La propiedad de punto fijo en $c_{0\alpha}$ y otros renormamientos del espacio c_0.

Fernando Núñez Medina

Índice general

Agradecimientos

Agradezco a mis padres por apoyarme siempre.

Gracias a mi esposa Elena, a Fernandito y a Erandi por su comprensión durante este trabajo.

Agradezco a la Dra. Berta Gamboa de Buen por asesorar mi tesis, gracias por sus consejos que permitieron la realización de este trabajo, gracias por todo su apoyo.

Agradezco a todos mis profesores por sus enseñanzas y ejemplo, en especial nuevamente a la Dra. Berta Gamboa de Buen y al Dr. Fernando Galaz Fontes.

Gracias a mis sinodales, M. en C. Helga Fetter Nathansky, Dr. Fernando Galaz Fontes, Dr. Mohamed Amine Khamsi y Dr. Salvador Pérez Esteva por sus comentarios y sugerencias sobre mi tesis.

Gracias al CIMAT y al CONACyT por haberme otorgado becas que me permitieron concluir este trabajo.

Finalmente agradezco a mis amigos y a todo el personal del Cimat.

Prólogo

En este trabajo estudiaremos la propiedad de punto fijo y la propiedad de punto fijo débil en el espacio $c_{0\alpha}$, en otros renormamientos de c_0 relacionados con $c_{0\alpha}$ y en l^1 con dos normas equivalentes también relacionadas con la norma del espacio $c_{0\alpha}$.

El trabajo está dividido en cuatro capítulos con sus respectivas secciones. El capítulo 1 es de preliminares. En la sección 1.1 fijamos un poco de notación y de terminología que usamos a lo largo del texto. Damos una breve introducción al problema de punto fijo en espacios de Banach, en particular, repasamos algunos aspectos de la propiedad de punto fijo en el espacio c_0. En la sección 1.2 vemos una caracterización de los subconjuntos no vacíos, convexos y débilmente compactos de c_0 en términos de la propiedad de punto fijo debida a P.N. Dowling, C.J. Lennard y B. Turett, que tomamos como motivación para el estudio de la propiedad de punto fijo en los distintos renormamientos de c_0.

En [8] H. Fetter y B. Gamboa de Buen prueban que para toda $\alpha \geq 0$ el espacio $c_{0\alpha}$, donde $c_{0\alpha}$ denota al espacio c_0 con una norma equivalente para cada α, tiene la propiedad del punto fijo débil y que si $\alpha \in [0, 1)$ entonces c_α, donde c_α denota al espacio c con una norma equivalente para cada α, también tiene la propiedad del punto fijo débil. Surge la siguiente pregunta: ¿Serán válidos los recíprocos de los resultados anteriores? Es decir, ¿Será cierto que, si $K \subset c_{0\alpha}$ es no vacío, convexo, cerrado, acotado y con la PPF entonces K es ω-compacto? La misma pregunta se puede hacer en $c_\alpha, \alpha \in [0, 1)$. En el capítulo 2 se dan algunas familias de conjuntos ω-compactos para las que se responde afirmativamente a las preguntas anteriores. La sección 2.1 es una pequeña introducción. En la sección 2.2 se definen y estudian los espacios X_i,

$i = 1, 2, 3$ que nos sirven para tener un mejor entendimiento de la estructura y propiedades del espacio $c_{0\alpha}$. En los espacios X_i se estudia la propiedad de punto fijo y la propiedad débil de punto fijo. Teniendo en cuenta el comportamiento de la base sumante de c_0 con la norma de los espacios X_i, definimos en un espacio de Banach un tipo de sucesiones que "imiten" el comportamiento de la base sumante de c_0 en los espacios X_i y que en caso de que existan, nos permitirán construir subconjuntos no vacíos, convexos, cerrados, acotados y no débilmente compactos sin la propiedad de punto fijo. En los espacios X_i definimos los conjuntos del tipo I y mostramos que estos conjuntos contienen una sucesión que imita el comportamiento de la base sumante de c_0 y en consecuencia estos conjuntos no tienen la propiedad del punto fijo. En la sección 2.3 estudiamos al espacio $c_{0\alpha}$. Nuevamente, teniendo en cuenta el comportamiento de la base sumante de c_0, ahora con la norma del espacio $c_{0\alpha}$, definimos en un espacio de Banach un tipo de sucesiones que imiten o se comporten de manera parecida a la base sumante de c_0 en el espacio $c_{0\alpha}$ y que en caso de que existan, nos permitirán construir subconjuntos no vacíos, convexos, cerrados, acotados y no débilmente compactos sin la propiedad de punto fijo. En el espacio $c_{0\alpha}$ definimos los conjuntos del tipo A y mostramos que los conjuntos no vacíos, convexos y no débilmente compactos que son del tipo A contienen una sucesión que se comporta como la base sumante de c_0 y en consecuencia estos conjuntos no tienen la propiedad del punto fijo. Finalmente, al igual que en los espacios X_i y $c_{0\alpha}$, en el espacio c_α definimos los conjuntos del tipo A' y mostramos que si un conjunto no vacío, convexo y no débilmente compacto es del tipo A' entonces no tiene la propiedad del punto fijo.

En el capítulo 3 estudiamos varias normas en el espacio de sucesiones de escalares convergentes a cero, unas relacionadas con la norma de los espacios X_i y otras con la norma del espacio $c_{0\alpha}$, además veremos cuáles propiedades de las normas de los espacios X_i y $c_{0\alpha}$ se siguen cumpliendo para las normas en cuestión. Como en el capítulo 2, teniendo en cuenta el comportamiento de la base sumante de c_0 con cada norma, definiremos varios tipos de sucesiones que, en caso de que existan, permitirán construir conjuntos no vacíos, convexos, cerrados y acotados y operadores no expansivos y sin puntos fijos definidos en estos conjuntos. En la sección 3.1 estudiamos la norma $\|.\|_*$, en la sección 3.2 a la norma $\|.\|_{\alpha *}$ y por último en la sección 3.3 a la norma $\|\cdot\|_D$.

En el capítulo 4 se estudia la propiedad de punto fijo y la propiedad débil de punto fijo en los espacios $(c_{0\alpha})^*$ y $(c_0, \|.\|_D)^*$. De la misma manera que en c_0 con las normas que se consideraron en el capítulo 3, veremos que en estos espacios duales podemos definir una sucesión que, en caso de que exista, permitirá construir un conjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado y un operador no expansivo y sin puntos fijos definido en este conjunto. En la sección 4.1 se determinan los espacios $(c_{0\alpha})^*$ y $(c_{0\alpha})^{**}$, exhibiendo algunas propiedades de los puntos extremos de la bola unitaria de $(c_{0\alpha})$ y de $(c_{0\alpha})^*$, además se estudia la propiedad de punto fijo y la propiedad de punto fijo débil en ellos. Por último, en la sección 4.2 se calcula el espacio $(c_0, \|.\|_D)^*$ exhibiendo algunas propiedades de los puntos extremos de la bola unitaria de $(c_0, \|.\|_D)$.

En el apéndice A introducimos la norma $\|.\|^*$. Finalmente, para comodidad del lector, en el apéndice B se da un resumen de las diferentes normas, espacios y sucesiones que se estudian en este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. La PPF en espacios de Banach

Comenzaremos fijando algo de notación. Sea X un conjunto y $T : X \to X$ una función. Cuando no haya lugar a confusión escribiremos Tx en lugar de la notación usual $T(x)$ y a T le llamaremos función u operador indistintamente. En este trabajo consideraremos espacios vectoriales definidos sobre el campo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ denota ya sea a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$. Dado un espacio vectorial X y un subconjunto $A \subset X$, denotaremos por $span(A)$ al espacio vectorial generado por A y por $conv\,(A)$ a la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen al conjunto A. Si X denota un espacio de Banach, para referirnos a una base de Schauder de X, simplemente escribiremos base. La topología débil en X se denotará por $\sigma(X, X^*)$ y la topología débil estrella en X^* se denotará por $\sigma(X^*, JX)$, donde $J : X \longrightarrow X^{**}$ es la identificación canónica. Como es usual, B_X denotará a la bola unitaria de X, S_X a la esfera unitaria y si $C \subset X$ es un conjunto convexo, $\mathcal{E}(C)$ denotará al conjunto de los puntos extremos de C. El final de una demostración estará indicado con el símbolo $\blacksquare$.

Entre los teoremas de punto fijo, uno de los más conocidos y más útiles es el Teorema de punto fijo de Banach, que enunciaremos enseguida.

Definición 1.1 *Sean (M, d) un espacio métrico y $T : M \to M$. Diremos que T es una contracción si existe $c \in (0, 1)$ tal que*

$$d(Tx, Ty) \leq cd(x, y), \; x, y \in M.$$

Teorema 1.2 ***(De Contracción de Banach)*** *Sea M un espacio métrico no vacío. Si M es completo y $T : M \to M$ es una contracción, entonces T tiene un único punto fijo p. Más aún, si $x \in M$ entonces $\{T^n x\}$ converge a p.*

Además de la completez de M, la condición de que $c \in (0, 1)$ es determinante en la prueba del Teorema de contracción de Banach.

Por otra parte, de no menor importancia, tenemos el Teorema de Schauder y Tychonoff.

Teorema 1.3 ***(Schauder-Tychonoff)*** *Sea X un espacio vectorial localmente convexo. Si $K \subset X$ es no vacío, compacto y convexo y $T : X \to X$ es continuo, entonces T tiene un punto fijo.*

En este caso la compacidad y la convexidad de K juegan un papel crucial en la demostración.

Consideremos ahora el problema de punto fijo en espacios de Banach.

Definición 1.4 *Sean X un espacio de Banach, $K \subset X$ no vacío y $T : K \to K$. Diremos que T es no expansivo si*

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \; x, y \in K.$$

Sean X un espacio de Banach, $K \subset X$ no vacío y $T : K \to K$ no expansivo. Si K es cerrado y existe $c \in (0, 1)$ tal que $\|Tx - Ty\| \leq c \|x - y\|, \; x, y \in K$, entonces el Teorema de contracción de Banach afirma que T tiene un punto fijo. Por otra parte, si K es convexo y compacto entonces el Teorema de Schauder y Tychonoff afirma que T tiene un punto fijo. Si K no es cerrado o no existe una tal c tal que T es una contracción no podemos asegurar la existencia de puntos fijos de T. De igual manera, si K no es convexo y compacto no podemos asegurar la existencia de puntos fijos de T. De lo anterior surge el problema de punto fijo en espacios de Banach:

Problema de punto fijo en espacios de Banach: *Dado un espacio de Banach X y $K \subset X$ no vacío, ¿Qué condiciones sobre K o sobre X garantizan la existencia de puntos fijos para cualquier operador no expansivo de K en K?*

Los siguientes ejemplos nos señalan condiciones que se deben de imponer sobre el conjunto K para asegurar la existencia de puntos fijos para cualquier operador no expansivo de K en K.

Ejemplo 1.5 *Sean X un espacio de Banach, K la esfera unitaria en X y $T : K \to K$ el operador definido por $Tx = -x$, $x \in K$. Así T es no expansivo y T no tiene puntos fijos.*

Ejemplo 1.6 *Consideremos ahora $X = \mathbb{R}^1$, $K = [0, 1)$ y $T : K \to K$ el operador definido como $Tx = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$, $x \in K$. Así T es no expansivo y T no tiene puntos fijos.*

Ejemplo 1.7 *Por último, sea $K = X$ un espacio de Banach. Fijemos $a \in X$ con $a \neq 0$. Definamos $T : K \to K$ como $Tx = a + x$, $x \in K$. Así T es no expansivo y T no tiene puntos fijos.*

De estos tres ejemplos concluimos que no todo operador no expansivo tiene puntos fijos y que es razonable restringir el dominio de los operadores a conjuntos no vacíos, convexos, cerrados y acotados.

Definición 1.8 *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío, convexo cerrado y acotado. Se dice que K tiene la propiedad del punto fijo (PPF), si cualquier operador $T : K \to K$ no expansivo tiene un punto fijo. Diremos que X tiene la PPF si todo subconjunto no vacío, convexo cerrado y acotado tiene la PPF.*

El siguiente lema nos muestra que si X es un espacio de Banach, $K \subset X$ es no vacío, convexo, cerrado y acotado y $T : K \to K$ es no expansivo, entonces existen "casi" puntos fijos. Incluimos la demostración que es muy simple.

Lema 1.9 *Sean X un espacio de Banach, $K \subset X$ no vacío, convexo cerrado y acotado y $T : K \to K$ no expansivo. Entonces*

$$\inf\{\|x - Tx\| : x \in K\} = 0.$$

Demostración Tomemos $z \in K$ y $\varepsilon \in (0, 1)$. Definamos $T_\varepsilon : K \longrightarrow K$ como

$$T_\varepsilon(x) = \varepsilon z + (1 - \varepsilon)Tx.$$

Así,

$$\|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)\| = \|(1-\varepsilon)(Tx - Ty)\| \le (1-\varepsilon)\|x - y\|, \ x, y \in K.$$

En consecuencia T_ε es una contracción. Luego, por el teorema de contracción de Banach, existe $x_\varepsilon \in K$ punto fijo de T_ε. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|x_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| &= \|T_\varepsilon x_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| = \|\varepsilon z + (1-\varepsilon)Tx_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| \\ &= \varepsilon\|z - Tx_\varepsilon\| \le \varepsilon \mathrm{diam} K. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Como corolario obtenemos el teorema de Schauder y Tychonoff en este contexto.

Corolario 1.10 *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío, convexo cerrado y acotado. Si K es compacto entonces K tiene la PPF.*

Corolario 1.11 *Sean X un espacio de Banach. Si* $\dim X < \infty$ *entonces X tiene la PPF.*

Debido a la importancia de la compacidad en el teorema de Schauder y Tychonoff surge la siguiente conjetura: Si X es un espacio de Banach y $K \subset X$ es no vacío, convexo y ω-compacto entonces K tiene la PPF. El siguiente teorema, probado por W. A. Kirk en 1965, muestra que esto es cierto cuando el conjunto K además de ser ω-compacto tiene lo que se llama "estructura normal".

Definición 1.12 *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío y acotado. Se dice que $p \in K$ es diametral si*

$$\sup_{x \in K} \|p - x\| = diam K,$$

y que K es diametral si todos sus puntos son diametrales.

Definición 1.13 *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío y convexo. Se dice que K tiene estructura normal (NS) si todo subconjunto $C \subset K$ convexo, acotado y con más de un punto tiene al menos un punto que no es diametral. Diremos que X tiene estructura normal si cada subconjunto no vacío y convexo de X tiene NS, y que X tiene estructura normal débil (WNS) si todo subconjunto no vacío, convexo y ω-compacto de X tiene NS.*

Teorema 1.14 ***(Kirk) [13]*** *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío, convexo y ω-compacto. Si K tiene NS entonces K tiene la PPF.*

Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío, convexo y ω-compacto. Hasta antes de 1980 se tenía la esperanza de que bajo estas hipótesis K tuviera la PPF, sin embargo en 1980 Alspach publicó un contraejemplo de esto en $L^1[0,1]$. De lo anterior se tiene que no todo espacio de Banach cumple que sus subconjuntos convexos y ω-compactos tienen la PPF. Así podemos dar la siguiente definición.

Definición 1.15 *Sea X un espacio de Banach. Diremos que X tiene la propiedad del punto fijo débil (ω-PPF), si todo conjunto $K \subset X$ no vacío, convexo y ω-compacto tiene la PPF. En general, dado un espacio de Banach X y una topología τ en X, se dice que X tiene la τ-propiedad del punto fijo (τ-PPF) si todo conjunto $K \subset X$ no vacío, convexo y τ-compacto tiene la PPF.*

Aunque c_0 no tiene NS, pues si $\{e_n\}$ es la base canónica de c_0 resulta que $\overline{conv}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es diametral, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.16 ***(Maurey, 1981) [18]*** *c_0 tiene la ω-PPF.*

Ejemplo 1.17 *c_0 no tiene la PPF, pues si definimos $T : B_{c_0} \longrightarrow B_{c_0}$ como $T(x_1, x_2, ...) = (1, x_1, x_2, ...)$ es claro que T es no expansivo y que T no tiene puntos fijos.*

1.2. La ω-PPF y ω-compacidad en c_0

Recientemente el converso del teorema de Maurey: Si $K \subset c_0$ es no vacío, convexo, cerrado, acotado y K tiene la PPF entonces K es ω-compacto, fue un tema de activa investigación. Llorens-Fuster y Sims probaron en 1988 en [17] que ciertos subconjuntos no vacíos, convexos, cerrados y acotados de c_0 que son compactos en una topología localmente convexa "casi igual" a la topología débil de c_0 no tienen la PPF, lo cual los condujo a formular la siguiente conjetura: Sea $K \subset c_0$ no vacío, convexo, cerrado y acotado. Entonces K tiene la PPF si y sólo si K es ω-compacto. En 2003 Dowling, Lennard y Turett en [5] responden parcialmente a la conjetura anterior. Más específicamente ellos prueban que si $K \subset c_0$ es no vacío, convexo, cerrado y acotado entonces K es ω-compacto si y sólo si todos los subconjuntos no vacíos, convexos y cerrados de K tienen la PPF. Posteriormente en 2004 los mismos autores, prueban en [6], como lo conjeturaron Llorens-Fuster y Sims, que el converso del teorema de Maurey es cierto. Lo que resta de este capítulo está dedicado a dar una breve descripción de la prueba del converso del teorema de Maurey.

Uno de los puntos claves del trabajo de Dowling, Lennard y Turett es construir en cada $K \subset c_0$ no vacío, convexo, cerrado y acotado una sucesión que se comporte de manera muy parecida a la base sumante de c_0. En lo que sigue, c_{00} denotará al conjunto de las sucesiones con soporte finito. El punto de partida es la siguiente definición.

Definición 1.18 *Sean X un espacio de Banach y $\{x_n\} \subset X$. Se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión asintóticamente isométrica a la base sumante de c_0, aibsc$_0$ por brevedad, si existe $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ con $\varepsilon_n \to 0$ y tal que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\varepsilon_n)^{-1} \left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\varepsilon_n) \left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right|, \tag{1.1}$$

para toda $\{t_n\} \in c_{00}$. Si $L > 0$, se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión L-aibsc$_0$ si $\{Lx_n\}$ es una sucesión aibsc$_0$.

Nótese que en la definición anterior podemos reemplazar c_{00} por l^1.

Sean X y Y espacios de Banach. Recordemos que dos sucesiones básicas, $\{x_n\}$ en X y $\{y_n\}$ en Y son equivalentes si dada una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$ se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \in Y$.

Observación 1.19 *Notemos que toda sucesión aibsc$_0$ es una sucesión básica acotada equivalente a la base sumante de c_0.*

En [5] se prueba el siguiente teorema.

Teorema 1.20 *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío, convexo cerrado y acotado. Sea $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ tal que $\varepsilon_n \to 0$ y $\varepsilon_n < 2^{-1}4^{-n}$, $n \geq 2$. Si K contiene una sucesión $\{x_n\}$ que cumple (1.1) con esta $\{\varepsilon_n\}$, entonces existen $C \subset K$ no vacío, convexo y cerrado y $T : C \to C$ afín, no expansivo y sin puntos fijos. Más aún, T es contractivo, es decir, $||T(x) - T(y)|| < ||x - y||$, $x, y \in C$, $x \neq y$.*

Para probar lo anterior se construye el conjunto C y el operador T como sigue: Sea

$$C = \overline{conv}\{x_n\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : \ t_n \geq 0 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Así C es no vacío, convexo cerrado y acotado. En seguida definen

$$Tx_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{n+j}}{2^j}, n \geq 1,$$

y extienden linealmente T a C, es decir, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$, con $t_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$, se define $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} t_n T x_n$. Finalmente prueban que T tiene las propiedades señaladas.

En seguida hacen la siguiente observación cuya demostración incluimos aquí, pues haremos uso de ella más adelante.

