CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Superálgebras de Lie de Heisenberg y sus formas superortogonales y supersimplécticas invariantes

TESIS

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

PRESENTA:

María del Carmen Rodríguez Vallarte

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Gil Salgado González

Dr. O. Adolfo Sánchez Valenzuela

Octubre 31 de 2008 Guanajuato, Gto. México

Resumen

En la teoría clásica, un álgebra de Lie de Heisenberg, $\mathfrak{h}$, es la extensión de un espacio simpléctico (V, ω) (donde ω es una forma bilineal antisimétrica y no degenerada), por un elemento central h; i.e., $\mathfrak{h} = V \oplus \mathbb{R}h$, donde el corchete se determina mediante la única relación no trivial $[u, v] = \omega(u, v)h$, para $u, v \in V$. Estas álgebras son básicas en muchas construcciones en mecánica cuántica y de ahí que hayan sido profusamente estudiadas y, en particular, se sabe que no admiten métricas, es decir, formas bilineales simétricas y no degeneradas, invariantes bajo la acción adjunta, a menos que se haga una extensión de ellas.

Por otro lado, una de las bellezas de la teoría de superálgebras es que entre otras cosas permite poner en cierto pie de igualdad a las estructuras ortogonales y simplécticas; dicho de manera algo más precisa, dada la forma en que se define la superconmutatividad (o más precisamente, superanticonmutatividad), es bien sabido que una estructura supersimpléctica (par) corresponde precisamente a un espacio vectorial $V = V_0 \oplus V_1$, descompuesto como un espacio simpléctico (V_0, ω) y uno con producto interior (V_1, g). En otras palabras, la teoría de superálgebras aparece como un escenario natural para discutir problemas como el descrito en el párrafo anterior.

Esto es lo que se hace en este trabajo, al definir superálgebras de Lie de Heisenberg y tratar de imponerles estructuras supersimplécticas o superortogonales, y descubrir en el proceso que esto tampoco puede hacerse en el caso super sin hacer extensiones.

La estrategia para obtener resultados no triviales consiste entonces en encontrar una extensión de una superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ por una derivación D, y conviene notar aquí que un punto central que subyace al trabajo es que en el caso super, se presentan en paralelo cuatro opciones para las superálgebras de Lie de Heisenberg, de acuerdo a la paridad de la estructura supersimpléctica y a

la paridad del elemento central, a lo que se agrega la paridad de la derivación.

Cabe sealar que en la literatura especializada las superálgebras de Lie de Heisenberg aparecen en los trabajos de Hegazi y Navarro (ver [4] y [10], respectivamente). En el trabajo de Hegazi se clasifican las superálgebras de Lie nilpotentes que no sean suma directa de ideales y cuya dimensión (m, n) cumpla $m + n \leq 5$. En este caso, en la tabla I (pág. 1737) se enlistan dos superálgebras de Lie de Heisenberg no triviales: una de dimensión (3,1) definida por $\mathfrak{g} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle \oplus \langle x_1 \rangle, [x_0, y_0] = z_0, [x_1, x_1] = z_0$; la segunda de dimensón (3,2) definida por $\mathfrak{g} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle \oplus \langle x_1, y_1 \rangle, [x_0, y_0] = z_0, [x_1, x_1] = z_0, [y_1, y_1] = z_0$. Por otra parte, en el trabajo de tesis doctoral de Navarro se proporcionan clasificaciones explícitas de familias de superálgebras de Lie que generalizan, en cierto sentido, a las álgebras de Heisenberg, estudiándose así las superálgebras de Lie con parte par el álgebra de Lie de Heisenberg y dimensión de la parte impar menor o igual que tres y que tienen un invariante de Goze minimal.

Así, una de las aportaciones de este trabajo es analizar las superálgebras de Lie de Heisenberg complejas de dimensión finita obtenidas a partir de una forma supersimpléctica homogénea y clasificarlas hasta isomorfismo, sin que la dimensión de la parte par o impar sea una restricción. Aquellas superálgebras de Lie que provienen de formas supersimplécticas pares, tienen una álgebra de Lie de Heisenberg ordinaria como subespacio par subyacente, mientras que aquellas provenientes de formas supersimplécticas impares están basadas en álgebras de Lie abelianas. Otra de las aportaciones de este trabajo es proporcionar información sobre la existencia de estructuras supersimplécticas o superortogonales en superálgebras de Lie solubles con características muy específicas, como lo son las de tipo Heisenberg. Específicamente se determina que este tipo de superálgebras de Lie no admiten una estructura supergeométrica invariante, y por esta razón se estudian con considerable detalle las posibles derivaciones homogéneas de estas superálgebras de Lie. Se prueba que extensiones de dimensión uno por derivaciones apropiadas sí admiten estructuras supergeométricas invariantes y dichas estructuras se describen completamente. Además, se obtienen condiciones necesarias y suficientes para que cualesquiera dos extensiones de dimensión uno por derivaciones homogéneas sean isomorfas; también se obtienen condiciones necesarias y suficientes para que cualesquiera dos extensiones equipadas con estructuras supergeométricas invariantes sean isométricas.

Como trabajo futuro, se desea aplicar las técnicas y conocimientos adquiridos para estudiar superálgebras de Lie basadas en álgebras de Lie solubles con características muy particulares (ver [12],[20] y [22]), determinar la existencia de formas supersimplécticas o superortogonales para que posteriormente, pueda analizarse el análogo a los sistemas de raíces.

A mi familia

Agradecimientos

Día a día, Dios me ha brindado oportunidades que he aprovechado gracias al apoyo y confianza incondicional de mis padres y mi hermana: Carlos, Lidia y Lupita; al amor y cuidado de mi esposo Javier y de mi pequeña Lupita. A ellos dedico este trabajo.

Expreso mi reconocimiento a las personas que más han influido en mi desarrollo profesional: Adolfo Sánchez y Gil Salgado. Su orientación, confianza, paciencia y amistad me motivaron para elaborar este trabajo y encontrar un tema de investigación que disfruto enormemente.

Agradezco al Dr. Alberto Elduque, de la Universidad de Zaragoza, España, el recibirme durante cuatro meses para trabajar, discutir y desarrollar ideas que me fueron muy útiles.

Gracias a las instituciones que me brindaron apoyo para llevar a término este trabajo: al Consejo Nacional de Ciencia y Tegnología – CONACyT, por otorgarme una beca de doctorado, una beca mixta para realizar una estancia académica en España, y los apoyos del proyecto Estructuras Geométricas Distinguidas 37558 – E; al Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Guanajuato – CONCyTEG, por otorgarme una beca para finalizar mis estudios; a la Universidad Juárez del Estado de Durango – UJED, el Instituto Tecnológico de La Paz, B.C.S, y la Universidad Autónoma de San Luis Potosí – UASLP, por facilitarme sus instalaciones en las breves visitas académicas que realicé.

Finalmente, agradezco al Centro de Investigación en Matemáticas – CIMAT el recibirme y ofrecerme un ambiente altamente estimulante. Hace algunos años llegué a CIMAT para realizar una tesis de licenciatura y tiempo después, concluyo un ciclo de mi vida con mucho más que eso. Formé mi propia familia, encontré amigos maravillosos, concluí un doctorado, crecí personal y profesionalmente. ¿Acaso se puede pedir más?

Contenido

Introducción

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que admite una forma bilineal no degenerada e invariante se llama *autodual*, ya que fácilmente se demuestra que dicha forma bilineal establece una equivalencia entre las representaciones *adjunta* ad y *coadjunta* ad^*. Si además la forma bilineal es simétrica, decimos que $\mathfrak{g}$ admite una *forma ortogonal invariante*. Si la forma bilineal es antisimétrica, entonces decimos que $\mathfrak{g}$ admite una *forma simpléctica invariante.*

Se puede demostrar que toda álgebra de Lie admite una forma bilineal simétrica invariante *no trivial*. Esto sugiere, como primer problema, el clasificar álgebras de Lie que admiten formas ortogonales invariantes y estudiar la estructura de dichas álgebras de Lie.

Es bien conocido que si un álgebra de Lie (compleja) admite (hasta escalares) una *única* forma ortogonal invariante, entonces dicha álgebra de Lie es *simple*. También es fácil observar que toda suma finita de álgebras de Lie simples admite formas ortogonales invariantes. De hecho estas álgebras se llaman *semisimples* y están completamente caracterizadas, por ejemplo, porque su forma de Cartan-Killing no degenera.

Al clasificar las álgebras de Lie simples (y por tanto las semisimples) se puede observar lo siguiente: la clasificación depende de la existencia de una subálgebra muy especial y de una forma ortogonal invariante. Esta subálgebra se llama la *subálgebra de Cartan* y tiene la propiedad de que al restringir la forma ortogonal invariante a ella, no solamente no degenera, sino que además es definida positiva. Esto permite introducir nuevos conceptos en términos del espacio dual a la subálgebra de Cartan. Así, resulta que combinando estos dos hechos, se tiene una descomposición del álgebra original en términos de las *raíces* asociadas a la subálgebra de Cartan. Más aún, eligiendo de forma adecuada una base para dicho espacio dual, se puede reconstruir toda la información referente al álgebra de Lie original.

El concepto de raíz se generaliza al concepto de *peso* asociado a una representación y se obtiene un buen entendimiento de la teoría de representaciones de las álgebras de Lie simples y semisimples. En otras palabras, resulta que casi toda la información de un álgebra de Lie semisimple o de una representación de un álgebra de Lie semisimple se *codifica* en un *sistema de raíces (pesos)*.

El siguiente paso entonces, es el estudio de álgebras de Lie que admitan más de una forma ortogonal invariante y que además satisfagan que su forma de Cartan-Killing degenere, por ejemplo, álgebras de Lie solubles.

Buscando ejemplos de álgebras de Lie solubles que admitan una forma ortogonal invariante, encontramos el álgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}_0$ de dimensión tres, extendida por una derivación $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ [1]. Naturalmente surgen las siguientes preguntas: ¿cómo se define la forma ortogonal invariante? ¿es única hasta múltiplos escalares? ¿cuándo dos de estas álgebras de Lie son isomorfas? ¿ cuándo son isométricas? Encontramos interesante responder estas preguntas porque el álgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}_0,$ es el ejemplo más sencillo de un álgebra de Lie soluble y nilpotente. Además, las técnicas aprendidas permiten responder a estas preguntas en otro tipo de álgebras de Lie solubles.

Luego, estudiamos las características del álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2n+1,$ $\mathfrak{h}_0$ extendida por una derivación, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$. A esta álgebra de Lie la denotamos por $\mathfrak{h}_0(D)$. Probamos que $\mathfrak{h}_0(D)$ siempre es un álgebra de Lie soluble; mientras que es nilpotente si, y sólo si, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ es una transformación nilpotente.

Puesto que no existe una clasificación para álgebras solubles en dimensión $n \geq 7$, tenemos que restringirnos al estudio de álgebras de Lie solubles y no nilpotentes más concretas, por ejemplo, aquellas que tengan un ideal nilpotente maximal fijo. A este ideal se le conoce como el *nilradical* del álgebra de Lie.

En la literatura se encuentran resultados muy generales sobre álgebras de Lie solubles con un nilradical fijo (ver [13], pág. 58). Puesto que el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_0(D)$ es nilpotente siempre y cuando D sea una derivación nilpotente, sólo nos concentramos en estudiar detalladamente al álgebra de Lie soluble $\mathfrak{h}_0(D)$ con nilradical $\mathfrak{h}_0$. Naturalmente, uno se pregunta cuántas derivaciones no nilpotentes se pueden añadir al álgebra de Lie $\mathfrak{h}_0$ de forma que el nilradical se siga preservando.

Así, el siguiente paso fue construir y clasificar todas las álgebras de Lie solubles que no se escriben como suma directa de álgebras de Lie de dimensiones más pequeñas, y tales que el nilradical es Heisenberg. En la literatura encontramos que este problema fue resuelto por Rubin y Winternitz [17]. Sin embargo, el resultado que concierne a la clasificación de estas álgebras de Lie se menciona como una observación de carácter general, sin proporcionar ni desarrollar la clasificación hasta sus últimos detalles. Luego, uno de nuestros objetivos es entender y escribir detalladamente la construcción y clasificación de estas álgebras de Lie.

De hecho, en este trabajo se estudia una familia de álgebras de Lie solubles y no nilpotentes que se construyen a partir del álgebra de Lie de Heisenberg y una derivación de la misma. Se determinan además las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de formas ortogonales o simplécticas invariantes. Con esta información, uno podría, en principio, calcular los sistemas de raíces para estas álgebras de Lie.

Esto nos conduce a plantear el problema principal de esta tesis: dado un superespacio vectorial V, una estructura supersimpléctica homogénea, $\mathcal{B}$, y un elemento $h \notin V$, definimos un corchete por $[v_i, v_j] = \mathcal{B}(v_i, v_j)h,$ y extendemosla definición declarando que h es central. De esta forma, definimos las superálgebras de Lie de Heisenberg, que denotamos por $\mathfrak{h}(V, \mathcal{B})$, y son el análogo del álgebra de Lie de Heisenberg. Mostramos que las superálgebras de Lie de Heisenberg son solubles, nilpotentes, y no admiten formas superortogonales ni supersimplécticas homogéneas e invariantes. Cabe mencionar que en la literatura se pueden encontrar construcciones alternativas en la categoría *super* que también se denominan *superálgebras de Lie de Heisenberg* [4], [9], [10], y [24]. La construcción que aquí abordamos, sin embargo, usa esencialmente los mismos datos que las álgebras de Lie de Heisenberg clásicas: un espacio vectorial con forma simpléctica y un elemento central, ajeno al espacio.

Procediendo en analogía a lo que sucede con las álgebras de Lie solubles, el siguiente paso consiste determinar las derivaciones homogéneas de cada superálgebra de Lie de Heisenberg, $D \in \operatorname{Der} \mathfrak{h}$, pues la siguiente tarea es dotar al superespacio vectorial $\mathfrak{h}(D) = \mathfrak{h}(V, \mathcal{B}) \oplus D$ de una estructura de superálgebra de Lie *conveniente*. A diferencia de lo que ocurre con las álgebras de Lie solubles, no podemos asegurar que la superálgebra derivada de una superálgebra de Lie soluble $\mathfrak{g}$ esté contenida propiamente en el nilradical de $\mathfrak{g}$; esto es, que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset N(\mathfrak{g})$, ya que el Teorema de Lie no necesariamente es válido para superálgebras de Lie solubles.

Entonces, pidiendo que $\mathfrak{h}(V, \mathcal{B})$ sea una sub-superálgebra de $\mathfrak{h}(D)$, uno verifica que $[\mathfrak{h}(D), \mathfrak{h}(D)] \subset \mathfrak{h}(V, \mathcal{B})$; sin embargo, el hecho de que el nilradical de $\mathfrak{h}(D)$ sea $\mathfrak{h}(V, \mathcal{B})$ dependerá fuertemente del grado de la derivación homogénea que estemos considerando. Puesto que en este trabajo formulamos resultados que son válidos tanto para álgebras como para superálgebras de Lie, nos concentramos en el estudio de las superálgebras de Lie $\mathfrak{h}(D)$ tales que $[\mathfrak{h}(D), \mathfrak{h}(D)] \subset \mathfrak{h}(V, \mathcal{B})$ y además $N(\mathfrak{h}(D)) = \mathfrak{h}(V, \mathcal{B})$.

Siguiendo la línea de trabajo se Salgado y Sánchez Valenzuela [18], determinamos las superálgebras de Lie de Heisenberg con derivación que admiten formas superortogonales o supersimplécticas homogéneas e invariantes, y se establecen las condiciones necesarias y suficientes para que dos de estas superálgebras de Lie sean isométricas.

Finalmente, cabe señalar que un punto central que subyace al trabajo es que en el caso $\mathbb{Z}_2$-graduado, se presentan en paralelo cuatro opciones para las superálgebras de Lie de Heisenberg, de acuerdo a la paridad de la estructura supersimpléctica y a la paridad del elemento central, a lo que se agrega la paridad de la derivación. Por esta razón optamos por presentar un análisis considerablemente detallado de los puntos antes mencionados, obteniendo resultados muy concretos y completos.

Capítulo 1

Superálgebras de Lie de Heisenberg

Este capítulo introduce los conceptos algebraicos para establecer el primer problema que se plantea en esta tesis: determinar las condiciones necesarias y suficientes para que una superálgebra de Lie de Heisenberg admita una forma bilineal homogénea supersimétrica o superantisimétrica, no degenerada e invariante. De todas formas, cabe advertir al lector de lo siguiente: $\mathbb{C}$ denotará, a tráves de este trabajo, el campo de números complejos. Daremos por bien conocidas las nociones básicas de la teoría de álgebras y superálgebras de Lie complejas. El lector no familiarizado con estos temas puede consultar [6], [8],[19] y [9]. Finalmente, cabe señalar que todas las álgebras y superálgebras de Lie con las que trabajaremos son de dimensión finita.

1.1 Preliminares

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Decimos que V es un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-*graduado* si, para cada $g \in \mathbb{Z}_2$, existe un subespacio $V_g \subset V$ tal que $V = \bigoplus_{g\in\mathbb{Z}_2} V_g$ y existe también una aplicación

$$|\cdot| : \bigcup_{g\in\mathbb{Z}_2} (V_g - \{0\}) \to \mathbb{Z}_2 \quad \text{tal que} \quad |v| = g \Longleftrightarrow v \in V_g - \{0\}.$$

A los elementos del dominio de $|\cdot|$ se les llama $\mathbb{Z}_2$- *homogéneos* , y decimos que $|v|$ es el *grado* de v. A los elementos en $|\cdot|^{-1}(0)$ se les llama *pares*, mientras que a aquellos en $|\cdot|^{-1}(0)$ se les llama *impares.*

Puesto que el concepto de elemento $\mathbb{Z}_2$-homogéneo sólo tiene sentido cuando consideramos una $\mathbb{Z}_2$-graduación, a partir de este momento escribiremos simplemente *homogéneo* para referirnos a los elementos del dominio de $|\cdot|$.

Es importante sealar que en este trabajo se emplea la $\mathbb{Z}_2$-graduación que permite extender de forma natural los conceptos y construcciones clsicas del álgebra lineal.

A un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-graduado también se le llama *superespacio vectorial*. De aquí en adelante, el prefijo *super* indicará que estamos considerando un objeto equipado con una $\mathbb{Z}_2$-graduación.

Obsrvese que dado un superespacio vectorial, las construcciones clsicas asociadas a l generan superespacios vectoriales.

Una *superálgebra de Lie* es un superespacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ y una aplicación bilineal $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisfacen las condiciones siguientes:

1. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, para todo $\alpha, \beta = 0, 1$
2. $[u, v] = -(-1)^{|u||v|}[v, u]$
3. $(-1)^{|u||z|}[u,[v,z]] + (-1)^{|v||u|}[v,[z,u]] + (-1)^{|z||v|}[z,[u,v]] = 0$,
   $\forall\ u, v, z \in \mathfrak{g}$ homogéneos.

Obsérvese que de la definición de superálgebra de Lie se sigue que $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie.

Ejemplo. Sea $V = V_0 \oplus V_1$ un superespacio vectorial. Fácilmente se verifica que $\mathrm{End}(V) = (\mathrm{End}\,V)_0 \oplus (\mathrm{End}\,V)_1$ también es un superespacio vectorial, donde $(\mathrm{End}\,V)_0 = \mathrm{End}(V_0) \oplus \mathrm{End}(V_1)$ y $(\mathrm{End}\,V)_1 = \mathrm{Hom}(V_0, V_1) \oplus \mathrm{Hom}(V_1, V_0)$. Definamos $[\cdot,\cdot] : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ por $[S,T] = S \circ T + (-1)^{|S||T|} T \circ S$, para todos $S, T \in \mathrm{End}(V)$ homogéneos. Es fácil comprobar que $\mathrm{End}(V)$ es una superálgebra de Lie, que denotamos por $\mathfrak{gl}(V_0|V_1)$.

Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ dos superálgebras de Lie. Una aplicación $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un *morfismo* entre ellas si

1. $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es $\mathbb{C}$-lineal y $\varphi(\mathfrak{g}_\alpha) \subset \mathfrak{h}_\alpha,\ \forall\ \alpha = 0, 1$
2. $\varphi([u,v]) = [\varphi(u), \varphi(v)],\ \forall u, v \in \mathfrak{g}$.

Si la aplicación φ es invertible, decimos que φ es un *isomorfismo*.

Al igual que antes, sea $V = V_0 \oplus V_1$ un superespacio vectorial, y considérese el espacio vectorial de todas las formas bilineales en V, $\mathrm{Bil}(V)$. Este espacio tiene una descomposición natural $\mathrm{Bil}(V) = (\mathrm{Bil}\, V)_0 \oplus (\mathrm{Bil}\, V)_1$ y una aplicación $|\cdot|$ bajo la cual $\mathcal{B} \in (\mathrm{Bil}\, V)_\alpha$ si para cualquier par de vectores homogéneos $u, v \in V, \mathcal{B}(u,v) = 0$ siempre que $|u| \neq |v| + \alpha$, $(\alpha = 0,1)$. Siguiendo [19], se dice que $\mathcal{B} \in \mathrm{Bil}(V)$ es *supersimétrica* (resp. *superantisimétrica*) si

$$\mathcal{B}(u,v) = (-1)^{|u||v|}\mathcal{B}(v,u) \qquad (\text{resp. } \mathcal{B}(u,v) = -(-1)^{|u||v|}\mathcal{B}(v,u)),$$

para todos $u, v \in V$ homogéneos.

Una forma bilineal no degenerada $\mathcal{B}$ en un superespacio vectorial $V = V_0 \oplus V_1$ se llama *superortogonal* (resp. *supersimpléctica*) si $\mathcal{B}$ es homogénea y supersimétrica (resp. superantisimétrica).

Sea $V = V_0 \oplus V_1$ un superespacio vectorial equipado con una forma superortogonal (resp. supersimpléctica) homogénea $\mathcal{B} : V \times V \to \mathbb{C}$. Luego, si $\mathcal{B}$ es par, entonces V_0 es un espacio vectorial ortogonal con forma ortogonal $g = \mathcal{B}|_{V_0 \times V_0}$ (resp. V_0 es un espacio vectorial simpléctico con forma simpléctica $\omega = \mathcal{B}_{V_0 \times V_0}$), y V_1 es un espacio simpléctico con forma simpléctica $\omega = \mathcal{B}_{V_1 \times V_1}$ (resp. V_1 es un espacio vectorial ortogonal con forma ortogonal $g = \mathcal{B}|_{V_1 \times V_1}$). En este caso escribiremos $\mathcal{B} \leftrightarrow (g, \omega)$ (resp. $\mathcal{B} \leftrightarrow (\omega, g)$), y de hecho $\mathcal{B}(u_0 + u_1, v_0 + v_1) = g(u_0, v_0) + \omega(u_1, v_1)$ (resp. $\mathcal{B}(u_0 + u_1, v_0 + v_1) = \omega(u_0, v_0) + g(u_1, v_1)$) para todos $u = u_0 + u_1$ y $v = v_0 + v_1$ en V. Por otra parte, si $\mathcal{B}$ es impar, entonces existen un par de aplicaciones bilineales no degeneradas $\Phi : V_0 \times V_1 \to \mathbb{C}$ y $\Omega : V_1 \times V_0 \to \mathbb{C}$ tales que $\mathcal{B}(u_0 + u_1, v_0 + v_1) = \Phi(u_0, v_1) + \Omega(u_1, v_0)$, y $\Phi(u_0, v_1) = \Omega(v_1, u_0)$ (resp. $\Phi(u_0, v_1) = -\Omega(v_1, u_0)$) $\forall\ u_0 \in V_0, v_1 \in V_1$. En cualquier caso escribiremos $\mathcal{B} \leftrightarrow \Phi$ entendiendo que $\Omega(v_1, u_0) = \Phi(u_0, v_1)$ (resp. $\Omega(v_1, u_0) = -\Phi(u_0, v_1)$).

Notación. Fijando una base para $V = V_0 \oplus V_1$, podemos representar las formas superortogonales y supersimplécticas homogéneas en V como sigue:

	$\mathcal{B}$	$\mathcal{B}_0$	$\mathcal{B}_1$	Ω
ortogonal par	$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_1 \end{pmatrix}$	ortogonal	simpléctica	
ortogonal impar	$\begin{pmatrix} 0 & \Phi \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$			$\Omega = \Phi^t$
simpléctica par	$\begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$	simpléctica	ortogonal	
simpléctica impar	$\begin{pmatrix} 0 & \Phi \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$			$\Omega = -\Phi^t$

Dada una forma superortogonal o supersimpléctica $\mathcal{B}$ en un superespacio vectorial $V = V_0 \oplus V_1$, podemos considerar $(\alpha = 0, 1)$

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(V_0|V_1)_\alpha = \{T \in \mathfrak{gl}(V_0|V_1)_\alpha : \mathcal{B}(Tu, v) + (-1)^{\alpha\beta}\mathcal{B}(u, Tv) = 0 \ \forall u \in V_\beta\}.$$

Se verifica fácilmente que $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}} = \mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(V_0|V_1)_0 \oplus \mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(V_0|V_1)_1$ y es inmediato comprobar que $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(V_0|V_1) \subset \mathfrak{gl}(V_0|V_1)$ es una sub-superálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V_0|V_1)$. Para más detalles, el lector interesado puede consultar las referencias estándares [19].

1 Proposición. *Sea $\mathcal{B} \leftrightarrow (\omega, g)$ una forma supersimpléctica en el superespacio vectorial $V = V_0 \oplus V_1$. Entonces*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(n|m)_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} A = -A^t, \\ D = D^t \end{matrix},$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(n|m)_1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B}_{V_1 \times V_1}(u, Cv) = \mathcal{B}_{V_0 \times V_0}(Bu, v).$$

Además, se tienen resultados similares para formas superortogonales.

1.2 Superálgebras de Lie de Heisenberg.

Sea $\mathfrak{g}$ una superálgebra de Lie compleja de dimensión finita, con un centro *homogéneo* unidimensional $Z(\mathfrak{g})$ tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Sea h un generador homogéneo de $Z(\mathfrak{g})$. Entonces, en $\mathfrak{g}$ puede definirse una forma bilineal superantisimétrica $\overline{\mathcal{B}}$ vía $[x, y] = \overline{\mathcal{B}}(x, y)h$, $\forall\ x, y \in \mathfrak{g}$. Notemos que $|\overline{\mathcal{B}}| = |h|$. Claramente, esto induce una forma bilineal superantisimétrica $\mathcal{B}$ en la superálgebra de Lie $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ vía $\mathcal{B}([x], [y]) = \overline{\mathcal{B}}(x, y)$.

