Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Estimaciones de la constante de Lipschitz para que las funciones n-periódicas tengan punto fijo

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A

Víctor Pérez García

Director de Tesis

M. C. Helga Andrea Fetter Nathansky

Guanajuato, Gto, 29 de septiembre de 2009.

Agradecimientos

A M. C. Helga Fetter Nathansky por su gran labor de asesora durante el desarrollo de la tesis, por aportar ideas y por sus valiosos comentarios para el desarrollo de la misma. También agradezco el apoyo que en cuestiones académicas me brindó durante todo este tiempo.

A la Dra. Berta Gamboa de Buen por su apoyo y por sus comentarios en la revisión de la tesis.

Al profesor Kazimierz Goebel por haber aportado ideas al trabajo y por su hospitalidad en Lublin, Polonia.

A la Dra. Maite Fernández Unzueta y al Dr. Carlos Bosch Giral por la revisión de la tesis y por sus comentarios.

Al CONACyT por haberme otorgado una beca desde agosto de 2004 a julio de 2008 y al Centro de Investigación en Matemáticas, CIMAT, por el apoyo de becas desde agosto de 2008 hasta la fecha.

Prefacio

Uno de los resultados más importantes en la Teoría de Punto Fijo es el dado por Stefan Banach, el cual asegura la existencia de un único punto fijo para las contracciones en espacios métricos completos. En este caso, el conjunto de puntos fijos es un conjunto de un solo elemento. Si se pide que el espacio de Banach tenga propiedades geométricas especiales, entonces se puede asegurar que el conjunto de puntos fijos para funciones no expansivas es un conjunto convexo.

Resultados de este tipo son escasos en la teoría de punto fijo. En este trabajo vamos a dar condiciones a las funciones y al espacio donde estén definidas para encontrar ciertas regularidades en el conjunto de puntos fijos.

Mediante ejemplos muy generales se puede justificar que el hallar propiedades topológicas y geométricas en el conjunto de puntos fijos no es trivial. En la primera parte del capítulo I hablaremos de esto. También describiremos brevemente los trabajos que se han hecho al respecto. Una forma de hallar regularidades es mediante las retracciones, estas son funciones continuas que van del dominio de la función T al conjunto de sus puntos fijos $\mathrm{Fix}(T)$ y que restringidas al conjunto $\mathrm{Fix}(T)$ resultan ser la función identidad, se dirá que $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto del dominio de T. En la literatura se pueden hallar muy pocos trabajos acerca de retractos no expansivos que provienen del estudio de la teoría de punto fijo, para funciones no expansivas.

Nuestro trabajo estará enfocado, básicamente, a la existencia de retractos en el conjunto de puntos fijos de funciones que tienen constante de Lipschitz mayor que 1. Esta existencia está dada muchas veces con la ayuda de un proceso iterativo. Si el punto fijo se encuentra mediante la iteración de cierta función, podremos en algunos casos decir de qué clase de continuidad es el retracto existente. Hablaremos también en este capítulo I de cómo las retracciones no necesariamente son únicas, y definiremos un orden (no total) en el conjunto de retracciones; al final de este capítulo daremos un ejemplo concreto, como aplicación de este orden definido.

En el capítulo II estudiaremos a las funciones Lipschitz y (a,n)-rotativas, éstas son una clase de generalización de las funciones n-periódicas, vamos a exponer algunos trabajos que se han realizado sobre este tema. Para esta clase de funciones, el caso trivial son las no expansivas. Por lo tanto, nos centraremos en las funciones con constante de Lipschitz mayor que 1. En este estudio mejoraremos algunas estimaciones de ciertas constantes, relacionadas con la existencia de puntos fijos en espacios de Hilbert, para las funciones (a,n)-rotativas, encontrando así una nueva clase de funciones que tienen puntos fijos. Daremos condiciones suficientes para que el conjunto de puntos fijos sea un retracto de su dominio.

En el capítulo III hablaremos acerca de la constante de Neumann-Jordan, la relacionaremos con la teoría de punto fijo y con la existencia de retractos. Definiremos también una generalización de esta constante, demostrando que muchas propiedades de la constante de Neumann-Jordan se generalizan a su vez. Después, haciendo uso de esta generalización, encontraremos nuevos espacios de Banach en los cuales se tendrá la propiedad de punto fijo para cietas clases de funciones. Finalmente estableceremos algunas preguntas abiertas con respecto a esta generalización.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Punto Fijo y Retractos

1.1. Introducción

Uno de los problemas que la Teoría de Punto Fijo trata es el siguiente: dada una función continua $T : C \to C$, donde C es un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Banach X, determinar si existe un punto fijo de T en C, esto es, si existe $x \in C$ de tal modo que $Tx = x$. El problema puede ser planteado en un espacio métrico completo, pero en nuestro caso sólo consideraremos a los espacios de Banach.

Dos objetos entran en juego, el primero es la función continua y el segundo el espacio de Banach en cuestión. Para garantizar la existencia de algún punto fijo, uno tiene muchas veces que imponer condiciones adicionales a la función o al espacio X y en varias ocasiones, se recurre a una combinación de ambas.

En este capítulo veremos algunos resultados que nos dicen cómo es el conjunto de puntos fijos para unas funciones llamadas no expansivas, por ejemplo, veremos si dicho conjunto es convexo o conexo por trayectorias.

Después nos preguntaremos qué pasa en el caso de funciones Lipschitz continuas con constante mayor que 1; veremos que casi nada se puede decir en general. Sin embargo, bajo ciertas condiciones del espacio y de las funciones, podremos decir algo más acerca del conjunto de puntos fijos.

En nuestro estudio nos restringiremos a este tipo especial de funciones, las llamadas Lipschitz continuas.

En esta dirección, uno de los resultados más importantes en la Teoría de Punto Fijo, y quizás el más conocido, es el llamado Principio de Contracción de Banach, establecido por Stefan Banach en su tesis en 1922.

Definición 1.1. *Sea X un espacio de Banach. Una función $T : X \to X$ se llama* Lipschitz continua*, si existe una constante k tal que $\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|$ para todo $x, y \in X$. Si la constante k es la mínima con esta propiedad, entonces diremos que T es Lipschitz continua con constante de Lipschitz k, o que T es k-Lipschitz continua. Si $k < 1$, diremos que T es una contracción y si $k = 1$ diremos que T es no expansiva.*

El principio de contracción de Banach establece lo siguiente: "Si $T : X \to X$ es una contracción, donde X es un espacio de Banach, entonces T tiene un único punto fijo en X".

Cabe mencionar que este teorema se vale también para espacios métricos completos. Éste es un teorema de existencia y unicidad y además podemos hallar al punto fijo mediante una iteración.

Sin embargo, no todos los resultados en la Teoría de Punto Fijo son así, es decir, la mayoría sólo establece la existencia de puntos fijos, unos resultados son más constructivos que otros, pero no se dice mucho más acerca de los puntos fijos.

Supongamos que ya conocemos la existencia de puntos fijos; si no tenemos unicidad, la siguiente pregunta que se puede uno hacer es, ¿cómo es el conjunto de puntos fijos?

El siguiente lema, el cual nos dice algo sobre la estructura geométrica del conjunto de puntos fijos para funciones no expansivas, ya no es un resultado tan conocido, pues involucra precisamente la geometría de los espacios de Banach. Para esto, introduzcamos la siguiente definición.

Definición 1.2. *Un espacio de Banach X se dice que es* estrictamente convexo *si la siguiente implicación es válida para todo $x, y \in X$:*

$$\left.\begin{array}{r}\|x\| \leq 1\\ \|y\| \leq 1\\ \|x-y\| > 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

Por ejemplo, todos los espacios clásicos L_p y ℓ_p para $1 < p < \infty$ son estrictamente convexos.

Para lo siguiente, definamos:

Definición 1.3. *Sea $C \subset X$, donde X es un espacio métrico. Si $T : C \to C$ es una función continua, definamos al conjunto de puntos fijos por* $\mathrm{Fix}(T) = \{x \in C : Tx = x\}$.

El siguiente resultado se puede encontrar en [GK90, pág. 34]:

Lema 1.4. *Si K es un subconjunto convexo y cerrado de un espacio estrictamente convexo X y si $T : K \to K$ es no expansivo, entonces* $\mathrm{Fix}(T)$ *es cerrado y convexo.*

En la literatura de la Teoría de Punto Fijo no se encuentran muchos resultados de este tipo que hablen sobre la estructura del conjunto de puntos fijos. La razón es que en general el conjunto de puntos fijos es cerrado y nada más puede decirse, aun si nos restringimos a las funciones Lipschitz continuas, como veremos en la primera parte de este capítulo.

Las retracciones son funciones continuas de C a algún subconjunto D de C tales que restringidas a D resultan ser la función identidad, más adelante daremos su definición precisa, por ahora con esto es suficiente. Supongamos que $T : C \to C$ es tal que $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. Veremos que la existencia de retracciones $R : C \to \mathrm{Fix}(T)$ ayuda a establecer un tipo especial de regularidad en el conjunto $\mathrm{Fix}(T)$; A este respecto veremos varios de los resultados más importantes que hay en la literatura acerca de la existencia de retracciones no expansivos.

Una aportación que se da con este trabajo es la existencia de una clase de retracciones que se obtienen a partir de la convergencia de ciertas funciones, como se verá en la sección 1.3.1 titulada: *Tipos de continuidad dependiendo de la convergencia*.

Otra aportación será la sección 1.3.2, donde, con un ejemplo, veremos que las retracciones en general no son únicas. Finalmente en la sección 1.3.3 definiremos un orden (parcial) para una cierta clase de retracciones y veremos una aplicación de esto.

1.2. El conjunto de puntos fijos

Sea X un espacio de Banach y $T : C \to C$ una función continua, donde C es un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de X. Supongamos que $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. ¿Qué podemos decir acerca del conjunto $\mathrm{Fix}(T)$? Como T es continuo, podemos demostrar que $\mathrm{Fix}(T)$ es cerrado, y veremos que en general nada más puede decirse.

Antes de enunciar el siguiente teorema, daremos una definición.

Definición 1.5. *Diremos que un subconjunto E de un espacio de Banach es* conexo por trayectorias *si dados $x, y \in E$, existe una función continua $\gamma : [0, 1] \to E$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.*

Sea C un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach X y $T : C \to C$ no expansiva. Tomemos $\varepsilon > 0$ y definamos los siguientes conjuntos:

$$F_\varepsilon(T) = \{x \in C : \|x - Tx\| \leq \varepsilon\}.$$

R.E. Bruck [Bru79] en 1979 demostró que

Teorema. *$F_\varepsilon(T)$ es conexo por trayectorias.*

Con esto uno podría pensar que el conjunto $\mathrm{Fix}(T)$ tiene alguna clase de regularidad. Sin embargo, este no es el caso. Bruck y K. Goebel [BG92] dieron en 1992 el siguiente ejemplo:

Sea X un espacio de Banach y consideremos el espacio $X \times c_0$ con la norma del máximo: $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|_X, \|y\|_{c_0}\}$. Sea $F \subset X$ un subconjunto cerrado de X y definamos $T : X \times c_0 \to X \times c_0$ como sigue:

$$T(x, y_1, y_2, \ldots) = (x, \mathrm{dist}(x, F), y_1, y_2, \ldots).$$

Donde $\mathrm{dist}(x, F) = \inf\{\|x - y\| : y \in F\}$.

No es difícil demostrar que T es una isometría y que $\mathrm{Fix}(T) = F \times \{0\}$. Enunciaremos este resultado en un teorema:

Teorema. *Cualquier subconjunto cerrado de un espacio de Banach X es isométrico al conjunto de puntos fijos de una isometría de $X \times c_0$ en sí mismo.*

Ahora, si F es un subconjunto cerrado cualquiera de un subconjunto convexo C de un espacio de Banach, ¿será cierto que existe $T : C \to C$ no expansiva, con $\mathrm{Fix}(T) = F$? La respuesta es no, como lo veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.6. *Sea* $f : [0,1] \to [0,1]$ *una función tal que* $\mathrm{Fix}(f) = \{0,1\}$. *Tomemos* $x_0 \in (0,1)$ *y sin perder generalidad, supongamos que* $f(x_0) < x_0$*, entonces:*

$$\begin{aligned}|f(1) - f(x_0)| &= |1 - f(x_0)| \\ &= 1 - f(x_0) \\ &> 1 - x_0 \\ &= |1 - x_0|.\end{aligned}$$

Por lo tanto, no es posible hallar una función no expansiva $f : [0,1] \to [0,1]$ *con* $\mathrm{Fix}(f) = \{0,1\}$.

Pero lo que sí es cierto es lo siguiente. Demos primero la siguiente definición:

Definición 1.7. *Sea* $k > 0$. *Por* $\mathscr{L}(k)$ *denotaremos a la clase de las funciones cuya constante de Lipschitz es menor o igual a k.*

La siguiente construcción se debe a K. Goebel:

Lema 1.8. *Sean C un subconjunto cerrado, convexo y acotado de un espacio de Banach X, y* $F \subset C$ *un subconjunto cerrado. Entonces existe una función Lipschitz continua T, con constante de Lipschitz tan cercana a 1 como se quiera, de tal modo que* $T : C \to C$ *y* $\mathrm{Fix}(T) = F$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{diam}(C) > 0$ y sea $z \in F$. Definamos T como:

$$Tx = x + \tau \,\mathrm{dist}(x,F)(z - x),$$

para cada $x \in C$, donde $0 < \tau$ y $\tau\,\mathrm{diam}(C) < 1$.

Notemos que T está bien definida y que $\mathrm{Fix}(T) = F$. Para ver esto, si $x \in F$ entonces $Tx = x$, por otro lado, $Tx = x$ implica $\tau\,\mathrm{dist}(x,F)(z - x) = 0$, y esto es cierto si $x = z$ ó $x \in F$; en ambos casos, $x \in F$.

Para cada $x, y \in X$ tenemos:

$$\begin{aligned}\|Tx - Ty\| &= \|(x - z) - (y - z) + \tau\,\mathrm{dist}(x,F)(z - x) - \tau\,\mathrm{dist}(y,F)(z - y)\| \\ &= \|(x - z)(1 - \tau\,\mathrm{dist}(x,F)) - (y - z)(1 - \tau\,\mathrm{dist}(x,F)) - \\ &\quad - \tau\,\mathrm{dist}(x,F)(y - z) + \tau\,\mathrm{dist}(y,F)(y - z)\| \qquad (1.2.1) \\ &\leq |1 - \tau\,\mathrm{dist}(x,F)|\|x - y\| + \tau|\mathrm{dist}(x,F) - \mathrm{dist}(y,F)|\|y - z\| \\ &\leq (|1 - \tau\,\mathrm{dist}(x,F)| + \tau\|y - z\|)\|x - y\|.\end{aligned}$$

Ya que $|1-\tau\,\mathrm{dist}(x,F)| \leq 1$ y $\|y-z\| \leq \mathrm{diam}(C)$, entonces $T \in \mathscr{L}(1+\tau\,\mathrm{diam}(C))$. #

Y como corolario, tenemos lo siguiente:

Corolario 1.9. *Sea X un espacio de Banach y* $F \subset X$ *un subconjunto no vacío y cerrado de X. Entonces existe una función continua* $T : X \to X$ *tal que* $\mathrm{Fix}(T) = F$.

Demostración. Sean T y F como en las hipótesis del lema y $z \in F$. Definamos $T : X \to X$ como $Tx = x + \text{dist}(x, F)(z - x)$. Podemos ver que $\text{Fix}(T) = F$. Para probar la continuidad de T tomemos $x \in X$ fijo y $y \in X$ de tal modo que $\|x - y\| < 1$. Haciendo los cálculos para $\tau = 1$ como en (1.2.1), y puesto que $\|y - z\| \leq \|y - x\| + \|x - z\| \leq 1 + \|x - z\|$, llegamos a que:

$$\|Tx - Ty\| \leq \begin{cases} \|x - y\|(2 - \text{dist}(x, F) + \|x - z\|) & \text{si } \text{dist}(x, F) \leq 1 \\ \|x - y\|(\text{dist}(x, F) + \|x - z\|) & \text{si } \text{dist}(x, F) > 1 \end{cases}$$

De hecho, con esto probamos que T es localmente Lipschitz continua, de acuerdo a la siguiente definición: #

Definición 1.10. *Decimos que una función $T : X \to X$ es* localmente Lipschitz continua *si para cada punto $x \in X$, existe una vecindad de x para el cual la función T es Lipschitz continua.*

Por lo tanto, tampoco podemos decir nada acerca del conjunto de puntos fijos cuando nos restringimos a funciones Lipschitz o localmente Lipschitz continuas.

1.3. Retractos

En esta sección veremos que las retracciones nos dan cierta regularidad en el conjunto de puntos fijos. Además daremos una breve reseña sobre los trabajos que se han hecho para hallar retractos sobre el conjunto de puntos fijos para funciones no expansivas.

Definición 1.11. *Sea X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Diremos que Y es un* retracto *de X si existe una función continua $R : X \to Y$ llamada* retracción *tal que $Rx = x$, para cada $x \in Y$.*

Aunque exista tal función R en general no es única, como lo veremos con un ejemplo al final de esta sección. También consideraremos más adelante al conjunto Y como el conjunto de puntos fijos de cierta función, por lo que vamos a hacer hincapié en las propiedades que el conjunto Y pueda tener. Empezaremos con el siguiente lema:

Lema 1.12. *Sea C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Banach X. Si E es un retracto de C, entonces E es cerrado y conexo por trayectorias.*

Demostración. Sea R una retracción de C a E. Supongamos que $\{x_n\} \subset E$ y $x_n \to x$. Ya que $Rx \in E$:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Rx_n = Rx,$$

$x \in E$. Por lo tanto, E es cerrado.

Sean x, y dos elementos de E y consideremos la función continua $g : [0, 1] \to C$ dada por:

$$g(\lambda) = (1 - \lambda)x + \lambda y.$$

La función g está bien definida porque C es un conjunto convexo. Así, $R \circ g : [0, 1] \to E$ es una función continua que cumple $(R \circ g)(0) = x$ y $(R \circ g)(1) = y$, como se quería demostrar. #

Podemos todavía decir algo más, que el conjunto es simplemente conexo.

Definición 1.13. *Una* curva cerrada *en X (ver [Rud87, págs. 74-75]) es una función continua $\gamma : [0,1] \to X$ con $\gamma(0) = \gamma(1)$. Diremos que una curva γ en X es* homotópicamente nula *en X si existe una función continua $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que $H(s,0) = \gamma(s)$, $H(s,1) = z$ para cada $s \in [0,1]$, y si $H(0,t) = H(1,t)$ para cada $t \in [0,1]$, donde z es un punto que pertenece a X.*

Si definimos $\gamma_t(s) = H(s,t)$, entonces $\{\gamma_t\}$ es una familia de curvas que "conectan continuamente" γ con z.

Definición 1.14. *Si X es conexo y si cada curva cerrada en X es homotópicamente nula, entonces decimos que X es* simplemente conexo .

Así, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.15. *Sea C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Banach X. Si $E \subset C$ es un retracto de C, entonces E es simplemente conexo.*

Demostración. Sean $R : C \to E$ una retracción de C en E y $\gamma : [0,1] \to E$ una curva cerrada en E. Sea $w = \gamma(0) = \gamma(1)$. Tomemos $z \in E$ un elemento fijo. Definamos ahora $H : [0,1] \times [0,1] \to E$ como:

$$H(s,t) = R(\gamma(s) + t(z - \gamma(s))).$$

Entonces tenemos que H es continua, $H(s,0) = R(\gamma(s)) = \gamma(s)$, $H(s,1) = R(z) = z$ y $H(0,t) = H(1,t)$.

El conjunto E es conexo porque es conexo por trayectorias, por lo tanto, E es simplemente conexo. #

Muchos trabajos se han enfocado en ver cuándo el conjunto de puntos fijos $\mathrm{Fix}(T)$ es la imagen de una retracción no expansiva. Entre ellos, uno de los primeros trabajos más importantes sobre el conjunto de puntos fijos es debido a R.E. Bruck (ver [Bru74] o [KS01, págs. 64-67]).

Definición 1.16. *Diremos que un subconjunto convexo, cerrado y acotado K de un espacio de Banach tiene la* propiedad hereditaria de punto fijo *HFPP para funciones no expansivas, si cada función no expansiva $f : K \to K$ tiene un punto fijo en cada subconjunto de K no vacío, convexo, cerrado y acotado que es f-invariante.*

Teorema 1.17. *Supongamos que K es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach separable X, que K tiene la propiedad HFPP y sea $T : K \to K$ una función no expansiva. Entonces el conjunto de puntos fijos* $\mathrm{Fix}(T)$ *es no vacío y existe una retracción no expansiva de K en* $\mathrm{Fix}(T)$.

Otro resultado interesante que se encuentra en [KS01, págs. 64-67] es el siguiente:

Teorema 1.18. *Supongamos que K es un subconjunto convexo y débilmente compacto de un espacio de Banach y que K tiene la propiedad HFPP. Sea $T : K \to K$ una función no expansiva. Entonces el conjunto de puntos fijos* $\mathrm{Fix}(T)$ *es no vacío y es un retracto no expansivo de K.*

Personas como J.B. Baillon [Bai88] y M.A. Khamsi [Kha96] también han trabajado sobre este tema, sin embargo sus trabajos siguen enfocados en el estudio del conjunto de puntos fijos de las funciones no expansivas.

Hasta este punto sólo hemos mencionado la existencia de puntos fijos para funciones no expansivas, así como los trabajos más importantes acerca del conjunto de sus puntos fijos. Uno puede preguntarse qué pasa en el caso general de las funciones Lipschitz continuas. Resulta que el estudio de las funciones Lipschitz continuas con constante de Lipschitz mayor que uno ha sido escasamente abordado ya que en 1943 Kakutani presentó el siguiente ejemplo de una función continua de la bola unitaria B del espacio ℓ_2 en sí mismo, sin puntos fijos:

Ejemplo. *Sea $X = \ell_2$ y B la bola unitaria en X (ver [GK90, pág. 202]). Dado $\varepsilon > 0$, definamos $T_\varepsilon : B \to B$ por:*

$$T_\varepsilon(x_1, x_2, \ldots) = (\varepsilon(1 - \|x\|), x_1, x_2, \ldots).$$

Se puede verificar que $\mathrm{Fix}(T_\varepsilon) = \emptyset$ *y que T_ε tiene constante de Lipschitz* $(1 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$.

En otras palabras, a pesar de que un espacio de Hilbert tiene mucha más estructura que un espacio de Banach en general, existen funciones con constante de Lipschitz mayor que 1 y arbitrariamente cercana a 1 sin puntos fijos.

Por lo tanto, para garantizar la existencia de puntos fijos para tales funciones, es necesario imponer más condiciones al espacio o a las funciones mismas; en los casos en que se han encontrado puntos fijos para funciones Lipschitz continuas, con constante mayor que 1, no se dice casi nada o nada acerca del conjunto de puntos fijos. En este trabajo nosotros daremos condiciones suficientes para garantizar la existencia de retracciones en el conjunto de puntos fijos para este tipo de funciones.

Vamos ahora a hablar de un tipo especial de funciones, las llamadas n-periódicas:

Definición 1.19. *Una función $T : C \to C$ se dice que es n-*periódica *si la función T compuesta consigo misma n veces nos da la identidad en C, esto es, $T^n = Id$. Si $n = 2$, entonces diremos que T es una* involución .

Dada una función T con constante de Lipschitz mayor que 1, en especial para estas funciones n-periódicas, ha resultado útil el encontrar otra función F con $\mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(F)$ de tal modo que la sucesión de iteraciones $\{F^n x\}_n$ converja a un punto fijo de F, porque así se encuentran puntos fijos de T. No se sabe si este proceso se puede realizar siempre. En muchos de estos estudios no se garantiza la unicidad y de aquí surge naturalmente la pregunta de cómo es el conjunto de puntos fijos.

En algunos casos muy concretos nosotros garantizaremos la existencia de retractos en el conjunto de puntos fijos (varios ejemplos se verán en el capítulo II). Asimismo, daremos condiciones suficientes para que esto sea posible. Como en ocasiones existen diferentes medios para hallar los puntos fijos, se verá que, a su vez, encontraremos diferentes retractos para un mismo problema. Es por eso que al final de este capítulo daremos un orden en cierta clase de retractos, y le daremos una aplicación concreta.

Como ejemplo de funciones Lipschitz continuas con constante mayor que 1 y que tienen algún punto fijo, consideraremos el siguiente teorema debido a K. Goebel y E. Zlotkiewicz [GZ71].

Teorema 1.20. *Sean C un subconjunto no vacío, cerrado, convexo y acotado de un espacio de Banach X y $T : C \to C$ una involución. Si $T \in \mathscr{L}(k)$ con $k < 2$ entonces* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Demostración. Sean $T : C \to C$ y C como en la hipótesis. Por la convexidad de C, podemos definir, para cada $x \in C$, $Fx = \frac{x+Tx}{2}$. Entonces podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} \|F(Fx) - Fx\| &= \left\| \frac{T(Fx) - Fx}{2} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \frac{T(Fx) - T^2 x}{2} + \frac{T(Fx) - Tx}{2} \right\| \\ &\leq \frac{k}{4} (\|Fx - Tx\| + \|Fx - x\|) \\ &= \frac{k}{2} \|Fx - x\|. \end{aligned}$$

De aquí, la sucesión $\{F^n(x)\}$ converge cuando $\frac{k}{2} < 1$. Se puede probar también que:

$$\|F^{n+m}(x) - F^n(x)\| \leq \left(\frac{k}{2}\right)^n \frac{1 - \left(\frac{k}{2}\right)^m}{1 - \frac{k}{2}} \|Fx - x\|.$$

Si definimos $Rx = \lim\limits_{m\to\infty} F^m(x)$, entonces la estimación anterior nos da

$$\|Rx - F^n x\| \leq \frac{2}{2-k} \left(\frac{k}{2}\right)^n D,$$

donde $D = \mathrm{diam}(C)$ es el diámetro de C. Con esto, y dado que $F \in \mathscr{L}(\frac{1+k}{2})$, llegamos a que Rx es un punto fijo de F. No es difícil ver que los conjuntos $\mathrm{Fix}(F)$ y $\mathrm{Fix}(T)$ coinciden, así, $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ cuando $k < 2$. #

Tomemos ahora x un punto fijo de F, tenemos que $Rx = x$, esto es, R restringido al conjunto $\mathrm{Fix}(T)$ es la función identidad. Por lo tanto, $R : C \to \mathrm{Fix}(F)$, y como $\mathrm{Fix}(F) = \mathrm{Fix}(T)$, entonces $R : C \to \mathrm{Fix}(T)$. Con la misma estimación anterior, ya que la estimación de la convergencia de F^m a R no depende de x, vemos que la convergencia es uniforme, por lo tanto R es continua. En resumen, existe una función $R : C \to \mathrm{Fix}(T)$ tal que es continua y restringida a $\mathrm{Fix}(T)$ es la identidad, es decir, $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto de C y en este caso $\mathrm{Fix}(T)$ es simplemente conexo.

Lo que podemos ahora preguntarnos es: ¿qué tipo de retracción se puede hallar sobre el conjunto $\mathrm{Fix}(T)$?, es decir, si sabemos que existe una función continua R de C en $\mathrm{Fix}(T)$, ¿qué tipo de función continua es dicha función R?

1.3.1. Tipos de continuidad dependiendo de la convergencia

Para responder a la pregunta anterior, abordaremos la cuestión en términos más generales. Supongamos que tenemos una familia $T_s : C \to C$ de funciones continuas, donde C es un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Banach y $s \in [0, \infty)$.

Supongamos ahora que la familia T_s converge a cierta función R cuando s tiende a infinito. Deseamos encontrar información sobre la continuidad de la función R; para esto, lo primero que podemos hacer es valernos de la convergencia de la familia y del tipo de continuidad que presentan las funciones T_s, mediante la siguiente estimación:

$$\|Rx - Ry\| \leq \|Rx - T_s x\| + \|T_s x - T_s y\| + \|T_s y - Ry\|.$$

Supongamos adicionalmente que existe una función r tal que para cada $x \in C$, $\|Rx - T_s x\| \leq r(s)$ y con $\lim_{s\to\infty} r(s) = 0$. En particular, tenemos que las funciones T_s convergen uniformemente a R, por lo que R es continua. Por otra parte podemos definir:

Definición 1.21. *Dados $T : C \to C$ y $h \geq 0$, definimos el* módulo de continuidad *de T como $\omega(T, h) = \sup\{\|Tw - Tz\| : \|w - z\| \leq h\}$. En particular se tiene que $\|T_s x - T_s y\| \leq \omega(T_s, \|x - y\|)$.*

Algunas propiedades que tiene el módulo de continuidad son las siguientes:

- Para cualquier función $T : C \to C$, $\omega(T, 0) = 0$.
- $\omega(T, h)$ como función de h es no decreciente.
- Para cualesquiera $h, k \geq 0$, se tiene $\omega(T, h + k) \leq \omega(T, h) + \omega(T, k)$.

Y además tenemos lo siguiente:

Proposición 1.22. *Si $T : C \to C$ es una función uniformemente continua entonces $\omega(T, h)$, como función de h, es una función continua.*

Ahora daremos unas definiciones más:

Definición 1.23. *Diremos que una función $f : C \to C$ es* Hölder continua *de orden α si para cada $x, y \in C$ se tiene que $\|fx - fy\| \leq A\|x - y\|^\alpha$, donde $A > 0$ y $0 < \alpha < 1$.*

a) Diremos que el módulo de continuidad $\omega(T, h)$ es de Lipschitz si existe una constante $A \geq 0$ tal que $\omega(T, h) \leq Ah$. En este caso tenemos que para todo $x, y \in C$:

$$\|Tx - Ty\| \leq \omega(T, \|x - y\|) \leq A\|x - y\|,$$

por lo tanto T es una función Lipschitz continua.

Inversamente, si T es k-Lipschitz continua, para cualesquiera $x, y \in C$ tales que $\|x - y\| \leq h$

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\| \leq kh,$$

y así, $\omega(T, h) \leq kh$, esto es, $\omega(T, h)$ es de Lipschitz.

b) Diremos que $\omega(T, h)$ es de Hölder si existen A y α números no negativos con $0 < \alpha < 1$, tales que $\omega(T, h) \leq Ah^\alpha$. En este caso:

$$\|Tx - Ty\| \leq \omega(T, \|x - y\|) \leq A\|x - y\|^\alpha,$$

esto es, T es Hölder continua.

Inversamente, si T es Hölder continua, con $\|Tx - Ty\| \leq A\|x - y\|^\alpha$, tenemos $\omega(T, h) \leq Ah^\alpha$, y por ende $\omega(T, h)$ es de Hölder.

Volvamos al problema que nos ocupa. Sea $I \subset [0, \infty)$. Supongamos que para cada $s \in I$ se tiene que $\|T_s x - T_s y\| \leq Ae^{\alpha s}\|x - y\|$, por lo que $\omega(T_s, \|x - y\|) \leq Ae^{\alpha s}\|x - y\|$ y supongamos también que $\|T_s u - Ru\| \leq r(s) = Be^{-\beta s}$, donde A, B y β son números positivos y $\alpha \geq 0$. De la desigualdad del triángulo y de la definición del módulo de continuidad se tiene

$$\begin{aligned} \|Rx - Ry\| \leq & \|Rx - T_s x\| + \|T_s x - T_s y\| + \|T_s y - Ry\| \\ \leq & 2r(s) + \omega(T_s, \|x - y\|) \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

y se deduce

$$\|Ru - Rv\| \leq A\|u - v\|e^{\alpha s} + 2Be^{-\beta s} = E(s).$$

Hay que notar que en el caso $\alpha = 0$, R resulta ser una función Lipschitz continua, ya que, si de la desigualdad $\|T_s x - T_s y\| \leq A\|x - y\|$ tomamos el límite cuando s tiende a infinito nos queda:

$$\|Ru - Rv\| \leq A\|u - v\|. \tag{1.3.2}$$

Veamos ahora qué pasa en el caso $\alpha > 0$. Para esto, supongamos de manera adicional que el conjunto C está acotado.

Consideremos primeramente $I = [0, \infty)$. Sea $s_0 = \frac{\ln\left(\frac{2B}{A\|u-v\|}\right)}{\alpha+\beta}$, esto es, s_0 cumple la igualdad $A\|u - v\|e^{\alpha s_0} = 2Be^{-\beta s_0}$, entonces

$$\begin{aligned} E(s_0) = & 2(2B)e^{-\beta s_0} \\ = & 2(2B)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} A^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \|u - v\|^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}, \end{aligned}$$

por lo que se tiene

$$\|Ru - Rv\| \leq 2(2B)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} A^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \|u - v\|^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}},$$

cuando $0 < \|u - v\| < \frac{2B}{A}$. Ya que C está acotado, podemos elegir B de tal manera que se tenga siempre $\|u - v\| \leq \mathrm{diam}(C) < \frac{2B}{A}$.

Por lo que tenemos que la función R es Hölder continua.

Si evaluamos E en el punto s donde alcanza el mínimo, se obtiene también una función Hölder continua de orden $\frac{\beta}{\beta+\alpha}$ con constante diferente pero los cálculos son más engorrosos.

Ahora supongamos que $I = \mathbb{N}$. En este caso tenemos:

$$\|Ru - Rv\| \leq A\|u - v\|e^{\alpha n} + 2Be^{-\beta n} = E(n).$$

Como para $u, v \in C$ se da $A\|u - v\| < 2B$, entonces podemos definir al número $n_0 \in \mathbb{N}$ como sigue:

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : A\|u - v\|e^{\alpha n} \geq 2Be^{-\beta n}\}.$$

Si $s_0 = \frac{\ln(\frac{2B}{A\|u-v\|})}{\alpha+\beta}$, entonces $A\|u - v\|e^{\alpha s_0} = 2Be^{-\beta s_0}$, por lo que $n_0 - 1 < s_0 \leq n_0$ y existe $0 \leq r_0 < 1$ tal que $n_0 = s_0 + r_0$. No es difícil ver que $n_0 = \frac{\ln(\frac{2B}{A\|u-v\|} e^{(\alpha+\beta)r_0})}{\alpha+\beta}$ y entonces tenemos:

$$\begin{aligned} E(n_0) =& A\|u-v\|e^{\alpha n_0} + 2Be^{-\beta n_0} \\ \leq& 2A\|u-v\|e^{\alpha n_0} \\ =& 2A^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}(2B)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}e^{\alpha r_0}\|u-v\|^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \\ \leq& 2A^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}(2B)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}e^{\alpha}\|u-v\|^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}, \end{aligned}$$

de aquí, R es Hölder continua, pues:

$$\|Ru - Rv\| \leq 2A^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}(2B)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}e^{\alpha}\|u-v\|^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}. \tag{1.3.3}$$

Mediante un ejemplo debido a K. Goebel, podemos ver que el método anterior inclusive puede dar la estimación óptima para la continuidad de la función R.

Ejemplo 1.24. *Definamos $R(x) = \sqrt{x}$, para cada $x \geq 0$. Para cada $k > 0$ definamos la función T_k por:*

$$T_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{8k} + kx & si\ x \in [0, \frac{3+2\sqrt{2}}{8k^2}] \\ \sqrt{x} & si\ x \in [\frac{3+2\sqrt{2}}{8k^2}, \infty), \end{cases}$$

para cada $x \geq 0$. Ver figura 1.1.

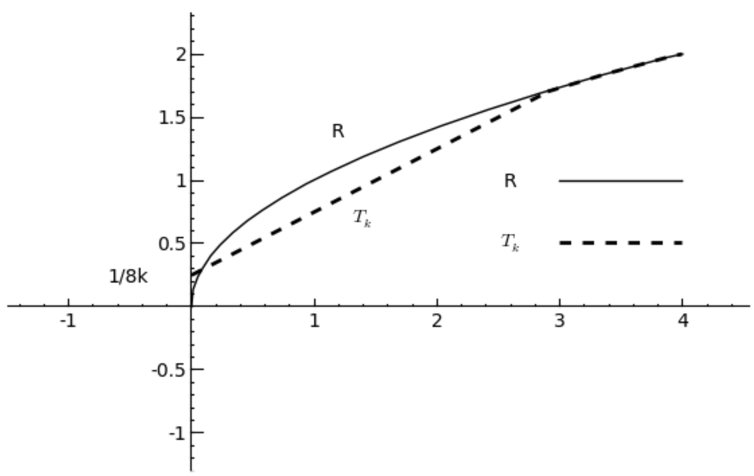

Figura 1.1: Gráficas de las funciones R y T_k

Para ver el tipo de continuidad de la función R, estimemos $|R(x) - R(y)|$.
Sean $x, y \in [0, \infty)$, entonces:

$$|R(x) - R(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|},$$

basta tomar $y = 0$ para ver que la desigualdad es la mejor posible.

Ahora usaremos la desigualdad (1.3.1) y minimizaremos con respecto a la variable k. Primero notemos que para cada $k > 0$, la función $R - T_k$ es continua, y todavía más, es cero para todo $x \geq \frac{3+2\sqrt{2}}{8k^2} = A(k)$. No es difícil ver que para todo $x \geq 0$:

$$|R(x) - T_k(x)| \leq \frac{1}{8k}.$$

Así que la familia $\{T_k\}$ converge a R uniformemente.

También podemos ver que la función $T_k \in \mathscr{L}(k)$, esto es, para cada $x, y \geq 0$: $|T_k(x) - T_k(y)| \leq k|x - y|$.

Entonces usando (1.3.1) con $x \neq y$:

$$|R(x) - R(y)| \leq \frac{1}{4k} + k|x - y| = a(k).$$

Minimizaremos la función $a(k)$.

$$a'(k) = -\frac{1}{4k^2} + |x - y| = 0 \iff k = \frac{1}{2\sqrt{|x - y|}}.$$

Entonces:

$$a(k_0) = \frac{1}{4k_0} + k_0|x - y| = \frac{\sqrt{|x - y|}}{2} + \frac{\sqrt{|x - y|}}{2} = \sqrt{|x - y|},$$

por lo que:

$$|R(x) - R(y)| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

Esta segunda estimación coincide con la primera, y la primera estimación es la mejor posible.

Por lo tanto, usaremos el esquema anterior para obtener información acerca de la continuidad de la función R.

1.3.2. No unicidad de las retracciones

Ya hemos mencionado que cuando $F \subset C$ es un retracto de C, las retracciones de C en F no son únicas en general. Sin embargo, hasta ahora no hemos dado ningún ejemplo en concreto.

Consideremos el espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la norma $\|(t, x)\| = \max\{|t|, |x|\}$. Sea $\mathscr{G} = \{(t, \sqrt{t}) : t \in [0, 1]\} \subset [0, 1] \times [0, 1]$.

Sean $R, R_0 : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathscr{G}$ funciones continuas definidas por $R(t, x) = (t, \sqrt{t})$ y $R_0(t, x) = (x^2, x)$ respectivamente. Notemos que ambas funciones restringidas al conjunto $\mathscr{G}$ resultan ser la función identidad. Por lo tanto, ambas funciones son retracciones del conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$ a $\mathscr{G}$. Sin embargo, son funciones con distinto tipo de continuidad.

R es una función Hölder continua pero no es Lipschitz, ya que $\|R(t, x) - R(s, y)\| \leq \sqrt{\|(t, x) - (s, y)\|}$, y la igualdad se da para $s = y = x = 0$. Sin embargo R_0 es Lipschitz continua con constante 2: $\|R_0(t, x) - R_0(s, y)\| \leq 2\|(t, x) - (s, y)\|$.