Observación 1.21 *Una subsucesión de una sucesión aibsc_0 es de nuevo una sucesión aibsc_0. Más aún, se puede seleccionar la subsucesión de manera que los nuevos $\varepsilon_n^{'}$ cumplan que $\varepsilon_n^{'} < 2^{-1}4^{-n}$, $n \geq 2$.*

Demostración Sean X un espacio de Banach y $\{x_n\} \subset X$ una sucesión aibsc_0. Consideremos una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}$. Sea $\{t_k\} \in c_{00}$. Definamos

$$t_i^{'} = \begin{cases} t_j, \text{ si } i = n_j \text{ para algún } j \in \mathbb{N}, \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Digamos que $\{x_n\}$ cumple (1.1) con una sucesión $\{\varepsilon_n\}$. Como $\{t_k^{'}\} \in c_{00}$ entonces

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (1+\varepsilon_n)^{-1} \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j^{'} \right| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n^{'} x_n \right\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (1+\varepsilon_n) \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j^{'} \right|.$$

Notemos que

$$\left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j^{'} \right| = \left| \sum_{j=m}^{\infty} t_j^{'} \right|,$$

si $n, m \in \{n_i + 1, ..., n_{i+1}\}$, $i = 0, 1, 2, ...$, donde $n_0 \equiv 0$. Sea

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{máx}\{\varepsilon_n : n \in \{1, ..., n_1\}\}, \\ E_2 &= \text{máx}\{\varepsilon_n : n \in \{n_1 + 1, ..., n_2\}\}, \\ E_3 &= \text{máx}\{\varepsilon_n : n \in \{n_2 + 1, ..., n_3\}\}, ... \end{aligned}$$

Definamos

$$m_i = \text{máx}\{n \in \{n_{i-1} + 1, ..., n_i\} : \varepsilon_n = E_i\}, \ i \in \mathbb{N}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sup_{i\in\mathbb{N}} (1 + \varepsilon_{m_i})^{-1} \left| \sum_{j=m_i}^{\infty} t_j' \right| &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (1 + \varepsilon_n)^{-1} \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j' \right| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n' x_n \right\| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (1 + \varepsilon_n) \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j' \right| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} (1 + \varepsilon_{m_i}) \left| \sum_{j=m_i}^{\infty} t_j' \right|. \end{aligned}$$

Además, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n' x_n = \sum_{k=1}^{\infty} t_k x_{n_k} \text{ y } \sum_{j=m_i}^{\infty} t_j' = \sum_{j=i}^{\infty} t_j,$$

resulta que

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} (1 + \varepsilon_{m_i})^{-1} \left| \sum_{j=i}^{\infty} t_j \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} t_i x_{n_i} \right\| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} (1 + \varepsilon_{m_i}) \left| \sum_{j=i}^{\infty} t_j \right|.$$

Así, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\varepsilon_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ cumplen (1.1).

Resta mostrar la segunda afirmación. Como $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_n < 2^{-1}4^{-2}$, $n \geq n_1$. Puesto que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_2 > n_1$ y tal que $\varepsilon_n < 2^{-1}4^{-3}$, $n \geq n_2$. Continuando de esta manera obtenemos una sucesión creciente $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_n < 2^{-1}4^{-(k+1)}$, $n \geq n_k$. Consideremos la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Por la primera parte $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión aibsc$_0$. De hecho $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ cumple (1.1) con $\{\varepsilon_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$. De la definición de m_k se tiene que $n_{k-1} < n_{k-1} + 1 \leq m_k \leq n_k$, $k = 1, 2, ...$. Por lo tanto $\varepsilon_{m_k} < 2^{-1}4^{-k}$, $k = 1, 2, ...$. ■

Observación 1.22 *Sea* $\{\lambda_n\} \subset (0, \infty)$ *tal que* $\lambda_n \longrightarrow 0$. *Notemos que mediante el mismo argumento que se utilizó para seleccionar una subsucesión* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *de* $\{x_n\}$ *de manera que los nuevos* ε'_n *cumplan que* $\varepsilon'_n < 2^{-1}4^{-n}$, $n \geq 2$, *podemos seleccionar* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *de manera que* $\varepsilon'_{n+1} < \varepsilon'_n$ *y* $\varepsilon'_n < \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$.

De la observación 1.21 obtienen el siguiente corolario.

Corolario 1.23 *Sea* X *un espacio de Banach. Si* $L > 0$, $K \subset X$ *es no vacío, convexo, cerrado y acotado y* K *contiene una sucesión* L*-aibsc*$_0$, *entonces existen* $C \subset K$ *no vacío, convexo y cerrado y* $T : C \to C$ *afín, no expansivo y sin puntos fijos.*

Demostración Por hipótesis existen $\{x_n\} \subset K$ y $\{\varepsilon_n\} \subset (0, \infty)$ tales que $\{Lx_n\}$ y $\{\varepsilon_n\}$ cumplen la condición (1.1). Por la observación anterior podemos suponer que $\varepsilon_n < 2^{-1}4^{-n}$, $n \geq 2$. Puesto que $\{Lx_n\} \subset LK$ y LK es no vacío, convexo cerrado y acotado, por el teorema 1.20, existe $C_1 \subset LK$ no vacío, convexo y cerrado y $T_1 : C_1 \longrightarrow C_1$ afín, no expansivo y sin puntos fijos. El conjunto $C \equiv \frac{1}{L}C_1$ y el operador $T \equiv \frac{1}{L}T_1 : C \longrightarrow C$ cumplen lo afirmado. ■

Después prueban el siguiente teorema.

Teorema 1.24 *Sea* $K \subset c_0$ *no vacío, convexo, cerrado y acotado y supongamos que* K *no es* ω*-compacto. Entonces* K *contiene una sucesión* L*-aibsc*$_0$, *para alguna* $L > 0$. *En consecuencia existen* $C \subset K$ *no vacío, convexo y cerrado y* $T : C \to C$ *no expansivo y sin puntos fijos. Más aún* T *es afín y contractivo.*

Provistos del teorema anterior y del teorema de Maurey, Dowling, Lennard y Turett obtienen el siguiente corolario.

Corolario 1.25 *Sea* $K \subset c_0$ *no vacío, convexo, cerrado y acotado. Entonces* K *es* ω*-compacto si y sólo si todos los subconjuntos no vacíos, convexos y cerrados de* K *tienen la PPF.*

El corolario anterior puede ser extendido a c. Para ello, Dowling, Lennard y Turett prueban el siguiente lema.

Lema 1.26 *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío, convexo, cerrado y acotado. Fijemos $\pi \in X^*$. Entonces K es ω-compacto si y sólo si $\pi^{-1}(\{a\}) \cap K$ es ω-compacto para cada $a \in \mathbb{K}$.*

Incluimos la prueba detallada de los siguientes tres corolarios, pues en el próximo capítulo enunciaremos algunos resultados cuyas pruebas son similares a estas demostraciones.

Corolario 1.27 *Sea $K \subset c$ no vacío, convexo, cerrado y acotado. Entonces K es ω-compacto si y sólo si todos los subconjuntos no vacíos, convexos y cerrados de K tienen la PPF.*

Demostración $\Longrightarrow$) Esta implicación se cumple por un resultado de Borwein y Sims [2].

$\Longleftarrow$) Supongamos que K no es ω-compacto. Sea $\pi : c \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $\pi(\{x_i\}) = \lim x_i$. Así $\pi \in c^*$. Por el lema anterior, existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $\pi^{-1}(\{a\}) \cap K$ no es ω-compacto. Para cada $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \pi^{-1}(\{a\})$, definamos $U(x) = x - a$, donde $x - a = \{x_i - a\}_{i=1}^{\infty}$. Notemos que $U : \pi^{-1}(\{a\}) \longrightarrow c_0$ es afín, pues si $\sum_{n=1}^{m} t_n x_n$ es una combinación convexa en $\pi^{-1}(\{a\})$, donde $x_n = \{x_i^n\}_{i=1}^{\infty}$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{m} t_n x_n = \sum_{n=1}^{m} t_n \{x_i^n\}_{i=1}^{\infty} = \left\{ \sum_{n=1}^{m} t_n x_i^n \right\}_{i=1}^{\infty},$$

por lo cual

$$\begin{aligned} U\left(\sum_{n=1}^{m} t_n x_n\right) &= \left(\sum_{n=1}^{m} t_n x_n\right) - a \\ &= \sum_{n=1}^{m} t_n x_n - \sum_{n=1}^{m} t_n a \\ &= \sum_{n=1}^{m} t_n (x_n - a) \\ &= \sum_{n=1}^{m} t_n U(x_n). \end{aligned}$$

Como veremos a continuación, el operador

$$U : \left(\pi^{-1}(\{a\}), \sigma(c, c^*)_{|_{\pi^{-1}(\{a\})}}\right) \longrightarrow (c_0, \sigma(c_0, c_0^*))$$

es un homeomorfismo. Definamos $T : (c, \sigma(c, c^*)) \longrightarrow (c, \sigma(c, c^*))$ como $Tx = x - a$, donde $x - a = \{x_i - a\}_{i=1}^{\infty}$. El operador T es un homeomorfismo. En consecuencia $U = T|_{\pi^{-1}(\{a\})}$ es un homeomorfismo.

Ahora bien, como $U : \left(\pi^{-1}(\{a\}), \sigma(c, c^*)_{|_{\pi^{-1}(\{a\})}}\right) \longrightarrow (c_0, \sigma(c_0, c_0^*))$ es un homeomorfismo y $\pi^{-1}(\{a\}) \cap K$ no es $\sigma(c, c^*)$-compacto tenemos que $U(\ \pi^{-1}(\{a\}) \cap K)$ no es $\sigma(c_0, c_0^*)$-compacto, y como $U(\ \pi^{-1}(\{a\}) \cap K) \subset c_0$ es no vacío, convexo, cerrado y acotado, por el teorema 1.24, existen $C \subset U(\ \pi^{-1}(\{a\}) \cap K)$ no vacío, convexo y cerrado y $T : C \longrightarrow C$ no expansivo y sin puntos fijos. En consecuencia $U^{-1}(C)$ es un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de $\pi^{-1}(\{a\}) \cap K$. Además, la función $U^{-1}TU : U^{-1}(C) \longrightarrow U^{-1}(C)$ es no expansiva y no tiene puntos fijos. $\blacksquare$

Corolario 1.28 *Sea $K \subset c_0$. Entonces K es relativamente ω-compacto si y sólo si K es acotado y $conv\{K\}$ no contiene una sucesión L-aibsc$_0$.*

Demostración $\Longrightarrow$) Puesto que $\overline{K}^{\omega}$ es ω-compacto, entonces K es acotado. Supongamos que $conv\{K\}$ contiene una sucesión L-aibsc$_0$. Así, $\overline{conv}\{K\}$ es convexo, cerrado y acotado y posee una L-aibsc$_0$. Por el corolario 1.23, existe $C \subset \overline{conv}\{K\}$ con C no vacío, convexo, cerrado, acotado y sin la propiedad del punto fijo. Por otra parte, por el teorema de Krein-Smulian, $\overline{conv}\{\overline{K}^{\omega}\}$ es ω-compacto. Puesto que $C \subset \overline{conv}\{K\} \subset \overline{conv}\{\overline{K}^{\omega}\}$, resulta que C es ω-compacto. Como C es convexo, por el teorema de Maurey, resulta que C tiene la PPF, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $conv\{K\}$ no contiene una sucesión L-aibsc$_0$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\overline{K}^{\omega}$ no es ω-compacto. Luego K no es ω-compacto. Puesto que K es acotado, como en la prueba del teorema 4 de [5], existe $\{x_n\} \subset K$ tal que $x_n \xrightarrow{\omega^*} x \in l^{\infty} \backslash c_0$, y $\{x_n\}$ cumple las condiciones $(1') - (4')$ del teorema 4 de [5]. A partir de $\{x_n\}$ en el teorema 4 de [5] se construye una sucesión $\{y_n\} \subset conv\{K\}$, donde cada y_n es un promedio de elementos de la sucesión $\{x_n\}$, y $\{y_n\}$ es una sucesión L-aibsc$_0$ para alguna $L > 0$, lo cual es una contradicción. $\blacksquare$

Corolario 1.29 *Sea $K \subset c_0$. Entonces $\overline{K}^{\omega}$ es ω-compacto si y sólo K es acotado y K no contiene una sucesión equivalente a la base sumante de c_0.*

Demostración $\Longrightarrow$) Como $\overline{K}^{\omega}$ es ω-compacto, entonces K es acotado. Sea $\{\xi_n\}$ la base sumante de c_0. Supongamos que K contiene una sucesión $\{x_n\}$ equivalente a $\{\xi_n\}$. Como $\{x_n\} \subset K \subset \overline{K}^{\omega}$ y $\overline{K}^{\omega}$ es ω-compacto, por el teorema de Eberlein-Smulian existe $\{x_{n_k}\}$ subsucesión de $\{x_n\}$ y $z \in \overline{K}^{\omega}$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow{\omega} z$. Puesto que $\{x_n\}$ y $\{\xi_n\}$ son equivalentes, entonces

$$T : \overline{span\left(\{x_n\}\right)} \longrightarrow \overline{span\left(\{\xi_n\}\right)} = c_0,$$

dada por

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$$

es un isomorfismo topológico. Por lo cual

$$T : \left(\overline{span\left(\{x_n\}\right)}, \sigma\left(c_0, c_0^*\right)_{|_{\overline{E(\{x_n\})}}}\right) \longrightarrow \left(\overline{span\left(\{\xi_n\}\right)}, \sigma\left(c_0, c_0^*\right)\right)$$

es también un isomorfismo topológico. Luego, como $x_{n_k} \xrightarrow{\omega} z$, resulta que $Tx_{n_k} \xrightarrow{\omega} Tz$. En consecuencia $\xi_{n_k} \xrightarrow{\omega} Tz$. Consideremos la función $\pi_i : c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $\pi_i\left(\{x_n\}\right) = x_i$. Se tiene que $\pi_i \in c_0^*$, $i \in \mathbb{N}$. Puesto que $\xi_{n_k} \xrightarrow{\omega} Tz$, se tiene entonces que $\pi_i\left(\xi_{n_k}\right) \underset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \pi_i\left(Tz\right)$. Así $\pi_i\left(Tz\right) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \pi_i\left(\xi_{n_k}\right) = 1$. Por ende $T(z) = (1, 1, 1, ...) \in c_0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto K no contiene una sucesión equivalente a la base sumante de c_0.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\overline{K}^{\omega}$ no es ω-compacto. Luego K no es ω-compacto. Puesto que K es acotado, como en la prueba del teorema 4 de [5], existe $\{x_n\} \subset K$ tal que $x_n \xrightarrow{\omega^*} x \in l^{\infty} \backslash c_0$, y $\{x_n\}$ cumple las condiciones $(1') - (4')$ del teorema 4 de [5]. Ahora, en lugar de tomar los promedios de las $x_n' s$ como se hizo para obtener las $y_n' s$ del teorema 4 de [5], (Esto no lo podemos hacer a menos que K sea convexo), se prueba, de manera muy similar a la prueba del teorema 4 de [5], que la sucesión $\{x_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a la base sumante de c_0. ■

Observemos que el corolario 1.25 no prueba lo conjeturado por Llorens-Fuster y Sims. Este resultado sólo garantiza que si $K \subset c_0$ es no vacío, convexo, cerrado y acotado y K no es ω-compacto entonces existe $C \subset K$ no vacío, convexo y cerrado que no tiene la PPF y no se asegura que K mismo no tenga la PPF. En 2004 los mismos autores, Dowling, Lennard y Turett prueban en [6], como lo conjeturaron Llorens-Fuster y Sims, que el converso del teorema de Maurey es cierto. Es decir, prueban el siguiente teorema.

Teorema 1.30 *Sea $K \subset c_0$ con K no vacío, convexo, cerrado y acotado. Entonces K tiene la PPF si y sólo si K es ω-compacto.*

Para probar la conjetura de Llorens-Fuster y Sims, Dowling, Lennard y Turett en [6] utilizan algunas de las propiedades de las sucesiones aibsc_0, además de definir nuevos operadores no expansivos. La conjetura en el caso de c sigue abierta.

Capítulo 2

La ω-PPF y ω-compacidad en $c_{0\alpha}$

2.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos en el espacio $c_{0\alpha}$ definido abajo, la existencia de sucesiones que se comporten de manera parecida a la base sumante de c_0 y que en caso de que existan nos permitirán estudiar la PPF y la ω-PPF en el espacio $c_{0\alpha}$.

Sea $\alpha > 0$. Definamos l_α^∞ como el espacio de sucesiones de escalares acotadas dotado con la norma $||.||_\alpha$, donde

$$||\{x_n\}||_\alpha \equiv ||\{x_n\}||_\infty + \alpha \left\|\{x_n\}\right\|_s, \ \{x_n\} \in l^\infty,$$

con

$$\left\|\{x_n\}\right\|_s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n}.$$

Notemos que $||.||_\alpha$ y $||.||_\infty$ son equivalentes pues

$$||x||_\infty \leq ||x||_\alpha \leq (1+\alpha) \left\|x\right\|_\infty, x \in l^\infty.$$

Helga Fetter y Berta Gamboa de Buen prueban en [8] que para $\alpha \in [0,1)$, $c_\alpha \equiv (c, ||.||_\alpha)$ tiene la ω-PPF y que $c_{0\alpha} \equiv (c_0, ||.||_\alpha)$ tiene la ω-PPF para toda $\alpha > 0$.

Ya sabemos entonces que $c_{0\alpha}$ tiene la ω-PPF. La pregunta ahora es ¿Será cierto que, si $K \subset c_{0\alpha}$ es no vacío, convexo, cerrado, acotado y con la PPF entonces K es ω-compacto? La misma pregunta se puede hacer en $c_\alpha, \alpha \in [0,1)$. Por supuesto, c_0 y $c_{0\alpha}$ son isomorfos pues $||.||_\infty$ y $||.||_\alpha$ son equivalentes. En consecuencia, la topología débil de c_0 y la topología débil de $c_{0\alpha}$ son iguales. Luego los conjuntos ω-compactos en c_0 y $c_{0\alpha}$ son los mismos. Sin embargo, como la no expansividad de un operador depende de la norma en cuestión, puede bien suceder o no que $c_{0\alpha}$ cumpla con el converso mencionado.

Por otra parte veremos que la base sumante de c_0 no es una sucesión aibsc_0 con respecto a la norma $||.||_\alpha$ y como no sabemos si $(c_0, ||.||_\alpha)$ contiene alguna sucesión aibsc_0, definimos las sucesiones asintóticamente isométricas a la base sumante con la norma $||.||_\alpha$.

2.2. Los espacios X_i, $i = 1, 2, 3$.

Definamos a X_1 como el espacio de las sucesiones de escalares convergentes a cero equipado con la norma $||.||_s$, X_2 como el espacio de las sucesiones de escalares convergentes equipado con la norma $||.||_s$ y a X_3 como el espacio de las sucesiones de escalares acotadas equipado con la norma $||.||_s$.

Antes de dar alguna respuesta a las preguntas anteriores, para entender mejor a los espacios $c_{0\alpha}$, c_α y l_α^∞ estudiaremos un poco a los espacios X_1, X_2 y X_3.

Notemos que en cualquiera de los espacios X_i se tiene que $||.||_s \leq ||.||_\infty$ y que $||.||_s$ y $||.||_\infty$ no son equivalentes.

Lema 2.1 *Sea X cualquiera de los espacios X_i, $i = 1, 2, 3$. Tomemos $\{x_n\} \subset X$ y $x \in X$. Entonces*

i) Si $||x_n - x||_s \longrightarrow 0$ entonces $\{x_n\}$ converge coordenada a coordenada a x.

ii) Si $\{x_n\}$ converge coordenada a coordenada a x y $\{x_n\}$ es acotada con $||.||_\infty$ entonces $||x_n - x||_s \longrightarrow 0$.

Demostración $i)$ Supongamos que $||x_n - x||_s \longrightarrow 0$. Digamos que $x_n = \{\alpha_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ y que $x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$. Como

$$|\alpha_k^n - \alpha_k| \leq 2^k ||x_n - x||_s, \ k \in \mathbb{N},$$

obtenemos que $\{x_n\}$ converge coordenada a coordenada a x.