2 Proposición. *Sea $\mathfrak{g}$ una superálgebra de Lie con un ideal derivado homogéneo unidimensional. Supongamos que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \langle h \rangle \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Entonces, existe una sub-superálgebras de Lie abeliana y $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$, donde $\mathfrak{h}$ es la superálgebra de Lie de Heisenberg.*

Demostración. Es claro que $Z(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Rad}(\overline{\mathcal{B}}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \overline{\mathcal{B}}(x,y) = 0 \ \forall \ y \in \mathfrak{g}\}$. Puesto que $\overline{\mathcal{B}}$ no es idénticamente cero, existe un sub-superespacio vectorial de dimensión máxima $V \subset \mathfrak{g}$ en el cual $\overline{\mathcal{B}}$ no degenera. Entonces, $\mathfrak{g} = V \oplus \mathrm{Rad}(\overline{\mathcal{B}})$. Sean $\{v_1, ..., v_{2r}\}$ y $\{h, u_1, ..., u_s\}$ bases para V y $\mathrm{Rad}(\overline{\mathcal{B}})$, respectivamente, con $h \in Z(\mathfrak{g})$. Tomando $\mathfrak{h} = \langle v_1, ..., v_{2r}, h \rangle$ y $\mathfrak{a} = \langle u_1, ..., u_s \rangle$ obtenemos la descomposición dada en el enunciado. □

Decimos que una superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una *superálgebra de Lie de Heisenberg* si tiene un centro homogéneo unidimensional $Z(\mathfrak{g}) = \langle h \rangle$ tal que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{B}$ es no degenerada. En particular, $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ es un superespacio vectorial supersimpléctico. Escribiremos $(V, \mathcal{B})$ para denotar al sub-superespacio vectorial supersimpléctico subyacente de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = V \oplus Z(\mathfrak{g})$.

Ahora bien, dado un superespacio vectorial supersimpléctico de dimensión finita V equipado con una forma supersimpléctica homogénea $\mathcal{B}$, uno inmediatamente obtiene su superálgebra de Lie de Heisenberg asociada $\mathfrak{g} = V \oplus Z(\mathfrak{g})$, definiendo $[u,v] = \mathcal{B}(u,v)h$ para todos $u, v \in V$, y $h \in Z(\mathfrak{g}) - \{0\}$. Es fácil ver que hasta isomorfismo existe una única estructura de superálgebra de Lie de Heisenberg basada en un superespacio vectorial supersimpléctico dado $(V, \mathcal{B})$.

Observaciones.

(a) Si $|\mathcal{B}| = 0$, entonces $\mathcal{B} \leftrightarrow (\omega, g)$ y $\mathfrak{h}_0 \simeq V_0 \oplus \langle h \rangle$ es el álgebra de Lie de Heisenberg asociada al par (V_0, ω), mientras que si $|\mathcal{B}| = 1$, entonces $V_0 \simeq V_1$ y $\mathfrak{h}_0 \simeq V_0$ es un álgebra de Lie abeliana.

(b) Podemos escoger bases para V_0 y V_1 en las que

   1. Si $|\mathcal{B}| = 0$, entonces $\mathcal{B} \leftrightarrow (\omega, g)$, donde $\omega = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $g = I_m$. En lo sucesivo usaremos $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ como una base simpléctica para $\mathfrak{h}_0/Z(\mathfrak{h}_0)$ adaptada a ω. Como antes, escribiremos h para denotar al generador de $Z(\mathfrak{h}_0)$. Escribiremos simplemente $\mathfrak{h}_0$ si V_0 y ω están fijos dentro de un contexto dado. Debemos mencionar que ocasionalmente usaremos la descomposición $V_0 = E \oplus F$ en un par de subespacios isótropos maximales generados por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{f_1, \ldots, f_n\}$ respectivamente.

2. Si $|\mathcal{B}| = 1$, entonces $\mathcal{B} \leftrightarrow \Phi$, donde $\Phi = I_n$

Los siguientes resultados sobre superálgebras de Lie solubles y nilpotentes son bien conocidos (ver [19] y [9]) .

Decimos que una superálgebra de Lie es *nilpotente* (resp. soluble) si los ideales en la serie central descendente (resp. en la serie derivada) se anulan para algún índice $k \in \mathbb{N}$.

El Teorema de Engel y sus consecuencias directas siguen siendo válidos para superálgebras de Lie. Sin embargo, el Teorema de Lie no necesariamente es válido para una superálgebra de Lie. Las pruebas de los siguientes resultados pueden encontrarse en [9] y [19].

3 Teorema (ver [19], Prop.1, pág. 236)**.** *Sea $V = V_0 \oplus V_1$ un superespacio vectorial y sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una subálgebra graduada de $\mathfrak{gl}(V)$ tal que los elementos de $\mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{g}_1$ son nilpotentes. Entonces existe un vector $v \in V, v \neq 0$, tal que $x(v) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Se sigue entonces que una superálgebra de Lie es nilpotente si, y sólo si, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ es nilpotente para cada elemento homogéneo $x \in \mathfrak{g}$.

4 Teorema ([9], Prop.1.3.3, pág. 25)**.** *La superálgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es soluble si, y sólo si, $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie soluble.*

Es inmediato que la superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a cualquier forma supersimpléctica homogénea siempre es soluble. También se sigue que $\mathfrak{h}$ es nilpotente pues $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset Z(\mathfrak{h})$.

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{B} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ una forma superortogonal o supersimpléctica. Decimos que $\mathcal{B}$ es *invariante*, si $\mathcal{B}([u, v], z) = \mathcal{B}(u, [v, z])$ para todos $u, v, z \in \mathfrak{g}$.

Sea $\mathfrak{h}$ una superálgebra de Lie de Heisenberg. Nuestro primer objetivo es determinar cuándo existe una forma bilineal simétrica o antisimétrica, homogénea, no degenerada y definida en $\mathfrak{h}$ que satisfaga $\mathcal{B}([x, y], z) = \mathcal{B}(x, [y, z])$ para todos $x, y, z \in \mathfrak{h}$.

5 Proposición. *Sea $\mathcal{B}$ una forma supersimpléctica homogénea en $V = V_0 \oplus V_1$, y sea $\mathfrak{h} = V_0 \oplus V_1 \oplus \langle h \rangle$ la superálgebra de Lie de Heisenberg asociada. Sea $\widehat{\mathcal{B}}$: $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ una forma bilineal, homogénea, supersimétrica o superantisimétrica. Si $\widehat{\mathcal{B}}$ es invariante, entonces degenera.*

Demostración.
Analicemos los casos $|\mathcal{B}| = 0$ y $|\mathcal{B}| = 1$ por separado.

CASO 1. La superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma supersimpléctica par $\mathcal{B}$. Sea $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n, h\}$ una base simpléctica adaptada a $\mathfrak{h}_0$, y sea $h \in Z(\mathfrak{h}) - \{0\}$. Supongamos que $\widehat{\mathcal{B}} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ es par y supersimétrica (resp. superantisimétrica). Entonces $\widehat{\mathcal{B}} \leftrightarrow (\widehat{\mathcal{B}}_0, \widehat{\mathcal{B}}_1)$ con $\widehat{\mathcal{B}}_0$ simétrica (resp. antisimétrica) y $\widehat{\mathcal{B}}_1$ antisimétrica (resp. simétrica). En particular, $\widehat{\mathcal{B}}$ es invariante si, y sólo si, $\widehat{\mathcal{B}}_0$ y $\widehat{\mathcal{B}}_1$ lo son. Se sigue que $\widehat{\mathcal{B}}_0(e_i, h) = \widehat{\mathcal{B}}_0(e_i, [e_j, f_j]) = \widehat{\mathcal{B}}_0([e_i, e_j], f_j) = 0$ para cada $i, j = 1, ..., n$. Análogamente, $\widehat{\mathcal{B}}_0(f_i, h) = \widehat{\mathcal{B}}_0(h, h) = 0$. Luego, $\widehat{\mathcal{B}}_0$ degenera y por lo tanto $\widehat{\mathcal{B}}$ también.

Por otra parte, supongamos que $\widehat{\mathcal{B}} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ es impar y supersimétrica (resp. superantisimétrica). Entonces $\widehat{\mathcal{B}} \leftrightarrow \Theta$ con $\Theta : \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{h}_1 \to \mathbb{C}$ y $\Lambda : \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_0 \to \mathbb{C}$ tales que $\Theta(v_0, x_1) = \Lambda(x_1, v_0)$ (resp. $\Theta(v_0, x_1) = -\Lambda(x_1, v_0)$), para todos $v_0 \in V_0 \oplus \langle h \rangle,\ x_1 \in V_1$. Si $\widehat{\mathcal{B}}$ es invariante, entonces afirmamos que $\Theta(h, x) = 0$ para todo $x \in V_1$. En efecto, $\Theta(h, x) = \Theta([e_i, f_j], x) = \Theta(e_i, [f_1, x]) = 0$. Por tanto, $\widehat{\mathcal{B}}$ degenera.

CASO 2. La superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada con una forma supersimpléctica impar $\mathcal{B}$. Supongamos que $\widehat{\mathcal{B}} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ es par y supersimétrica (resp. superantisimétrica). Entonces $\widehat{\mathcal{B}} \leftrightarrow (\widehat{\mathcal{B}}_0, \widehat{\mathcal{B}}_1)$ con $\widehat{\mathcal{B}}_0$ simétrica (resp. antisimétrica) en $\mathfrak{h}_0 \simeq V_0$ y $\widehat{\mathcal{B}}_1$ antisimétrica (resp. simétrica) en $\mathfrak{h}_1 \simeq V_1 \oplus \langle h \rangle$. Notemos que si $\widehat{\mathcal{B}}$ es invariante, tenemos $\widehat{\mathcal{B}}([u, x], y) = \widehat{\mathcal{B}}(u, [x, y])$ para cualesquiera $u \in V_0, x, y \in V_1 \oplus \langle h \rangle$, y por tanto, $\Phi(u, x)\widehat{\mathcal{B}}_1(h, y) = 0$. Puesto que Φ no degenera, $\widehat{\mathcal{B}}_1(h, y) = 0$ para todo $y \in V_1$. Por tanto, $\widehat{\mathcal{B}}$ degenera.

Por último observemos que al ser V_0 y V_1 espacios vectoriales de la misma dimensión, en $\mathfrak{h}$ no pueden definirse estructuras ortogonales ni simplécticas invariantes impares. $\square$

La Proposición **5** implica que las superálgebras de Lie de Heisenberg no admiten formas superortogonales ni supersimplécticas invariantes. Por lo tanto, buscamos la posibilidad de definir dichas formas en una superálgebra de Lie ligeramente más grande, que contiene a $\mathfrak{h}$ y se construye en términos de una derivación homogénea $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$.

1.3 Derivaciones de la superálgebra de Lie de Heisenberg

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie. Una *derivación $\mathbb{Z}_2$-graduada* de grado $|D|$ en $\mathfrak{g}$ es una transformación lineal $D \in (\operatorname{End}\mathfrak{g})_{|D|}$ tal que

$$D[u,v] = [Du,v] + (-1)^{|u||D|}[u,Dv]$$

para todos $u, v \in \mathfrak{g}$.

Cuando $|D| = 0$, se dice que la derivación es par; mientras que para $|D| = 1$ se dice que la derivación es impar.

El espacio de derivaciones de una superálgebra de Lie admite una $\mathbb{Z}_2$-graduación, $\operatorname{Der}\mathfrak{g} = (\operatorname{Der}\mathfrak{g})_0 \oplus (\operatorname{Der}\mathfrak{g})_1$. Más aún, admite una estructura de superálgebra de Lie dada por $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|} D_2 \circ D_1$ en elementos homogéneos D_1 y $D_2 \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$. Es un hecho bien conocido que $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ es una sub-superálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ (ver [19]).

Puesto que $\operatorname{Der}(\mathfrak{g}) \subset \operatorname{End}(\mathfrak{g}) = (\operatorname{End}\mathfrak{g})_0 \oplus (\operatorname{End}\mathfrak{g})_1$ y existen isomorfismos $(\operatorname{End}\mathfrak{g})_0 \simeq (\operatorname{End}\mathfrak{g}_0) \oplus (\operatorname{End}\mathfrak{g}_1)$ y $(\operatorname{End}\mathfrak{g})_1 \simeq \operatorname{Hom}(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1) \oplus \operatorname{Hom}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_0)$, una derivación $D \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$ puede expresarse como una matriz por bloques

$$D = \begin{pmatrix} D_{00} & D_{01} \\ D_{10} & D_{11} \end{pmatrix} \text{con} \quad \begin{array}{ll} D_{00} \in \operatorname{End}(\mathfrak{g}_0) & D_{01} \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_0) \\ D_{10} \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1) & D_{11} \in \operatorname{End}(\mathfrak{g}_1) \end{array}$$

y claramente, podemos escribir $D \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ en términos de elementos homogéneos

$$D = D_0 \oplus D_1 = \begin{pmatrix} D_{00} & 0 \\ 0 & D_{11} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & D_{01} \\ D_{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, dada una superálgebra de Lie y una derivación homogénea $D \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$, podemos considerar el superespacio vectorial $\mathfrak{g}(D) = \mathfrak{g} \oplus \langle D \rangle$ y dotarlo con la estructura de superálgebra de Lie definida por $[x+\alpha D, y+\beta D] = [x,y] + \alpha D(y) - \beta D(x) + \alpha\beta[D,D]$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Observemos que $[D,D] \in \mathfrak{g}(D)_i$, $i = 0, 1$. Así, cuando D es par, $\mathfrak{g}(D)$ tiene la estructura usual del producto semidirecto de superálgebras de Lie, mientras que si D es impar tenemos una estructura de superálgebra de Lie dada por la siguiente:

6 Proposición. *Sea $\mathfrak{g}$ una superálgebra de Lie y sea $D \in (\operatorname{Der}\mathfrak{g})_1$ una derivación homogénea. El superespacio vectorial $\mathfrak{g}(D) = \mathfrak{g} \oplus \langle D \rangle$ es una superálgebra de Lie si, y sólo si,* *(i)* $[[D,D],u] = 2(-1)^{\alpha}[[D,u],D]$ *para todo* $u \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ *(*$\alpha = 0,1$*) homogéneo, y*

(ii) $[D,D] \in \mathrm{Ker}(D)$.

En particular, $[D,D] \in Z(\mathfrak{g})$ *si, y sólo si,* $D^2 = 0$.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{g}(D) = \mathfrak{g} \oplus \langle D \rangle$ es una superálgebra de Lie. Puesto que $\mathfrak{g}(D)$ satisface $[\mathfrak{g}(D)_i, \mathfrak{g}(D)_j] \subset \mathfrak{g}(D)_{i+j}$ $(i,j = 0,1)$, y $\mathfrak{g}$ es una sub-superálgebra de Lie de $\mathfrak{g}(D)$, se sigue que $[u_0,v_0] \in \mathfrak{g}_0$, $[u_0,x_1] \in \mathfrak{g}_1$ y $[x_1,y_1] \in \mathfrak{g}_0$ para todos $u_0,v_0 \in \mathfrak{g}_0$ y $x_1,y_1 \in \mathfrak{g}_1 \oplus \langle D \rangle$. Así, $[D,D] \in \mathfrak{g}_0$. Obsérvese que para las tercias (D,D,u), $u \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ $(\alpha = 0,1)$, la identidad de Jacobi implica $[[D,D],u] = (-1)^{\alpha}[[D,u],D]$; mientras que para la tercia (D,D,D), la identidad de Jacobi implica que $[D,D] \in \mathrm{Ker}(D)$.

Para probar el segundo enunciado, observemos que bajo la hipótesis $[D,D] \in Z(\mathfrak{g})$, las condiciones (i) y (ii) se reducen a la siguiente condición: $D^2 = 0$, pues $D = \mathrm{ad}(D)$. □

7 Proposición. *Sea* $\mathfrak{g}$ *una superálgebra de Lie y* $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *una derivación homogénea de* $\mathfrak{g}$.

(i) Si $\mathfrak{g}$ *es soluble,* $\mathfrak{g}(D)$ *es una superálgebra de Lie soluble.*

(ii) Si $\mathfrak{g}$ *es nilpotente, la superálgebra de Lie* $\mathfrak{g}(D)$ *es nilpotente si, y sólo si,* D *es una derivación nilpotente.*

Demostración. (i) Supongamos que $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$ es par (resp. impar). Se sigue entonces que $\mathfrak{g}(D)_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \langle D \rangle$ (resp. $\mathfrak{g}(D)_0 = \mathfrak{g}_0$) es una álgebra de Lie soluble. Luego, el Teorema **4** implica que $\mathfrak{g}(D)$ es una superálgebra de Lie soluble.

(ii) Supongamos que $\mathfrak{g}(D)$ es nilpotente para alguna derivación homogénea $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$. Entonces, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathfrak{g}(D))^k = \{0\}$. Luego, $[x_1,[x_2,...,[x_{k-1},x_k],...,]] = 0$ para todos $x_1,\ldots,x_k \in \mathfrak{g}(D)$ homogéneos. En particular, esto es cierto para $x_1 = \cdots = x_{k-1} = D$ y cualquier $x_k = y \in \mathfrak{g}$. Así, $[D,[D,\ldots,[D,y],\ldots,]] = \mathrm{ad}(D)^{k-1}(y) = 0$ para todo $y \in \mathfrak{g}$. Finalmente, puesto que $\mathrm{ad}(D) = D$, se concluye que D es nilpotente.

El recíproco es una consecuencia del Teorema de Engel. Si D es una derivación homogénea ad-nilpotente, cada elemento en $\mathfrak{g}(D)$ es ad-nilpotente. Por lo tanto $\mathfrak{g}(D)$ es una superálgebra de Lie nilpotente. □

Ahora queremos determinar las derivaciones homogéneas pares e impares para cada una de las superálgebras de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$. Debemos empezar enunciando algunos hechos bien conocidos sobre la estructura del grupo de automorfismos de un álgebra de Lie de Heisenberg ordinaria $\mathfrak{h}_0$ y de su álgebra de Lie de derivaciones.

8 Proposición. *Sea $\mathfrak{h}_0$ el álgebra de Lie de Heisenberg asociada a (V_0, ω) y sea $V_0 = E \oplus F$ una descomposición dada en subespacios isótropos maximales. Entonces*

(i) $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0) = (\mathrm{Sp}(V_0) \times \mathbb{C} - \{0\}) \ltimes V_0$. *De hecho, $A : \mathfrak{h}_0 \to \mathfrak{h}_0$ es un automorfismo si, y sólo si,*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ \alpha^t & a_1 \end{pmatrix}$$

donde $a_1{}^{-1/2} A_1 \in \mathrm{Sp}(V), \alpha \in V.$

(ii) $\mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{sp}(V_0) \oplus \mathbb{C}^{2n+1}$ *(ver [3], Prop.6, pág.324). De hecho: D : $\mathfrak{h}_0 \to \mathfrak{h}_0$ es una derivación si, y sólo si,*

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_3 & \lambda I_n - D_1^t & 0 \\ d_4^t & d_5^t & \lambda \end{pmatrix}$$

donde $D_1 \in \mathrm{End}(E),\ D_2 \in \mathrm{Hom}(F, E),\ D_3 \in \mathrm{Hom}(E, F)$, D_2 y D_3 son simétricas, $d_4,\ d_5 \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Más aún (ver [17], pág. 1125), para cada $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ existe un automorfismo $A \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0)$ tal que

$$ADA^{-1} = \begin{pmatrix} aI_{2n} + X & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}, \quad X \in \mathfrak{sp}(V),\ a \in \mathbb{C}. \qquad \text{(I)}$$

Observación. La tercera afirmación en (ii) muestra que, sin pérdida de generalidad, siempre podemos suponer que una derivación dada $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ puede expresarse como en la ecuación (I).

Ahora estamos en condiciones de calcular las derivaciones homogéneas de cada superálgebra de Lie de Heisenberg.

CASO 1. La superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma supersimpléctica par $\mathcal{B}$. Sabemos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1$ con $\mathfrak{h}_0$ un álgebra de Lie de Heisenberg. Bajo estos supuestos tenemos la siguiente:

9 Proposición. *Sea $D \in (\operatorname{Der}\mathfrak{h})_0$ un derivación par. Entonces existe una base de $\mathfrak{h}$ en la que $D = S \oplus T$ con $S \in \operatorname{Der}(\mathfrak{h}_0)$ y $T \in \operatorname{End}(V_1)$ tales que*

$$D = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aI_{2n} + X & 0 & \\ 0 & 2a & \\ & & T \end{pmatrix}$$

con $X \in \mathfrak{sp}(V, \mathbb{C}), a \in \mathbb{C}$ y $T \in \operatorname{End}(V_1)$ satisface $T^t g + gT = ag$.

En consecuencia,

(i) Si $h \notin \operatorname{Ker} S$, entonces T satisface $T^t g + gT = ag$, siendo $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ el valor propio de S asociado a h.

(ii) Si $h \in \operatorname{Ker} S$, entonces $T \in \mathfrak{o}(V_1)$. En este caso,

$$(\operatorname{Der}\mathfrak{h})_0 = \operatorname{Der}(\mathfrak{h}_0) \oplus \mathfrak{o}(V_1, g).$$

Demostración. Supongamos que $D : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ es una derivación par, es decir, $D(u) = S(u_0) + T(u_1)$ para todo $u = u_0 + u_1 \in \mathfrak{h}$, donde $S \in \operatorname{End}(\mathfrak{h}_0), T \in \operatorname{End}(V_1)$. Debemos verificar $D[u, v] = [Du, v] + [u, Dv]$ para todos los elementos $u, v \in \mathfrak{h}$. Puesto que $Z(\mathfrak{h}) = \langle h \rangle$, basta verificar la regla de Leibniz en elementos homogéneos $u, v \in V = V_0 \oplus V_1$.

Observemos que para todos $u_0, v_0 \in V_0$, la regla de Leibniz implica que $S \in \operatorname{Der}(\mathfrak{h}_0)$. Ahora, la Proposición **8** implica que, sin pérdida de generalidad,

$$S = \begin{pmatrix} aI_{2n} + X & \\ & 2a \end{pmatrix}, X \in \mathfrak{sp}(V_0), a \in \mathbb{C}.$$

Por otra parte, para cada $u_1, v_1 \in V_1$ tenemos $D[u_1, v_1] = [Du_1, v_1] + [u_1, Dv_1]$ si, y sólo si, $ag(u_1, v_1) = g(T(u_1), v_1) + g(u_1, T(v_1))$. Esto es, si, y sólo si, $T^t g + gT = ag$. Finalmente, para todo $u_0 \in V_0$ y $v_1 \in V_1$ la regla de Leibniz se satisface trivialmente pues $[u_0, v_1] = 0$. $\square$

10 Proposición. *Sea $\pi : \mathfrak{h}_0 \to V_0$ la proyección de $\mathfrak{h}_0$ en el espacio simpléctico subyacente asociado. Sea $\iota : V_0 \hookrightarrow \mathfrak{h}_0$ la inclusión de V_0 en $\mathfrak{h}_0$. Una derivación impar $D \in (\operatorname{Der}\mathfrak{h})_1$ es de la forma $D = P \oplus Q$ con $P \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_0)$ y $Q \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1)$ tales que*

(i) $h \in \operatorname{Ker} Q$,

(ii) $M = \omega N^t g$ *donde* $M \in \mathrm{Hom}(V_1, V_0)$ *y* $N \in \mathrm{Hom}(V_0, V_1)$ *son las transformaciones lineales definidas por* $M = \pi \circ P$ *y* $N = Q \circ \iota$*, respectivamente.*

Así, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$ *es una derivación impar si, y sólo si*

$$D = \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & M \\ & & \rho \\ N & 0 & \end{pmatrix}, \ \rho^t \in V_1.$$

Además, existe una base de $\mathfrak{h}$ *en la cual podemos suponer que* $\rho = 0$.

Demostración. Supongamos que $D : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ es una derivación impar, es decir, $D(u) = Q(u_0)+P(u_1)$ para todo $u = u_0+u_1 \in \mathfrak{h}$, donde $P \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_0), Q \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1)$. Nuevamente, basta verificar $D[u, v] = [Du, v] + (-1)^{|D||u|}[u, Dv]$ para todos los elementos $u, v \in V$. Para esto, sea $\pi : \mathfrak{h}_0 \to V_0$ la proyección de $\mathfrak{h}_0$ en el espacio simpléctico subyacente asociado, mientras que $\iota : V_0 \hookrightarrow \mathfrak{h}_0$ denota la inclusión correspondiente. Luego, vamos a considerar las transformaciones lineales $M = \pi \circ P : V_1 \to V_0$ y $N = Q \circ \iota : V_0 \to V_1$.

Obsérvese que para todos $u_0, v_0 \in V_0,\ D[u_0, v_0] = [Du_0, v_0] + [u_0, Dv_0]$ si, y sólo si, $\omega(u_0, v_0)Q(h) = 0$. Puesto que ω no degenera, se concluye que $h \in \mathrm{Ker}\, Q$. Por otra parte, para cada $u_0 \in V_0$ y $v_1 \in V_1,\ D[u_0, v_1] = [Du_0, v_1]+ [u_0, Dv_1]$ si, y sólo si, $0 = g(Nu_0, v_1)+\omega(u_0, Mv_1)$. Luego, $M = \omega N^t g$. Nótese que para todos u_1 y $v_1 \in V_1$, la regla de Leibniz se satisface trivialmente ya que $h \in \mathrm{Ker}(D)$ y además, el producto de elementos pares e impares en $\mathfrak{h}$ es trivial. En resumen, $D : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ es una derivación impar si, y sólo si,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & M \\ & & \rho \\ N & 0 & \end{pmatrix}, \ \rho^t \in V_1,\ M = \omega N^t g.$$

Sea $\{x_1, \ldots, x_m\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{h}_1 \simeq V_1$. e identifiquemos V_1 con V_1^*. Sea $\rho : V_1 \to \mathbb{C}$ el funcional lineal asociado a $\rho^t \in V_1$. Tomemos $\widetilde{D} \in (\mathrm{Der}\,\mathfrak{h})_1$ como antes y definamos $D = \widetilde{D} - \sum_{k=1}^{m} \rho(x_k)\,\mathrm{ad}(x_k)$. Claramente, $D \in (\mathrm{Der}\,\mathfrak{h})_1$ y $D(x_j) = M(x_j)\ \forall\ x_j \in V_1$. Luego, sin pérdida de generalidad, cualquier derivación impar tiene $\widetilde{\rho} = 0$. $\square$

CASO 2. La superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma supersimpléctica par $\mathcal{B}$. Empecemos recordando que la parte par de $\mathfrak{h}$ es un álgebra abeliana de dimensión n, mientras que la parte impar está formada por la suma directa de un espacio vectorial unidimensional y un espacio vectorial de dimensión n. Es decir, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1 = V_0 \oplus (V_1 \oplus \langle h \rangle)$.

11 Proposición. *$D : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ es una derivación par si, y sólo si, existen $S \in \operatorname{End}(V_0),\ T \in \operatorname{End}(V_1), \rho^t \in V_1$ y $a \in \mathbb{C}$ tales que*

$$D = \begin{pmatrix} S & & \\ & T & 0 \\ & \rho & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^t\Phi + \Phi T = a\Phi.$$

Más aún, existe una base de $\mathfrak{h}$ en la que podemos tomar $\rho = 0$.

Demostración. Sea $D : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ una derivación par de $\mathfrak{h}$. Entonces, $D = S \oplus \widetilde{T}$ con $S \in \operatorname{End}(V_0)$ y $\widetilde{T} \in \operatorname{End}(V_1 \oplus \langle h \rangle.)$ Puesto que $Z(\mathfrak{h}) = \langle h \rangle$, basta verificar $D[u,v] = [Du,v] + [u,Dv]$ para todos los elementos $u,v \in V$.