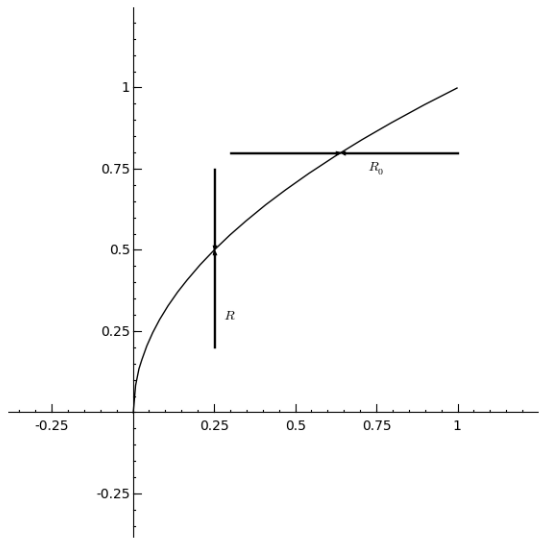

Figura 1.2: Comportamiento de las funciones R y R_0

La retracción R manda a cada punto (t, x) a aquel punto sobre $\mathscr{G}$ cuya abscisa es t, mientras que R_0 manda a (t, x) al punto sobre $\mathscr{G}$ cuya ordenada es x. Estas funciones se pueden ver en la figura 1.2.

Vamos a ver que de hecho existe una familia infinita de retracciones y analizaremos su comportamiento.

Sea $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ y hagamos $m = \tan(\theta)$, por lo que $m \in (-\infty, 0)$. Tomemos $(t_0, x_0) \in [0, 1]\times[0, 1]$. Sea L_m la línea recta definida por $L_m(t) = x_0+m(t-t_0)$, entonces definamos

$$R_m(t_0, x_0) = (T, \sqrt{T}), \tag{1.3.4}$$

donde

$$T = \frac{-2mx_0 + 2m^2t_0 + 1 - \sqrt{(2mx_0 - 2m^2t_0 - 1)^2 - 4m^2(x_0 - mt_0)^2}}{2m^2}.$$

Así, $R_m(t_0, x_0)$ es el punto donde se intersectan L_m y $\mathscr{G}$.

Aunque la definición de R_m parece complicada, la figura 1.3 la ilustra gráficamente.

No es difícil ver que R_m es una retracción del conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$ en $\mathscr{G}$. De hecho, veremos que R_m es una función Lipschitz continua. La idea principal de la prueba es factorizar R_m como composición de dos funciones, y así obtendremos el tipo de continuidad de la función R_m.

Lema 1.25. *Dados* $z_0, z_1 \in [0, 1] \times [0, 1]$ *se tiene que*

$$||R_m(z_1) - R_m(z_0)|| \leq \max\left\{1 + \frac{1}{1 - 2m}, 1 - m\right\} ||z_1 - z_0||.$$

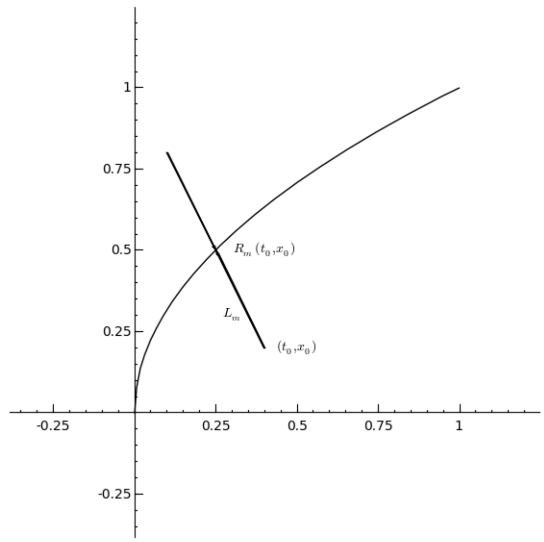

Figura 1.3: Comportamiento de la función R_m

Demostración. Dividiremos la demostración en dos partes.

- **Parte i**

Sea $\mathscr{D} = \{(t,t) : t \in [0,1]\}$. En esta primera parte demostraremos que R_m restringida a $\mathscr{D}$ es una función Lipschitz continua.

Para ser más preciso, dados $t_0, t_1 \in [0,1]$ se tiene que $\|R_m(t_1,t_1) - R_m(t_0,t_0)\| \leq \max\{1 + \frac{1}{1-2m}, 1-m\}\|(t_1,t_1) - (t_0,t_0)\|$.

Sin perder generalidad, supongamos que $t_1 > t_0$. Definamos a las funciones F y H como siguen:

$$F(t) = \frac{1}{2m^2} + t\left(1 - \frac{1}{m}\right) - \sqrt{\frac{1}{4m^4} + \frac{t}{m^2}\left(1 - \frac{1}{m}\right)}$$

y

$$H(t) = \sqrt{\frac{1}{4m^2} - t\left(1 - \frac{1}{m}\right)} + \frac{1}{2m}.$$

Por definición de R_m tenemos que $R_m(t,t) = (F(t), H(t))$.

Se puede ver que las funciones F y H son crecientes en el intervalo $[0,1]$ (ambas tienen derivada positiva, pues $m < 0$).

Por lo tanto

$$\|R_m(t_1,t_1) - R_m(t_0,t_0)\| = \max\{F(t_1) - F(t_0), H(t_1) - H(t_0)\}.$$

Caso (i)

$$
\begin{aligned}
\frac{F(t_1)-F(t_0)}{t_1-t_0} &= 1-\frac{1}{m}-\frac{\frac{1}{m^2}\left(1-\frac{1}{m}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4m^4}+\frac{t_1}{m^2}\left(1-\frac{1}{m}\right)}+\sqrt{\frac{1}{4m^4}+\frac{t_0}{m^2}\left(1-\frac{1}{m}\right)}}\\
&\leq 1-\frac{1}{m}-\frac{\frac{1}{m^2}\left(1-\frac{1}{m}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{4m^4}+\frac{1}{m^2}\left(1-\frac{1}{m}\right)}}\\
&= 1+\frac{1}{1-2m}.
\end{aligned}
$$

Esta estimación es la mejor posible, pues

$$\lim_{t_0\to 1}\frac{F(1)-F(t_0)}{1-t_0}=1+\frac{1}{1-2m}.$$

Caso (ii)

$$
\begin{aligned}
\frac{H(t_1)-H(t_0)}{t_1-t_0} &= \frac{\sqrt{\frac{1}{4m^2}+t_1\left(1-\frac{1}{m}\right)}-\sqrt{\frac{1}{4m^2}+t_0\left(1-\frac{1}{m}\right)}}{t_1-t_0}\\
&= \frac{1-\frac{1}{m}}{\sqrt{\frac{1}{4m^2}+t_1\left(1-\frac{1}{m}\right)}+\sqrt{\frac{1}{4m^2}+t_0\left(1-\frac{1}{m}\right)}}\\
&\leq \frac{1-\frac{1}{m}}{2\sqrt{\frac{1}{4m^2}}}\\
&= \frac{1-\frac{1}{m}}{\frac{1}{|m|}}\\
&= 1-m
\end{aligned}
$$

También esta estimación es la mejor posible, porque

$$\lim_{t_1\to 0}\frac{H(t_1)-H(0)}{t_1-0}=1-m.$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$\|R_m(t_1,t_1)-R_m(t_0,t_0)\|\leq \max\left\{1+\frac{1}{1-2m},1-m\right\}\|(t_1,t_1)-(t_0,t_0)\|.$$

- **Parte ii**

En esta segunda parte daremos una factorización de R_m a través de la diagonal.

Definamos $Q_m:[0,1]\times[0,1]\to\mathscr{D}$ por:

$$Q_m(t,x)=\left(\frac{x-mt}{1-m},\frac{x-mt}{1-m}\right).$$

Entonces $R_m = R_m|_{\mathscr{D}} \circ Q_m$ y Q_m es no expansiva.

Notemos que Q_m manda un punto dado (t, x) al punto del conjunto $\mathscr{D}$ dado por la intersección de $\mathscr{D}$ con la línea recta que pasa por (t, x) y tiene pendiente m. Llamemos a esta recta L_m. Veremos que si dos puntos $(t_1, x_1), (t_2, x_2)$ pertenecen a la recta L_m, entonces $R_m(t_1, x_1) = R_m(t_2, x_2)$.

Supongamos primero que el punto (t_1, x_1) está en la recta L_m, entonces se tiene $m = \frac{x_1 - x}{t_1 - t}$, o equivalentemente $x_1 - mt_1 = x - mt$. En consecuencia también se tiene $-2mx_1 + 2m^2 t_1 = -2mx + 2m^2 t$. Por la definición de R_m, tenemos que $R_m(t_1, x_1) = R_m(t, x)$. Por lo tanto, si (t_2, x_2) se encuentra también en la recta L_m, el valor de R_m en ese punto coincide con el del punto (t_1, x_1).

Como (t, x) y $Q_m(t, x)$ pertenecen a la recta L_m, se tiene entonces que $R_m(t, x) = R_m|_{\mathscr{D}}(Q_m(t, x))$.

Ahora probemos que Q_m es no expansiva. Sean $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Entonces:

$$\begin{aligned} \|Q_m(t_2, x_2) - Q_m(t_1, x_1)\| &= \left| \frac{x_2 - mt_2}{1 - m} - \frac{x_1 - mt_1}{1 - m} \right| \\ &= \frac{|x_2 - x_1 - m(t_2 - t_1)|}{1 - m}. \end{aligned}$$

Sea $M = \max\{|t_2 - t_1|, |x_2 - x_1|\}$. Tenemos dos casos:

Caso (a) $M = |t_2 - t_1|$.

$$\begin{aligned} \|Q_m(t_2, x_2) - Q_m(t_1, x_1)\| &\leq \left(\frac{|x_2 - x_1| + |m||t_2 - t_1|}{|t_2 - t_1|} \right) \frac{|t_2 - t_1|}{1 - m} \\ &= \left(\frac{|x_2 - x_1|}{|t_2 - t_1|} - m \right) \frac{|t_2 - t_1|}{1 - m} \\ &\leq \frac{1 - m}{1 - m} |t_2 - t_1| \\ &= M. \end{aligned}$$

Caso (b) $M = |x_2 - x_1|$. Análogamente:

$$\begin{aligned} \|Q_m(t_2, x_2) - Q_m(t_1, x_1)\| &\leq \left(\frac{|x_2 - x_1| + |m||t_2 - t_1|}{|x_2 - x_1|} \right) \frac{|x_2 - x_1|}{1 - m} \\ &= \left(1 + \frac{|m||t_2 - t_1|}{|x_2 - x_1|} \right) \frac{|x_2 - x_1|}{1 - m} \\ &\leq \frac{1 - m}{1 - m} |x_2 - x_1| \\ &= M. \end{aligned}$$

De ambos casos, concluimos que Q_m es no expansiva.

Finalmente veamos que R_m es Lipschitz continua.

Sean $z_0 = (t_0, x_0), z_1 = (t_1, x_1) \in [0,1] \times [0,1]$. De lo anterior se desprende:

$$\begin{aligned} \|R_m(z_1) - R_m(z_0)\| &= \|R_m(Q_m(z_1)) - R_m(Q_m(z_0))\| \\ &\leq \max\left\{1 + \frac{1}{1-2m}, 1-m\right\} \|Q_m(z_1) - Q_m(z_0)\| \\ &\leq \max\left\{1 + \frac{1}{1-2m}, 1-m\right\} \|z_1 - z_0\|, \end{aligned}$$

por lo que, R_m es Lipschitz continua. #

Notemos que la función $1 + \frac{1}{1-2m}$, como función de m es creciente y que $1 - m$ es decreciente; ambas consideradas en el intervalo $(-\infty, 0]$. Las funciones se cortan en el punto $m = -\frac{1}{2}$, la constante de Lipschitz más pequeña la posee $R_{-\frac{1}{2}}$, y cuyo valor es $\frac{3}{2}$, esto es:

$$\|R_{-\frac{1}{2}}(z_1) - R_{-\frac{1}{2}}(z_0)\| \leq \frac{3}{2}\|z_1 - z_0\|,$$

para cualesquier $z_0, z_1 \in [0,1] \times [0,1]$.

1.3.3. Un orden en el tipo de continuidad de las retracciones

En esta última parte del primer capítulo daremos un orden (no total) en el conjunto de retracciones, donde el orden estará dado por su comportamiento cerca de cero, es decir, por la forma en que la retracción R "hace converger" a cero a $\|Rx - Ry\|$ cuando $\|x - y\|$ converge a cero.

Definición 1.26. *Sea X un espacio de Banach y $C \subset X$. Supongamos que $F \subset C$ es un retracto de C y que Q y R son dos retracciones diferentes. Diremos que $Q \leq R$ si existe $\delta > 0$ tal que para todo $h < \delta$:*

$$\omega(Q, h) \leq \omega(R, h).$$

Es decir, $Q \leq R$ cuando $\|Qx - Qy\|$ converge a cero "más rápido" que $\|Rx - Ry\|$, cuando $\|x - y\|$ tiende a cero.

Tenemos entonces la siguientes observaciones:

Observación 1.27. *Sean $Q, R : C \to C$ dos retracciones a un subconjunto de C:*

- *Supongamos que $\omega(Q, h) = Ah$ y $\omega(R, h) = Bh$, entonces se tiene: $Q \leq R$ si y solamente si $A \leq B$. Es decir, de dos retracciones Lipschitz continuas la que tiene la menor constante es la menor.*

- *Supongamos que Q y R son tales que $\omega(Q, h) = Ah$ y $\omega(R, h) = Bh^\beta$, con A, B positivos y $0 < \beta < 1$. En este caso si $h \leq (\frac{B}{A})^{\frac{1}{1-\beta}}$, $\omega(Q, h) \leq \omega(R, h)$ y Q es menor que R. Esto es, de una retracción Lipschitz continua y otra Hölder continua, la menor será la Lipschitz continua.*

Con este orden, en el ejemplo (1.3.4) la retracción menor es $R_{-\frac{1}{2}}$, es decir

$$R_{-\frac{1}{2}}(t_0, x_0) = \left(2x_0 + t_0 + 2 - 2\sqrt{2x_0 + t_0 + 1},\ \sqrt{2x_0 + t_0 + 2 - 2\sqrt{2x_0 + t_0 + 1}}\right),$$

y la constante de Lipschitz vale $\frac{3}{2}$.

Ahora sea $F \subset C$ un subconjunto cerrado de C, con C un subconjunto no vacío, cerrado, convexo y acotado. Sean $T_n, U_n : C \to C$ sucesiones de funciones que convergen uniformemente a $Q : C \to F$ y a $R : C \to F$ respectivamente, donde Q y R son retracciones de C en F. Supongamos además que

$$\omega(T_n, h) = A_1 e^{\alpha_1 n} h, \qquad \omega(U_n, h) = A_2 e^{\alpha_2 n} h$$

y

$$\|Qx - T_n x\| \leq B_1 e^{-\beta_1 n}, \qquad \|Rx - U_n x\| \leq B_2 e^{-\beta_2 n},$$

para todo $x \in C$, donde $A_i, \alpha_i, B_i, \beta_i$ son números positivos que cumplen $\operatorname{diam}(C) < \frac{2B_1}{A_1}$ y $\operatorname{diam}(C) < \frac{2B_2}{A_2}$.

Tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.28. *Sean T_n, U_n, Q y R como antes. Si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} < \frac{\alpha_2}{\beta_2}$, entonces Q es menor que R.*

Demostración. Por las hipótesis y desigualdad del triángulo (como se hizo en (1.3.1)) tenemos que:

$$\|Qx - Qy\| \leq 2B_1 e^{-\beta_1 n} + A_1 e^{\alpha_1 n}\|x - y\|$$

y

$$\|Rx - Ry\| \leq 2B_2 e^{-\beta_2 n} + A_2 e^{\alpha_2 n}\|x - y\|.$$

Por lo tanto, se cumplen todas las condiciones necesarias para afirmar como en (1.3.3), que existen K_1 y K_2 números positivos tales que para todo $x, y \in C$

$$\|Qx - Qy\| \leq K_1 \|x - y\|^{\frac{\beta_1}{\beta_1 + \alpha_1}}$$

y

$$\|Rx - Ry\| \leq K_2 \|x - y\|^{\frac{\beta_2}{\beta_2 + \alpha_2}},$$

así que:

$$\lim_{\|x-y\| \to 0} \frac{K_1 \|x - y\|^{\frac{\beta_1}{\beta_1 + \alpha_1}}}{K_2 \|x - y\|^{\frac{\beta_2}{\beta_2 + \alpha_2}}} = \lim_{h \to 0} \frac{K_1}{K_2} h^{\frac{\beta_1}{\beta_1 + \alpha_1} - \frac{\beta_2}{\beta_2 + \alpha_2}} = 0,$$

pues $\frac{\beta_1}{\beta_1 + \alpha_1} > \frac{\beta_2}{\beta_2 + \alpha_2}$ si y sólo si $\frac{\alpha_2}{\beta_2} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}$. #

Para finalizar este capítulo, daremos una aplicación de la proposición anterior.

Ejemplo 1.29. *Sea X un espacio de Banach, C un subconjunto no vacío, cerrado, convexo y acotado de X. Sea $T : C \to C$ una involución, esto es, $T^2 = Id$.*

Si T es k-Lipschitz continua con k cercana a 1, entonces $\mathrm{Fix}(T)$ es no vacío. Lo que vamos ahora a hacer es comparar dos retracciones del conjunto C a $\mathrm{Fix}(T)$. Las retracciones provienen de dos demostraciones distintas, en cada una de ellas se ve que $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

La primera como ya vimos, en 1971 K. Goebel y E. Zlotkiewicz ([GZ71]) demostraron que una involución $T : C \to C$ tiene punto fijo si $T \in \mathscr{L}(k)$ y $k < 2$. Tomemos $1 < k < 2$. Si para esta T definimos $u(x) = \frac{x+Tx}{2}$ para $x \in C$, entonces $u^n(x)$ converge a un punto fijo de T. Sea $Qx = \lim_{n\to\infty} u^n(x)$, podemos ver que Q es una retracción de C en $\mathrm{Fix}(T)$. Notemos que por los cálculos que se realizaron en el teorema 1.20, $u \in \mathscr{L}(\frac{1+k}{2})$ y $\|Qx - u^n(x)\| \leq \frac{2D}{2-k}e^{-n\ln(\frac{2}{k})}$, donde $D = \mathrm{diam}(C)$. Entonces tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\|Qx - Qy\| \leq e^{n\ln(\frac{1+k}{2})}\|x-y\| + 2\frac{2D}{2-k}e^{-n\ln(\frac{2}{k})}.$$

Además se cumple la condición $\mathrm{diam}(C) = D < 2\frac{2D}{2-k}$. Por lo tanto, la conclusión de (1.3.3) muestra que:

$$\|Qx - Qy\| \leq 2\left(\frac{4D}{2-k}\right)^{\frac{\ln(\frac{1+k}{2})}{\ln(\frac{1+k}{2})+\ln(\frac{2}{k})}}\left(\frac{1+k}{2}\right)\|x-y\|^{\frac{\ln(\frac{2}{k})}{\ln(\frac{1+k}{2})+\ln(\frac{2}{k})}}.$$

Definamos $I(Q) = \frac{\ln\left(\frac{1+k}{2}\right)}{\ln\left(\frac{2}{k}\right)}$.

Por otra parte, como un caso particular del desarrollo hecho en el Teorema 17.2 de [GK90, págs. 179-180], se puede ver que si $\frac{k(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2k^2} < 1$, para $\alpha < \frac{1}{k}$, entonces T tiene punto fijo y si $x \in C$, $R_\alpha x = \lim_{n\to\infty} F_\alpha^n x$ es una retracción, donde $F_\alpha x$ es la única solución de la ecuación

$$y = (1-\alpha)x + \alpha Ty.$$

Usando los cálculos que se encuentran en la misma referencia se puede demostrar que

$$\|R_\alpha x - R_\alpha y\| \leq \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha k}\right)^n \|x-y\| + \frac{2D}{1-\frac{k(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2k^2}}\left(\frac{k(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2k^2}\right)^n.$$

Definamos $I(R_\alpha) = \frac{\ln\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha k}\right)}{\ln\left(\frac{1-\alpha^2k^2}{k(1-\alpha)^2}\right)}$. Esto tiene sentido solamente para $b_0 = \frac{k-\sqrt{k}\sqrt{k-k^2+1}}{k^2+k} < \alpha < \frac{k+\sqrt{k}\sqrt{k-k^2+1}}{k^2+k} = b_1$ y para $k < \frac{\sqrt{5}+1}{2} < 2$. Notemos que también estamos tomando $\alpha < b_1 < \frac{1}{k}$

Vamos a comparar ambas retracciones para k en el intervalo $(1, \frac{\sqrt{5}+1}{2})$. Para esto, tenemos que comparar $I(Q)$ con $I(R_\alpha)$:

$$I(R_\alpha) - I(Q) = \frac{\ln\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha k}\right)}{\ln\left(\frac{1-\alpha^2k^2}{k(1-\alpha)^2}\right)} - \frac{\ln\left(\frac{1+k}{2}\right)}{\ln\left(\frac{2}{k}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha k}\right)\ln\left(\frac{2}{k}\right) - \ln\left(\frac{1-\alpha^2k^2}{k(1-\alpha)^2}\right)\ln\left(\frac{1+k}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1-\alpha^2k^2}{k(1-\alpha)^2}\right)\ln\left(\frac{2}{k}\right)}.$$

Definamos H como:

$$H(\alpha) = \ln\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha k}\right)\ln\left(\frac{2}{k}\right) - \ln\left(\frac{1-\alpha^2k^2}{k(1-\alpha)^2}\right)\ln\left(\frac{1+k}{2}\right).$$

Entonces, si $H(\alpha) > 0$ para todo α, la primera retracción será mejor que R_α, y si $H(\alpha_1) < 0$ para algún $\alpha_1 \in (b_0, b_1)$, entonces R_{α_1} será menor que Q.

Para ver cuándo se dan estos casos, analicemos a la función H, calculando primero su derivada. Vemos que H' está dada por:

$$H'(\alpha) = \frac{k-1}{(1-\alpha)(1-\alpha k)}\ln\left(\frac{2}{k}\right) - \frac{2(1-\alpha k^2)}{(1-\alpha)(1-\alpha^2k^2)}\ln\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

$H'(\alpha) = 0$ *cuando*

$$(k-1)\ln\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{2(1-\alpha k^2)}{1+\alpha k}\ln\left(\frac{k+1}{2}\right),$$

y ya que el lado izquierdo es positivo, necesitamos que $1-\alpha k^2 > 0$, esto es $\alpha < \frac{1}{k^2}$. Por lo tanto

$$\alpha_0 = \frac{2\ln(\frac{k+1}{2}) - (k-1)\ln(\frac{2}{k})}{k\left(2k\ln(\frac{k+1}{2}) + (k-1)\ln(\frac{2}{k})\right)}$$

resuelve la ecuación $H'(\alpha) = 0$. Se puede calcular de manera directa que $\alpha_0 < \frac{1}{k^2}$, así, tenemos también que $\alpha_0 < \frac{1}{k}$. Además se puede ver, de manera numérica, que $b_0 < \alpha_0 < b_1$ cuando $k < 1.518$.

En este caso, H tiene un mínimo en α_0.

También puede verse numéricamente que si $k < 1.086363134$, entonces $H(\alpha_0) < 0$; en este caso, R_{α_0} es menor que Q. Por otro lado, si $1.086363136 < k <1.518$ entonces $H(\alpha_0) > 0$, y por lo tanto $H(\alpha) \geq H(\alpha_0) > 0$ para todo $b_0 < \alpha < b_1$; concluimos que en este último caso Q es menor que R_{α_0}.

Capítulo 2

Funciones (a, n)-rotativas en espacios de Hilbert

Como vimos en el teorema 1.20, si una función 2-periódica T definida en un espacio de Banach es Lipschitz continua con constante menor que 2, entonces se puede garantizar la existencia de un punto fijo para T.

En principio una involución puede no ser continua; por ejemplo, si $T : [0, \infty) \to [0, \infty)$ está dada por $T(0) = 1$, $T(1) = 0$ y $T(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0, 1$, entonces T claramente no es continua, $T^2 = Id$ y $\mathrm{Fix}(T) = \emptyset$.

Por lo tanto, para garantizar la existencia de puntos fijos para las involuciones, es conveniente pedirles que sean continuas. M. Koter [Kot86] preguntó: ¿Será suficiente pedir que T sea uniformemente continua? Esta pregunta sigue sin responderse, aún en el caso en que T sea Lipschitz continua.

Sin embargo en 1992 K. Goebel y J. Wośko construyeron una función localmente Lipschitz $T : X \to X$, donde X un espacio no reflexivo y $\mathrm{Fix}(T) = \emptyset$, ver [GW92] ó [Goe02, págs. 77-78].

Consideraremos en este capítulo involuciones que son Lipschitz continuas. Como ya dijimos si $T \in \mathscr{L}(k)$ y $k < 2$, [Goe02, pág 76] entonces $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. A este respecto surge la siguiente pregunta. ¿Existe una cota uniforme $\mathscr{K}$ tal que para todo espacio de Banach X, C un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de X, y $T : C \to C$ una involución con $T \in \mathscr{L}(k)$, la condición $k < \mathscr{K}$ implica la existencia de puntos fijos?

Hasta la fecha no se sabe de ningún ejemplo de una involución Lipschitz continua sin puntos fijos, por lo que cabe la posibilidad de que la cota uniforme sea infinita. Incluso no se sabe mucho, aún cuando nos restringimos a los espacios de Hilbert.

La primera parte de este capítulo estará enfocada a estudiar las involuciones, haciendo un recuento sobre los trabajos realizados y planteando el problema de encontrar la cota uniforme $\mathscr{K}$ en espacios vectoriales topológicos metrizables.

Estudiaremos también las funciones llamadas (a, n)-rotativas, que generalizan a las periódicas y veremos que en muchos casos donde se ha garantizado la existencia de puntos fijos existe un retracto Hölder continuo.

Finalmente, usando modificaciones a los trabajos de autores como M. Koter ó J. Górnicki y K. Pupka, mejoraremos ciertas estimaciones de las constantes de Lipschitz para garantizar la existencia de puntos fijos para funciones $(0, n)$-rotativas en los espacios de Hilbert. Pondremos especial atención en las funciones 3 y 4 periódicas en espacios de Hilbert.

Cabe mencionar que, además del estudio de las funciones Lipschitz continuas, también se estudiarán las funciones uniformemente Lipschitz continuas. En la mayoría de estos trabajos los puntos fijos se encuentran mediante iteraciones; usaremos lo estudiado en el capítulo anterior para garantizar la existencia de retractos en ciertos casos.

Primero daremos la siguiente definición:

Definición 2.1. *Sea X un espacio métrico completo y $T : X \to X$. Diremos que $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión aproximativa de T si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(x_n, Tx_n) = 0.$$

El siguiente lema garantiza la existencia de puntos fijos cuando existe una sucesión aproximativa.

Lema 2.2. *Sea X un espacio métrico completo, $T : X \to X$ continua. Si existe $\{u_n\} \subset X$ una sucesión aproximativa y de Cauchy, entonces $z = \lim_{n\to\infty} u_n$ es un punto fijo de T.*

Demostración. Basta ver lo siguiente:

$$\mathrm{d}(Tz, z) \leq \mathrm{d}(Tz, Tu_n) + \mathrm{d}(Tu_n, u_n) + \mathrm{d}(u_n, z).$$

Por lo tanto $Tz = z$. #

Demostraremos el siguiente corolario que es semejante al lema 1 de Górnicki de [GP05].

Corolario 2.3. *Sea X como arriba. Si existen $0 < A < 1$, $B > 0$ y $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ tales que para $n \geq 1$:*

$$\mathrm{d}(Tu_n, u_n) \leq A\,\mathrm{d}(Tu_{n-1}, u_{n-1}) \tag{2.0.1}$$

y

$$\mathrm{d}(u_n, u_{n-1}) \leq B\,\mathrm{d}(Tu_{n-1}, u_{n-1})$$

entonces $z = \lim_{n\to\infty} u_n$ es un punto fijo de T.

Demostración. Veamos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(u_{n+m}, u_n) &\leq \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}(u_{n+i}, u_{n+i-1}) \\
&\leq B \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}(Tu_{n+i-1}, u_{n+i-1}) \\
&\leq B \sum_{i=1}^{m} A^{n+i-1}\,\mathrm{d}(Tu_0, u_0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= BA^n \, \mathrm{d}(Tu_0, u_0) \sum_{i=1}^{m} A^{i-1} \\
&= BA^n \frac{1 - A^m}{1 - A} \, \mathrm{d}(Tu_0, u_0) \\
&\leq BA^n \frac{1}{1 - A} \, \mathrm{d}(Tu_0, u_0).
\end{aligned} \tag{2.0.2}
$$

Por lo tanto $\{u_n\}$ es de Cauchy, además por (2.0.1) también es una sucesión aproximativa, y el resultado se sigue del lema anterior. #

Ahora nosotros daremos condiciones para tener retracciones sobre el conjunto de puntos fijos:

Corolario 2.4. *Sea X como antes y $T : X \to X$ una función continua. Supongamos que existen $u : X \to X$, $0 < A < 1$ y $B > 0$ tales que para todo $x \in X$:*

(I)

$$\mathrm{d}(Tu(x), u(x)) \leq A \, \mathrm{d}(Tx, x)$$

(II)

$$\mathrm{d}(u(x), x) \leq B \, \mathrm{d}(Tx, x),$$

Entonces $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Además si R es la función definida por $R(x) = \lim_{n\to\infty} u^n(x)$ y u es continua, entonces R es una retracción de X a $\mathrm{Fix}(T)$.

Supongamos ahora que $u \in \mathscr{L}(k)$:

(a) *Si $k < 1$ entonces T tiene un único punto fijo.*

(b) *Si $k = 1$ entonces R es no expansiva.*

(c) *Si $k > 1$ y $D = \mathrm{diam}(X) < \infty$ entonces R es una retracción Hölder continua de X en* $\mathrm{Fix}(T)$.

Demostración. Sea $x \in X$ cualquiera.

La sucesión $\{u^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ cumple las condiciones del lema anterior, donde $u^0(x) = x$, así que $u^n(x)$ converge a un punto fijo de T.

Se tiene que $\mathrm{Fix}(u) = \mathrm{Fix}(T)$, pues si $x \in \mathrm{Fix}(u)$, entonces tenemos que $u^n(x) = x$ es un punto fijo de T, por otro lado, si $x \in \mathrm{Fix}(T)$, entonces por la condición (II), tenemos que $x \in \mathrm{Fix}(u)$.

Por lo tanto si x es punto fijo de T, $Rx = x$; entonces para ver que R es un retracto, sólo falta probar que R es continua.

Tomemos el conjunto $E_L = \{x \in X : \mathrm{d}(x, Tx) < L\}$; entonces se tiene que $X = \cup_L E_L$. Demostraremos que R es continua en E_L para todo $L > 0$.

Sea $L > 0$ y $x \in E_L$ cualquiera, entonces $\mathrm{d}(x, Tx) < L$ y de (2.0.2) tenemos:

$$d(R(x), u^n(x)) \leq \frac{BA^n}{1-A} d(Tx, x) < \frac{LBA^n}{1-A}.$$

La última desigualdad no depende de x, y como $A < 1$, u^n converge uniformemente a R en E_L, por lo que R es continua en E_L y consecuentemente en X. Así, R es una retracción de X sobre $\mathrm{Fix}(T)$.

(a) Si $k < 1$ entonces u es una contracción y tiene un único punto fijo. Como $\mathrm{Fix}(u) = \mathrm{Fix}(T)$, también T tiene un único punto fijo.

(b) Ya que u es no expansiva:

$$d(Rx, Ry) = d(\lim_{n\to\infty} u^n(x), \lim_{n\to\infty} u^n(y)) = \lim_{n\to\infty} d(u^n(x), u^n(y)) \leq \lim_{n\to\infty} d(x,y) = d(x,y).$$

(c) Si $k > 1$, para poder concluir como en (1.3.3), necesitamos $d(x,y) < \frac{2DB}{1-A}$; esto es cierto si consideramos, sin perder generalidad, que $B > \frac{1}{2}$, porque $d(x,y) \leq D < 2BD < \frac{2BD}{1-A}$. Entonces concluimos que R es una retracción Hölder continua de X a $\mathrm{Fix}(T)$:

$$d(Rx, Ry) \leq 2\left(\frac{2DB}{1-A}\right)^{\frac{\ln(k)}{\ln(k)+\ln(\frac{1}{A})}} k\, d(x,y)^{\frac{\ln(\frac{1}{A})}{\ln(k)+\ln(\frac{1}{A})}}.$$

#

Tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.5. *Si existe u como en el corolario 2.4 tal que u^N es continua para alguna N entonces $R = \lim_{n\to\infty} u^n$ es una retracción de X en* $\mathrm{Fix}(T)$. *Supongamos adicionalmente que $u^N \in \mathscr{L}(k)$. Si $k < 1$, entonces T tiene un único punto fijo; si $k = 1$ entonces R es no expansiva. Si $D = \mathrm{diam}(X) < \infty$ y si $k > 1$, entonces R es Hölder continua.*

Demostración. Notemos que $R = \lim_{n\to\infty} u^n = \lim_{n\to\infty} u^{Nn}$, y está bien definida pues por el lema anterior dicho límite existe. Notemos también lo siguiente:

$$d(Tu^N(x), u^N(x)) \leq A\, d(Tu^{N-1}(x), u^{N-1}(x)) \leq \ldots \leq A^N d(Tx, x),$$

y por (2.0.2)

$$d(u^N(x), x) \leq B\frac{1-A^N}{1-A} d(Tx, x).$$

Como $A^N < 1$ y $B\frac{1-A^N}{1-A} > 0$, entonces la conclusión se sigue de ambas desigualdades junto con el corolario 2.4. #

2.1. Involuciones

En esta sección daremos un resultado sobre involuciones definidas en espacios vectoriales topológicos metrizables.

Proposición 2.6. *Sean Z un espacio vectorial topológico metrizable, con métrica* d *y X un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de Z. Supongamos que la métrica* d *es invariante bajo translaciones y que para algún $c > 0$, $\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \leq c\,\mathrm{d}(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in X$. Sea $T : X \to X$ una involución, con $T \in \mathscr{L}(k)$. Si $2kc^2 < 1$ entonces $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$; más aún, si $k < \frac{1}{c} - 1$ entonces T tiene un único punto fijo, si $k = \frac{1}{c} - 1$ entonces $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto no expansivo de X y si $k > \frac{1}{c} - 1$ entonces $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto Hölder continuo de X.*

Demostración. Definamos la función $u : X \to X$ como $u(x) = \frac{x+Tx}{2}$, para cada $x \in X$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(Tu(x), u(x)) &= \mathrm{d}\left(Tu(x), \frac{x + Tx}{2}\right) \\
&= \mathrm{d}\left(\frac{Tu(x)}{2} - \frac{x}{2}, \frac{Tx}{2} - \frac{Tu(x)}{2}\right) \\
&\leq \mathrm{d}\left(\frac{Tu(x)}{2} - \frac{x}{2}, 0\right) + \mathrm{d}\left(0, \frac{Tx}{2} - \frac{Tu(x)}{2}\right) \\
&= \mathrm{d}\left(\frac{Tu(x)}{2}, \frac{x}{2}\right) + \mathrm{d}\left(\frac{Tx}{2}, \frac{Tu(x)}{2}\right) \\
&\leq c(\mathrm{d}(Tu(x), T^2x) + \mathrm{d}(Tx, Tu(x))) \\
&\leq ck(\mathrm{d}(u(x), Tx) + \mathrm{d}(x, u(x))) \\
&= ck\left(\mathrm{d}\left(\frac{x + Tx}{2}, Tx\right) + \mathrm{d}\left(x, \frac{x + Tx}{2}\right)\right) \\
&= ck\left(\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}, \frac{Tx}{2}\right) + \mathrm{d}\left(\frac{x}{2}, \frac{Tx}{2}\right)\right) \\
&\leq 2c^2k\,\mathrm{d}(x, Tx).
\end{aligned}
$$

Notemos que $\mathrm{d}(u(x), x) = \mathrm{d}(\frac{Tx}{2}, \frac{x}{2}) \leq c\,\mathrm{d}(x, Tx)$.

Así, por el corolario 2.4, si $2c^2k < 1$ entonces $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Notemos también lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(u(x), u(y)) &= \mathrm{d}\left(\frac{x + Tx}{2}, \frac{y + Ty}{2}\right) \\
&\leq c\,\mathrm{d}\,(x + Tx, y + Ty) \\
&= c\,\mathrm{d}(x - y, Ty - Tx) \\
&\leq c\,\mathrm{d}(x - y, 0) + c\,\mathrm{d}(0, Ty - Tx) \\
&= c\,\mathrm{d}(x, y) + c\,\mathrm{d}(Tx, Ty) \\
&\leq c(1 + k)\,\mathrm{d}(x, y).
\end{aligned}
$$

Entonces $u \in \mathscr{L}(c(1 + k))$, por lo que T tiene un único punto fijo cuando $k < \frac{1}{c} - 1$ y $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto no expansivo (Hölder continuo) de X cuando $k = \frac{1}{c} - 1$ (cuando $k > \frac{1}{c} - 1$, respectivamente). #

Como corolario obtenemos el teorema 1.20 de Goebel y Zlotkiewicz: como un espacio de Banach cumple con las condiciones de la proposición anterior, con $c = \frac{1}{2}$, entonces cuando $k < 1$, T tiene un único punto fijo; cuando $k = 1$, $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ y $\text{Fix}(T)$ es un retracto no expansivo de X. Finalmente, cuando $1 < k < 2$ se tiene que $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ y $\text{Fix}(T)$ es un retracto Hölder continuo de X.

Como aplicación de la anterior proposición tenemos el siguiente ejemplo. Es sabido que los espacios ℓ^p y $L^p(\mu)$, con $0 < p < 1$ son espacios métricos completos, con métricas $\text{d}(x,y) = \sum |x_i - y_i|^p$ y $\text{d}(x,y) = \int |x-y|^p d\mu$ respectivamente, donde μ es una medida positiva, y estos espacios no son espacios normados. En estos casos tenemos: $\text{d}(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}) = \frac{1}{2^p}\text{d}(x,y)$; por lo tanto, si T es una involución definida en un subconjunto $X \subset \ell^p$ ó $X \subset L^p$ como en la anterior proposición, la condición $\frac{k}{2^{2p-1}} < 1$, es decir $k < 2^{2p-1}$ implica $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Notemos que la desigualdad $2^{2p-1} \geq 1$ se da para $p \geq \frac{1}{2}$, y se da la igualdad para $p = \frac{1}{2}$. Asimismo, $\frac{1}{c} - 1 = 2^p - 1 < 1$ para $p < 1$.

Así, si $0 < p < \frac{1}{2}$, la condición que implica la existencia de puntos fijos es $k < 2^{2p-1}$, con $2^{2p-1} < 1$, por lo que no mejora la condición $k < 1$ dada por el Principio de Contracción de Banach.

Para $p = \frac{1}{2}$, la condición que implica la existencia de puntos fijos es $k < 1$, que ya está dada por el Principio de Contracción de Banach.

Para $\frac{1}{2} < p < 1$, se tiene que: si $k < 1$ entonces T tiene un único punto fijo, si $1 \leq k < 2^{2p-1}$, entonces $\text{Fix}(T)$ es no vacío y es un retracto Hölder continuo de X. Esto es porque el corolario asegura la existencia de un retracto Hölder continuo para $k > \frac{1}{c} - 1$ y en este caso tenemos que $\frac{1}{c} - 1 < 1$.