$ii)$ Supongamos que $\{x_n\}$ converge coordenada a coordenada a x y que $\{x_n\}$ es acotada con $||.||_\infty$. Puesto que $\{x_n\}$ es acotada con $||.||_\infty$, existe $C > 0$ tal que $||x_n - x||_\infty < C, \ n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{C}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\{x_n\}$ converge coordenada a coordenada a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $\sum_{k=1}^{M} \frac{|\alpha_k^n - \alpha_k|}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Así,

$$\begin{aligned} ||x_n - x||_s &\leq \sum_{k=1}^{M} \frac{|\alpha_k^n - \alpha_k|}{2^k} + \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{|\alpha_k^n - \alpha_k|}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{M} \frac{|\alpha_k^n - \alpha_k|}{2^k} + \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{C}{2^k} < \varepsilon, \ n \geq \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por lo cual $||x_n - x||_s \longrightarrow 0$. ■

Como consecuencia del lema 2.1 obtenemos la siguiente propiedad de los conjuntos compactos en los espacios X_i.

Proposición 2.2 *Sea X cualquiera de los espacios X_i, $i = 1, 2, 3$. Tomemos $K \subset X$. Si K es acotado con $||.||_\infty$ y toda sucesión en K posee una subsucesión que converge coordenada a coordenada a algún $x \in K$, entonces K es compacto.*

Lema 2.3 *Sea X cualquiera de los espacios X_i, $i = 1, 2, 3$. Tomemos $\{x_n\} \subset X$ y $x \in X$. Si $x_n \xrightarrow{\omega} x$ y $\{x_n\}$ es acotada con $||.||_\infty$ entonces $||x_n - x||_s \longrightarrow 0$.*

Demostración Supongamos que $x_n \xrightarrow{\omega} x$ y que $\{x_n\}$ es acotada con $||.||_\infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos $\pi_k : X \longrightarrow \mathbb{K}$ como $\pi_k(\{b_n\}) = b_k$, $\{b_n\} \in X$. Claramente π_k es lineal, y puesto que

$$|\pi_k(x)| \leq 2^k ||x||_s, \ x \in X,$$

resulta que $\pi_k \in X^*$. Digamos que $x_n = \{\alpha_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ y que $x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$. Puesto que $x_n \xrightarrow{\omega} x$, entonces $\alpha_k^n = \pi_k(x_n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \pi_k(x_n) = \alpha_k,\ k \in \mathbb{N}$, es decir, $\{x_n\}$ converge coordenada a coordenada a x. Luego por el lema anterior se tiene que $||x_n - x||_s \longrightarrow 0$. ■

Corolario 2.4 *Sea X cualquiera de los espacios X_i, $i = 1, 2, 3$. Tomemos $K \subset X$ ω-secuencialmente compacto. Si K es acotado con $||.||_\infty$ entonces K es compacto.*

Proposición 2.5 *Sea X cualquiera de los espacios X_i, $i = 1, 2, 3$. Entonces*

i) X no es completo.

ii) $\overline{X} = X_3$. (La cerradura es en X_3.)

iii) $\overline{X_1} = X_2$. (Aquí la cerradura es en X_2.)

iv) l^1 es la completación de X.

v) l^∞ es el espacio dual de X.

Demostración *i)* Sea $x_n = (1, 2, 3, ..., n, 0, 0, 0, ...),\ n \in \mathbb{N}$. Así, $\{x_n\} \in c_0$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$. Entonces

$$||x_n - x_m||_s = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{k}{2^k}.$$

Como $\sqrt[k]{\frac{k}{2^k}} \underset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ converge. Así $\{x_n\}$ es de Cauchy en X. Supongamos que existe $x \in X$ tal que $||x_n - x||_s \longrightarrow 0$. Luego x_n converge coordenada a coordenada a $x = (1, 2, 3, ...) \in X$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto X no es completo.

ii) Sea $x \in X_3$. Digamos que $x = \{\alpha_k\}$. Definamos

$$x_n = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n, 0, 0, 0, ...),\ n \in \mathbb{N}.$$

Así, $\{x_n\} \in X$. Como

$$||x_n - x||_s = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\alpha_k|}{2^k} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0,$$

entonces $x \in \overline{X}$. Luego, $X_3 \subset \overline{X}$, por lo tanto $\overline{X} = X_3$.

iii) Se prueba de manera similar a *ii*).

iv) Sea $\Phi : X \longrightarrow l^1$ dada por

$$\Phi(\{b_n\}) = \left\{ \frac{b_n}{2^n} \right\}.$$

Así, Φ es lineal y como

$$||\Phi(\{b_n\})||_1 = \left\| \left\{ \frac{b_n}{2^n} \right\} \right\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{2^n} = || \{b_n\} ||_s, \ \{b_n\} \in X,$$

Φ es una isometría. Tomemos $\{a_n\} \in l^1$. Definamos

$$x_n = (2a_1, 2^2 a_2, ..., 2^n a_n, 0, 0, 0, ...) \in X, \ n \in \mathbb{N}.$$

Notemos que $\Phi(x_n) = (a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, 0, ...)$. Además,

$$||\Phi(x_n) - \{a_n\} ||_1 = \|(0, 0, ..., 0, a_{n+1}, a_{n+2}, ...)\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Así, $\Phi(X)$ es denso en l^1, por lo cual, la completación de X es l^1.

v) Como l^1 es la completación de X, y el dual de un espacio normado y de su completación coinciden, entonces $X^* = (l^1)^* = l^\infty$. ∎

Observación 2.6 *Sea X cualquiera de los espacios X_i, $i = 1, 2, 3$. Tomemos a $\Phi : X \longrightarrow l^1$ como en iv) de la proposición 2.5 y $R : l^\infty \longrightarrow (l^1)^*$ la representación de Riesz. En v) se probó que $X^* = l^\infty$. Veamos más detalladamente cuál es el isomorfismo isométrico entre X^* y l^∞ que se está considerando en v). Recordemos que l^1 es la completación de X. Así, $X^* = (l^1)^*$, de hecho, la función $D : (l^1)^* \longrightarrow X^*$ dada por $D(g) = g\Phi$ es un isomorfismo isométrico. Definamos $\Psi : l^\infty \longrightarrow X^*$ como $\Psi = DR$. Así Ψ es un isomorfismo isométrico. Notemos que para cada $\{a_n\} \in l^\infty$ se tiene que*

$$\Psi(\{a_n\}) = DR(\{a_n\}) = R(\{a_n\})\Phi.$$

Luego,

$$X^* = \{R(\{a_n\})\Phi : \ \{a_n\} \in l^\infty\}.$$

En consecuencia, dada $f \in X^*$, existe $\{a_n\} \in l^\infty$ tal que $f = R(\{a_n\})\Phi$. Así, para cada $\{b_n\} \in X$ se tiene que

$$f(\{b_n\}) = R(\{a_n\})\Phi(\{b_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{2^n}.$$

Lema 2.7 *Sea X cualquiera de los espacios c_0, c o l^∞ y $K \subset X$ acotado. Entonces*

i) K es ω-secuencialmente precompacto en X_3.

ii) ii) K es precompacto en X_3.

Demostración $i)$ Sea $\{x_n\} \subset K \subset X \subset l^\infty$. Consideremos a la representación de Riesz $R : l^\infty \longrightarrow (l^1)^*$. Como $\{x_n\}$ es acotado, entonces $R(\{x_n\})$ $\subset (l^1)^*$ es acotado. Así, $R(\{x_n\})$ está contenido en una bola cerrada B de $(l^1)^*$. Puesto que l^1 es separable entonces B es ω^*-secuencialmente compacto. Luego, existen $\{x_{n_k}\}$ subsucesión de $\{x_n\}$ y $x \in l^\infty$ tales que

$$Rx_{n_k} \underset{k\longrightarrow\infty}{\overset{\omega^*}{\longrightarrow}} Rx.$$

Luego

$$R(x_{n_k})(z) \underset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} R(x)(z), \tag{2.1}$$

para cada $z \in l^1$. En particular se cumple (2.1) para cada z en el conjunto $\left\{\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\} : \{a_n\} \in l^\infty\right\} \subset l^1$. En consecuencia

$$R(\{a_n\})\Phi(x_{n_k}) \underset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} R(\{a_n\})\Phi(x)$$

para cada $\{a_n\} \in l^\infty$. Lo cual indica que $\{x_{n_k}\}$ converge débilmente en X_3.

$ii)$ Sea $\{x_n\} \subset K$. Por $i)$, existen $\{x_{n_k}\}$ subsucesión de $\{x_n\}$ y $x \in l^\infty$ tales que $Rx_{n_k} \underset{k\longrightarrow\infty}{\overset{\omega^*}{\longrightarrow}} Rx$, lo cual implica que x_{n_k} converge coordenada a coordenada a x, y como K es acotado con $\|.\|_\infty$, por el lema 2.1 resulta que $||x_{n_k} - x||_s \longrightarrow 0$. Por lo tanto K es precompacto en X_3. ■

Sea X un espacio normado. Aunque X no sea completo, se puede considerar en X la PPF o la ω-PPF.

Lema 2.8 *Sean X un espacio normado, $Y \subset X$ un subespacio y $K \subset Y$. Entonces*

i) K es $\sigma(Y, Y^*)$-compacto si y sólo si K es $\sigma(X, X^*)$-compacto.

ii) Si X tiene la ω-PPF entonces Y tiene la ω-PPF.

Demostración Es consecuencia de que $\sigma(Y, Y^*) = \sigma(X, X^*)_{|Y}$. ■

La demostración del siguiente resultado es directa.

Lema 2.9 *Sean X y Y espacios normados tales que Y es isométricamente isomorfo a un subespacio de X. Si X tiene la ω-PPF entonces Y tiene la ω-PPF. En particular, si $[Y]$ es la completación de Y y $[Y]$ tiene la ω-PPF entonces Y tiene la ω-PPF.*

Corolario 2.10 *Sea X cualquiera de los espacios X_i, $i = 1, 2, 3$. Entonces X tiene la ω-PPF.*

Demostración Es consecuencia de que l^1 es la completación de X y de que en l^1 todo conjunto ω-compacto es compacto. ■

Encaminados ahora a contestar lo planteado al inicio de capítulo para $c_{0\alpha}$ y para c_α consideremos lo siguiente:

En [5], dado $K \subset c_0$ no ω-compacto, los autores encuentran una sucesión básica acotada $\{x_n\} \subset K$ tal que

$$C \equiv \overline{conv}\{x_n\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : t_n \geq 0 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}$$

y un operador $T : C \longrightarrow C$ afín, no expansivo y sin puntos fijos. En general, si X es un espacio de Banach, $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión básica acotada y

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : t_n \geq 0 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\},$$

no siempre se cumple que $\overline{conv}\{x_n\} = C$. Sólo podemos asegurar que

$$conv\{x_n\} \subset C \subset \overline{conv}\{x_n\}.$$

Así, se tiene que $\overline{conv}\{x_n\} = C$ sólo cuando C es cerrado.

Definición 2.11 *Sean X un espacio de Banach y $\{x_n\} \subset X$ una sucesión básica acotada. Diremos que $\{x_n\}$ es una sucesión convexamente cerrada si*

$$C \equiv \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : t_n \geq 0 \ y \ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}$$

es un conjunto cerrado, es decir, si $\overline{conv}\{x_n\} = C$.

Observación 2.12 *Notemos que toda subsucesión de una sucesión convexamente cerrada es convexamente cerrada y que toda sucesión básica equivalente a una sucesión convexamente cerrada es convexamente cerrada. Además podemos definir análogamente las sucesiones convexamente cerradas en espacios normados cualesquiera.*

Ejemplo 2.13 *La base sumante de c_0 es convexamente cerrada.*

Demostración Sea $\{\xi_n\}$ la base sumante de c_0 y definamos

$$C \equiv \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n : t_n \geq 0 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Tomemos $\{w_n\} \subset C$ y $w \in c_0$ tales que $w_n \longrightarrow w$. Así, $w_n = \sum_{k=1}^{\infty} t_k^n \xi_k$ y $w = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \xi_k$, para algunas sucesiones $\{t_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $t_k^n \geq 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} t_k^n = 1$. Puesto que $w_n \longrightarrow w$, se tiene que $t_k^n = \xi_k^*(w_n) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \xi_k^*(w) = t_k$. Por lo cual $t_k \geq 0$. Además, como $w_n \longrightarrow w$, se tiene que $1 = \sum_{k=1}^{\infty} t_k^1 = e_1^*(w_n) \longrightarrow e_1^*(w) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k$. En consecuencia $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = 1$. Por lo tanto $w \in C$. $\blacksquare$

Ejemplo 2.14 *La base canónica de l^1 es convexamente cerrada.*

Demostración Sea $\{e_n\}$ la base canónica de l^1 y definamos

$$C \equiv \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n : t_n \geq 0 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Tomemos $\{w_n\} \subset C$ y $w \in l^1$ tales que $w_n \longrightarrow w$. Así, $w_n = \sum_{k=1}^{\infty} t_k^n e_k$ y $w = \sum_{k=1}^{\infty} t_k e_k$, para algunas sucesiones $\{t_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $t_k^n \geq 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} t_k^n = 1$. Puesto que $w_n \longrightarrow w$, se tiene que $t_k^n = e_k^*(w_n) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} e_k^*(w) = t_k$, por lo cual $t_k \geq 0$. Además, como $w_n \longrightarrow w$, se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \|w\|_1 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|w_n\|_1 = 1$. Por lo tanto $w \in C$. $\blacksquare$

Ejemplo 2.15 *Una sucesión aibsc$_0$ es convexamente cerrada pues es equivalente a la base sumante de c_0.*

Ejemplo 2.16 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión básica en un espacio de Banach X. Si $x_n \xrightarrow{\omega} 0$ entonces $\{x_n\}$ no es convexamente cerrada. Así la base canónica de c_0 y la base canónica de l^p, $1 < p < \infty$, no son convexamente cerradas.*

Demostración Supongamos que $\{x_n\}$ es convexamente cerrada. Puesto que $x_n \xrightarrow{\omega} 0$ se tiene que

$$0 \in \overline{conv}\{x_n\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : t_n \geq 0 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\},$$

lo cual es una contradicción, pues como $\{x_n\}$ es básica se tiene que $0 \notin \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : t_n \geq 0 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}$. ■

Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío, convexo, cerrado y acotado y supongamos además que K no es ω-compacto. Deseamos saber si K no tiene la PPF o si existe un subconjunto de K sin la PPF, para lo cual sería útil conocer si existe $\{x_n\} \subset K$ tal que $\{x_n\}$ es convexamente cerrada. Como veremos a continuación esto siempre sucede.

En [3] Domínguez-Benavidez, Japón-Pineda y Prus prueban el siguiente hecho.

Lema 2.17 *Sean X un espacio de Banach y $\{x_n\} \subset X$ una sucesión acotada sin subsucesiones débilmente convergentes. Entonces*

i) Existen $\{x_{n_k}\}$ subsucesión básica de $\{x_n\}$ y $f \in X^*$ tales que $a \equiv \inf\{f(x_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\} > 0$. En consecuencia, si $g = \frac{1}{a} f$ y $y_k = \frac{a}{f\left(x_{n_k}\right)} x_{n_k}$, se tiene que $g(y_k) = 1$, $k \in \mathbb{N}$.

ii) La sucesión $\{y_k\}$ es convexamente cerrada.

Tomemos $K \subset X$ no vacío, convexo, cerrado y acotado y supongamos además que K no es ω-compacto. Puesto que la PPF es invariante bajo traslaciones, podemos suponer que $0 \in K$. Por el teorema de Eberlein-Smulian, existe $\{w_n\} \subset K$ tal que ninguna de sus subsucesiones converge débilmente.

Por el lema 2.17 existen $\{w_{n_k}\}$ subsucesión básica de $\{w_n\}$ y $\{\lambda_k\} \subset (0,1]$ tales $\{x_k\} \equiv \{\lambda_k w_{n_k}\}$ es convexamente cerrada. Por último, puesto que $0 \in K$ obtenemos que $\{x_k\} \subset K$.

Consideremos ahora lo siguiente. Sea $\{\xi_n\}$ la base sumante de c_0. Tomemos $\{t_k\} \in l^1$. Entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k \xi_k \right\|_s = \left| \sum_{j=1}^{\infty} t_j \right| \frac{1}{2} + \left| \sum_{j=2}^{\infty} t_j \right| \frac{1}{2^2} + ...$$

Tomemos ahora una subsucesión de la base sumante de c_0, digamos $\{\xi_{n_k}\}$ y $\{t_k\} \in l^1$. Entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k \xi_{n_k} \right\|_s = \left| \sum_{j=1}^{\infty} t_j \right| \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{2^k} + \left| \sum_{j=2}^{\infty} t_j \right| \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \frac{1}{2^k} + ...$$

Consideremos la sucesión $\{a_k\}$, donde $a_k = \frac{1}{2^k}$. La sucesión $\{a_k\}$ cumple que $\{a_k\} \subset (0,\infty)$ y que $2a_{k+1} \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$. De hecho la condición de que $2a_{k+1} \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$ implica que $\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$, y esta condición a su vez implica que $a_{k+1} \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$.

Consideremos ahora a la sucesión $\{b_k\}$, donde $b_k = \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{2^j}$, para alguna subsucesión $\{n_k\}$ de $\mathbb{N}$. Notemos que la sucesión $\{b_k\}$ cumple que $\{b_k\} \subset (0,\infty)$ y que $\sum_{j=k+1}^{\infty} b_j \leq b_k,\ k \in \mathbb{N}$. Sin embargo la sucesión $\{b_k\}$ puede no cumplir que $2b_{k+1} \leq b_k,\ k \in \mathbb{N}$.

Debido a los comentarios anteriores y a lo que Dowling, Lennard y Turett hicieron en [5] para c_0, damos la siguiente definición.

Definición 2.18 *Sea X un espacio de Banach. Diremos que $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión aibsX_1, si $\{x_n\}$ es convexamente cerrada y existen $\{a_k\} \subset (0,\infty)$ y $\{\delta_k\} \subset (0, \sqrt{2}-1)$ tales que $\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$, $\delta_{k+1} \leq \delta_k,\ k \in \mathbb{N}$ y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n)^{-1} \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right| a_n \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n) \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right| a_n, \tag{2.2}$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

La siguiente proposición es un “análogo” del teorema 2 de [5] que es el teorema 1.20 del capítulo 1. En su demostración, el conjunto C y el operador T se construyen como en [5]. Sin embargo, las estimaciones que se hacen para probar que el operador T es no expansivo son distintas de las estimaciones que se hacen en [5]. Por otra parte, aunque la prueba de que no tiene puntos fijos es la misma que la de ellos, pues no depende de la norma, la damos por claridad.