Dado que V_0 tiene una estructura de álgebra de Lie abeliana, la regla de Leibniz se verifica trivialmente para todos u_0 y $v_0 \in V_0$. Por otra parte, dados $u_0 \in V_0$ y $v_1 \in V_1,\ D[u_0,v_1] = [Du_0,v_1] + [u_0,Dv_1]$ si, y sólo si,

$$\Phi(u_0,v_1)\left\{\sum_{k=1}^{n} \widetilde{T}_{k\ n+1} x_k + ah\right\} = \left\{\Phi(Su_0,v_1) + \Phi(u_0,Tv_1)\right\} h,$$

donde $\{x_1,\ldots,x_n\}$ es una base de V_1. Puesto que Φ no degenera, $\widetilde{T}_{k\ n+1} = 0$ para todo $k = 1,\ldots,n$. También tenemos que $S^t\Phi + \Phi T = a\Phi$. Entonces, $D : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ es una derivación par si, y sólo si,

$$D = \begin{pmatrix} S & & \\ & T & 0 \\ & \rho & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^t\Phi + \Phi T = a\Phi$$

donde $S \in \operatorname{End}(V_0), T \in \operatorname{End}(V_1), \rho \in V_1$ y $a \in \mathbb{C}$.

Sean $\{v_1,\ldots,v_n\}$ y $\{x_1,\ldots,x_n\}$ bases de V_0 y V_1, respectivamente. Identificando $V_1 \simeq V_1^*$, sea $\rho : V_1 \to \mathbb{C}$ el funcional lineal asociado a $\rho^t \in V_1$. Sea $D \in (\operatorname{Der}\mathfrak{h})_0$ como antes y tomemos $\widetilde{D} = D - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \operatorname{ad}(v_k),\ \alpha_k \in \mathbb{C}$. Claramente, $\widetilde{D}$ es una derivación par de $\mathfrak{h}$. Observemos para todo $x_j \in V_1$ se tiene $\widetilde{D}(x_j) = T(x_j) + \rho(x_j)h - \alpha_k\Phi(v_k,x_j)h$. Dado que Φ no degenera, siempre podemos escoger los escalares $\alpha_k \in \mathbb{C}$ como aquellos que satisfacen las ecuaciones $\rho(x_j) = \Phi\alpha_j$ para todo $j = 1,\ldots,n$. Por tanto, $\widetilde{D}(x_j) = T(x_j)$ y sin pérdida de generalidad, podemos considerar que cualquier derivación impar tiene $\widetilde{\rho} = 0$. $\square$

12 Proposición. *Sea $\pi : V_1 \oplus \langle h \rangle \to V_1$ la proyección de $V_1 \oplus \langle h \rangle$ al primer factor, V_1, y sea $\iota : V_1 \hookrightarrow V_1 \oplus \langle h \rangle$ la inclusión de V_1 en $V_1 \oplus \langle h \rangle$. Una derivación de grado impar $D \in (\mathrm{Der}\,\mathfrak{h})_1$ es de la forma $D = P \oplus Q$ con $P \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_0)$ y $Q \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1)$, tales que*

(i) $h \in \mathrm{Ker}\, P$,

(ii) $N^t\Omega + \Phi N = 0$ *y* $M^t\Phi - \Omega M = 0$ *donde* $N \in \mathrm{Hom}(V_0, V_1)$ *y* $M \in \mathrm{Hom}(V_1, V_0)$ *son transformaciones lineales definidas por* $N = \pi \circ P$ *y* $M = Q \circ \iota$, *respectivamente.*

De hecho $D : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ es una derivación impar si, y sólo, si

$$D = \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & M & 0 \\ N & & \\ \rho & & \end{pmatrix},$$

donde $\rho^t \in V_0,\ N^t\Omega + \Phi N = 0$ y $M^t\Phi - \Omega M = 0$. Además, existe una base de $\mathfrak{h}$ para la cual podemos suponer que $\rho = 0$.

Demostración. . Sea $D : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ una derivación impar de $\mathfrak{h}$. Entonces, $D = P \oplus Q$ con $P \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_0)$ y $Q \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1)$. Basta verificar $D[u, v] = [Du, v] + (-1)^{|D||u|}[u, Dv]$ para todos los elementos $u, v \in V$. Para eso, sea $\pi : V_1 \oplus \langle h \rangle \to V_1$ la proyección de $V_1 \oplus \langle h \rangle$ en V_1, y sea $\iota : V_1 \hookrightarrow V_1 \oplus \langle h \rangle$ la inclusión de V_1 en $V_1 \oplus \langle h \rangle$. Consideremos ahora $M \in \mathrm{Hom}(V_1, V_0)$ y $N \in \mathrm{Hom}(V_0, V_1)$ dadas por $M = P \circ \iota$ y $N = \pi \circ Q$ respectivamente.

Observemos que para todos u_0 y v_0 en V_0, se tiene $D[u_0, v_0] = [Du_0, v_0] + [u_0, Dv_0]$ si, y sólo si, $N^t\Omega + \Phi N = 0$. Por otra parte, para cada $u_0 \in V_0$ y $v_1 \in V_1,\ D[u_0, v_1] = [Du_0, v_1] + [u_0, Dv_1]$ si, y sólo si, $\Phi(u_0, v_1)P(h) = 0$. Puesto que Φ no degenera, $h \in \mathrm{Ker}(P)$. Finalmente, para todos $u_1, v_1 \in V_1,\ D[u_1, v_1] = [Du_1, v_1] - [u_1, Dv_1]$ si, y sólo si, $M^t\Phi - \Omega M = 0$. En resumen, $D : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ es una derivación impar de $\mathfrak{h}$ si, y sólo si,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & M & 0 \\ N & & \\ \rho & & \end{pmatrix},$$

donde $\rho^t \in V_0,\ N^t\Omega + \Phi N = 0$ y $M^t\Phi - \Omega M = 0$.

Sean $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $\{x_1, \dots, x_n\}$ bases de V_0 y V_1, respectivamente. Identifiquemos $V_0 \simeq V_0^*$, y sea $\rho : V_0 \to \mathbb{C}$ el funcional lineal asociado a $\rho^t \in V_0$. Tomemos

$\widetilde{D} \in (\mathrm{Der}\, \mathfrak{h})_1$ como antes y consideremos $D = \widetilde{D} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \mathrm{ad}(x_k)$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$. Claramente, $D \in (\mathrm{Der}\, \mathfrak{h})_1$ y $D(v_j) = N(v_j) + \rho(v_j)h - \alpha_j \Omega(x_j, v_j)h$. Puesto que Ω no degenera, siempre podemos escoger los escalares $\alpha_k \in \mathbb{C}$ como aquellos que satisfacen las ecuaciones $\rho(v_j) = \Omega \alpha_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, podemos suponer que cualquier derivación impar tiene $\widetilde{\rho} = 0$. $\square$

Convención. En lo sucesivo, trabajaremos con derivaciones homogéneas $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$ tales que $\rho = 0$.

Capítulo 2

Superálgebras de Lie solubles con nilradical Heisenberg

Sea $\mathfrak{h}$ una superálgebra de Lie de Heisenberg y sea $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$ una derivación homogénea de $\mathfrak{h}$. Queremos dotar al superespacio vectorial $\mathfrak{h}(D) = \mathfrak{h} \oplus \langle D \rangle$ de una estructura de superálgebra de Lie bajo el supuesto de que su ideal nilpotente maximal sea precisamente $\mathfrak{h}$. A este ideal se le llama el nilradical de $\mathfrak{h}(D)$ y se denota por $N(\mathfrak{h}(D))$. Claramente, cualquier álgebra de Lie soluble satisface esta condición. Luego, nos interesa determinar las consecuencias de su generalizacón natural a las superálgebras de Lie solubles, en particular, a las de tipo Heisenberg.

Sea $N(\mathfrak{h})$ el nilradical de un álgebra de Lie soluble $\mathfrak{h}$. Es un hecho bien conocido que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset N(\mathfrak{h})$ (ver [13]). Puesto que el Teorema de Lie no necesariamente es válido para una superálgebra de Lie $\mathfrak{h}$, no podemos asegurar que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset N(\mathfrak{h})$. Sin embargo, como $\mathfrak{h}$ debe ser una sub-superálgebra de $\mathfrak{h}(D)$, se verifica que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset N(\mathfrak{h})$.

El planteamiento realizado en el párrafo anterior nos lleva a formular el segundo problema que se aborda en esta tesis: a partir de una superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ y un superespacio vectorial $\mathfrak{a}$, nos interesa determinar las condiciones bajo las cuales podemos construir superálgebras de Lie solubles de la forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$, que no se descompongan en suma directa de ideales y que contengan a $\mathfrak{h}$ como nilradical. Una vez construidas las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ que nos interesan, daremos condiciones necesarias y suficiente para decidir cuándo dos de ellas son isomorfas.

2.1 Construcción de las superálgebras de Lie $\mathfrak{h}(D)$

Sea $\mathfrak{h}$ una superálgebra de Lie de Heisenberg y sea $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$ una derivación homogénea de $\mathfrak{h}$. Como mencionamos anteriormente, nuestra primera tarea es dotar al superespacio vectorial $\mathfrak{h}(D) = \mathfrak{h} \oplus \langle D \rangle$ de una estructura de superálgebra de Lie tal que $N(\mathfrak{h}(D)) = \mathfrak{h}$. Puesto que el Teorema de Lie no necesariamente es válido para una superálgebra de Lie soluble $\mathfrak{g}$, no podemos asegurar que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset N(\mathfrak{g})$. Sin embargo, en nuestro caso observamos que $\mathfrak{h}$ debe ser una sub-superálgebra de $\mathfrak{g}$ y además, al verificarse $[\mathfrak{h}(D)_i, \mathfrak{h}(D)_j] \subseteq \mathfrak{h}(D)_{i+j}$ $(i, j = 0, 1)$, se cumple que $[\mathfrak{h}(D), \mathfrak{h}(D)] \subset \mathfrak{h}$. Observemos que para $D \in (\mathrm{Der}\, \mathfrak{h})_0$, la Proposición **7** dice que el superespacio vectorial $\mathfrak{h}(D)$ es una superálgebra de Lie soluble con nilradical $\mathfrak{h}$; mientras que para $D \in (\mathrm{Der}\, \mathfrak{h})_1$, las Proposiciones **6** y **7** indican que $\mathfrak{h}(D)$ es una superálgebra de Lie nilpotente al segundo paso, puesto que $[D, D] \in Z(\mathfrak{h}) = \langle h \rangle$. Más precisamente:

13 Proposición. *Sea $\mathcal{B}$ una forma supersimpléctica, y sea $\mathfrak{h} = V_0 \oplus V_1 \oplus \langle h \rangle$ la superálgebra de Lie de Heisenberg asociada. Sea $D \in (\mathrm{Der}\, \mathfrak{h})_1$ una derivación impar homogénea de $\mathfrak{h}$. El superespacio vectorial $\mathfrak{h}(D) = \mathfrak{h} \oplus \langle D \rangle$ es una superálgebra de Lie tal que $[\mathfrak{h}(D), \mathfrak{h}(D)] \subset \mathfrak{h}$ si, y sólo si, $D^2 = 0$, y existe un escalar $r \in \mathbb{C}$, tal que*

$$\begin{aligned} [u, v] &= \mathcal{B}(u, v)h, & [u, h] &= 0, \\ [D, u] &= D(u), & [D, D] &= rh, \ r \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

para todos $u, v \in V$. Más aún, $\mathfrak{h}(D)$ es nilpotente al segundo paso.

Demostración. Sea $\mathfrak{h}$ la superálgebra de Lie de Heisenberg asociada a una forma supersimpléctica par (resp. impar).

$\Rightarrow$) Sea $D \in (\mathrm{Der}\, \mathfrak{h})_1$ como en la Proposición **10** (resp. Proposición **12**). Supongamos que $\mathfrak{h}(D)$ es una superálgebra de Lie. Observemos que la Proposición **6** y la identidad de Jacobi implican que $MN = 0, NM = 0$ y $[D, D] = rh$. Por lo tanto,

$$\mathrm{ad}(D) = \begin{pmatrix} & & M & 0 \\ & & 0 & r \\ N & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}, \ M = \omega N^t g, \ r \in \mathbb{C}$$

(resp.

$$\mathrm{ad}(D) = \begin{pmatrix} & M & 0 & 0 \\ N & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \ N^t\Omega + \Phi N = 0, \ M^t\Phi - \Omega M = 0).$$

Claramente, $D^2 = 0$ puesto que $D = \mathrm{ad}(D)$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $D \in (\mathrm{Der}\,\mathfrak{h})_1$ es tal que $D^2 = 0$. Queremos que $\mathfrak{h}(D) = \mathfrak{h} \oplus \langle D \rangle$ sea una superálgebra de Lie que contiene a $\mathfrak{h}$ como un ideal nilpotente de codimensión uno. Puesto que $D^2 = 0$ implica $[D, D] \in \mathrm{Ker}(D)$, la afirmación es una consecuencia de la Proposición **6**. □

Dado que nuestros resultados se aplicarán tanto a álgebras como a superálgebras de Lie, a partir de este momento sólo consideramos superálgebras de Lie que tienen a $\mathfrak{h}$ como su nilradical.

2.2 Clasificación de las superálgebras de Lie $\mathfrak{h}(D)$

Sean $\mathfrak{h}(D)$ y $\mathfrak{h}(D')$ superalgebras de Lie con $D, D' \in (\mathrm{Der}\,\mathfrak{h})_0$, entonces se tiene que $N(\mathfrak{h}(D)) = N(\mathfrak{h}(D')) = \mathfrak{h}$. Estamos interesados en determinar las condiciones para establecer un isomorfismo $\varphi : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D')$.

14 Teorema. *Sea $\mathcal{B}$ una forma supersimpléctica y sea $\mathfrak{h}$ la superálgebra de Lie de Heisenberg asociada. Sean $D, D' \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$ derivaciones pares tales que $\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Ker}(D') = \langle h \rangle$. Las superálgebras de Lie $\mathfrak{h}(D)$ y $\mathfrak{h}(D')$ son isomorfas si, y sólo si,*

(i) Caso $|\mathcal{B}| = 0$. Existen $A \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0), v \in \mathfrak{h}_0, a \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $B \in G = \{B \in \mathrm{GL}(V_1) : \exists b \neq 0, \ bg(x, y) = g(Bx, By) \ \forall x, y \in V_1\}$ tales que

$$D' = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} ASA^{-1} - \mathrm{ad}(v) & \\ & BTB^{-1} \end{pmatrix} \tag{II}$$

donde $D = S \oplus T, D' = S' \oplus T'$ con $S, S' \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ y $T, T' \in \mathfrak{o}(V_1)$.

En este caso, el isomorfismo $\varphi : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D')$ está dado por

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & v & \\ 0 & a & \\ & & B \end{pmatrix}.$$

(ii) Caso $|\mathcal{B}| = 1$. *Existen* $A \in \mathrm{GL}(V_0), v \in V_0, a \neq 0, B \in \mathrm{GL}(V_1)$ *y* $b \neq 0$ *tales que*

$$D' = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} ASA^{-1} & \\ & BTB^{-1} - \mathrm{ad}(v) \end{pmatrix} \tag{III}$$

donde $D = S \oplus T, D' = S' \oplus T'$ *con* $S, S' \in \mathrm{End}(V_0)$ *y* $T, T' \in \mathrm{End}(V_1)$ *tales que* $S^t\Phi + \Phi T = 0$.

En este caso, el isomorfismo $\varphi : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D)$ *está dado por*

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & v & & \\ 0 & a & & \\ & & B & 0 \\ & & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Demostración. Analizamos los casos $|\mathcal{B}| = 0$ y $|\mathcal{B}| = 1$ por separado.

CASO 1 La superálgebra de Lie de Heisenberg asociada a una forma supersimpléctica par $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow$) Supongamos que $\varphi : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D')$ es un isomorfismo de superálgebras de Lie. Sabemos que $\varphi = \varphi_0 \oplus B$ donde $\varphi_0 : \mathfrak{h}_0(D) \to \mathfrak{h}_0(D)$ es un isomorfismo de álgebras de Lie, y $B : V_1 \to V_1$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Debemos usar el siguiente hecho bien conocido: para cualquier isomorfismo de álgebras de Lie $\varphi_0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}', \varphi_0(Z(\mathfrak{g})) = Z(\mathfrak{g}')$ y $\varphi_0(N(\mathfrak{g})) = N(\mathfrak{g}')$. Puesto que $D, D' \in (\mathrm{Der}\,\mathfrak{h})_0$ son derivaciones tales que $\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Ker}(D') = \langle h \rangle$, tenemos que $Z(\mathfrak{h}(D)) = Z(\mathfrak{h}(D')) = \langle h \rangle$. También se sigue que D y D' son transformaciones no nilpotentes. Entonces, $\mathfrak{h}_0(D)$ y $\mathfrak{h}_0(D')$ son álgebras de Lie solubles que tienen por nilradical a $\mathfrak{h}_0$. Luego, $[\mathfrak{h}_0(D), \mathfrak{h}_0(D)] \subset \mathfrak{h}_0$ y $[\mathfrak{h}_0(D'), \mathfrak{h}_0(D')] \subset \mathfrak{h}_0$. Entonces, $\varphi : \mathfrak{h}_0(D) \to \mathfrak{h}_0(D')$ está dado por

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0), v \in \mathfrak{h}_0, a \neq 0.$$

Puesto que $\varphi : \mathfrak{h}_0(D) \to \mathfrak{h}_0(D')$ es un morfismo de álgebras de Lie, $\varphi[D, x] = [\varphi D, \varphi x]$ para todos $x \in \mathfrak{h}_0$. Despejando $D'|_{\mathfrak{h}_0}$ de esta ecuación obtenemos

$$D'|_{\mathfrak{h}_0} = a^{-1}(A \circ D|_{\mathfrak{h}_0} \circ A^{-1} - \mathrm{ad}(v)).$$

Dado que φ es un isomorfismo de superálgebras de Lie, $\varphi[x, y] = [\varphi x, \varphi y]$ $\forall\ x, y \in \mathfrak{h}(D)$. En particular, para todos $x, y \in V_1$ tenemos

$$\varphi[x, y] = [\varphi x, \varphi y] \Leftrightarrow ag(x, y)h = g(Bx, By)h.$$

Luego, $B \in G$. Despejando ahora $D'|_{\mathfrak{h}_1}$ de $\varphi[D, y] = [\varphi D, \varphi y]$ con $y \in V_1$, tenemos

$$D'|_{\mathfrak{h}_1} = a^{-1} B T B^{-1}.$$

Por lo tanto, obtenemos la expresión para $D' \in (\mathrm{Der}\,\mathfrak{h})_0$ dada en el enunciado.

$\Leftarrow$) Por otra parte, supongamos que existe una cuarteta (A, v, a, B) con $A \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0), v \in \mathfrak{h}_0, a \neq 0$ y $B \in G$ satisfaciendo (II). Definamos $\varphi : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D)$ por $\varphi(x) = A(x)$ para todo $x \in \mathfrak{h}_0, \varphi(D) = aD' + v$ y $\varphi(y) = By$ para todo $y \in V_1$. Claramente, φ es biyectiva. Para mostrar que φ es un morfismo de superálgebras de Lie es suficiente verificar que $\varphi[D, x] = [\varphi(D), \varphi(x)]$ para todo $x \in \mathfrak{h}$, pero esto se sigue de la ecuación (II).

CASO 2 La superálgebra de Lie de Heisenberg asociada a una forma supersimpléctica impar $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow$)) Supongamos que $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D)$ es un isomorfismo de superálgebras de Lie. Sabemos que $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi_0} \oplus \widetilde{\varphi_1}$ donde $\widetilde{\varphi_0} : V_0(D) \to V_0(D)$ es un isomorfismo de álgebras de Lie y $\widetilde{\varphi_1} : V_1 \oplus \langle h \rangle \to V_1 \oplus \langle h \rangle$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Puesto que $\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Ker}(D') = \langle h \rangle$, D y D' son derivaciones no nilpotentes. Notemos que $V_0(D)$ y $V_0(D')$ son álgebras de Lie solubles que tienen por nilradical a V_0. Por otra parte, puesto que $D(h) = D'(h) = 0$, se sigue que $Z(\mathfrak{h}(D)) = Z(\mathfrak{h}(D')) = \langle h \rangle$. Luego,

$$\widetilde{\varphi_0} = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \widetilde{\varphi_1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ \beta & b \end{pmatrix}$$

donde $A \in \mathrm{GL}(V_0), v \in V_0, a \neq 0, B \in \mathrm{GL}(V_1), \beta \in V_1$ y $b \neq 0$.

Observemos que siempre podemos encontrar un automorfismo $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}(D))$ tal que $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \psi : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D')$ es diagonal. De hecho,

$$\psi = \begin{pmatrix} I_{V_0} & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & I_{V_1} & 0 \\ & & -b^{-1}\beta & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \begin{pmatrix} A & v & & \\ 0 & a & & \\ & & B & 0 \\ & & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\varphi : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D)$ es un isomorfismo de álgebras de Lie, $\varphi[x, y] = [\varphi x, \varphi y]$ para todos $x, y \in \mathfrak{h}(D)$. En particular, para todo $u \in V_0$, $\varphi[D, u] = [\varphi D, \varphi u]$ si, y sólo si, $ASu = aS'Au$; mientras que para todo $x \in V_1$ tenemos $\varphi[D, x] = [\varphi D, \varphi x]$ si, y sólo si, $BTx = aT'Bx + \mathrm{ad}(v)Bx$. Por lo tanto, despejando S' y T' de estas ecuaciones, se obtiene la expresión para D' dada en el enunciado.

$\Leftarrow$ La prueba de esta implicacin es la misma que en la Proposicin anterior. $\square$

Observación. En el Teorema **14**, una condición necesaria para que las superálgebras de Lie $\mathfrak{h}(D)$ y $\mathfrak{h}(D')$ sean isomorfas es que $\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Ker}(D') = \langle h \rangle$. Esta condición se obtiene del hecho de que tanto $\mathfrak{h}(D)$ como $\mathfrak{h}(D')$ satisfacen que $[D, D] \in \mathrm{Ker}(D)$ y $[D', D'] \in \mathrm{Ker}(D')$ respectivamente.

2.3 Construcción de las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$, con $\mathfrak{a}$ un superespacio vectorial par

En la sección anterior, tomando como base una superálgebra de Lie de Heisenberg y una derivación par, $D \in (\mathrm{Der}\, \mathfrak{h})_0$, construimos y clasificamos hasta isomorfismo una superálgebra de Lie soluble cuyo nilradical es, precisamente, $\mathfrak{h}$. Esto nos motiva a plantear la siguiente pregunta: dada una superálgebra de Lie de Heisenberg, ¿cómo podemos construir superálgebras de Lie solubles, que no se descomponen en suma directa de ideales y tales que su nilradical sea $\mathfrak{h}$? Revisando la literatura encontramos que para el caso de las álgebras de Lie solubles, este problema fue resuelto por Rubin y Winternitz (ver [17]). Más aún, se han realizado trabajos en esta dirección fijando otras álgebras de Lie nilpotentes como nilradical, por ejemplo [12], [11], [20], [22] y [23]. En esta sección presentamos el resultado para el caso $\mathbb{Z}_2$-graduado y señalamos la diferencia que existe para el caso de álgebras de Lie.

Ahora bien, sea $\mathcal{B}$ una forma supersimpléctica homogénea en $V = V_0 \oplus V_1$, y sea $\mathfrak{h} = V_0 \oplus V_1 \oplus \langle h \rangle$ la superálgebra de Lie de Heisenberg asociada. Dado un superespacio vectorial $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_1$, consideremos $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$. Nuestro objetivo es dotar a $\mathfrak{g}$ de una estructura de superálgebra de Lie tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. Al igual que en la sección anterior, pidiendo que $\mathfrak{h}$ sea una sub-superálgebra de $\mathfrak{g}$, se verifica fácilmente que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$; sin embargo, a diferencia de lo que ocurre para álgebras de Lie, no podemos asegurar que el nilradical de $\mathfrak{g}$ sea $\mathfrak{h}$, pues $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_1$ es otro ideal nilpotente que contiene propiamente a $\mathfrak{h}$. Esto nos proporciona un criterio de nilpotencia que enunciaremos a continuación y que demostraremos más adelante:

Proposición. *Sea $\mathfrak{h}$ una superálgebra de Lie de Heisenberg y sea $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_1$ un superespacio vectorial tal que $\mathfrak{a}_1 \neq 0$. El superespacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$*

admite una estructura de superálgebra de Lie tal que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$*, si, y sólo si,* $\mathfrak{a}_1$ *es un subespacio impar formado por elementos nilpotentes. En particular, si* $\mathfrak{a}_0 = \{0\}$ *,* $\mathfrak{g}$ *es nilpotente.*

Obsérvese que de la Proposición anterior se sigue que el nilradical de $\mathfrak{g}$ contiene propiamente a la superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$.

Ahora consideremos el espacio vectorial $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Decimos que un conjunto de matrices $\{X_i \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) | i \in I\}$ *no es nilpotente* si para toda combinación lineal $X = \sum_i c_i X_i$, se tiene que $X^n = 0$ implica $c_i = 0$ para todo $i \in I$.

Obsérvese que con esta definición, el cero es el único elemento nilpotente permitido en el conjunto. Por tanto, cualquier combinación lineal de los X_i no es nilpotente.

Sabemos que en una superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ un elemento homogéneo $x \in \mathfrak{g}$ es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{ad}(x)^k(y) = 0$ para todo $y \in \mathfrak{g}$. Entonces, de forma análoga, en $\mathfrak{g}$ se define un conjunto de elementos homogéneos no nilpotentes.

Sea $\mathcal{B}$ una forma supersimpléctica en $V = V_0 \oplus V_1$ y sea $\mathfrak{h}$ la superálgebra de Lie de Heisenberg asociada. Como ya se mencionó, en analogía a lo que sucede con las álgebras de Lie solubles, estamos interesados en estudiar y clasificar las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ tales que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ y $N(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$. Así que en primer lugar, nos concentraremos en el análisis de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ cuando $\mathfrak{a}$ es un espacio vectorial *par* formado por elementos no nilpotentes. Analizamos los casos $|\mathcal{B}| = 0$ y $|\mathcal{B}| = 1$ por separado.

CASO 1 Superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma supersimpléctica par $\mathcal{B}$. Sea $\mathfrak{h}$ la superálgebra de Lie de Heisenberg asociada a una forma supersimpléctica par, y sea $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n, h, x_1, \ldots, x_m\}$ una base para $\mathfrak{h}$. Sea $\mathfrak{a} = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_\ell \rangle$ un subespacio vectorial par de $\mathfrak{gl}(2n+1|m)$, formado por elementos no nilpotentes. Consideremos el superespacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$, y determinemos las condiciones para que $\mathfrak{g}$ admita una estructura de superálgebra de Lie soluble tal que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ y $N(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$. Observemos que si el conjunto $\mathfrak{a}$ es nilpotente, el nilradical de $\mathfrak{g}$ contiene propiamente a $\mathfrak{h}_0$.

Observemos que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_0$ y $\mathfrak{g}_1 = V_1$ y recordemos que $\mathfrak{h}_0$ es el álgebra de Lie de Heisenberg. Puesto que debe cumplirse $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ $(i,j = 0,1)$, al pedir que $\mathfrak{h}$ sea una sub-superálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, claramente tenemos que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. En efecto, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] \subset V_1$, $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{h}_0$ y $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{h}_0$, pues al ser $\mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{a}$

un álgebra de Lie soluble, su álgebra derivada está contenida en su nilradical, que es $\mathfrak{h}_0$.