Veremos ahora la relación que hay entre los puntos fijos de las involuciones y la convexidad de los espacios de Banach.

Definición 2.7. *Diremos que un espacio de Banach X es* uniformemente convexo *si para cada $\epsilon \in [0,2)$ existe $\delta > 0$ tal que la siguiente implicación es cierta:*

$$\left.\begin{array}{r} \|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1 \\ \|x-y\| \geq \epsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta. \tag{2.1.1}$$

Es fácil ver que si un espacio de Banach es uniformemente convexo entonces es estrictamente convexo (ver definición al principio del capítulo I). La implicación inversa no es cierta (ver Ejemplo 5.1 de [GK90, págs. 51-52]).

Definición 2.8. *El* módulo de convexidad *de un espacio de Banach X es la función $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ definida por*

$$\delta_X(\epsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \epsilon\right\}.$$

Hay que notar que $\delta_X(\epsilon)$ es el δ más grande que hace válida la implicación (2.1.1). Una formulación equivalente para δ (omitiremos el subíndice X cuando en el contexto sea claro el espacio donde estamos trabajando) y que nos será útil es la siguiente. Para $x, y, p \in X$, $R > 0$ y $r \in [0, 2R]$,

$$\left.\begin{array}{r}\|x-p\| \leq R\\ \|y-p\| \leq R\\ \|x-y\| \geq r\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \left\|p - \frac{x+y}{2}\right\| \leq \left(1 - \delta\left(\frac{r}{R}\right)\right)R.$$

Definición 2.9. *Definimos el* coeficiente de convexidad *de un espacio de Banach X como el número:*

$$\epsilon_0 = \epsilon_0(X) = \sup\{\epsilon \geq 0 \colon \delta(\epsilon) = 0\}.$$

Por definición, $\delta(\epsilon)$ como función de ϵ es una función no decreciente, pero de hecho se tiene lo siguiente (ver por ejemplo el Lema 5.1 de [GK90, pág. 54]):

Lema. *Sea X un espacio de Banach con módulo de convexidad δ y coeficiente de convexidad ϵ_0. Entonces δ es continuo en* $[0, 2)$ *y estrictamente creciente en* $[\epsilon_0, 2]$.

En la misma referencia podemos encontrar el siguiente lema:

Lema. *Un espacio de Banach X es estrictamente convexo si y sólo si* $\delta(2) = 1$.

Un espacio de Hilbert es uniformemente convexo, y de hecho, usando la identidad del paralelogramo se tiene que, si H es un espacio de Hilbert, entonces

$$\delta_H(\epsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}.$$

Clarkson [Cla36] en 1936 probó que todos los espacios $L^p = L^p(\mu)$ para $1 < p < \infty$ son uniformemente convexos y en 1956 Hanner [Han56] probó que si $p \geq 2$:

$$\delta_{L^p}(\epsilon) = 1 - \sqrt[p]{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p}$$

y si $1 < p < 2$, entonces $\delta_{L^p}(\epsilon) = \delta(\epsilon)$ está determinada de forma implícita por la fórmula:

$$\left(1 - \delta(\epsilon) + \frac{\epsilon}{2}\right)^p + \left|1 - \delta(\epsilon) - \frac{\epsilon}{2}\right|^p = 2.$$

Volvamos ahora a las involuciones. Supongamos que $T : C \to C$ es una involución, $T \in \mathscr{L}(k)$, donde C es un subconjunto no vacío, convexo y cerrado no necesariamente acotado de un espacio de Banach. Definamos $u(x) = \frac{x+Tx}{2}$. Se puede ver que, si $x \in C$, entonces: $\|Tu(x) - Tx\| \leq \frac{k}{2}\|x - Tx\|$, $\|Tu(x) - x\| \leq \frac{k}{2}\|x - Tx\|$, lo cual implica que:

$$\|u(x) - Tu(x)\| \leq \left(1 - \delta_X\left(\frac{2}{k}\right)\right)\frac{k}{2}\|x - Tx\|. \tag{2.1.2}$$

Con esto tenemos la siguiente proposición, (ver [Goe02, pág. 76]) y nosotros daremos condiciones para la existencia de retractos sobre el conjunto de puntos fijos:

Proposición 2.10. *Sea C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Banach X, $T : C \to C$ una involución k-Lipschitz continua, tal que cumple la condición:*

$$\left(1 - \delta_X\left(\frac{2}{k}\right)\right)\frac{k}{2} < 1;$$

entonces $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ *y es un retracto de C. Si C está acotado tenemos lo siguiente: si $k = 1$ entonces* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto no expansivo de C; si $k > 1$ entonces* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto Hölder continuo de C.*

Demostración. Por las hipótesis dadas, la conclusión se sigue del corolario 2.4. #

Dados $x, y \in C$, por $[x, y]$ denotaremos el *segmento* de x a y, esto es: $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y \colon \lambda \in [0,1]\}$.

Lo que nosotros establecemos en el siguiente corolario es que las involuciones no expansivas en espacios estrictamente convexos, deben ser isometrías T tales que Tx es la reflexión de x bajo un punto del conjunto $\mathrm{Fix}(T)$.

Corolario 2.11. *Sea $T : C \to C$ una involución no expansiva, donde C es un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Banach estrictamente convexo. Entonces T es una isometría con* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$*. Además para cada $y \in C$,* $\mathrm{dist}(y, \mathrm{Fix}(T)) = \mathrm{dist}(Ty, \mathrm{Fix}(T))$*,* $[y, Ty] \cap \mathrm{Fix}(T) = \frac{y+Ty}{2}$ *entonces $u(x) = \frac{x+Tx}{2}$ es una retracción de C en* $\mathrm{Fix}(T)$*.*

Demostración. Supongamos que $T : C \to C$ es una involución no expansiva, donde C es un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio estrictamente convexo X. Entonces T debe ser una isometría. En efecto, si existieran x, y tales que $\|Tx - Ty\| < \|x - y\|$ entonces se tendría que $\|Tx - Ty\| < \|T^2x - T^2y\| \leq \|Tx - Ty\|$, lo cual es imposible.

Definamos la función $u : C \to C$ como $u(x) = \frac{x+Tx}{2}$. Ya que X es estrictamente convexo, $\delta_X(2) = 1$, y como $T : C \to C$ es no expansivo, entonces la desigualdad (2.1.2) nos dice que $u(x)$ es punto fijo para cada $x \in C$.

Como vimos en el lema 1.4, el conjunto de puntos fijos de una función no expansiva en un espacio estrictamente convexo es un conjunto convexo. En este caso, tenemos que la retracción no expansiva que nos da el corolario 2.4 coincide con u, es decir, $u : C \to \mathrm{Fix}(T)$ es una retracción no expansiva, con $\mathrm{Fix}(T) \subset C$ convexo. Tomemos $x_0 \in \mathrm{Fix}(T)$ y $y \in C$ cualquiera, por ser T una isometría, $\|x_0 - y\| = \|Tx_0 - Ty\| = \|x_0 - Ty\|$, de aquí, $\mathrm{dist}(y, \mathrm{Fix}(T)) = \mathrm{dist}(Ty, \mathrm{Fix}(T))$.

Sólo falta ver que $[y, Ty] \cap \mathrm{Fix}(T) = \frac{y+Ty}{2}$ para cada $y \in C$. Si $y \in \mathrm{Fix}(T)$, entonces la conclusión es clara. Supongamos que $y \notin \mathrm{Fix}(T)$, y que $x_0 = \lambda_0 y + (1-\lambda_0)Ty \in \mathrm{Fix}(T)$ para algún $\lambda_0 \neq \frac{1}{2}$, entonces $\|y - x_0\| = (1-\lambda_0)\|y - Ty\| \neq \lambda_0\|y - Ty\| = \|Ty - x_0\|$, lo cual no es cierto pues $x_0 \in \mathrm{Fix}(T)$, entonces $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. #

No se sabe si existe una involución Lipschitz continua sin puntos fijos. Este problema se encuentra relacionado con la clasificación uniforme de esferas (ver [BL00]). Se sabe que en un espacio de Banach de dimensión infinita, la bola unitaria B es homeomorfa a la esfera unitaria S. La pregunta es : ¿Existe un homeomorfismo H de B

en S tal que H y H^{-1} sean Lipschitz continuas? Esta es una pregunta que sigue abierta. Supongamos que la respuesta es afirmativa, entonces si definimos $T : B \to B$ como $Tx = (H^{-1} \circ -Id \circ H)(x)$, tendríamos una involución Lipschitz continua y con $\mathrm{Fix}(T) = \emptyset$ (ver [GT04]).

2.2. Funciones (a,n)-rotativas

Supongamos que tenemos una función $T : C \to C$ no expansiva. Entonces tenemos que:

$$\|x - T^n x\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|T^i x - T^{i+1} x\| \leq n\|x - Tx\|.$$

Esta observación lleva a la siguiente definición ([Goe02, pág. 78]):

Definición 2.12. *Una función $T : C \to C$ se dice que es* (a,n)-rotativa *si existe una constante $0 \leq a < n$ tal que para todo $x \in C$:*

$$\|x - T^n x\| \leq a\|x - Tx\|.$$

Si T es (a,n)-rotativa para algún n y alguna $a < n$, diremos que T es rotativa.

Vemos que las funciones n-periódicas son las funciones $(0,n)$-rotativas. Las funciones (a,n)-rotativas fueron inicialmente estudiadas por K. Goebel y M. Koter en [GK81b].

Hay que notar que en el concepto de (a,n)-rotativo no estamos pidiendo que la función sea no expansiva. La condición de que una función no expansiva sea (a,n)-rotativa es una condición fuerte, como se puede ver en el siguiente teorema (ver [GK90, pág. 177] ó [GK81a, GK81b]):

Teorema. *Si C es un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Banach, entonces cualquier función rotativa y no expansiva $T : C \to C$ tiene punto fijo. Además, el conjunto de puntos fijos* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto no expansivo de C.*

Por esto es un problema interesante estudiar las funciones (a,n)-rotativas y que son k-Lipschitz con $k > 1$. A este respecto, vamos a introducir una nueva constante:

Definición 2.13. *Sea X un espacio de Banach. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq a < n$ definimos:*

$$\gamma_n^X(a) = \inf\{k : \exists C \subset X, T : C \to C, T \in \mathscr{L}(k), \mathrm{Fix}(T) = \emptyset, T\ (a,n) - rotativo\},$$

donde C es un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de X.

Entonces tenemos el siguiente resultado [GK90, págs. 179-180]:

Teorema. *Sea X un espacio de Banach cualquiera. Entonces para cualesquiera $0 \leq a < n$ se tiene que $\gamma_n^X(a) > 1$.*

Demostración. Daremos un esbozo de la demostración, la prueba completa puede hallarse en [GK90]. Sea $T : C \to C$ una función k-Lipschitz continua y (a,n)-rotativa, con C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Banach X; definamos F_α para $0 \leq \alpha < \frac{1}{k}$ como sigue: para cualquier $x \in C$, sea $F_\alpha(x)$ el único punto fijo de la función contractiva $G_{\alpha,x} : C \to C$, definida para cada $y \in C$ como $G_{\alpha,x}(y) = (1-\alpha)x + \alpha T(y)$.

Notemos que $\mathrm{Fix}(F_\alpha) = \mathrm{Fix}(T)$. También se puede ver que $F_\alpha \in \mathscr{L}\left(\frac{1-\alpha}{1-k\alpha}\right)$, con $\frac{1-\alpha}{1-k\alpha} > 1$, además, para cada $x \in C$:

$$\|F_\alpha^2 x - F_\alpha x\| \leq g(\alpha,k)\|F_\alpha x - x\|$$

donde

$$g(\alpha,k) = \frac{1-\alpha}{1-k\alpha}\left[\frac{a + \frac{k^n-1}{k-1}}{\sum_{i=0}^{n-1}(k\alpha)^i} - 1\right].$$

Si $g(\alpha,k) < 1$ entonces $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. Notemos que:

$$\lim_{\alpha\to 1^-}\lim_{k\to 1^+} g(\alpha,k) = \frac{a}{n} < 1.$$

Así se concluye que $\gamma_n^X(a) > 1$. #

Y podemos todavía decir más:

Proposición 2.14. *Sea $T : C \to C$, donde T y C son como arriba. Si $g(\alpha,k) < 1$ entonces* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto de C y si $k = 1$, R es no expansiva. Supongamos que además C está acotado, si $k > 1$ entonces* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto Hölder continuo de C.*

Demostración. Notemos que si reemplazamos a T del corolario 2.4 por F_α, a u por F_α, a A por $g(\alpha,k)$ y $B = 1$, entonces se cumplen las condiciones de este corolario para tener la conclusión de esta proposición.

#

No se conoce el valor exacto de $\gamma_n^X(a)$, ni siquiera para el caso $a = 0$, de hecho no se sabe si dado $n \in \mathbb{N}$ existe una cota M tal que $\gamma_n^X(0) < M$ para todo espacio de Banach X. Tampoco se tiene el valor exacto de $\gamma_n^H(0)$ para H un espacio de Hilbert. La estimación mejor que se tiene para $\gamma_2^H(0)$ se debe a M. Koter [Kot86], ella encontró, usando la estructura geométrica de los espacios de Hilbert, que $\gamma_2^H(0) \geq \sqrt{\pi^2-3} = 2.6209\ldots$. Nosotros daremos nuevas cotas para $\gamma_n^H(0)$, con $n \geq 3$.

Hay otra constante muy estrechamente relacionada con $\gamma_n^X(a)$. Para esto introduzcamos la siguiente definición:

Definición 2.15. *Sea $T : C \to C$ una función. Diremos que T es* uniformemente Lipschitz continua *si existe $k > 0$ tal que para todo entero i, $\|T^i x - T^i y\| \leq k\|x-y\|$ para cualesquiera $x, y \in C$. Lo denotaremos por $T \in \mathscr{U}(k)$. Si k es la mínima constante con esa propiedad, diremos que T es* uniformemente Lipschitz con constante *k.*

Y de manera análoga definimos:

Definición 2.16. *Para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $0 \le a < n$ definimos:*

$$\widetilde{\gamma}_n^X(a) = \inf\{k : \exists C \subset X, T : C \to C, T \in \mathscr{U}(k), \mathrm{Fix}(T) = \emptyset, T(a,n) - \textit{rotativo}\},$$

donde C es un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Banach X.

Ya que en particular una función uniformemente Lipschitz continua es Lipschitz continua, entonces tenemos que $\widetilde{\gamma}_n^X(a) \ge \gamma_n^X(a) > 1$.

A este respecto, Kirk [Kir71] probó el siguiente teorema:

Teorema. *Sea C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Banach X. Supongamos que $T : C \to C$ tiene la propiedad de que para algún entero n, T es $(0,n)$-rotativo y supongamos que existe $k > 0$ tal que:*

$$\eta = \frac{(n-1)(n-2)k^2 + 2(n-1)k}{n^2} < 1,$$

y $\|T^j x - T^j y\| \le k\|x - y\|$ para $x, y \in C$, $1 \le j \le n-1$. Entonces la función T tiene un punto fijo.

Kirk demuestra que si $G : C \to C$ es la función dada por:

$$Gx = \frac{x + Tx + \ldots + T^{n-1}x}{n},$$

para cada $x \in C$, la sucesión $\{G^m x\}$ converge a un punto fijo de T, si $\eta < 1$. Para esto, demuestra que si

$$f(x) = \sup\left\{\|x - T^j x\| : j = 1, \ldots, n-1\right\}$$

entonces para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\|G^{m+1}x - G^m x\| \le \eta^m f(x).$$

También ve que $\mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(G)$.

De este teorema se deduce que $\widetilde{\gamma}_3^X(0) \ge 1.3452$, $\widetilde{\gamma}_4^X(0) \ge 1.2078$, $\widetilde{\gamma}_5^X(0) \ge 1.1280$ y $\widetilde{\gamma}_6^X(0) \ge 1.1147$, aunque después nosotros daremos cotas mejores para espacios de Hilbert, usando otros métodos.

Con la ayuda de este teorema, nosotros podemos decir algo acerca del conjunto de puntos fijos:

Proposición 2.17. *Sean $T : C \to C$ y η como arriba y supongamos que $\eta < 1$. Entonces $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto de C. Si $k = 1$, $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto no expansivo de C. Supongamos adicionalmente que C está acotado entonces si $k > 1$, $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto Hölder continuo de C.*

Demostración. Primero veamos que $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto de C. Vamos a proceder como en la demostración del corolario 2.4.

Sea $Rx = \lim_{m\to\infty} G^m x$, entonces $Rx \in \mathrm{Fix}(T)$ y si $x \in \mathrm{Fix}(T)$ entonces $Rx = x$. Así, para ver que R es una retracción de C en $\mathrm{Fix}(T)$, hace falta ver que R es continua en C.

Definamos $E_L = \{x \in C : f(x) < L\}$, y como $C = \cup_{L>0} E_L$, sólo hace falta ver que R es continua en cada E_L.

Notemos que, por la desigualdad del triángulo, tenemos que para todo j;

$$\begin{aligned}\|G^{m+j}x - G^m x\| \leq & \sum_{i=1}^{j} \|G^{m+i}x - G^{m+i-1}x\| \\ \leq & \eta^m \frac{1-\eta^j}{1-\eta} f(x) \\ \leq & \frac{\eta^m}{1-\eta} f(x),\end{aligned}$$

por lo que se tiene que:

$$\|Rx - G^m x\| \leq \frac{\eta^m}{1-\eta} f(x).$$

Sean $L > 0$ y $x \in E_L$, entonces se tiene que:

$$\|Rx - G^m x\| \leq \frac{\eta^m}{1-\eta} f(x) \leq \frac{L\eta^m}{1-\eta},$$

por lo que G^m converge uniformemente a R en E_L, así, R es continua.

Como se dijo antes, $\mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(G)$ y además tenemos que $G \in \mathscr{L}(\frac{1+(n-1)k}{n})$. Así, si $k = 1$, G es no expansiva y si $k > 1$ entonces G es Lipschitz continua con constante mayor que 1.

Si $k = 1$, entonces análogo al inciso (b) del corolario 2.4, R es no expansiva.

Supongamos que $D = \mathrm{diam}(C) < \infty$, entonces se tiene que $0 \leq f(x) \leq D$ para todo $x \in C$.

Tomemos $k > 1$, en este caso:

$$\begin{aligned}\|Rx - Ry\| \leq & \|Rx - G^m x\| + \|G^m x - G^m y\| + \|G^m y - Ry\| \\ \leq & \frac{2D\eta^m}{1-\eta} + k^m \|x - y\|,\end{aligned}$$

y como se cumple $\|x - y\| \leq D < \frac{2D}{1-\eta}$, entonces, por la conclusión (1.3.3), R es Hölder continua. #

2.2.1. Funciones $(a, 2)$-rotativas en espacios de Hilbert

Ahora estudiaremos las estimaciones que se tienen para $\gamma_2^H(a)$, donde H es un espacio de Hilbert.

En espacios de Banach se tiene el siguiente resultado, que se encuentra en [KK01].

Proposición 2.18. *Sea X un espacio de Banach, entonces*

$$\gamma_2^X(a) \geq \begin{cases} \frac{1}{2}\left(2 - a + \sqrt{(2-a)^2 + a^2}\right) & si\ a \in [0, 2(\sqrt{2}-1)] \\ \frac{1}{8}\left(a^2 + 4 + \sqrt{(a^2+4)^2 - 64a + 64}\right) & si\ a \in [2(\sqrt{2}-1), 2) \end{cases}$$

Usando el corolario 2.4, podemos afirmar lo siguiente:

Corolario 2.19. *Sea $T : C \to C$ una función $(a,2)$-rotativa y $T \in \mathscr{L}(k)$, con C un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de un espacio de Banach. Supongamos que $a \in [0, 2(\sqrt{2}-1)]$ y $k < \frac{1}{2}\left(2 - a + \sqrt{(2-a)^2 + a^2}\right)$ ó que $a \in [2(\sqrt{2}-1), 2)$ y $k < \frac{1}{8}\left(a^2 + 4 + \sqrt{(a^2+4)^2 - 64a + 64}\right)$, entonces* $\mathrm{Fix}(T)$ *es no vacío y es un retracto de C. Si $k = 1$,* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto no expansivo de C. Si además C está acotado, entonces* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto Hölder continuo de C si $k > 1$.*

Demostración. Tomemos primero $a \in [0, 2(\sqrt{2}-1)]$. Sean $h(\alpha) = (1-\alpha)a + (1-\alpha)^2 k + \alpha^2 k$ y $\alpha_0 = \frac{a+2k}{4k}$. En [KK01] se demuestra que si $z(x) = (1-\alpha_0)x + \alpha_0 Tx$, entonces

$$\|z(x) - Tz(x)\| \le h(\alpha_0)\|x - Tx\|,$$

y como z es una función continua, por el corolario 2.4 se sigue el resultado si $h(\alpha_0) < 1$, lo que es equivalente a $k < \frac{1}{2}\left(2 - a + \sqrt{(2-a)^2 + a^2}\right)$.

Tomemos $a \in (2(\sqrt{2}-1), 2)$. Sean $g(\alpha) = \alpha^2 k(1 + k - a) + \alpha k(a - 2k) + k^2$ y $\alpha_1 = \frac{2k-a}{2(1+k-a)}$. También se demuestra que si $u(x) = (1-\alpha_1)T^2 x + \alpha_1 Tx$, entonces

$$\|u(x) - Tu(x)\| \le g(\alpha_1)\|x - Tx\|,$$

y análogamente, ya que la función u es continua, usando otra vez el corolario 2.4 la conclusión de este corolario se da si $g(\alpha_1) < 1$, es decir, si

$$k < \frac{1}{8}\left(a^2 + 4 + \sqrt{(a^2+4)^2 - 64a + 64}\right).$$

#

En espacios de Hilbert se pueden hallar cotas mejores para $\gamma_2^H(a)$ que las de la proposición 2.18.

Para esto, necesitamos el siguiente lema que caracteriza a los espacios de Hilbert:

Lema 2.20. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\alpha \in (0,1)$. Entonces X es un espacio de Hilbert si y solamente si para cada $x, y \in X$:*

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x - y\|^2. \qquad (2.2.1)$$

Komorowski en el siguiente teorema da una estimación de $\gamma_2^H(a)$ para espacios de Hilbert, la prueba se puede hallar en [Kot00].

Teorema 2.21. *Sea H un espacio de Hilbert, entonces:*

$$\gamma_2^H(a) \ge \sqrt{\frac{5}{a^2+1}}.$$

Demostración. Sea H un espacio de Hilbert y C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de H, y $T : C \to C$ una función $(a, 2)$-rotativa, con $T \in \mathscr{L}(k)$.

Sea $0 \leq a < 2$ y $k < \sqrt{\frac{5}{a^2+1}}$, esto es, $\frac{1}{4}(k^2(a^2+1) - 1) < 1$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{1}{4}(k^2(a^2+1) - 1 + \varepsilon) < 1$.

Para $x \in C$ sea:

$$u(x) = \begin{cases} Tx & \text{si} \quad \|T^2x - Tx\|^2 < (1-\varepsilon)\|Tx - x\|^2 \\ \frac{T^2x+Tx}{2} & \text{si} \quad \|T^2x - Tx\|^2 \geq (1-\varepsilon)\|Tx - x\|^2. \end{cases}$$

Si $\|T^2x - Tx\|^2 \geq (1-\varepsilon)\|Tx - x\|^2$ y usando dos veces la caracterización dada por el lema anterior para $\alpha = \frac{1}{2}$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|u(x) - Tu(x)\|^2 &= \frac{1}{2}\|T^2x - Tu(x)\|^2 + \frac{1}{2}\|Tx - Tu(x)\|^2 - \frac{1}{4}\|T^2x - Tx\|^2 \\ &\leq \frac{k^2}{2}\left[\|Tx - u(x)\|^2 + \|u(x) - x\|^2\right] - \frac{1}{4}\|T^2x - Tx\|^2 \\ &= \frac{k^2}{2}\left[\left\|\frac{T^2x - Tx}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|T^2x - x\|^2 + \frac{1}{2}\|Tx - x\|^2 - \frac{1}{4}\|T^2x - Tx\|^2\right] - \frac{1}{4}\|T^2x - Tx\|^2 \\ &= \frac{k^2}{4}(\|T^2x - x\|^2 + \|Tx - x\|^2) - \frac{1}{4}\|T^2x - Tx\|^2 \\ &\leq \left[\frac{k^2(a^2+1)}{4} - \frac{1}{4}(1-\varepsilon)\right]\|x - Tx\|^2. \end{aligned}$$

Por lo anterior tenemos que para todo $x \in C$:

$$\|u(x) - Tu(x)\|^2 \leq \max\left\{\left[\frac{1}{4}(k^2(a^2+1) - (1-\varepsilon))\right], [1-\varepsilon]\right\}\|x - T(x)\|^2.$$

Por la primera parte del corolario 2.4, $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ que era lo que se quería probar.

#

Aunque para $a = 0$, $u(x) = \frac{T^2x+Tx}{2}$ y por lo tanto es continua, para $0 < a < 2$ no podemos asegurar que u es continua, por lo que en estos casos no podemos asegurar la existencia de algún retracto sobre $\text{Fix}(T)$.

Sin embargo, modificando un poco la prueba anterior podremos garantizar para ciertos casos la continuidad de una función u, y por ende garantizaremos que el conjunto de puntos fijos es un retracto Hölder continuo de C.

Proposición 2.22. *Sea H un espacio de Hilbert, C un subconjunto convexo y cerrado H. Sea $T : C \to C$ una función $(a, 2)$-rotativa con $T \in \mathscr{L}(k)$. Si k cumple que:*

$$k < \begin{cases} \sqrt{\frac{4+(1-a)^2}{1+a^2}} & si \quad a \in [0, 1] \\ \sqrt{\frac{4}{1+a^2}} & si \quad a \in (1, 2) \end{cases}$$

entonces $\text{Fix}(T)$ *es un retracto de C. Más aún, si $k = 1$,* $\text{Fix}(T)$ *es un retracto no expansivo de C; si $k > 1$ y C está acotado,* $\text{Fix}(T)$ *es un retracto Hölder continuo de C.*

Demostración. Tomemos $0 \leq \alpha < 1$, haciendo uso del lema 2.20 tenemos que:

$\|\alpha(x-T^2x)+(1-\alpha)(Tx-T^2x)\|^2 = \alpha\|x-T^2x\|^2+(1-\alpha)\|Tx-T^2x\|^2-\alpha(1-\alpha)\|x-Tx\|^2$,

y así aseguramos que:

$$-(1-\alpha)\|Tx-T^2x\|^2 \leq \alpha\|x-T^2x\|^2-\alpha(1-\alpha)\|x-Tx\|^2,$$

de aquí que

$$-\frac{1}{4}\|Tx-T^2x\|^2 \leq \frac{\alpha}{4(1-\alpha)}\|x-T^2x\|^2-\frac{\alpha}{4}\|x-Tx\|^2.$$

Definamos $u(x) = \frac{T^2x+Tx}{2}$, que obviamente es continua. Siguiendo la prueba del teorema anterior obtenemos:

$$\|u(x)-Tu(x)\|^2 \leq \frac{k^2}{4}(\|T^2x-x\|^2+\|Tx-x\|^2)-\frac{1}{4}\|T^2x-Tx\|^2,$$

y junto a la desigualdad anterior obtenemos:

$$\|u(x)-Tu(x)\|^2 \leq \frac{1}{4}\left[k^2(1+a^2)+\frac{a^2\alpha}{1-\alpha}-\alpha\right]\|x-Tx\|^2.$$

Si suponemos que

$$\frac{1}{4}\left[k^2(1+a^2)+\frac{a^2\alpha}{1-\alpha}-\alpha\right] < 1, \tag{2.2.2}$$

y ya que $\|u(x)-x\| \leq \frac{a+1}{2}\|x-Tx\|$, podemos usar el corolario 2.4, con lo que afirmamos que $u^n(x)$ converge a a un punto fijo, y de hecho, por la continuidad de u, $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto de C.

Si $k = 1$, $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto no expansivo de C. Si $k > 1$ y C es acotado, $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto Hölder continuo de C.

Definamos la siguiente función:

$$L(\alpha) = \frac{4+\alpha-\frac{\alpha a^2}{1-\alpha}}{1+a^2}.$$

Entonces que k cumpla la condición dada por (2.2.2) es equivalente a que cumpla $k^2 < L(\alpha)$. Para obtener la mejor estimación posible, con este método, procedamos a hallar el máximo de la función L.

En el caso $a = 0$ ya vimos que podemos aplicar el corolario 2.4, con lo que $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto Hölder continuo, si $k < \sqrt{5}$.

Tomemos $0 < a \leq 1$. El máximo de L, para a en este intervalo, se encuentra en $\alpha_m = 1-a$. y el valor máximo que alcanza es:

$$L(1-a) = \frac{4+(1-a)^2}{1+a^2}.$$

Para $1 < a < 2$ el valor máximo de L se encuentra en $\alpha = 0$, y vale:

$$L(0) = \frac{4}{1+a^2},$$

tal como se quería probar. #

2.2.2. Funciones $(0, n)$-rotativas en espacios de Hilbert

Determinar el valor exacto de $\gamma_n^X(a)$ para espacios de Banach ha sido un problema atacado por varios autores, entre ellos, M. Koter. [Kot00]. Ella encontró, en particular, estimaciones para $\gamma_n^H(0)$, donde H es un espacio de Hilbert, y las estimaciones fueron mejores que las encontradas por Kirk, para $n = 3, 4, 5$ y 6. Posteriormente J. Górnicki y K. Pupka [GP05] hallaron estimaciones para $\gamma_n^X(a)$ para espacios de Banach en general, que mejoraron a las obtenidas por M. Koter.

Nosotros en esta sección mejoraremos las estimaciones halladas por Górnicki y Pupka para espacios de Hilbert, para el caso $a = 0$. Para determinar estas nuevas estimaciones nosotros daremos varias alternativas, pues como vimos en el caso de las funciones $(a, 2)$-rotativas, aunque podamos mejorar las cotas de $\gamma_2^X(a)$, en ocasiones ya no vamos a poder determinar si el conjunto de puntos fijos es o no un retracto del dominio de la función en cuestión. Entonces, mientras que un método nos ayuda a estimar mejor los valores de $\gamma_n^H(0)$ sin darnos información sobre el conjunto de puntos fijos, otro método nos dirá cuándo el conjunto de puntos fijos es un retracto, aunque las estimaciones no sean mejores que las halladas por el otro método.

Sea $T : C \to C$ una función $(0, n)$-rotativa.

En el primer método, dado $x \in C$, se toman combinaciones convexas del tipo $z = \sum_{i=1}^{n} a_i T^i x$ para definir la función auxiliar u y se pretende hallar las a_i adecuadas para obtener una mejor estimación de $\gamma_n^H(0)$. La función u en muchos casos va a ser una función continua, por lo que podemos decir algo sobre el conjunto de puntos fijos. Cuando se toma $a_i = \frac{1}{n}$ la estimación se halla más fácil que si se buscan a_i en general, como se verán en los casos particulares para $n = 3$ y $n = 4$; aunque en el segundo caso los cálculos son más difíciles, se encontrarán cotas mejores que en el primer caso y se mejorarán las estimaciones de γ_n dadas por Górnicki y Pupka para espacios de Banach.

Con el segundo método, dado $x \in C$, se toman iteraciones del tipo $x_1 = ax + (1 - a)Tx, x_2 = ax + (1-a)Tx_1, \ldots, x_{n-1} = ax + (1-a)Tx_{n-2}$ para definir una función auxiliar u, y se quiere hallar $a \in [0, 1]$ para obtener una estimación de $\gamma_n^H(0)$. Esta función u se va a definir en partes y no se garantiza la continuidad, por ende, no podemos decir nada sobre el conjunto de puntos fijos. La ventaja es que solamente necesitamos encontrar la variable a para hallar una estimación, lo cual hace los cálculos más fáciles que en el primer método. Habrán casos en que con este método se obtendrán cotas mejores que las que se encuentran en el primer método.

Nosotros también aplicaremos estos dos métodos para estimar los valores de $\widetilde{\gamma}_n^H(0)$, mejorando así los encontrados hasta hoy en día.

- **Primer método**

Para establecer este primer método, usaremos el siguiente lema, que es una propiedad que tienen los espacios de Hilbert.

Lema 2.23. *Sean n un número natural positivo y $a_i \in [0, 1]$ para $i = 1, \ldots, n$ tales que*

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$. *Sean $x_i \in H$ para $i = 1, \ldots, n$, donde H es un espacio de Hilbert. Entonces:*

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \|x_i\|^2 - \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j \|x_i - x_j\|^2.$$

Entonces tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.24. *Sea n un número natural positivo. Sea $T : C \to C$ una función k-Lipschitz continua y $(0, n)$-rotativa, donde C es un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Hilbert. Sean $a_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n$, tales que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Definamos $a_0 = a_n$. Si para cada $x \in C$ definimos*

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i T^i x,$$

entonces se tiene que:

$$\|z - Tz\|^2 \le \sum_{0 \le j < i \le n-1} [k^2(a_{j+1}a_i + a_j a_{i+1} - a_j a_i) - a_j a_i]\|T^j x - T^i x\|^2.$$

Demostración. Sean a_i, x y z como en la hipótesis. Sea $L = \sum\limits_{0 \le j < i \le n-1} a_i a_j \|T^i x - T^j x\|^2$. Usando el lema anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
\|z - Tz\|^2 =& \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i (T^i x - Tz) \Big\|^2 \\
=& \sum_{i=1}^{n} a_i \|T^i x - Tz\|^2 - L \\
\le& k^2 \sum_{s=1}^{n} a_s \|z - T^{s-1}x\|^2 - L \\
=& k^2 \sum_{s=1}^{n} a_s \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i (T^i x - T^{s-1}x) \Big\|^2 - L \\
=& k^2 \sum_{s=1}^{n} a_s \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \|T^i x - T^{s-1}x\|^2 \right) - L \right) - L \\
=& k^2 \sum_{s=1}^{n} a_s \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \|T^i x - T^{s-1}x\|^2 \right) - (k^2 + 1)L
\end{aligned}$$

Calculemos por separado el primer sumando de la última expresión:

$$
\begin{aligned}
& k^2 \sum_{s=1}^{n} a_s \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \|T^i x - T^{s-1} x\|^2 \right) \\
=& k^2 \sum_{s=0}^{n-1} a_{s+1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \|T^i x - T^s x\|^2 \right) \\
=& k^2 \sum_{s=1}^{n-1} a_{s+1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \|T^i x - T^s x\|^2 \right) + k^2 a_1 \sum_{i=1}^{n} a_i \|T^i x - x\|^2 \\
=& k^2 \sum_{s=1}^{n-1} a_{s+1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \|T^i x - T^s x\|^2 \right) + k^2 a_1 \sum_{i=1}^{n} a_i \|T^i x - x\|^2 + k^2 \sum_{s=1}^{n-1} a_{s+1} a_n \|x - T^s x\|^2 \\
=& k^2 \sum_{1 \le s < i \le n-1} (a_{s+1} a_i + a_s a_{i+1}) \|T^i x - T^s x\|^2 + k^2 a_1 \sum_{i=1}^{n} a_i \|T^i x - x\|^2 \\
& + k^2 \sum_{s=1}^{n-1} a_{s+1} a_n \|x - T^s x\|^2 \\
=& k^2 \sum_{0 \le s < i \le n-1} (a_{s+1} a_i + a_s a_{i+1}) \|T^i x - T^s x\|^2 .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se sigue que:

$$
\|z - Tz\|^2 \le \sum_{0 \le j < i \le n-1} [k^2 (a_{j+1} a_i + a_j a_{i+1} - a_j a_i) - a_j a_i] \|T^j x - T^i x\|^2 .
$$

#

Si T es k-Lipschitz sabemos que $\|T^j x - T^i x\| \le k^j \frac{k^{i-j}-1}{k-1} \|x - Tx\|$ para $j \neq 0$ e $i \neq n-1$, y $\|x - T^{n-1} x\| \le k^{n-1} \|x - Tx\|$. Esto nos puede ayudar a estimar el valor de $\|z - Tz\|^2$ siempre que $[k^2 (a_{j+1} a_i + a_j a_{i+1} - a_j a_i) - a_j a_i] \ge 0$ para todo $0 \le j < i \le n-1$. Usaremos esto en el siguiente ejemplo:

- *Caso particular $a_i = \frac{1}{n}$ para todo i.*

Es claro que para todo k, $\frac{k^2-1}{n^2} \ge 0$. Tenemos para este caso el siguiente resultado:

Proposición 2.25. *Sea C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Hilbert H y $T : C \to C, T \in \mathscr{L}(k)$, T una función $(0, n)$-rotativa, con $n \ge 3$. Para $x \in C$ definamos*

$$
z = \frac{1}{n}(x + Tx + \ldots + T^{n-1} x),
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\|z - Tz\|^2 \le & \frac{1}{n^2} \left[(k^2 - 1) k^{2(n-1)} + \sum_{j=2}^{n-1} (k^{2j} - 1) \left(\frac{k^{n-j} - 1}{k - 1} \right)^2 \right] \|x - Tx\|^2 \\
= & A(k) \|x - Tx\|^2 .
\end{aligned}
$$

Así, si $A(k) < 1$, entonces $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ *y* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto de C. Si $k = 1$,* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto no expansivo de C y si $k > 1$ con C acotado,* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto Hölder continuo de C.*

Demostración. De la proposición 2.24, tomando $a_i = \frac{1}{n}$ tenemos que:

$$\|z - Tz\|^2 \leq \sum_{0 \leq j < i \leq n-1} \frac{k^2 - 1}{n^2} \|T^j x - T^i x\|^2,$$

por lo tanto tenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\|z - Tz\|^2 \leq & \sum_{0 \leq j < i \leq n-1} \frac{k^2 - 1}{n^2} \|T^j x - T^i x\|^2 \\
= & \frac{k^2 - 1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=j+1}^{n-1} \|T^j x - T^i x\|^2 \\
\leq & \frac{k^2 - 1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=j+1}^{n-1} k^{2j} \|x - T^{i-j} x\|^2 \\
= & \frac{k^2 - 1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-2} k^{2j} \sum_{i=1}^{n-j-1} \|x - T^i x\|^2 \\
= & \frac{k^2 - 1}{n^2} [k^0(\|x - Tx\|^2 + \ldots + \|x - T^{n-1} x\|^2) \\
& + k^2(\|x - Tx\|^2 + \ldots + \|x - T^{n-2} x\|^2) \\
& + \ldots + k^{2(n-2)}(\|x - Tx\|^2)] \\
= & \frac{k^2 - 1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-i-1} k^{2j} \right) \|x - T^i x\|^2 \\
= & \frac{k^2 - 1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{k^{2(n-i)} - 1}{k^2 - 1} \right) \|x - T^i x\|^2 \\
= & \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k^{2(n-i)} - 1}{n^2} \|x - T^i x\|^2.
\end{aligned}$$

Ya que $T \in \mathscr{L}(k)$

$$\|x - T^j x\| \leq \sum_{i=0}^{j-1} k^i \|x - Tx\| = \frac{k^j - 1}{k - 1} \|x - Tx\|, \tag{2.2.3}$$

y tomando en cuenta que $T^n = Id$, entonces $\|x - T^{n-1} x\| = \|T^n x - T^{n-1} x\| \leq k^{n-1} \|Tx - x\|$. Así que

$$\begin{aligned}
\|z - Tz\|^2 &\leq \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1}(k^{2(n-j)}-1)\|x - T^j x\|^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-2}(k^{2(n-j)}-1)\|x - T^j x\|^2 + \frac{1}{n^2}(k^2-1)\|x - T^{n-1}x\|^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{j=2}^{n-1}(k^{2j}-1)\|x - T^{(n-j)} x\|^2 + \frac{1}{n^2}(k^2-1)\|x - T^{n-1}x\|^2 \\
&\leq \frac{1}{n^2}\left[(k^2-1)k^{2(n-1)} + \sum_{j=2}^{n-1}(k^{2j}-1)\left(\frac{k^{n-j}-1}{k-1}\right)^2\right]\|x - Tx\|^2
\end{aligned}$$

que era lo que queríamos.