Proposición 2.19 *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío, convexo cerrado y acotado. Si K contiene una sucesión aibsX_1, entonces existen $C \subset K$ no vacío, convexo, cerrado y acotado y $T : C \to C$ afín, no expansivo y sin puntos fijos. Más aún, T es contractivo.*

Demostración Sea $\{x_n\} \subset K$ una sucesión aibsX_1 con algunas $\{a_k\} \subset (0, \infty)$ y $\{\delta_k\} \subset (0, \sqrt{2} - 1)$. Consideremos al conjunto

$$C = \overline{conv}\,\{x_n\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : t_n \geq 0,\ n \in \mathbb{N}\ y \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\} \subset K.$$

Así C es no vacío, convexo cerrado y acotado. Definamos $Tx_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{n+j}}{2^j}$, $n \in \mathbb{N}$, y extendamos linealmente T a C, es decir, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \in C$ entonces definimos $T\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n T x_n$. Claramente $T(C) \subset C$ y T es afín. Supongamos que $Tx = x$ para algún $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \in C$. Así

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} t_n T(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{n+j}}{2^j} \right) \\ &= t_1 \left(\frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2^2} + \frac{x_4}{2^3} + ... \right) + t_2 \left(\frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{2^2} + \frac{x_5}{2^3} + ... \right) \\ &\quad + t_3 \left(\frac{x_4}{2} + \frac{x_5}{2^2} + \frac{x_6}{2^3} + ... \right) + ... \\ &= \left(\frac{t_1}{2} \right) x_2 + \left(\frac{t_1}{2^2} + \frac{t_2}{2} \right) x_3 + \left(\frac{t_1}{2^3} + \frac{t_2}{2^2} + \frac{t_3}{2} \right) x_4 + ... \end{aligned}$$

Luego $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x_n$, donde $B_1 = 0$ y $B_n = \frac{t_1}{2^{n-1}} + \frac{t_2}{2^{n-2}} + ... + \frac{t_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$, y como $x = Tx$ se tiene que $t_1 = B_1 = 0$, $t_2 = B_2 = \frac{t_1}{2} = 0$, $t_3 = B_3 = \frac{t_1}{2^2} + \frac{t_2}{2} = 0$. Al proceder inductivamente resulta que $t_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción, pues $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$. Así T no tiene puntos fijos. Resta mostrar que T es contractivo. Sean $x, y \in C$, con $x \neq y$. Luego

$x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$, y $y = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n$, con $t_n, s_n \geq 0$, y $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1$. Sea $\beta_n = t_n - s_n,\ n \in \mathbb{N}$, así $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 0$. Como antes,

$$\begin{aligned} T(x) - T(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n T(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{n+j}}{2^j} \right) \\ &= \left(\frac{\beta_1}{2} \right) x_2 + \left(\frac{\beta_1}{2^2} + \frac{\beta_2}{2} \right) x_3 + \left(\frac{\beta_1}{2^3} + \frac{\beta_2}{2^2} + \frac{\beta_3}{2} \right) x_4 + ... \end{aligned}$$

y definimos $B_1 = 0$ y $B_n = \frac{\beta_1}{2^{n-1}} + \frac{\beta_2}{2^{n-2}} + ... + \frac{\beta_{n-1}}{2},\ n \geq 2$. Como la sucesión $\{x_n\}$ es aibsX_1 tenemos que

$$\|T(x) - T(y)\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} B_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \delta_n) \left| \sum_{j=n}^{\infty} B_j \right| a_n.$$

Ahora, $\sum_{j=1}^{\infty} B_j = \sum_{j=2}^{\infty} B_j = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = 0$, y

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^{\infty} B_j &= \left(\frac{\beta_1}{2^{n-1}} + \frac{\beta_2}{2^{n-2}} + ... + \frac{\beta_{n-1}}{2} \right) + \left(\frac{\beta_1}{2^n} + \frac{\beta_2}{2^{n-1}} + ... + \frac{\beta_n}{2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\beta_1}{2^{n+1}} + \frac{\beta_2}{2^n} + ... + \frac{\beta_{n+1}}{2} \right) + ... \\ &= \frac{\beta_1}{2^{n-2}} + \frac{\beta_2}{2^{n-3}} + ... + \frac{\beta_{n-2}}{2} + \sum_{j=n-1}^{\infty} \beta_j,\ n \geq 3. \end{aligned}$$

Puesto que $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = 0$, notemos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=3}^{\infty} B_j \right| &= \left| \frac{\beta_1}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} \beta_j \right| = \left| \frac{\beta_1}{2} - \beta_1 \right| = \left| \frac{\beta_1}{2} \right|, \\ \left| \sum_{j=4}^{\infty} B_j \right| &= \left| \frac{\beta_1}{2^2} + \frac{\beta_2}{2} + \sum_{j=3}^{\infty} \beta_j \right| \\ &= \left| \frac{\beta_1}{2^2} + \frac{\beta_2}{2} - (\beta_1 + \beta_2) \right| \\ &\leq \left| \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{2} - (\beta_1 + \beta_2) \right| + \frac{|\beta_1|}{2^2} \\ &= \frac{|\beta_1 + \beta_2|}{2} + \frac{|\beta_1|}{2^2}. \end{aligned}$$

En general, si $k \geq 3$ se tiene que

$$\left|\sum_{j=k}^{\infty} B_j\right| \leq \frac{\left|\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{k-2}\right|}{2} + ... + \frac{|\beta_1 + \beta_2|}{2^{k-3}} + \frac{|\beta_1|}{2^{k-2}}.$$

Puesto que $\delta_k < \sqrt{2} - 1,\ k \in \mathbb{N}$, entonces $1 + \delta_k < \frac{2}{1+\delta_k},\ k \in \mathbb{N}$. Luego, como $\delta_{k+1} \leq \delta_k,\ k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(1+\delta_k)\left|\sum_{j=k}^{\infty} B_j\right| a_k \ &\leq \\
&\leq \ (1+\delta_k)a_k\left(\frac{\left|\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{k-2}\right|}{2} + ... + \frac{|\beta_1|}{2^{k-2}}\right) \\
&\leq \ (1+\delta_{k-1})\frac{a_k}{2}\left|\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{k-2}\right| + ... \\
&\quad\ ... + (1+\delta_3)\frac{a_k}{2^{k-3}}\left|\beta_1 + \beta_2\right| + (1+\delta_2)\frac{a_k}{2^{k-2}}\left|\beta_1\right| \\
&< \ \frac{1}{(1+\delta_{k-1})} a_k \left|\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{k-2}\right| + ... \\
&\quad\ ... + \frac{1}{(1+\delta_3)}\frac{a_k}{2^{k-4}}\left|\beta_1 + \beta_2\right| + \frac{1}{(1+\delta_2)}\frac{a_k}{2^{k-3}}\left|\beta_1\right|.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=3}^{\infty}(1+\delta_k)\left|\sum_{j=k}^{\infty} B_j\right| a_k = \\
&= (1+\delta_3)\left|\sum_{j=3}^{\infty} B_j\right| a_3 + (1+\delta_4)\left|\sum_{j=4}^{\infty} B_j\right| a_4 + (1+\delta_5)\left|\sum_{j=5}^{\infty} B_j\right| a_5 + ... \\
&< (1+\delta_2)^{-1} a_3 \left|\beta_1\right| + \\
&+ (1+\delta_3)^{-1} a_4 \left|\beta_1 + \beta_2\right| + (1+\delta_2)^{-1}\frac{a_4}{2}\left|\beta_1\right| + \\
&+ (1+\delta_4)^{-1} a_5 \left|\beta_1 + \beta_2 + \beta_3\right| + (1+\delta_3)^{-1}\frac{a_5}{2}\left|\beta_1 + \beta_2\right| + (1+\delta_2)^{-1}\frac{a_5}{2^2}\left|\beta_1\right| + ... \\
&\leq (1+\delta_2)^{-1}\left|\beta_1\right|\left(a_3 + \frac{a_4}{2} + \frac{a_5}{2^2} + ...\right) + \\
&+ (1+\delta_3)^{-1}\left|\beta_1 + \beta_2\right|\left(a_4 + \frac{a_5}{2} + \frac{a_6}{2^2} + ...\right) + ...
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1+\delta_2)^{-1}|\beta_1| a_2 + \\
&\quad +(1+\delta_3)^{-1}|\beta_1+\beta_2| a_3 + \\
&\quad +(1+\delta_4)^{-1}|\beta_1+\beta_2+\beta_3| a_4 + ... \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}(1+\delta_n)^{-1}\left|\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\right| a_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)^{-1}\left|\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\right| a_n,
\end{aligned}$$

pues $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n = 0$. Y como $\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=2}^{\infty} B_n = 0$, resulta que

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)\left|\sum_{j=k}^{\infty} B_j\right| a_k < \sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)^{-1}\left|\sum_{j=k}^{\infty}\beta_j\right| a_k. \tag{2.4}$$

Así, de (2.4) y (2.2) concluimos que

$$\begin{aligned}
\|T(x)-T(y)\| &= \left\|\sum_{k=1}^{\infty} B_k x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)\left|\sum_{j=k}^{\infty} B_j\right| a_k \\
&< \sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)^{-1}\left|\sum_{j=k}^{\infty}\beta_j\right| a_k \\
&\leq \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k x_k\right\| = \|x-y\|. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Consideremos ahora la condición que $\{a_k\} \subset (0,\infty)$ y $a_{k+1} \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$ en lugar de la condición que $\{a_k\} \subset (0,\infty)$ y $\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$. Damos entonces la siguiente definición que es un poco diferente a la definición 2.18, la cual nos conducirá a responder parcialmente lo planteado al inicio del capítulo para el espacio $c_{0\alpha}$.

Definición 2.20 *Sea X un espacio de Banach. Diremos que $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión $2aibsX_1$, si $\{x_n\}$ es convexamente cerrada y existen $\{a_k\} \subset$*

$(0, \infty)$ *y* $\{\delta_k\} \subset (0, \sqrt{2} - 1)$ *tales que* $a_{k+1} \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$, $\delta_{k+1} \leq \delta_k,\ k \in \mathbb{N}$ *y*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + \delta_k)^{-1} \left| \sum_{j=k}^{\infty} t_j \right| 2a_{k+1} \leq \tag{2.5}$$
$$\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k \right\| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \delta_k) \left| \sum_{j=k}^{\infty} t_j \right| a_k,$$

para toda $\{t_k\} \in l^1$.

Notemos que en la desigualdad izquierda de (2.5) aparece el factor $2a_{k+1}$ y en la desigualdad izquierda de (2.2) en lugar de $2a_{k+1}$ aparece el factor a_k.

Podríamos haber considerado solamente la definición 2.20, sin embargo, también consideramos la definición 2.18, pues ésta es inducida naturalmente por el comportamiento de la base sumante de c_0 y puede ser útil.

Nuevamente, obtenemos una proposición "análoga" al teorema 2 de [5].

Proposición 2.21 *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío, convexo cerrado y acotado. Si K contiene una sucesión $2aibsX_1$, entonces existen $C \subset K$ no vacío, convexo, cerrado y acotado y $T : C \to C$ afín, no expansivo y sin puntos fijos. Más aún, T es contractivo.*

Demostración Es similar a la demostración de la proposición 2.19, sólo hay que usar en (2.3) que $a_{k+1} \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$ en lugar de que $\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$ y la condición (2.5) en lugar de la condición (2.2). ■

Sea X cualquiera de los espacios X_i, $i = 1, 2, 3$. La pregunta ahora es la siguiente: Dado $K \subset X$ no vacío, convexo, cerrado y acotado, ¿Qué condiciones se necesitan sobre K para que exista $\{x_n\} \subset K$ tal que $\{x_n\}$ sea una sucesión aibsX_1 o una sucesión 2aibsX_1? La condición señalada en (2.6) nos encaminará a dar una condición suficiente para que exista $\{x_n\} \subset K$ tal que $\{x_n\}$ sea una sucesión 2aibsX_1.

Definición 2.22 *Sea $K \subset X_3$. Diremos que K es del tipo I, si existen $\{x_n\} \subset K$ convexamente cerrada y $x \in l^\infty$ tales que si $x_n = \{\alpha_k^n\}_{k=1}^\infty$ y $x = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$, entonces $\|x_n - x\|_s \longrightarrow 0$ y*

$$(\forall\, N \in \mathbb{N})(\exists\, M \geq N)(\forall\, m \geq M) \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{|\alpha_n - \alpha_n^m|}{2^n} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\alpha_n - \alpha_n^m|}{2^n}\right). \tag{2.6}$$

Ejemplo 2.23 *Sea $\{\xi_n\}$ la base sumante de c_0 vista en X_3. Definamos $K = \{\xi_n\}$. Es fácil ver que K es del tipo I.*

Ejemplo 2.24 *Sea $\{e_n\}$ la base canónica de c_0 vista en X_3. Definamos*

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} e_k,\ n \in \mathbb{N}$$

y $K = \{\zeta_n\}$. Entonces K es del tipo I.

Ejemplo 2.25 *Sea $\{e_n\}$ la base canónica de c_0 vista en X_3. Definamos*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) e_1 + \sum_{k=1}^{n} e_{k+1},\ n \in \mathbb{N}$$

y $K = \{x_n\}$. En este caso se puede ver que K no es del tipo I. De hecho ninguna subsucesión de $\{x_n\}$ es del tipo I.

Proposición 2.26 *Sea X cualquiera de los espacios X_i, $i = 1, 2, 3$. Tomemos $K \subset X$ no vacío, convexo, cerrado y acotado. Si K es del tipo I, entonces existe $\{z_k\} \subset K$ tal que $\{z_k\}$ es una sucesión $2aibsX_1$ con cualquier $\{\delta_n\} \subset \left(0, \sqrt{2} - 1\right)$ tal que $\delta_{n+1} \leq \delta_n,\ n \in \mathbb{N}$.*

Demostración Como K es del tipo I, existen $\{x_n\} \subset K$ sucesión convexamente cerrada y $x \in l^\infty$ tales que si $x_n = \{\alpha_k^n\}_{k=1}^\infty$ y $x = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$, entonces $||x_n - x||_s \longrightarrow 0$. Además, x_n y x cumplen (2.6). Recordemos que $||x_n - x||_s \longrightarrow 0$ implica que x_n converge coordenada a coordenada a x.

Consideremos $\{\delta_n\} \subset \left(0, \sqrt{2} - 1\right)$ tal que $\delta_{n+1} \leq \delta_n,\ n \in \mathbb{N}$. Como K es acotado, existe $B > 0$ tal que $||x_n - x||_s < B$.

Sea $N_1 \in \mathbb{N}$. Así, existe $M_1 \geq N_1$ tal que si $n \geq M_1$ entonces

$$\sum_{m=1}^{N_1} \frac{|\alpha_m^n - \alpha_m|}{2^m} < \sum_{m=N_1+1}^{\infty} \frac{|\alpha_m^n - \alpha_m|}{2^m}. \tag{2.7}$$

Definamos $a_1 = B$ y $b_1 = 1$. Sea $n_1 > M_1$. Así,

$$Q_2 \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\alpha_m^{n_1} - \alpha_m|}{2^m} = \|x_{n_1} - x\|_s < a_1.$$

Notemos que por (2.7) se tiene que $Q_2 > 0$.

Usando que $Q_2 > 0$, (2.7) y que $n_1 > M_1$ podemos elegir $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $N_2 > n_1$,

$$0 < R_2 \equiv \sum_{m=1}^{N_2} \frac{|\alpha_m^{n_1} - \alpha_m|}{2^m} < a_1, \tag{2.8}$$

$$P_2 \equiv -\sum_{m=1}^{N_1} \frac{|\alpha_m^{n_1} - \alpha_m|}{2^m} + \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{|\alpha_m^{n_1} - \alpha_m|}{2^m} > 0, \tag{2.9}$$

y que

$$\sum_{m=N_2+1}^{\infty} \frac{|\alpha_m^{n_1} - \alpha_m|}{2^m} < P_2 \left(1 - \frac{1}{1+\delta_2}\right). \tag{2.10}$$

Como $N_2 \in \mathbb{N}$, existe $M_2 \geq N_2$ tal que si $n \geq M_2$ entonces

$$\sum_{m=1}^{N_2} \frac{|\alpha_m^n - \alpha_m|}{2^m} < \sum_{m=N_2+1}^{\infty} \frac{|\alpha_m^n - \alpha_m|}{2^m}.$$

Como $||x_n - x||_s \longrightarrow 0$, por (2.8), (2.9) y (2.10), existe $n_2 > M_2$ tal que

$$0 < a_2 \equiv \sum_{m=1}^{N_2} \frac{|\alpha_m^{n_1} - \alpha_m^{n_2}|}{2^m} < a_1,$$

$$b_2 \equiv -\sum_{m=1}^{N_1} \frac{|\alpha_m^{n_1} - \alpha_m^{n_2}|}{2^m} + \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{|\alpha_m^{n_1} - \alpha_m^{n_2}|}{2^m} > 0,$$

$$\sum_{m=N_2+1}^{\infty} \frac{|\alpha_m^{n_1} - \alpha_m^{n_2}|}{2^m} < b_2 \left(1 - \frac{1}{1+\delta_2}\right),$$

y además que

$$0 < Q_3 \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\alpha_m^{n_2} - \alpha_m|}{2^m} < \frac{b_2}{2}.$$

Sea $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que $N_3 > n_2$,

$$0 < R_3 \equiv \sum_{m=1}^{N_3} \frac{|\alpha_m^{n_2} - \alpha_m|}{2^m} < \frac{b_2}{2},$$

$$P_3 \equiv -\sum_{m=1}^{N_2} \frac{|\alpha_m^{n_2} - \alpha_m|}{2^m} + \sum_{m=N_2+1}^{N_3} \frac{|\alpha_m^{n_2} - \alpha_m|}{2^m} > 0,$$

y que

$$\sum_{m=N_3+1}^{\infty} \frac{|\alpha_m^{n_2} - \alpha_m|}{2^m} < P_3 \left(1 - \frac{1}{1+\delta_3}\right).$$

Como $N_3 \in \mathbb{N}$, existe $M_3 \geq N_3$ tal que si $n \geq M_3$ entonces

$$\sum_{m=1}^{N_3} \frac{|\alpha_m^{n} - \alpha_m|}{2^m} < \sum_{m=N_3+1}^{\infty} \frac{|\alpha_m^{n} - \alpha_m|}{2^m}.$$

Como $||x_n - x||_s \longrightarrow 0$, existe $n_3 > M_3$ tal que

$$0 < a_3 \equiv \sum_{m=1}^{N_3} \frac{|\alpha_m^{n_2} - \alpha_m^{n_3}|}{2^m} < \frac{b_2}{2},$$

$$b_3 \equiv -\sum_{m=1}^{N_2} \frac{|\alpha_m^{n_2} - \alpha_m^{n_3}|}{2^m} + \sum_{m=N_2+1}^{N_3} \frac{|\alpha_m^{n_2} - \alpha_m^{n_3}|}{2^m} > 0,$$

$$\sum_{m=N_3+1}^{\infty} \frac{|\alpha_m^{n_2} - \alpha_m^{n_3}|}{2^m} < b_3 \left(1 - \frac{1}{1+\delta_3}\right),$$

y que

$$0 < Q_4 \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\alpha_m^{n_3} - \alpha_m|}{2^m} < \frac{b_3}{2}.$$

Continuando con este procedimiento, construimos sucesiones $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0, B]$ y $\{b_k\}_{k=2}^{\infty} \subset (0, 1]$ tales que $a_1 = B,\ b_1 = 1$,

$$0 < a_k = \sum_{m=1}^{N_k} \frac{\left|\alpha_m^{n_{k-1}} - \alpha_m^{n_k}\right|}{2^m},\ k \geq 2, \tag{2.11}$$

$$b_k = -\sum_{m=1}^{N_{k-1}} \frac{\left|\alpha_m^{n_{k-1}} - \alpha_m^{n_k}\right|}{2^m} + \sum_{m=N_{k-1}+1}^{N_k} \frac{\left|\alpha_m^{n_{k-1}} - \alpha_m^{n_k}\right|}{2^n} > 0,\ k \geq 2, \tag{2.12}$$

$$2a_{k+1} < b_k < a_k,\ k \geq 2$$

y

$$\sum_{m=N_k+1}^{\infty} \frac{\left|\alpha_m^{n_{k-1}} - \alpha_m^{n_k}\right|}{2^m} < b_k \left(1 - \frac{1}{1+\delta_k}\right),\ k \geq 2. \tag{2.13}$$

Notemos que $2a_{k+1} < b_k < a_k,\ k \geq 2$ implica que $a_{k+1} < a_k,\ k \geq 2$. Además por construcción se tiene que $a_2 < a_1$.