Ahora bien, la acción de $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{h}$ debe producir elementos en $\mathfrak{h}$. Es decir, $[\sigma_i, x] \in \mathfrak{h}$ para todo $x \in \mathfrak{h}$. Además, $[\sigma_i, \sigma_j] \in \mathfrak{h}_0$ para todo $i, j = 1, \ldots, \ell$. Así, verificando la identidad de Jacobi en los elementos homogéneos de $\mathfrak{g}$, obtendremos restricciones sobre los $\sigma_i \in \mathfrak{a}$.

Notemos que de la identidad de Jacobi para la tercia (σ_i, x, y) con $x, y \in \mathfrak{h}_i$ $(i = 0, 1)$, se sigue que la restricción de $\operatorname{ad}(\sigma_i)$ a $\mathfrak{h}$ es una derivación par de $\mathfrak{h}$. En el Capítulo 1, Proposición **9**, describimos explícitamente la estructura de estas derivaciones. Luego,

$$\operatorname{ad}(\sigma_i)|_{\mathfrak{h}} = \begin{pmatrix} a_i I_{2n} + X_i & 0 & \\ 0 & 2a_i & \\ & & T_i \end{pmatrix} \quad i = 1, \ldots, \ell$$

donde $a_i \in \mathbb{C}, X \in \mathfrak{sp}(V_0)$ y $T \in \operatorname{End}(V_1)$ es tal que $T_i^t g + g T_i = a_i g$. Tomando combinaciones lineales adecuadas de los $\operatorname{ad}(\sigma_i)$ podemos considerar, sin pérdida de generalidad, $a_1 = 0$ ó 1, y $a_i = 0$ para todo $i \geq 2$, es decir,

$$\operatorname{ad}(\sigma_1)|_{\mathfrak{h}} = \begin{pmatrix} a_1 I_{2n} + X_1 & 0 & \\ 0 & 2a_1 & \\ & & T_1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{ad}(\sigma_i)|_{\mathfrak{h}} = \begin{pmatrix} X_i & 0 & \\ 0 & 0 & \\ & & T_i \end{pmatrix}.$$

Dado que $[\sigma_i, \sigma_j] \in \mathfrak{h}_0$, expresamos este producto como una combinación lineal de elementos de $\mathfrak{h}_0$, es decir,

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \gamma_{ij}^k e_k + \mu_{ij}^k f_k + r_{ij} h$$

con $\gamma_{ij}^k, \mu_{ij}^k, r_{ij} \in \mathbb{C}$, para todos $i, j = 1, \ldots, \ell; k = 1, \ldots, n$.

La identidad de Jacobi en la tercia $(\sigma_i, \sigma_j, e_k)$ implica

$$-\mu_{ij}^k h + [\sigma_i, [\sigma_j, e_k]] - [\sigma_j, [\sigma_i, e_k]] = 0.$$

Observando que $[\sigma_i, [\sigma_j, e_k]] - [\sigma_j, [\sigma_i, e_k]] = X_i X_j e_k - X_j X_i e_k \in \langle e_k, f_k \rangle$, se concluye $\mu_{ij}^k = 0$. Análogamente, para $(\sigma_i, \sigma_j, f_k)$ se sigue $\gamma_{ij}^k = 0$. Más aún, las matrices X_i deben conmutar.

Ahora bien, de la identidad de Jacobi para $(\sigma_1, \sigma_i, \sigma_j)$, con $i \neq j$ e $i, j \neq 1$ para que la identidad no sea trivial, se sigue que,

$$\begin{aligned} 0 &= [\sigma_1, [\sigma_i, \sigma_j]] + [\sigma_i, [\sigma_j, \sigma_1]] + [\sigma_j, [\sigma_1, \sigma_i]] \\ &= 2r_{ij}a_1 h. \end{aligned}$$

Entonces, $a_1 = 1$ implica $r_{ij} = 0$ para todo $i, j \neq 1$. Redefiniendo $\widetilde{\sigma}_i = \sigma_i - \frac{1}{2}r_{1i}h$, tenemos $[\sigma_1, \widetilde{\sigma}_i] = 0$. Luego, $r_{ij} = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, \ell$.

Por otra parte, es fácil ver que la identidad de Jacobi graduada en la tercia $(\sigma_i, \sigma_j, v_k)$ se satisface si, y sólo si, las matrices T_i conmutan, es decir, $T_iT_j = T_jT_i$ para todo $i, j = 1, \ldots, \ell$.

Obsérvese que cuando $a_1 = 0$, las matrices $X_1 \in \mathfrak{sp}(V_0)$ y $T_1 \in \mathfrak{o}(V_1)$ no pueden ser nilpotentes simultáneamente. Sin embargo, para $a_1 = 1$, las matrices $X_1 \in \mathfrak{sp}(V_0)$ y $T_1 \in \mathrm{End}(V_1)$ con $T_1^t g + gT_1 = g$, pueden ser arbitrarias, incluso X_1 puede ser cero.

Notemos que la construcción que se ha hecho es válida tanto para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ como para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Luego, podemos enunciar el siguiente

15 Teorema. *Sea $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{gl}(2n+1|m)$ un sub-superespacio vectorial par formado por elementos no nilpotentes. Una superálgebra de Lie soluble real o compleja, de la forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$, tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, que no se descompone en suma directa de ideales, y que tiene a la superálgebra de Lie de Heisenberg como su nilradical, puede expresarse en una base canónica $\{e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n, h, x_1, \ldots, x_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_\ell\}$, bajo las siguientes relaciones de conmutación como sigue:*

$$\begin{gathered} [e_i, f_j] = \omega(e_i, f_j)h \quad i, j = 1, \ldots, n \\ [x_i, x_j] = g(x_i, x_j)h \quad i, j = 1, \ldots, m \\ \begin{pmatrix} [\sigma_k, e] \\ [\sigma_k, f] \\ [\sigma_k, h] \\ [\sigma_k, x] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k I_{2n} + X_k & 0 & \\ 0 & 2a_k & \\ & & T_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \\ h \\ x \end{pmatrix} \\ [\sigma_i, \sigma_j] = r_{ij}h \qquad r_{ij} \in \mathbb{F}, i, j = 1, \ldots, \ell, \end{gathered}$$

donde $e^t = (e_1, ..., e_n)$, $f^t = (f_1, ..., f_n)$, y $x^t = (x_1, \ldots, x_m)$.

Las constantes a_i satisfacen $a_1 = 0$ ó 1, $a_2 = \cdots = a_\ell = 0$. Las constantes r_{ij} satisfacen $r_{ij} = -r_{ij} = 0$ para $a_1 = 1$, y $r_{ks} = -r_{sk} \in \mathbb{F}$ para $a_1 = 0$.

Los elementos de $\{X_1, ..., X_\ell\}$ satisfacen $X_i \in \mathfrak{sp}(V_0)$ y $[X_i, X_j] = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq \ell$. Es decir, $\{X_i\}$ es una subálgebra abeliana del álgebra de Lie simpléctica $\mathfrak{sp}(V_0)$. Los elementos de $\{T_1, ..., T_\ell\}$ satisfacen $T_i \in \mathfrak{gl}(V_1)$ y $[T_i, T_j] = 0$. Además, para

(i) $a_1 = 0,\ \ T_i \in \mathfrak{o}(V_1)\ \forall i = 1, \ldots, \ell$, *es decir,* $\{T_1, ..., T_\ell\}$ *es una subálgebra abeliana de* $\mathfrak{o}(V_1)$*. En este caso, las parejas* (X_i, T_i) *están formadas por elementos no nilpotentes.*

(ii) $a_1 = 1,\ T_1 \in \mathfrak{gl}(V_1)$ *es tal que* $T_1^t g + gT_1 = g$, *y* $T_i \in \mathfrak{o}(V_1),\ i \geq 2$. *En este caso, las parejas* $(X_i, T_i),\ i \geq 2$ *están formadas por elementos no nilpotentes y la pareja* (X_1, T_1) *es arbitraria.*

Observaciones.

(a) El centro del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ es $\langle h \rangle$ si, y sólo si, $a_1 = 0$.

(b) Si $a_1 = 0$, para que la pareja (X_1, T_1) esté formada por elementos no nilpotentes, basta con que X_1 ó T_1 no lo sean. De esto se sigue que para determinar la dimensión máxima de $\mathfrak{a}$, necesitamos conocer el número máximo de elementos no nilpotentes $X_i \in \mathfrak{sp}(V_0)$ y $T_i \in \mathrm{End}(V_1)$ con $T_i^t g + gT_i = a_i g$, que podemos adjuntar. Esto equivale a conocer la dimensión de las subálgebras abelianas maximales de $\mathfrak{sp}(V_0)$ y $\mathfrak{o}(V_1)$.

Los trabajos de Patera y Winternitz (ver [7] y [16]), proporcionan guías para la clasificación de las subálgebras abelianas maximales de $\mathfrak{sp}(V_0)$ y $\mathfrak{o}(V_1)$. Por lo que un trabajo a futuro puede ser determinar, en cada dimensión, cuántas subálgebras abelianas maximales admiten $\mathfrak{sp}(V_0)$ y $\mathfrak{o}(V_1)$, con el fin de establecer la dimensión máxima posible de las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$.

CASO 2 Superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma supersimpléctica impar $\mathcal{B}$. Sea $\mathfrak{h}$ la superálgebra de Lie de Heisenberg asociada a una forma supersimpléctica impar, y sea $\{v_1, \ldots, v_n, x_1, \ldots, x_n, h\}$ una base para $\mathfrak{h}$. Dado un subespacio vectorial par de $\mathfrak{gl}(n|n+1)$ formado por elementos no nilpotentes, $\mathfrak{a} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell\}$, queremos que el superespacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ admita una estructura de superálgebra de Lie soluble tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ y además, $N(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$.

En este caso, $\mathfrak{g}_0 = V_0 \oplus \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{g}_1 = V_1 \oplus \langle h \rangle$. Puesto que debe cumplirse que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ $(i = 0, 1)$, al igual que antes, pidiendo que $\mathfrak{h}$ sea una subsuperálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, se verifica que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \{V_0\}$, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] \subset V_1 \oplus \langle h \rangle$, y $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \{V_0\}$. Por tanto, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ y claramente, $N(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$.

Verifiquemos la identidad de Jacobi en los elementos homogéneos de $\mathfrak{g}$ para imponer condiciones sobre $\sigma \in \mathfrak{a}$. Observemos que en la tercia (σ_i, u, v) con $u, v \in \mathfrak{h}$, la identidad de Jacobi indica que $\mathrm{ad}(\sigma_s)|_{\mathfrak{h}}$ es una derivación par de $\mathfrak{h}$. Por la Proposición **11** del Capítulo 1, sabemos cuál es la estructura de estas derivaciones. Luego,

$$\mathrm{ad}(\sigma_i) = \begin{pmatrix} S_i & & \\ & T_i & 0 \\ & 0 & a_i \end{pmatrix}$$

donde $S_i \in \mathrm{End}(V_0), T \in \mathrm{End}(V_1)$ y $a_i \in \mathbb{C}$ son tales que $S_i^t \Phi + \Phi T_i = a_i \Phi$.

Dado que $[\sigma_i, \sigma_j] \in \mathfrak{h}_0 \simeq V_0$, tenemos $[\sigma_i, \sigma_j] = \gamma_{ij}^k v_k,\ \gamma_{ij}^k \in \mathbb{C}$. Por otra parte, es fácil ver que la identidad de Jacobi en la tercia $(\sigma_i, \sigma_j, y_k)$ indica que $T_i T_j = T_j T_i\ \forall\ i, j = 1, \ldots, n$ y $\gamma_{ij}^k = 0$. Así, para todo $i, j = 1, \ldots, n$ tenemos que $[\sigma_i, \sigma_j] = 0$.

Tomando combinaciones lineales adecuadas de los $\sigma_i \in \mathfrak{a}$, sin pérdida de generalidad, podemos considerar $a_1 = 0$ ó 1, y $a_2 = \cdots = a_\ell = 0$. Luego,

$$\mathrm{ad}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & T_1 & 0 \\ & 0 & a_1 \end{pmatrix} \qquad S_1^t \Phi + \Phi T_1 = a_1 \Phi, \text{ y}$$
$$\mathrm{ad}(\sigma_i) = \begin{pmatrix} S_i^t & & \\ & T_i & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_i^t \Phi + \Phi T_i = 0,\ i \geq 2.$$

Notemos que de la identidad de Jacobi en la tercia $(\sigma_i, \sigma_j, x_k)$ se sigue que las matrices S_i, S_j deben conmutar, es decir $S_i S_j = S_j S_i$ para todo $i = 1, \ldots, \ell$. Por tanto, $\mathfrak{a}$ es una subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}(n|n+1)$.

Obsérvese que para $a_1 = 0$, las parejas $(S_1, T_1), \ldots, (S_\ell, T_\ell)$ están formadas por elementos no nilpotentes, pues en caso contrario el nilradical de $\mathfrak{g}$ contiene propiamente a $\mathfrak{h}$. De igual forma, para $a_1 = 1$, las parejas $(S_i, T_i),\ i = 2, \ldots, \ell$ están formadas por elementos no nilpotentes, mientras que (S_1, T_1) puede ser arbitraria. De esta forma establecemos el siguiente

16 Teorema. *Sea $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{gl}(n|n+1)$ un sub-superespacio vectorial par formado por elementos no nilpotentes. Una superálgebra de Lie soluble real o compleja, de la forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$, tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, que no se descompone en suma directa de ideales y que tiene a la superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ como su nilradical, admite una base canónica $\{v_1, ..., v_n, x_1, ..., x_n, h, \sigma_1, \ldots, \sigma_\ell\}$, con las siguientes relaciones de conmutación:*

$$
\begin{aligned}
[v_i, v_j] &= 0\\
[x_i, x_j] &= 0\\
[v_i, x_j] &= \Phi(v_i, x_j)h \quad i, j = 1, \ldots, n\\
\begin{pmatrix} [\sigma_k, v]] \\ [\sigma_k, x] \\ [\sigma_k, h] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S_k & 0 & 0 \\ 0 & T_k & 0 \\ 0 & 0 & a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ x \\ h \end{pmatrix}\\
[\sigma_k, \sigma_s] &= 0 \qquad k, s = 1, \ldots, \ell,
\end{aligned}
$$

donde $v^t = (v_1, ..., v_n)$, y $x^t = (x_1, ..., x_n)$.

Las constantes a_i satisfacen $a_1 = 0$ ó 1, $a_2 = \cdots = a_\ell = 0$.

Los elementos del conjunto $\{S_1, ..., S_\ell\}$ satisfacen $S_i \in \mathfrak{gl}(V_0)$ y $[S_i, S_j] = 0\ \forall\ 1 \leq i, j \leq \ell$. Es decir, $\{S_1, \ldots, S_\ell\}$ es una subálgebra abeliana del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V_0)$. Los elementos de $\{T_1, ..., T_\ell\}$ satisfacen $T_i \in \mathfrak{gl}(V_1)$ y $[T_i, T_j] = 0\ \forall 1 \leq i, j \leq \ell$. Es decir, $\{T_1, \ldots, T_\ell\}$ es una subálgebra abeliana del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V_1)$. Además, si

(i) $a_1 = 0,\ S_i^t\Phi + \Phi T_i = 0\ \forall i = 1, \ldots, n$. *En este caso las parejas (S_i, T_i) están formadas por elementos no nilpotentes.*

(ii) $a_1 = 1,\ S_1^t\Phi + \Phi T_1 = 0$ *y* $S_i^t\Phi + \Phi T_i = 0\ \forall i = 1, \ldots, n$. *En este caso las parejas $(S_i, T_i),\ i \geq 2$ están formadas por elementos no nilpotentes y (S_1, T_1) es arbitraria.*

Observaciones.

(a) El centro de la superálgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ es $\langle h \rangle$ si, y sólo si, $a_1 = 0$.

(b) Si $a_1 = 0$, para que la pareja (X_1, T_1) este formada por elementos no nilpotentes, basta con que X_1 ó T_1 no lo sean. De esto se sigue que para determinar la dimensión máxima de $\mathfrak{a}$, necesitamos conocer el número máximo de elementos no nilpotentes $X_i \in \mathfrak{gl}(V_0)$ y $T_i \in \mathfrak{gl}(V_1)$ tales que $S_i^t\Phi + \Phi T_i = a_i\Phi$, que podemos adjuntar. Esto equivale a conocer la dimensión de las subálgebras abelianas maximales de $\mathfrak{gl}(V_0)$ y $\mathfrak{gl}(V_1.)$

2.4 Clasificación de las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$, siendo $\mathfrak{a}$ un superespacio vectorial par

Sea $\mathfrak{h}$ una superálgebra de Lie de Heisenberg asociada a una forma supersimpléctica homogénea $\mathcal{B}$, y sea $\mathfrak{a}$ un superespacio vectorial par. En esta sección damos condiciones necesarias y suficientes para decidir cuándo son isomorfas las superálgebras de Lie solubles $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ tales que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ y $N(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$. Analizamos los casos $|\mathcal{B}| = 0$ y $|\mathcal{B}| = 1$ por separado.

CASO 1 Superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma supersimpléctica par $\mathcal{B}$. Como superespacio vectorial, la superálgebra de Lie de Heisenberg es la suma directa de un espacio vectorial simpléctico (V_0, ω), un espacio vectorial ortogonal (V_1, g), y un elemento central par $\langle h \rangle$, es decir, $\mathfrak{h} = V_0 \oplus V_1 \oplus \langle h \rangle$. Por otra parte, las relaciones $[\sigma, \sigma_j] = r_{ij}h$ y $r_{ij} = -r_{ji}$ $\forall \sigma, \sigma_j \in \mathfrak{a}$, indican que $\mathfrak{a}$ es un espacio vectorial provisto con una forma bilineal antisimétrica $R : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathbb{C}$. Finalmente, de los productos $[\sigma_i, u] = (a_iI_{2n} + X_i)(u),\ u \in \mathfrak{h}_0$ y $[\sigma_i, v] = T_i(v),\ v \in \mathfrak{h}_1$, se sigue que también tenemos transformaciones lineales $X : \mathfrak{a} \to \mathfrak{sp}(V_0)$ y $T : \mathfrak{a} \to \mathfrak{o}(V_1)$. Por tanto, los datos $(V_0, \omega), (V_1, g), \langle h \rangle, (\mathfrak{a}, R), X : \mathfrak{a} \to \mathfrak{sp}(V_0)$ y $T : \mathfrak{a} \to \mathfrak{o}(V_1)$ determinan a la superálgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$. Recordando que $Z(\mathfrak{g}) = \langle h \rangle$ si y sólo si, $a_1 = 0$, concluimos que (X, T, a_i, R) con $a_i = 0$ ó 1, caracterizan completamente la estructura de superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Sean $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}'$ superálgebras de Lie isomorfas, y sea $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un isomorfismo entre ellas. Sabemos que necesariamente, $\varphi(Z(\mathfrak{g})) = Z(\mathfrak{g}')$ y $\varphi(N(\mathfrak{g})) = N(\mathfrak{g}')$. Puesto que el centro de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ es $\langle h \rangle$ para $a_1 = 0$ y $\{0\}$ para $a_1 = 1$, se tiene que $a_1 = a_1' = 0$, o bien, $a_1 = a_1' = 1$. Luego, los casos $a_1 = 0$ y $a_1 = 1$ se estudian por separado.

17 Proposición. *Sean $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}'$ superálgebras de Lie solubles, que no se descomponen en suma directa de ideales, tales que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \langle h \rangle$ (resp. $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \subset \langle h \rangle$) y $N(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$. Sean*

$$G=\{A\in \mathrm{GL}(V)\mid \exists\, a\in\mathbb{C}-\{0\}\,,\ \omega(Au,Av)=a\omega(u,v)\ \forall u,v\in U\}\,,$$

$$H=\{B\in \mathrm{GL}(\mathfrak{a},\mathfrak{a}')\mid \exists a\in\mathbb{C}-\{0\}\,,aR(\sigma,\tau)=R'(B(\sigma),B(\tau))\ \forall\sigma,\tau\in\mathfrak{a}\},$$

$$K=\{C\in \mathrm{GL}(V_1)|\ \exists a\in\mathbb{C}-\{0\}\,,ag(x,y)=g(Cx,Cy)\ \forall x,y\in V_1\}\,.$$

Sean (X,T,a_i,R) *y* (X',T',a_i,R') *con* $a_i=0$ *ó* 1*, los datos que caracterizan a* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{g}'$*, respectivamente. Las superálgebras de Lie* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{g}'$ *son isomorfas si, y sólo si, existe* $(A,a,B,C)\in G\times\mathbb{C}-\{0\}\times H\times K$ *tal que para todo* $u,v\in V_0,x,y\in V_1$ *y* $\sigma,\tau\in\mathfrak{a}$

(i) Caso $a_1=0$.

1. $a\omega(u,v)=\omega(Au,Av)$
2. $A\cdot X(\sigma)\cdot A^{-1}=X'\cdot B(\sigma)$
3. $a\cdot R=R'\cdot B$
4. $ag(x,y)=g(Cx,Cy)$
5. $C\cdot T(\sigma)\cdot C^{-1}=T'\cdot B(\sigma)$

El isomorfismo $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ *está dado por*

$$\varphi=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \\ 0 & a & 0 & \\ 0 & 0 & B & \\ & & & C\end{pmatrix}.$$

(ii) Caso $a_1=1$*. En este caso también existe* $\zeta\in\mathfrak{a}$ *tal que*

1. $a\omega(u,v)=\omega(Au,Av)$
2. $A\cdot X(\nu)\cdot A^{-1}=X'(\nu'+\zeta)$
3. $A\cdot X(\sigma)\cdot A^{-1}=X'\cdot B(\sigma)$

4. $\omega(B(\sigma), B(\tau)) = 0$

5. $ag(x, y) = g(Cx, Cy)$

6. $C \cdot T(\sigma) \cdot C^{-1} = T' \cdot B(\sigma)$

7. $C \cdot T(\nu) \cdot C^{-1} = T'(\nu' + \zeta)$.

El isomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ está dado por

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & a & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \zeta & B & \\ & & & & C \end{pmatrix}.$$

Demostración. Como ya se había mencionado, los casos $a_1 = 0$ y $a_1 = 1$ se analizan por separado.

Caso $\mathbf{a_1 = 0}$.

Escribimos el producto en $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ en términos de los datos $(V_0, \omega), (V_1, g)$, $(\mathfrak{a}, R)$, $X : \mathfrak{a} \to \mathfrak{sp}(V_0)$ y $T : \mathfrak{a} \to \mathfrak{o}(V_1)$:

$$\begin{array}{lll} [u, v] = \omega(u, v)h & [x, u] = 0 & [\sigma, h] = 0 \\ [u, h] = 0 & [x, h] = 0 & [\sigma, x] = T(\sigma)x \\ [\sigma, u] = X(\sigma)u & [x, y] = g(x, y)h & [\sigma, \tau] = R(\sigma, \tau)h \end{array}$$

con $u, v \in V_0, x, y \in V_1$ y $\sigma, \tau \in \mathfrak{a}$.

Sea $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{a}'$ con el producto definido como antes. Queremos determinar una transformación lineal $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ tal que sea un isomorfismo de superálgebras de Lie. Luego, φ debe mandar el centro de $\mathfrak{g}$ en el centro de $\mathfrak{g}'$ y el nilradical de $\mathfrak{g}$ en el nilradical de $\mathfrak{g}'$. Es decir, $\varphi(h) = ah$ con $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Además, puesto que φ debe preservar la graduación, es decir, $\varphi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_i$ para $i = 0, 1$, para todo $u \in V_0, x \in V_1$ y $\sigma \in \mathfrak{a}$ tenemos

$$\begin{aligned} &\varphi(u) = A(u) + \alpha(u)h \\ &\varphi(h) = ah \\ &\varphi(\sigma) = L(\sigma) + \beta(\sigma)h + B(\sigma) \\ &\varphi(v) = C(x) \end{aligned}$$

donde $A \in \mathrm{Hom}(V_0, V_0)$, $\alpha \in V_0^*$, $a \neq 0$, $L \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, V_0)$, $\beta \in \mathfrak{a}^*$, $B \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}')$ y $C \in \mathrm{Hom}(V_1, V_1)$. Luego,

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & 0 & L & \\ \alpha & a & \beta & \\ 0 & 0 & B & \\ & & & C \end{pmatrix}.$$

La restricción de φ a $\mathfrak{h}_0$ indica que $\varphi|_{\mathfrak{h}_0}$ debe ser un automorfismo del álgebra de Lie de Heisenberg, $\mathfrak{h}_0$. Claramente, φ será no singular si, y sólo si, $B \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}')$ y $C \in \mathrm{Hom}(V_1, V_1')$ son no singulares.

Por otra parte, para que φ sea un morfismo de superálgebras de Lie debe satisfacerse $\varphi[z, w] = [\varphi(z), \varphi(w)]$ $\forall$ $z, w \in \mathfrak{g}$. Evaluemos esta ecuación en elementos homogeńeos de $\mathfrak{g}$ para imponer condiciones sobre φ. Sean $u, v \in V_0, x, y \in V_1$ y $\sigma, \tau \in \mathfrak{a}$.

1. $\varphi[u, h] = [\varphi u, \varphi h]$ y $\varphi[\sigma, h] = [\varphi\sigma, \varphi h]$ se satisfacen trivialmente.

2. $\varphi[u, v] = [\varphi u, \varphi v]$.

$$\omega(u, v)\varphi(h) = [Au + \alpha(u)h, Av + \alpha(v)h] \Leftrightarrow a\omega(u, v) = \omega'(Au, Av).$$

3. $\varphi[\sigma, u] = [\varphi\sigma, \varphi u]$.

$$A(X(\sigma)u) + \alpha(X(\sigma)u)h = \omega'(C(\sigma), Au)h + X'(B(\sigma))Au$$

si, y sólo si,

$$A(X(\sigma)u) = X'(B(\sigma))Au \quad \text{y} \quad \alpha(X(\sigma)u) = \omega'(C(\sigma), Au).$$

4. $\varphi[\sigma, \tau] = [\varphi\sigma, \varphi\tau]$.

$$\begin{aligned} aR(\sigma, \tau)h = {} & \omega'(C(\sigma), C(\tau))h - X'(B(\tau))C(\sigma) + X'(B(\sigma))C(\tau) \\ & + R'(B(\sigma), B(\tau))h \end{aligned}$$

si, y sólo si,

$$aR(\sigma, \tau) = \omega'(C(\sigma), C(\tau)) + R'(B(\sigma), B(\tau)) \text{ y}$$

$$X'(B(\sigma))C(\tau) = X'(B(\tau))C(\sigma).$$

5. $\varphi[x,y] = [\varphi x, \varphi y]$ si, y sólo si, $ag(x,y) = g(Cx, Cy)$.

6. $\varphi[x,\sigma] = [\varphi x, \varphi \sigma]$ si, y sólo si, $C(T(\sigma)x) = T(B(\sigma))(C(x))$.