Por último, de la definición de z y por (2.2.3) tenemos:

$$\|z - x\| \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\|x - T^j x\| \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{k^j-1}{k-1}\|x - Tx\|.$$

Entonces aplicando el corolario 2.4, si $A(k) < 1$, $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ y es un retracto de C.

Ahora, para cada $x \in C$, definimos $z(x)$ como la z de arriba, vemos que $z \in \mathscr{L}(\frac{1+k+\ldots+k^{n-1}}{n})$. Por lo tanto, si $k = 1$, $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto no expansivo y si $k > 1$ con C acotado, $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto Hölder continuo de C. #

M. Koter demostró [Kot00] que $\gamma_3^H(0) \geq 1.3666$, $\gamma_4^H(0) \geq 1.1962$ y $\gamma_5^H(0) \geq 1.0849$. Desafortunadamente su método ya no puede aplicarse para encontrar estimaciones de $\gamma_n^H(0)$ si $n > 6$.

En nuestro caso, notemos que para n fija, $\lim_{k\to 1} A(k) = 0$, por lo que este método se puede aplicar para hallar estimaciones de $\gamma_n^H(0)$ para todo n, y en particular tenemos que $\gamma_n^H(0) > 1$.

Tomemos el caso $n = 3$. La proposición anterior nos dice que si k es tal que

$$\frac{1}{9}\left((k^2-1)k^4 + (k^4-1)\right) < 1$$

esto es, si $k < 1.4678$, entonces T tiene punto fijo. Por lo tanto, tenemos la siguiente nueva estimación: $\gamma_3^H(0) \geq 1.4678$. Análogamente obtenemos que: $\gamma_4^H(0) \geq 1.2905$ y $\gamma_5^H(0) \geq 1.1831$. En el año 2005, Górnicki y Pupka [GP05] hallaron, para cualquier espacio de Banach X, $\gamma_3^X(0) \geq 1.3821$, $\gamma_4^X(0) \geq 1.2524$ y $\gamma_5^X(0) \geq 1.1777$. De este modo, nuestras nuevas estimaciones para espacios de Hilbert son mejores que las obtenidas por dichos autores.

Usando este mismo método, podemos probar una proposición análoga, pero ahora para estimar los valores de $\widetilde{\gamma}_n^H(0)$.

Proposición 2.26. *Sean C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Hilbert H y $T : C \to C, T \in \mathscr{U}(k)$ una función $(0,n)$-rotativa, para $n \geq 3$. Si n es* *impar o par, escribamos $n = 2m + 1$ ó $n = 2m + 2$ respectivamente; para $1 \leq j \leq m$ sean*

$$\begin{aligned} B(j, m) =& (j-1)k^6 + (m - 2j + 1)k^4 - (m - j - 1)k^2 - 1, \\ D(m) =& mk^4 - (m-1)k^2 - 1, \\ F_1 =& \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{m} B(j, 2m+1)(1 + (j-1)k)^2, \\ F_2 =& \frac{1}{n^2} \left(\sum_{j=1}^{m} B(j, 2m+2)(1 + (j-1)k)^2 + D(m)(1 + mk)^2 \right). \end{aligned}$$

Para $x \in C$ sea

$$z = \frac{1}{n}(x + Tx + \ldots + T^{n-1}x),$$

entonces

$$\|z - Tz\|^2 \leq \begin{cases} F_1 \|x - Tx\|^2 & si \quad n = 2m+1, \\ F_2 \|x - Tx\|^2 & si \quad n = 2m+2. \end{cases}$$

Por lo tanto, si $F_1 < 1$ ó si $F_2 < 1$, para n impar o par, respectivamente, entonces $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ *y es un retracto de C. Además, si $k = 1$,* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto no expansivo de C y si $k > 1$ con C acotado,* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto Hölder continuo de C.*

Demostración. Por la proposición 2.24 y usando que $T \in \mathscr{U}(k)$:

$$\begin{aligned} \|z - Tz\|^2 \leq & \sum_{0 \leq j < i \leq n-1} \frac{k^2 - 1}{n^2} \|T^j x - T^i x\|^2 \\ =& \frac{k^2 - 1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=j+1}^{n-1} \|T^j x - T^i x\|^2 \\ \leq & \frac{k^2 - 1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{i=j+1}^{n-1} k^2 \|x - T^{i-j} x\|^2 + \frac{k^2 - 1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \|x - T^i x\|^2 \\ =& \frac{k^2(k^2 - 1)}{n^2} \Big[(\|x - Tx\|^2 + \ldots + \|x - T^{n-2} x\|^2) \\ & + (\|x - Tx\|^2 + \ldots + \|x - T^{n-3} x\|^2) \\ & + \ldots + (\|x - Tx\|^2) \Big] + \frac{k^2 - 1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \|x - T^i x\|^2 \\ =& \frac{k^2(k^2 - 1)}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} (n - i - 1) \|x - T^i x\|^2 + \frac{k^2 - 1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \|x - T^i x\|^2 \\ =& \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} ((n - i - 1)k^4 - (n - i - 2)k^2 - 1) \|x - T^i x\|^2 \\ =& \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} A_j \|x - T^j x\|^2. \end{aligned}$$

Consideraremos 2 casos.

- n=2m+1.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2m} A_j\|x-T^jx\|^2 =& A_1\|x-Tx\|^2 + A_2\|x-T^2x\|^2 + \cdots \\
&+ A_m\|x-T^mx\|^2 + A_{m+1}\|x-T^{m+1}x\|^2 + \cdots \\
&+ A_{2m-1}\|x-T^{2m-1}x\|^2 + A_{2m}\|x-T^{2m}x\|^2 \\
\leq& [A_1 + A_{2m}k^2]\|x-Tx\|^2 + [A_2 + A_{2m-1}k^2]\|x-T^2x\|^2 + \cdots \\
&+ [A_m + A_{m+1}k^2]\|x-T^mx\| \\
=& \sum_{j=1}^{m} B(j, 2m+1)\|x-T^jx\|^2 \\
\leq& \sum_{j=1}^{m} B(j, 2m+1)(1+(j-1)k)^2\|x-Tx\|^2 \\
=& n^2F_1\|x-Tx\|^2.
\end{aligned}
$$

- n=2m+2.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2m+1} A_j\|x-T^jx\|^2 =& A_1\|x-Tx\|^2 + A_2\|x-T^2x\|^2 + \cdots \\
&+ A_m\|x-T^mx\|^2 + A_{m+1}\|x-T^{m+1}x\|^2 + A_{m+2}\|x-T^{m+2}x\|^2 + \cdots \\
&+ A_{2m}\|x-T^{2m}x\|^2 + A_{2m+1}\|x-T^{2m+1}x\|^2 \\
\leq& [A_1 + A_{2m+1}k^2]\|x-Tx\|^2 + [A_2 + A_{2m}k^2]\|x-T^2x\|^2 + \cdots \\
&+ [A_m + A_{m+2}k^2]\|x-T^mx\| + A_{m+1}\|x-T^{m+1}x\| \\
=& \sum_{j=1}^{m} B(j, 2m+2)\|x-T^jx\|^2 + D(m)\|x-T^{m+1}x\|^2 \\
\leq& \left(\sum_{j=1}^{m} B(j, 2m+2)(1+(j-1)k)^2 + D(m)(1+mk)^2\right)\|x-Tx\|^2 \\
=& n^2F_2\|x-Tx\|^2.
\end{aligned}
$$

Así, si n es impar y $F_1 < 1$ ó si n es par y $F_2 < 1$, tenemos que $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ y es un retracto de C.

Si para $x \in C$ definimos $z(x) = \frac{1}{n}(x+Tx+\ldots+T^{n-1}x)$ tenemos que $z \in \mathscr{L}(\frac{1+(n-1)k}{n})$, y por el corolario 2.4 $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto no expansivo de C si $k = 1$; es un retracto Hölder continuo de C si $k > 1$ y C es acotado. #

Con esto, tenemos que para cualquier espacio de Hilbert H, $\widetilde{\gamma}_3^H(0) \geq 1.5811$, $\widetilde{\gamma}_4^H(0) \geq 1.3251$, $\widetilde{\gamma}_5^H(0) \geq 1.2380$ y $\widetilde{\gamma}_6^H(0) \geq 1.1808$. Todas estas estimaciones son mejores que las encontradas por M. Koter en [Kot00], a saber $\widetilde{\gamma}_3^H(0) \geq 1.5447$, $\widetilde{\gamma}_4^H(0) \geq$

1.2418, $\widetilde{\gamma}_5^H(0) \geq 1.1429$ y $\widetilde{\gamma}_6^H(0) \geq 1.0277$, y también por las encontrados por Górnicki y Pupka en [GP05] para espacios de Banach: $\widetilde{\gamma}_3^X(0) \geq 1.4558$, $\widetilde{\gamma}_4^X(0) \geq 1.2917$, $\widetilde{\gamma}_5^X(0) \geq 1.2001$ y $\widetilde{\gamma}_6^X(0) \geq 1.1482$.

- *Caso particular* $n = 3, 4$.

Con el caso $n = 3$, ilustraremos una aplicación que tiene la proposición 2.24 para estimar los valores de $\gamma_n^H(0)$.

Proposición 2.27. *Sea $T : C \to C$ una función k-Lipschitz continua y* $(0, 3)$*-rotativa y sea C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Hilbert H. Si $k < 1.5549$ entonces* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ *y es un retracto de C. Además, si $k = 1$,* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto no expansivo de C y si $k > 1$ con C acotado, entonces* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto Hölder continuo de C.*

En particular, este resultado establece que si H es un espacio de Hilbert, entonces $\gamma_3^H(0) \geq 1.5549$, mejorando la cota encotrada por Górnicki y Pupka para espacios de Banach en general que es $\gamma_3^H(0) \geq 1.3821$.

Demostración. Sea $F(k, x, y, z) = k^2(x^2 + yz - xz) - xz$.

Si $u = a_1 Tx + a_2 T^2 x + a_3 x$, donde $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, con $a_i \geq 0$. Entonces, por la proposición 2.24:

$$\begin{aligned} \|u - Tu\|^2 \leq & F(k, a_1, a_2, a_3)\|x - Tx\|^2 \\ & + F(k, a_2, a_3, a_1)\|Tx - T^2x\|^2 \\ & + F(k, a_3, a_1, a_2)\|x - T^2x\|^2. \end{aligned}$$

Sean $x, y, z \in [0, 1]$ con $x + y + z = 1$ y $a = x + z$, entonces tenemos que $x = a - z$ y $y = 1 - a$. Definamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} G(k, a, z) = & F(k, a - z, 1 - a, z) \\ = & (2k^2 + 1)z^2 - (4ak^2 - k^2 + a)z + a^2k^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(k, a, z) = & F(k, 1 - a, z, a - z) \\ = & -k^2z^2 + (k^2 + 1 - a)z + (1 - a)(k^2 - 2ak^2 - a), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} J(k, a, z) = & F(k, z, a - z, 1 - a) \\ = & k^2z^2 - (1 - a)(2k^2 + 1)z + a(1 - a)k^2. \end{aligned}$$

Sea $D = \{(a, z) : 0 \leq a \leq 1, 0 \leq z \leq a\}$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \|u - Tu\|^2 \leq & G(k, a, z)\|x - Tx\|^2 + H(k, a, z)\|Tx - T^2x\|^2 \\ & + J(k, a, z)\|x - T^2x\|^2. \end{aligned}$$

Queremos definir para cada $x \in C$, $u(x)$ tal que:

$$\|u(x) - Tu(x)\|^2 \leq A\|x - Tx\|^2,$$

para cierta $A < 1$ y de tal manera que k sea lo más grande posible para $(a, z) \in D$; ya que $G(k, a, z)$ está multiplicado por $\|x - Tx\|^2$, no es necesario analizar la función G, pero sí a H y a J.

Esto nos da 4 casos posibles a estudiar:

1. Si $H(k, a, z) \geq 0$ y $J(k, a, z) \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}\|u - Tu\|^2 \leq & [G(k, a, z) + k^2 H(k, a, z) + k^4 J(k, a, z)]\|x - Tx\|^2 \\ = & R_1(k, a, z)\|x - Tx\|^2.\end{aligned}$$

   Buscamos la k máxima tal que $R_1(k, a, z) < 1$ para $(a, z) \in D$. En este caso tomamos $u(x) = u$.

2. $H(k, a, z) \leq 0$ y $J(k, a, z) \geq 0$. Para ε fija, supongamos que

$$G(k, a, z) + (1 - \varepsilon)H(k, a, z) + k^4 J(k, a, z) < 1,$$

   entonces, si $\|Tx - T^2x\|^2 \leq (1 - \varepsilon)\|x - Tx\|^2$, sea $u(x) = Tx$; si $\|Tx - T^2x\|^2 > (1 - \varepsilon)\|x - Tx\|^2$, sea $u(x) = u = (a - z)Tx + (1 - a)T^2x + zx$, en este caso tenemos:

$$\begin{aligned}\|u - Tu\|^2 \leq & [G(k, a, z) + (1 - \varepsilon)H(k, a, z) + k^4 J(k, a, z)]\|x - Tx\|^2 \\ = & R_2(k, a, z, \varepsilon)\|x - Tx\|^2,\end{aligned}$$

   y de ambos casos concluimos que

$$\|u(x) - Tu(x)\|^2 \leq \max\{(1 - \varepsilon), R_2(k, a, z, \varepsilon)\}\|x - Tx\|^2.$$

   Aquí buscamos el máximo valor de k para que $R_2(k, a, z, \varepsilon) < 1$.

   Hacemos esto para cada $\varepsilon > 0$, lo que equivale a buscar el k máximo tal que

$$R_2(k, a, z) = G(k, a, z) + H(k, a, z) + k^4 J(k, a, z) < 1.$$

3. $H(k, a, z) \geq 0$ y $J(k, a, z) \leq 0$. Tomemos $\varepsilon > 0$.

   Supongamos ahora que $G(k, a, z) + k^2 H(k, a, z) + (1 - \varepsilon)J(k, a, z) < 1$. Entonces si $\|x - T^2x\|^2 = \|T^3x - T^2x\|^2 \leq (1 - \varepsilon)\|x - Tx\|^2$, tomemos $u(x) = T^2x$; por otro lado, si $\|x - T^2x\|^2 = \|T^3x - T^2x\|^2 > (1 - \varepsilon)\|x - Tx\|^2$, tomemos $u(x) = u$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}\|u - Tu\|^2 \leq & [G(k, a, z) + (1 - \varepsilon)J(k, a, z) + k^2 H(k, a, z)]\|x - Tx\|^2 \\ = & R_3(k, a, z, \varepsilon)\|x - Tx\|^2,\end{aligned}$$

   y buscamos k máximo tal que $R_3(k, a, z, \varepsilon) < 1$. Como el caso anterior, esto equivale a encontrar k máximo tal que

$$R_3(k, a, z) = G(k, a, z) + k^2 H(k, a, z) + J(k, a, z) < 1.$$

4. $H(k, a, z) \leq 0$ y $J(k, a, z) \leq 0$. Sea $\varepsilon > 0$.

   Si $G(k, a, z) + (1-\varepsilon)(H(k, a, z) + J(k, a, z)) < 1$, procedamos como sigue:

   Si $\|x - T^2x\|^2 \leq (1-\varepsilon)\|x - Tx\|^2$, tomamos $u(x) = T^2x$, si $\|Tx - T^2x\|^2 \leq (1-\varepsilon)\|x - Tx\|^2$, tomamos $u(x) = Tx$; si se dan las desigualdades $\|x - T^2x\|^2 > (1-\varepsilon)\|x - Tx\|^2$ y $\|Tx - T^2x\|^2 > (1-\varepsilon)\|x - Tx\|^2$, tomamos $u(x) = u$ y tenemos en este último caso que:

$$\begin{aligned}\|u - Tu\| \leq& (G(k, a, z) + (1-\varepsilon)(H(k, a, z) + J(k, a, z)))\|x - Tx\|^2\\ =& R_4(k, a, z, \varepsilon).\end{aligned}$$

   Análogamente a lo anterior, basta hallar el máximo k tal que

$$R_4(k, a, z) = G(k, a, z) + H(k, a, z) + J(k, a, z) < 1.$$

Dando valores a k, a y z, usando la computadora se halló que para los valores $k = 1.5549$, $a = 0.5566$ y $z = 0.3363$ se tiene $R_1(k, a, z) < 1$ y se satisfacen las hipótesis del caso 1. Por esta razón, en el análisis que sigue trataremos de hallar $k > 1.5549$, o equivalentemente $k^2 > 2.4177$. Los valores numéricos que daremos son aproximaciones que obtuvimos de la computadora.

En lo que sigue se usó frecuentemente la ayuda de la computadora, cuando este sea el caso, lo señalaremos. Cabe mencionar que los valores numéricos que daremos son aproximaciones que obtuvimos de ella.

Ya que nos interesa los signos de las funciones H y J, analicemos el comportamiento de cada función.

(I) $H(k, a, z) = -k^2z^2 + (k^2 + 1 - a)z + (1-a)(k^2 - 2ak^2 - a)$.

Sea k fija. Por el momento tomemos $a \in [0, 1]$ también fija.

Para que $H(k, a, z)$ sea mayor que 0, se necesita que:

$$\begin{aligned}0 <& (k^2 + 1 - a)^2 + 4k^2(1-a)(k^2 - 2ak^2 - a)\\ =& (8k^4 + 4k^2 + 1)a^2 - 2(6k^4 + 3k^2 + 1)a + (5k^4 + 2k^2 + 1),\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

y para ver esto, a su vez se necesitaría ver qué sucede con

$$4[(6k^4 + 3k^2 + 1)^2 - (8k^4 + 4k^2 + 1)(5k^4 + 2k^2 + 1)] = -16k^8 < 0.$$

Por lo tanto, para cualquier k se da (2.2.4). Entonces existen $\xi_1(a)$ y $\xi_2(a)$ tales que $\xi_1(a) < \xi_2(a)$ y

$$H(k, a, \xi_1(a)) = H(k, a, \xi_2(a)) = 0.$$

Ahora queremos ver cuándo $(a, \xi_i(a)) \in D$. Si $a = 0$, como $0 \leq z \leq a$, también $z = 0$, y se tiene que $H(k, 0, 0) = k^2 \geq 0$ para todo k.

Si $a = 1$, entonces $H(k, 1, z) = k^2z(1-z) \geq 0$, para todo $0 \leq z \leq 1 = a$.

Tomemos $0 < a < 1$.

Como

$$H(k, a, 0) = (1 - a)(k^2 - 2ak^2 - a), \tag{2.2.5}$$

se tiene que $H(k, a, 0) < 0$ si y sólo si $a > \frac{k^2}{1+2k^2}$. Además se tiene que

$$H(k, a, a) = k^2(1 - a)^2 > 0, \tag{2.2.6}$$

entonces se deduce que $\xi_2(a) > a$ y $\xi_1(a) < a$.

De (2.2.5) y (2.2.6), se tiene que para k fija

$$\begin{aligned}&\{(a, z) \in D : H(k, a, z) < 0\}\\ =&\{(a, z) : \frac{k^2}{1 + 2k^2} < a < 1, 0 \leq z < \xi_1(a)\}\end{aligned}$$

Asimismo, se obtienen los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}&\{(a, z) \in D : H(k, a, z) = 0\}\\ =&\{(\frac{k^2}{1 + 2k^2}, 0)\} \cup \left\{(a, z) : \frac{k^2}{1 + 2k^2} < a < 1, z = \xi_1(a)\right\} \cup \{(1, 0), (1, 1)\}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}&\{(a, z) \in D : H(k, a, z) > 0\}\\ =&\{(0, 0)\} \cup \left\{(a, z) : 0 < a < \frac{k^2}{1 + 2k^2}, z \in [0, a]\right\}\\ &\cup \left\{(a, z) : a = \frac{k^2}{1 + 2k^2}, z \in (0, a]\right\}\\ &\cup \left\{(a, z) : \frac{k^2}{1 + 2k^2} < a < 1, z \in (\xi_1(a), a]\right\} \cup \{(1, z) : z \in (0, 1)\}.\end{aligned}$$

(II) $J(k, a, z) = k^2z^2 - (1 - a)(2k^2 + 1)z + a(1 - a)k^2$.

Para que exista z tal que $J(k, a, z) < 0$ se necesita que

$$\begin{aligned}0 <&(1 - a)^2(2k^2 + 1)^2 - 4a(1 - a)k^4\\ =&(8k^4 + 4k^2 + 1)a^2 - 2[6k^4 + 4k^2 + 1]a + (2k^2 + 1)^2.\end{aligned}$$

A su vez, se necesita que

$$4[(6k^4 + 4k^2 + 1)^2 - (2k^2 + 1)^2(8k^4 + 4k^2 + 1)] = 16k^8 > 0.$$

lo cual pasa para todo k.

Por lo tanto existe z tal que $J(k, a, z) < 0$ sólo si $0 \leq a < \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}$.

Tomemos $0 \leq a < \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}$.

Sean $r_1(a)$ y $r_2(a)$ tales que $J(k,a,r_1(a)) = J(k,a,r_2(a)) = 0$ y $r_1(a) < r_2(a)$.

Ahora bien, notemos que:

$$r_2(a) = \frac{(1-a)(2k^2+1) + \sqrt{(1-a)[(1-a)(2k^2+1)^2 - 4ak^4]}}{2k^2} > 0$$

y que $J(k,a,0) = a(1-a)k^2 > 0$ para $a > 0$. Por lo tanto $r_1(a) > 0$; además $J(k,0,0) = 0$.

Así, $J(k,a,z) < 0$ si $0 \leq a < \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}$ y $r_1(a) < z < r_2(a)$.

Para que $(a,z) \in D$ se necesita que $r_1(a) < a$, pero $J(k,a,a) = [(2k^2+1)a - (k^2+1)]a$.

Entonces, si $0 < a < \frac{k^2+1}{2k^2+1}$, $J(k,a,a) < 0$ y se tiene que $r_1(a) < a < r_2(a)$.

Ahora, si $a \geq \frac{k^2+1}{2k^2+1}$, $J(k,a,a) \geq 0$. Entonces hay dos posibilidades:

(a) $a < r_1(a)$; entonces no existe $z < a$ tal que $J(k,a,z) < 0$, por lo que este caso no nos interesa y de hecho no se da.

(b) $a \geq r_2(a)$.
Esto junto con la condición $J(k,a,a) \geq 0$ se da si y sólo si el punto donde se da el mínimo de $J(k,a,z)$, a saber, $\frac{r_1(a)+r_2(a)}{2}$, es menor o igual a a, esto es:

$$\frac{(1-a)(2k^2+1)}{2k^2} \leq a$$

o sea que $a \geq \frac{2k^2+1}{4k^2+1}$ pero $a \geq \frac{k^2+1}{2k^2+1} > \frac{2k^2+1}{4k^2+1}$.

Entonces, como $\frac{k^2+1}{2k^2+1} < \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}$:

$$\begin{aligned}
&\{(a,z) \in D : J(k,a,z) < 0\} \\
=&\{(a,z) \in D : 0 < a < \frac{k^2+1}{2k^2+1}, r_1(a) < z \leq a\} \\
&\cup \{(a,z) : \frac{k^2+1}{2k^2+1} \leq a < \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}, r_1(a) < z < r_2(a) \leq a\}.
\end{aligned}$$

Asimismo, se obtienen los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
&\{(a,z) \in D : J(k,a,z) = 0\} \\
=&\{(0,0)\} \cup \left\{(a,z) : 0 < a < \frac{k^2+1}{2k^2+1}, z = r_1(a)\right\} \\
&\cup \left\{(a,z) : \frac{k^2+1}{2k^2+1} \leq a \leq \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}, z = r_1(a), z = r_2(a)\right\} \\
&\cup \{(1,0)\}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&\{(a,z)\in D : J(k,a,z)>0\}\\
=&\left\{(a,z): 0<a\le \frac{k^2+1}{2k^2+1}, z\in[0,r_1(a))\right\}\\
&\cup\left\{(a,z): \frac{k^2+1}{2k^2+1}<a\le\frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}, z\in[0,r_1(a))\cup(r_2(a),a]\right\}\\
&\cup\left\{(a,z): \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}<a<1, z\in[0,a]\right\}\cup\{(1,z): z\in(0,a]\}.
\end{aligned}$$

Regresemos al estudio de los 4 casos posibles.

- El caso $H(k,a,z)\ge 0$ y $J(k,a,z)\ge 0$.

Queremos hallar $a\in[0,1]$ y $z\in[0,a]$ tales que la ecuación

$$G(k,a,z)+k^2H(k,a,z)+k^4J(k,a,z)=1$$

tenga la máxima solución en k. Esta ecuación es:

$$\begin{aligned}
&[k^6-k^4+2k^2+1]z^2+[-2(1-a)k^6+ak^4+(2-5a)k^2-a]z\\
&+[a(1-a)k^6+(1-a)(1-2a)k^4-a(1-2a)k^2]-1=0.
\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

Entonces, dados $a\in[0,1]$ y $z\in[0,a]$, la expresión anterior define a k como una función implícita en las variables a y z, y escribiremos $k(a,z)$.

Vamos a suponer que la función k está bien definida en la región:

$$D_1=\{(a,z)\in D : H(k,a,z)\ge 0\}\cap\{(a,z)\in D : J(k,a,z)\ge 0\}$$

y que es continua.

Así, necesitamos hallar los valores críticos de la función $k : D_1\to\mathbb{R}$, esto es, queremos resolver el sistema:

$$\frac{\partial k}{\partial a}(a,z)=0, \frac{\partial k}{\partial z}(a,z)=0.$$

Después de obtener las derivadas parciales y resolver dicho sistema por computadora, obtenemos la siguiente solución única:

$$a(k)=\frac{6k^6(k^2-2)}{8k^8-16k^6-3k^4+k^2+1}, z(k)=\frac{k^2(2k^6-5k^4+k^2-1)}{8k^8-16k^6-3k^4+k^2+1}.$$

Cuando substituimos los valores $a(k)$ y $z(k)$ en la ecuación (2.2.7), obtenemos la única solución real positiva, también por computadora, $k_0 = 0.6329\ldots$, y además $a(k_0)<0$ y $z(k_0)<0$, por lo que el valor crítico no está en el dominio D_1 de la función k.

Así que nos tenemos que restringir a la frontera del conjunto D_1, que es el siguiente conjunto tomando en cuenta que para $k > 1.2$, se tiene que $\xi_1(a) < r_1(a)$:

$$\begin{aligned}\partial D_1 = &\{(0,0),(1,0),(1,1)\} \cup \left\{(a,z) : 0 < a \leq \frac{k^2}{2k^2+1}, z = 0, r_1(a)\right\}\\ &\cup \left\{(a,z) : \frac{k^2}{2k^2+1} < a < \frac{k^2+1}{2k^2+1}, z = \xi_1(a), r_1(a)\right\}\\ &\cup \left\{(a,z) : \frac{k^2+1}{2k^2+1} \leq a \leq \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}, z = \xi_1(a), r_1(a), r_2(a), a\right\}\\ &\cup \left\{(a,z) : \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1} < a < 1, z = \xi_1(a), a\right\}\end{aligned}$$

Al analizar los valores en la frontera, vemos que los únicos casos interesantes a estudiar son cuando $z = r_1(a)$ y $z = \xi_1(a)$.

Si $z = r_1(a)$, $J(k, a, r_1(a)) = 0$, por lo tanto necesitamos hallar $a \in [0, 1]$ tal que la ecuación

$$G(k, a, r_1(a)) + k^2 H(k, a, r_1(a)) = 1$$

tenga la solución máxima en k. Después de simplificar dicha ecuación por computadora, obtenemos la siguiente expresión equivalente:

$$A(v)a^4 + B(v)a^3 + C(v)a^2 + D(v)a + E(v) = 0, \tag{2.2.8}$$

donde $v = k^2$ y

$$\begin{aligned}A(v) =&7v^6 - 38v^5 - 44v^4 - 25v^3 - 7v^2 - v,\\ B(v) =& -18v^6 + 105v^5 + 123v^4 + 72v^3 + 21v^2 + 3v,\\ C(v) =&17v^6 - 109v^5 - 136v^4 - 54v^3 - 2v^2 + 4v + 1,\\ D(v) =& -7v^6 + 51v^5 + 69v^4 + 6v^3 - 24v^2 - 12v - 2,\\ E(v) =&v^6 - 9v^5 - 13v^4 + 3v^3 + 11v^2 + 6v + 1.\end{aligned}$$

Para $a \in [0, 1]$ necesitamos hallar v que resuelva la ecuación (2.2.8), que define una función v de modo implícita en la variable a, y queremos nuevamente hallar el máximo del valor de v en el intervalo $[0, 1]$.

Tomando la derivada parcial con respecto a a de la igualdad (2.2.8) obtenemos:

$$4A(v)a^3 + 3B(v)a^2 + 2C(v)a + D(v) = 0 \tag{2.2.9}$$

y después de manipular ambas ecuaciones, obtenemos la siguiente ecuación cuadrática en a:

$$(8A(v)C(v) - 3B(v)^2)a^2 + 2(6A(v)D(v) - B(v)C(v))a + (16A(v)E(v) - B(v)D(v)) = 0. \tag{2.2.10}$$

Después de despejar a de (2.2.10) y substitiurlo en (2.2.9), obtenemos una ecuación en la variable v, y de hecho no importa cual despeje de a tomamos.

Este despeje lo podemos hacer solamente si $1 \leq v \leq 3.4140$ ó si $5.2188 \leq v \leq 6.4981$.

Encontramos que solamente hay una solución real v mayor que 1 y tal que con la a se resuelve el sistema, esta solución es:

$$v = 2.418018212643099, a = 0.55665440183,$$

y es una solución de la ecuación:

$$\begin{aligned}0 =&23v^{17} - 134v^{16} - 283v^{15} + 1272v^{14} + 4389v^{13} - 4992v^{12} \\ &- 30505v^{11} - 4292v^{10} + 80354v^{9} + 69688v^{8} - 17983v^{7} - 73556v^{6} \\ &- 64053v^{5} - 32142v^{4} - 10494v^{3} - 2264v^{2} - 301v - 20.\end{aligned}$$

Estos últimos cálculos también se hicieron en computadora.

Ahora tomemos $z = \xi_1(a)$. En este caso queremos encontrar $a \in [0, 1]$ de tal modo que:

$$G(k, a, \xi_1(a)) + k^4 J(k, a, \xi_1(a)) = 1$$

tenga la solución máxima en k.

Con un procedimiento análogo al caso estudiado $z = r_1(a)$, se obtienen las soluciones:

$$\begin{aligned}a &= 0.644144431853, v = 2.096297258928788, \\ a &= 0.812076972577, v = 1.146305142692912,\end{aligned}$$

donde $v = k^2$.

Así, la solución máxima en este caso es para

$$a = 0.55665440183, v = 2.418018212643099.$$

- El caso $H(k, a, z) \leq 0$ y $J(k, a, z) \leq 0$.

$H(k, a, z) \leq 0$ y $J(k, a, z) \leq 0$ cuando:

1. Si $\frac{k^2}{1+2k^2} \leq a \leq \frac{1+k^2}{1+2k^2}$, entonces se dan ambas desigualdades para $z \in [r_1(a), \xi_1(a)]$ siempre que $r_1(a) \leq \xi_1(a)$. Para que esta desigualdad se de, es necesario y suficiente que $H(k, a, r_1(a)) \leq 0$, o bien que $H(k, a, r_1(a)) + J(k, a, r_1(a)) \leq 0$. Esta última desigualdad se da si y solamente si

$$(1 - a)(2ak^2 - 1) \leq (2a - 1)\sqrt{(1 - a)^2(2k^2 + 1)^2 - 4a(1 - a)k^4}. \qquad (2.2.11)$$

   Tenemos los siguientes subcasos:

   a) El caso $0 \leq a \leq \frac{1}{2k^2}$. Para que tenga sentido este caso, también necesitamos que $\frac{k^2}{2k^2+1} \leq \frac{1}{2k^2}$ lo que es válido siempre que $k \in \left[1, \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}\right]$, como el extremo derecho es menor o igual a 1.17 no nos interesa, y de hecho, la desigualdad (2.2.11) no tiene solución para este subcaso.

b) Si $\frac{1}{2k^2} < a < \frac{1}{2}$, entonces la desigualdad (2.2.11) no tiene solución.

c) Si $a \geq \frac{1}{2}$, entonces, dado el caso en que estamos, $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{k^2+1}{1+2k^2}$.
Después de hacer las simplificaciones necesarias, la desigualdad (2.2.11) equivale a:

$$m(a,k) = (7k^4+4k^2+1)a^3-(11k^4+7k^2+2)a^2+(6k^4+4k^2+1)a-(k^4+k^2+1) < 0.$$

Notemos que $\frac{\partial m}{\partial a}(a,k)$ como función de a, para k fija, es una parábola que abre hacia arriba. Tomando esto en cuenta, tenemos que $\frac{\partial m}{\partial a}(a,k) \geq 0$ para todo $a \in [0,1]$ y para todo $k \geq 1.1064$; es decir, para estos valores de k, la función $m(a,k)$ como función de a es una función creciente. Ya que $m(\frac{1}{2},k) \geq 0$ para $k \geq 1$, entonces tenemos que para $k \geq 1.1064$ y $a \geq \frac{1}{2}$, $m(a,k) \geq 0$, y entonces la desigualdad no tiene solución.

2. Si $\frac{k^2+1}{1+2k^2} \leq a \leq \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}$, entonces $H(k,a,z) \leq 0$ y $J(k,a,z) \leq 0$ para $z \in [r_1(a), r_2(a)] \cap [0, \xi_1(a)]$. Puesto que $H(k,a,a) \geq 0$, entonces para que haya intersección necesitamos otra vez que $r_1(a) \leq \xi_1(a)$, y ya vimos que este caso no se da por ejemplo para $k > 1.2$.

3. Si $a = 1$ entonces tomamos $z = 0$ y vemos que $H(k,1,0) = J(k,1,0) = 0$. En este caso queremos resolver la ecuación $G(k,a,z) + H(k,a,z) + J(k,a,z) = 1$ y con estos valores de a y z, obtener la única solución positiva $k = 1$.

- El caso $H(k,a,z) \leq 0$ y $J(k,a,z) \geq 0$.

Dados $a \in [0,1]$ y $z \in [0,a]$, nos queda por resolver la ecuación en k:

$$G(k,a,z) + H(k,a,z) + k^4 J(k,a,z) = 1.$$

Viendo a la expresión anterior como función de k, al igualar a cero las derivadas parciales con respecto a las variables a y z, nos queda por resolver el sistema siguiente:

$$\frac{\partial k}{\partial a}(a,z) = 0, \frac{\partial k}{\partial z}(a,z) = 0,$$

que nos da la solución única:

$$a(k) = \frac{6k^8 + 4k^6 - 15k^4 - 12k^2 - 1}{8k^8 + 4k^6 - 23k^4 - 16k^2}$$
$$z(k) = \frac{2k^8 + k^6 - 6k^4 - 5k^2 - 1}{8k^8 + 4k^6 - 23k^4 - 16k^2}.$$

Al sustituir esos valores en la primera ecuación, nos da otra ecuación en k que no tiene soluciones reales. Estos cálculos también se hicieron usando la computadora.

Por lo tanto, nos tenemos que remitir a la frontera del conjunto

$$\{(a,z) \in D : H(k,a,z) \leq 0\} \cap \{(a,z) \in D : J(k,a,z) \geq 0\}$$

Nuevamente, los casos interesantes son cuando $z = r_1(a)$ y $z = \xi_1(a)$.

Tomando $z = r_1(a)$, tenemos que resolver la ecuación

$$G(k, a, r_1(a)) + H(k, a, r_1(a)) = 1,$$

lo cual está incluido en el caso anterior.

Si tomamos $z = \xi_1(a)$, entonces necesitamos resolver la ecuación en k:

$$G(k, a, \xi_1(a)) + k^4 J(k, a, \xi_1(a)) = 1,$$

caso que también ya estudiamos.

- El caso $H(k, a, z) \geq 0$ y $J(k, a, z) \leq 0$.

Dados $a \in [0, 1]$ y $z \in [0, a]$ queremos resolver la ecuación en k:

$$G(k, a, z) + k^2 H(k, a, z) + J(k, a, z) = 1.$$

Análogamente al caso anterior, al igualar a cero las derivadas parciales con respecto a las variables a y z, nos queda por resolver el sistema siguiente:

$$\frac{\partial k}{\partial a}(a, z) = 0, \frac{\partial k}{\partial z}(a, z) = 0,$$

cuya solución única es:

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{6k^6 - 15k^4 - 6k^2 - 3}{8k^6 - 20k^4 - 11k^2 - 4} \\ z(k) &= \frac{4k^6 - 7k^4 - 4k^2 - 2}{8k^6 - 20k^4 - 11k^2 - 4}. \end{aligned}$$

Al sustituir esos valores en la primera ecuación, obtenemos otra ecuación en k que tampoco tiene soluciones reales.

Por lo tanto, nos tenemos que restringir a la frontera y nuevamente basta estudiar los casos en que $z = r_1(a)$ y $z = \xi_1(a)$.

Se puede ver que ambos casos ya están incluidos arriba.

Por lo tanto, la máxima k encontrada fue:

$$k = \sqrt{v} = \sqrt{2.418018212643099} = 1.5549978175686$$

que fue para $a = 0.55665440183$. Con estos valores, hallamos $z = r_1 = 0.33638265058$. En nuestro caso, tenemos que $a = a_1 + a_3$, y $a_3 = z = v_1$. Entonces $a_1 = 0.22027175125$ mientras que $a_2 = 1 - a_1 - a_3 = 0.44334559817$.

#

De manera análoga, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.28. *Sean $T : C \to C$ una función con $T \in \mathscr{U}(k)$ y $(0, 3)$-rotativa, C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Hilbert H. Si $k < 1.6047$ entonces* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ *y es un retracto de C. Además, si $k = 1$,* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto no expansivo de C y si $k > 1$ con C acotado,* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto Hölder continuo de C.*

En particular, este resultado establece que si H es un espacio de Hilbert, entonces $\gamma_3^H(0) \geq 1.6047$, mejorando el valor obtenido por M. Koter: $\gamma_3^H(0) \geq 1.5447$.

Demostración. En este caso, igual que en la proposición anterior, el valor 1.6047 también fue hallado inicialmente con la computadora. Para ver si es el mejor trataremos de buscar $k \geq 1.6047$.