Tomemos ahora $\{t_k\} \in l^1$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = 0$. Sea $N_0 = 0$. Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_{n_k} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k \alpha_1^{n_k}, \sum_{k=1}^{\infty} t_k \alpha_2^{n_k}, \ldots\right),$$

entonces

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_{n_k}\right\|_s &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \left|\sum_{k=1}^{\infty} t_k \alpha_m^{n_k}\right| \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=N_i+1}^{N_{i+1}} \frac{1}{2^m} \left|\sum_{k=1}^{\infty} t_k \alpha_m^{n_k}\right|. \end{aligned}$$

Sea $n_0 = 0$. Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = 0$, resulta que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} t_k \alpha_m^{n_k} &= \sum_{k=1}^{\infty} t_k \left(\alpha_m^{n_k} - \alpha_m\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} t_i - \sum_{i=k+1}^{\infty} t_i \right) \left(\alpha_m^{n_k} - \alpha_m\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=i}^{\infty} t_k \right) \left(\alpha_m^{n_i} - \alpha_m^{n_{i-1}}\right).
\end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{m=1}^{N_1} \frac{1}{2^m} \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k \alpha_m^{n_k} \right| \geq$$

$$\geq \sum_{m=1}^{N_1} \frac{1}{2^m} \left(\left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k \right| \left|\alpha_m^{n_1} - \alpha_m\right| - \sum_{p=2}^{\infty} \left| \sum_{k=p}^{\infty} t_k \right| \left|\alpha_m^{n_p} - \alpha_m^{n_{p-1}}\right| \right),$$

$$\sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{1}{2^m} \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k \alpha_m^{n_k} \right| \geq$$

$$\geq \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{1}{2^m} \left(\left| \sum_{k=2}^{\infty} t_k \right| \left|\alpha_m^{n_2} - \alpha_m^{n_1}\right| - \sum_{p\neq 2}^{\infty} \left| \sum_{k=p}^{\infty} t_k \right| \left|\alpha_m^{n_p} - \alpha_m^{n_{p-1}}\right| \right),$$

$$\sum_{m=N_2+1}^{N_3} \frac{1}{2^m} \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k \alpha_m^{n_k} \right| \geq$$

$$\geq \sum_{m=N_2+1}^{N_3} \frac{1}{2^m} \left(\left| \sum_{k=3}^{\infty} t_k \right| \left|\alpha_m^{n_3} - \alpha_m^{n_2}\right| - \sum_{p\neq 3}^{\infty} \left| \sum_{k=p}^{\infty} t_k \right| \left|\alpha_m^{n_p} - \alpha_m^{n_{p-1}}\right| \right), \ldots.$$

Por lo cual, de (2.12) y (2.13) tenemos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k x_{n_k} \right\|_s \geq$$

$$\geq \left|\sum_{k=1}^{\infty} t_k\right| \left(\sum_{m=1}^{N_1} \frac{|\alpha_m^{n_1} - \alpha_m|}{2^m} - \sum_{m=N_1+1}^{\infty} \frac{|\alpha_m^{n_1} - \alpha_m|}{2^m}\right) +$$

$$+\left|\sum_{k=2}^{\infty} t_k\right| \left(-\sum_{m=1}^{N_1} \frac{|\alpha_m^{n_2} - \alpha_m^{n_1}|}{2^m} + \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{|\alpha_m^{n_2} - \alpha_m^{n_1}|}{2^m} - \sum_{m=N_2+1}^{\infty} \frac{|\alpha_m^{n_2} - \alpha_m^{n_1}|}{2^m}\right) +$$

$$+\left|\sum_{k=3}^{\infty} t_k\right| \left(-\sum_{m=1}^{N_2} \frac{|\alpha_m^{n_3} - \alpha_m^{n_2}|}{2^m} + \sum_{m=N_2+1}^{N_3} \frac{|\alpha_m^{n_3} - \alpha_m^{n_2}|}{2^m} - \sum_{m=N_3+1}^{\infty} \frac{|\alpha_m^{n_3} - \alpha_m^{n_2}|}{2^m}\right) +$$

$$+\left|\sum_{k=4}^{\infty} t_k\right| \left(-\sum_{m=1}^{N_3} \frac{|\alpha_m^{n_4} - \alpha_m^{n_3}|}{2^m} + \sum_{m=N_3+1}^{N_4} \frac{|\alpha_m^{n_4} - \alpha_m^{n_3}|}{2^m} - \sum_{m=N_4+1}^{\infty} \frac{|\alpha_m^{n_4} - \alpha_m^{n_3}|}{2^m}\right) + \ldots$$

$$\geq \left|\sum_{k=2}^{\infty} t_k\right| \left(b_2 - b_2 \left(1 - \frac{1}{1+\delta_2}\right)\right) +$$

$$+\left|\sum_{k=3}^{\infty} t_k\right| \left(b_3 - b_3 \left(1 - \frac{1}{1+\delta_3}\right)\right) +$$

$$+\left|\sum_{k=4}^{\infty} t_k\right| \left(b_4 - b_4 \left(1 - \frac{1}{1+\delta_4}\right)\right) + \ldots$$

$$= \left|\sum_{k=2}^{\infty} t_k\right| b_2 \left(\frac{1}{1+\delta_2}\right) + \left|\sum_{k=3}^{\infty} t_k\right| b_3 \left(\frac{1}{1+\delta_2}\right) + \left|\sum_{k=4}^{\infty} t_k\right| b_4 \left(\frac{1}{1+\delta_4}\right) + \ldots$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| b_k \left(\frac{1}{1+\delta_k}\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| 2a_{k+1} \left(\frac{1}{1+\delta_k}\right),$$

pues $2a_k \leq b_{k-1},\ k \geq 3$. Por otra parte, de (2.11) y de (2.13) resulta que

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_{n_k}\right\|_s &\leq \sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right|\left(a_k + b_k\left(1-\frac{1}{1+\delta_k}\right)\right)\\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right|\left(a_k + a_k\left(1-\frac{1}{1+\delta_k}\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| a_k\left(2-\frac{1}{1+\delta_k}\right)\\
&< \sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| a_k\left(1+\delta_k\right).
\end{aligned}
$$

Luego, si $z_k \equiv x_{n_k},\ k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{z_k\}$ cumple que

$$
\sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)^{-1}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| 2a_{k+1} \leq \left\|\sum_{k=1}^{\infty} t_k z_k\right\|_s \leq \sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| a_k,
$$

para toda $\{t_k\} \in l^1$ con $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = 0$. ■

Observación 2.27 *La condición (2.6) se utiliza para asegurar que $b_k > 0,\ k \geq 2$. Sin esta condición sólo podemos asegurar la desigualdad derecha de (2.2) y de (2.5).*

Corolario 2.28 *Sea X cualquiera de los espacios $X_i,\ i = 1, 2, 3$. Tomemos $K \subset X$ no vacío, convexo, cerrado y acotado. Si K es del tipo I entonces existen $C \subset K$ no vacío, convexo, cerrado y acotado y $T : C \to C$ afín, no expansivo y sin puntos fijos, más aún, T es contractivo. En consecuencia K no es ω-compacto.*

Demostración Es consecuencia de la proposiciones 2.26 y 2.21 y del corolario 2.10. ■

Aunque la sucesión $\{x_n\}$ del ejemplo 2.25 no es del tipo I, de hecho ninguna de sus subsucesiones lo es, el operador $T : C \longrightarrow C$ definido como en la demostración de la proposición 2.19, donde $C = \overline{conv}\{x_n\}$, es no expansivo. No sabemos si alguna sucesión de combinaciones convexas de los elementos de $\{x_n\}$ es una sucesión del tipo I.

2.3. El espacio $c_{0\alpha}$

Regresemos a la pregunta inicial para c_0 y para $c_{0\alpha}$, es decir, consideremos la siguiente cuestión: ¿Será cierto que, si $K \subset c_{0\alpha}$ es no vacío, convexo, cerrado, acotado y con la PPF entonces K es ω-compacto? La misma pregunta se puede hacer en $c_\alpha, \alpha \in [0,1)$.

Como en la sección anterior damos dos definiciones de sucesiones "asintóticamente isométricas" a la base sumante de c_0 con la norma $\|.\|_\alpha$.

Definición 2.29 *Sean X un espacio de Banach y $\alpha > 0$. Diremos que $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión aibsc$_{0\alpha}$ si $\{x_n\}$ es convexamente cerrada y existen $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$, $\{a_n\} \subset (0,\infty)$ y $\{\delta_n\} \subset (0, \sqrt{2}-1)$ tales que tales que $\varepsilon_n \to 0$, $\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\delta_{n+1} \leq \delta_n$, $n \in \mathbb{N}$ y*

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_n)^{-1}\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)^{-1}\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| a_n \leq \qquad (2.14)\\ \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq \\ \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_n)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| a_n, \end{aligned}$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$.

El ejemplo siguiente nos muestra que los conjuntos de sucesiones aibsc$_0$ y aibsc$_{0\alpha}$ son distintos.

Ejemplo 2.30 *Sea $\{\xi_n\}$ la base sumante de c_0.*

i) $\{\xi_n\}$ no es aibsc$_{0\alpha}$ con $\|.\|_\infty$.

ii) $\{\xi_n\}$ no es aibsc$_0$ con $\|.\|_\alpha$.

Demostración *i)* Supongamos que $\{\xi_n\}$ es una sucesión aibsc$_{0\alpha}$ con $\|.\|_\infty$, para algunas sucesiones $\{\delta_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$ y $\{a_n\}$. Tomemos $m \in \mathbb{N}$. Sea

$$\{t_n\} = e_m,$$

donde $\{e_n\}$ es la base canónica de c_0. Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n = \xi_m.$$

Así,

$$\left(\sup_{1\leq n\leq m} \frac{1}{1+\varepsilon_n}\right) + \alpha \sum_{n=1}^{m} (1+\delta_n)^{-1} a_n = \tag{2.15}$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\varepsilon_n)^{-1} \left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n)^{-1} \left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| a_n \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n\right\|_{\infty} = 1.$$

Como (2.15) es válido para toda $m \in \mathbb{N}$, al hacer $m \longrightarrow \infty$ en (2.15) resulta que

$$1 + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n)^{-1} a_n \leq 1,$$

lo cual es una contradicción pues $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n)^{-1} a_n > 0$.

ii) Supongamos que $\{\xi_n\}$ es una sucesión aibsc_0 con $\|.\|_\alpha$, para alguna sucesión $\{\varepsilon_n\}$. Recordemos que una subsucesión de una sucesión aibsc_0 es de nuevo una sucesión aibsc_0. Tomemos pues una subsucesión $\{\xi_{n_k}\}$ de $\{\xi_n\}$ de manera que $\{\xi_{n_k}\}$ y $\{\varepsilon'_k\}$ cumplen (1.1) y que $\varepsilon'_{n+1} \leq \varepsilon'_n < \alpha,\ n \in \mathbb{N}$. Esto último lo podemos hacer por la observación 1.22. Tomemos $m \in \mathbb{N}$. Sea

$$\{t_j\} = e_m.$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{\infty} t_j \xi_{n_j} = \xi_{n_m}.$$

Así,

$$1 + \alpha\left(\sum_{j=1}^{n_m} \frac{1}{2^j}\right) = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} t_j \xi_{n_j}\right\|_\alpha \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} (1+\varepsilon'_i) \left|\sum_{j=i}^{\infty} t_j\right| \leq \tag{2.16}$$

$$\leq \left(1+\varepsilon'_1\right).$$

Como (2.16) es válido para toda $m \in \mathbb{N}$, al hacer $m \longrightarrow \infty$ en (2.16) resulta que $1+\alpha \leq \left(1+\varepsilon_1^{'}\right)$, lo cual es una contradicción, pues $\varepsilon_1^{'} < \alpha$. ■

A continuación demostraremos una proposición "análoga" al teorema 2 de [5].

Proposición 2.31 *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío, convexo cerrado y acotado. Consideremos $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ tal que $\varepsilon_n < 2^{-1}4^{-n}$, $n \geq 2$. Si K contiene una sucesión aibsc$_{0\alpha}$ $\{x_n\}$ que cumple (2.14) con esta $\{\varepsilon_n\}$, entonces existen $C \subset K$ no vacío, convexo y cerrado y $T : C \to C$ afín, no expansivo y sin puntos fijos. Más aún, T es contractivo.*

Demostración Sea $\{x_n\} \subset K$ una sucesión aibsc$_{0\alpha}$ con $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ tal que $\varepsilon_n < 2^{-1}4^{-n}$, $n \geq 2$, $\{a_k\} \subset (0,\infty)$ y $\{\delta_k\} \subset (0,\sqrt{2}-1)$.Consideremos a C y T como en la proposición 2.19. Así C es no vacío, convexo cerrado y acotado y $T : C \longrightarrow C$ es afín y sin puntos fijos. Resta probar que T es contractivo. Sean $x, y \in C$, con $x \neq y$. Luego $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$, y $y = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n$, con $t_n, s_n \geq 0$, y $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1$. Sea $\beta_n = t_n - s_n$, $n \in \mathbb{N}$. Así $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 0$. Como en la proposición 2.19, se tiene que

$$T(x) - T(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x_n,$$

donde $B_1 = 0$ y $B_n = \frac{\beta_1}{2^{n-1}} + \frac{\beta_2}{2^{n-2}} + ... + \frac{\beta_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$, y que

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)\left|\sum_{j=k}^{\infty} B_j\right| a_k < \sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)^{-1}\left|\sum_{j=k}^{\infty} \beta_j\right| a_k. \tag{2.17}$$

Por otra parte, por el teorema 2 de [5] obtenemos que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_k)\left|\sum_{j=k}^{\infty} B_j\right| < \sup_{k\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_k)^{-1}\left|\sum_{j=k}^{\infty} \beta_j\right|. \tag{2.18}$$

Finalmente, de (2.17) y (2.18) concluimos que

$$\|T(x) - T(y)\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} B_k x_k\right\| \leq$$

$$\leq \sup_{k\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_k)\left|\sum_{j=k}^{\infty} B_j\right| + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)\left|\sum_{j=k}^{\infty} B_j\right| a_k <$$

$$< \sup_{k\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_k)^{-1}\left|\sum_{j=k}^{\infty} \beta_j\right| + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)^{-1}\left|\sum_{j=k}^{\infty} \beta_j\right| a_k \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k\right\| = \|x-y\|. \ \blacksquare$$

Aunque se puede ver de manera directa que $c_{0\alpha}$ no tiene la PPF con $C = \overline{conv}\{\xi_n\} = \{\sum_{n=1}^{\infty} t_n\xi_n : t_n \geq 0 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1\}$ y el operador corrimiento $Q : C \longrightarrow C$ dado por $Q\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n\xi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n\xi_{n+1}$ enunciamos el siguiente corolario.

Corolario 2.32 *Sea $\alpha \geq 0$. Entonces existen $C \subset c_{0\alpha}$ no vacío, convexo cerrado, acotado y no ω-compacto y $T : C \to C$ afín, no expansivo y sin puntos fijos.*

Demostración Sea $\{\xi_n\}$ la base sumante de c_0. Claramente $\{\xi_n\}$ cumple (2.14) con $\{a_n\} = \{\frac{1}{2^n}\}$ para toda sucesión $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ y $\{\delta_n\} \subset \left(0, \sqrt{2}-1\right)$. Luego por la proposición 2.31 existe $C \subset c_{0\alpha}$ no vacío, convexo cerrado y acotado y $T : C \to C$ afín, no expansivo, claro con la norma $\|.\|_\alpha$, y sin puntos fijos. Por último, del teorema de Maurey, pues T es no expansivo con la norma $\|.\|_\infty$, o por el teorema de Eberlein Smulian resulta que C no es ω-compacto en c_0. Luego C no es ω-compacto en $c_{0\alpha}$. $\blacksquare$

Consideremos ahora la condición de que $\{a_k\} \subset (0,\infty)$ y $a_{k+1} \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$ en lugar de la condición de que $\{a_k\} \subset (0,\infty)$ y $\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$. Damos entonces la segunda definición de sucesión asintóticamente isométrica a la base sumante en $c_{0\alpha}$.

Definición 2.33 *Sean X un espacio de Banach y $\alpha \geq 0$. Diremos que $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión $2aibsc_{0\alpha}$ si $\{x_n\}$ es convexamente cerrada y existen $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$, $\{a_n\} \subset (0,\infty)$ y $\{\delta_n\} \subset \left(0, \sqrt{2}-1\right)$ tales que $\varepsilon_n \to 0$,*

$a_{n+1} \leq a_n,\ n \in \mathbb{N},\ \delta_{n+1} \leq \delta_n,\ n \in \mathbb{N}$ y

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_n)^{-1}\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)^{-1}\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| 2a_{n+1} \leq \tag{2.19}$$

$$\leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_n)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| a_n,$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

Procediendo como en la prueba del inciso i) del ejemplo 2.30 obtenemos lo siguiente.

Ejemplo 2.34 *$\{\xi_n\}$ no es $2aibsc_{0\alpha}$ con $\|.\|_\infty$.*

Nuevamente, la siguiente proposición es un "análogo" del teorema 2 de [5].

Proposición 2.35 *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío, convexo cerrado y acotado. Consideremos $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ tal que $\varepsilon_n < 2^{-1}4^{-n}$, $n \geq 2$. Si K contiene una sucesión $2aibsc_{0\alpha}$ $\{x_n\}$ que cumple (2.19) con esta $\{\varepsilon_n\}$, entonces existen $C \subset K$ no vacío, convexo y cerrado y $T : C \to C$ afín, no expansivo y sin puntos fijos. Más aún, T es contractivo.*

Demostración Es análoga a la de la proposición 2.31, sólo hay que usar la proposición 2.21 en lugar de la proposición 2.19. ■

La pregunta ahora es la siguiente. Dado $K \subset c_{0\alpha}$ no vacío, convexo, cerrado, acotado y no ω-compacto, ¿Existirá $\{x_n\} \subset K$ tal que $\{x_n\}$ es una sucesión aibs$c_{0\alpha}$ o una sucesión 2aibs$c_{0\alpha}$? Antes de dar alguna respuesta tengamos en cuenta lo siguiente.

Consideremos $K \subset c_{0\alpha}$ no vacío, convexo, cerrado y acotado. Supongamos que K no es ω-compacto. Entonces K no es ω-compacto en c_0. Luego, por el teorema de Eberlein-Smulian, existe $\{x_k\} \subset K$ tal que ninguna de sus subsucesiones converge débilmente en c_0. Por otra parte, puesto que K

es acotado con $\|.\|_\alpha$, entonces K es acotado con $\|.\|_\infty$. Consideremos a la representación de Riesz $R : l^\infty \longrightarrow (l^1)^*$. Como $\{x_k\}$ es acotado con $\|.\|_\infty$, entonces $R(\{x_k\}) \subset (l^1)^*$ es acotado. Así, $R(\{x_k\})$ está contenido en una bola cerrada B de $(l^1)^*$. Como l^1 es separable entonces B es ω^*-secuencialmente compacto. Así, existen $\{x_{n_k}\}$ subsucesión de $\{x_k\}$ y $x \in l^\infty$ tales que

$$Rx_{n_k} \underset{k\longrightarrow\infty}{\overset{\omega^*}{\longrightarrow}} Rx.$$

Luego

$$R(x_{n_k})(z) \underset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} R(x)(z),$$

para cada $z \in l^1$. Lo cual implica que $x \notin c_0$, de lo contrario se tendría que $\{x_{n_k}\}$ converge débilmente a x en c_0. Además, $\{x_{n_k}\}$ converge coordenada a coordenada a x. Seguiremos escribiendo x_k en lugar de x_{n_k}. En resumen, existen $\{x_k\} \subset K \subset c_0$ y $x \in l^\infty \backslash c_0$ tales que $\{x_k\}$ converge coordenada a coordenada a x.

Como en la demostración del teorema 4 de [5], existen $\{y_n\} \subset K$ convexamente cerrada y $\{\varepsilon_n\} \subset (0, \infty)$ con $\varepsilon_n \to 0$ y $\varepsilon_n < 2^{-1}4^{-n}$, $n \geq 2$, tales que $\{y_n\}$ y $\{\varepsilon_n\}$ cumplen (1.1) de la definición 1.18. Digamos que $y_n = \{\alpha_k^n\}_{k=1}^\infty$ y $x = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$. Sea $S(K)$ el conjunto de tales $\{y_n\}$.