Resumiendo, para todo $u, v \in V_0, x, y \in V_1$ y $\sigma, \tau \in \mathfrak{a}$, debe verificarse

1. $a\omega(u,v) = \omega'(Au, Av)$

2a. $AX(\sigma)A^{-1} = X'(B(\sigma))$

2b. $\alpha(X(\sigma)u) = \omega'(C(\sigma), Au)$

3a. $aR(\sigma,\tau) = \omega(C(\sigma), C(\tau)) + R'(B(\sigma), B(\tau))$.

3b. $X'(B(\sigma))C(\tau) = X'(B(\tau))C(\sigma)$.

4 $ag(x,y) = g(Cx, Cy)$

5 $C(T(\sigma)x) = T(B(\sigma))(C(x))$.

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\omega'(C(\sigma), C(\tau)) &= \alpha(X(\sigma)A^{-1}C(\tau)) && \text{por } (2b),\\
&= \alpha(A^{-1}X'(B(\sigma))C(\tau)) && \text{por } (2a),\\
&= \alpha(A^{-1}X'(B(\tau))C(\sigma)) && \text{por } (3b),\\
&= \alpha(X(\tau)A^{-1}C(\sigma)) && \text{por } (2a),\\
&= \omega'(C(\tau), C(\sigma)) && \text{por } (2b).
\end{aligned}$$

Además, sabemos $\omega'(C(\sigma), C(\tau)) = -\omega'(C(\tau), C(\sigma))$ para todo $\sigma, \tau \in \mathfrak{a}$. Luego, $\omega'(C(\tau), C(\sigma)) = -\omega'(C(\tau), C(\sigma))$ si, y sólo si, $\omega'(C(\tau), C(\sigma)) = 0$ para todo $\sigma, \tau \in \mathfrak{a}$. Así, la ecuación (3a) toma la forma $aR(\sigma,\tau) = R'(B(\sigma), B(\tau))$. Es decir, $aR = R' \cdot B$.

Afirmamos que (3b) es una consecuencia de las ecuaciones anteriores. En efecto, puesto que ω' no degenera, $(\omega')^\flat : V \to V^*$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Ahora bien, sea $u \in V$ arbitrario,

$$\begin{aligned}
(\omega')^\flat(X(B(\sigma))C(\tau))(u) &= \omega'(X(B(\sigma))C(\tau), u)\\
&= -\omega'(C(\tau), X(B(\sigma))u) && \text{pues } X'(B(\sigma)) \in \mathfrak{sp}(V_0),\\
&= -\omega'(C(\tau), AX(\sigma)A^{-1}u) && \text{por } (2a),\\
&= -\alpha(X(\tau)X(\sigma)A^{-1}u) && \text{por } (2b).
\end{aligned}$$

Dado que $X(\tau), X(\sigma)$ son elementos de una subálgebra abeliana del álgebra de Lie simpléctica, tenemos

$$\begin{aligned}
(\omega')^\flat(X'(B(\sigma))C(\tau))(u) &= -\alpha(X(\sigma)X(\tau)A^{-1}u) \\
&= -\omega'(C(\sigma), AX(\tau)A^{-1}u) \\
&= -\omega'(C(\sigma), X'(B(\tau))u), \\
&= \omega'(X'(B(\tau))C(\sigma), u), \\
&= (\omega')^\flat(X'(B(\tau))C(\sigma))(u).
\end{aligned}$$

Concluimos que $X'(B(\sigma))C(\tau) = X'(B(\tau))C(\sigma)$ para todo $\sigma, \tau \in \mathfrak{a}$.

En vista de los cálculos que hemos realizado, la transformación lineal $\varphi : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a} \to \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}'$ es un isomorfismo de superálgebras de Lie si, y sólo si, para todo $u, v \in V_0,\ x, y \in V_1$ y $\sigma, \tau \in \mathfrak{a}$, satisfacen las ecuaciones (1), (2a), (2b), (3a), (4) y (5). Por último, puesto que tal φ no es diagonal, en $\mathfrak{h}$ realizaremos un cambio de base adecuado para simplificar φ. Es decir, buscamos $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a})$ tal que $\varphi \circ \psi : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a} \to \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}'$ sea un isomorfismo diagonal. Es decir, buscamos

$$\psi = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 & \widetilde{L} & \\ \widetilde{\alpha} & \widetilde{a} & \widetilde{\beta} & \\ 0 & 0 & \widetilde{B} & \\ & & & \widetilde{C} \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad \widetilde{\varphi} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \\ 0 & a & 0 & \\ 0 & 0 & B & \\ & & & C \end{pmatrix}.$$

Un cálculo directo muestra que

$$\psi = \begin{pmatrix} I_{V_0} & 0 & -A^{-1}L & \\ a^{-1}\alpha & 1 & a^{-1}(\alpha A^{-1}L - \beta) & \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{a}} & \\ & & & I_{V_1} \end{pmatrix}.$$

es un isomorfismo de $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ en $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}'$. En efecto, las ecuaciones (1), (2a) y (3a) se satisfacen trivialmente, mientras que verificar (4a) y (4b) es un cálculo sencillo. Luego, basta verificar la ecuación (2b):

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}(X(\sigma)u) &= -\frac{1}{a}\alpha(X(\sigma)u) \\
&= -\frac{1}{a}\omega(C(\sigma), Au) \\
&= -\omega(A^{-1}C(\sigma), u) \\
&= \omega(\widetilde{C}(\sigma), \widetilde{A}u).
\end{aligned}$$

Puesto que β no está involucrada en las ecuaciones anteriores, sin pérdida de generalidad tomamos $\beta = 0$ para concluir que $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a} \to \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}'$, dado por

$$\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \\ 0 & a & 0 & \\ 0 & 0 & B & \\ & & & C \end{pmatrix},$$

es el isomorfismo buscado que sólo involucra transformaciones conformes del grupo simpléctico $A \in G$, escalamientos del álgebra de Lie de Heisenberg con factor $a \neq 0$, combinaciones lineales de elementos en $\mathfrak{a}$ dadas por $B \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}')$, y transformaciones conformes del grupo ortogonal $C \in K$.

Caso $\mathbf{a_1 = 1}$.

En este caso,

$$\mathrm{ad}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} I_{V_0} + X_1 & 0 & \\ 0 & 2 & \\ & & T_1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}(\sigma_i) = \begin{pmatrix} X_i & 0 & \\ 0 & 0 & \\ & & T_i \end{pmatrix}, \ \forall i = 2, \ldots, \ell.$$

donde $X_i \in \mathfrak{sp}(V_0), T_1 \in \mathrm{End}(V_1)$ tal que $T_1^t g + g T_1 = g$ y $T_i \in \mathfrak{o}(V_1), \ i \geq 2$.

Notemos que existe un elemento distinguido $\nu \in \mathfrak{a}$ tal que $[\nu, u] = (I_{V_0} + X(\nu))u$ para todo $u \in V_0, \ [\nu, h] = 2h$ y $[\nu, x] = T(\nu)x$ para todo $x \in V_1$. Así, en términos de los datos $(V_0, \omega), (V_1, g), (\mathfrak{a}, R), X : \mathfrak{a} \to \mathfrak{sp}(V_0)$ y $T : \mathfrak{a} \to \mathfrak{o}(V_1)$, escribimos el producto en $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ como sigue:

$$\begin{array}{lll}
[u, v] = \omega(u, v)h & [\sigma, u] = X(\sigma)u & [\sigma, \tau] = R(\sigma, \tau)h \\
[u, h] = 0 & [\sigma, h] = 0 & [\nu, \sigma] = 0 \\
[\nu, u] = (I_{V_0} + X(\nu))u & [\nu, h] = 2h & \\
[x, u] = 0 & [x, h] = 0 & [\sigma, x] = -T(\sigma)x \\
[x, y] = g(x, y)h & [\nu, x] = T(\nu)x &
\end{array}$$

para todo $u, v \in V_0, \ x, y \in V_1$, y $\sigma, \tau \in \mathfrak{a}$.

Sea $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}'$ con el producto definido como antes. Determinemos las condiciones que debe satisfacer $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ para ser un isomorfismo de superálgebras de Lie. Como bien sabemos, φ es de grado par, manda el centro de $\mathfrak{g}$ en el centro de $\mathfrak{g}'$, que en ambos casos es trivial, y el nilradical de $\mathfrak{g}$ en el nilradical de $\mathfrak{g}'$, es decir, $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Así, para todo $u \in \mathfrak{h}_0, x \in V_1$ y $\sigma \in \mathfrak{a}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= A(u) + \alpha(u)h \\
\varphi(h) &= z + ah \\
\varphi(\nu) &= t + bh + c\nu' + \zeta \\
\varphi(\sigma) &= L(\sigma) + \beta(\sigma)h + \mu(\sigma)\nu' + B(\sigma) \\
\varphi(x) &= C(x)
\end{aligned}$$

donde $A \in \mathrm{Hom}(V_0, V_0),\ L \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, V_0),\ B \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}), C \in \mathrm{Hom}(V_1, V_1),\ z,$ $t \in V_0, \zeta \in \mathfrak{a},\ \alpha \in V_0^*,\ \beta, \mu \in \mathfrak{a}^*$, y $a, b, c \in \mathbb{C}$. Luego,

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & z & t & L & \\ \alpha & a & b & \beta & \\ 0 & 0 & c & \mu & \\ 0 & 0 & \zeta & B & \\ & & & & C \end{pmatrix}.$$

Claramente, $C \in \mathrm{Hom}(V_1, V_1)$ debe ser invertible.

Nuevamente, procedemos como en el caso anterior y a partir de la ecuación $\varphi[u, v] = [\varphi(u), \varphi(v)]\ \forall u, v \in \mathfrak{g}$, determinamos las condiciones que debe satisfacer $\varphi : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a} \to \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}'$ para ser un isomorfismo de superálgebras de Lie. Así, para todo $u, v \in V_0,\ x, y \in V_1$ y $\sigma, \tau \in \mathfrak{a}$, deben satisfacerse las ecuaciones:

1. $a\omega(u, v) = \omega(Au, Av)$.

2a. $A \cdot X(\nu) \cdot A^{-1} = X'(\nu' + \zeta)$.

2b. $\alpha((X(\nu) - I_{V_0})u) = \omega(t, Au)$.

3a. $AX(\sigma)A^{-1} = X'B(\sigma)$.

3b. $\alpha(X(\sigma)u) = \omega(L(\sigma), Au)$.

4. $\omega(L(\sigma), t) = 2\beta(\sigma)$.

5a. $\omega(L(\sigma), L(\tau)) = 0$.

5b. $X'(B(\sigma))L(\tau) = X'(B(\tau))L(\sigma)$.

6. $CT(\sigma)C^{-1} = T'(B(\sigma))$.

7. $ag(x, y) = g(Cx, Cy)$.

8. $CT(\nu)C^{-1} = T'(\nu\,' + \zeta)$.

Dado que el isomorfismo φ no es diagonal, realizaremos un cambio de base adecuado en $\mathfrak{h}$ para simplificar φ. Esto es, buscamos $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ tal que

$$\psi = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 & \widetilde{t} & \widetilde{L} & \\ \widetilde{\alpha} & \widetilde{a} & \widetilde{b} & \widetilde{\beta} & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \widetilde{\zeta} & \widetilde{B} & \\ & & & & \widetilde{C} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & a & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \zeta & B & \\ & & & & C \end{pmatrix}.$$

Luego, el cambio de base que necesitamos está dado por

$$\psi = \begin{pmatrix} I_{V_0} & 0 & -A^{-1}t & -A^{-1}L & \\ -a^{-1}\alpha & 1 & a^{-1}(-b + \alpha A^{-1}t) & a^{-1}(\alpha A^{-1}L - \beta) & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & I_{\mathfrak{a}} & \\ & & & & I_{V_1}. \end{pmatrix}$$

Se verifica fácilmente que ψ así definida es un isomorfismo de álgebras de Lie entre $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}'$. $\square$

CASO 2 Superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma supersimpléctica impar $\mathcal{B}$. De la estructura de superálgebra de Lie de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$, se observa que los datos iniciales a partir de los que se construye $\mathfrak{g}$ son los espacios vectoriales V_0, V_1 tales que $\dim V_0 = \dim V_1 = n$, las aplicaciones bilineales $\Phi : V_0 \times V_1 \to \mathbb{C}$ y $\Omega : V_1 \times V_0 \to \mathbb{C}$ no degeneradas, un elemento central impar $\langle h \rangle$, un espacio vectorial par no nilpotente $\mathfrak{a}$, y las transformaciones lineales $S : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(V_0)$ y $T : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(V_1)$. Recordando que $Z(\mathfrak{g}) = \langle h \rangle$ si, y sólo si $a_1 = 0$, concluimos que las tercias (S, T, a_i) con $a_i = 0$ ó 1, caracterizan completamente a la superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Sean $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}'$ superálgebras de Lie tales que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ (resp. $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \subset \mathfrak{h}$) y $N(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$ (resp. $N(\mathfrak{g}') = \mathfrak{h}$.) Supongamos que $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son isomorfas y sea $\varphi : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a} \to \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}'$ un isomorfismo entre ellas. Sabemos que necesariamente, el centro de $\mathfrak{g}$ va en el centro de $\mathfrak{g}'$ y el nilradical de $\mathfrak{g}$ en el nilradical de $\mathfrak{g}'$. Puesto que el centro de $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ es $\langle h \rangle$ para $a_1 = 0$ y $\{0\}$ para $a_1 = 1$, concluimos $a_1 = a_1' = 0$, o bien, $a_1 = a_1' = 1$. Luego, los casos $a_1 = 0$ y $a_1 = 1$ se estudian por separado.

18 Proposición. *Sean* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}'$ *superálgebras de Lie solubles tales que* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ *(resp.* $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \subset \mathfrak{h}$*),* $N(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$ *(resp.* $N(\mathfrak{g}') = \mathfrak{h}$*) y que no se descomponen en suma directa de ideales. Sean* $(S, T, a_i,)$ *y* (S', T', a_i) *con* $a_i = 0$ *ó* 1*, las tercias que caracterizan a* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{g}'$*, respectivamente. Sean* $G = \mathrm{GL}(V_0)$*,* $H = \mathrm{GL}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}')$ *y* $K = \mathrm{GL}(V_1)$*. Las superálgebras de Lie* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{g}'$ *son isomorfas si, y sólo si, existe* $(A, B, C, a) \in G \times H \times K \times \mathbb{C} - \{0\}$ *tal que, para todo* $u \in V_0, x \in V_1$ *y* $\sigma \in \mathfrak{a}$

(i) Caso $a_1 = 0$*.*

1. $A \cdot S(\sigma) \cdot A^{-1} = S' \cdot B(\sigma)$
2. $a\Omega(x, u) = \Omega(Cx, Au)$.

El isomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *está dado por*

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & 0 & & \\ 0 & B & & \\ & & C & 0 \\ & & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(ii) Caso $a_1 = 1$*.*

1. $A \cdot S(\nu) \cdot A^{-1} = S'(\nu\,' + \zeta)$,
2. $A \cdot S(\sigma) \cdot A^{-1} = S' \cdot B(\sigma)$
3. $a\Omega(x, u) = \Omega(Cx, Au)$.

El isomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *está dado por*

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & B & & \\ & & & C & 0 \\ & & & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Demostración. Como ya se había mencionado, los casos $a_1 = 0$ y $a_1 = 1$ se analizan por separado.

Caso $\mathbf{a_1 = 0}$.

En términos de los datos $V_0, V_1, \Phi : V_0 \times V_1 \to \mathbb{C}, \Omega : V_1 \times V_0 \to \mathbb{C}, \mathfrak{a}, S : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(V_0)$ y $T : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(V_1)$, escribimos el producto en $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ de la forma siguiente:

$$\begin{array}{lll} [u,v] = 0 & [u,h] = 0 & [\sigma,u] = S(\sigma)u \\ [\sigma,h] = 0 & [\sigma,\tau] = 0 & [x,u] = \Omega(x,u)h \\ [x,h] = 0 & [x,y] = 0 & [\sigma,x] = T(\sigma)x \end{array}$$

para todos $u, v \in V_0, x, y \in V_1$ y $\sigma, \tau \in \mathfrak{a}$.

Sea $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}'$ con el producto definido como antes. Queremos determinar las condiciones que debe satisfacer $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ para que sea un isomorfismo de superálgebras de Lie. Sabemos que φ mandará el centro de $\mathfrak{g}$ en el centro de $\mathfrak{g}'$ y el nilradical de $\mathfrak{g}$ en el nilradical de $\mathfrak{g}'$. Es decir, $\varphi(h) = ah$ con $a \neq 0$ y $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Además, φ debe preservar la graduación, es decir, $\varphi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_i$ para $i = 0, 1$.

Así, para todo $u \in V_0, x \in V_1$ y $\sigma \in \mathfrak{a}$ tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= A(u) \\ \varphi(\sigma) &= L(\sigma) + B(\sigma) \\ \varphi(x) &= C(x) + \beta(x)h' \\ \varphi(h) &= ah' \end{aligned}$$

donde $A \in \operatorname{Hom}(V_0, V_0),\ L \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{a}, V_0),\ \beta \in V_1^*,\ B \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'),\ C \in \operatorname{Hom}(V_1, V_1)$ y $a \neq 0$. Luego,

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & L & & \\ 0 & B & & \\ & & C & 0 \\ & & \beta & a \end{pmatrix}.$$

Claramente, φ es no singular si, y sólo si, A, B y C son no singulares.

Para que φ sea un morfismo de superálgebras de Lie, debe cumplirse que $\varphi[u,v] = [\varphi(u), \varphi(v)]$ debe ser válida para todos $u, v \in \mathfrak{h}$ De ahí que

1. $\varphi[\sigma, u] = [\varphi\sigma, \varphi u] \Leftrightarrow A \cdot S(\sigma) \cdot A^{-1} = S' \cdot B(\sigma)$.

2. $\varphi[\sigma, \tau] = [\varphi\sigma, \varphi\tau] \Leftrightarrow S'(B(\tau))L(\sigma) = S'(B(\sigma))L(\tau)$.

3. $\varphi[x, u] = [\varphi x, \varphi u] \Leftrightarrow a\Omega(x, u) = \Omega(Cx, Au)$.

4. $\varphi[\sigma, x] = [\varphi\sigma, \varphi x] \Leftrightarrow C{\cdot}T(\sigma){\cdot}C^{-1} = T'{\cdot}B(\sigma)$ y $\beta(T(\sigma)x) = \Phi(L(\sigma), Cx)$.

Resumiendo, para que $\varphi : \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{a} \to \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{a}'$ sea un isomorfismo de superálgebras de Lie, es necesario y suficiente que φ satisfaga las ecuaciones

1. $A \cdot S(\sigma) \cdot A^{-1} = S' \cdot B(\sigma)$.
2. $a\Omega(x, u) = \Omega(Cx, Au)$.
3. $\beta(T(\sigma)x) = \Phi(L(\sigma), Cx)$.
4. $C \cdot T(\sigma) \cdot C^{-1} = T' \cdot B(\sigma)$.
5. $S'(B(\tau))L(\sigma) = S'(B(\sigma))L(\tau)$.

para todo $u, v \in V_0,\ x, y \in V_1$ y $\sigma, \tau \in \mathfrak{a}$.

Puesto que la forma bilineal superantisimétrica que define a $\mathfrak{h}$ es impar, sabemos que para todo $u \in V_0$ y $x \in V_1, \Phi(u, x) = -\Omega(x, u)$. Por otra parte, al ser $\mathrm{ad}(\sigma)|_{\mathfrak{h}}$ una derivación par de $\mathfrak{h}$, sabemos que para todo $\sigma \in \mathfrak{a}, u \in V_0$ y $x \in V_1$ se cumple $\Phi(S(\sigma)u, x) = -\Phi(u, T(\sigma)x)$. Luego, es fácil ver que esto implica que $\Phi(S(\sigma)u, x) = \Omega(T(\sigma)x, u)$. Además en $\mathfrak{g}'$ se tienen relaciones análogas, que utilizaremos para mostrar que podemos reducir el número de condiciones que debe satisfacer φ.

Afirmamos que la ecuación (2) es una consecuencia de (1) y (4). En efecto, sean $u \in V_0, x \in V_1$ arbitrarios

$$\begin{aligned} \Phi(S'(B(\sigma))(Au), x) &= \Phi(A(S(\sigma)u), x) && \text{por } (1),\\ &= a\Phi(S(\sigma)u, C^{-1}x) && \text{por } (2)\\ &= a\Omega(T(\sigma)C^{-1}x, u). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \Phi(S'(B(\sigma))(Au), x) &= \Omega(T'(B(\sigma)x, Au)\\ &= a\Omega(C^{-1} \cdot T'(B(\sigma)x, u) && \text{por } (2). \end{aligned}$$

Entonces $\Omega(T(\sigma)C^{-1}x, u) = \Omega(C^{-1} \cdot T'(B(\sigma)x, u)$ para todo $u \in V_0$. Puesto que Ω no degenera y $x \in V_1$ es arbitrario, concluimos $C \cdot T(\sigma)C^{-1} = T'(B(\sigma)$.

Ahora veamos que la ecuación (5) es consecuencia de las ecuaciones restantes. Sea $x \in V_1$ arbitrario,

$$\begin{aligned}
\Phi(S'(B(\tau))L(\sigma), x) &= \Omega(T'(B(\tau)x, L(\sigma)) \\
&= \Omega(C \cdot T(\tau) \cdot C^{-1}x, L(\sigma)) && \text{por } (4) \\
&= -\Phi(L(\sigma), C \cdot T(\tau) \cdot C^{-1}x) \\
&= -\beta(T(\sigma)T(\tau)C^{-1}x) && \text{por } (3).
\end{aligned}$$

Puesto que $T(\sigma)T(\tau) = T(\tau)T(\sigma)$ para todo $\sigma, \tau \in \mathfrak{a}$,

$$\begin{aligned}
\Phi(S'(B(\tau))L(\sigma), x) &= -\beta(T(\tau)T(\sigma)C^{-1}x) \\
&= -\Phi(L(\tau), C \cdot T(\sigma) \cdot C^{-1}x) \\
&= \Omega(C \cdot T(\sigma) \cdot C^{-1}x, L(\tau)) \\
&= \Omega(T'(B(\sigma)x, L(\tau)) \\
&= \Phi(S'(B(\sigma))L(\tau), x).
\end{aligned}$$

Como Φ no degenera, se concluye que $S'(B(\tau))L(\sigma) = S'(B(\sigma))L(\tau)$ para todo $\sigma, \tau \in \mathfrak{a}$. Por lo tanto, el isomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ está dado por

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & L & & \\ 0 & B & & \\ & & C & 0 \\ & & \beta & a \end{pmatrix},$$

y satisface,

1. $A \cdot S(\sigma) \cdot A^{-1} = S' \cdot B(\sigma)$.
2. $a\Omega(x, u) = \Omega(Cx, Au)$.
3. $\beta(T(\sigma)x) = \Phi(L(\sigma), Cx)$.

Obsérvamos que tal φ no es diagonal, por lo que realizaremos un cambio de base adecuado en $\mathfrak{h}$ para simplificar φ. Esto es,buscamos $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h})$ tal que $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \psi : \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h} \to \mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{h}$ sea un isomorfismo diagonal. Es decir, debemos encontrar

$$\psi = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{L} & & \\ 0 & \widetilde{B} & & \\ & & \widetilde{C} & 0 \\ & & \widetilde{\beta} & \widetilde{a} \end{pmatrix} \text{ tal que } \widetilde{\varphi} = \begin{pmatrix} A & 0 & & \\ 0 & B & & \\ & & C & 0 \\ & & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Un cálculo sencillo muestra que el automorfismo que necesitamos está dado por

$$\psi = \begin{pmatrix} I_{V_0} & -A^{-1}L & & \\ 0 & I_{\mathfrak{a}} & & \\ & & I_{V_1} & 0 \\ & & -a^{-1}\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, el isomorfismo $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ cumple las condiciones requeridas.

Nota. Al realizar el cambio de base en $\mathfrak{h}$, observamos que podemos tomar $\beta = 0$. Por tanto, podemos omitir la ecuación (3) de la lista de condiciones que debe satisfacer φ.

Caso $\mathbf{a_1 = 1}$.

En este caso, recordemos que

$$\mathrm{ad}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & T_1 & 0 \\ & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}(\sigma_i) = \begin{pmatrix} S_i & & \\ & T_i & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ i \geq 2,$$

donde $S_1^t\Phi + \Phi T_1 = a_1\Phi$ y $S_i^t\Phi + \Phi T_i = 0 \ \forall i \geq 2$.

Denotamos por ν al elemento distinguido en $\mathfrak{a}$ que corresponde a $\mathrm{ad}(\sigma_1)$. Así, en términos de los datos $V_0, V_1, \Phi : V_0 \times V_1 \to \mathbb{C}, \Omega : V_1 \times V_0 \to \mathbb{C}, \mathfrak{a}, S : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(V_0)$ y $T : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(V_1)$, escribimos el producto en $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ como sigue:

$$\begin{array}{lll} [u,v] = 0 & [\sigma,u] = S(\sigma)u & [\sigma,\tau] = 0 \\ [u,h] = 0 & [\sigma,h] = 0 & [\nu,\sigma] = 0 \\ [\nu,u] = S(\nu)u & [\nu,h] = h & [\nu,x] = T(\nu)x \\ [x,u] = \Omega(x,u)h & [x,h] = 0 & [\sigma,x] = T(\sigma)x \\ [x,y] = 0 & & \end{array}$$

para todo $u, v \in V_0,\ x, y \in V_1$ y $\sigma, \tau \in \mathfrak{a}$.

Sea $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}'$ con el producto definido como antes. Determinemos las condiciones que debe satisfacer $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ para ser un isomorfismo de superálgebras de Lie. Como bien sabemos, φ es de grado par, manda el centro de $\mathfrak{g}$ en el centro de $\mathfrak{g}'$, que en ambos casos es trivial, y el nilradical de $\mathfrak{g}$ en el nilradical de $\mathfrak{g}'$, es decir, $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Así, para todo $u \in V_0, x \in V_1$ y $\sigma \in \mathfrak{a}$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\varphi(u) = A(u)\\
&\varphi(\nu) = t + b\nu\,' + \zeta\\
&\varphi(\sigma) = L(\sigma) + \beta(\sigma)\nu\,' + B(\sigma)\\
&\varphi(x) = C(x) + \varepsilon(x)h\\
&\varphi(h) = \xi + ah
\end{aligned}$$

donde $A \in \mathrm{Hom}(V_0, V_0),\ L \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, V_0),\ B \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'), C \in \mathrm{Hom}(V_1, V_1),$ $t \in V_0, \xi \in V_1,\ \zeta \in \mathfrak{a},\ \varepsilon \in V_1^*,\ \beta \in \mathfrak{a}^*,$ y $a, b \in \mathbb{C}$. Luego,

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & t & L & & \\ 0 & b & \beta & & \\ 0 & \zeta & B & & \\ & & & C & \xi \\ & & & \varepsilon & a \end{pmatrix}.$$

Claramente, $A \in \mathrm{Hom}(V_0, V_0)$ debe ser no singular.

