland, A. y S. Tijs (1995). "Cores and Related Solution Concepts for Multichoice Games". *Mathematical Methods of Operations Research* (41): 289-311.

[14] Peters, H. (1992). *Axiomatic Bargaining Game Theory.* Serie C, vol. 9. Kluwer.

[15] Sánchez, F. (2000)."Soluciones axiomáticas en juegos cooperativos: casos clásicos y aportaciones" Tesis Doctoral. *Centro de investigación en Matemáticas.*

[16] Sánchez J. (2009)."Caracterización de soluciones de juegos en forma de función de partición usando teoría de representaciones" Tesis Doctoral. *Centro de investigación en Matemáticas.*

[17] Serre, J.P.(1977). *LinearRepresentations of Finite Groups.* Springer.

[18] Shapley, L.S. (1953). "A value for n-person games". *Annals of Mathematics Studies* (28): 307-317.

[19] Villarroel, R. (2006) "Introducción a la teoría de representaciones de grupos finitos". Notas de Álgebra Moderna IV. *UNAM.*

[20] Wang, Y.T. y D.X. Zhu (2002). "Ordinal Proportional Cost Sharing". *J. Math. Econ.* (37): 215-230.