Cada término de la sucesión $\{y_n\}$ se obtiene mediante un promedio de los términos de una subsucesión de $\{x_n\}$. Así se sigue cumpliendo que $\{y_n\}$ converge coordenada a coordenada a x.

Definición 2.36 *Sea $K \subset c_{0\alpha}$ no vacío, convexo, cerrado y acotado, y supongamos que K no es ω-compacto. Diremos que K es del tipo A, si existe $\{y_k\} \in S(K)$ tal que $\{y_k\}$ cumple la condición (2.6), es decir, si*

$$\begin{aligned}(\forall\, N \;\in\; \mathbb{N})&(\exists\, M \geq N)(\forall\, m \geq M)\\ &\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{|\alpha_n - \alpha_n^m|}{2^n} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\alpha_n - \alpha_n^m|}{2^n}\right).\end{aligned}$$

Ejemplo 2.37 *Sea $\{\xi_n\}$ la base sumante de c_0. Definamos $K = \overline{conv}\ \{\xi_n\}$. Así, K (visto en $c_{0\alpha}$ o en c_0) es del tipo A.*

Proposición 2.38 *Sea $K \subset c_{0\alpha}$ no vacío, convexo, cerrado y acotado, y supongamos que K no es ω-compacto. Si K es del tipo A, entonces existe $\{z_k\} \subset K$ sucesión $2aibsc_{0\alpha}$ con $\{\varepsilon_n\} \subset (0, \infty)$ tal que $\varepsilon_n < 2^{-1}4^{-n}$, $n \geq 2$.*

Demostración Puesto que K es del tipo A, existe $\{y_k\} \in S(K)$ tal que $\{y_k\}$ cumple la condición (2.6).

Como en la demostración de la proposición 2.26 se tiene que existe $\{z_n\} \subset K$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)^{-1}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| 2a_{k+1} \leq \left\|\sum_{k=1}^{\infty} t_k z_k\right\|_s \leq \sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| a_k,$$

para algunas $\{a_k\} \subset (0,\infty)$ y $\{\delta_k\} \subset \left(0, \sqrt{2}-1\right)$ con $a_{k+1} \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$ y $\delta_{k+1} \leq \delta_k,\ k \in \mathbb{N}$, para cada $\{t_k\} \in l^1$ con $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = 0$. De hecho $\{z_k\}$ es una subsucesión de $\{y_k\}$. Así, $\{z_k\}$ es convexamente cerrada.

Por otra parte, por la observación 1.21 podemos encontrar una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ de $\{y_k\}$ cumple (1.1) con una nueva sucesión $\left\{\varepsilon_k^{'}\right\} \subset (0,\infty)$ con $\varepsilon_k^{'} < 2^{-1}4^{-k},\ \ k \geq 2$. Luego

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_k^{'})^{-1}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| \leq \left\|\sum_{k=1}^{\infty} t_k z_k\right\|_{\infty} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_k^{'})\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right|,$$

para toda $\{t_k\} \in l^1$.

Por lo cual

$$\begin{aligned} \sup_{k\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_k^{'})^{-1}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)^{-1}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| 2a_{k+1} \leq \\ \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_k z_k\right\| \leq \\ \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_k^{'})\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| a_k, \end{aligned}$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$, con $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = 0$. ■

De la proposición 2.38 y de la proposición 2.35 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.39 *Sea $\alpha \geq 0$. Tomemos $K \subset c_{0\alpha}$ no vacío, convexo, cerrado y acotado. Supongamos además que K no es ω-compacto. Si K es del tipo A entonces existen $C \subset K$ no vacío, convexo y cerrado y $T : C \to C$ afín, no expansivo y sin puntos fijos. Más aún, T es contractivo.*

Veamos ahora qué podemos decir en el espacio c_α.

Sea $\alpha > 0$. Definamos $\pi : c \longrightarrow \mathbb{K}$ como $\pi(\{x_k\}) = \lim x_k$. Así, $\pi \in c^*$. Tomemos $a \in \mathbb{K}$ y consideremos al conjunto $\pi^{-1}(\{a\})$. Definamos $U : \pi^{-1}(\{a\}) \longrightarrow c_0$ por $U(\{x_i\}) = \{x_i - a\}$. En la demostración del corolario 1.27 se mostró que U es afín y que

$$U : \left(\pi^{-1}(\{a\}), \sigma(c, c^*)_{|_{\pi^{-1}(\{a\})}}\right) \longrightarrow (c_0, \sigma(c_0, c_0^*))$$

es un homeomorfismo. Puesto que $\|.\|_\alpha$ y $\|.\|_\infty$ son equivalentes, también se tiene que $\pi \in c_\alpha^*$ y que

$$U : \left(\pi^{-1}(\{a\}), \sigma(c_\alpha, c_\alpha^*)_{|_{\pi^{-1}(\{a\})}}\right) \longrightarrow (c_{0\alpha}, \sigma(c_{0\alpha}, c_{0\alpha}^*))$$

es un homeomorfismo.

Consideremos $K \subset c_\alpha$ no vacío, convexo, cerrado y acotado. Supongamos que K no es ω-compacto. Sea

$$Q(K) = \left\{a \in \mathbb{K} : \pi^{-1}(\{a\}) \cap K \text{ no es } \omega\text{-compacto en } c_\alpha\right\}.$$

Como K no es ω-compacto en c_α, entonces por el lema 6 de [5] se tiene que $Q(K) \neq \phi$.

Definición 2.40 *Sea $K \subset c_\alpha$ no vacío, convexo, cerrado y acotado, y supongamos que K no es ω-compacto. Diremos que K es del tipo A', si existe $a \in Q(K)$ tal que $U\left(\pi^{-1}(\{a\}) \cap K\right)$ es del tipo A.*

Ejemplo 2.41 *Sea $\{\xi_n\}$ la base sumante de c_0. Definamos $K = \overline{conv}\ \{\xi_n\}$. Así, $K \subset c_\alpha$ es del tipo A'.*

Proposición 2.42 *Sea $\alpha > 0$. Tomemos $K \subset c_\alpha$ no vacío, convexo, cerrado y acotado. Supongamos además que K no es ω-compacto. Si K es del tipo A' entonces existen $C \subset K$ no vacío, convexo y cerrado y $T : C \to C$ afín, no expansivo y sin puntos fijos. Más aún, T es contractivo.*

Demostración Supongamos que K es del tipo A'. Puesto que K es del tipo A', existe $a \in Q(K)$ tal que $U\left(\pi^{-1}(\{a\}) \cap K\right)$ es del tipo A. Luego, por el corolario 2.39, existen $D \subset U\left(\pi^{-1}(\{a\}) \cap K\right)$ no vacío, convexo y cerrado y $R : D \rightarrow D$ afín, no expansivo y sin puntos fijos. Más aún, R es contractivo. En consecuencia $C \equiv U^{-1}(D)$ es un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de $\pi^{-1}(\{a\}) \cap K \subset K$ y el operador $T \equiv U^{-1}RU : C \longrightarrow C$ es no expansivo y no tiene puntos fijos. ∎

Observación 2.43 *Si en la definición de las normas $\|.\|_s$ y $\|.\|_\alpha$ sustituimos la sucesión $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ por una sucesión $\{u_n\} \subset (0, \infty)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ y $\sum_{n=m}^{\infty} u_n \leq u_m$, entonces se obtienen resultados análogos a los demostrados en este capítulo.*

Capítulo 3

Otras normas en c_0

En este capítulo estudiaremos varias normas, unas relacionadas con la norma $\|.\|_s$ y otras con la norma $||.||_\alpha$, además veremos cuáles propiedades de las normas $\|.\|_s$ y $||.||_\alpha$ se siguen cumpliendo para las normas en cuestión. Teniendo en cuenta el comportamiento de la base sumante de c_0 con cada norma, definiremos varios tipos de sucesiones que, en caso de que existan, permitirán construir conjuntos no vacíos, convexos, cerrados y acotados y operadores no expansivos y sin puntos fijos definidos en estos conjuntos.

3.1. La norma $||.||_*$

Comenzaremos por definir la norma $||.||_*$ en el espacio de sucesiones acotadas. Para cada sucesión acotada $\{x_n\} \subset \mathbb{K}$, definamos

$$\|\{x_n\}\|_* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \, .$$

Definamos a Y_1 como el espacio de las sucesiones de escalares convergentes a cero equipado con la norma $||.||_*$, Y_2 como el espacio de las sucesiones de escalares convergentes equipado con la norma $||.||_*$ y a Y_3 como el espacio de las sucesiones de escalares acotadas equipado con la norma $||.||_*$.

Notemos que $||.||_* \leq ||.||_\infty$ y que $||.||_*$ y $||.||_\infty$ no son equivalentes.

Al igual que en los espacios X_i, $i = 1, 2, 3$ definidos en la sección 2,2 se cumplen los siguientes resultados, que se prueban análogamente.

Lema 3.1 *Sea Y cualquiera de los espacios Y_i, $i = 1, 2, 3$. Tomemos $\{x_n\} \subset Y$ y $x \in Y$. Entonces*

i) Si $||x_n - x||_* \longrightarrow 0$ entonces $\{x_n\}$ converge coordenada a coordenada a x.

ii) Si $\{x_n\}$ converge coordenada a coordenada a x y $\{x_n\}$ es acotada con respecto a $||.||_\infty$, entonces $||x_n - x||_* \longrightarrow 0$.

Corolario 3.2 *Sea Y cualquiera de los espacios Y_i, $i = 1, 2, 3$. Tomemos $K \subset Y$. Si K es acotado con respecto a $||.||_\infty$ y toda sucesión en K posee una subsucesión que converge coordenada a coordenada a algún $x \in K$, entonces K es compacto.*

Lema 3.3 *Sea Y cualquiera de los espacios Y_i, $i = 1, 2, 3$. Tomemos $\{x_n\} \subset Y$ y $x \in Y$. Si $x_n \overset{\omega}{\longrightarrow} x$ y $\{x_n\}$ es acotada con respecto a $||.||_\infty$ entonces $||x_n - x||_* \longrightarrow 0$.*

Corolario 3.4 *Sea Y cualquiera de los espacios Y_i, $i = 1, 2, 3$. Tomemos $K \subset Y$ ω-secuencialmente compacto. Si K es acotado con respecto a $||.||_\infty$ entonces K es compacto.*

Proposición 3.5 *Sea Y cualquiera de los espacios Y_i, $i = 1, 2, 3$. Entonces*

i) Y no es completo.

ii) $\overline{Y} = Y_3$. (La cerradura es en Y_3).

iii) $\overline{Y_1} = Y_2$. (Aquí la cerradura es en Y_2).

Sea Y cualquiera de los espacios Y_i, $i = 1, 2, 3$. La pregunta ahora es si Y tiene la ω-PPF. La respuesta es que sí, como lo veremos a continuación. Sea $X_n = (\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Consideremos al espacio $X = (\prod_{n=1}^{\infty} X_n, \|.\|_1)$. Sea

$$
\begin{aligned}
d_1 &= (1, (0,0), (0,0,0), (0,0,0,0), ...), \\
d_2 &= (0, (1,0), (0,0,0), (0,0,0,0), ...), \\
d_3 &= (0, (0,1), (0,0,0), (0,0,0,0), ...), \\
d_4 &= (0, (0,0), (1,0,0), (0,0,0,0), ...), \\
d_5 &= (0, (0,0), (0,1,0), (0,0,0,0), ...), \\
d_6 &= (0, (0,0), (0,0,1), (0,0,0,0), ...), ...
\end{aligned}
$$

Notemos que la sucesión $\{d_n\}$ es una base incondicional de X y que la constante de incondicionalidad de X es 1, en consecuencia (véase el teorema 9.10 de [12]) X tiene la ω-PPF.

Definamos $\Lambda : Y \longrightarrow X$ por

$$\Lambda(\{x_n\}) = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2^2}(x_1, x_2), \frac{1}{2^3}(x_1, x_2, x_3), ...\right).$$

Notemos que Λ es lineal. Además, para cada $\{x_n\} \in Y$, se tiene que

$$\|\Lambda\{x_n\}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = \|x_n\|_* .$$

Por lo cual $\Lambda : Y \longrightarrow X$ es una isometría lineal. Luego, del lema 2.9 obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.6 *Sea Y cualquiera de los espacios Y_i, $i = 1, 2, 3$. Entonces Y tiene la ω-PPF.*

Consideremos la siguiente definición.

Definición 3.7 *Sea X un espacio de Banach. Diremos que $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión aibs$||.||_*$, si $\{x_n\}$ es convexamente cerrada y existen $\{a_k\} \subset (0,\infty)$ y $\{\delta_k\} \subset (0, \sqrt{2}-1)$ tales que $2a_{k+1} \leq a_k$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta_{k+1} \leq \delta_k$, $k \in \mathbb{N}$ y*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)^{-1} a_n \max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| &\leq \\ \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| &\leq \\ \leq \sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n) a_n \max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right|&, \end{aligned} \tag{3.1}$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

Proposición 3.8 *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío, convexo cerrado y acotado. Si K contiene una sucesión aibs$||.||_*$, entonces existen $C \subset K$ no vacío, convexo, cerrado y acotado y $T : C \to C$ afín, no expansivo y sin puntos fijos. Más aún, T es contractivo.*

Demostración Sea $\{x_n\} \subset K$ una sucesión aibs$||.||_*$ con algunas $\{a_k\} \subset (0, \infty)$ y $\{\delta_k\} \subset (0, \sqrt{2}-1)$. Sean C y T como en la proposición 2.19. Así, C es no vacío, convexo cerrado y acotado, $T(C) \subset C$, T es afín y T no tiene puntos fijos. Resta mostrar que T es contractivo. Sean $x, y \in C$, con $x \neq y$. Luego $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$, y $y = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n$, con $t_n, s_n \geq 0$, y $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1$. Sea $\beta_n = t_n - s_n,\ n \in \mathbb{N}$. Así $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 0$. Nuevamente, como en la proposición 2.19 se tiene que

$$T(x) - T(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x_n,$$

donde $B_1 = 0$ y $B_n = \frac{\beta_1}{2^{n-1}} + \frac{\beta_2}{2^{n-2}} + ... + \frac{\beta_{n-1}}{2},\ n \geq 2$. Además $\sum_{j=1}^{\infty} B_j = \sum_{j=2}^{\infty} B_j = 0$ y si $k \geq 3$ se tiene que

$$\left|\sum_{j=k}^{\infty} B_j\right| \leq \frac{\left|\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{k-2}\right|}{2} + ... + \frac{|\beta_1 + \beta_2|}{2^{k-3}} + \frac{|\beta_1|}{2^{k-2}}$$

y entonces para $k \geq 3$, como $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = 0$, resulta que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=k}^{\infty} B_j\right| &\leq \frac{\left|\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{k-2}\right|}{2} + ... + \frac{|\beta_1 + \beta_2|}{2^{k-3}} + \frac{|\beta_1|}{2^{k-2}} \\
&= \frac{\left|\sum_{j=k-1}^{\infty} \beta_j\right|}{2} + ... + \frac{\left|\sum_{j=3}^{\infty} \beta_j\right|}{2^{k-3}} + \frac{\left|\sum_{j=2}^{\infty} \beta_j\right|}{2^{k-2}} \\
&\leq \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{k-2}}\right] \max_{1 \leq m \leq k-1} \left|\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j\right|.
\end{aligned}$$

Puesto que $\delta_k < \sqrt{2} - 1,\ k \in \mathbb{N}$, entonces $1 + \delta_k < \frac{2}{1+\delta_k},\ k \in \mathbb{N}$. Luego, como $\delta_{k+1} \leq \delta_k,\ k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \delta_n) a_n \max_{1 \leq k \leq n} \left|\sum_{j=k}^{\infty} B_j\right| \\
&\leq \sum_{n=3}^{\infty} (1 + \delta_n) a_n \max_{1 \leq k \leq n} \left(\left[\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{k-2}}\right] \max_{1 \leq m \leq k-1} \left|\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j\right|\right) \\
&\leq \sum_{n=3}^{\infty} (1 + \delta_n) a_n \left[\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-2}}\right] \max_{1 \leq m \leq n-1} \left|\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \sum_{n=3}^{\infty}(1+\delta_{n-1})a_n \max_{1\le m\le n-1}\left|\sum_{j=m}^{\infty}\beta_j\right| \\
&\le \sum_{n=3}^{\infty}(1+\delta_{n-1})^{-1}2a_n \max_{1\le m\le n-1}\left|\sum_{j=m}^{\infty}\beta_j\right| \\
&\le \sum_{n=3}^{\infty}(1+\delta_{n-1})^{-1}a_{n-1} \max_{1\le m\le n-1}\left|\sum_{j=m}^{\infty}\beta_j\right| \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}(1+\delta_{n})^{-1}a_{n} \max_{1\le m\le n}\left|\sum_{j=m}^{\infty}\beta_j\right| \\
&\le \|x-y\|,
\end{aligned}
$$

por lo cual, T es contractivo. ■

Puesto que la base sumante de c_0 es una sucesión aibs$||.||_*$ en Y_i, $i = 1,2,3$, de la proposición anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.9 *Sea Y cualquiera de los espacios Y_i, $i = 1,2,3$. Entonces Y no tiene la PPF.*

3.2. La norma $\|.\|_{\alpha *}$

Sea $\alpha \ge 0$. En el espacio de sucesiones acotadas definamos la norma $\|.\|_{\alpha *}$ de la siguiente manera;

$$\|x\|_{\alpha *} = \|x\|_{\infty} + \alpha \|x\|_{*}, \ x \in l^{\infty}.$$

Notemos que $\|.\|_{\infty}$ y $\|.\|_{\alpha *}$ son equivalentes, pues

$$\|x\|_{\infty} \le \|x\|_{\alpha *} \le (1+\alpha)\|x\|_{\infty}, \ x \in l^{\infty}.$$

Como veremos a continuación $(c_0, ||.||_{\alpha *})$ satisface la condición de Opial, cuya definición damos a continuación, y en consecuencia $(c_0, ||.||_{\alpha *})$ tiene la ω-PPF.

Definición 3.10 *Diremos que un espacio de Banach X satisface la condición de Opial si para toda sucesión que converge débilmente a cero $\{x_n\} \subset X$ y para toda $x \in X,\ x \neq 0$ se tiene que*

$$\liminf_n \|x_n\| < \liminf_n \|x_n - x\| \,. \tag{3.2}$$

La prueba de que $(c_0, ||.||_{\alpha *})$ satisface la condición de Opial es similar a la demostración del teorema 3.3 de [8] cuya prueba seguiremos.

Proposición 3.11 *Para $\alpha > 0$, $(c_0, ||.||_{\alpha *})$ satisface la condición de Opial.*

Demostración Sea $W = (c_0, ||.||_{\alpha *})$. Tomemos $\{x_n\} \subset W$ tal que $x_n \overset{\sigma(W,W^*)}{\longrightarrow} 0$. Digamos que $x_n = \{b_k^n\}_{k=1}^{\infty}$, $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $x_n \overset{\sigma(W,W^*)}{\longrightarrow} 0$ y $\|x\|_* \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_{\alpha *}$, $x \in c_0$, entonces $\{x_n\}$ es acotada con $\|.\|_\infty$ y $x_n \overset{\sigma(Y_1,(Y_1)^*)}{\longrightarrow} 0$, donde $Y_1 = (c_0, ||.||_*)$. En consecuencia, por el lema 3.3 resulta que $||x_n||_* \longrightarrow 0$. Por lo cual

$$\liminf_n \|x_n\|_\infty = \liminf_n \|x_n\|_\infty + \alpha \lim_n \|x_n\|_* = \liminf_n \|x_n\|_{\alpha *} \,. \tag{3.3}$$

Recordemos que como $||x_n||_* \longrightarrow 0$, por $i)$ del lema 3.1 se tiene que x_n converge coordenada a coordenada al vector cero. Al pasar, de ser necesario, a una subsucesión de $\{x_n\}$, podemos suponer que existen $0 < k_1 < k_2 < ...$ tales que $||x_n||_\infty = \left|b_{k_n}^n\right|$.