Procediendo de manera análoga a la prueba anterior, tomemos las funciones G, H y J como antes y consideremos los siguientes casos:

1. El caso $H(k, a, z) \geq 0$ y $J(k, a, z) \geq 0$.

   Queremos encontrar $a \in [0, 1]$ y $z \in [0, a]$ de tal modo que la siguiente ecuación en k tenga solución máxima:

   $$G(k, a, z) + k^2 H(k, a, z) + k^2 J(k, a, z) = 1. \tag{2.2.12}$$

   Procediendo de manera análoga al caso $H(k, a, z) \geq 0$ y $J(k, a, z) \geq 0$ en la prueba de la proposición anterior, al obtener las derivadas parciales de k con respecto a a y a z y al resolver en el sistema obtenemos:

   $$a(k) = \frac{2k^8 - 14k^6 - 5k^4 - k^2}{4k^8 - 24k^6 - 8k^4 + 1}, z(k) = \frac{2k^8 - 8k^6 - 2k^4 - k^2}{4k^8 - 24k^6 - 8k^4 + 1}$$

   Al sustituir estos valores en la ecuación (2.2.12) y después de simplificar nos queda una ecuación en k, a saber:

   $$k^{12} - 6k^{10} - 3k^8 + 27k^6 + 9k^4 - 1 = 0$$

   que sólo tiene una solución tal que $a \in [0, 1]$ y $z \in [0, a]$:

   $$\begin{aligned} k &= 1.60471499 \\ a(k) &= 0.65335962 \\ z(k) &= 0.22553882. \end{aligned}$$

   Veremos lo que pasa en la frontera. Otra vez basta ver lo que sucede cuando $z = r_1(a)$ y $z = \xi_1(a)$.

   El caso $z = r_1(a)$ ya está incluido en la demostración de la proposición anterior.

   Tomemos entonces $z = \xi_1(a)$. Después de sustituir este valor de z en la ecuación (2.2.12) y hacer las simplificaciones necesarias, nos queda por resolver una ecuación en k, cuyas soluciones son $k = 1.60430142$ y $k = 1.09931906$ que son menores al valor encontrado anteriormente.

2. El caso $H(k, a, z) \leq 0$ y $J(k, a, z) \leq 0$. Este caso ya está incluido en uno de los casos estudiados en la prueba de la proposición anterior.

3. El caso $H(k, a, z) \geq 0$ y $J(k, a, z) \leq 0$. Este caso también ya lo estudiamos.

4. El caso $H(k, a, z) \leq 0$ y $J(k, a, z) \geq 0$. Aquí queremos resolver la ecuación

$$G(k, a, z) + H(k, a, z) + k^2 J(k, a, z) = 1.$$

Al obtener las parciales de k con respecto a a y a z, y después de sustituir las soluciones en a y z, nos queda una ecuación en k que no tiene soluciones reales. Por lo tanto, nos remitiremos a la frontera.

También basta ver lo que sucede cuando $z = \xi_1(a)$ y $z = r_1(a)$.

El primer caso fue estudiado dentro de esta demostración y el segundo ya fue estudiado en la prueba de la proposición anterior.

Por lo tanto para $a(k) = 0.65335962$ y $z(k) = 0.22553882$, Obtenemos $k = 1.60471499$ y en términos de las a_i, tenemos que: para $a_1 = a - z = 0.4278208$, $a_2 = 1 - a = 0.34664038$ y $a_3 = z = 0.22553882$, hallamos la solución $k = 1.60471499$, que es la solución máxima.

#

El caso $n = 4$ es similar al caso $n = 3$:

Proposición 2.29. *Sean H un espacio de Hilbert, C es un subconjunto convexo y cerrado de H, y $T : C \to C$ una función $(0, 4)$-rotativa tal que $T \in \mathscr{L}(k)$ ($T \in \mathscr{U}(k)$) y $k < 1.3267$ ($k < 1.3867$, respectivamente) entonces $\operatorname{Fix}(T) \neq \emptyset$ y es un retracto de C. Además, si $k = 1$, $\operatorname{Fix}(T)$ es un retracto no expansivo de C y si $k > 1$ con C acotado, $\operatorname{Fix}(T)$ es un retracto Hölder continuo de C.*

En particular, se tiene que $\gamma_4^H(0) \geq 1.3267$ y $\widetilde{\gamma}_4^H(0) \geq 1.3867$.

Como podemos ver, las cotas mejoran aunque los cálculos se vuelven cada vez más complicados.

- **Segundo método**

En este segundo método, usaremos la misma sucesión que aparece en [GP05], aunque nosotros la aplicaremos a espacios de Hilbert, y utilizando las propiedades de dichos espacios obtendremos cotas para $\gamma_n^H(0)$ que mejorarán a las encontradas con el primer método para $a_i = \frac{1}{n}$.

Las cotas para $n = 3$ y $n = 4$ con este método no son mejores a las encontradas con el primer método, sin embargo, para $n = 5$ y $n = 6$ sí hubo mejoras, aunque ya no podemos asegurar la existencia de algún retracto sobre el conjunto de puntos fijos. La ventaja de este segundo método es que es más fácil hallar las cotas que en el primer método.

Veamos este segundo método.

Para $n \geq 3$, un entero positivo, definamos r_n como sigue:

$$
\begin{aligned}
r_n = \sup_{a\in(0,1)} \{ & s \le P : a^2 s^2 E_n(a,s) + a^3 s^2((1-a)s^2)^{n-2} \\
& + as^2(1-a)\sum_{j=0}^{n-3}((1-a)s^2)^j \left(\sum_{i=0}^{n-3-j}((1-a)^i((1-a)(s^2(1-a)^2)^{n-2-j-i}-1)) - a(1-a)^{n-2-j}\right) \\
& + (1-a)^3 s^2 (s^2(1-a)^2)^{n-2} \\
& + (1-a)\left(\sum_{i=0}^{n-3}\Big((1-a)^i((1-a)(s^2(1-a)^2)^{n-2-i}-1)\Big) - a(1-a)^{n-2}\right) = 1\}
\end{aligned}
$$

donde P es un número positivo grande y $E_n(a,s)$ está definido por

$$
E_n(a,s) = \begin{cases}
s^4 & \text{si} \quad n=3 \\
s^{2(2m)} + \sum_{j=2}^{m}(A^{j-1}s^{2(2m+1-j)} + A^{2m-j})\left(\frac{s^j-1}{s-1}\right)^2 & \text{si} \quad n = 2m+1, m>1 \\
s^6 + A\left(\frac{s^2-1}{s-1}\right)^2 & \text{si} \quad n=4 \\
s^{2(2m+1)} + \sum_{j=2}^{m}(A^{j-1}s^{2(2m+2-j)} + A^{2m+1-j})\left(\frac{s^j-1}{s-1}\right)^2 + A^m\left(\frac{s^{m+1}-1}{s-1}\right)^2 & \text{si} \quad n=2m+2, m>1
\end{cases}
$$

con $A = (1-a)s^2$.

Teorema 2.30. *Sean H un espacio de Hilbert y C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de H, sea $T : C \to C$, $T \in \mathscr{L}(k)$ y $(0,n)$-rotativa. Si $k < r_n$ entonces* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$*, esto es, $\gamma_n^H(0) \ge r_n$.*

Demostración. Sea $x_0 = x \in C$ un elemento cualquiera y $a \in (0,1)$. Definamos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= ax_0 + (1-a)Tx_0 \\
x_2 &= ax_0 + (1-a)Tx_1 \\
&\vdots \\
x_{n-2} &= ax_0 + (1-a)Tx_{n-3} \\
x_{n-1} &= ax_0 + (1-a)Tx_{n-2}.
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$
x_{m-j} - x_{m-j-1} = (1-a)[Tx_{m-j-1} - Tx_{m-j-2}]. \tag{2.2.13}
$$

Sea $z = x_{n-1}$; usando el lema 2.20 y que T es k-Lipschitz continua con $T^n = Id$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\|z - Tz\|^2 &= \|ax_0 + (1-a)Tx_{n-2} - Tz\|^2 \\
&= \|a(x_0 - Tz) + (1-a)(Tx_{n-2} - Tz)\|^2 \\
&= a\|x_0 - Tz\|^2 + (1-a)\|Tx_{n-2} - Tz\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_{n-2}\|^2 \\
&\le ak^2\|z - T^{n-1}x_0\|^2 + (1-a)k^2\|x_{n-2} - z\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_{n-2}\|^2.
\end{aligned}
$$

En las estimaciones I, II y III analizaremos por separado cada sumando. Para las primeras dos usaremos la igualdad (2.2.1) y que $T \in \mathscr{L}(k)$:

- *Estimación I*: $\|z - T^{n-1}x_0\|^2$.

$$\begin{aligned}
\|z - T^{n-1}x_0\|^2 &= \|a(x_0 - T^{n-1}x_0) + (1-a)(Tx_{n-2} - T^{n-1}x_0)\|^2 \\
&= a\|x_0 - T^{n-1}x_0\|^2 + (1-a)\|Tx_{n-2} - T^{n-1}x_0\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_{n-2}\|^2 \\
&\leq a\|x_0 - T^{n-1}x_0\|^2 + (1-a)k^2\|x_{n-2} - T^{n-2}x_0\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_{n-2}\|^2.
\end{aligned}$$

Estimemos el segundo sumando de la última desigualdad.

- *Estimación i*: $\|x_{n-2} - T^{n-2}x_0\|^2$.

Por definición de x_{n-2}:

$$\begin{aligned}
\|x_{n-2} - T^{n-2}x_0\|^2 &= \|a(x_0 - T^{n-2}x_0) + (1-a)(Tx_{n-3} - T^{n-2}x_0)\|^2 \\
&= a\|x_0 - T^{n-2}x_0\|^2 + (1-a)\|Tx_{n-3} - T^{n-2}x_0\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_{n-3}\|^2 \\
&\leq a\|x_0 - T^{n-2}x_0\|^2 + (1-a)k^2\|x_{n-3} - T^{n-3}x_0\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_{n-3}\|^2.
\end{aligned}$$

En general:

$$\|x_{n-j} - T^{n-j}x_0\|^2 \leq a\|x_0 - T^{n-j}x_0\|^2 + (1-a)k^2\|x_{n-j-1} - T^{n-j-1}x_0\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_{n-j-1}\|,$$

para $j = 2, \ldots, n-2$. Ahora, por la definición de x_1:

$$\|x_1 - Tx_0\|^2 = a^2\|x_0 + Tx_0\|^2.$$

Por lo tanto obtenemos:

$$\begin{aligned}
\|z - T^{n-1}x_0\|^2 &\leq a\|x_0 - T^{n-1}x_0\|^2 + (1-a)k^2\|x_{n-2} - T^{n-2}x_0\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_{n-2}\|^2 \\
&\leq a\|x_0 - T^{n-1}x_0\|^2 + (1-a)k^2(a\|x_0 - T^{n-2}x_0\|^2 + (1-a)k^2\|x_{n-3} - T^{n-3}x_0\|^2 \\
&\quad - a(1-a)\|x_0 - Tx_{n-3}\|^2) - a(1-a)\|x_0 - Tx_{n-2}\|^2 \\
&= a(\|x_0 - T^{n-1}x_0\|^2 + (1-a)k^2\|x_0 - T^{n-2}x_0\|^2) + (1-a)^2k^{2(2)}\|x_{n-3} - T^{n-3}x_0\|^2 \\
&\quad - a(1-a)(\|x_0 - Tx_{n-2}\|^2 + (1-a)k^2\|x_0 - Tx_{n-3}\|^2) \\
&\leq a(\|x_0 - T^{n-1}x_0\|^2 + (1-a)k^2\|x_0 - T^{n-2}x_0\|^2) \\
&\quad + (1-a)^2k^{2(2)}(a\|x_0 - T^{n-3}x_0\|^2 + (1-a)k^2\|x_{n-4} - T^{n-4}x_0\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_{n-4}\|^2) \\
&\quad - a(1-a)(\|x_0 - Tx_{n-2}\|^2 + (1-a)k^2\|x_0 - Tx_{n-3}\|^2) \\
&= a\left(\|x_0 - T^{n-1}x_0\|^2 + (1-a)k^2\|x_0 - T^{n-2}x_0\|^2 + ((1-a)k^2)^2\|x_0 + T^{n-3}x_0\|^2\right) \\
&\quad + ((1-a)k^2)^3\|x_{n-4} - T^{n-4}x_0\|^2 \\
&\quad - a(1-a)\left(\|x_0 - Tx_{n-2}\|^2 + (1-a)k^2\|x_0 - Tx_{n-3}\|^2 + ((1-a)k^2)^2\|x_0 - Tx_{n-4}\|^2\right) \\
&\quad \vdots \\
&\leq a\sum_{j=0}^{n-3}((1-a)k^2)^j\|x_0 - T^{n-j-1}x_0\|^2 + ((1-a)k^2)^{n-2}\|x_1 - Tx_0\|^2 \\
&\quad - a(1-a)\sum_{j=0}^{n-3}((1-a)k^2)^j\|x_0 - Tx_{n-j-2}\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&a\sum_{j=0}^{n-3}((1-a)k^2)^j\|x_0 - T^{n-j-1}x_0\|^2 + a^2((1-a)k^2)^{n-2}\|x_0 - Tx_0\|^2\\
&+ (1-a)\sum_{j=0}^{n-3}((1-a)k^2)^j(-a)\|x_0 - Tx_{n-j-2}\|^2.
\end{aligned}
$$

Ahora obtengamos la siguiente estimación:

- *Estimación II*: $\|z - x_{n-2}\|^2$.

Por (2.2.13) y como $T \in \mathscr{L}(k)$:

$$
\begin{aligned}
\|z - x_{n-2}\|^2 &= \|(1-a)Tx_{n-2} - (1-a)Tx_{n-3}\|^2\\
&\leq (1-a)^2k^2\|x_{n-2} - x_{n-3}\|^2\\
&\leq ((1-a)^2k^2)^2\|x_{n-3} - x_{n-4}\|^2\\
&\vdots\\
&\leq ((1-a)^2k^2)^{n-2}\|x_1 - x_0\|^2\\
&= (1-a)^2((1-a)^2k^2)^{n-2}\|x_0 - Tx_0\|^2.
\end{aligned}
$$

Usando las estimaciones I y II obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\|z - Tz\|^2 \leq &a^2k^2\sum_{j=0}^{n-3}((1-a)k^2)^j\|x_0 - T^{n-j-1}x_0\|^2 + a^3k^2((1-a)k^2)^{n-2}\|x_0 - Tx_0\|^2\\
&+ ak^2(1-a)\sum_{j=0}^{n-3}((1-a)k^2)^j(-a)\|x_0 - Tx_{n-j-2}\|^2\\
&+ (1-a)^3k^2((1-a)^2k^2)^{n-2}\|x_0 - Tx_0\|^2\\
&+ (1-a)(-a)\|x_0 - Tx_{n-2}\|^2
\end{aligned}
\tag{2.2.14}
$$

Para estimar $\|x_0 - Tx_m\|$ para $m = 1, \ldots, n-2$ supongamos que para algún $\varepsilon \in (0,1)$ y para todo $j = 1, \ldots, n-2$ se tiene que $\|x_j - Tx_j\|^2 \geq (1-\varepsilon)\|x_0 - Tx_0\|^2$.

- *Estimación III*: $(-a)\|x_0 - Tx_m\|^2$.

Por la igualdad en el lema 2.20:

$$
\begin{aligned}
\|x_1 - Tx_1\|^2 =&\|a(x_0 - Tx_1) + (1-a)(Tx_0 - Tx_1)\|^2\\
=&a\|x_0 - Tx_1\|^2 + (1-a)\|Tx_0 - Tx_1\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_0\|^2.
\end{aligned}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
(-a)\|x_0 - Tx_1\|^2 &= -\|x_1 - Tx_1\|^2 + (1-a)\|Tx_0 - Tx_1\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_0\|^2\\
&\leq -(1-\varepsilon)\|x_0 - Tx_0\|^2 + (1-a)\|Tx_0 - Tx_1\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_0\|^2.
\end{aligned}
$$

Análogamente y usando esta última desigualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\|x_2 - Tx_2\|^2 &= \|a(x_0 - Tx_2) + (1-a)(Tx_1 - Tx_2)\|^2 \\
&= a\|x_0 - Tx_2\|^2 + (1-a)\|Tx_1 - Tx_2\|^2 + (1-a)(-a)\|x_0 - Tx_1\|^2 \\
&\leq a\|x_0 - Tx_2\|^2 + (1-a)\|Tx_1 - Tx_2\|^2 \\
&\quad + (1-a)(-(1-\varepsilon)\|x_0 - Tx_0\|^2 + (1-a)\|Tx_0 - Tx_1\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_0\|^2).
\end{aligned}$$

De esto y usando que $\|x_2 - Tx_2\| \geq (1-\varepsilon)\|x_0 - Tx_0\|^2$,

$$\begin{aligned}
(-a)\|x_0 - Tx_2\|^2 &\leq -\|x_2 - Tx_2\|^2 + (1-a)\|Tx_1 - Tx_2\|^2 \\
&\quad + (1-a)\left(-(1-\varepsilon)\|x_0 - Tx_0\|^2 + (1-a)\|Tx_0 - Tx_1\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_0\|^2\right) \\
&\leq -(1-\varepsilon)\|x_0 - Tx_0\|^2 + (1-a)\|Tx_1 - Tx_2\|^2 \\
&\quad + (1-a)\left(-(1-\varepsilon)\|x_0 - Tx_0\|^2 + (1-a)\|Tx_0 - Tx_1\|^2 - a(1-a)\|x_0 - Tx_0\|^2\right) \\
&= -(1-\varepsilon)(1 + (1-a))\|x_0 - Tx_0\|^2 - a(1-a)^2\|x_0 - Tx_0\|^2 \\
&\quad + (1-a)\left(\|Tx_1 - Tx_2\|^2 + (1-a)\|Tx_0 - Tx_1\|^2\right).
\end{aligned}$$

En general, ya que $\|Tx_{m-1-i} - Tx_{m-i}\|^2 \leq [(1-a)^2k^2]^{m-i}\|x_0 - Tx_0\|^2$ tenemos:

$$\begin{aligned}
(-a)\|x_0 - Tx_m\|^2 &\leq -(1-\varepsilon)\sum_{i=0}^{m-1}(1-a)^i\|x_0 - Tx_0\|^2 - a(1-a)^m\|x_0 - Tx_0\|^2 \\
&\quad + (1-a)\sum_{i=0}^{m-1}(1-a)^i\|Tx_{m-1-i} - Tx_{m-i}\|^2 \\
&\leq -(1-\varepsilon)\sum_{i=0}^{m-1}(1-a)^i\|x_0 - Tx_0\|^2 - a(1-a)^m\|x_0 - Tx_0\|^2 \\
&\quad + (1-a)\sum_{i=0}^{m-1}(1-a)^i((1-a)^2k^2)^{m-i}\|x_0 - Tx_0\|^2 \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m-1}(1-a)^i((1-a)((1-a)^2k^2)^{m-i} - (1-\varepsilon)) - a(1-a)^m\right)\|x_0 - Tx_0\|^2.
\end{aligned}$$

Finalmente de (2.2.14) y III:

$$\begin{aligned}
\|z - Tz\|^2 &\leq a^2k^2\sum_{j=0}^{n-3}((1-a)k^2)^j\|x_0 - T^{n-j-1}x_0\|^2 + a^3k^2((1-a)k^2)^{n-2}\|x_0 - Tx_0\|^2 \\
&+ ak^2(1-a)\sum_{j=0}^{n-3}((1-a)k^2)^j\left[\sum_{i=0}^{n-3-j}(1-a)^i\Big((1-a)((1-a)^2k^2)^{n-2-j-i} - (1-\varepsilon)\Big)\right. \\
&\left. - a(1-a)^{n-2-j}\right]\|x_0 - Tx_0\|^2 + (1-a)^3k^2((1-a)^2k^2)^{n-2}\|x_0 - Tx_0\|^2 \\
&+ (1-a)\left(\sum_{i=0}^{n-3}(1-a)^i\Big((1-a)((1-a)^2k^2)^{n-2-i} - (1-\varepsilon)\Big) - a(1-a)^{n-2}\right)\|x_0 - Tx_0\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&a^2k^2\sum_{j=0}^{n-3}((1-a)k^2)^j\|x_0-T^{n-j-1}x_0\|^2+\Bigg\{a^3k^2((1-a)k^2)^{n-2}\\
&+ak^2(1-a)\sum_{j=0}^{n-3}((1-a)k^2)^j\Bigg[\sum_{i=0}^{n-3-j}(1-a)^i\Big((1-a)((1-a)^2k^2)^{n-2-j-i}-(1-\varepsilon)\Big)\\
&-a(1-a)^{n-2-j}\Bigg]+(1-a)^3k^2((1-a)^2k^2)^{n-2}\\
&+(1-a)\left(\sum_{i=0}^{n-3}(1-a)^i\Big((1-a)((1-a)^2k^2)^{n-2-i}-(1-\varepsilon)\Big)-a(1-a)^{n-2}\right)\Bigg\}\|x_0-Tx_0\|^2\\
=&a^2k^2\sum_{j=0}^{n-3}A^j\|x_0-T^{n-j-1}x_0\|^2+(L(a,k)+\varepsilon M(a,k))\|x_0-Tx_0\|^2
\end{aligned}
\tag{2.2.15}
$$

donde $A = (1-a)k^2$,

$$
\begin{aligned}
L(a,k) =&a^3k^2((1-a)k^2)^{n-2}\\
&+ak^2(1-a)\sum_{j=0}^{n-3}((1-a)k^2)^j\Bigg[\sum_{i=0}^{n-3-j}(1-a)^i\Big((1-a)((1-a)^2k^2)^{n-2-j-i}-1\Big)\\
&-a(1-a)^{n-2-j}\Bigg]+(1-a)^3k^2((1-a)^2k^2)^{n-2}\\
&+(1-a)\left(\sum_{i=0}^{n-3}(1-a)^i((1-a)((1-a)^2k^2)^{n-2-i}-1)-a(1-a)^{n-2}\right)
\end{aligned}
$$

y

$$
M(a,k) = ak^2(1-a)\sum_{j=0}^{n-3}((1-a)k^2)^j\left(\sum_{i=0}^{n-3-j}(1-a)^i\right)+(1-a)\sum_{i=0}^{n-3}(1-a)^i.
$$

Hay que notar que $M(a,k) < \infty$ pues n es fijo, y tanto a como k son acotados.

Analicemos los casos cuando n es par o impar.

- Caso 1: $n = 2m+1$.

Ya que T es n-periódico y por (2.2.3):

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-3}A^j\|x_0-T^{n-1-j}x_0\|^2 =& \|x_0-T^{2m}x_0\|^2+A\|x_0-T^{2m-1}x_0\|^2+A^2\|x_0-T^{2m-2}x_0\|^2+\\
&+\ldots+A^{m-1}\|x_0-T^{m+1}x_0\|^2+A^m\|x_0-T^mx_0\|^2+\\
&+\ldots+A^{2m-3}\|x_0-T^3x_0\|^2+A^{2m-2}\|x_0-T^2x_0\|^2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
=&\|T^{2m+1}x_0 - T^{2m}x_0\|^2 + A\|T^{2m+1}x_0 - T^{2m-1}x_0\|^2 + A^2\|T^{2m+1}x_0 - T^{2m-2}x_0\|^2+\\
&+\ldots + A^{m-1}\|T^{2m+1}x_0 - T^{m+1}x_0\|^2 + A^m\|x_0 - T^m x_0\|^2+\\
&+\ldots + A^{2m-3}\|x_0 - T^3x_0\|^2 + A^{2m-2}\|x_0 - T^2x_0\|^2\\
\le& k^{2(2m)}\|x_0 - Tx_0\|^2 + (Ak^{2(2m-1)} + A^{2m-2})\|x_0 - T^2x_0\|^2\\
&+ (A^2k^{2(2m-2)} + A^{2m-3})\|x_0 - T^3x_0\|^2 + \ldots + (A^{m-1}k^{2(m+1)} + A^m)\|x_0 - T^m x_0\|^2\\
=& k^{2(2m)}\|x_0 - Tx_0\|^2 + \sum_{j=2}^{m}(A^{j-1}k^{2(2m+1-j)} + A^{2m-j})\|x_0 - T^j x_0\|^2\\
\le& \left(k^{2(2m)} + \sum_{j=2}^{m}(A^{j-1}k^{2(2m+1-j)} + A^{2m-j})\left(\frac{k^j-1}{k-1}\right)^2\right)\|x_0 - Tx_0\|^2
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

esto es para $m > 1$, y si $m = 1$, es decir, $n = 3$ usamos lo siguiente:

$$\|x_0 - T^2x_0\|^2 \le k^4\|x_0 - Tx_0\|^2. \tag{2.2.17}$$

- Caso 2: $n = 2m + 2$.

Análogamente al caso anterior:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-3} A^j\|x_0 - T^{n-1-j}x_0\|^2 =& \|x_0 - T^{2m+1}x_0\|^2+\\
&+ A\|x_0 - T^{2m}x_0\|^2 + A^2\|x_0 - T^{2m-1}x_0\|^2 + \ldots +\\
&+ A^{m-1}\|x_0 - T^{m+2}x_0\|^2 + A^m\|x_0 - T^{m+1}x_0\|^2 + A^{m+1}\|x_0 - T^m x_0\|^2+\\
&+ \ldots + A^{2m-2}\|x_0 - T^3x_0\|^2 + A^{2m-1}\|x_0 - T^2x_0\|^2\\
=&\|T^{2m+2}x_0 - T^{2m+1}x_0\|^2+\\
&+ A\|T^{2m+2}x_0 - T^{2m}x_0\|^2 + A^2\|T^{2m+2}x_0 - T^{2m-1}x_0\|^2 + \ldots +\\
&+ A^{m-1}\|T^{2m+2}x_0 - T^{m+2}x_0\|^2 + A^m\|x_0 - T^{m+1}x_0\|^2 + A^{m+1}\|x_0 - T^m x_0\|^2+\\
&+ \ldots + A^{2m-2}\|x_0 - T^3x_0\|^2 + A^{2m-1}\|x_0 - T^2x_0\|^2\\
\le& k^{2(2m+1)}\|x_0 - Tx_0\|^2 + (Ak^{2(2m)} + A^{2m-1})\|x_0 - T^2x_0\|^2+\\
&+ (A^2k^{2(2m-1)} + A^{2m-2})\|x_0 - T^3x_0\|^2 + \ldots +\\
&+ (A^{m-1}k^{2(m+2)} + A^{m+1})\|x_0 - T^m x_0\|^2 + +A^m\|x_0 - T^{m+1}x_0\|^2\\
=& k^{2(2m+1)}\|x_0 - Tx_0\|^2+\\
&+ \sum_{j=2}^{m}(A^{j-1}k^{2(2m+2-j)} + A^{2m+1-j})\|x_0 - T^j x_0\|^2 + A^m\|x_0 - T^{m+1}x_0\|^2\\
\le& \left(k^{2(2m+1)} + \sum_{j=2}^{m}(A^{j-1}k^{2(2m+2-j)} + A^{2m+1-j})\left(\frac{k^j-1}{k-1}\right)^2\right)\|x_0 - Tx_0\|^2+\\
&+ \left(A^m\left(\frac{k^{m+1}-1}{k-1}\right)^2\right)\|x_0 - Tx_0\|^2
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

esto es para $m > 1$, y si $m = 1$, es decir, si $n = 4$:

$$\|x_0 - T^3x_0\|^2 + A\|x_0 + T^2x_0\|^2 \leq \left(k^6 + A\left(\frac{k^2-1}{k-1}\right)^2\right)\|x_0 - Tx_0\|^2. \qquad (2.2.19)$$

De (2.2.15), (2.2.16), (2.2.17), (2.2.18) y (2.2.19) se sigue que si $\|x_j - Tx_j\|^2 \geq (1-\varepsilon)\|x_0 - Tx_0\|^2$ para $j = 1, \ldots, n-2$,

$$\|z - Tz\|^2 \leq [a^2k^2E_n(a,k) + L(a,k) + \varepsilon M(a,k)]\|x_0 - Tx_0\|^2.$$

Sea $y_0 = x_0$, procedamos de manera inductiva. Supongamos que $y_0, y_1, \ldots, y_m$ ya están dados. Sean $y_m^0 = y_m$ y $y_m^i = ay_m + (1-a)Ty_m^{i-1}$ para $i = 1, \ldots, n-1$.

Si $\|y_m^j - Ty_m^j\|^2 < (1-\varepsilon)\|y_m - Ty_m\|^2$ para algún $j \in \{1, \ldots, n-2\}$, hagamos $y_{m+1} = y_m^j$. Por otro lado, si $\|y_m^j - Ty_m^j\| \geq (1-\varepsilon)\|y_m - Ty_m\|^2$ para cada $j \in \{1, \ldots, n-2\}$, hagamos $y_{m+1} = y_m^{n-1}$.

Entonces, si k es solución de la desigualdad $a^2k^2E_n(a,k)+L(a,k)+\varepsilon M(a,k) < 1$, por el corolario 2.4, $\{y_m\}$ converge a un punto fijo. Ya que $\varepsilon > 0$ es arbitrario y como $M(a,k)$ está acotado, $\gamma_n^H(0) \geq s_n$, donde s_n es la solución positiva de la ecuación $a^2k^2E_n(a,k) + L(a,k) = 1$, para n y a fijos, tomando el supremo sobre $a \in (0,1)$ obtenemos $\gamma_n^H(0) \geq r_n$. #

Podemos ver que dado x_0, la elección de y_1 en general no tiene por qué ser continua, así que no podemos afirmar que la función $u(x_0)$ es continua, por lo que no podemos aplicar el corolario 2.4 para garantizar que el conjunto de puntos fijos es un retracto.

Vemos que para $n = 3$, $\gamma_3^H(0) \geq 1.4441$, con $a = 0.346$. Este valor es menor que el obtenido por el primer método.

Para $n = 4$ se tiene que $\gamma_4^H(0) \geq 1.3110$, cuando $a = 0.297$, este valor es mejor que el obtenido con el primer método para $a_i = \frac{1}{4}$, pero no es mejor que el obtenido por el mismo primer método en el caso general, como se vio en la proposición 2.29.

Otros valores encontrados son: $\gamma_5^H(0) \geq 1.2068$, para $a = 0.232$; $\gamma_6^H(0) \geq 1.1748$, para $a = 0.209$. Todos estos valores son mejores que los obtenidos por Górnicki y Pupka (ver [GP05]) para espacios de Banach, incluso son mejores que los obtenidos por el primer método.

Ahora usaremos este método para estimar los valores de $\widetilde{\gamma}_n^H(0)$.

Para $n \geq 3$, n entero positivo definamos $\widetilde{r}_n$ como sigue:

$$\begin{aligned}\widetilde{r}_n = \sup_{a\in(0,1)} \{s : a^2s^2\widetilde{E}_n(a,s) + a^3s^2((1-a)s^2)^{n-2} \\ + as^2(1-a)\sum_{j=0}^{n-3}((1-a)s^2)^j\Bigg(\sum_{i=0}^{n-3-j}\Big((1-a)^i((1-a)(s^2(1-a)^2)^{n-2-j-i}-1)\Big) \\ - a(1-a)^{n-2-j}\Bigg) + (1-a)^3s^2(s^2(1-a)^2)^{n-2} \\ + (1-a)\left(\sum_{i=0}^{n-3}\Big((1-a)^i((1-a)(s^2(1-a)^2)^{n-2-i}-1)\Big) - a(1-a)^{n-2}\right) = 1\}\end{aligned}$$

donde:

$$\widetilde{E}_n(a,s) = \begin{cases} s^2 & \text{si} \quad n = 3 \\ s^2 + \sum_{j=2}^{m}(A^{j-1}s^2 + A^{2m-j})(1+(j-1)s)^2 & \text{si} \quad n = 2m+1, m > 1 \\ s^2 + A(1+s)^2 & \text{si} \quad n = 4 \\ s^2 + \sum_{j=2}^{m}(A^{j-1}s^2 + A^{2m+1-j})(1+(j-1)s)^2 + A^m(1+ms)^2 & \text{si} \quad n = 2m+2, m > 1 \end{cases}$$

con $A = (1-a)s^2$.

Teorema 2.31. *Sean H un espacio de Hilbert y C como en el teorema anterior, sea $T : C \to C$ una función $(0,n)$-rotativa tal que $T \in \mathscr{U}(k)$. Si $k < \widetilde{r}_n$ entonces* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$*, esto es, $\widetilde{\gamma}_n^H \geq \widetilde{r}_n$.*

Demostración. Tomemos $x \in C$ y $\varepsilon > 0$ como en el teorema anterior y seguimos los mismos pasos hasta llegar a (2.2.15). Consideremos otra vez los dos casos, cuando n es par y cuando es impar.

- Caso 1: $n = 2m+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-3} A^j\|x_0 - T^{n-1-j}x_0\|^2 =&\|x_0 - T^{2m}x_0\|^2 \\
&+ A\|x_0 - T^{2m-1}x_0\|^2 + A^2\|x_0 - T^{2m-2}x_0\|^2 + \\
&+ \ldots + A^{m-1}\|x_0 - T^{m+1}x_0\|^2 + A^m\|x_0 - T^m x_0\|^2 + \\
&+ \ldots + A^{2m-3}\|x_0 - T^3x_0\|^2 + A^{2m-2}\|x_0 - T^2x_0\|^2 \\
=&\|T^{2m+1}x_0 - T^{2m}x_0\|^2 \\
&+ A\|T^{2m+1}x_0 - T^{2m-1}x_0\|^2 + A^2\|T^{2m+1}x_0 - T^{2m-2}x_0\|^2 + \\
&+ \ldots + A^{m-1}\|T^{2m+1}x_0 - T^{m+1}x_0\|^2 + A^m\|x_0 - T^m x_0\|^2 + \\
&+ \ldots + A^{2m-3}\|x_0 - T^3x_0\|^2 + A^{2m-2}\|x_0 - T^2x_0\|^2 \\
\leq& k^2\|x_0 - Tx_0\|^2 \\
&+ (Ak^2 + A^{2m-2})\|x_0 - T^2x_0\|^2 \\
&+ (A^2k^2 + A^{2m-3})\|x_0 - T^3x_0\|^2 + \ldots + \\
&+ (A^{m-1}k^2 + A^m)\|x_0 - T^m x_0\|^2 \\
=& k^2\|x_0 - Tx_0\|^2 + \sum_{j=2}^{m}(A^{j-1}k^2 + A^{2m-j})\|x_0 - T^jx_0\|^2 \\
\leq& \left(k^2 + \sum_{j=2}^{m}(A^{j-1}k^2 + A^{2m-j})\,(1+(j-1)k)^2\right)\|x_0 - Tx_0\|^2
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

para $m > 1$, y si $m = 1$, es decir, si $n = 3$:

$$\|x_0 - T^2x_0\|^2 \leq k^2\|x_0 - Tx_0\|^2. \tag{2.2.21}$$

- Caso 2: $n = 2m + 2$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-3} A^j \|x_0 - T^{n-1-j}x_0\|^2 = \|x_0 - T^{2m+1}x_0\|^2 + &\\
&+ A\|x_0 - T^{2m}x_0\|^2 + A^2\|x_0 - T^{2m-1}x_0\|^2 + \ldots +\\
&+ A^{m-1}\|x_0 - T^{m+2}x_0\|^2 + A^m\|x_0 - T^{m+1}x_0\|^2 + A^{m+1}\|x_0 - T^m x_0\|^2 +\\
&+ \ldots + A^{2m-2}\|x_0 - T^3x_0\|^2 + A^{2m-1}\|x_0 - T^2x_0\|^2\\
&= \|T^{2m+2}x_0 - T^{2m+1}x_0\|^2 +\\
&+ A\|T^{2m+2}x_0 - T^{2m}x_0\|^2 + A^2\|T^{2m+2}x_0 - T^{2m-1}x_0\|^2 + \ldots +\\
&+ A^{m-1}\|T^{2m+2}x_0 - T^{m+2}x_0\|^2 + A^m\|x_0 - T^{m+1}x_0\|^2 + A^{m+1}\|x_0 - T^m x_0\|^2 +\\
&+ \ldots + A^{2m-2}\|x_0 - T^3x_0\|^2 + A^{2m-1}\|x_0 - T^2x_0\|^2\\
&\leq k^2\|x_0 - Tx_0\|^2\\
&+ (Ak^2 + A^{2m-1})\|x_0 - T^2x_0\|^2 +\\
&+ (A^2k^2 + A^{2m-2})\|x_0 - T^3x_0\|^2 + \ldots +\\
&+ (A^{m-1}k^2 + A^{m+1})\|x_0 - T^m x_0\|^2 +\\
&+ A^m\|x_0 - T^{m+1}x_0\|^2 +\\
&= k^2\|x_0 - Tx_0\|^2 +\\
&+ \sum_{j=2}^{m}(A^{j-1}k^2 + A^{2m+1-j})\|x_0 - T^j x_0\|^2 + A^m\|x_0 - T^{m+1}x_0\|^2\\
&\leq \left(k^2 + \sum_{j=2}^{m}(A^{j-1}k^2 + A^{2m+1-j})\,(1 + (j-1)k)^2\right)\|x_0 - Tx_0\|^2 +\\
&+ A^m\,(1 + mk)^2\,\|x_0 - Tx_0\|^2
\end{aligned}
\tag{2.2.22}
$$

para $m > 1$, y si $m = 1$, es decir, $n = 4$:

$$
\|x_0 - T^3x_0\|^2 + A\|x_0 + T^2x_0\|^2 \leq \left(k^2 + A\,(1 + k)^2\right)\|x_0 - Tx_0\|^2. \tag{2.2.23}
$$

De (2.2.20), (2.2.21), (2.2.22), (2.2.23) y (2.2.15), si $\|x_0 - Tx_j\|^2 \geq (1-\varepsilon)\|x_0 - Tx_0\|^2$ para $j = 1, \ldots, n-2$, obtenemos:

$$
\|z - Tz\|^2 \leq [a^2k^2\widetilde{E}_n(a,k) + L(a,k) + \varepsilon M(a,k)]\|x_0 - Tx_0\|^2.
$$

Usando el mismo argumento que el teorema anterior, tenemos que $\widetilde{\gamma}_n^H(0) \geq \widetilde{r}_n$. #

Con este método obtenemos $\widetilde{\gamma}_3^H(0) \geq 1.6061$, para $a = 0.4130$, este valor es mejor que el obtenido el primer método.

También obtenemos $\widetilde{\gamma}_4^H(0) \geq 1.3761$, para $a = 0.34$, aunque este valor no es mejor que el encontrado en el primer método, como se vio en la proposición 2.29.

Los demás valores encontrados son: $\widetilde{\gamma}_5^H(0) \geq 1.2824$, para $a = 0.2930$; $\widetilde{\gamma}_6^H(0) \geq 1.2309$, para $a = 0.261$. Todos estos valores son mejores que los encontrados por el primer método.

Desafortunadamente en estos casos tampoco se puede decir nada acerca del conjunto de puntos fijos.

Capítulo 3

Una generalización de la constante de von Neumann-Jordan

En 1937 Clarkson dio la definición de la constante de von Neumann-Jordan, la cual está basada en la ley del paralelogramo. Esta constante mide qué tan cerca está un espacio de Banach de cumplir dicha ley. En trabajos recientes se ha visto que dicha constante tiene relación con algunas estructuras geométricas de los espacios de Banach, por ejemplo, se relaciona con la estructura normal y con la propiedad de ser uniformemente no cuadrado, y por ende con la teoría de punto fijo.

En la primera parte de este capítulo enunciaremos algunas de las propiedades más importantes que tiene dicha constante. También vamos a relacionarla con $\gamma_2^X(a)$ y con la existencia de retracciones sobre el conjunto de puntos fijos. Además, daremos condiciones que involucran dicha constante, para garantizar la existencia de puntos fijos para funciones con n-ésima potencia no expansiva; las funciones de este tipo incluyen a las 2-periódicas.