Debemos verificar que φ es un morfismo de superálgebras de Lie, es decir, $\varphi[u, v] = [\varphi(u), \varphi(v)]$ debe ser válida para todos $u, v \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ Por los cálculos que realizamos para el caso $a_1 = 0$, las ecuaciones (1)-(5) proporcionan las condiciones que debe satisfacer la restricción de φ a $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$. Luego, basta determinar las condiciones que impone $\varphi[\nu, z] = [\varphi(\nu), \varphi(z)]$ para cualquier $z \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$. A saber,

6. $\xi = 0,\ b = 1$ y $\beta(\sigma) = 0$ para todo $\sigma \in \mathfrak{a}$.
7. $A \cdot S(\nu) \cdot A^{-1} = S'(\nu\,' + \zeta)$.
8. $\varepsilon\big((T(\nu) - I_{V_1})x\big) = \Phi(t, Cx)$.
9. $S'(B(\sigma))t = S'(\nu\,' + \zeta)L(\sigma)$.

10. $C \cdot T(\nu) \cdot C^{-1} = T'(\nu\,' + \zeta)$.

para todos $u, v \in V_0,\ x, y \in V_1,\ \sigma, \tau \in \mathfrak{a}$.

Además, notemos que en este caso, la identidad de Jacobi para la tercia (ν, u, x) indica que para todo $u \in V_0$ y $x \in V_1$, $\Phi(S(\nu)u, x) = \Omega((T(\nu) - I_{V_1})x, u)$.

Ahora bien, afirmamos que la ecuación (10) es consecuencia de (2) y (4). Sean $u \in V_0$ y $x \in V_1$ arbitrarios.

$$\begin{aligned}\Phi((S'(\nu + \zeta))Au, x) &= \Omega((T'(\nu\,' + \zeta) - I_{V_1})x, Au) \\ &= a\Omega(C^{-1}(T'(\nu\,' + \zeta) - I_{V_1})x, u).\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\Phi((S'(\nu + \zeta))Au, x) &= \Phi(A(S(\nu)u), x) \\ &= a\Phi(S(\nu)u, C^{-1}x) \\ &= a\Omega((T(\nu) - I_{V_1})C^{-1}x, u).\end{aligned}$$

Puesto que Ω no degenera, concluimos $C \cdot T(\nu) \cdot C^{-1} = T'(\nu\,' + \zeta)$.

Ahora veamos que la ecuación (7) se sigue de las ecuaciones anteriores. En primer lugar, observemos que la ecuación (3) y (4) reescriben (7) de la siguiente forma

$$S(\nu)A^{-1}L(\sigma) = S(\sigma)A^{-1}t \quad \text{para todo } \sigma \in \mathfrak{a}.$$

Sea $x \in V_1$ arbitrario. Tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi(S(\nu)A^{-1}L(\sigma), x) &= \Omega((T(\nu) - I_{V_1})x, A^{-1}L(\sigma)) \\ &= -\Phi(A^{-1}L(\sigma), (T(\nu) - I_{V_1})x) \\ &= -a^{-1}\Phi(L(\sigma), C(T(\nu) - I_{V_1})x) \\ &= -a^{-1}\varepsilon(T(\sigma)(T(\nu) - I_{V_1})x)\end{aligned}$$

Dado que $T(\sigma)T(\nu) = T(\nu)T(\sigma)$,

$$\begin{aligned}\Phi(S(\nu)A^{-1}L(\sigma), x) &= -a^{-1}\varepsilon((T(\nu) - I_{V_1})T(\sigma)x) \\ &= -a^{-1}\Phi'(t, CT(\sigma)x) \\ &= -\Phi(A^{-1}t, T(\sigma)x) \\ &= \Omega(T(\sigma)x, A^{-1}t) \\ &= \Phi(S(\sigma)A^{-1}t, x).\end{aligned}$$

Como Φ no degenera, concluimos $S(\nu)A^{-1}L(\sigma) = S(\sigma)A^{-1}t \ \forall\sigma \in \mathfrak{a}$.

Observemos que el isomorfismo φ no es diagonal, por lo que realizaremos un cambio de base adecuado en $\mathfrak{h}$ para simplificar φ. Esto es, buscamos $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ tal que el isomorfismo $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ sea diagonal:

$$\psi = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{t} & \widetilde{L} & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & \widetilde{\zeta} & \widetilde{B} & & \\ & & & \widetilde{C} & 0 \\ & & & \widetilde{\varepsilon} & \widetilde{a} \end{pmatrix} \text{ tal que } \widetilde{\varphi} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & B & & \\ & & & C & 0 \\ & & & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Luego, un cálculo sencillo muestra que el cambio de base que necesitamos es

$$\psi = \begin{pmatrix} I_{V_0} & A^{-1}LB^{-1}\zeta & -A^{-1}t & -A^{-1}L & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & -B^{-1}\zeta & I_{\mathfrak{a}} & & \\ & & & I_{V_1} & 0 \\ & & & -a^{-1}\varepsilon & 1. \end{pmatrix}$$

□

2.5 Construcción de las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$, siendo $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_1$ y $\mathfrak{a}_1 \neq 0$

Sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal supersimpléctica en $V = V_0 \oplus V_1$, y sea $\mathfrak{h}$ la superálgebra de Lie de Heisenberg asociada. Consideremos un superespacio vectorial $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_1$, con $\mathfrak{a}_1 \neq \{0\}$. Como se mencionó en la sección anterior, el objetivo de este apartado es mostrar que si equipamos a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ con una estructura de superálgebra de Lie tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, entonces el nilradical de $\mathfrak{g}$ contiene propiamente a $\mathfrak{h}$. Analizamos los casos $|\mathcal{B}| = 0$ y $|\mathcal{B}| = 1$ por separado.

CASO 1 Superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma supersimpléctica par $\mathcal{B}$. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$. Consideremos las siguientes bases homogéneas: $\mathfrak{h}_0 = \langle e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n, h\rangle$, $\mathfrak{h}_1 = \langle x_1, \ldots, x_m\rangle$, $\mathfrak{a}_0 = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_s\rangle$ y $\mathfrak{a}_1 = \langle \tau_1, \ldots, \tau_k\rangle$. Demandando que $\mathfrak{h}$ sea una sub-superálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, tenemos que $[\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_0] \subset \mathfrak{h}_0$, es decir, $[\sigma_i, \sigma_j] = \gamma_{ij}^{\ell} e_\ell +$

$\mu_{ij}^{\ell}e_{\ell} + r_{ij}h$, $\gamma_{ij}^{\ell}, \mu_{ij}^{\ell}$ y $r_{ij} \in \mathbb{C}$. También tenemos que $[\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1] \subset \mathfrak{h}_1$, es decir, $[\sigma_i, \tau_j] = \alpha_{ij}^{\ell}x_{\ell}$, con $\alpha_{ij}^{\ell} \in \mathbb{C}$, y finalmente, $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1] \subset \mathfrak{h}_0$, es decir, $[\tau_i, \tau_j] = a_{ij}^{\ell}e_{\ell} + b_{ij}^{\ell}f_{\ell} + c_{ij}h$, con $a_{ij}^{\ell}, b_{ij}^{\ell}$ y $c_{ij} \in \mathbb{C}$.

Sabemos que para determinar las condiciones bajo las que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ se convierte en una superálgebra de Lie tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, debemos verificar la identidad de Jacobi en los elementos homogéneos de $\mathfrak{g}$. Observemos que la identidad de Jacobi en la tercia (σ_i, x, y) con $\sigma_i \in \mathfrak{a}_0, x, y \in \mathfrak{h}_i$ $(i = 0, 1)$, indica que $\operatorname{ad}(\sigma_i)|_{\mathfrak{h}} \in \operatorname{Der}(\mathfrak{h})_0$, es decir, la restricción de $\operatorname{ad}(\sigma_i)$ a $\mathfrak{h}$ es una derivación par de $\mathfrak{h}$. Análogamente, Jacobi en la tercia (τ_i, x, y) con $\tau_i \in \mathfrak{a}_1, x, y \in \mathfrak{h}_i$ $(i = 0, 1)$, indica que $\operatorname{ad}(\tau_i)|_{\mathfrak{h}} \in (\operatorname{Der}\mathfrak{h})_1$, es decir, la restricción de $\operatorname{ad}(\tau_i)$ a $\mathfrak{h}$ es una derivación impar de $\mathfrak{h}$. Así,

$$\operatorname{ad}(\sigma_i)|_{\mathfrak{h}} = \begin{pmatrix} a_iI_{2n} + X_i & 0 & \\ 0 & 2a_i & \\ & & T_i \end{pmatrix} \qquad \operatorname{ad}(\tau_i)|_{\mathfrak{h}} = \begin{pmatrix} & & M_i \\ & & 0 \\ N_i & 0 & \end{pmatrix}$$

donde $X_i \in \mathfrak{sp}(V_0), a_i \in \mathbb{C}, T_i \in \operatorname{End}(V_1)$ es tal que $T_i^t g + gT_i = a_i g; M_i \in \operatorname{Hom}(V_1, V_0), N_i \in \operatorname{Hom}(V_0, V_1)$ son tales que $M_i = \omega N_i^t g$.

Ahora bien, de la identidad de Jacobi en las tercias $(\sigma_i, \sigma_j, e_k)$ y $(\sigma_i, \sigma_j, f_k)$ se sigue que $\gamma_{ij}^{\ell} = \mu_{ij}^{\ell} = 0$ y más aún, $X_iX_j = X_jX_i$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Por otra parte, de Jacobi en las tercias (τ_i, τ_j, e_k) y (τ_i, τ_j, f_k) se tiene que $a_{ij}^{\ell} = b_{ij}^{\ell} = 0$ y $M_iN_j + M_jN_i = 0$. De Jacobi en la tercia $(\tau_i, \tau_j, x_k) = 0$ se concluye que $N_iM_j + N_jM_i = 0$.

Así, podemos escribir $[\sigma_i, \sigma_j] = R(\sigma_i, \sigma_j)h$ con $R : \mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{a}_0 \to \mathbb{C}$ una forma bilineal antisimétrica, $[\sigma_i, \tau_j] = P(\sigma_i, \tau_j)$ con $P : \mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{a}_1 \to V_1$ una forma bilineal tal que $P(\sigma_i, \tau_j) = -P(\tau_j, \sigma_i)$, y $[\tau_i, \tau_j] = Q(\tau_i, \tau_j)h$ con $Q : \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_1 \to \mathbb{C}$ una forma bilineal simétrica.

Notemos que la identidad de Jacobi en la tercia (σ_i, τ_j, x_k) se verifica si, y sólo si, $(a_iI_{2n} + X_i)M_j = M_jT_i$ y $g(x_k, P(\sigma_i, \tau_j)) = 0$. Ahora bien, puesto que g no degenera, se concluye que para todo $\sigma_i \in \mathfrak{a}_0$ y $\tau_j \in \mathfrak{a}_1, P(\sigma_i, \tau_j) = 0$, es decir, $P = 0$. Luego, Jacobi para las tercias $(\sigma_i, \sigma_j, \tau_k), (\tau_i, \tau_j, \sigma_k)$ se satisface trivialmente. Finalmente, Jacobi en las tercias (σ_i, τ_j, e_k) y (σ_i, τ_j, f_k) se satisface si, y sólo si, $T_iN_j = N_j(a_iI_{2n} + X_i)$.

En resumen, para que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ admita una estructura de superálgebra de Lie tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes ecuaciones

$$\begin{array}{lll} X_iX_j = X_jX_i, & M_iN_j + M_jN_i = 0, & N_iM_j + N_jM_i = 0 \\ (a_iI_{2n} + X_i)M_j = M_jT_i, & N_j(a_iI_{2n} + X_i) = T_iN_j & \end{array}$$

Sin embargo, obsérvese que cuando $i = j$, las ecuaciones $M_iN_j + M_jN_i = 0$ y $N_iM_j + N_jM_i = 0$ indican que $\mathrm{ad}^2(\tau_i) = 0,\ \forall i = 1, \ldots, m$. Es decir, en $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ al menos tenemos dos ideales nilpotentes: $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_1$.

CASO 2 Superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma supersimpléctica impar $\mathcal{B}$. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$. Consideremos las siguientes bases homogéneas: $\mathfrak{h}_0 = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle, \mathfrak{h}_1 = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle, \mathfrak{a}_0 = \langle \sigma_i, \ldots, \sigma_s\rangle$ y $\mathfrak{a}_1 = \langle \tau_1, \ldots, \tau_k\rangle$. Al igual que antes, demandando que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ y que $\mathfrak{h}$ sea una sub-superálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, tenemos: $[\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_0] \subset \mathfrak{h}$, es decir, $[\sigma_i, \sigma_j] = \alpha_{ij}^{\ell} v_{\ell}$, con $\alpha_{ij}^{\ell} \in \mathbb{C}$; $[\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1] \subset \mathfrak{h}_1$, es decir, $[\sigma_i, \tau_j] = \beta_{ij}^{\ell} x_{\ell} + b_{ij}h$, con $\beta_{ij}^{\ell}, b_{ij} \in \mathbb{C}$ y finalmente, $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1] \subset \mathfrak{h}_0$, es decir, $[\tau_i, \tau_j] = \gamma_{ij}^{\ell} v_{\ell}$, con $\gamma_{ij}^{\ell} \in \mathbb{C}$.

Para determinar bajo qué condiciones el superespacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ admite un estructura de superálgebra de Lie, debemos verificar la identidad de Jacobi en los elementos de $\mathfrak{g}$. Observamos que de la identidad de Jacobi en la terna (σ_i, x, y) con $\sigma_i \in \mathfrak{a}_0, x, y \in \mathfrak{h}_i,\ i \in \mathbb{Z}_2$,indica que $\mathrm{ad}(\sigma_i)|_{\mathfrak{h}} \in (\mathrm{Der}\,\mathfrak{h})_0$, es decir, la restricción de $\mathrm{ad}(\sigma_i)$ a $\mathfrak{h}$ es una derivación par de $\mathfrak{h}$. Análogamente, la identidad de Jacobi en la terna (τ_i, x, y) con $\tau_i \in \mathfrak{a}_1, x, y \in \mathfrak{h}_i,\ i \in \mathbb{Z}_2$, indica que $\mathrm{ad}(\tau_i)|_{\mathfrak{h}} \in (\mathrm{Der}\,\mathfrak{h})_0$, es decir, la restricción de $\mathrm{ad}(\tau_i)$ a $\mathfrak{h}$ es una derivación impar de $\mathfrak{h}$. Luego,

$$\mathrm{ad}(\sigma_i)|_{\mathfrak{h}} = \begin{pmatrix} S_i & & \\ & T_i & 0 \\ & 0 & a_i \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}(\tau_i)|_{\mathfrak{h}} = \begin{pmatrix} & M_i & 0 \\ N_i & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

donde $S_i \in \mathrm{End}(V_0), T_i \in \mathrm{End}(V_1), a_i \in \mathbb{C}$ tales que $S_i^t\Phi + \Phi T_i = a_i\Phi$. Por otra parte, $M_i \in \mathrm{Hom}(V_1, V_0)$ satisface $M_i^t\Phi - \Omega M_i = 0$, y $N_i \in \mathrm{Hom}(V_0, V_1)$ es tal que $N_i t\Omega + \Phi M_i = 0$.

Ahora bien, la identidad de Jacobi en las ternas $(\sigma_i, \sigma_j, x_k), (\tau_i, \tau_j, v_k)$ y (τ_i, τ_j, x_k) se verifica si, y sólo si, $\alpha_{ij}^{\ell} = 0, M_iN_j + M_jN_i = 0, N_iM_j + N_jM_i = 0$ y $\gamma_{ij}^{\ell} = 0$, respectivamente. Así, tenemos que $[\sigma_i, \sigma_j] = 0, [\tau_i, \tau_j] = 0$ y $[\sigma_i, \tau_j] = B(\sigma_i, \tau_j) + b_ijh$, con $B : \mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{a}_1 \to V_1$ es una forma bilineal tal que $B(\sigma_i, \tau_j) = -B(\tau_j, \sigma_i.)$

Notemos que la identidad de Jacobi en la terna (σ_i, τ_j, x_k) es válida si, y sólo si, $S_iM_j = M_jT_i$. Por otra parte, la identidad de Jacobi en la terna (σ_i, τ_j, v_k)

se verifica si y sólo si, $T_iN_j = N_jS_i$ y $\Phi(v_k, B(\sigma_i, \tau_j)) = 0$. Puesto que Φ no degenera, se concluye que para todo $\sigma_i \in \mathfrak{a}_0, \tau_j \in \mathfrak{a}_0,\ B(\sigma_i, \tau_j) = 0$, es decir, $B = 0$. De esta forma, Jacobi en la terna $(\tau_i, \tau_j, \sigma_k)$ se satisface trivialmente, mientras que Jacobi en la terna $(\sigma_i, \sigma_j, \tau_k)$ se satisface si, y sólo si, $a_ib_{jk} = a_jb_{ik}$. Luego, se observa que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ es una superálgebra de Lie con $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ si, y sólo si, $M_iN_j + M_jN_i = 0, N_iM_j + N_jM_i = 0, S_iM_j = M_jT_i, T_iN_j = N_jS_i$ y $a_ib_{jk} = a_jb_{ik}$.

Al igual que en el caso anterior, las ecuaciones $M_iN_j + M_jN_i = 0$ y $N_iM_j + N_jM_i = 0$ con $i = j$, indican que cada $\tau_i \in \mathfrak{a}_1$ es un elemento nilpotente en $\mathfrak{g}$, pues $\mathrm{ad}^2(\tau_i) = 0\ \forall i = 1, \ldots, k$. Nuevamente se observa que la superálgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ con $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, al menos tiene dos ideales nilpotentes: $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_1$. Luego, pidiendo que $\mathfrak{a}_0$ sea un conjunto no nilpotente, observamos que $N(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_1$.

Luego, hemos probado la siguiente:

19 Proposición. *Sea $\mathfrak{h}$ una superálgebra de Lie de Heisenberg y sea $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_1$ un superespacio vectorial tal que $\mathfrak{a}_1 \neq 0$. El superespacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ admite una estructura de superálgebra de Lie tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ si, y sólo si, $\mathfrak{a}_1$ es un sub-superespacio impar formado por elementos nilpotentes. En particular, si $\mathfrak{a}_0 = \{0\}$, $\mathfrak{g}$ es nilpotente.*

Capítulo 3

Formas superortogonales y supersimplécticas invariantes en $\mathfrak{h}(D)$

Sea $\mathfrak{h}(D)$ una superálgebra de Lie construida a partir de una superálgebra de Lie de Heisenberg y una derivación par $D \in (\operatorname{Der}\mathfrak{h})_0$. El objetivo principal de este capítulo es resolver el tercer problema que se plantea en la tesis: determinar si existen formas superortogonales o supersimplécticas homogéneas e invariantes en $\mathfrak{h}(D)$. De hecho, probamos que $\mathfrak{h}(D)$ admite una forma o bien superortogonal, o bien supersimpléctica, e invariante precisamente cuando $|D| = 0$ y $\widehat{\mathcal{B}}(D, h) \neq 0$ a priori. Nos restringimos a trabajar con derivaciones pares porque más adelante veremos que si $D \in \operatorname{Der}\mathfrak{h}$ es impar, entonces D es una transformación nilpotente y la superálgebra de Lie $\mathfrak{h}(D)$ no admite formas superortogonales ni supersimplécticas invariantes.

3.1 Formas superortogonales y supersimplécticas invariantes en $\mathfrak{h}(D)$.

Sea $\mathfrak{h}$ una superálgebra de Lie de Heisenberg. En el Capítulo 1 se mostró que si $\mathcal{B} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ es una forma bilineal invariante en $\mathfrak{h}$, la Proposición **5** implica que $\mathcal{B}(x, h) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{h}$. Ahora bien, consideremos la superálgebra de Lie $\mathfrak{h}(D)$ construida a partir de dicha superálgebra de Lie de Heisenberg y una derivación par $D \in (\operatorname{Der}\mathfrak{h})_0$. Se verifica fácilmente que si $\widehat{\mathcal{B}} : \mathfrak{h}(D) \times \mathfrak{h}(D) \to \mathbb{C}$

es una forma bilineal invariante en $\mathfrak{h}(D)$ and $\widehat{\mathcal{B}}(D,h)$ es cero a priori porque $|\widehat{\mathcal{B}}(D,h)|=1$, entonces $\widehat{\mathcal{B}}(x,h)=0\ \forall x\in\mathfrak{h}$. Por lo tanto, $\widehat{\mathcal{B}}$ degenera. Luego, la única posibilidad para obtener una forma superortogonal o supersimpléctica, invariante y no degenerada $\widehat{\mathcal{B}}$ en $\mathfrak{h}(D)$, es cuando $\widehat{\mathcal{B}}(D,h)$ no es cero a priori, y este es el caso, si, y sólo si, $|\widehat{\mathcal{B}}|=|D|+|h|$. Luego si $|\widehat{\mathcal{B}}|=0$, tenemos dos posibilidades: o bien $|h|=|D|=0$, o bien $|h|=|D|=1$. Por otra parte, si $|\widehat{\mathcal{B}}|=1$, las posibilidades existen para $|h|\neq|D|$; es decir, o bien $|h|=0$ y $|D|=1$, o bien $|h|=1$ y $|D|=0$.

20 Lema. *Sea $D\in(\operatorname{Der}\mathfrak{h})_0$ una derivación par de $\mathfrak{h}$. Si la superálgebra de Lie $\mathfrak{h}(D)$ admite una forma bilineal homogénea e invariante, entonces $h\in\operatorname{Ker}(D)$.*

Demostración. Analizaremos los casos $|\mathcal{B}|=0$ y $|\mathcal{B}|=1$ por separado, suponiendo que $h\notin\operatorname{Ker}(D)$.

CASO 1 La superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma supersimpléctica par $\mathcal{B}$. Por la Proposición **9** sabemos que siempre podemos suponer que $D(h)=ah$ para algún $a\in\mathbb{C}$. En este caso, $a\neq 0$. Sea $\widehat{\mathcal{B}}:\mathfrak{h}(D)\times\mathfrak{h}(D)\to\mathbb{C}$ una forma bilineal invariante en $\mathfrak{h}(D)$. Entonces,

$$\mathcal{B}(D,h)=a^{-1}\mathcal{B}(D,[D,h])=a^{-1}\mathcal{B}([D,D],h)=0.$$

Por tanto, $\mathcal{B}(h,D)=0$. Pero la Proposición **5** indica que $\mathcal{B}(x,h)=0\ \forall x\in\mathfrak{h}$. Por tanto, $\mathcal{B}$ es una forma bilineal degenerada.

CASO 2 La superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma supersimpléctica impar $\mathcal{B}$. Observemos que en este caso, el argumento anterior también es válido porque la Proposición **11** implica que $D(h)=ah$, para algún $a\in\mathbb{C}$, y al igual que antes, tomamos $a\neq 0$. $\square$

Observación. El Lema **20** nos proporciona una condición necesaria, mas no suficiente, para la existencia de formas superortogonales o supersimplécticas invariantes en $\mathfrak{h}(D)$. El ejemplo trivial se obtienes con $\mathfrak{h}(D)$, donde $\mathfrak{h}$ es la superálgebra de Lie de Heisenberg asociada a una forma supersimpléctica par $\mathcal{B}$, y D cualquier derivación nilpotente.

21 Proposición. *Sea $D\in\operatorname{Der}(\mathfrak{h})$ una derivación homogénea tal que $h\in\operatorname{Ker}(D)$. Si $\dim\operatorname{Ker}(D)\geq 2$, la superálgebra de Lie $\mathfrak{h}(D)$ no admite formas superortogonales ni supersimplécticas invariantes.*

Demostración. Sea $\widehat{\mathcal{B}} : \mathfrak{h}(D) \times \mathfrak{h}(D) \to \mathbb{C}$ una forma bilineal invariante supersimétrica o superantisimétrica tal que $|\widehat{\mathcal{B}}| = |D| + |h|$. Puesto que $\mathrm{Ker}(D) = (\mathrm{Ker}\, D)_0 \oplus (\mathrm{Ker}\, D)_1$, cada elemento no homogéneo $x \in \mathrm{Ker}(D)$ puede escribirse como $x = x_0 + x_1$ donde $x_0 \in (\mathrm{Ker}\, D)_0 = \mathrm{Ker}(S)$ y $x_1 \in (\mathrm{Ker}\, D)_1 = \mathrm{Ker}(T)$. Luego, basta considerar elementos homogéneos $x \in (\mathrm{Ker}\, D)_0$ y $y \in (\mathrm{Ker}\, D)_1$.

Ahora, sea V el superespacio vectorial subyacente de $\mathfrak{h}$. Por hipótesis, existe $u \in V - \{0\}$ tal que $D(u) = 0$. Puesto que $\mathcal{B}$ es una forma supersimpléctica homogénea y no degenerada en V, existe $v \in V$ tal que $\mathcal{B}(u, v) \neq 0$. Se sigue que $\widehat{\mathcal{B}}(D, [u, v]) = \widehat{\mathcal{B}}([D, u], v)$ si, y sólo si, $\mathcal{B}(u, v)\widehat{\mathcal{B}}(D, h) = 0$. Así, $\mathcal{B}(D, h) = 0$ y por tanto, $\mathcal{B}$ degenera. $\square$

22 Corolario. *Sea $D \in (\mathrm{Der}\, \mathfrak{h})_1$ una derivación homogénea. Entonces, las superalgebras de Lie $\mathfrak{h}(D)$ no admiten formas superortogonales ni supersimplecticas invariantes.*

Demostración. Sea $\mathfrak{h}(D)$ la superálgebra de Lie construida a partir de la superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ y una derivación impar homogénea $D \in (\mathrm{Der}\, \mathfrak{h})_1$. Para cualquiera de las superálgebras de Lie de Heisenberg , la Proposición **13** implica que $D \in (\mathrm{Der}\, \mathfrak{h})_1$ es nilpotente y por lo tanto, $\dim \mathrm{Ker}(D) \geq 2$. Luego, por la Proposición **21** anterior, las superálgebras de Lie $\mathfrak{h}(D)$ no admiten formas ni superortogonales ni supersimplécticas homogéneas invariantes. $\square$

Observación. Sea $D \in (\mathrm{Der}\, \mathfrak{h})_0$ una derivación par tal que $h \in \mathrm{Ker}(D)$. Esto es,

(a) Si $|h| = 0$

$$D = \begin{pmatrix} S & \\ & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 & \\ 0 & 0 & \\ & & T \end{pmatrix}$$

donde $X \in \mathfrak{sp}(V_0)$ y $T \in \mathfrak{o}(V_1)$.

(b) Si $|\mathcal{B}| = 1$

$$D = \begin{pmatrix} S & & \\ & T & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $S \in \mathrm{End}(V_0), T \in \mathrm{End}(V_1)$ tales que $S^t\Phi + \Phi T = 0$.

Sea $\mathfrak{h}$ la superálgebra de Lie de Heisenberg asociada a una forma supersimpléctica par $\mathcal{B}$. Supongamos que X es nilpotente. Entonces, existe $v \in$

$V_0, v \neq 0$ tal que $X(v) = 0$. Así, $\dim \mathrm{Ker}(S) \geq 1$ y entonces $\dim \mathrm{Ker}(D) \geq 2$. Por lo tanto, la Proposición **21** muestra que $\mathfrak{h}(D)$ no admite estructuras ortogonales invariantes pares. El mismo argumento es válido si $T \in \mathrm{End}(V_1)$ es nilpotente. Finalmente, para la superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma supersimpléctica impar $\mathcal{B}$ el mismo argumento funciona.