Sea $x \in W$ con $x \neq 0$. Digamos que $x = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Notemos que

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_{\alpha *} &= \|x_n - x\|_\infty + \alpha \|x_n - x\|_* \\ &\geq \|x_n - x\|_\infty + \alpha \|x\|_* - \alpha \|x_n\|_* \,. \end{aligned}$$

Luego,

$$\liminf_n \|x_n - x\|_{\alpha *} \geq \liminf_n \|x_n - x\|_\infty + \alpha \|x\|_* \,. \tag{3.4}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que $b_n \longrightarrow 0$, tomemos $J \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n| < \varepsilon,\ n \geq J$. Además tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $k_n > J$. Así, si $n > N$ se tiene que

$$\|x_n - x\|_\infty \geq \left|b_{k_n}^n - b_{k_n}\right| \geq \left|b_{k_n}^n\right| - \varepsilon = ||x_n||_\infty - \varepsilon.$$

En consecuencia

$$\liminf_n \|x_n - x\|_\infty \geq \liminf_n \|x_n\|_\infty . \tag{3.5}$$

Por lo cual, de (3.4), (3.5) y (3.3) resulta que

$$\liminf_n \|x_n - x\|_{\alpha *} \geq \liminf_n \|x_n\|_{\alpha *} + \alpha \|x\|_* > \liminf_n \|x_n\|_{\alpha *} . \quad \blacksquare$$

Consideremos las siguientes definiciones.

Definición 3.12 *Sean X un espacio de Banach y $\alpha \geq 0$. Diremos que $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión aibsc$_{0\alpha *}$ si $\{x_n\}$ es convexamente cerrada y existen $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$, $\{a_n\} \subset (0,\infty)$ y $\{\delta_n\} \subset (0, \sqrt{2}-1)$ tales que $\varepsilon_n \to 0$, $2a_{n+1} \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\delta_{n+1} \leq \delta_n$, $n \in \mathbb{N}$ y*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\varepsilon_n)^{-1} \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right| + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n)^{-1} a_n \max_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{j=k}^{\infty} t_j \right| \leq \tag{3.6}$$

$$\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\varepsilon_n) \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right| + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n) a_n \max_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{j=k}^{\infty} t_j \right| ,$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

Definición 3.13 *Sean $\alpha > 0$, $C \in (0,1)$ y $\{x_n\}$ una sucesión aibsc$_{0\alpha *}$ para algunas $\{\delta_k\}$, $\{\varepsilon_n\}$ y $\{a_n\}$. Diremos que la sucesión $\{x_n\}$ es C-sumante si $\left| a_n - \frac{1}{2^n} \right| < C$, $n \in \mathbb{N}$ y que el comportamiento asintótico de $\{x_n\}$ es C-fuerte si $\{x_n\}$ es C-sumante,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n)^{-1} a_n > 1 - C$$

y

$$1 - \frac{1}{1+\varepsilon_1} < \alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n)^{-1} a_n - (1-C) \right) . \tag{3.7}$$

El concepto de C-sumante está motivado por el hecho que deseamos que $\{x_n\}$ se comporte como la base sumante de c_0 con la norma $\|.\|_\alpha$. Mientras más pequeño sea C, más parecido será el comportamiento de $\{x_n\}$ con $\|.\|$ al comportamiento de $\{\xi_n\}$ con $\|.\|_\alpha$.

El ejemplo siguiente nos muestra que el conjunto de sucesiones aibs$c_{0\alpha*}$ y los conjuntos de sucesiones aibsc_0 y aibs$c_{0\alpha}$ son distintos. En general, cuando consideramos sucesiones aibsc_0, aibs$c_{0\alpha}$, 2aibs$c_{0\alpha}$ y aibs$c_{0\alpha*}$ estamos interesados en sucesiones cuyo comportamiento asintótico es rápido, es decir, las sucesiones $\{\varepsilon_n\}$ y $\{\delta_n\}$ involucradas en las definiciones de las sucesiones aibsc_0, aibs$c_{0\alpha}$, 2aibs$c_{0\alpha}$ y aibs$c_{0\alpha*}$ convergen rápidamente a cero. Como veremos a continuación en los incisos $i)$ y $ii)$ del ejemplo siguiente necesitaremos un comportamiento asintótico $\frac{1}{2}$-fuerte.

Ejemplo 3.14 *Sea $\{\xi_n\}$ la base sumante de c_0.*

$i)$ $\{\xi_n\}$ no es aibs$c_{0\alpha*}$ con $\|.\|_\infty$.

$ii)$ $\{\xi_n\}$ no es aibs$c_{0\alpha*}$ con $\|.\|_\alpha$ si el comportamiento asintótico de $\{\xi_n\}$ es $\frac{1}{2}$-fuerte.

$iii)$ $\{\xi_n\}$ no es aibsc_0 con $\|.\|_{\alpha*}$.

$iv)$ $\{\xi_n\}$ no es aibs$c_{0\alpha}$, ni 2aibs$c_{0\alpha}$ con $\|.\|_{\alpha*}$ si el comportamiento asintótico de $\{\xi_n\}$ es $\frac{1}{2}$-fuerte.

Demostración $i)$ Es análoga a la demostración del inciso $i)$ del ejemplo 2.30 con

$$\left(\max_{1\le n\le m}\frac{1}{1+\varepsilon_n}\right)+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)^{-1}a_n=$$
$$=\sup_{n\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_n)^{-1}\left|\sum_{j=n}^{\infty}t_j\right|+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)^{-1}a_n\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{j=k}^{\infty}t_j\right|\le$$
$$\le\left\|\sum_{n=1}^{\infty}t_n\xi_n\right\|_\infty=1$$

en lugar de (2.15).

ii) Supongamos que $\{\xi_n\}$ es una sucesión aibsc$_{0\alpha *}$ con $\|.\|_\alpha$, para algunas sucesiones $\{\delta_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$ y $\{a_n\}$ y que el comportamiento asintótico de $\{\xi_n\}$ es $\frac{1}{2}$-fuerte. Fijemos $K_1 > 0$ y definamos

$$M = K_1 \left(\frac{1}{1+\varepsilon_1} + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n)^{-1} a_n - 1 - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Puesto que el comportamiento asintótico de $\{\xi_n\}$ es $\frac{1}{2}$-fuerte se tiene que $M > 0$. Elijamos $K_n > 0$ tal que $K_{n+1} \leq K_n,\ n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{K_1}{1+\varepsilon_1} \geq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\varepsilon_n)^{-1} \right) K_n$$

y

$$\alpha \sum_{n=2}^{\infty} \frac{K_n}{2^n} < M. \tag{3.8}$$

Definamos

$$\{t_n\} = (K_1 - K_2, K_2 - K_3, ...).$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n = (K_1, K_2, K_3, ...).$$

Así,

$$\frac{K_1}{1+\varepsilon_1} + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n)^{-1} a_n K_1 \leq$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\varepsilon_n)^{-1} \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right| + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n)^{-1} a_n \max_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{j=k}^{\infty} t_j \right| \leq$$
$$\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n \right\|_\alpha = K_1 + \alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{2^n} \right).$$

En consecuencia

$$\frac{K_1}{1+\varepsilon_1} + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n)^{-1} a_n K_1 \leq K_1 + \alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{2^n} \right).$$

Por lo tanto

$$M = K_1\left(\frac{1}{1+\varepsilon_1}+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)^{-1}a_n-1-\frac{\alpha}{2}\right)\leq\alpha\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{K_n}{2^n}\right).$$

Lo cual contradice (3.8).

iii) Es análoga a la demostración del inciso *ii*) del ejemplo 2.30 con

$$1+\alpha\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\right)=\left\|\sum_{j=1}^{\infty}t_j\xi_{n_j}\right\|_{\alpha*}\leq\sup_{i\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_i^{'})\left|\sum_{j=i}^{\infty}t_j\right|\leq$$
$$\leq\max_{1\leq n\leq m}\left(1+\varepsilon_1^{'}\right).$$

en lugar de (2.16).

iv) Es análoga al inciso *ii*). ■

Del teorema 2 de [5] y de la proposición 3.8 obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.15 *Sean X un espacio de Banach y $K\subset X$ no vacío, convexo cerrado y acotado. Consideremos $\{\varepsilon_n\}\subset(0,\infty)$ tal que $\varepsilon_n<2^{-1}4^{-n}$, $n\geq 2$. Si K contiene una sucesión aibsc$_{0\alpha*}$ que cumple (3.6) con esta $\{\varepsilon_n\}$, entonces existen $C\subset K$ no vacío, convexo y cerrado y $T:C\to C$ afín, no expansivo y sin puntos fijos. Más aún, T es contractivo.*

Puesto que la base sumante de c_0 es una sucesión aibsc$_{0\alpha*}$ en $(c_0,\|.\|_{\alpha*})$, de la proposición anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.16 $(c_0,\|.\|_{\alpha*})$ *no tiene la PPF.*

3.3. La norma $\|.\|_D$

En el espacio de sucesiones convergentes a cero definamos la norma $\|.\|_D$ de la siguiente manera;

$$\|x\|_D = \sup_{1\leq i\leq j} |x_i - x_j| = \sup_{i,j\in\mathbb{N}} |x_i - x_j|\,,\ x = \{x_i\} \in c_0.$$

Como $\|x\|_\infty \leq \|x\|_D \leq 2\,\|x\|_\infty\,,\ x \in c_0$ entonces $\|.\|_\infty$ y $\|.\|_D$ son equivalentes.

En c_0 con la norma $\|.\|_D$ tendremos dos tipos distintos de sucesiones que nos permitirán construir conjuntos no vacíos, convexos, cerrados y acotados y operadores no expansivos y sin puntos fijos definidos en estos conjuntos.

En [10] J. García-Falset probó que si X es un espacio de Banach con base fuertemente bimonótona y con la propiedad débil de Banach Saks, entonces X tiene la ω-PPF. A continuación veremos que la base canónica de c_0 es fuertemente bimonótona en $(c_0, \|.\|_D)$ y que $(c_0, \|.\|_D)$ tiene la propiedad débil de Banach-Saks, con lo cual se tendrá que X tiene la ω-PPF.

Definición 3.17 *Sea X un espacio de Banach y $\{x_n\} \subset X$ una base de X. Diremos que $\{x_n\}$ es fuertemente bimonótona si para todo $a, b \in \mathbb{N}$ con $a \leq b$ se tiene que*

$$\left\|P_{[a,b]}\right\| = \left\|I - P_{[a,b]}\right\| = 1,$$

donde $P_{[a,b]}\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right) = \sum_{n=a}^{b} t_n x_n$, para todo $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \in X$.

Definición 3.18 *Sea X un espacio de Banach. Diremos que X tiene la propiedad débil de Banach-Saks si para toda sucesión $\{x_n\} \subset X$ con $x_n \xrightarrow{\omega} 0$ existe $\{x_{n_k}\}$ subsucesión de $\{x_n\}$ tal que*

$$S_N\left(x_{n_k}\right) \equiv \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_{n_k}$$

converge en norma.

Proposición 3.19 *La base canónica de c_0, $\{e_n\}$, es fuertemente bimonótona en $(c_0, \|.\|_D)$ y $(c_0, \|.\|_D)$ tiene la propiedad débil de Banach-Saks.*

Demostración Sean $a, b \in \mathbb{N}$ con $a \leq b$. Notemos que $P_{[a,b]}$ y $I - P_{[a,b]}$ son proyecciones en $(c_0, \|.\|_D)$, en consecuencia $\left\|P_{[a,b]}\right\| \leq 1$ y $\left\|I - P_{[a,b]}\right\| \leq 1$. Que $\left\|P_{[a,b]}\right\| = \left\|I - P_{[a,b]}\right\| = 1$ resulta de que

$$\left\|P_{[a,b]}(e_a)\right\|_D = 1 \text{ y } \left\|\left(I - P_{[a,b]}\right)(e_{b+1})\right\|_D = 1.$$

Así, $\{e_n\}$ es fuertemente bimonótona. Que $(c_0, \|.\|_D)$ tiene la propiedad débil de Banach-Saks se sigue de que c_0 la tiene y de que $\|.\|_D$ y $\|.\|_\infty$ son equivalentes. ■

Corolario 3.20 *$(c_0, \|.\|_D)$ tiene la ω-PPF.*

Consideremos la siguiente definición.

Definición 3.21 *Sea X un espacio de Banach. Diremos que $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión aibsc$_{0D}$ si $\{x_n\}$ es convexamente cerrada y existe $\{\varepsilon_n\} \subset (0, \infty)$ tal que $\varepsilon_n \to 0$, y*

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq n \leq m} (1 + \varepsilon_m)^{-1} \left|\sum_{k=n}^{m} t_k\right| &\leq \\ \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| &\leq \\ \leq \sup_{1 \leq n \leq m} (1 + \varepsilon_m) \left|\sum_{k=n}^{m} t_k\right|&, \end{aligned} \tag{3.9}$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$.

El siguiente ejemplo muestra que las sucesiones aibsc$_{0D}$ son distintas a las definidas anteriormente.

Ejemplo 3.22 *Sea $\{\xi_n\}$ la base sumante de c_0.*

i) $\{\xi_n\}$ no es aibsc$_{0D}$ con $\|.\|_\infty$.

ii) $\{\xi_n\}$ no es aibsc$_{0D}$ con $\|.\|_\alpha$.

iii) $\{\xi_n\}$ no es aibsc$_{0D}$ con $\|.\|_{\alpha*}$.

iv) $\{\xi_n\}$ no es aibsc$_0$ con $\|.\|_D$.

v) $\{\xi_n\}$ *no es aibsc*$_{0\alpha}$ *ni* 2*aibsc*$_{0\alpha}$ *con* $\|.\|_D$.

vi) $\{\xi_n\}$ *no es aibsc*$_{0\alpha *}$ *con* $\|.\|_D$.

Demostración *i)* Supongamos que $\{\xi_n\}$ es aibsc$_{0D}$ con $\|.\|_\infty$ .Tomemos $m \in \mathbb{N}$. Sea

$$\{t_n\} = \left(\underbrace{0, ..., 0, -1}_{m \text{ lugares}}, 2, -1, 0, ... \right).$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n = \left(\underbrace{0, ..., 0}_{m \text{ lugares}}, 1, -1, 0, 0, ... \right).$$

Así,

$$\left(\max_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{1+\varepsilon_{m+p}} \right) \vee 2 \left(\frac{1}{1+\varepsilon_{m+1}} \right) = \tag{3.10}$$
$$= \sup_{1 \le n \le m} (1+\varepsilon_m)^{-1} \left| \sum_{j=n}^{m} t_j \right| \le \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n \right\|_\infty = 1.$$

Como (3.10) es válido para toda $m \in \mathbb{N}$, al hacer $m \longrightarrow \infty$ en (3.10) resulta que $2 \le 1$, lo cual es una contradicción.

ii) Es análoga a la demostración del inciso *i)* con

$$\left(\max_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{1+\varepsilon_{m+p}} \right) \vee 2 \left(\frac{1}{1+\varepsilon_{m+1}} \right) =$$
$$= \sup_{1 \le n \le m} (1+\varepsilon_m)^{-1} \left| \sum_{j=n}^{m} t_j \right| \le \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n \right\|_\alpha = 1 + \alpha \left(\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} \right)$$

en lugar de (3.10).

iii) Es análoga a la demostración del inciso *i)* con

$$\left(\max_{p=1,2} \frac{1}{1+\varepsilon_{m+p}} \right) \vee 2 \left(\max_{q \ge 3} \frac{1}{1+\varepsilon_{m+q}} \right) =$$
$$= \sup_{1 \le n \le m} (1+\varepsilon_m)^{-1} \left| \sum_{k=n}^{m} t_k \right| \le \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n \right\|_{\alpha *} = 1 + \alpha \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right)$$

en lugar de (3.10).

iv) Supongamos que $\{\xi_n\}$ es aibsc$_0$ con $\|.\|_D$. Sea $\{t_n\}$ como en el inciso *i*). Así,

$$2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n \right\|_D \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\varepsilon_n) \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right| = \max_{n=m+1,m+2} (1+\varepsilon_n) \,. \qquad (3.11)$$

Como (3.11) es válido para toda $m \in \mathbb{N}$, al hacer $m \longrightarrow \infty$ en (3.11) resulta que $2 \leq 1$, lo cual es una contradicción.

v) Es análoga a la demostración del inciso *iv*) con

$$\begin{aligned} 2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n \right\|_D \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\varepsilon_n) \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right| + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n) \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right| \\ &= \max_{n=m+1,m+2} (1+\varepsilon_n) + \alpha \sum_{n=m+1}^{m+2} (1+\delta_n) \end{aligned}$$

en lugar de (3.11).

vi) Es análoga a la demostración del inciso *iv*) con

$$\begin{aligned} 2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n \right\|_D \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\varepsilon_n) \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right| + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta_n) \max_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{j=k}^{\infty} t_j \right| \\ &= \max_{n=m+1,m+2} (1+\varepsilon_n) + \alpha \sum_{n=m+1}^{\infty} (1+\delta_n) \end{aligned}$$

en lugar de (3.11). ■

Proposición 3.23 *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$ no vacío, convexo cerrado y acotado. Consideremos $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ tal que $\varepsilon_n \to 0$ y $\varepsilon_n < 2^{-1}4^{-n}$, $n \geq 2$. Si K contiene una sucesión aibsc$_{oD}$ con esta $\{\varepsilon_n\}$, entonces existen $C \subset K$ no vacío, convexo y cerrado y $T : C \to C$ afín, no expansivo y sin puntos fijos. Más aún, T es contractivo.*

Demostración Sea $\{x_n\} \subset K$ una sucesión aibsc$_{0\alpha}$ con $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ tal que $\varepsilon_n < 2^{-1}4^{-n}$, $n \geq 2$. Sean C y T como en la proposición 2.19.