En la segunda parte, nosotros vamos a introducir una generalización de la constante de von Neumann-Jordan, ésta nos servirá para mejorar las cotas de $\gamma_3^X(0)$ para ciertos espacios de Banach X. Antes de presentar esta aplicación, veremos que muchas propiedades que tiene la constante de von Neumann-Jordan son heredadas a esta generalización. Entre las propiedades que estudiaremos, veremos una caracterización de los espacios uniformemente no cuadrados basándonos en el valor que tiene dicha constante.

Al final de este capítulo, calcularemos el valor preciso de esta nueva constante para algunos espacios de Banach y también estableceremos algunas preguntas abiertas sobre esta generalización.

3.1. La constante de von Neumann-Jordan

Dado un espacio de Banach X, se define la constante de von Neumann-Jordan (ver [Cla37]) como:

$$C_{NJ}(X) = \sup\left\{\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} : x, y \in X, \|x\|^2 + \|y\|^2 \neq 0\right\}.$$

Algunas propiedades que tiene esta constante son las siguientes:

(I) Para cualquier espacio de Banach X, se tiene que $1 \leq C_{NJ}(X) \leq 2$.

(II) $C_{NJ}(X) = 1$ si y solamente si X es un espacio de Hilbert.

(III) $C_{NJ}(\ell_p) = 2^{\frac{2}{s}-1}$ donde $p > 1$, $s = \min\{p, p'\}$ y p' es el conjugado de p.

La constante $C_{NJ}(X)$ está midiendo en algún modo qué tan cerca está el espacio de Banach X de ser un espacio de Hilbert, por lo que para espacios de Banach cuya constante esté cerca de 1, esperamos que su comportamiento sea muy parecido a un espacio de Hilbert. El siguiente resultado muestra esta situación.

En el capítulo anterior vimos que $\gamma_2^X(0) \geq 2$ para cualquier espacio de Banach X, y que $\gamma_2^H(0) \geq 2.62\ldots$ para los espacios de Hilbert H. Con el resultado siguiente veremos que existe una función real s tal que $\gamma_2^X(0) \geq s(C_{NJ}(X))$, donde $s(C_{NJ}(X)) > 2$ para ciertos espacios de Banach X.

Proposición 3.1. *Sean X un espacio de Banach, $C \subset X$ no vacío, cerrado y convexo. Sea $T : C \to C$ una función k-Lipschitz continua y $(a, 2)$-rotativa. Si k es tal que $k < \sqrt{\frac{5}{C_{NJ}(X)} - a^2} - a$, entonces $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$, en otras palabras, $\gamma_2^X(a) \geq \sqrt{\frac{5}{C_{NJ}(X)} - a^2} - a$ y $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto de C. Además, si $k = 1$, $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto no expansivo de C y si $k > 1$ y C es acotado, $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto Hölder continuo de C.*

Demostración. Sea $T : C \to C$ una función k-Lipschitz y $(a, 2)$-rotativa, con C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Banach. Tomemos $x \in C$ y definamos $u(x) = \frac{x+Tx}{2}$. Notemos que por definición, si $u, v \in X$ entonces $\|u + v\|^2 \leq 2C_{NJ}(X)(\|u\|^2 + \|v\|^2) - \|u - v\|^2$. Necesitaremos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
\|x - Tu(x)\| &\leq \|x - T^2x\| + \|T^2x - Tu(x)\| \\
&\leq a\|x - Tx\| + k\|u(x) - Tx\| \\
&= \left(a + \frac{k}{2}\right)\|x - Tx\|.
\end{aligned}$$

De aquí:

$$\begin{aligned}
\|u(x) - Tu(x)\|^2 &= \left\|\frac{x + Tx}{2} - Tu(x)\right\|^2 \\
&= \left\|\frac{x - Tu(x)}{2} + \frac{Tx - Tu(x)}{2}\right\|^2 \\
&\leq 2C_{NJ}(X)\left(\left\|\frac{x - Tu(x)}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{Tx - Tu(x)}{2}\right\|^2\right) - \left\|\frac{x - Tx}{2}\right\|^2 \\
&\leq C_{NJ}(X)\left(\frac{1}{2}(a + \frac{k}{2})^2\|x - Tx\|^2 + \frac{k^2}{8}\|x - Tx\|^2\right) - \frac{1}{4}\|x - Tx\|^2 \\
&= \left[C_{NJ}(X)\frac{1}{2}(a + \frac{k}{2})^2 + C_{NJ}(X)\frac{k^2}{8} - \frac{1}{4}\right]\|x - Tx\|^2.
\end{aligned}$$

Así que, si $\left[C_{NJ}(X)\frac{1}{2}(a+\frac{k}{2})^2 + C_{NJ}(X)\frac{k^2}{8} - \frac{1}{4}\right] < 1$ entonces $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$, y esto pasa si y solamente si $k < \sqrt{\frac{5}{C_{NJ}(X)} - a^2} - a$, como queríamos. Claramente la función u es continua, por lo tanto, por el corolario 2.4 $\mathrm{Fix}(T)$ es un retracto de C.

Además se cumplen todas las condiciones del corolario 2.4, por lo que $\mathrm{Fix}(T)$ resulta ser un retracto no expansivo cuando $k = 1$ y es un retracto Hölder continuo cuando $k > 1$ y si C es acotado. #

Si en el resultado anterior tomamos $a = 0$, entonces nos dice que $\gamma_2^X(0) \geq \sqrt{\frac{5}{C_{NJ}(X)}}$, con lo que tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.2. *Sea X un espacio de Banach que cumple* $1 \leq C_{NJ}(X) < \frac{5}{4}$. *Entonces* $\gamma_2^X(0) > 2$.

Demostración. Si sustituimos $a = 0$ de la anterior proposición, vemos entonces que $\sqrt{\frac{5}{C_{NJ}(X)}} > 2 \Leftrightarrow C_{NJ}(X) < \frac{5}{4}$. #

Probaremos ahora un resultado que involucra a las funciones con n-ésima potencia no expansiva.

Antes daremos algunas definiciones y resultados.

Definición 3.3. *Diremos que un espacio de Banach X tiene la propiedad de punto fijo para funciones no expansivas si dados C un subconjunto cerrado, convexo y acotado de X y* $T : C \to C$ *cualquier función no expansiva, entonces* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Definición 3.4. *Sea X un espacio de Banach. Se dice que X es* uniformemente no cuadrado *si* $\epsilon_0(X) < 2$ *(ver la definición 2.9).*

En [Jam64] R.C. James probó lo siguiente:

Teorema. *Si X es uniformemente no cuadrado entonces X es reflexivo.*

En [YW06] C. Yang y F. Wang probaron lo siguiente:

Proposición 3.5. $C_{NJ}(X) < 2$ *si y solamente si X es uniformemente no cuadrado.*

En [GLM05] J. García-Falset, E. Llorens-Fuster y E. Mazcuñan-Navarro demuestran lo siguiente:

Teorema 3.6. *Sea X un espacio uniformemente no cuadrado. Entonces X tiene la propiedad de punto fijo para funciones no expansivas.*

Nosotros tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.7. *Sea X un espacio de Banach estrictamente convexo con la propiedad de punto fijo para funciones no expansivas. Sea* $T : C \to C$ *una función, donde* $C \subset X$ *es cerrado, convexo y acotado. Si* T^n *es no expansiva, entonces* $D = \mathrm{Fix}(T^n) \neq \emptyset$ *y es un subconjunto cerrado y convexo de C. Si definimos* $Q = T|_D$, *entonces* $Q^n = Id|_D$, $Q(D) = D$ *y* $\mathrm{Fix}(Q) = \mathrm{Fix}(T)$. *En particular:*

(a) *Si* $T \in \mathscr{L}(k)$ *con* $k < \gamma_n^X(0)$ *y* $C_{NJ}(X) < 2$ *entonces* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

(b) *Si* X *tiene estructura normal, es reflexivo y* $k < \gamma_n^X(0)$ *entonces* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Demostración. Es claro que $D = \mathrm{Fix}(T^n) \neq \emptyset$ es convexo por el lema 1.4 y es cerrado por ser el conjunto de puntos fijos de T^n; también es claro que $Q^n = Id|_D$ por definición de D. Veamos ahora que $Q(D) \subset D$: sea $x \in D$, entonces $Q(x) = T^n(Tx) = T(T^n x) = Tx$, con lo que tenemos la contención. Por otro lado, para $x \in D$, existe $Q^{n-1}x$ tal que $Q(Q^{n-1}x) = x$, por lo que se tiene la igualdad $Q(D) = D$.

Si $x \in \mathrm{Fix}(Q)$, entonces $x = Q(x) = T(x)$, ya que $x \in D$. Por otro lado, si $x \in \mathrm{Fix}(T)$, entonces $Tx = x$ y así $T^n x = x$, con lo que $x \in D$; luego $x = Tx = Qx$ y de este modo $\mathrm{Fix}(Q) = \mathrm{Fix}(T)$.

Prueba de (a). Como $C_{NJ}(X) < 2$, entonces X es uniformemente no cuadrado y, por 3.6, X tiene la propiedad de punto fijo; además como $Q \in \mathscr{L}(k)$, $k < \gamma_n^X(0)$ y $Q^n = Id$, entonces $\mathrm{Fix}(Q) = \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Prueba de (b). Kirk probó que si X es reflexivo y tiene estructura normal, entonces X tiene la propiedad de punto fijo para funciones no expansivas (ver Teorema 2.1 de [GK01, pág 51]); entonces, análogamente a (a), se sigue que $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. #

Como corolario de la anterior proposición tenemos:

Corolario 3.8. *Sea* X *un espacio de Banach estrictamente convexo. Sean* $C \subset X$ *un subconjunto no vacío, cerrado y convexo y* $T : C \to C$ *una función k-Lipschitz continua tal que* T^2 *es no expansiva. Si* $1 \leq C_{NJ}(X) < 2$ *y* $k < \sqrt{\frac{5}{C_{NJ}(X)}}$, *entonces* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ *y es un retracto de algún subconjunto convexo* D *de* C. *Además, si* $k = 1$, $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto no expansivo de* D *y si* $k > 1$ *con* C *acotado,* $\mathrm{Fix}(T)$ *es un retracto Hölder continuo de* D.

Demostración. Sea D como en 3.7; entonces el resultado se sigue de las proposiciones 3.7 y 3.1, sustituyendo $a = 0$ en la proposición 3.1. #

3.1.1. Una generalización de la constante de von Neumann-Jordan

En esta sección, vamos a introducir una generalización de la constante de von Neumann-Jordan. Al principio daremos algunas propiedades que tiene esta nueva constante. También calcularemos el valor exacto que tiene dicha constante para ciertos espacios de Banach.

Finalmente, daremos una aplicación para mejorar la estimación de $\gamma_3^X(0)$, bajo ciertas condiciones del espacio X, análogamente como hicimos para mejorar el valor de $\gamma_2^X(0)$ usando la constante de von Neumann-Jordan en la sección anterior.

Definición 3.9. *Sea* X *un espacio de Banach y* $\alpha \in [0,1]$, *entonces definimos:*

$$C_\alpha(X) = \sup\left\{\frac{\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2}{\alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2} : x, y \in X, \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 \neq 0\right\}.$$

Algunas propiedades de $C_\alpha(X)$:

(i) $C_{\frac{1}{2}}(X) = C_{NJ}(X)$. Esto es obvio.

(ii) Es claro que $C_\alpha(X) = C_{1-\alpha}(X)$.

(iii) $C_\alpha(X) = 1$ para $\alpha \in (0,1)$ si y sólo si X es un espacio de Hilbert.

Demostración. Para ver esto, supongamos que $C_\alpha(X) = 1$ para $\alpha \in (0,1)$, entonces para cualesquiera $x, y \in X$, $\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 \leq \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2$. Sean $u = \alpha x + (1-\alpha)y$ y $v = \alpha x - \alpha y$. Tenemos entonces $\|\alpha u + (1-\alpha)v\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|u-v\|^2 \leq \alpha\|u\|^2 + (1-\alpha)\|v\|^2$; esto es,

$$\alpha^2\|x\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|y\|^2 \leq \alpha\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha^2(1-\alpha)\|x-y\|^2,$$

de aquí tenemos la igualdad, y por el lema 2.20 X es un espacio de Hilbert.

Por otro lado, si X es un espacio de Hilbert, por la igualdad (2.2.1) del mismo lema 2.20, para cada $x, y \in X$, $\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2$; esto es, $C_\alpha(X) = 1$. #

Ya que para cualquier espacio de Banach X, se tiene que $C_0(X) = C_1(X) = 1$, entonces consideraremos solamente $\alpha \in (0,1)$.

Para la constante de von Neumann-Jordan, se tiene que $1 \leq C_{NJ}(X) \leq 2$, para cualquier espacio de Banach X. Encontremos una estimación semejante para $C_\alpha(X)$. Para este fin, definamos lo siguiente:

$$A = \sup\left\{\frac{\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2}{\alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2} : x \in S_X, y \in B_X\right\},$$
$$B = \sup\left\{\frac{\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2}{\alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2} : x \in B_X, y \in S_X\right\}.$$

Consideremos $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ y tomemos $x \in S_X, y \in B_X$ y $s = \|y\|$:

$$\begin{aligned}\frac{\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2}{\alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2} &= \frac{\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2}{\alpha + (1-\alpha)\|y\|^2} \\ &\leq \frac{(\alpha + (1-\alpha)s)^2 + \alpha(1-\alpha)(1+s)^2}{\alpha + (1-\alpha)s^2} \\ &= f(s),\end{aligned}$$

donde $s \in [0,1]$.

f alcanza su único valor máximo en $s_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, y $f(s_0) = 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$, de aquí:

$$A \leq 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}. \qquad (3.1.1)$$

Ahora tomemos $x \in B_X, y \in S_X$ y sea $s = \|x\|$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2}{\alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2} &= \frac{\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2}{\alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)} \\ &\leq \frac{(\alpha s + (1-\alpha))^2 + \alpha(1-\alpha)(s+1)^2}{\alpha s^2 + (1-\alpha)} \\ &= g(s)\end{aligned}$$

con $s \in [0,1]$. Podemos ver que g alcanza su único valor máximo en el punto $s = 1$, y $g(1) = 1 + 4\alpha(1-\alpha)$, por lo que:

$$B \leq 1 + 4\alpha(1-\alpha).$$

Así, para cualquier $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$:

$$\begin{aligned}C_\alpha(X) \leq& \max\left\{1 + 4\alpha(1-\alpha), 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\right\} \\ =& 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}.\end{aligned}$$

Finalmente, por la propiedad (II), para cualquier $\alpha \in [0,1]$:

$$C_\alpha(X) \leq 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}.$$

Si en la definición de $C_\alpha(X)$ tomamos $y = x \in S_X$, tenemos que $C_\alpha(X) \geq 1$, por lo que tenemos:

$$1 \leq C_\alpha(X) \leq 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)} \leq 2. \tag{3.1.2}$$

La cota inferior se alcanza para los espacios de Hilbert. Veremos que la cota superior también se alcanza en algunos espacios de Banach.

Ejemplo 3.10. *Si $\alpha \in [0,1]$, entonces $C_\alpha(c_0) = 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$. Sea $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$.*
Tomemos x y y como sigue:

$$\begin{aligned}x =& (1, 1, 0, \ldots), \\ y =& (-s, s, 0, \ldots), s \in [0,1].\end{aligned}$$

Es claro que $\|x\| = 1$ y $\|y\| = s$. También tenemos que:

$$\begin{aligned}\|\alpha x + (1-\alpha)y\| =& \|(\alpha - s(1-\alpha), \alpha + s(1-\alpha), 0, \ldots)\| \\ =& \max\{|\alpha - s(1-\alpha)|, |\alpha + s(1-\alpha)|\} \\ =& \alpha + s(1-\alpha)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\|x - y\| =& \|(1+s, 1-s, 0, \ldots)\| \\ =& \max\{|1+s|, |1-s|\} \\ =& 1 + s.\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}\frac{\|\alpha x+(1-\alpha)y\|^2+\alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2}{\alpha\|x\|^2+(1-\alpha)\|y\|^2} &= \frac{(\alpha+(1-\alpha)s)^2+\alpha(1-\alpha)(1+s)^2}{\alpha+(1-\alpha)s^2}\\ &= f(s)\end{aligned}$$

y si $s_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, *tenemos* $f(s_0) = 1+2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$. *Concluimos que* $C_\alpha(c_0) = 1+2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$.

Como segundo ejemplo, calcularemos el valor de $C_\alpha(\ell_1)$, esto es, el valor de esta nueva constante para el espacio dual de c_0.

Ejemplo 3.11. *Tomemos lo siguiente:*

$$\begin{aligned}x &= (1,0,\dots)\in S_{\ell_1}\\ y &= (0,s,\dots)\in B_{\ell_1}.\end{aligned}$$

Notemos que:

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\| = \alpha+(1-\alpha)s, \|x-y\| = 1+s.$$

De manera análogo en el ejemplo anterior, obtenemos que para $\alpha\in[0,1]$*:*

$$C_\alpha(\ell_1) = 1+2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}.$$

No es casualidad que los valores encontrados hayan coincidido para los espacios c_0 y ℓ_1. Esto se debe al siguiente hecho, que también se vale para el caso de la constante de von Neumann-Jordan:

Proposición 3.12. *Para cualquier espacio de Banach* X*, y* $\alpha\in[0,1]$*,* $C_\alpha(X) = C_\alpha(X^*)$*.*

La prueba es similar a la dada por Kato y Takahashi cuando probaron que $C_{NJ}(X) = C_{NJ}(X^*)$. Ver por ejemplo [KT98].

Demostración. Sea X un espacio de Banach. Si $\alpha = 0$ ó $\alpha = 1$, la igualdad se da de forma trivial. Tomaremos entonces $\alpha\in(0,1)$.

Tomemos primero $X = \mathbb{R}$ y en $Z = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definamos la norma $\|(x,y)\|_Z^2 = \alpha|x|_X^2 + (1-\alpha)|y|_X^2$.

Queremos hallar Z^*. Sean $(a,b)\in Z^*$ y $(x,y)\in S_X$, esto es, $\alpha x^2+(1-\alpha)y^2 = 1$. Para calcular la norma de (a,b), definamos la función $f(x) = ax+by$, donde y se da de forma implícita por la ecuación $\alpha|x|_X^2+(1-\alpha)|y|_X^2 = 1$.

Si $a = 0$, entonces se puede ver que $\|(a,b)\|_{Z^*}^2 = \frac{b^2}{(1-\alpha)}$.

Tomemos $a\neq 0$. Si $y = 0$ tenemos, por la ecuación $\alpha x^2+(1-\alpha)y^2 = 1$ que $x^2 = \frac{1}{\alpha}$ y por lo tanto $(f(x))^2 = \frac{a^2}{\alpha}$. Ahora tomemos $y\neq 0$, entonces $y' = \frac{-\alpha x}{(1-\alpha)y}$, por lo que $f'(x) = a+by' = a+\frac{b(-\alpha x)}{(1-\alpha)y} = \frac{(1-\alpha)ay-\alpha bx}{(1-\alpha)y}$, y $f'(x_0) = 0$ si y sólo si $(1-\alpha)ay_0 = \alpha bx_0$, esto es,

$$y_0 = \frac{\alpha bx_0}{(1-\alpha)a},$$

de esto y de la ecuación $\alpha x_0^2 + (1-\alpha)y_0^2 = 1$, tenemos $x_0^2 = \frac{(1-\alpha)a^2}{\alpha((1-\alpha)a^2+\alpha b^2)}$, así:

$$\begin{aligned}\sup\{(ax+by)^2 :& \alpha x^2 + (1-\alpha)y^2 = 1, y \neq 0\}\\ &= (ax_0 + by_0)^2\\ &= \left(ax_0 + \frac{b\alpha b x_0}{(1-\alpha)a}\right)^2\\ &= \left(\frac{(1-\alpha)a^2 + \alpha b^2}{(1-\alpha)a}\right)^2 \frac{(1-\alpha)a^2}{\alpha((1-\alpha)a^2+\alpha b^2)}\\ &= \frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Por lo que $\|(a,b)\|_{Z^*}^2 = \frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{1-\alpha}$.

Definamos el espacio Z como $X \times X$ con la norma $\|\cdot\|_Z$, definida por:

$$\|(x,y)\|_Z^2 = \alpha\|x\|_X^2 + (1-\alpha)\|y\|_X^2,$$

por lo tanto $Z^* = (X^* \times X^*, \|\cdot\|_{Z^*})$, donde

$$\|(f,g)\|_{Z^*}^2 = \frac{\|f\|_{X^*}^2}{\alpha} + \frac{\|g\|_{X^*}^2}{1-\alpha}. \tag{3.1.3}$$

Definamos el operador lineal $A : Z \to Z$ representado por la matriz

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix},$$

en otras palabras, $L(x,y) = (\alpha x + (1-\alpha)y, \alpha x - \alpha y)$. Sean $x, y \in X$ elementos cualesquiera de X, entonces:

$$\begin{aligned}\|L(x,y)\|_Z^2 &\leq \|L\|^2 \|(x,y)\|_Z^2\\ &= \|L\|^2(\alpha\|x\|_X^2 + (1-\alpha)\|y\|_X^2)\end{aligned}$$

y esto pasa si y solamente si:

$$\frac{\alpha(\|\alpha x + (1-\alpha)y\|_X^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|_X^2)}{\alpha\|x\|_X^2 + (1-\alpha)\|y\|_X^2} \leq \|L\|^2.$$

Tomando el supremo sobre $x, y \in X$, obtenemos la desigualdad:

$$\alpha C_\alpha(X) \leq \|L\|^2.$$

Ahora tomemos $\varepsilon > 0$ y $x, y \in X$ tales que:

$$\frac{\|L(x,y)\|_Z^2}{\|(x,y)\|_Z^2} > \|L\|^2 - \varepsilon.$$

Por lo tanto:

$$\|L\|^2 - \varepsilon < \frac{\alpha(\|\alpha x + (1-\alpha)y\|_X^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|_X^2)}{\alpha\|x\|_X^2 + (1-\alpha)\|y\|_X^2} \leq \alpha C_\alpha(X).$$

De aquí

$$\|L\|^2 = \alpha C_\alpha(X).$$

El operador transpuesto de L tiene la misma norma que L, esto es: $\|L^t\|^2 = \alpha C_\alpha(X)$. Usando esto, calcularemos $C_\alpha(X^*)$.

Sean $f, g \in X^*$, entonces $L^t(f,g) = (\alpha f + \alpha g, (1-\alpha)f - \alpha g)$. Así, sabemos que:

$$\frac{\|L^t(f,g)\|_{Z^*}^2}{\|(f,g)\|_{Z^*}^2} \leq \|L\|^2 = \alpha C_\alpha(X).$$

Por (3.1.3) tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\frac{\|L^t(f,g)\|_{Z^*}^2}{\|(f,g)\|_{Z^*}^2} &= \frac{\frac{\|\alpha f+\alpha g\|_{X^*}^2}{\alpha} + \frac{\|(1-\alpha)f-\alpha g\|_{X^*}^2}{1-\alpha}}{\frac{\|f\|_{X^*}^2}{\alpha} + \frac{\|g\|_{X^*}^2}{1-\alpha}} \\ &= \frac{\alpha(\alpha(1-\alpha)\|f+g\|_{X^*}^2 + \|(1-\alpha)f-\alpha g\|_{X^*}^2)}{(1-\alpha)\|f\|_{X^*}^2 + \alpha\|g\|_{X^*}^2}.\end{aligned}$$

Así, la desigualdad anterior es válida si y sólo si:

$$\frac{\alpha(1-\alpha)\|f+g\|_{X^*}^2 + \|(1-\alpha)f-\alpha g\|_{X^*}^2}{(1-\alpha)\|f\|_{X^*}^2 + \alpha\|g\|_{X^*}^2} \leq C_\alpha(X).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}C_\alpha(X^*) &= \sup\{\frac{\|\alpha f + (1-\alpha)g\|_{X^*}^2 + \alpha(1-\alpha)\|f-g\|_{X^*}^2}{\alpha\|f\|_{X^*}^2 + (1-\alpha)\|g\|_{X^*}^2} : f, g \in X^*\} \\ &= \sup\{\frac{\|(1-\alpha)f - \alpha g\|_{X^*}^2 + \alpha(1-\alpha)\|f+g\|_{X^*}^2}{(1-\alpha)\|f\|_{X^*}^2 + \alpha\|g\|_{X^*}^2} : f, g \in X^*\},\end{aligned}$$

de aquí que:

$$C_\alpha(X^*) \leq C_\alpha(X).$$

Para demostrar la otra desigualdad, tomemos $(f,g) \in Z^*$ tales que:

$$\frac{\|L^t(f,g)\|_{Z^*}^2}{\|(f,g)\|_{Z^*}^2} > \|L^t\|^2 - \varepsilon\alpha = \alpha C_\alpha(X) - \varepsilon\alpha,$$

esto es:

$$C_\alpha(X) - \varepsilon < \frac{\alpha(1-\alpha)\|f+g\|_{X^*}^2 + \|(1-\alpha)f-\alpha g\|_{X^*}^2}{(1-\alpha)\|f\|_{X^*}^2 + \alpha\|g\|_{X^*}^2} \leq C_\alpha(X^*),$$

por lo que $C_\alpha(X) - \varepsilon < C_\alpha(X^*)$, y ya que ε es arbitrario, concluimos que:

$$C_\alpha(X) \leq C_\alpha(X^*).$$

como se quería probar. #

En lo que sigue, vamos a probar una caracterización de los espacios uniformemente no cuadrados, en base al valor de $C_\alpha(X)$.

Introduciremos nuevas constantes que nos serán útiles para calcular el valor de $C_\alpha(X)$, similares a las que se usan en [YW06].

Sea X un espacio de Banach y $\alpha \in [0,1]$, definamos las siguientes funciones:

$$\gamma_1(\alpha,t) = \sup\left\{\|\alpha x + (1-\alpha)ty\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-ty\|^2 : x,y \in S_X\right\}$$
$$\gamma_2(\alpha,t) = \sup\left\{\|\alpha tx + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|tx-y\|^2 : x,y \in S_X\right\}$$

donde $t \in [0,1]$.

Se sigue inmediatamente que

$$\gamma_1(\alpha,t) = \gamma_2(1-\alpha,t). \tag{3.1.4}$$

Proposición 3.13. *Sean X un espacio de Banach, $\alpha \in [0,1]$. Consideraremos a γ_1 como función de t. Entonces tenemos lo siguiente:*

(1) $\alpha \le \gamma_1(\alpha,t) \le \alpha + (1-\alpha)t^2 + 4\alpha(1-\alpha)$.

(2) $\gamma_1(\alpha,t)$ *es una función convexa.*

(3) $\gamma_1(\alpha,t)$ *es una función no decreciente.*

(4) $\gamma_1(\alpha,t)$ *es una función continua en* $[0,1)$.

(5) $\frac{\gamma_1(\alpha,t)-\alpha}{t}$ *es una función no decreciente en* $(0,1)$.

Demostración. Prueba de (1).

En la definición de $\gamma_1(\alpha,t)$, tomemos $y = x$, entonces:

$$\begin{aligned}\gamma_1(\alpha,t) \ge& \|\alpha x + (1-\alpha)tx\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-tx\|^2\\ =&(\alpha+(1-\alpha)t)^2 + \alpha(1-\alpha)(1-t)^2\\ =&\alpha + (1-\alpha)t^2 \ge \alpha.\end{aligned}$$

Por otro lado, sean $x,y \in S_X$, por la desigualdad del triángulo:

$$\begin{aligned}\|\alpha x + (1-\alpha)ty\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-ty\|^2 \le&(\alpha+(1-\alpha)t)^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t)^2\\ =&\alpha + (1-\alpha)t^2 + 4\alpha(1-\alpha)t\\ \le&1 + 4\alpha(1-\alpha),\end{aligned}$$

y si tomamos el supremo sobre $x,y \in S_X$ y junto con la anterior desigualdad:

$$\alpha \le \alpha + (1-\alpha)t^2 \le \gamma_1(\alpha,t) \le \alpha + (1-\alpha)t^2 + 4\alpha(1-\alpha)t \le 1 + 4\alpha(1-\alpha),$$

para todo $t \in [0,1]$.

Prueba de (2).

Sean $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ y $\beta \in [0,1]$. Considerando que $x = \beta x + (1-\beta)x$ y que la función $h(x) = x^2$ es una función convexa, tenemos que para cualquier $x, y \in S_X$:

$$\begin{aligned}
&\|\alpha x + (1-\alpha)(\beta t_1 + (1-\beta)t_2)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x - (\beta t_1 + (1-\beta)t_2)y\|^2 \\
\leq& (\beta\|\alpha x + (1-\alpha)t_1 y\| + (1-\beta)\|\alpha x + (1-\alpha)t_2 y\|)^2 \\
&+ \alpha(1-\alpha)(\beta\|x - t_1 y\| + (1-\beta)\|x - t_2 y\|)^2 \\
\leq& \beta\|\alpha x + (1-\alpha)t_1 y\|^2 + (1-\beta)\|\alpha x + (1-\alpha)t_2 y\|^2 \\
&+ \alpha(1-\alpha)\left(\beta\|x - t_1 y\|^2 + (1-\beta)\|x - t_2 y\|^2\right) \\
=& \beta(\|\alpha x + (1-\alpha)t_1 y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x - t_1 y\|^2) \\
&+ (1-\beta)(\|\alpha x + (1-\alpha)t_2 y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x - t_2 y\|^2) \\
\leq& \beta\gamma_1(\alpha, t_1) + (1-\beta)\gamma_1(\alpha, t_2).
\end{aligned}$$

Finalmente, al tomar el supremo sobre $x, y \in S_X$:

$$\gamma_1(\alpha, \beta t_1 + (1-\beta)t_2) \leq \beta\gamma_1(\alpha, t_1) + (1-\beta)\gamma_1(\alpha, t_2).$$

Prueba de (3).

Ya que $\gamma_1(\alpha, t)$ es una función convexa, es suficiente probar que $\gamma_1(\alpha, t) \geq \gamma_1(\alpha, 0)$ para cualquier $t \in [0,1]$. Calculemos $\gamma_1(\alpha, 0)$. Para cualquier $x, y \in S_X$:

$$\|\alpha x\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x\|^2 = \alpha = \gamma_1(\alpha, 0)$$

y por el inciso (1), esto queda probado.

Prueba de (4).

Por la convexidad de la función $\gamma_1(\alpha, t)$, tenemos la continuidad en (0,1). Sólo resta probar la continuidad en cero. Ya que $\alpha = \gamma_1(\alpha, 0)$ y por el inciso (1)

$$0 \leq \gamma_1(\alpha, t) - \gamma_1(\alpha, 0) \leq (1-\alpha)t^2 + 4\alpha(1-\alpha)t,$$

de donde

$$\lim_{t \to 0}(\gamma_1(\alpha, t) - \gamma_1(\alpha, 0)) = 0.$$

Por lo tanto, la función es continua también en cero.

Prueba de (5).

Sea $0 < t_1 < t_2 < 1$. Entonces $t_1 = \lambda t_2$, para algún $\lambda \in (0,1)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_1(\alpha, t_1) - \alpha}{t_1} &= \frac{\gamma_1(\alpha, (1-\lambda)0 + \lambda t_2) - \alpha}{\lambda t_2} \\
&\leq \frac{(1-\lambda)\gamma(\alpha, 0) + \lambda\gamma_1(\alpha, t_2) - \alpha}{\lambda t_2} \\
&= \frac{(1-\lambda)\alpha + \lambda\gamma_1(\alpha, t_2) - \alpha}{\lambda t_2} \\
&= \frac{\gamma_1(\alpha, t_2) - \alpha}{t_2}.
\end{aligned}$$

#

Si intercambiamos α por $1-\alpha$ y usamos (3.1.4), tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.14. *Sea X un espacio de Banach,* $\alpha \in [0,1]$. *Entonces:*

(1) $1-\alpha \leq \gamma_2(\alpha,t) \leq 1-\alpha+\alpha t^2+4\alpha(1-\alpha)$.

(2) $\gamma_2(\alpha,t)$ *es una función convexa.*

(3) $\gamma_2(\alpha,t)$ *es una función no decreciente.*

(4) $\gamma_2(\alpha,t)$ *es una función continua en* $[0,1)$.

(5) $\frac{\gamma_2(\alpha,t)-(1-\alpha)}{t}$ *es una función no decreciente en* $(0,1)$.

Además, también tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.15. *Para cualquier* $\alpha \in [0,1]$*:*

$$\gamma_1(\alpha,t) = \sup\left\{\|\alpha x+(1-\alpha)ty\|^2+\alpha(1-\alpha)\|x-ty\|^2 : x \in S_X, y \in B_X\right\},$$

y

$$\gamma_2(\alpha,t) = \sup\left\{\|\alpha tx+(1-\alpha)y\|^2+\alpha(1-\alpha)\|tx-y\|^2 : y \in S_X, x \in B_X\right\}.$$

Demostración. Por definición

$$\gamma_1(\alpha,t) \leq \sup\left\{\|\alpha x+(1-\alpha)ty\|^2+\alpha(1-\alpha)\|x-ty\|^2 : x \in S_X, y \in B_X\right\}.$$

Tomemos $y \in B_X$ fija y $x \in S_X$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\|\alpha x+(1-\alpha)ty\|^2+\alpha(1-\alpha)\|x-ty\|^2\\
=&\|\alpha x+(1-\alpha)t\|y\|\frac{y}{\|y\|}\|^2+\alpha(1-\alpha)\|x-t\|y\|\frac{y}{\|y\|}\|^2\\
\leq&\gamma_1(\alpha,t\|y\|) \leq \gamma_1(\alpha,t),
\end{aligned}$$

pues $\gamma_1(\alpha,t)$ es una función no decreciente.

Cuando tomamos el supremo sobre $y \in B_X$ y $x \in S_X$, tenemos la desigualdad que faltaba. #

Veamos ahora de qué manera se relacionan estas nuevas constantes con $C_\alpha(X)$. Para esto, definamos M como sigue:

$$M = \max\left\{\sup_{t\in[0,1]}\left\{\frac{\gamma_1(\alpha,t)}{\alpha+(1-\alpha)t^2}\right\}, \sup_{t\in[0,1]}\left\{\frac{\gamma_2(\alpha,t)}{\alpha t^2+(1-\alpha)}\right\}\right\}$$

Lema 3.16. *$M = C_\alpha(X)$.*

Demostración. Tomando $t = 0$, como $\frac{\gamma_1(\alpha,0)}{\alpha} = \frac{\gamma_2(\alpha,0)}{1-\alpha} = 1$, concluimos que $M \geq 1$.

Sean $x, y \in S_X$; de la definición de $C_\alpha(X)$ tenemos:

$$\frac{\|\alpha x + (1-\alpha)ty\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x - ty\|^2}{\alpha + (1-\alpha)t^2} \leq C_\alpha(X),$$

y al tomar el supremo sobre $x, y \in S_X$:

$$\frac{\gamma_1(\alpha, t)}{\alpha + (1-\alpha)t^2} \leq C_\alpha(X),$$

y tomando ahora el supremo sobre $t \in [0, 1]$:

$$\sup_{t\in[0,1]} \left\{ \frac{\gamma_1(\alpha, t)}{\alpha + (1-\alpha)t^2} \right\} \leq C_\alpha(X).$$

Con un argumento análogo, se obtiene lo siguiente:

$$\sup_{t\in[0,1]} \left\{ \frac{\gamma_2(\alpha, t)}{\alpha t^2 + (1-\alpha)} \right\} \leq C_\alpha(X),$$

y de ambas desigualdades se tiene que

$$M \leq C_\alpha(X).$$

Tomemos $x, y \in X$ elementos distintos de cero y supongamos que $\|x\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2}{\alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2} &= \frac{\|\alpha \frac{x}{\|x\|} + (1-\alpha)\frac{\|y\|}{\|x\|}\frac{y}{\|y\|}\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{\|y\|}{\|x\|}\frac{y}{\|y\|}\|^2}{\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^2 \|\frac{y}{\|y\|}\|^2} \\
&\leq \frac{\gamma_1(\alpha, \frac{\|y\|}{\|x\|})}{\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^2} \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \left\{ \frac{\gamma_1(\alpha, t)}{\alpha + (1-\alpha)t^2} \right\} \\
&\leq M,
\end{aligned}$$

y si aplicamos un argumento análogo al caso $\|y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$, considerando ahora a la función γ_2 obtenemos la misma desigualdad. Finalmente, si alguno de los elementos x ó y es cero, seguimos teniendo la misma desigualdad ya que $M \geq 1$. Tomando ahora el supremo sobre $x, y \in X$, cuando ambos no son cero simultáneamente, obtenemos la desigualdad que nos faltaba:

$$C_\alpha(X) \leq M.$$

#

En la definición 3.4 se dijo lo que es un espacio uniformemente no cuadrado. Este concepto fue definido originalmente por James como en la definición siguiente y es bien conocido que ambas formulaciones son equivalentes.

Definición 3.17. *Un espacio de Banach X es uniformemente no cuadrado si existe $\varepsilon \in (0,1)$ tal que* $\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \leq 2(1-\varepsilon)$.

Basándonos en esto, introduciremos otra definición equivalente de espacios uniformemente no cuadrados que nos será de mucha utilidad.

Definición 3.18. *Sea $\alpha \in (0,1)$. Diremos que un espacio de Banach X es (α,δ) convexo si para cada $x, y \in S_X$ tenemos al menos alguna de las siguientes desigualdades:*

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq (1-\delta)$$

ó

$$\|x-y\| \leq 2(1-\delta).$$

Observemos que para $\alpha = \frac{1}{2}$ tenemos la definición 3.17.

Lema 3.19. *Sean X un espacio de Banach y $\alpha \in (0,1)$. X es uniformemente no cuadrado si y sólo si existe $1 > \delta > 0$ tal que X es (α,δ) convexo.*

Demostración. Supongamos que X es uniformemente no cuadrado, y sean $x, y \in S_X$. Entonces existe $\varepsilon \in (0,1)$ tal que $\|x-y\| \leq 2(1-\varepsilon)$ ó $\|x+y\| \leq 2(1-\varepsilon)$. Si $\|x-y\| \leq 2(1-\varepsilon)$, no hay nada que probar. Supongamos que $\|x+y\| \leq 2(1-\varepsilon)$. Entonces, si $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$:

$$\begin{aligned}
\|\alpha x + (1-\alpha)y\| =& \alpha\|x + \frac{1-\alpha}{\alpha}y\| \\
=& \alpha\|x + y + (\frac{1-\alpha}{\alpha} - 1)y\| \\
=& \alpha\|x + y + \frac{1-2\alpha}{\alpha}y\| \\
\leq& \alpha\|x+y\| + \alpha\frac{1-2\alpha}{\alpha} \\
\leq& 2\alpha(1-\varepsilon) + 1 - 2\alpha \\
\leq& 1 - 2\alpha\varepsilon.
\end{aligned}$$

Si $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$, ya que $1-\alpha \leq \frac{1}{2}$, se tiene que $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq 1 - 2(1-\alpha)\varepsilon$.