Las observaciones anteriores dicen que tenemos sólo dos superálgebras de Lie $\mathfrak{h}(D)$ diferentes con la posibilidad de tener formas superortogonales o supersimplécticas homogéneas invariantes: o bien, $|\widehat{\mathcal{B}}| = |h| = |D| = 0$; o bien, $|\widehat{\mathcal{B}}| = |D| = 1$ y $|h| = 0$.

23 Teorema. *Sea $D \in (\mathrm{Der}\,\mathfrak{h})_0$ una derivación par de $\mathfrak{h}$. La superálgebra de Lie $\mathfrak{h}(D)$ admite una forma superortogonal o supersimpléctca homogénea invariante si, y sólo si, $\mathrm{Ker}(D) = \langle h \rangle$. En cada caso, $\widehat{\mathcal{B}} : \mathfrak{h}(D) \times \mathfrak{h}(D) \to \mathbb{C}$ es necesariamente supersimétrica, $|\widehat{\mathcal{B}}| = |\mathcal{B}|$ y está dada por*

(i) Caso $|\mathcal{B}| = 0$.

$$\widehat{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 (X^t)^{-1}\omega & & & \\ & 0 & \gamma_1 & \\ & \gamma_1 & \gamma_2 & \\ & & & \gamma_1 (T^t)^{-1} g \end{pmatrix}, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}, \gamma_1 \neq 0.$$

(ii) Caso $|\mathcal{B}| = 1$.

$$\widehat{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} & & \gamma (S^t)^{-1}\Phi & 0 \\ & & 0 & \gamma \\ \gamma (T^t)^{-1}\Omega & 0 & & \\ 0 & \gamma & & \end{pmatrix}, \ \gamma \neq 0.$$

Demostración. Analizamos los casos $|\mathcal{B}| = 0$ y $|\mathcal{B}| = 1$ por separado.

Caso 1 La superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma bilineal supersimpléctica par $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow$) Supongamos que $\mathfrak{h}(D)$ admite una forma superortogonal par invariante. Entonces por el Lema **20**, $h \in \mathrm{Ker}(D)$. Luego, $\dim \mathrm{Ker}(D) \geq 1$. Además, se sigue de la Proposición **21** que $\dim \mathrm{Ker}(D) < 2$; así $\dim \mathrm{Ker}(D) = 1$ y por lo tanto se concluye que $\mathrm{Ker}(D) = \langle h \rangle$.

$\Leftarrow$) Por otra parte, tomemos $D \in (\operatorname{Der}\mathfrak{h})_0$ tal que $\operatorname{Ker}(D) = \langle h \rangle$. Entonces,

$$D = \begin{pmatrix} S & \\ & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 & \\ 0 & 0 & \\ & & T \end{pmatrix}$$

donde $X \in \mathfrak{sp}(V_0)$ y $T \in \mathfrak{o}(V_1)$ son no singulares.

Buscamos una forma superortogonal o supersimpléctica, homogénea e invariante $\widehat{\mathcal{B}} : \mathfrak{h}(D) \times \mathfrak{h}(D) \to \mathbb{C}$ tal que $\widehat{\mathcal{B}}(u, v) = \widehat{\mathcal{B}}_0(u_0, v_0) + \widehat{\mathcal{B}}_1(u_1, v_1)$ para todo $u, v \in \mathfrak{h}(D)$, donde $\widehat{\mathcal{B}}_0 = \widehat{\mathcal{B}}|_{\mathfrak{h}_0(D)\times\mathfrak{h}(D)_0}$ y $\widehat{\mathcal{B}}_1 = \widehat{\mathcal{B}}|_{V_1\times V_1}$. Puesto que ya sabemos que $\widehat{\mathcal{B}}(x, h) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{h}$, debemos demandar $\widehat{\mathcal{B}}(h, D) \neq 0$. Claramente, $D(v) = X(v)$ para todo $v \in V_0$. Dado que X es no singular, para cada $v \in V_0$ existe $v_0 \in V_0$ tal que $v = X(v_0)$. Así,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{B}}(D, v) &= \widehat{\mathcal{B}}(D, X(v_0)) = \widehat{\mathcal{B}}(D, D(v_0)) \\ &= \widehat{\mathcal{B}}(D, [D, v_0]) = \widehat{\mathcal{B}}([D, D], v_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De esta forma, buscamos $\mathcal{B} : \mathfrak{h}(D) \times \mathfrak{h}(D) \to \mathbb{C}$ tal que

$$\widehat{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{B}}_0 & & \\ & 0 & \gamma_1 \\ & \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

donde $\widetilde{\mathcal{B}}_0 = \widehat{\mathcal{B}}|_{V_0\times V_0} \to \mathbb{C},\ \gamma_1 = \mathcal{B}(h, D) \neq 0$, y $\gamma_2 = \mathcal{B}(D, D) \in \mathbb{C}$.

Ya que $\widehat{\mathcal{B}}$ debe ser invariante, se sigue que para cualesquiera $u, v \in V$, $\widehat{\mathcal{B}}([D, u], v) = \widehat{\mathcal{B}}(D, [u, v])$. En particular, para $u, v \in V_0$ esto implica $\widehat{\mathcal{B}}(D(u), v)$ $= \omega(u, v)\widehat{\mathcal{B}}(D, h)$; es decir, $\widetilde{\mathcal{B}}_0(X(u), v) = \gamma_1\omega(u, v)$. Luego, $\widetilde{\mathcal{B}}_0 = \gamma_1(X^t)^{-1}\omega$. Observamos que $\widetilde{\mathcal{B}}_0$ es invariante por construcción. Un cálculo sencillo, usando el hecho de que $X \in \mathfrak{sp}(V_0)$, muestra que $\widetilde{\mathcal{B}}_0$ es una forma bilineal simétrica no degenerada en V_0. Por lo tanto, la forma ortogonal invariante requerida en $\mathfrak{h}(D)_0$ está dada por

$$\widetilde{\mathcal{B}}_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1(X^t)^{-1}\omega & & \\ & 0 & \gamma_1 \\ & \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

con γ_1 and γ_2 escalares arbitrarios, excepto por el hecho de que $\gamma_1 \neq 0$.

Debemos determinar ahora $\widehat{\mathcal{B}}_1$ a partir de la condición de invariancia. Sean $u, v \in V_1$. Notemos que

$$\widehat{\mathcal{B}}([D,u],v) = \widehat{\mathcal{B}}(D,[u,v]) \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{B}}_1(T(u),v) = g(u,v)\widehat{\mathcal{B}}_0(D,h).$$

Puesto que g es no degenerada, $\widehat{\mathcal{B}}_1 = \gamma_1(T^t)^{-1}g$. Usando el hecho de que $T \in \mathfrak{o}(V_1)$, un cálculo sencillo muestra que $\widehat{\mathcal{B}}_1$ es una forma bilineal antisimétrica no degenerada en V_1. Entonces, $\widehat{\mathcal{B}}_1$ es una forma simpléctica invariante en V_1. Se sigue que $\dim V_1 = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, la forma superortogonal homogénea e invariante requerida en $\mathfrak{h}(D)$ está dada por

$$\widehat{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \gamma_1(X^t)^{-1}\omega & & & \\ & 0 & \gamma_1 & \\ & \gamma_1 & \gamma_2 & \\ & & & \gamma_1(T^t)^{-1}g \end{pmatrix}$$

con γ_1 and γ_2 escalares arbitrarios, excepto por el hecho de que $\gamma_1 \neq 0$.

Caso 2 La superálgebra de Lie de Heisenberg asociada a una forma bilineal supersimpléctica impar $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow$) Nuevamente, la prueba es consecuencia del Lema **20** y la Proposición **21**.

$\Leftarrow$) Por otra parte, buscamos $\widehat{\mathcal{B}} : \mathfrak{h}(D) \times \mathfrak{h}(D) \to \mathbb{C}$ una forma bilineal supersimétrica o superantisimétrica, no degenerada, invariante impar en $\mathfrak{h}(D)$. Esto es, buscamos $\widehat{\mathcal{B}} \leftrightarrow \Theta$ con $\Theta : V_0 \oplus \langle D \rangle \times V_1 \oplus \langle h \rangle \to \mathbb{C}$ y $\Lambda : V_1 \oplus \langle h \rangle \times V_0 \oplus \langle D \rangle \to \mathbb{C}$ tales que o bien $\Theta(u_0, x_1) = \Lambda(x_1, u_0)$ o bien, $\Theta(u_0, x_1) = -\Lambda(x_1, u_0)$ para todo $u_0 \in V_0 \oplus \langle D \rangle$ y $x_1 \in V_1 \oplus \langle h \rangle$.

Ahora debemos determinar $\widehat{\mathcal{B}}$ a partir de la condición de invariancia. Sean $u, v \in V_0$ y $x \in V_1$. Observemos que $\widehat{\mathcal{B}}([D,u],x) = \widehat{\mathcal{B}}(D,[u,x])$ si, y sólo si, $\Theta(Su,x) = \Phi(u,x)\Theta(D,h)$. Tomando $\gamma = \Theta(D,h)$, tenemos que $\Theta = \gamma(S^t)^{-1}\Phi$. En particular, $\gamma \neq 0$. Usando el hecho de que $S^t\Phi + \Phi T = 0$, obtenemos que $\Theta^t = -\gamma(T^t)^{-1}\Phi^t$. Ahora, notemos que $\widehat{\mathcal{B}}(D,[x,u]) = \widehat{\mathcal{B}}([D,x],u)$ si, y sólo si, $\Lambda = -\alpha(T^t)^{-1}\Omega$. Se sigue entonces que $\Lambda = \Theta^t$; por lo tanto $\widehat{\mathcal{B}}$ debe ser supersimétrica.

Por otra parte, $\widehat{\mathcal{B}}([x,u],u) = \widehat{\mathcal{B}}(x,[u,u])$ si, y sólo si, $\Omega(x,u)\Lambda(h,u) = 0$. Puesto que Ω es no degenerada, concluimos que $\Lambda(h,u) = 0$ para todo $u \in V_0$.

De la misma forma, para todo $u, v \in V_0$ y $x \in V_1$, $\widehat{\mathcal{B}}([u,x],v) = \widehat{\mathcal{B}}(u,[x,v])$ si, y sólo si, $\Phi(u,x)\Lambda(h,v) = \Omega(x,v)\Theta(u,h)$. Dado que Ω es no degenerada y $\Lambda(h,v) = 0$, tenemos que $\Theta(u,h) = 0$.

Por lo tanto, la forma superortogonal impar e invariante requerida en $\mathfrak{h}(D)$ está dada por

$$\widehat{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} & & \gamma(S^t)^{-1}\Phi & 0 \\ & & 0 & \gamma \\ \gamma(T^t)^{-1}\Omega & 0 & & \\ 0 & \gamma & & \end{pmatrix}, \ \gamma \neq 0.$$

□

Sean $\mathfrak{h}(D)$ y $\mathfrak{h}(D')$ superálgebras de Lie que admiten formas superortogonales invariantes $\widehat{\mathcal{B}}$ y $\widehat{\mathcal{B}}'$, respectivamente. Para determinar la condición para tener un isomorfismo isométrico $\varphi : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D')$ simplemente debemos verificar cuándo se satisface que $\varphi^t\widehat{\mathcal{B}}\varphi = \widehat{\mathcal{B}}'$.

24 Teorema. *Sean $\mathfrak{h}(D)$ y $\mathfrak{h}(D')$ superálgebras de Lie equipadas con formas superorthogonales invariantes $\widehat{\mathcal{B}}$ y $\widehat{\mathcal{B}}'$, respectivamente como en el Teorema* **23**. *Existe un isomorfismo isométrico $\varphi : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D')$ si, y sólo si,*

(i) Caso $|\mathcal{B}| = 0$. Existen $b \in \mathbb{C} - \{0\}, A \in \mathrm{GL}(V_0)$ tales que $b^{-1/2}g \in \mathrm{Sp}(V_0)$ y $a \in \mathbb{C} - \{0\}, B \in \mathrm{GL}(V_1)$ tales que

$$\widehat{\mathcal{B}}_0' = A^t\widehat{\mathcal{B}}_0A, \quad \gamma_1' = ab\gamma_1, \quad \gamma_2' = a^2\gamma_2, \quad \widehat{\mathcal{B}}_1 = B^t\widehat{\mathcal{B}}_1'B.$$

(ii) Caso $|\mathcal{B}| = 1$. Existen $a, b \in \mathbb{C} - \{0\}, A \in \mathrm{GL}(V_0)$ y $B \in \mathrm{GL}(V_1)$ tales que

$$\widehat{\mathcal{B}}_0' = A^t\widehat{\mathcal{B}}_0B, \quad \gamma' = ab\gamma, \quad \widehat{\mathcal{B}}_1 = B^t\widehat{\mathcal{B}}_1'A.$$

Demostración. Analizamos los casos $|\mathcal{B}| = 0$ y $|\mathcal{B}| = 1$ por separado.

Caso 1 La superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma supersimpléctica par $\mathcal{B}$. El primer caso del Teorema **14** implica que el isomorfismo de álgebras de Lie $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D')$ está dado por

$$\widetilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & v & \\ 0 & a & \\ & & B \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0), v \in \mathfrak{h}_0, a \neq 0, B \in \mathrm{GL}(V_1).$$

Como una consecuencia de la Proposición **8**, podemos escribir explícitamente $\widetilde{A} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0)$ y así, $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D')$ se expresa como sigue:

$$\widetilde{\varphi} = \begin{pmatrix} A & 0 & z & \\ \alpha^t & b & d & \\ 0 & 0 & a & \\ & & & B \end{pmatrix}$$

donde $b^{-1/2}A \in \mathrm{Sp}(V_0),\ \alpha, z \in V_0 \subset \mathfrak{h}_0, d \in \mathbb{C},\ a \neq 0$ y $B \in \mathrm{GL}(V_1)$. Notemos que siempre podemos encontrar un automorfismo $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}(D))$ tal que $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \psi : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D')$ sea diagonal. De hecho,

$$\psi = \begin{pmatrix} I_{V_0} & 0 & -A^{-1}z & \\ -b^{-1}\alpha^t & 1 & b^{-1}(\alpha^t A^{-1} z - d) & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & I_{V_1} \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \\ 0 & b & 0 & \\ 0 & 0 & a & \\ & & & B \end{pmatrix}.$$

Ahora sean $\widehat{\mathcal{B}} : \mathfrak{h}(D) \times \mathfrak{h}(D) \to \mathbb{C}$ y $\widehat{\mathcal{B}'} : \mathfrak{h}(D') \times \mathfrak{h}(D') \to \mathbb{C}$ formas superortogonales invariantes para $\mathfrak{h}(D)$ y $\mathfrak{h}(D')$, respectivamente. Puesto que $\varphi : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D')$ debe ser una isometría, $\varphi^t \widehat{\mathcal{B}} \varphi = \widehat{\mathcal{B}'}$. Se sigue que $\widehat{\mathcal{B}}'_0 = A^t \widehat{\mathcal{B}}_0 A, \gamma'_1 = ab\gamma_1 \neq 0,\ \gamma'_2 = a^2\gamma_2 \in \mathbb{C}$ y $\widehat{\mathcal{B}}_1 = B\widehat{\mathcal{B}}'_1 B$.

Caso 2 La superálgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ asociada a una forma supersimpléctica impar $\mathcal{B}$. El segundo caso del Teorema **14** implica que el isomorfismo de álgebras de Lie $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D')$ está dado por

$$\widetilde{\varphi} = \begin{pmatrix} A & v & & \\ 0 & a & & \\ & & B & 0 \\ & & 0 & b \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{GL}(V_0), v \in \mathfrak{h}_0, a \neq 0, B \in \mathrm{GL}(V_1), b \neq 0.$$

Ahora sean $\widehat{\mathcal{B}} : \mathfrak{h}(D) \times \mathfrak{h}(D) \to \mathbb{C}$ y $\widehat{\mathcal{B}'} : \mathfrak{h}(D') \times \mathfrak{h}(D') \to \mathbb{C}$ formas superortogonales invariantes para $\mathfrak{h}(D)$ y $\mathfrak{h}(D')$, respectivamente. Puesto que $\varphi : \mathfrak{h}(D) \to \mathfrak{h}(D')$ debe ser una isometría, $\varphi^t \widehat{\mathcal{B}} \varphi = \widehat{\mathcal{B}'}$. Se sigue entonces que $\widehat{\mathcal{B}}'_0 = A^t \widehat{\mathcal{B}}_0 B, \gamma' = ab\gamma \neq 0$ y $\widehat{\mathcal{B}}_1 = B^t \widehat{\mathcal{B}}'_1 A$.

$\square$

Apéndice A

Álgebras de Lie de Heisenberg

En este apéndice enunciamos, por completez, los resultados de los capítulos anteriores que son análogos para el caso de álgebras de Lie, y sólo proporcionamos las pruebas que son esencialmente distintas.

A.1 Preliminares

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja de dimensión finita, con un centro unidimensional $Z(\mathfrak{g})$ tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Sea h el generador de $Z(\mathfrak{g})$. Entonces, en $\mathfrak{g}$ puede definirse una forma bilineal superantisimétrica $\overline{\omega}$ vía $[x, y] = \overline{\omega}(x, y)h$, $\forall\ x, y \in \mathfrak{g}$. Claramente, esto induce una forma bilineal antisimétrica ω en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ vía $\omega([x], [y]) = \overline{\omega}(x, y)$.

25 Proposición. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con un centro unidimensional $Z(\mathfrak{g})$ generado por h, tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Entonces, existen subálgebras de Lie $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{a}$ tales que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ y $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] = 0$.*

Decimos que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un *álgebra de Lie de Heisenberg* si tiene un centro de dimensión uno $Z(\mathfrak{g}) = \langle h \rangle$, tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ y además, la forma bilineal antisimétrica $\overline{\omega}$ inducida por ω en $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ no degenera. Escribiremos V, para denotar al subespacio simpléctico subyacente de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = V \oplus Z(\mathfrak{g})$. Es bien sabido que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble y nilpotente.

Recíprocamente, dado un espacio vectorial simpléctico de dimensión finita V con estructura simpléctica ω, uno construye su álgebra de Lie de Heisenberg asociada mediante $\mathfrak{g} = V \oplus Z(\mathfrak{g})$ y definiendo $[u, v] = \omega(u, v)h$ para todos $u, v \in$

V, y $h \in Z(\mathfrak{g})-\{0\}$. Es claro que, hasta isomorfismo, existe una única estructura de álgebra de Lie de Heisenberg basada en un espacio vectorial simpléctico (V, ω). Escribiremos $\mathfrak{h}_0(V, \omega)$ para denotar al álgebra de Lie de Heisenberg definida por V con forma simpléctica ω, o simplemente $\mathfrak{h}_0$ si el par (V, ω) está entendido por el contexto.

A continuación proporcionamos algunos resultados de carácter general que serán útiles.

26 Proposición. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con centro no trivial. Entonces $\mathfrak{g}$ admite derivaciones exteriores.*

Demostración. Claramente $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definida por $D(x) = -x$ para $x \in Z(\mathfrak{g}) - \{0\}$ y $D(x) = 0$ en otro caso, es una derivación de $\mathfrak{g}$. Supóngase que D es una derivación interior, i.e., $D = \mathrm{ad}(y)$ para algún $y \in \mathfrak{g}$ y sea $x \in Z(\mathfrak{g})-\{0\}$. Por definición, $D(x) = -x$; por otra parte $D(x) = \mathrm{ad}(y)(x) = 0$. Luego, $x = 0$, lo cual contradice la elección de x. Por tanto D es una derivación exterior de $\mathfrak{g}$. □

Observación. La Proposición **26** indica que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con centro no trivial admite derivaciones no nilpotentes. En efecto, sea $\{x_1, \ldots, x_k\}$ una base ordenada de $Z(\mathfrak{g})$ que se completa a una base ordenada de $\mathfrak{g}$. La matriz asociada a D en esta base es

$$D = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

27 Corolario. *Toda álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ admite derivaciones exteriores no nilpotentes.*

Observación. El Corolario **27** es válido si pedimos que $\mathfrak{g}$ sea un álgebra de Lie *soluble* con centro no trivial.

Recordemos que cada álgebra de Lie soluble $\mathfrak{g}$ tiene un ideal nilpotente maximal (necesariamente único), que se llama el *nilradical* de $\mathfrak{g}$ y se denota por $N(\mathfrak{g})$. Ahora sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja de dimensión finita y considérese $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$. El espacio vectorial $\mathfrak{g} \oplus \langle D \rangle$ tiene estructura de álgebra de Lie definiendo $[D, x] = D(x)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ y $[D, D] = 0$. Es decir, la estructura de álgebra de Lie en $\mathfrak{h}_0 \oplus \langle D \rangle$ está dada por el producto semidirecto de $\langle D \rangle$ y $\mathfrak{h}_0$, $\langle D \rangle \ltimes \mathfrak{h}_0$. A partir de este momento denotaremos por $\mathfrak{g}(D)$ a las álgebras de Lie así obtenidas. Tenemos el siguiente:

28 Teorema. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y sea $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.*

(i) $\mathfrak{g}(D)$ es un álgebra de Lie soluble si, y sólo si, $\mathfrak{g}$ es soluble,

(ii) $\mathfrak{g}(D)$ es un álgebra de Lie nilpotente si, y sólo si, $\mathfrak{g}$ es nilpotente y D es una derivación nilpotente.

En el caso que nos interesa, se sigue que dada $D \in (\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}_0)$, $\mathfrak{h}_0(D)$ es nilpotente si, y sólo si, D es nilpotente.

La siguiente Proposición establece cómo son las formas bilineales invariantes en $\mathfrak{h}_0$.

29 Proposición. *Las formas bilineales invariantes en $\mathfrak{h}_0$ son degeneradas. Más aún,*

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo $\mathcal{B}_1$ cualquier forma bilineal definida en el espacio simpléctico V subyacente a $\mathfrak{h}_0$.

A.2 Álgebras de Lie de Heisenberg con derivación.

La Proposición **29** indica que el álgebra de Lie de Heisenberg no admite estructuras geométricas invariantes. Luego, a partir del álgebra de Lie $\mathfrak{h}_0$, nos interesa definir un álgebra de Lie soluble que tenga la posibilidad de admitir estructuras ortogonales o simplécticas invariantes. Para esto seguimos la estrategia usual propuesta en [2]: dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión $n-1$ y una derivación de dicha álgebra de Lie, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, extendemos $\mathfrak{g}$ por D para construir un álgebra de Lie soluble de dimensión n.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $D \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ una derivación de $\mathfrak{g}$. Ya sabemos que el espacio vectorial $\mathfrak{g}(D) = \mathfrak{g} \oplus \langle D \rangle$ tiene una estructura de álgebra de Lie definiendo $[D, x] = D(x)$ para todo $x \in \mathfrak{h}$ y $[D, D] = 0$. Cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0$, se obtiene que $N(\mathfrak{h}_0(D)) = \mathfrak{h}_0$ si y sólo si D es derivación no nilpotente.

Observación. Si $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ es una derivación que actúa trivialmente en $\mathfrak{h}_0$, se tiene que $\mathfrak{h}_0(D) = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{a}$, siendo $\mathfrak{a}$ un álgebra de Lie abeliana de dimensión uno.

Cuando estudiamos álgebras de Lie, uno de los principales problemas con los que nos encontramos es decidir cuándo dos de ellas son isomorfas, es decir, cuándo son esencialmente la misma. Así, dadas D, D' derivaciones del álgebra de Lie $\mathfrak{h}_0$, es natural preguntarse bajo qué condiciones las álgebras de Lie $\mathfrak{h}_0(D)$ y $\mathfrak{h}_0(D')$ son isomorfas.

Obsérvese que el problema de clasificación planteado de esta forma es muy general, pues como señalamos anteriormente, del Teorema **28** se sigue que hay dos clases de álgebras de Lie $\mathfrak{h}_0(D)$ con características muy específicas: las nilpotentes y las solubles con ideal nilpotente máximo $\mathfrak{h}_0$; sin embargo, en este trabajo no pretendemos abordar ambos problemas. Uno de nuestros objetivos es determinar las condiciones necesarias y suficientes para que las álgebras de Lie $\mathfrak{h}_0(D)$ admitan formas ortogonales o simplécticas invariantes. Como se verá más adelante, un cálculo sencillo muestra que una condición necesaria para que $\mathfrak{h}(D)$ admita dichas formas invariantes es que $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ sea una transformación no nilpotente. Por consiguiente, nos concentramos en las álgebras de Lie $\mathfrak{h}_0(D)$ que son solubles y no nilpotentes, es decir, en aquellas que tienen por nilradical a $\mathfrak{h}_0$.

30 Teorema. *(ver [13], pág. 58, Teorema 5.1) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensón finita,* $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$ *su radical, y $N(\mathfrak{g})$ su nilradical. Entonces $[\mathfrak{g}, \mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}] \subset N(\mathfrak{g})$.*

31 Corolario. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble de dimensión finita. Entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset N(\mathfrak{g})$.*

32 Teorema. *Sean $D,\ D' \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ derivaciones no nilpotentes. Las álgebras de Lie $\mathfrak{h}_0(D)$ y $\mathfrak{h}_0(D')$ son isomorfas si, y sólo si, existen $A \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0),\ v \in \mathfrak{h}_0$ y $a \neq 0$ tales que*

$$D' = \frac{1}{a}\left\{A \circ D \circ A^{-1} - \mathrm{ad}(v)\right\}. \tag{IV}$$

El isomorfismo $\varphi : \mathfrak{h}_0(D) \to \mathfrak{h}_0(D')$ está dado por

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ con } A \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0),\ v \in \mathfrak{h}_0,\ a \neq 0. \tag{V}$$

Observaciones.

(a) En la Proposición anterior puede considerarse $v = A(u)$ para algún $u \in \mathfrak{h}_0$. Entonces, la ecuación (IV) toma la forma

$$D' = \frac{1}{a} A \circ \{D - \mathrm{ad}(u)\} \circ A^{-1}. \tag{V.i}$$

Esto es, podemos pensar en $D' \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{h}$ como una derivación exterior del álgebra de Lie de Heisenberg. De esta forma, se observa que el problema de clasificar las álgebras de Lie $\mathfrak{h}_0(D)$ se reduce al problema encontrar las órbitas de las derivaciones exteriores de la forma $D - \mathrm{ad}(u)$ bajo la acción $(A, a) \cdot (D - \mathrm{ad}(u)) = a^{-1} A \circ (D - \mathrm{ad}(u)) \circ A^{-1}$ para $A \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0)$ y $a \in \mathbb{C} - \{0\}$. De hecho, la aplicación $((A_1, u_1, a_1), (A_2, u_2, a_2)) \mapsto (A_1 A_2, A_1 u_2 + a_2 u_1, a_1 a_2)$ define una ley de composición de grupo en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0) \times \mathfrak{h}_0 \times \mathbb{C} - \{0\}$.

(b) Consideremos derivaciones no nilpotentes de $\mathfrak{h}_0$. Del Teorema **32** y la observación anterior con $D = D'$, observamos que

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0(D)) \simeq (\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0) \times \mathbb{C} - \{0\}) \ltimes \mathfrak{h}_0.$$

(c) Sea $K = \{\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0(D)) : \phi \text{ satisface (V)}\}$. Es claro que K es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0(D))$.