Supongamos ahora que X es (α,δ) convexo para algún $\delta > 0$. Entonces, ya sea $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq (1-\delta)$ ó $\|x-y\| \leq 2(1-\delta)$. Si se tiene la segunda desigualdad, ya no hay nada que probar; supongamos entonces que $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq (1-\delta)$ y que $\|x-y\| > 2(1-\delta)$. Entonces como X es (α,δ) convexo, también se satisface $\|\alpha y + (1-\alpha)x\| \leq 1-\delta$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\|x+y\| =& \|\alpha x + (1-\alpha)y + \alpha y + (1-\alpha)x\| \\
\leq& \|\alpha x + (1-\alpha)y\| + \|\alpha y + (1-\alpha)x\| \\
\leq& 2(1-\delta).
\end{aligned}$$

#

Proposición 3.20. *Sea X un espacio de Banach, $\alpha \in (0,1)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *X no es uniformemente no cuadrado.*

2) *$\gamma_1(\alpha,t) = (\alpha + (1-\alpha)t)^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t)^2$ para todo $t \in [0,1]$.*

3) *$\gamma_1(\alpha,t_0) = (\alpha + (1-\alpha)t_0)^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t_0)^2$ para algún $t_0 \in (0,1]$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2).

Si X no es uniformemente no cuadrado entonces, por el lema 3.19 y la definición 3.18, existen dos sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\} \subset S_X$ tales que: $\lim_{n\to\infty} \|\alpha x_n + (1-\alpha)y_n\| = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 2$. Notemos que:

$$\begin{aligned}\alpha + (1-\alpha)t \geq& \|\alpha x_n + (1-\alpha)ty_n\| \\ =& \|\alpha x_n + (1-\alpha)y_n + (1-\alpha)(t-1)y_n\| \\ \geq& \|\alpha x_n + (1-\alpha)y_n\| - (1-\alpha)(1-t),\end{aligned}$$

consecuentemente

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha x_n + (1-\alpha)ty_n\| = \alpha + (1-\alpha)t.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}1 + t \geq& \|x_n - ty_n\| \\ =& \|x_n - y_n + y_n(1-t)\| \\ \geq& \|x_n - y_n\| - (1-t),\end{aligned}$$

así

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - ty_n\| = 1 + t.$$

Como para $t \in [0,1]$ se tiene que $\gamma_1(\alpha,t) \leq (\alpha + (1-\alpha)t)^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t)^2$, usando lo anteriormente calculado:

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha,t) \geq& \lim_{n\to\infty} (\|\alpha x_n + (1-\alpha)ty_n\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x_n - ty_n\|) \\ =& (\alpha + (1-\alpha)t)^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t)^2 \\ \geq& \gamma(\alpha,t).\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $\gamma_1(\alpha,t) = (\alpha + (1-\alpha)t)^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t)^2$.

2) $\Rightarrow$ 3). Es obvio.

3) $\Rightarrow$ 1). Supongamos que $\gamma_1(\alpha,t_0) = (\alpha + (1-\alpha)t_0)^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t_0)^2$ para algún $t_0 \in (0,1]$ y que X es uniformemente no cuadrado, entonces por el lema 3.19 existe $1 > \delta > 0$ tal que X es (α,δ) convexo. Sean $x, y \in S_X$, entonces tenemos 2 casos.

- Caso 1) $\|x - y\| \leq 2(1-\delta)$.

En este caso tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|\alpha x + (1-\alpha)t_0 y\|^2 + &\alpha(1-\alpha)\|x - t_0 y\|^2 \\
&\leq (\alpha + (1-\alpha)t_0)^2 + \alpha(1-\alpha)\|t_0 x - t_0 y + (1-t_0)x\|^2 \\
&\leq (\alpha + (1-\alpha)t_0)^2 + \alpha(1-\alpha)(t_0\|x-y\| + (1-t_0))^2 \\
&\leq (\alpha + (1-\alpha)t_0)^2 + \alpha(1-\alpha)(2t_0(1-\delta) + (1-t_0))^2 \\
&= (\alpha + (1-\alpha)t_0)^2 + \alpha(1-\alpha)(1 + t_0 - 2\delta t_0)^2 \\
&= (\alpha + (1-\alpha)t_0)^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t_0)^2 - 4\alpha(1-\alpha)\delta t_0(1 + (1-\delta)t_0) \\
&= \gamma_1(\alpha, t_0) - 4\alpha(1-\alpha)\delta t_0(1 + (1-\delta)t_0).
\end{aligned}$$

- Caso 2) $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq 1 - \delta$.

Para este caso, estimemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|\alpha x + (1-\alpha)t_0 y\|^2 + &\alpha(1-\alpha)\|x - t_0 y\|^2 \\
&\leq \|(1-t_0)\alpha x + t_0(\alpha x + (1-\alpha)y)\|^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t_0)^2 \\
&\leq ((1-t_0)\alpha + t_0\|\alpha x + (1-\alpha)y\|)^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t_0)^2 \\
&\leq ((1-t_0)\alpha + t_0(1-\delta))^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t_0)^2 \\
&= (\alpha + (1-\alpha)t_0)^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t_0)^2 - \delta t_0((2-\delta)t_0 + 2\alpha(1-t_0)) \\
&= \gamma_1(\alpha, t_0) - \delta t_0((2-\delta)t_0 + 2\alpha(1-t_0)).
\end{aligned}$$

En ambos casos concluimos que $\gamma_1(\alpha, t_0) < \gamma_1(\alpha, t_0)$, lo cual es una contradicción. Entonces la proposición queda probada. #

De la igualdad (3.1.4) se deduce:

Corolario 3.21. *Sea X un espacio de Banach, $\alpha \in (0,1)$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1) *X no es uniformemente no cuadrado.*

2) *$\gamma_2(\alpha, t) = (\alpha t + (1-\alpha))^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t)^2$ para todo $t \in [0,1]$.*

3) *$\gamma_2(\alpha, t_0) = (\alpha t_0 + (1-\alpha))^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t_0)^2$ para algún $t_0 \in (0,1]$.*

En la siguiente proposición usaremos la siguiente observación:

Observación 3.22. *Por la desigualdad (3.1.1):*

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_1(\alpha, s)}{\alpha + (1-\alpha)s^2} &\leq \frac{(\alpha + (1-\alpha)s)^2 + \alpha(1-\alpha)(1+s)^2}{\alpha + (1-\alpha)s^2} \\
&= f(s) \leq 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)},
\end{aligned}$$

y se da la igualdad si y sólo si $s = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Así, si se da la igualdad se tiene entonces que $\gamma_1(\alpha, \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}) = 2\alpha(1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)})$.

Proposición 3.23. *Sea X un espacio de Banach, $\alpha \in (0,1)$. X no es uniformemente no cuadrado si y sólo si $C_\alpha(X) = 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$.*

Demostración. Ya que $C_\alpha(X) = C_{1-\alpha}(X)$ para cualquier espacio de Banach X, es suficiente probarlo para $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$. Tomemos entonces $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$.

$\Rightarrow$

Si X no es uniformemente no cuadrado entonces por la proposición 3.20 y el corolario 3.21:

$$\gamma_1(\alpha, t) = (\alpha + (1-\alpha)t)^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t)^2$$

y

$$\gamma_2(\alpha, t) = (\alpha t + (1-\alpha))^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t)^2$$

para todo $t \in [0,1]$; así, es fácil ver que:

$$\sup_{t\in[0,1]} \frac{\gamma_1(\alpha,t)}{\alpha + (1-\alpha)t^2} = 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$$

y

$$\sup_{t\in[0,1]} \frac{\gamma_2(\alpha,t)}{\alpha t^2 + (1-\alpha)} = 1 + 4\alpha(1-\alpha),$$

y por el lema 3.16 tenemos que $C_\alpha(X) = 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$.

$\Leftarrow$

Supongamos que $C_\alpha(X) = 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$. Como $1 + 4\alpha(1-\alpha) \leq 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$, tenemos por la observación 3.22 que en este caso $\sup_{t\in[0,1]} \frac{\gamma_1(\alpha,t)}{\alpha+(1-\alpha)t^2} = C_\alpha(X)$.

Entonces existe una sucesión $\{t_n\} \subset [0,1]$ tal que:

$$\lim_n \frac{\gamma_1(\alpha, t_n)}{\alpha + (1-\alpha)t_n^2} = C_\alpha(X) = 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}.$$

Sin perder generalidad, se puede suponer que $\{t_n\}$ es una sucesión convergente y supongamos que converge a $s \in [0,1]$.

Caso 1) $\quad s \in [0,1)$.

Por la proposición 3.13 tenemos la continuidad de $\gamma_1(\alpha, s)$ en $[0,1)$, por lo que:

$$\lim_n \frac{\gamma_1(\alpha, t_n)}{\alpha + (1-\alpha)t_n^2} = \frac{\gamma_1(\alpha, s)}{\alpha + (1-\alpha)s^2} = 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)},$$

y por la observación 3.22, $s = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Como $s \in [0,1)$, entonces este caso no puede aplicarse para $\alpha = \frac{1}{2}$. Así, para $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$:

$$\begin{aligned}\gamma_1\left(\alpha, \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) &= 2\alpha(1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}) \\ &= \left(\alpha + (1-\alpha)\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)^2 + \alpha(1-\alpha)\left(1 + \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)^2,\end{aligned}$$

y por la proposición 3.20 concluimos que X no es uniformemente no cuadrado.

Caso 2) $s = 1$.

Por la observación 3.22 tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\gamma_1(\alpha, t_n)}{\alpha + (1-\alpha)t_n^2} \leq f(t_n),$$

y esto implica:

$$\begin{aligned} 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)} &= \lim_n \frac{\gamma_1(\alpha, t_n)}{\alpha + (1-\alpha)t_n^2} \\ &\leq \lim_n f(t_n) \\ &= f(1) \\ &= 1 + 4\alpha(1-\alpha) \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción si tomamos $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, pues $1+4\alpha(1-\alpha) < 1+2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$.

Entonces la desigualdad sólo es válida para $\alpha = \frac{1}{2}$ y, de hecho, tenemos que $\lim_n \gamma_1(\frac{1}{2}, t_n) = 2$; por lo tanto como la función γ_1 es una función no decreciente y por la observación 3.22, tenemos que $\gamma_1(\frac{1}{2}, t) \leq 2$; así, $\gamma(\frac{1}{2}, 1) = 2$ y por la proposición 3.20 se sigue que X no es uniformemente no cuadrado.

#

Daremos ahora unas consecuencias de esta última proposición.

Como todo espacio uniformemente convexo es uniformemente no cuadrado, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.24. *Sean $\alpha \in (0,1)$ y X un espacio uniformemente convexo. Entonces $C_\alpha(X) < 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$.*

Recordemos la siguiente definición.

Definición 3.25. *Un espacio de Banach Y es* finitamente representable *en X, si para cada subespacio Y_0 de Y de dimensión finita y $\lambda > 1$ existe un isomorfismo $T : Y_0 \to X$ tal que:*

$$\lambda^{-1}||y|| \leq ||Ty|| \leq \lambda||y||$$

para todo $y \in Y_0$.

Definición 3.26. *Diremos que un espacio de Banach X es* superreflexivo *si cualquier espacio Y que es finitamente representable en X es reflexivo.*

En particular, si un espacio de Banach es superreflexivo entonces el espacio mismo es reflexivo. La siguiente caracterización se puede encontrar en [GK90, pág. 57]:

Teorema (James, Enflo)**.** *Para cualquier espacio de Banach X, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- *X es superreflexivo.*

- *X tiene una norma equivalente con el que el espacio es uniformemente no cuadrado.*
- *X tiene una norma equivalente con el cual es uniformemente convexo.*

Como se sabe que todo espacio uniformemente no cuadrado es superreflexivo, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.27. *Sea $\alpha \in (0,1)$. Si $C_\alpha(X) < 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$ entonces X es superreflexivo.*

Por último definamos lo siguiente:

Definición 3.28. *Sea X un espacio de Banach y $\alpha \in (0,1)$. Definamos*

$$\widetilde{C}_\alpha(X) = \inf\{C_\alpha(X, \|\cdot\|_e) : \|\cdot\|_e \quad \textit{es equivalente a} \quad \|\cdot\|_X\}$$

Entonces tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.29. *Sea X un espacio de Banach y $\alpha \in (0,1)$. X es superreflexivo si y sólo si $\widetilde{C}_\alpha(X) < 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$.*

Demostración. Supongamos que X es superreflexivo, por el teorema de James-Enflo, entonces existe una norma equivalente $\|\cdot\|_e$ en X con la cual el espacio resulta ser uniformemente convexo, por lo tanto $C_\alpha(X, \|\cdot\|_e) < 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$, y así, $\widetilde{C}_\alpha(X) < 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$.

Supongamos ahora que $\widetilde{C}_\alpha(X) < 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$. Entonces existe una norma equivalente en $\|\cdot\|_e$ tal que $C_\alpha(X, \|\cdot\|_e) < 1+2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$ y por lo tanto el espacio $(X, \|\cdot\|_e)$ es uniformemente no cuadrado y, por el teorema de James-Enflo, X es superreflexivo. #

Una aplicación a la teoría de punto fijo

Como vimos al principio de este capítulo en el corolario 3.2, se puede hallar una estimación de $\gamma_2^X(0)$ con $\gamma_2^X(0) > 2$ para ciertos espacios de Banach X, cuyo valor $C_{NJ}(X)$ sea cercano a 1. En esta parte, veremos que se puede hallar también una estimación de $\gamma_3^X(0) > 1.3821$, que es el mejor valor que se tiene para espacios de Banach en general ([GP05]).

Proposición 3.30. *Sea X un espacio de Banach y $\alpha = 0.346$. Si $1 \leq C_\alpha(X) < 1.139$ entonces X tiene la propiedad de punto fijo para las funciones $(0,3)$-rotativas y además para estos espacios de Banach X, se tiene que $\gamma_3^X(0) > 1.3821$.*

Demostración. Tomemos X un espacio de Banach, C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de X y $T : C \to C, T \in \mathscr{L}(k), T^3 = Id$. Dado $x \in C$, definamos los siguientes elementos de C:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x \in C, \\
x_1 &= \alpha x_0 + (1-\alpha)Tx_0, \\
x_2 &= \alpha x_0 + (1-\alpha)Tx_1.
\end{aligned}$$

Recordemos que en el segundo método de la sección 2.2.2, para el caso $n = 3$ y cuando X es un espacio de Hilbert, tomamos estos mismos elementos, y tomando $\alpha = 0.346$, obtuvimos el mejor valor de k, que resulta ser menor que 1.4441, para que T tenga puntos fijos. Por esa razón, usaremos ese mismo valor de α para que en el caso en que X sea un espacio de Hilbert, esta cota de k coincida.

Por la definición de $C_\alpha(X)$ deducimos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|x_2 - Tx_2\|^2 =&\|\alpha(x_0 - Tx_2) + (1-\alpha)(Tx_1 - Tx_2)\|^2 \\
\leq& C_\alpha(X)\left(\alpha\|x_0 - Tx_2\|^2 + (1-\alpha)\|Tx_1 - Tx_2\|^2\right) - \alpha(1-\alpha)\|x_0 - Tx_1\|^2 \\
\leq& C_\alpha(X)\left(\alpha k^2\|T^2x_0 - x_2\|^2 + (1-\alpha)k^2\|x_1 - x_2\|^2\right) - \alpha(1-\alpha)\|x_0 - Tx_1\|^2 \\
\leq& C_\alpha(X)(\alpha k^2\|\alpha(x_0 - T^2x_0) + (1-\alpha)(Tx_1 - T^2x_0)\|^2 \\
&+ (1-\alpha)^5k^4\|x_0 - Tx_0\|^2) - \alpha(1-\alpha)\|x_0 - Tx_1\|^2.
\end{aligned}$$

Análogamente, tenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
&\|\alpha(x_0 - T^2x_0) + (1-\alpha)(Tx_1 - T^2x_0)\|^2 \\
&\leq C_\alpha(X)(\alpha\|x_0 - T^2x_0\|^2 + (1-\alpha)\|Tx_1 - T^2x_0\|^2) - \alpha(1-\alpha)\|x_0 - Tx_1\|^2 \\
&\leq C_\alpha(X)(\alpha k^4\|Tx_0 - x_0\|^2 + (1-\alpha)k^2\alpha^2\|x_0 - Tx_0\|^2) - \alpha(1-\alpha)\|x_0 - Tx_1\|^2,
\end{aligned}$$

que junto con la anterior desigualdad nos da:

$$\begin{aligned}
\|x_2 - Tx_2\|^2 \leq& \alpha^2k^6C_\alpha(X)^2\|x_0 - Tx_0\|^2 + \alpha^3(1-\alpha)k^4C_\alpha(X)^2\|x_0 - Tx_0\|^2 \\
&+ (1-\alpha)^5k^4C_\alpha(X)\|x_0 - Tx_0\|^2 - \alpha(1-\alpha)[\alpha k^2C_\alpha(X) + 1]\|x_0 - Tx_1\|^2.
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Ahora consideremos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
\|x_1 - Tx_1\|^2 =&\|\alpha(x_0 - Tx_1) + (1-\alpha)(Tx_0 - Tx_1)\|^2 \\
\leq& \alpha C_\alpha(X)\|x_0 - Tx_1\|^2 + (1-\alpha)^3k^2C_\alpha(X)\|x_0 - Tx_0\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x_0 - Tx_0\|^2.
\end{aligned}$$

Como en el segundo método de la sección 2.2.2, supongamos que para algún ε se tiene que $\|x_1 - Tx_1\|^2 \geq (1-\varepsilon)\|x_0 - Tx_0\|^2$, tenemos entonces que:

$$-\alpha\|x_0 - Tx_1\|^2 \leq \frac{-(1-\varepsilon) + (1-\alpha)^3k^2C_\alpha(X) - \alpha(1-\alpha)}{C_\alpha(X)}\|x_0 - Tx_0\|^2.$$

De esta y de la desigualdad (3.1.5) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\|x_2 - Tx_2\|^2 \leq& [\alpha^2k^6C_\alpha(X)^2 + \alpha^3(1-\alpha)k^4C_\alpha(X)^2 + (1-\alpha)^5k^4C_\alpha(X) \\
&+ \alpha(1-\alpha)k^2(-(1-\varepsilon) + (1-\alpha)^3k^2C_\alpha(X) - \alpha(1-\alpha)) \\
&+ \frac{1-\alpha}{C_\alpha(X)}(-(1-\varepsilon) + (1-\alpha)^3k^2C_\alpha(X) - \alpha(1-\alpha))]\|x_0 - Tx_0\|^2.
\end{aligned}$$

Usando un argumento similar a ese segundo método concluimos que T tiene punto fijo cuando:

$$\begin{aligned}\alpha^2k^6C_\alpha(X)^2+\alpha^3(1-\alpha)k^4C_\alpha(X)^2+(1-\alpha)^5k^4C_\alpha(X)\\ -\alpha(1-\alpha)k^2+\alpha(1-\alpha)^4k^4C_\alpha(X)-\alpha^2(1-\alpha)^2k^2\\ -\frac{1-\alpha}{C_\alpha(X)}+(1-\alpha)^4k^2-\frac{\alpha(1-\alpha)^2}{C_\alpha(X)}<1.\end{aligned}$$

Finalmente, tomemos α =0.346. Si X es un espacio de Banach tal que $1\le C_\alpha(X)<1.139$, la desigualdad anterior se satisface para $k<k_0(X)$, donde $k_0(X)>1.3821$, es decir, para estos espacios X se tiene que $\gamma_3^X(0)\ge k_0(X)>1.3821$.

Por ejemplo, cuando $X=H$ es un espacio de Hilbert, $C_\alpha(H)=1$ y se tiene en particular que $\gamma_3^H(0)\ge k_0(H)\approx 1.4441>1.3821$, misma cota encontrada en el segundo método de la sección 2.2.2.

#

Desafortunadamente, ya que hemos usado un argumento análogo al segundo método, no podemos asegurar que el conjunto de puntos fijos en este caso es un retracto del dominio.

Para terminar, calcularemos el valor exacto de $C_\alpha(X)$ para ciertos espacios X y también daremos estimaciones de $C_\alpha(X)$ para otros espacios.

Ejemplos

Para espacios de Hilbert H, vimos que $C_\alpha(H)=1$ para cualquier $\alpha\in(0,1)$ y que $C_\alpha(X)=1+2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$ para los espacios X que no son uniformemente no cuadrados.

En la figura 3.1 podemos ver la gráfica de la función $C_\alpha(X)=1+2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$, como función de α, para los espacios X que no son uniformemente no cuadrados.

Con esto se puede establecer la siguiente conjetura para espacios uniformemente no cuadrados:

Conjetura 3.31. *Para todo espacio de Banach X, $C_\alpha(X)$ es una función continua, como función de α.*

En esta dirección, tenemos el siguiente ejemplo en el espacio $\mathbb{R}^2$:

Ejemplo 3.32. *Tomemos el espacio $X=\ell_2-\ell_1$ como $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|\cdot\|_{2,1}$ definida por:*

$$\|(a,b)\|_{2,1}=\begin{cases}\|(a,b)\|_2 & si \quad ab\ge 0\\ \|(a,b)\|_1 & si \quad ab\le 0.\end{cases}$$

Entonces $C_\alpha(\ell_2-\ell_1)=1+\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$.

Gráficamente la esfera unitaria de este espacio es el de la figura 3.2. Notemos primero que el conjunto de los puntos extremos de la bola en este espacio es el conjunto $\mathcal{E}(B_X)=\{(a,b):a^2+b^2=1,ab\ge 0\}$. Por el teorema de Krein-Milman podemos afirmar que

$$\gamma_1(\alpha,t)=\sup\{\|\alpha x+(1-\alpha)ty\|^2+\alpha(1-\alpha)\|x-ty\|^2 : x,y\in\mathcal{E}(B_X)\},$$

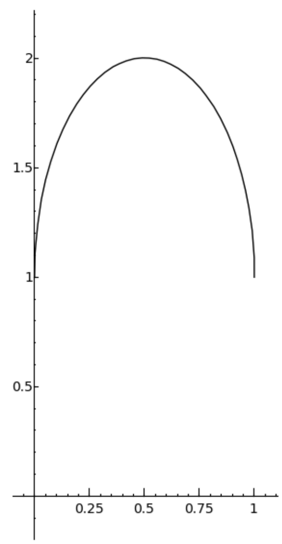

Figura 3.1: Gráfica de $C_\alpha(X)$

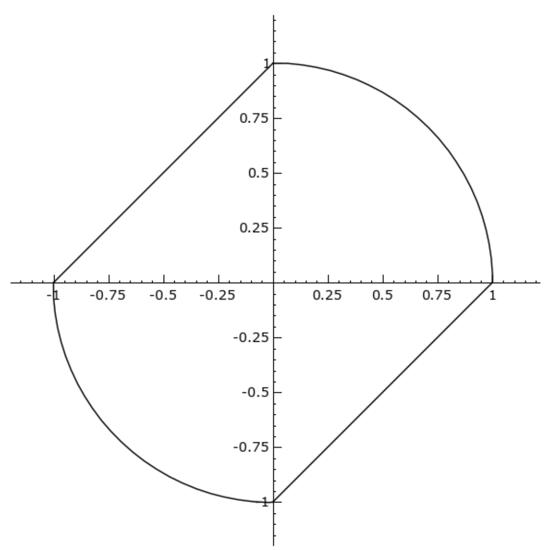

Figura 3.2: Gráfica de la esfera unitaria en $\ell_2 - \ell_1$

y análogamente para $\gamma_2(\alpha, t)$.

Sean a, b, c, d *números no negativos, tales que* $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ *y sea* $t \in [0, 1]$.

Primero tomaremos $x = (a, b)$ *y* $y = (c, d)$. *Es claro que* $\|\alpha x + (1 - \alpha)ty\|_{2,1} = \|\alpha x + (1 - \alpha)ty\|_2$. *Si* $\|x - ty\|_{2,1} = \|x - ty\|_2$, *tendríamos que*

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)ty\|_{2,1}^2 + \alpha(1 - \alpha)\|x - ty\|_{2,1}^2 = \alpha + (1 - \alpha)t^2.$$

Supongamos ahora que $\|x - ty\|_{2,1} = \|x - ty\|_1$, *tendríamos entonces:*

$$\begin{aligned}\|\alpha x + (1 - \alpha)ty\|_{2,1}^2 &+ \alpha(1 - \alpha)\|x - ty\|_{2,1}^2 \\ &= \alpha + (1 - \alpha)t^2 + 2\alpha(1 - \alpha)((ad + cb)t - ab - t^2cd) \\ &\leq \alpha + (1 - \alpha)t^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t\end{aligned}$$

porque $ad + cb \leq 1$.

Si ahora tomamos $x = (a, b)$ *y* $y = (-c, -d)$, *con un razonamiento análogo llegamos a que, si* $\|\alpha x + (1 - \alpha)ty\|_{2,1} = \|\alpha x + (1 - \alpha)ty\|_1$:

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)ty\|_{2,1}^2 + \alpha(1 - \alpha)\|x - ty\|_{2,1}^2 \leq \alpha + (1 - \alpha)t^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t.$$

De ambos casos, concluimos que $\gamma_1(\alpha, t) \leq \alpha + (1 - \alpha)t^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t$. *De hecho, se da la igualdad: basta tomar* $x = (1, 0), y = (0, 1)$. *Por lo tanto tenemos* $\gamma_1(\alpha, t) = \alpha + (1 - \alpha)t^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t$, *y* $\gamma_2(\alpha, t) = (1 - \alpha) + \alpha t^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t$.

Para simplificar tomemos $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. *Entonces se puede probar que* $\sup_{t\in[0,1]} \{\frac{\gamma_1(\alpha,t)}{\alpha+(1-\alpha)t^2}\} = 1 + \sqrt{\alpha(1 - \alpha)}$, *mientras que* $\sup_{t\in[0,1]} \{\frac{\gamma_2(\alpha,t)}{1-\alpha+\alpha t^2}\} = 1 + 2\alpha(1 - \alpha)$.

Finalmente, $C_\alpha(\ell_2 - \ell_1) = \max\{1 + \sqrt{\alpha(1 - \alpha)}, 1 + 2\alpha(1 - \alpha)\} = 1 + \sqrt{\alpha(1 - \alpha)}$, *como se quería probar.*

La figura 3.3 muestra la gráfica de $C_\alpha(X)$, cuando X es el espacio dado en el ejemplo anterior.

Lo siguiente que vamos a hacer es dar estimaciones de $C_\alpha(X)$, para ciertos espacios de Banach X. Antes de esto, daremos el siguiente lema que nos será útil para los siguientes dos ejemplos.

Lema 3.33. *Sea* H *un espacio de Hilbert con norma* $\|\cdot\|_2$ *y* $X = (H, |\cdot|)$ *el mismo espacio pero con una norma equivalente, esto es, existen* $a, b > 0$ *tales que para cualquier* $x \in H$:

$$a|x| \leq \|x\|_2 \leq b|x|.$$

Entonces $C_\alpha(X) \leq \frac{b^2}{a^2}$.

Demostración. Sean $x, y \in S_H$, H con norma $|\cdot|$, y $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}|\alpha x + (1 - \alpha)ty|^2 + \alpha(1 - \alpha)|x - ty|^2 &\leq \frac{1}{a^2}\|\alpha x + (1 - \alpha)ty\|_2^2 + \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|_2^2 \\ &= \frac{1}{a^2}(\alpha\|x\|_2^2 + (1 - \alpha)t^2\|y\|_2^2) \\ &\leq \frac{b^2}{a^2}((\alpha|x|^2 + (1 - \alpha)t^2|y|^2)) \\ &= \frac{b^2}{a^2}(\alpha + (1 - \alpha)t^2).\end{aligned}$$

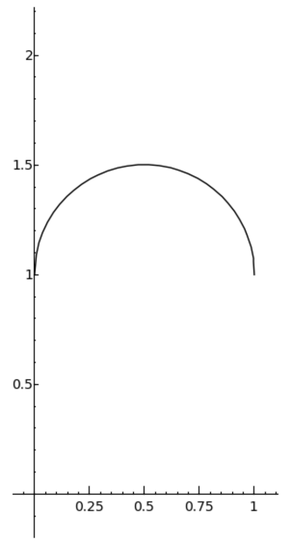

Figura 3.3: Gráfica de $C_\alpha(\ell_2 - \ell_1)$

Si tomamos el supremo sobre $x, y \in S_H$ se deduce que $\frac{\gamma_1(\alpha,t)}{\alpha+(1-\alpha)t^2} \leq \frac{b^2}{a^2}$. Intercambiando α por $(1-\alpha)$, obtenemos $\frac{\gamma_2(\alpha,t)}{(1-\alpha)+\alpha t^2} \leq \frac{b^2}{a^2}$. Ahora tomando el supremo sobre t, concluimos que $C_\alpha(H, |\cdot|) \leq \frac{b^2}{a^2}$. #

Entonces tenemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.34. *Consideremos al espacio $X = \ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ con $p \geq 1$. Sabemos que todas las normas en R^n son equivalentes, en particular, la norma $\| \quad \|_p$ es equivalente a la norma $\| \quad \|_2$. Se sabe que si $1 < p < r \leq \infty$ entonces $\|x\|_r \leq \|x\|_p$, de aquí, si $r \geq 2$, $\|x\|_r \leq \|x\|_2$.*

Usando la desigualdad de Hölder: si $p > 1$ y q es su conjugado, entonces para cualesquiera $a_k, b_k \geq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.1.6}$$

con $a_k = c_k^2, b_k = 1$ y $r = 2p$, como $\frac{1}{q} = \frac{r-2}{r}$, se deduce que:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^r\right)^{\frac{1}{r}} n^{\frac{r-2}{2r}}.$$

Por lo tanto, para cualquier $x \in X$

$$\|x\|_r \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{r-2}{2r}} \|x\|_r,$$

y del lema anterior, se tiene que $C_\alpha(X) \leq n^{\frac{r-2}{r}} = n^{\frac{2}{s}-1}$*, donde* $s \leq 2$ *es el conjugado de* r.

En el caso $n = 2$ *tenemos:*

$$C_\alpha(\ell_r^2) \leq 2^{\frac{2}{s}-1} = C_{\frac{1}{2}}(\ell_r^2)$$

pues $\min\{r, s\} = s$*. Finalmente, ya que* $C_\alpha(X) = C_\alpha(X^*)$ *deducimos lo siguiente:*

Si $r > 1$ *y* $\alpha \leq [0, \frac{1}{2}]$ *entonces*

$$C_\alpha(\ell_r^2) \leq 2^{\frac{2}{r'}-1} = C_{\frac{1}{2}}(\ell_r^2)$$

donde $r' = \min\{r, s\}$ *y* s *es el conjugado de* r.

Ejemplo 3.35. *Sea* $Z_\lambda = (\mathbb{R}^2, |\cdot|_\lambda)$ *donde* $|x|_\lambda^2 = \|x\|_2^2 + \lambda\|x\|_\infty^2$ *para cualquier* x*. Sabemos que* $\|\ \ \|_2$ *y* $|\ \ |_\lambda$ *son normas equivalentes:*

$$\sqrt{\frac{\lambda+2}{2}}\|x\|_2 \leq |x|_\lambda \leq \sqrt{\lambda+1}\|x\|_2.$$

Tomemos $|x|_\lambda = 1$ *y* $|y|_\lambda = t$ *con* $t \in [0, 1]$*:*

$$\begin{aligned}
|\alpha x + (1-\alpha y)|_\lambda^2 + \alpha(1-\alpha)|x-y|_\lambda^2 &\leq (\lambda+1)[\|\alpha x + (1-\alpha)y\|_2^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|_2^2] \\
&= (\lambda+1)[\alpha\|x\|_2^2 + (1-\alpha)\|y\|_2^2] \\
&\leq \frac{2(\lambda+1)}{\lambda+2}[\alpha|x|_\lambda^2 + (1-\alpha)|y|_\lambda^2] \\
&= \frac{2(\lambda+1)}{\lambda+2}[\alpha + (1-\alpha)t^2]
\end{aligned}$$

de aquí:

$$\gamma_1(\alpha, t) \leq \frac{2(\lambda+1)}{\lambda+2}[\alpha + (1-\alpha)t^2]$$

en consecuencia:

$$\sup_t \frac{\gamma_1(\alpha, t)}{\alpha + (1-\alpha)t^2} \leq \frac{2(\lambda+1)}{\lambda+2}.$$

Análogamente:

$$\sup_t \frac{\gamma_2(\alpha, t)}{\alpha + (1-\alpha)t^2} \leq \frac{2(\lambda+1)}{\lambda+2}$$

por lo que,

$$C_\alpha(Z_\lambda) \leq \frac{2(\lambda+1)}{\lambda+2}.$$

Sea $a > 0$*, tomando* $x = (a, a), y = (a, -a)$ *se deduce que:*

$$1 + \frac{\lambda}{\lambda+2}4\alpha(1-\alpha) \leq C_\alpha(Z_\lambda) \leq 1 + \frac{\lambda}{\lambda+2}.$$

En particular, si $\alpha = \frac{1}{2}$ *se obtiene* $C_{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\lambda}{\lambda+2}$*. Entonces tenemos* $C_\alpha(Z_\lambda) \leq C_{\frac{1}{2}}(Z_\lambda)$.

Con los ejemplos vistos, se podría uno hacer la pregunta si siempre se da el caso que $C_\alpha(X) \leq C_{NJ}(X)$, para todo espacio de Banach X. Sin embargo, tenemos el siguiente ejemplo que muestra que esto en general no es cierto. El ejemplo es en el espacio $\mathbb{R}^2$, y para hallar el valor exacto de C_α, usaremos otra vez el teorema de Krein-Milman.

Ejemplo 3.36. *Sea $X = \ell_\infty - \ell_1 = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\infty-1})$, donde la norma está dada por:*

$$\|x\|_{\infty-1} = \begin{cases} \|x\|_\infty & si \quad x_1x_2 \geq 0 \\ \|x\|_1 & si \quad x_1x_2 \leq 0 \end{cases}$$

donde $x = (x_1, x_2) \in X$. Si $1 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, entonces $C_\alpha(X) = 1 + \frac{-\alpha+\sqrt{4\alpha-3\alpha^2}}{2}$ y el máximo es $C_{\frac{1}{3}}(X) = \frac{4}{3}$.

Demostración. La esfera unitaria de este espacio es el de la figura 3.4. Tomemos $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$. Usando el teorema de Krein-Milmam, podemos ver que el conjunto de puntos extremos de la bola unitaria consta de solamente 6 puntos. Con estos puntos, podemos calcular el valor de $\gamma_1(\alpha, t)$:

$$\gamma_1(\alpha, t) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)^2t^2 + 2\alpha(1-\alpha) & 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)t^2 + 2\alpha(1-\alpha) & \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

y calculando el siguiente supremo obtenemos:

$$\sup_{t\in[0,1]} \gamma_1(\alpha, t) = 1 + \frac{-\alpha + \sqrt{4\alpha - 3\alpha^2}}{2}.$$

También tenemos que:

$$\gamma_2(\alpha, t) = (1-\alpha)^2 + \alpha(1-\alpha)(1+t)^2,$$

de donde:

$$\sup_{t\in[0,1]} \gamma_2(\alpha, t) = \begin{cases} 1 + 2\alpha - 3\alpha^2 & \text{si} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3} \\ 1 + \frac{-\alpha+\sqrt{4\alpha-3\alpha^2}}{2} & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

De estas igualdades, obtenemos que $C_\alpha(X) = 1 + \frac{-\alpha+\sqrt{4\alpha-3\alpha^2}}{2}$. #

La gráfica de la función $C_\alpha(X)$ se puede ver en la figura 3.5. Podemos ver que para todo $\alpha \in [0, 1]$, se tiene que $C_\alpha(X) \leq C_{\frac{1}{3}}(X) = \frac{4}{3}$. En particular se tiene que $C_{\frac{1}{2}}(X) = \frac{3+\sqrt{5}}{4} < \frac{4}{3} = C_{\frac{1}{3}}(X)$.

Por último, aunque no tenemos el valor exacto de C_α para los espacios ℓ_p, sí podemos afirmar lo siguiente:

Proposición 3.37. *Consideremos los espacios $X_p = \ell_p^n$ con $p \geq 1$. Sea $1 \leq s \leq r < \infty$, entonces para cada $\alpha \in [0, 1]$:*

$$|C_\alpha(X_s) - C_\alpha(X_r)| \leq 2[n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} - 1].$$

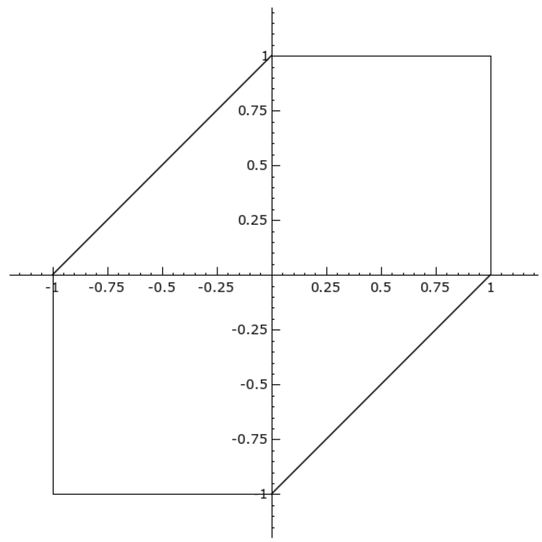

Figura 3.4: Gráfica de la esfera unitaria en $\ell_\infty - \ell_1$

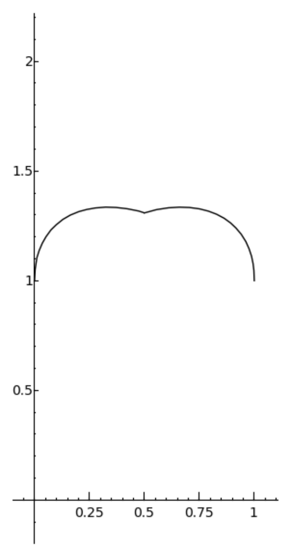

Figura 3.5: Gráfica de $C_\alpha(\ell_\infty - \ell_1)$

Demostración. Si tomamos $a_k = c_k^s, b_k = 1$ en la desigualdad de Hölder 3.1.6 obtenemos:

$$\left(\sum c_k^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum c_k^{sp}\right)^{\frac{1}{sp}} n^{\frac{1}{qs}}.$$

Haciendo $r = sp$ se sigue que $\frac{1}{qs} = \frac{1}{s} - \frac{1}{r}$, así, para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_s \leq n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \|x\|_r.$$

Para $1 \leq s \leq r$ dado, escogemos $p \geq 1$ tal que $r = sp$ y tenemos la anterior desigualdad. Entonces, por las propiedades de los espacios ℓ_p tenemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_r \leq \|x\|_s \leq n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \|x\|_r.$$

Tomemos $\alpha \in [0, 1], x, y \in S_{X_r}, t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}\|\alpha x + (1-\alpha)ty\|_r^2 + \alpha(1-\alpha)\|x - ty\|_r^2 \leq & \|\alpha x + (1-\alpha)ty\|_s^2 + \alpha(1-\alpha)\|x - ty\|_s^2 \\ \leq & C_\alpha(X_s)(\alpha\|x\|_s^2 + (1-\alpha)t^2\|y\|_s^2) \\ \leq & n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} C_\alpha(X_s)(\alpha + (1-\alpha)t^2),\end{aligned}$$

de aquí, $\frac{\gamma_1(\alpha,t)}{\alpha+(1-\alpha)t^2} \leq n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} C_\alpha(X_s)$. Intercambiando α con $(1-\alpha)$, tomando el supremo sobre t y luego tomando el máximo, se puede deducir que:

$$C_\alpha(X_r) \leq n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} C_\alpha(X_s).$$

Ahora, tomando $x, y \in S_{X_s}$ y siguiendo un proceso similar:

$$C_\alpha(X_s) \leq n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} C_\alpha(X_r).$$

Recordemos que para cualquier X y $\alpha \in [0, 1]$, $C_\alpha(X) \leq 1 + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)} \leq 2$. De esto y de las últimas dos desigualdades:

$$C_\alpha(X_r) - C_\alpha(X_s) \leq [n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} - 1]C_\alpha(X_s) \leq 2[n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} - 1],$$

y del mismo modo:

$$C_\alpha(X_s) - C_\alpha(X_r) \leq [n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} - 1]C_\alpha(X_r) \leq 2[n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} - 1],$$

concluimos finalmente que:

$$|C_\alpha(X_s) - C_\alpha(X_r)| \leq 2[n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} - 1],$$

como queríamos. #

Para finalizar, establezcamos algunas preguntas abiertas:

1. Para cualquier espacio de Banach X, ¿es $C_\alpha(X)$ una función continua, como función de α?.

2. ¿ Cuál es el valor exacto de $C_\alpha(\ell_p)$, para los espacios ℓ_p?.

Apéndice A

Detalles de algunas demostraciones

Demostración de la proposición 2.27. Vamos a dar los detalles de los cálculos realizados para la demostración de esta proposición.

Cabe mencionar que se usaron los programas SAGE [SAG08] y Octave [Oct07].

- El caso $H(k, a, z) \geq 0$ y $J(k, a, z) \geq 0$.

Aquí queremos hallar $a \in [0, 1]$ y $z \in [0, a]$ tales que la ecuación

$$G(k, a, z) + k^2 H(k, a, z) + k^4 J(k, a, z) - 1 = 0 \tag{A.0.1}$$

tenga la máxima solución en k.

Vamos a suponer que la función k está bien definida en la región:

$$D_1 = \{(a, z) \in D : H(k, a, z) \geq 0\} \cap \{(a, z) \in D : J(k, a, z) \geq 0\}$$

y que es continua, por lo tanto, D_1 es un compacto y la función k alcanza su máximo ya sea en los puntos críticos o en la frontera del conjunto D_1. Para hallar dichos puntos críticos, necesitamos hallar las derivadas parciales de k con respecto a a y a z.

En principio la ecuación que define implícitamente a k es:

$$\begin{gathered}[k^6 - k^4 + 2k^2 + 1]z^2 + [-2(1-a)k^6 + ak^4 + (2-5a)k^2 - a]z \\ +[a(1-a)k^6 + (1-a)(1-2a)k^4 - a(1-2a)k^2] - 1 = 0,\end{gathered}$$

y necesitamos resolver el sistema

$$\frac{\partial k}{\partial a}(a, z) = 2k^6 z + k^4 z - 5k^2 z - z - 2ak^6 + k^6 + 4ak^4 - 3k^4 + 4ak^2 - k^2 = 0$$

y

$$\frac{\partial k}{\partial z}(a, z) = 2k^6 z - 2k^4 z + 4k^2 z + 2z + 2ak^6 - 2k^6 + ak^4 - 5ak^2 + 2k^2 - a = 0.$$

Al despejar la variable a de cada una de las ecuaciones se obtiene:

$$a = \frac{(2k^6 + k^4 - 5k^2 - 1)z + k^6 - 3k^4 - k^2}{2k^6 - 4k^4 - 4k^2}$$

y

$$a = \frac{-(2k^6 - 2k^4 + 4k^2 + 2)z + 2k^6 - 2k^2}{2k^6 + k^4 - 5k^2 - 1}.$$

Luego de igualar el lado derecho de ambas ecuaciones y de despejar z obtenemos:

$$z = z_0(k) = \frac{2k^8 - 5k^6 + k^4 - k^2}{8k^8 - 16k^6 - 3k^4 + k^2 + 1},$$

y con esto se tiene

$$a = a_0(k) = \frac{6k^8 - 12k^6}{8k^8 - 16k^6 - 3k^4 + k^2 + 1}.$$

Cuando substituimos estos valores en la ecuación inicial y la simplificamos con el software SAGE, se obtiene la ecuación:

$$\frac{k^{14} - 2k^{12} - 9k^8 + 18k^6 + 3k^4 - k^2 - 1}{8k^8 - 16k^6 - 3k^4 + k^2 + 1} = 0,$$

por lo que resta resolver la ecuación

$$k^{14} - 2k^{12} - 9k^8 + 18k^6 + 3k^4 - k^2 - 1 = 0.$$

Esta ecuación tiene sólo una solución real positiva, las raíces se obtuvieron con el software Octave, esta solución es $k_0 = 0.63296712$, y se puede ver que:

$$a_0(k_0) = -6.41238619$$

y

$$z_0(k_0) = -5.30075512,$$

con esto se ve que esta única solución no se encuentra en el dominio D_1 de la función k. Entonces el máximo de k se encuentra en la frontera.

Como ya se vio, la frontera es

$$\begin{aligned}\partial D_1 = &\{(0,0),(1,0),(1,1)\} \cup \left\{(a,z) : 0 < a \leq \frac{k^2}{2k^2+1}, z = 0, r_1(a)\right\}\\ &\cup \left\{(a,z) : \frac{k^2}{2k^2+1} < a < \frac{k^2+1}{2k^2+1}, z = \xi_1(a), r_1(a)\right\}\\ &\cup \left\{(a,z) : \frac{k^2+1}{2k^2+1} \leq a \leq \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}, z = \xi_1(a), r_1(a), r_2(a), a\right\}\\ &\cup \left\{(a,z) : \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1} < a < 1, z = \xi_1(a), a\right\},\end{aligned}$$

donde $\xi_1(a) < \xi_2(a)$ cumplen que

$$H(k, a, \xi_1(a)) = H(k, a, \xi_2(a)) = 0,$$

y $r_1(a) \leq r_2(a)$ son tales que

$$J(k, a, r_1(a)) = J(k, a, r_2(a)) = 0.$$

Al evaluar cada uno de los puntos $(0, 0), (1, 0)$ y $(1, 1)$ en la ecuación (A.0.1) y resolverla, nos da la solución positiva $k = 1$, por lo que estos puntos de la frontera no nos interesan.

Entonces tomemos los puntos del conjunto $\left\{(a, z) : 0 < a \leq \frac{k^2}{2k^2+1}, z = 0\right\}$.

Al evaluar $z = 0$ de la misma ecuación (A.0.1) obtenemos la ecuación:

$$(-k^6 + 2k^4 + 2k^2)a^2 + (k^6 - 3k^4 - k^2)a + k^4 - 1 = 0, \tag{A.0.2}$$

el cual también define a k como función implícita de a. Ya que también queremos hallar el máximo de k como función de a, calculemos la derivada parcial de (A.0.2) con respecto a a:

$$2(-k^6 + 2k^4 + 2k^2)a + (k^6 - 3k^4 - k^2) = 0.$$

Al despejar la variable a de la ecuación anterior nos resulta:

$$a(k) = \frac{-(k^6 - 3k^4 - k^2)}{2(-k^6 + 2k^4 + 2k^2)} \tag{A.0.3}$$

y al sustituirla en (A.0.2) y simplificarla con SAGE nos queda:

$$\frac{(k^4 - k^2 - 1)(k^6 - k^4 - k^2 - 8)}{4(k^4 - 2k^2 - 2)} = 0.$$

Las soluciones positivas de la anterior ecuación son $k_1 = 1.607651697614671\ldots$, aunque al considerar $a(k)$ de (A.0.3) resulta que $a(k_1) > 2$; la otra solución es $k_2 = 1.272019649514068\ldots$ y aunque $0 < a(k_2) < 1$ este valor es menor a la cota que estamos buscando, $k \geq 1.5549\ldots$.

Evaluemos también en la frontera de este subconjunto, es decir, en los puntos (a, z), con $a = \frac{k^2}{2k^2+1}$ y $z = 0$.

Al hacer dichas substituciones en (A.0.1) y al simplificarla, nos queda la ecuación equivalente:

$$k^{10} + k^8 + k^6 - 4k^4 - 4k^2 - 1 = 0$$

y cuya única solución positiva es $k = 1.224312504085254\ldots$, que es menor a $k = 1.5549\ldots$.

Continuando con el estudio en la frontera, ahora tomemos los puntos del conjunto $\left\{(a, z) : 0 < a \leq \frac{k^2}{2k^2+1}, z = r_1(a)\right\}$.

Hay que notar que

$$r_1(a) = \frac{(1-a)(2k^2+1) - \sqrt{(1-a)[(1-a)(2k^2+1)^2 - 4ak^4]}}{2k^2}.$$

Ya que $J(k, a, r_1(a)) = 0$, entonces la ecuación que necesitamos estudiar es: $G(k, a, r_1(a)) + k^2 H(k, a, r_1(a)) - 1 = 0$.

Para simplificar, sean $p = (1-a)(2k^2+1)$ y $s = \sqrt{(1-a)[(1-a)(2k^2+1)^2 - 4ak^4]}$. Se puede ver que

$$\begin{aligned}&G(k,a,z) + k^2 H(k,a,z) - 1\\ =&(-k^4 + 2k^2 + 1)z^2 + (k^4 - 5ak^2 + 2k^2 - a)z + (2a^2k^4 - 3ak^4 + k^4 + 2a^2k^2 - ak^2 - 1),\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}&G(k,a,r_1(a)) + k^2 H(k,a,r_1(a)) - 1\\ =&(-k^4 + 2k^2 + 1)r_1(a)^2 + (k^4 - 5ak^2 + 2k^2 - a)r_1(a) + (2a^2k^4 - 3ak^4 + k^4 + 2a^2k^2 - ak^2 - 1)\\ =&(-k^4 + 2k^2 + 1)\left(\frac{p-s}{2k^2}\right)^2 + (k^4 - 5ak^2 + 2k^2 - a)\left(\frac{p-s}{2k^2}\right)\\ &+ (2a^2k^4 - 3ak^4 + k^4 + 2a^2k^2 - ak^2 - 1) = 0\end{aligned}$$

si, y sólo si

$$\begin{aligned}(-k^4 + 2k^2 + 1)(p-s)^2 + (k^4 - 5ak^2 + 2k^2 - a)(p-s)(2k^2)&\\ +(2a^2k^4 - 3ak^4 + k^4 + 2a^2k^2 - ak^2 - 1)(2k^2)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Esta ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned}&(-k^4 + 2k^2 + 1)(p^2 + s^2) + (k^4 - 5ak^2 + 2k^2 - a)p(2k^2)\\ &+ (2a^2k^4 - 3ak^4 + k^4 + 2a^2k^2 - ak^2 - 1)(2k^2)^2\\ =&s[2p(-k^4 + 2k^2 + 1) + (k^4 - 5ak^2 + 2k^2 - a)(2k^2)],\end{aligned}$$

y al elevar al cuadrado ambos miembros y simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned}-112a^4k^{16} + 288a^3k^{16} - 272a^2k^{16} + 112ak^{16} - 16k^{16}+\\ 608a^4k^{14} - 1680a^3k^{14} + 1744a^2k^{14} - 816ak^{14} + 144k^{14}+\\ 704a^4k^{12} - 1968a^3k^{12} + 2176a^2k^{12} - 1104ak^{12} + 208k^{12}+\\ 400a^4k^{10} - 1152a^3k^{10} + 864a^2k^{10} - 96ak^{10} - 48k^{10}+\\ 112a^4k^8 - 336a^3k^8 + 32a^2k^8 + 384ak^8 - 176k^8 + 16a^4k^6\\ -48a^3k^6 - 64a^2k^6 + 192ak^6 - 96k^6 - 16a^2k^4 + 32ak^4 - 16k^4 = 0.\end{aligned}$$

Luego de sacar el factor común $-16k^4$ obtenemos:

$$-16k^4\left[A(k)a^4 + B(k)a^3 + C(k)a^2 + D(k)a + E(k)\right] = 0,$$

donde

$$\begin{aligned}A(k) =&7k^{12} - 38k^{10} - 44k^8 - 25k^6 - 7k^4 - k^2\\ B(k) =&-18k^{12} + 105k^{10} + 123k^8 + 72k^6 + 21k^4 + 3k^2\\ C(k) =&17k^{12} - 109k^{10} - 136k^8 - 54k^6 - 2k^4 + 4k^2 + 1\\ D(k) =&-7k^{12} + 51k^{10} + 69k^8 + 6k^6 - 24k^4 - 12k^2 - 2\\ E(k) =&k^{12} - 9k^{10} - 13k^8 + 3k^6 + 11k^4 + 6k^2 + 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, necesitamos a y k tales que

$$A(k)a^4 + B(k)a^3 + C(k)a^2 + D(k)a + E(k) = 0, \tag{A.0.4}$$

y que se resuelva con la k máxima. Nótese que esta ecuación es la misma que la que se obtiene substituyendo s por $-s$, y como $r_1(a) = \frac{p-s}{2k^2}$ y $r_2(a) = \frac{p+s}{2k^2}$, entonces esta ecuación es la misma cuando consideramos el punto $z = r_2(a)$.

Sacando la derivada parcial con respecto a a de (A.0.4) nos da:

$$4A(k)a^3 + 3B(k)a^2 + 2C(k)a + D(k) = 0. \tag{A.0.5}$$

Al multiplicar la ecuación (A.0.4) por 4 y a la ecuación (A.0.5) por a y restándolas, nos da:

$$B(k)a^3 + 2C(k)a^2 + 3D(k)a + 4E(k) = 0. \tag{A.0.6}$$

Después de multiplicar a la ecuación (A.0.5) por B, a la ecuación (A.0.6) por $4A$ y restándolas, obtenemos:

$$(8AC - 3B^2)a^2 + 2(6AD - BC)a + (16AE - BD) = 0. \tag{A.0.7}$$

En vez de resolver el sistema no lineal dado por las ecuaciones (A.0.4) y (A.0.5), resolveremos el sistema dado por (A.0.6) y (A.0.7).

Sean $b(k) = 8A(k)C(k) - 3B(k)^2$, $c(k) = 6A(k)D(k) - B(k)C(k)$, $d(k) = 16A(k)E(k) - B(k)D(k)$ y $q(k) = \sqrt{c(k)^2 - b(k)d(k)}$, entonces despejando a de (A.0.7) nos da:

$$\begin{aligned} a_1(k) &= \frac{-c(k) - q(k)}{b(k)} \\ a_2(k) &= \frac{-c(k) + q(k)}{b(k)}. \end{aligned} \tag{A.0.8}$$

Al sustituir a_1 en (A.0.6) nos da:

$$\frac{1}{b^3}(B(-c-q)^3 + 2C(-c-q)^2 b + 3D(-c-q)b^2 + 4Eb^3) = 0.$$

Luego de separar los términos en q y q^3 nos da:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b^3}(4b^3E + 2bq^2C + 2bc^2C - 3cq^2B - c^3B - 3b^2c) \\ =&\frac{1}{b^3}(-q(4bcC - q^2B - 3c^2B - 3b^2)) \end{aligned}$$

y después de elevar al cuadrado ambos miembros y restando, nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^6}(&16b^6E^2 + 16b^4q^2CE + 16b^4c^2CE - 24b^3cq^2BE \\ &-8b^3c^3BE - 24b^5cE + 4b^2q^4C^2 - 8b^2c^2q^2C^2 \\ &+4b^2c^4C^2 - 4bcq^4BC + 8bc^3q^2BC - 4bc^5BC \\ &+12b^3cq^2C - 12b^3c^3C - q^6B^2 + 3c^2q^4B^2 - 3c^4q^2B^2 \\ &+c^6B^2 - 6b^2q^4B + 6b^2c^4B - 9b^4q^2 + 9b^4c^2) = 0. \end{aligned}$$

Al sustituir las funciones en k nos queda la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b^6}(k^{16}(6k^{10} - 35k^8 - 41k^6 - 24k^4 - 7k^2 - 1)\\
(k^{16} - 8k^{14} + 16k^{12} + 33k^{10} - 63k^8 - 87k^6 - 43k^4 - 10k^2 - 1)^2\\
(20k^{22} - 68k^{20} + 255k^{18} - 3574k^{16} + 3455k^{14} + 13034k^{12}\\
+14108k^{10} + 8486k^8 + 3227k^6 + 786k^4 + 115k^2 + 8)^3\\
(23k^{34} - 134k^{32} - 283k^{30} + 1272k^{28} + 4389k^{26} - 4992k^{24}\\
-30505k^{22} - 4292k^{20} + 80354k^{18} + 69688k^{16} - 17983k^{14}\\
-73556k^{12} - 64053k^{10} - 32142k^8 - 10494k^6 - 2264k^4 - 301k^2 - 20)) = 0
\end{aligned}$$

y tomando en cuenta que

$$\begin{aligned}
b(k) = -\, k^2(20k^{22} - 68k^{20} + 255k^{18} - 3574k^{16} + 3455k^{14} + 13034k^{12}\\
+ 14108k^{10} + 8486k^8 + 3227k^6 + 786k^4 + 115k^2 + 8)
\end{aligned}$$

nos queda la ecuación:

$$\begin{aligned}
k^{10}(6k^{10} - 35k^8 - 41k^6 - 24k^4 - 7k^2 - 1)\\
(k^{16} - 8k^{14} + 16k^{12} + 33k^{10} - 63k^8 - 87k^6 - 43k^4 - 10k^2 - 1)^2\\
(23k^{34} - 134k^{32} - 283k^{30} + 1272k^{28} + 4389k^{26} - 4992k^{24}\\
-30505k^{22} - 4292k^{20} + 80354k^{18} + 69688k^{16} - 17983k^{14}\\
-73556k^{12} - 64053k^{10} - 32142k^8 - 10494k^6 - 2264k^4 - 301k^2 - 20) = 0.
\end{aligned}$$

La ecuación

$$6k^{10} - 35k^8 - 41k^6 - 24k^4 - 7k^2 - 1 = 0$$

tiene una única solución real mayor que 1, esta es $k_0 = 2.628626112936686$, aunque se puede ver que los valores $a_1(k_0)$ y $a_2(k_0)$ son números complejos.

Por otro lado, la única solución mayor que 1 de la ecuación

$$k^{16} - 8k^{14} + 16k^{12} + 33k^{10} - 63k^8 - 87k^6 - 43k^4 - 10k^2 - 1 = 0$$

es $k_1 = 1.644897379772228$, aunque $r_1(a_1(k_1))$ es un número complejo; si tomamos $a_2(k_1)$, resulta que el par $(k_1, a_2(k_1))$ no resuelve la ecuación (A.0.4).

Las soluciones mayores que 1 de la ecuación

$$\begin{aligned}
23k^{34} - 134k^{32} - 283k^{30} + 1272k^{28} + 4389k^{26} - 4992k^{24}\\
-30505k^{22} - 4292k^{20} + 80354k^{18} + 69688k^{16} - 17983k^{14}\\
-73556k^{12} - 64053k^{10} - 32142k^8 - 10494k^6 - 2264k^4 - 301k^2 - 20 = 0
\end{aligned}$$

son $k_2 = 2.373387053687791$, $k_3 = 1.554997817568612$ y $k_4 = 1.127499140452653$.

Se puede ver que $a_1(k_2) > 1$ y que el par $(k_2, a_2(k_2))$ no es solución de la ecuación (A.0.4).

Aunque $a_1(k_3) \in [0,1]$, se puede ver que el par $(k_3, a_1(k_3))$ no es solución de la ecuación (A.0.4). El punto $(k_3, a_2(k_3)) = (1.554997817568612, 0.55665440183)$ sí es solución del sistema dado por las ecuaciones (A.0.4) y (A.0.5), y $r_1(a_2(k_3)) = 0.336382650581$, aunque este punto no está en el conjunto que estudiamos, porque $\frac{k_3^2}{2k_3^2+1} < a_2(k_3) < \frac{k_3^2+1}{2k_3^2+1}$, de hecho, este par de puntos nos servirá para el siguiente conjunto que estudiaremos.

Con el punto k_4 pasa exactamente lo mismo que con k_2, por lo que tampoco nos sirve. Se puede ver también que las soluciones de $b(k) = 0$ tampoco nos sirven.

Por último, tomaremos el punto $a = \frac{k^2}{2k^2+1}$ y $z = r_1(\frac{k^2}{2k^2+1})$. De la ecuación (A.0.4), sustituyendo $a = \frac{k^2}{2k^2+1}$ se obtiene la ecuación:

$$\frac{-k^{20} - 2k^{18} - 6k^{16} - 28k^{14} - 19k^{12} + 108k^{10} + 206k^8 + 155k^6 + 60k^4 + 12k^2 + 1}{16k^8 + 32k^6 + 24k^4 + 8k^2 + 1} = 0,$$

y la única solución mayor que 1 es 1.411084948574744 que es menor al valor $1.5549\ldots$.

Vayamos ahora con los puntos del conjunto

$$\left\{(a,z) : \frac{k^2}{2k^2+1} < a < \frac{k^2+1}{2k^2+1}, z = \xi_1(a), r_1(a)\right\}.$$

Notemos que al tomar $z = r_1(a)$, el análisis es el mismo que se hizo en el caso anterior, por lo que la solución que nos da es el par $(k,a) = (1.554997817568612, 0.55665440183)$, que sí pertenece a este conjunto. Con esto se tiene que $r_1 = 0.336382650581$.

Por lo tanto, vamos a analizar los puntos del conjunto

$$\left\{(a,z) : \frac{k^2}{2k^2+1} < a < \frac{k^2+1}{2k^2+1}, z = \xi_1(a)\right\}.$$

Siguiendo los mismos pasos que en el caso $z = r_1(a)$, llegamos a la ecuación:

$$-16k^4\left[A(k)a^4 + B(k)a^3 + C(k)a^2 + D(k)a + E(k)\right] = 0,$$

donde

$$\begin{aligned}
A(k) &= 7k^{16} + 4k^{14} - 41k^{12} - 52k^{10} - 22k^8 - 4k^6\\
B(k) &= -18k^{16} - 11k^{14} + 111k^{12} + 143k^{10} + 65k^8 + 15k^6 + k^4\\
C(k) &= 17k^{16} + 11k^{14} - 117k^{12} - 144k^{10} - 70k^8 - 10k^6 + 10k^4 + 5k^2 + 1\\
D(k) &= -7k^{16} - 5k^{14} + 57k^{12} + 64k^{10} + 34k^8 - 5k^6 - 19k^4 - 9k^2 - 2\\
E(k) &= k^{16} + k^{14} - 11k^{12} - 10k^{10} - 7k^8 + 5k^6 + 7k^4 + 4k^2 + 1.
\end{aligned}$$

Queremos hallar el par (k,a) en el conjunto en cuestión, de tal modo que resuelva la ecuación:

$$A(k)a^4 + B(k)a^3 + C(k)a^2 + D(k)a + E(k) = 0 \tag{A.0.9}$$

de tal modo que la k sea la máxima posible. Con esto, hallamos la derivada parcial con respecto a a, y se hace todo análogamente al caso $z = r_1(a)$.

Finalmente llegamos a la ecuación:

$$\begin{aligned}
k^{18}(k-1)^2(k+1)^2(k^2+1)^4 \\
(18k^{12} + 11k^{10} - 111k^8 - 143k^6 - 65k^4 - 15k^2 - 1)^2 \\
(k^{16} - 2k^{14} + 2k^{12} - 5k^{10} + 6k^8 + 15k^6 + 13k^4 + 5k^2 + 1)^2 \\
(23k^{42} - 12k^{40} - 78k^{38} - 532k^{36} - 325k^{34} + 2068k^{32} + 6056k^{30} \\
+6676k^{28} - 15632k^{26} - 38732k^{24} - 42590k^{22} + 34736k^{20} \\
+111730k^{18} + 123572k^{16} + 34452k^{14} - 82912k^{12} - 113340k^{10} \\
-73404k^8 - 28736k^6 - 7164k^4 - 1069k^2 - 80) = 0
\end{aligned}$$

Tomaremos $a_1(k)$ y $a_2(k)$ como en la ecuación (A.0.8), con las respectivas funciones A, B, C, D y E que ahora tenemos.

La ecuación

$$18k^{12} + 11k^{10} - 111k^8 - 143k^6 - 65k^4 - 15k^2 - 1 = 0$$

tiene como única solución mayor que 1 a $k_5 = 1.671442713282710$, se puede ver que tanto $a_1(k_5)$ como $a_2(k_5)$ son números complejos.

Todas las soluciones de la ecuación

$$k^{16} - 2k^{14} + 2k^{12} - 5k^{10} + 6k^8 + 15k^6 + 13k^4 + 5k^2 + 1 = 0$$

son números complejos.

Por último, las soluciones de la ecuación

$$\begin{aligned}
23k^{42} - 12k^{40} - 78k^{38} - 532k^{36} - 325k^{34} + 2068k^{32} + 6056k^{30} \\
+6676k^{28} - 15632k^{26} - 38732k^{24} - 42590k^{22} + 34736k^{20} \\
+111730k^{18} + 123572k^{16} + 34452k^{14} - 82912k^{12} - 113340k^{10} \\
-73404k^8 - 28736k^6 - 7164k^4 - 1069k^2 - 80 = 0
\end{aligned}$$

que son mayores que 1 son $k_6 = 1.634989481925706$, $k_7 = 1.447859543922957$ y $k_8 = 1{,}070656407393576$.

Se tiene que $a_1(k_6) > 2$ y aunque $a_2(k_6) \in [0,1]$, el par $(k_6, a_2(k_6))$ no es solución de la ecuación (A.0.9).

Y las otras dos soluciones son menores al número $1.5549\ldots$.

Vamos a analizar los puntos del conjunto

$$\left\{(a,z) : \frac{k^2+1}{2k^2+1} \leq a \leq \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}, z = \xi_1(a), r_1(a), r_2(a), a\right\}.$$

Como el caso $z = \xi_1(a)$ ya se estudió antes, sólo falta ver lo que pasa con $a = \frac{k^2+1}{2k^2+1}$ y con $a = \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}$ en la ecuación (A.0.9).

Si sustituimos $a = \frac{k^2+1}{2k^2+1}$ en (A.0.9) y simplificamos nos resulta la ecuación:

$$-k^4(k^{10} - k^8 + k^6 - 4k^4 - 5k^2 - 1)(k^10 + k^8 + 5k^6 - 3k^2 - 1) = 0,$$

cuya única solución mayor que 1 es 1.438561472640151.

Si ahora sustituimos $a = \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}$ y simplificamos nos queda la ecuación

$$\begin{aligned}-256k^{32} - 1408k^{28} + 2112k^{26} + 1648k^{24} + 6960k^{22} + 7900k^{20}\\ +752k^{18} - 5024k^{16} - 4996k^{14} - 2533k^{12} - 799k^{10}\\ -160k^8 - 19k^6 - k^4 = 0\end{aligned}$$

y la única solución mayor que 1 es 1.441776064371696.

Ahora también nos hace falta ver cuando $z = r_1(a)$ y $a = \frac{k^2+1}{2k^2+1}$ ó $a = \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}$. Para esto, sustituyamos esos valores de a en la ecuación (A.0.4), al hacerlo con el primer valor de a y simplificándolo nos queda la ecuación:

$$-k^{20} - 2k^{18} + 8k^{16} + 17k^{14} - 8k^{12} - 34k^{10} - 25k^8 - 8k^6 - k^4 = 0$$

cuyas soluciones mayores que 1 son 1.533501569173205 y 1.370906722418350. Al sustituir el otro valor de a nos queda

$$k^4(16k^{12} + 16k^{10} - 68k^8 - 78k^6 - 38k^4 - 9k^2 - 1)^2 = 0,$$

que tiene a 1.481882143882460 como solución mayor que 1.

Para terminar, sustituyamos en (A.0.1) los valores $z = a = \frac{k^2+1}{2k^2+1}$ y $z = a = \frac{4k^4+4k^2+1}{8k^4+4k^2+1}$. Con el primer valor de a y simplificando obtenemos:

$$(k^2 + 1)(k^6 - 3k^2 - 1) = 0,$$

que tiene a 1.370906722418350 como única solución positiva. Al sustituir el otro valor se obtiene

$$16k^{12} + 20k^{10} - 44k^8 - 59k^6 - 32k^4 - 8k^2 - 1 = 0$$

y su única solución positiva es 1.342599962073025.

El último conjunto ya está incluido en lo que hemos hecho, así que la prueba concluye. #

Demostración de la proposición 2.29. Para $x, y, z, w \in [0, 1]$ y $k \in \mathbb{R}$, definamos la función F como sigue:

$$F(k, x, y, z, w) = k^2(xy + zw - yz) - yz$$

- Sea $T \in \mathscr{L}(k)$.

Como en el caso $n = 3$, queremos $k \geq 1$, y números x, y, z y $w \in [0, 1]$ tales que $x + y + z + w = 1$ y que

$$\begin{aligned}G(k, x, y, z, w) = F(k, x, x, w, y) + (1 + k)^2 F(k, x, y, w, z) + k^6 F(k, x, z, w, w) +\\ k^2 F(k, y, y, x, z) + k^2(1 + k)^2 F(k, y, z, x, w) + k^4 F(k, z, z, y, w) - 1 = 0\end{aligned}$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} F(k,x,y,w,z) &\geq 0,\\ F(k,x,z,w,w) &\geq 0,\\ F(k,y,y,x,z) &\geq 0,\\ F(k,y,z,x,w) &\geq 0,\\ F(k,z,z,y,w) &\geq 0. \end{aligned} \tag{A.0.10}$$

Usando métodos numéricos se obtiene un máximo local de la función que define $G(k,x,y,z,w) = 0$ a k como función implícita de x, y, z y w, este máximo local corresponde al punto $k = 1.3267$, $x = 0.2419$, $y = 0.2392$, $z = 0.3285$ y $w = 1 - x - y - w$. Puede verse que el valor de $F(k,y,z,x,w)$ es el número más cercano a 0 que los demás valores de F. Entonces tomaremos la restricción $F(k,y,z,x,w) = 0$.

Para esto, primero hagamos $w = 1 - x - y - z$, y al despejar la variable y de $F(k,y,z,x,w)$ obtenemos:

$$y = y_1(k,x,z) = \frac{x}{k^2(z-x)}[z - k^2(1 - x - 2z)]$$

y con esto se obtiene

$$G(k, y_1(k,x,z), z, x, 1 - x - y_1(k,x,z) - z) = 0,$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} h(k,x,z) = (&2k^{12} + 2k^{10} - k^8 - 2k^7 - k^6)z^4 + ((6k^{12} - 2k^{10}\\ &-k^8 + 2k^7 + k^6 + 4k^5 + 3k^4 + 2k^3 + k^2)x - 3k^{12}\\ &-k^{10} + k^8 + 2k^7 + k^6)z^3 + ((-2k^{10} + 7k^8 + 18k^7\\ &+18k^6 + 22k^5 + 14k^4 + 10k^3 + 6k^2 + 2k + 1)x^2\\ &+(-3k^{12} + 3k^{10} - 2k^8 - 8k^7 - 6k^6 - 8k^5 - 5k^4\\ &-2k^3 - k^2)x + k^{12} - k^4)z^2 + ((k^{12} - k^{10} + 7k^8\\ &+2k^7 + k^6 + 4k^5 + 2k^3)x^3 + (2k^{10} - 7k^8 - 8k^7\\ &-5k^6 - 8k^5 - 3k^4 - 2k^3 - k^2)x^2 + (-k^{10} + k^8\\ &+2k^7 + k^6 + 2k^5 + 3k^4)x)z + (k^8 - 2k^7 + k^6)x^4\\ &+(2k^7 - 2k^8)x^3 + (k^8 - k^4)x^2 = 0. \end{aligned}$$

Con esto se define a k como función implícita de x y z. Ya que queremos el máximo de k, entonces podemos plantear el siguiente sistema no lineal, y buscar soluciones (k,x,z) tales que los puntos $(k, x, y_1, z, 1 - x - y_1 - z)$ cumplan las condiciones (A.0.10), el sistema es:

$$\begin{aligned} h(k,x,z) &= 0,\\ \frac{\partial h}{\partial x}(k,x,z) &= 0,\\ \frac{\partial h}{\partial z}(k,x,z) &= 0. \end{aligned} \tag{A.0.11}$$

La función *fsolve* de OCTAVE es una función que encuentra una solución de un sistema no lineal, si usamos tal función y la evaluamos en el punto inicial $(k, x, z) = (1.3267, 0.2419, 0.3285)$ resulta:

$$\begin{aligned} k &= 1.326774364525014, \\ x &= 0.242229079187726, \\ z &= 0.328255853776722, \end{aligned}$$

y con estos valores podemos hallar:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.239942791859123, \\ w &= 0.189572275177673, \end{aligned}$$

y esos puntos cumplen las condiciones (A.0.10).

- Sea $T \in \mathscr{U}(k)$.

Análogamente a lo anteriormente hecho, necesitamos ahora $k \geq 0$, x, y, z, w tales que

$$\begin{aligned} G(k, x, y, z, w) = {} & F(k, x, x, w, y) + (1+k)^2 F(k, x, y, w, z) + k^2 F(k, x, z, w, w) + \\ & k^2 F(k, y, y, x, z) + k^2 (1+k)^2 F(k, y, z, x, w) + k^2 F(k, z, z, y, w) - 1 = 0 \end{aligned}$$

y con las mismas condiciones (A.0.10). Al usar métodos numéricos se obtiene el máximo local $k = 1.386703$, $x = 0.30057128$, $y = 0.23619700$, $z = 0.26711420$ y $w = 1 - x - y - w$. También se ve que el valor $F(k, y, z, x, w)$ es muy pequeño, entonces tomaremos la restricción $F(k, y, z, x, w) = 0$, y haciendo lo similar al caso Lipschitz, obtenemos:

$$\begin{aligned} h(k, x, z) = {} & (2k^8 - 2k^7)z^4 + ((2k^8 + 2k^7 + 2k^6 + 4k^5 + 3k^4 \\ & + 2k^3 + k^2)x - 2k^8 + 2k^7)z^3 + ((6k^8 + 18k^7 + 17k^6 \\ & + 22k^5 + 14k^4 + 10k^3 + 6k^2 + 2k + 1)x^2 + (-3k^8 - 8k^7 \\ & - 5k^6 - 8k^5 - 5k^4 - 2k^3 - k^2)x + k^8 - k^4)z^2 + ((7k^8 \\ & + 2k^7 + k^6 + 4k^5 + 2k^3)x^3 + (-5k^8 - 8k^7 - 5k^6 - 8k^5 \\ & - 3k^4 - 2k^3 - k^2)x^2 + (2k^7 + k^6 + 2k^5 + 3k^4)x)z \\ & + (k^8 - 2k^7 + k^6)x^4 + (2k^7 - 2k^8)x^3 + (k^8 - k^4)x^2 = 0 \end{aligned}$$

y con esto necesitamos resolver el sistema no lineal

$$\begin{aligned} h(k, x, z) &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial x}(k, x, z) &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial z}(k, x, z) &= 0. \end{aligned}$$

Usando otra vez la función *fsolve* para hallar la solución al sistema no lineal anterior, y evaluándola en el punto $(k, x, z) = (1.386703, 0.30057128, 0.26711420)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
k &= 1.386703691174856, \\
x &= 0.300824568747710, \\
z &= 0.266874607528382,
\end{aligned}$$

y con esto se tiene:

$$\begin{aligned}
y_1 &= 0.236070495386557, \\
w &= 0.196230328337351.
\end{aligned}$$

y tales puntos cumplen las condiciones (A.0.10).

#

Bibliografía

[Bai88] J.B. Baillon. Nonexpansive mappings and hyperconvex spaces. *Contemporary Math.*, 72:11–19, 1988.

[BG92] R.E. Bruck and K. Goebel. Bizarre fixed-point sets. *Fixed Point Theory and Applications*, pages 67–70, 1992. (K.K. Tan, ed.), World Sci. Publishing, River Edge, NJ.

[BL00] Yoav Benyamini and Joram Lindenstrauss. *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, volume Vol. 1. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 48, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2000.

[Bru74] R.E. Bruck. A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings. *Pacific J. Math*, 53:59–71, 1974.

[Bru79] R.E. Bruck. A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contraction in Banach spaces. *Israel J. Math.*, 53:107–116, 1979.

[Cla36] J.A. Clarkson. Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40:396–414, 1936.

[Cla37] J.A. Clarkson. The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue space. *Ann. of Math.*, 38:114–115, 1937.

[GK81a] K. Goebel and M. Koter. Fixed points of rotative lipschitzian mappings. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 51:145–156, 1981.

[GK81b] K. Goebel and M. Koter. A remark on nonexpansive mappings. *Canadian Math. Bull.*, 24:113–115, 1981.

[GK90] Kazimierz Goebel and W. A. Kirk. *Topics in metric fixed point theory*. Cambridge University Press, 1990.

[GK01] K. Goebel and W.A. Kirk. *Classical Theory of nonexpansive mappings* in *Handbook of Metric Fixed Point Theory*. (W.A. Kirk, B. Sims, Editors), Kluwer Academic Publishers, 2001.

[GLM05] Jesús García-Falset, Enrique Llorens-Fuster, and Eva M. Mazcuñán-Navarro. Uniformly nonsquare Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings. *Journal of Functional Analysis*, 233:494–514, 2005.

[Goe02] Kazimierz Goebel. *Concise Curse on Fixed Point Theorems*. Yokohama Publishers, 2002.

[GP05] Jarosław Górnicki and Krzysztof Pupka. Fixed points of rotative mappings in Banach spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 6(2):217–233, 2005.

[GT04] K. Goebel and Wataru Takahashi. A note on mappings with nonexpansive square. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A*, 58:59–67, 2004.

[GW92] K. Goebel and Jacek Wośko. Making a hole in the space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 114(2):475–476, 1992.

[GZ71] K. Goebel and E. Zlotkiewicz. Some fixed point theorems in Banach spaces. *Colloquium Math.*, 23:103–106, 1971.

[Han56] Olof Hanner. On the uniform convexity of L^p and l^p. *Arkiv För Matematik*, 3:239–244, 1956.

[Jam64] R.C. James. Uniformly non-square Banach spaces. *Ann. Math.*, 80:542–550, 1964.

[Kha96] Mohamed A. Khamsi. One-local retract and common fixed point for commuting mappings in metric spaces. *Nonlinear Anal.*, 27(11):1307–1313, 1996.

[Kir71] W. A. Kirk. A fixed point theorem for mappings with a nonexpansive iterate. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 29:294–298, 1971.

[KK01] W. Kaczor and M. Koter. *Rotative mappings and mappings with constant displacement* in *Handbook of Metric Fixed Point Theory*. (W.A. Kirk, B. Sims, Editors), Kluwer Academic Publishers, 2001.

[Kot86] M. Koter. Fixed points of Lipschitzian 2-rotative mappings. *Boll. Un. Mat. Ital C(6)*, 5(1):321–339, 1986.

[Kot00] M. Koter. Rotative mappings in Hilbert Space. *Nonlinear and Convex Analysis*, 1(3):295–304, 2000.

[KS01] William A. Kirk and Brailey Sims, editors. *Handbook of Metric Fixed Point Theory*. Kluwer Academic Publishers, 2001.

[KT98] Mikio Kato and Yasuji Takahashi. Von Neumann-Jordan constant for Lebesgue-Bochner spaces. *J. Inequal. Appl.*, 2:89–97, 1998.

[Oct07] GNU Octave. *Mathematical Software*. http://www.octave.org, version 3.0.1 edition, 2007.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, third edition edition, 1987.

[SAG08] SAGE. *Mathematical Software*. http://www.sagemath.org, version 3.2.1 edition, 2008.

[YW06] Changsen Yang and Fenghui Wang. On a new geometric constant related to the von Neumann-Jordan constant. *J. Math. Anal. Appl.*, 324:555–565, 2006.

Índice alfabético