En el siguiente ejemplo notamos la utilidad de las observaciones previas.

El álgebra de Lie $\mathfrak{h}_0(\mathbf{D})$ de dimensión cuatro. Sea $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$. Sea $\mathfrak{h}_0$ el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión tres, esto es, $\mathfrak{h}_0 = \langle e, f, h \rangle$. Por la ecuación (V.i) de la Observación anterior, sabemos que para clasificar hasta isomorfismo las álgebras de Lie $\mathfrak{h}_0(D)$, basta considerar derivaciones exteriores de $\mathfrak{h}_0$. En este caso tenemos

$$D = \begin{pmatrix} aI + X & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad X \in \mathfrak{sp}(2, \mathbb{F}),\ a = \mathrm{Tr}\, X.$$

Se verifica fácilmente que determinar la forma canónica de D bajo la acción de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F})$ equivale a encontrar la forma canónica de D bajo la acción de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F})$. Puesto que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}) = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{F})$, sin pérdida de generalidad tenemos que las posibles formas canónicas de D bajo la acción de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0)$ para $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ son

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \alpha+\beta\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 2\alpha\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0\\ -\beta & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 2\alpha\end{pmatrix}$$

con $\alpha,\ \beta$ números reales y $\beta \neq 0$. Cuando $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, la tercera forma canónica es equivalente a la primera.

33 Teorema. *Hasta isomorfismo, existen seis clases de álgebras de Lie reales de tipo Heisenberg, $\mathfrak{h}_0(D)$. Tres de ellas son familias que dependen de un parámetro.*

$$D_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \nu & 0\\ 0 & 0 & 1+\nu\end{pmatrix}, \nu\neq 0 \qquad D_2=\begin{pmatrix}1 & \mu & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, \mu\neq 0$$

$$D_3=\begin{pmatrix}\zeta & 1 & 0\\ -1 & \zeta & 0\\ 0 & 0 & 2\zeta\end{pmatrix}, \zeta\in\mathbb{R} \qquad D_4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$D_5=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad D_6=0$$

Claramente, cuando el campo es el de los números complejos, sólo tenemos cinco clases de álgebras de Lie complejas de tipo Heisenberg, $\mathfrak{h}_0(D)$; dos de ellas son familias que dependen de un parámetro.

Demostración. Supongamos $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ y sea $D\in\mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ no nilpotente. Del Teorema **32** y las observaciones previas se sigue que D toma alguna de las siguientes formas canónicas,

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \alpha+\beta\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{a}\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 2\alpha\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{a}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0\\ -\beta & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 2\alpha\end{pmatrix}$$

con $a\neq 0, \alpha,\ \beta$ números reales y $\beta\neq 0$. Supongamos D no singular. En este caso, escogiendo adecuadamente el escalar a se obtienen los casos (1)-(3). Evidentemente para el caso $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, D_3 y D_1 son conjugadas.

Los casos (4)-(6) se obtienen al analizar las posibles formas canónicas cuando D es singular. $\square$

Observación. La Proposición anterior determina, completamente, las características de las álgebras de Lie reales (resp. complejas) $\mathfrak{h}_0(D)$.

(a) Si $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ es como en los casos (1), (2), (3) y (4) de la Proposición **33**, las álgebras de Lie $\mathfrak{h}_0(D)$ son solubles y no nilpotentes.

(b) Si $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ es como en los casos (5) y (6) de la Proposición anterior, las álgebras de Lie $\mathfrak{h}_0(D)$ son nilpotentes.

A.3 Álgebras de Lie solubles con nilradical Heisenberg

En la sección anterior, tomando como base el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión tres, $\mathfrak{h}_0$, construimos y clasificamos hasta isomorfismo un álgebra de Lie soluble de dimensión cuatro cuyo ideal nilpotente maximal es, precisamente, $\mathfrak{h}_0$. Esto nos motivó a plantear la siguiente pregunta: dada el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2n+1$, ¿cómo se construyen todas las álgebras de Lie solubles, que no se descomponen como suma directa de ideales y tales que su nilradical sea $\mathfrak{h}_0$? Revisando la literatura encontramos que este problema fue resuelto por Rubin y Winternitz (ver [17]). Más aún, se han realizado trabajos en esta dirección fijando otras álgebras de Lie nilpotentes como nilradical, por ejemplo [12], [11], [20], [22] y [23].

34 Teorema. *(ver [17], pág. 1125) Cada álgebra de Lie soluble real o compleja, que no se descompone y que tiene al álgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}_0$ como su nilradical, puede expresarse en términos de una base canónica $\{e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n, h, \sigma_1, \ldots, \sigma_\ell\}$, con las siguientes relaciones de conmutación:*

$$\begin{gathered}
[e_i, f_j] = \delta_{ij} h \quad i, j = 1, \ldots, n \\
\begin{pmatrix} [\sigma_k, e] \\ [\sigma_k, f] \\ [\sigma_k, h] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k I_V + X_k & 0 \\ 0 & 2a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \\ h \end{pmatrix} \\
[\sigma_k, \sigma_s] = r_{ks} h \qquad r_{ks} \in \mathbb{C}, k, s = 1, \ldots, \ell,
\end{gathered}$$

donde $e = (e_1, ..., e_n)$, $f = (f_1, ..., f_n)$.

Las constantes a_i satisfacen $a_1 = 0$ ó 1, $a_2 = \cdots = a_\ell = 0$. Además, *(i)* $\{X_1, ..., X_\ell\}$ *está formado por elementos no nilpotentes y para*

(a) $a_1 = 0$, *se tiene* X_1 *no nilpotente,*

(b) $a_1 = 1, X_1$ *es arbitrario.*

(ii) $X_i \in \mathfrak{sp}(V, \mathbb{C})$ *y* $[X_i, X_j] = 0$ *para todo* $1 \leq i, j \leq \ell$. *Es decir,* $\{X_i \mid i = 1, \ldots, \ell\}$ *es una subálgebra abeliana del álgebra de Lie simpléctica* $\mathfrak{sp}(V)$.

Las constantes r_{ks} *satisfacen* $r_{ks} = -r_{sk} = 0$ *para* $a_1 = 1$ *y* $r_{ks} = -r_{sk} \in \mathbb{C}$ *para* $a_1 = 0$.

El álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{a}$ *tiene dimensión* $2n+1+\ell,\ 0 \leq \ell \leq n+1$. *Para* $a_1 = 0$, *el valor máximo de* ℓ *es* n, *mientras que para* $a_1 = 1$ *el valor máximo de* ℓ *es n+1.*

Observaciones.

(a) El centro del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{a}$ es $\langle h \rangle$ si, y sólo si, $a_1 = 0$.

(b) Si $a_1 = 1$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{gl}_{2n+1}(\mathbb{C})$ es una subálgebra abeliana que actúa en $\mathfrak{h}_0$ por *derivaciones*. En este caso, $\mathfrak{g}$ es el producto semidirecto de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{h}_0$, i.e., $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{h}_0$.

La demostración del siguiente resultado es un caso particular de la Proposición 17.

35 Proposición. *Sean* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{a}'$ *álgebras de Lie solubles e indescomponibles con nilradical el álgebra de Lie de Heisenberg. Sean* $G = \{A \in \mathrm{GL}(V) \mid \exists\ a \in \mathbb{C} - \{0\},\ \omega(Au, Av) = a\omega(u, v)\ \forall u, v \in U\}$ *y* $H = \{B \in \mathrm{GL}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \mid \exists\ a \in \mathbb{C} - \{0\}, aR(\sigma, \tau) = R'(B(\sigma), B(\tau))\ \forall \sigma, \tau \in \mathfrak{a}\}$. *Sean* (X, a_i, R) *y* (X', a_i, R') *con* $a_i = 0$ *ó* 1, *las ternas que caracterizan a* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{g}'$, *respectivamente. Las álgebras de Lie* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{g}'$ *son isomorfas si, y sólo si, existe* $(A, a, B) \in G \times \mathbb{C} - \{0\} \times H$ *tal que*

(i) Caso $a_1 = 0$

1. $a\omega(u, v) = \omega(Au, Av)$

2. $A \cdot X(\sigma) \cdot A^{-1} = X' \cdot B(\sigma)$

3. $a \cdot R = R' \cdot B$

para todos $u, v \in V,\ \sigma \in \mathfrak{a}$.

El isomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *está dado por*

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}.$$

(ii) Caso $a_1 = 1$. *En este caso existe también* $\zeta \in \mathfrak{a}$ *tal que*

1. $a\omega(u, v) = \omega(Au, Av)$

2. $A \cdot X(\nu) \cdot A^{-1} = X'(\nu' + \zeta)$

3. $A \cdot X(\sigma) \cdot A^{-1} = X' \cdot B(\sigma)$

4. $\omega'(B(\sigma), B(\tau)) = 0$

para todos $u, v \in V,\ \sigma, \tau \in \mathfrak{a}$.

El isomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *está dado por*

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & B \end{pmatrix}.$$

En conclusión, dos álgebras de Lie con nilradical $\mathfrak{h}_0$ son isomorfas si, y sólo si, recuperamos las ternas (X', a_i, R') a partir de (X, a_i, R) mediante transformaciones *conformes* del grupo simpléctico, escalamientos del álgebra de Lie de Heisenberg y trasformaciones lineales invertibles de $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{a}'$.

En vista de los resultados que hemos obtenido, se observa que el problema de clasificar álgebras de Lie solubles cuyo nilradical es el álgebra de Lie de Heisenberg se reduce a clasificar las subálgebras abelianas de $\mathfrak{sp}(V, \mathbb{C})$ que no contienen elementos nilpotentes.

Ejemplos. Álgebras de Lie solubles con nilradical $\mathfrak{h}_0$

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Sea $\mathfrak{h}_0 = \langle e, f, h \rangle$. Siguiendo el Teorema **34**, para construir las álgebras de Lie con nilradical $\mathfrak{h}_0$, en primer lugar debemos determinar las subálgebras abelianas de $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{F})$.

Recordemos que $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{F}) = \mathfrak{s}l(2, \mathbb{F}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{H, E, F\}$, con las relaciones de conmutación $[H, E] = 2E,\ [H, F] = -2F$ y $[E, H] = H$. Además, tenemos la identificación

$$H \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sobre el campo de los números complejos tenemos dos subálgebras abelianas no isomorfas en $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C})$: $C_1^2 = \langle H \rangle$ que es la subálgebra de Cartan y $C_2^2 = \langle E \rangle$ que es una subálgebra nilpotente; mientras que sobre el campo de los números reales tenemos tres subálgebras abelianas no isomorfas: $R_1^2 = \langle H \rangle,\ R_2^2 = \langle E - F \rangle$, la subálgebra de Cartan compacta y no compacta, respectivamente, y $R_3^2 = \langle E \rangle$ que es una subálgebra nilpotente. Cuando $\mathbb{F} = \mathbb{C},\ R_1^2$ y R_2^2 son conjugadas.

Por el Teorema **34**, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{a}$ es un álgebra de Lie de dimensión cuatro o cinco. Consideremos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y analicemos cada caso por separado.

Cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{a}$ es un álgebra de Lie real de dimensión cuatro, tenemos cinco clases de álgebras de Lie con nilradical $\mathfrak{h}_0$ no isomorfas; dos de ellas son familias que dependen de un parámetro. En cada caso, el elemento $\sigma \in \mathfrak{a}$ está caracterizado por una de las siguientes matrices:

$$\mathrm{ad}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathrm{ad}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{ad}(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 1+b & 0 & \\ 0 & 1-b & \\ & & 2 \end{pmatrix}, b \neq 0; \qquad \mathrm{ad}(\sigma_4) = \begin{pmatrix} 1 & c & \\ -c & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix},\ c \neq 0;$$

$$\mathrm{ad}(\sigma_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

Para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ sólo tenemos tres álgebras de Lie con nilradical $\mathfrak{h}_0$, pues sobre el campo de los números complejos $\mathrm{ad}(\sigma_2)$ es equivalente a $\mathrm{ad}(\sigma_1)$, mientras que $\mathrm{ad}(\sigma_4)$ es equivalente a $\mathrm{ad}(\sigma_3)$.

Ahora bien, cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{a}$ es un álgebra de Lie real de dimensión cinco, tenemos dos clases de álgebras de Lie con nilradical $\mathfrak{h}_0$ no isomorfas. En cada caso, los elementos $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{a}$ conmutan y están caracterizados por una de las parejas siguientes:

$$\mathrm{ad}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{ad}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ los dos casos son equivalentes.

Observación. En el Teorema **33** clasificamos, salvo isomorfismo, las álgebras de Lie de Heisenberg con derivación sobre el campo de los números complejos. Notemos que los casos (1) y (3) del Teorema **33** se obtienen de (3) en esta lista para valores apropiados de b; mientras que el caso (2) del Teorema **33** se corresponde con (5) de esta lista. Los casos (4) y (5) del Teorema **33** no aparecen en el ejemplo anterior porque involucran derivaciones nilpotentes.

A.4 Formas ortogonales y simplécticas invariantes en $\mathfrak{h}(D)$

En esta sección presentamos los resultados relacionados a la existencia de formas ortogonales y simplécticas en el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_0(D)$.

36 Lema. *Sea $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ una derivación de $\mathfrak{h}_0$. Si el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_0(D)$ admite una forma bilineal homogénea e invariante, entonces $h \in \mathrm{Ker}(D)$.*

Observación. El Lema **36** nos proporciona una condición necesaria, mas no suficiente, para la existencia de formas ortogonales o simplécticas invariantes en $\mathfrak{h}_0(D)$. Por ejemplo, consideremos $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ tal que $D \equiv 0$. Para cualquier $u, v \in V$, $\mathcal{B}([u,v], D) = \mathcal{B}(u, [v, D]) = 0$ si, y sólo si, $\omega(u,v)\mathcal{B}(h, D) = 0$. Puesto que ω es una forma bilineal no degenerada, concluimos que $\mathcal{B}(h, D) = 0$; luego, $\mathcal{B}$ degenera.

37 Proposición. *Sea* $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ *una derivación tal que* $h \in \mathrm{Ker}(D)$. *Si* $\dim \mathrm{Ker}(D) \geq 2$, *el álgebra de Lie* $\mathfrak{h}_0(D)$ *no admite formas ortogonales ni simplécticas invariantes.*

Observación. Sea $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ una derivación tal que $h \in \mathrm{Ker}(D)$. Esto es,

$$D = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \in \mathfrak{sp}(V),$$

Supóngase que $X \in \mathfrak{sp}(V)$ es nilpotente. Entonces, existe $v \in V - \{0\}$ tal que $X(v) = 0$. Luego, $\dim \mathrm{Ker}(X) \geq 1$ y así, $\dim \mathrm{Ker}(D) \geq 2$. Por tanto, la Proposición **37** muestra que $\mathfrak{h}_0(D)$ no admite formas ortogonales ni simplécticas invariantes.

38 Teorema. *El álgebra de Lie* $\mathfrak{h}_0(D)$ *admite una forma ortogonal invariante si, y sólo si,* $\mathrm{Ker}(D) = \langle h \rangle$, *en cuyo caso* $\mathcal{B} : \mathfrak{h}_0(D) \times \mathfrak{h}_0(D) \to \mathbb{C}$ *es necesariamente simétrica y está dada por*

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_0 & & \\ & 0 & \gamma_1 \\ & \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{VI}$$

donde $\mathcal{B}_0$ *es una forma bilineal simétrica no degenerada en el espacio simpléctico* $V \subset \mathfrak{h}_0$, $\gamma_1 = \mathcal{B}(h, D) \neq 0$ *y* $\gamma_2 = \mathcal{B}(D, D)$ *es arbitrario.*

39 Corolario. *El álgebra de Lie* $\mathfrak{h}(D)$ *no admite formas simplécticas invariantes.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B} : \mathfrak{h}(D) \times \mathfrak{h}(D)$ es una forma bilineal antisimétrica no degenerada e invariante en $\mathfrak{h}(D)$. Entonces, el Teorema **38** implica que $\mathrm{Ker}(D) = \langle h \rangle$. Más aún, $\mathcal{B}$ tiene la forma

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \gamma_1 (X^t)^{-1} \omega & & \\ & 0 & \gamma_1 \\ & \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 \neq 0.$$

Sea $\mathcal{B}_0 = \gamma_1 (X^t)^{-1} \omega$. Puesto que $\mathcal{B}_0$ debe ser antisimétrica, usando que $X \in \mathfrak{sp}(V)$, un cálculo directo muestra que $\mathcal{B}_0 = -\mathcal{B}_0^t$ implica que X es cero, no sólo no singular, lo cual es una contradicción. $\square$

Observación. Para definir una forma ortogonal invariante en el álgebra de Lie de Heisenberg extendida por una derivación, tenemos que considerar $\mathfrak{h}_0(D)$ con $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ tal que $\mathrm{Ker}(D) = \langle h \rangle$. Esto es, $\mathfrak{h}_0(D)$ contiene a $\mathfrak{h}_0$ como su ideal nilpotente maximal. La prueba del Teorema **38** también muestra que para derivaciones $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ no singulares, $\mathfrak{h}_0(D)$ sólo admite formas bilineales invariantes degeneradas.

Supongamos que $\mathfrak{h}_0(D)$ está provista con una forma ortogonal invariante $\mathcal{B}$, mientras que $\mathfrak{h}_0(D')$ está provista con una forma ortogonal invariante $\mathcal{B}'$. Nos interesa establecer las condiciones para contar con un isomorfismo isométrico $\varphi : \mathfrak{h}_0(D) \to \mathfrak{h}_0(D')$. Primero debemos determinar bajo qué condiciones $\mathfrak{h}_0(D)$ y $\mathfrak{h}_0(D')$ son álgebras de Lie isomorfas.

El siguiente Teorema es un caso particular del Teorema **32**, del Capítulo 1.

40 Teorema. *Sean $D,\ D' \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ derivaciones tales que $\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Ker}(D') = \langle h \rangle$. Las álgebras de Lie $\mathfrak{h}_0(D)$ y $\mathfrak{h}_0(D')$ son isomorfas si, y sólo si, existen $A \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0),\ v \in \mathfrak{h}_0$ y $a \neq 0$ tales que*

$$D' = \frac{1}{a}\left\{A \circ D \circ A^{-1} - \mathrm{ad}(v)\right\}.$$

El isomorfismo $\varphi : \mathfrak{h}_0(D) \to \mathfrak{h}_0(D')$ está dado por

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ donde } A \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0),\ v \in \mathfrak{h}_0,\ a \neq 0.$$

Estamos interesados en encontrar las condiciones bajo las cuales el isomorfismo $\varphi : \mathfrak{h}_0(D) \to \mathfrak{h}_0(D')$ encontrado en el Teorema **38** también puede llevar la forma ortogonal invariante $\mathcal{B} : \mathfrak{h}_0(D) \times \mathfrak{h}_0(D) \to \mathbb{C}$ en $\mathcal{B}' : \mathfrak{h}_0(D') \times \mathfrak{h}_0(D') \to \mathbb{C}$, es decir, $\varphi^t \mathcal{B} \varphi = \mathcal{B}'$.

41 Teorema. *Sean $\mathfrak{h}_0(D)$ y $\mathfrak{h}_0(D')$ algebras de Lie solubles provistas con una forma ortogonal invariante, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, respectivamente, como en el Teorema* **38**. *Existe un isomorfismo isométrico $\varphi : \mathfrak{h}_0(D) \to \mathfrak{h}_0(D')$ si, y sólo si, existen $b \neq 0$ y $g \in \mathrm{GL}(V)$ tales que $b^{-1/2} g \in \mathrm{Sp}(V)$ y $a \neq 0$ tales que*

$$\mathcal{B}'_0 = g^t \mathcal{B}_0 g, \qquad \gamma'_1 = ab\gamma_1, \qquad \gamma'_2 = a^2\gamma_2.$$

Demostración. El Teorema **40** implica que un isomorfismo de álgebras de Lie $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{h}_0(D) \to \mathfrak{h}_0(D')$ es de la forma

$$\widetilde{\varphi} = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0), v \in \mathfrak{h}_0, a \neq 0.$$

Como consecuencia de la Proposición **8**, podemos escribir específicamente $A \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0)$ y entonces, $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{h}_0(D) \to \mathfrak{h}_0(D')$ se expresa como sigue:

$$\widetilde{\varphi} = \begin{pmatrix} g & 0 & z \\ \alpha^t & b & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

donde $b = \det(g)^{1/n},\ b^{-1/2}g \in \mathrm{Sp}(V), \alpha \in \mathbb{C}^{2n}; z \in V \subset \mathfrak{h}_0, d \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$. Notemos que siempre podemos encontrar un automorfismo $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0(D))$ tal que $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \psi : \mathfrak{h}_0(D) \to \mathfrak{h}_0(D')$ es diagonal. De hecho,

$$\psi = \begin{pmatrix} I_V & 0 & -g^{-1}z \\ -b^{-1}\alpha^t & 1 & b^{-1}(\alpha^t g^{-1} z - d) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, sean $\mathcal{B} : \mathfrak{h}_0(D) \times \mathfrak{h}_0(D) \to \mathbb{C}$ y $\mathcal{B} : \mathfrak{h}_0(D') \times \mathfrak{h}_0(D') \to \mathbb{C}$ formas ortogonales invariantes para $\mathfrak{h}_0(D)$ y $\mathfrak{h}_0(D')$, respectivamente. Puesto que $\varphi : \mathfrak{h}_0(D) \to \mathfrak{h}_0(D')$ debe ser una isometría, $\varphi^t \mathcal{B} \varphi = \mathcal{B}'$. Se sigue que $\mathcal{B}'_0 = g^t \mathcal{B}_0 g, \gamma'_1 = ab\gamma_1 \neq 0$ y $\gamma'_2 = a^2\gamma_2 \in \mathbb{C}$. □

42 Corolario. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble de dimensión $2n+2$, con nilradical $\mathfrak{h}_0$. Entonces, existe $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_0)$ tal que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{h}_0(D)$. Además, si $\mathfrak{h}_0(D)$ está provista con una forma ortogonal invariante $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}$ se lleva a una única forma ortogonal invariante $\mathcal{B}'$ en $\mathfrak{g}$, de modo que $\mathfrak{g}$ se convierte isomorfa e isométrica a $(\mathfrak{h}_0(D), \mathcal{B})$.*

Demostración. Puesto que $\dim \mathfrak{g} = 2n+2$ y $N(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}_0$, existe $z \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathrm{ad}(z) \neq 0$; de otra forma $\mathrm{ad}(z) = 0\ \forall z \in \mathfrak{g}$ implica que $\mathfrak{h}_0$ es un álgebra de Lie abeliana. Luego, $\mathfrak{g}$ puede descomponerse como $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \oplus \langle z \rangle$. Denotemos $\mathrm{ad}(z)|_{\mathfrak{h}_0}$ por D. Debemos mostrar que $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}_0(D)$ son álgebras de Lie isomorfas.

Definamos una transformación lineal $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}_0(D)$ por $\varphi(x) = x$ para todo $x \in \mathfrak{h}_0$ y $\varphi(z) = D$. Claramente, φ es una biyección. Observemos que para cualquier $x \in \mathfrak{h}_0$, $\varphi[x,z] = [x,z]$, dado que $[x,z] \in \mathfrak{h}_0$. Por otra parte, $[\varphi(x), \varphi(z)] = [x, D] = -D(x) = -[z, x] = [x, z]$. Entonces, $\varphi[x, z] = [\varphi(x), \varphi(z)]$ y así, φ es el isomorfismo requerido.

Supongamos que $\mathfrak{h}_0(D)$ está equipada con una forma ortogonal invariante $\mathcal{B}$. Entonces, el Teorema **38** implica $D = \left(\begin{smallmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ para algún $X \in \mathfrak{sp}(2n, C)$, y $\mathcal{B} : \mathfrak{h}_0(D) \times \mathfrak{h}_0(D) \to \mathbb{C}$ está dada por

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \gamma_1 (X^t)^{-1} \omega & & \\ & 0 & \gamma_1 \\ & \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \ \gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \in \mathbb{C}.$$

Por tanto, $\mathcal{B}' : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ está dada por $\mathcal{B}' = (\varphi^t)^{-1} \mathcal{B} \varphi^{-1}$. $\square$

Referencias

[1] Azam, S. Quasi Simple Lie Algebras. Febrero 2004.

[2] W.A. de Graaf. Classification of solvable Lie algebras. *Experimental Mathematics*, 14(1):15–25, 2005.

[3] Goze, M. and Khakimdjanov,Y. *Nilpotent Lie Algebras*. Kluwer Academic Publishers, 1996.

[4] A. Hegazi. Classification of nilpotent Lie superalgebras of dimension five. i. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(6):1735–1739, 1999.

[5] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1978.

[6] J. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Graduate Text in Mathematics. Springer-Verlag, 1972.

[7] P. Hussin, V; Winternitz. Maximal abelian subalgebras of complex orthogonal Lie algebras. *Linear Algebra and its Aplications*, 140:183–220., 1990.

[8] N. Jacobson. *Lie Algebras*. Dover, 1111.

[9] V. Kac. Lie superalgebras. *Advances in Mathematics*, 26:8–96, 1977.

[10] R. M. Navarro-Olmo. *Superálgebras de Lie Nilpotentes*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2001.

[11] J.C. Ndogmo and P. Winternitz. Generalized Casimir operators of solvable Lie algebras with abelian nilradicals. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 27:2787–2800, 1994.

[12] J.C. Ndogmo and P. Winternitz. Solvable Lie algebras with abelian nilradicals. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 27:405–423, 1994.

[13] A.L. Onishchik and E.L. Vinberg. *Lie Groups and Algebraic Groups*. Springer, Berlin, Heidelberg., 1990.

[14] Gabriela Ovando. Four dimensional symplectic Lie algebras. *Beitrge zur Algebra und Geometrie*, 47(2):419–434, 2006.

[15] Gabriela Ovando. Small oscillations and the Heisenberg Lie algebra. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40:2407–2424, 2007.

[16] J. Patera, P. Winternitz, and H. Zassenhaus. Maximal abelian subalgebras of real and complex symplectic Lie algebras. *J. Math. Phys.*, 24(8):1973–1985, 1983.

[17] J.L. Rubin and P. Winternitz. Solvable Lie algebras with Heisenberg ideals. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:1123–1138, 1993.

[18] G. Salgado and O.A. Sánchez-Valenzuela. Lie superalgebras based on $\mathfrak{gl}_n$ associated to the adjoint representation, and invariant geometric structures defined on them. *Comm. Math.Phys.*, 241:505–518, 2003.

[19] M. Scheunert. *The Theory of Lie Superalgebras, an Introduction.* Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1979.

[20] L. Snobl and P. Winternitz. A class of solvable Lie algebras and their Casimir invariants. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38:2687–2700, 2005.

[21] S. Sternberg. *Lectures on Differential Geometry*. Prentice Hall, 1964.

[22] S. Tremblay and P. Winternitz. Solvable Lie algebras with triangular nilradicals. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 31:789–806, 1998.

[23] S. Tremblay and P. Winternitz. Invariants of the nilpotent and solvable triangular Lie algebras. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 34:9085–9099, 2001.

[24] L. Y. Wang and D. J. Meng. Some complete Lie superalgebras. *Linear algebra and its applications*, 369:339–349, 2003.