Así, C es no vacío, convexo cerrado y acotado, $T(C) \subset C$, T es afín y T no tiene puntos fijos. Resta mostrar que T es contractivo. Sean $x, y \in C$, con $x \neq y$. Luego $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$, y $y = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n$, con $t_n, s_n \geq 0$, y $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1$. Sea $\beta_n = t_n - s_n$, $n \in \mathbb{N}$. Así $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 0$. Nuevamente, como en la proposición 2.19 se tiene que

$$T(x) - T(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x_n,$$

donde $B_1 = 0$ y $B_n = \frac{\beta_1}{2^{n-1}} + \frac{\beta_2}{2^{n-2}} + ... + \frac{\beta_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$. Por lo cual

$$\|T(x) - T(y)\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} B_n x_n \right\| \leq \sup_{1 \leq n \leq m} (1 + \varepsilon_m) \left| \sum_{k=n}^{m} B_k \right|.$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$. Puesto que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m} B_k \quad &= \quad \frac{\beta_1}{2^{n-1}} + \frac{\beta_2}{2^{n-2}} + ... + \frac{\beta_{n-1}}{2} + \\
&+ \frac{\beta_1}{2^n} + \frac{\beta_2}{2^{n-1}} + ... + \frac{\beta_{n-1}}{2^2} + \frac{\beta_n}{2} + \\
&+ \frac{\beta_1}{2^{n+1}} + \frac{\beta_2}{2^n} + ... + \frac{\beta_{n-1}}{2^3} + \frac{\beta_n}{2^2} + \frac{\beta_{n+1}}{2} + ... + \\
&+ \frac{\beta_1}{2^{m-1}} + \frac{\beta_2}{2^{m-2}} + ... + \frac{\beta_{n-1}}{2^{m-(n-1)}} + \frac{\beta_n}{2^{m-n}} + \frac{\beta_{n+1}}{2^{m-(n+1)}} + ... + \frac{\beta_{m-1}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\beta_{n-1} + \beta_n + ... + \beta_{m-1} \right) + \\
&+ \frac{1}{2^2} \left(\beta_{n-2} + \beta_{n-1} + ... + \beta_{m-2} \right) + ... + \\
&+ \frac{1}{2^{n-1}} \left(\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{m-(n-1)} \right) + \\
&+ \frac{1}{2^n} \left(\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{m-n} \right) + ... + \\
&+ \frac{1}{2^{m-2}} \left(\beta_1 + \beta_2 \right) + \frac{1}{2^{m-1}} \left(\beta_1 \right),
\end{aligned}$$

se tiene entonces que

$$(1+\varepsilon_m) \left| \sum_{k=n}^{m} B_k \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1+\varepsilon_m)\left(\frac{1}{2}\left|\beta_{n-1}+\beta_n+...+\beta_{m-1}\right|+\right.\\
&\qquad \frac{1}{2^2}\left|\beta_{n-2}+\beta_{n-1}+...+\beta_{m-2}\right|+...+\\
&\qquad \frac{1}{2^n}\left|\beta_1+\beta_2+...+\beta_{m-n}\right|+...+\\
&\qquad \left.\frac{1}{2^{m-2}}\left|\beta_1+\beta_2\right|+\frac{1}{2^{m-1}}\left|\beta_1\right|\right)\\
&= (1+\varepsilon_m)\left(\frac{1+2\varepsilon_{m-1}}{2}\frac{1}{1+2\varepsilon_{m-1}}\left|\beta_{n-1}+\beta_n+...+\beta_{m-1}\right|+\right.\\
&\quad \frac{1+2\varepsilon_{m-2}}{2^2}\frac{1}{1+2\varepsilon_{m-2}}\left|\beta_{n-2}+\beta_{n-1}+...+\beta_{m-2}\right|+...+\\
&\quad \frac{1+2\varepsilon_{m-n}}{2^n}\frac{1}{1+2\varepsilon_{m-(n)}}\left|\beta_1+\beta_2+...+\beta_{m-n}\right|+...+\\
&\quad \left.\frac{1+2\varepsilon_2}{2^{m-2}}\frac{1}{1+2\varepsilon_2}\left|\beta_1+\beta_2\right|+\frac{1+2\varepsilon_1}{2^{m-1}}\frac{1}{1+2\varepsilon_1}\left|\beta_1\right|\right)\\
&\leq \left(\sup_{1\leq n\leq m}(1+2\varepsilon_m)^{-1}\left|\sum_{k=n}^{m}\beta_k\right|\right)Q_{nm},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
Q_{nm} &= (1+\varepsilon_m)\left(\frac{1+2\varepsilon_{m-1}}{2}+\frac{1+2\varepsilon_{m-2}}{2^2}+...+\right.\\
&\qquad +\frac{1+2\varepsilon_{m-(n-1)}}{2^{n-1}}+\frac{1+2\varepsilon_{m-n}}{2^n}+...+\\
&\qquad \left.+\frac{1+2\varepsilon_2}{2^{m-2}}+\frac{1+2\varepsilon_1}{2^{m-1}}\right)\\
&\leq (1+\frac{1}{2\cdot 4^m})\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}...+\frac{1}{2^{m-1}}\right)+\right.\\
&\qquad \left.+\left(\frac{1}{2\cdot 4^{m-1}}+\frac{1}{2^2\cdot 4^{m-2}}+...+\frac{1}{2^{m-1}\cdot 4^1}\right)\right]\\
&= (1+\frac{1}{2\cdot 4^m})\left[\left(1-\frac{1}{2^{m-1}}\right)+\right.\\
&\qquad \left.+\left(\frac{1}{2^{2m-1}}+\frac{1}{2^{2m-2}}+...+\frac{1}{2^{m+1}}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$< (1+\frac{1}{4^m})\left[\left(1-\frac{1}{2^{m-1}}\right)+\frac{1}{2^m}\right] < 1.$$

En consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned}
\sup_{1\leq n\leq m}(1+\varepsilon_m)\left|\sum_{k=n}^{m}B_k\right| &\leq \sup_{1\leq n\leq m}(1+2\varepsilon_m)^{-1}\left|\sum_{k=n}^{m}\beta_k\right| \\
&< \sup_{1\leq n\leq m}(1+\varepsilon_m)^{-1}\left|\sum_{k=n}^{m}\beta_k\right| \\
&\leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n x_n\right\| = \|x-y\|.
\end{aligned}$$

Así, T es contractivo. ■

Puesto que la base sumante de c_0 es una sucesión aibsc$_{0D}$ en $(c_0, \|.\|_D)$, de la proposición anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.24 *$(c_0, \|.\|_D)$ no tiene la PPF.*

En las secciones anteriores sólo definimos sucesiones asintóticamente isométricas a la base sumante de c_0 con respecto a la norma en cuestión. Conjeturamos que todo conjunto no vacío, convexo, cerrado, acotado y no ω-compacto contiene una de ellas. En el caso de c_0 con la norma $\|.\|_D$, además de las sucesiones asintóticamente isométricas a la base sumante de c_0 inducidas por la norma $\|.\|_D$, consideraremos otro tipo de sucesiones.

Observación 3.25 *Sea $\{\zeta_n\}$ la sucesión definida como*

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}e_k,\ n\in\mathbb{N},$$

donde $\{e_n\}$ es la base canónica de c_0. Notemos que $\{\zeta_n\}$ es una base de c_0 equivalente a la base sumante $\{\xi_n\}$, pues $\|\sum_{n=1}^{m}t_n\xi_n\|_\infty = \|\sum_{n=1}^{m}t_n\zeta_n\|_\infty$ para toda $\{t_n\}_{n=1}^{m}\subset\mathbb{K}$. Llamaremos a $\{\zeta_n\}$ la base alternante de c_0.

Si definimos $C = \{\sum_{n=1}^{\infty}t_n\zeta_n : t_n\geq 0 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty}t_n = 1\}$, entonces C es no vacío, convexo y acotado.

Lema 3.26 *La sucesión $\{\zeta_n\}$ es convexamente cerrada en $(c_0, \|.\|_D)$.*

Demostración Como en c_0 la base sumante $\{\xi_n\}$ es convexamente cerrada y $\{\xi_n\}$ y $\{\zeta_n\}$ son equivalentes entonces $\{\zeta_n\}$ es convexamente cerrada en c_0. Puesto que $\|.\|_\infty$ y $\|.\|_D$ son equivalentes resulta que $\{\zeta_n\}$ es convexamente cerrada en $(c_0, \|.\|_D)$. ∎

Proposición 3.27 *En el espacio $(c_0, \|.\|_D)$ consideremos el conjunto*

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n \zeta_n : t_n \geq 0 \ y \ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Entonces C no tiene la PPF.

Demostración Si $t_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$, definamos

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \zeta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \zeta_{n+1}.$$

Así, $T : C \longrightarrow C$ es afín y no tiene puntos fijos. A continuación mostraremos que T es no expansivo. Sean $x, y \in C$. Luego $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \zeta_n$ y $y = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \zeta_n$ con $t_n, s_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1$. Definamos $r_n = t_n - s_n$ y $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} r_k, \ n \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces que

$$x - y = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n$$

y

$$Tx - Ty = u_1 e_1 - \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_{n+1}$$

con $u_1 = 0$. En consecuencia $\|Tx - Ty\|_D = \|x - y\|_D$. Por lo tanto T es una isometría, en particular T es no expansivo. ∎

Es fácil ver que $\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n\| = \|\sum_{n=1}^{\infty} t_n \zeta_n\|$, donde $\|.\|$ es cualquiera de las normas $\|.\|_\infty$, $\|.\|_\alpha$, $\|.\|_{\alpha *}$ o $\|.\|^*$. Sin embargo, como lo muestra el siguiente ejemplo, esto no sólo no es cierto para $\|.\|_D$ sino que la sucesión $\{\zeta_n\}$ no es aibsc_{0D} con $\|.\|_D$.

Ejemplo 3.28 $\{\zeta_n\}$ *no es aibsc_{0D} con $\|.\|_D$.*

Demostración Es análoga a la demostración del inciso i) del ejemplo 3.22. ■

Consideremos la siguiente notación.

Definición 3.29 *Definimos*

$$\mathfrak{P} = \{(n,m) : n \text{ y } m \text{ tienen la misma paridad}\}$$

y

$$\mathfrak{Q} = \{(n,m) : n \text{ y } m \text{ tienen diferente paridad}\}.$$

Consideramos entonces la siguiente definición.

Definición 3.30 *Sea X un espacio de Banach. Diremos que $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión aibac$_{0D}$ si $\{x_n\}$ es convexamente cerrada y existe $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ tal que $\varepsilon_n \to 0$, y*

$$\begin{gathered} I_1(\{\varepsilon_n\},\{t_n\},\mathfrak{P}) \vee I_2(\{\varepsilon_n\},\{t_n\},\mathfrak{Q}) \leq \\ \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq \\ \leq D_1(\{\varepsilon_n\},\{t_n\},\mathfrak{P}) \vee D_2(\{\varepsilon_n\},\{t_n\}\mathfrak{Q}), \end{gathered}$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$, donde

$$\begin{aligned} I_1(\{\varepsilon_n\},\{t_n\},\mathfrak{P}) &= \left(\sup_{n<l,\ (n,l)\in\mathfrak{P}} (1+\varepsilon_{l-1})^{-1} \left| \sum_{k=n}^{l-1} t_k \right| \right), \\ I_2(\{\varepsilon_n\},\{t_n\},\mathfrak{Q}) &= \left(\sup_{n<l,\ (n,l)\in\mathfrak{Q}} (1+\varepsilon_{l-1})^{-1} \left| \sum_{k=n}^{l-1} t_k + 2\sum_{k=l}^{\infty} t_k \right| \right), \\ D_1(\{\varepsilon_n\},\{t_n\},\mathfrak{P}) &= \left(\sup_{n<l,\ (n,l)\in\mathfrak{P}} (1+\varepsilon_{l-1}) \left| \sum_{k=n}^{l-1} t_k \right| \right), \\ D_2(\{\varepsilon_n\},\{t_n\}\mathfrak{Q}) &= \left(\sup_{n<l,\ (n,l)\in\mathfrak{Q}} (1+\varepsilon_{l-1}) \left| \sum_{k=n}^{l-1} t_k + 2\sum_{k=l}^{\infty} t_k \right| \right). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.31 *$\{\xi_n\}$ no es aibac$_{0D}$ con $\|.\|_D$.*

Demostración Supongamos que $\{\xi_n\}$ es aibac_{0D} con $\|.\|_D$. Tomemos $m \in \mathbb{N}$ con m impar y $m \geq 3$. Sea

$$\{t_n\} = \left(\underbrace{0, ..., 0, 1}_{m \text{ lugares}}, 1, 0, ...\right).$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n = \left(\underbrace{2, ..., 2}_{m \text{ lugares}}, 1, 0, 0, ...\right).$$

Así,

$$\begin{gathered}(1+\varepsilon_m)^{-1} 3 \leq \\ \leq I_1(\{\varepsilon_n\}, \{t_n\}, \mathfrak{P}) \vee I_2(\{\varepsilon_n\}, \{t_n\}, \mathfrak{Q}) \leq \\ \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n \right\|_D = 2.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Como (3.12) es válido para toda $m \in \mathbb{N}$, al hacer $m \longrightarrow \infty$ en (3.12) resulta que $3 \leq 2$, lo cual es una contradicción. ■

En vista de los ejemplos 3.28 y 3.31, un trabajo a futuro es ver si en $(c_0, \|.\|_D)$ todo conjunto no vacío, convexo cerrado y acotado que no es ω-compacto contiene ya sea una sucesión aibsc_{0D} o una sucesión aibac_{0D}, y ver si en $(c_0, \|.\|_D)$ existe un conjunto no vacío, convexo cerrado y acotado que no es ω-compacto que contiene una sucesión aibsc_{0D} y no contiene una sucesión aibac_{0D} y viceversa.

Observación 3.32 *Si $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ son dos normas en un espacio de Banach X, $C \subset X$ y $T : C \to C$ es un operador no expansivo con respecto a ambas normas, entonces T es no expansivo respecto a la norma $\alpha_1 \|.\|_1 + \alpha_2 \|.\|_2$, donde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Por otra parte si tenemos definidas sucesiones "asintóticamente isométricas" con respecto a $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ podemos también definir sucesiones "asintóticamente isométricas" con respecto a $\alpha_1 \|.\|_1 + \alpha_2 \|.\|_2$.*

Por lo anterior a partir de las normas consideradas en c_0 podemos construir otras normas en c_0 con algunos de los resultados probados en los capítulos 2 y 3.

Capítulo 4

Los espacios $(c_{0\alpha})^*$ y $(c_0, \|.\|_D)^*$

4.1. Los espacios $(c_{0\alpha})^*$ y $(c_{0\alpha})^{**}$

Uno de los hechos importantes que se usó en la demostración del teorema 4 de [5] es que $\{x_n\} \subset K \subset c_0 \subset \ell^\infty$ y que $(\ell^1)^* = \ell^\infty$. En el caso de $c_{0\alpha}$ se tiene que $\{x_n\} \subset K \subset c_{0\alpha} \subset \ell_\alpha^\infty$. Una pregunta que surge de inmediato es ¿ℓ_α^∞ tiene un predual isométrico? La respuesta es que sí, como veremos en seguida.

Primero encontraremos $(c_{0\alpha})^*$. Para tener una idea de $(c_{0\alpha})^*$ calcularemos $\|f\|_\alpha$ para cada $f \in (c_{0\alpha})^*$. Tengamos presente la siguiente observación.

Observación 4.1 *Sean X un espacio de Banach y $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ dos normas equivalentes en X. Tomemos $\{x_n\} \subset X$. Si $\{x_n\}$ es base reductora en $(X, \|.\|_1)$, es decir si $\{x_n^*\}$ es base de $(X, \|.\|_1)^*$, entonces $\{x_n\}$ es base reductora en $(X, \|.\|_2)$.*

Sea $\{e_n\}$ la base canónica de c_0. Como $\{e_n\}$ es base reductora de c_0 y $||.||_\infty$ y $||.||_\alpha$ son equivalentes, entonces $\{e_n\}$ es base reductora de $c_{0\alpha}$.

Sea $f \in (c_{0\alpha})^*$. Entonces existe una única sucesión $\{c_n\} \subset \mathbb{K}$ tal que $f = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n^*$. Así,

$$\|f\|_\alpha = \lim_{m \longrightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^m c_n e_n^* \right\|_\alpha .$$

Luego, para calcular $\|f\|_\alpha$, calcularemos primero $\|\sum_{n=1}^{m} c_n e_n^*\|_\alpha$, $m \in \mathbb{N}$, para lo cual estudiaremos los puntos extremos $\mathcal{E}(S_{c_{0\alpha}})$ de la esfera de $c_{0\alpha}$.

Definición 4.2 *Consideremos al espacio vectorial $\mathbb{K}^n$. Sea $A \subset \{1, ..., n\}$. Definamos*

$$\mathbb{K}^n (A) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n : x_i = 0 \text{ si } i \in A\}$$

y

$$X_n (A) = (\mathbb{K}^n (A), \|.\|_\alpha),$$

donde

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_\alpha = \|(x_1, ..., x_n, 0, 0, ...)\|_\alpha, \ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Notemos que $\mathbb{K}^n (\phi) = \mathbb{K}^n$ y que $X_n (\phi) = (\mathbb{K}^n, \|.\|_\alpha)$. Escribiremos X_n en lugar de $X_n (\phi)$. Así, $X_n (A) \subset X_n$.

Lema 4.3 *Sea $A \subset B \subset \{1, ..., n\}$. Tomemos $(x_1, ..., x_n) \in X_n (B)$. Entonces $(x_1, ..., x_n) \in E(B_{X_n(A)})$ si y sólo si $(x_1, ..., x_n) \in E(B_{X_n(B)})$.*

Demostración $\Longrightarrow$) Esta implicación es clara pues $X_n (B)$ es un subespacio de $X_n (A)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{E}(B_{X_n(B)})$ y que

$$(x_1, ..., x_n) = \frac{(y_1, ..., y_n) + (z_1, ..., z_n)}{2}$$

con $(y_1, ..., y_n), \ (z_1, ..., z_n) \in X_n (A)$ tales que $\|(y_1, ..., y_n)\|_\alpha = \|(z_1, ..., z_n)\|_\alpha = 1$. Definamos $u_i = v_i = 0$ si $i \in B$ y $u_i = y_i, \ v_i = z_i$ si $i \in \{1, ..., n\} \setminus B$. Puesto que $\frac{y_i + z_i}{2} = x_i = 0$ si $i \in B$, se tiene que

$$(x_1, ..., x_n) = \frac{(u_1, ..., u_n) + (v_1, ..., v_n)}{2}$$

con $(u_1, ..., u_n), (v_1, ..., v_n) \in X_n (B)$ y tales que

$$\|(u_1, ..., u_n)\|_\alpha \leq \|(y_1, ..., y_n)\|_\alpha = 1$$

y

$$\|(v_1, ..., v_n)\|_\alpha \leq \|(z_1, ..., z_n)\|_\alpha = 1.$$

Puesto que $(x_1,...,x_n) \in \mathcal{E}(B_{X_n(B)})$ obtenemos entonces que $(x_1,...,x_n) = (u_1,...,u_n) = (v_1,...,v_n)$. Tomemos ahora $i \in B \backslash A$. Supongamos que $y_i \neq 0$. Se tiene entonces que

$$\|(y_1,...,y_n)\|_\alpha > \|(u_1,...,u_n)\|_\alpha = \|(x_1,...,x_n)\|_\alpha = 1,$$

lo cual es una contradicción. En consecuencia $y_i = 0$. Como $\frac{y_i+z_i}{2} = x_i = 0$ también se tiene que $z_i = 0$. Así, $(x_1,...,x_n) = (y_1,...,y_n) = (z_1,...,z_n)$. Por lo tanto $(x_1,...,x_n) \in \mathcal{E}(B_{X_n(A)})$. ■

Observación 4.4 *Notemos que por el lema anterior se tiene que*

$$\mathcal{E}(B_{X_n}) = \cup_{A\subset\{1,...,n\}}\mathcal{E}(B_{X_n(A)}).$$

Definición 4.5 *Sea $A \subset \mathbb{K}^n$. Definimos*

$$\rho(A) = \left\{(e^{i\theta_1}x_1,...,e^{i\theta_n}x_n) : (x_1,...,x_n) \ \in A \ y \ \theta_k \in [0,2\pi), \ k = 1,...,n\right\},$$

donde i es el número imaginario $(0,1)$. Notemos que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces se tiene que

$$\rho(A) = \{(s_1x_1,...,s_sx_n) : (x_1,...,x_n) \ \in A \ y \ s_k \in \{1,-1\}, \ k = 1,...,n\}.$$

Denotemos por $\mathcal{E}(B_{X_n})_\mathbb{R}$ al conjunto de los puntos extremos de B_{X_n} cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Lema 4.6

i) *Si* $(x_1,...,x_n) \in \mathcal{E}(B_{X_n})$ *y* $\theta_k \in [0,2\pi), \ k = 1,...,n,$ *entonces*

$$(e^{i\theta_1}x_1,...,e^{i\theta_n}x_n) \in \mathcal{E}(B_{X_n}).$$

ii) $\mathcal{E}(B_{X_n}) = \rho\left(\{(x_1,...,x_n) \in \mathcal{E}(B_{X_n}) : x_k \geq 0, \ k = 1,...,n\}\right).$

iii) $\{(x_1,...,x_n) \in \mathcal{E}(B_{X_n}) : x_k \geq 0\} = \{(x_1,...,x_n) \in \mathcal{E}(B_{X_n})_\mathbb{R} : x_k \geq 0\}.$

Demostración *i)* Supongamos que $(e^{i\theta_1}x_1,...,e^{i\theta_n}x_n) = \frac{w+z}{2}$, con $w, z \in S_{X_n}$. Digamos que $w = (w_1,...,w_n)$ y $z = (z_1,...,z_n)$. Puesto que

$$(x_1,...,x_n) = \frac{(e^{-i\theta_1}w_1,...,e^{-i\theta_1}w_n) + (e^{-i\theta_1}z_1,...,e^{-i\theta_1}z_n)}{2},$$

con $\left\|(e^{-i\theta_1}w_1, ..., e^{-i\theta_n}w_n)\right\|_\alpha = 1$, $\left\|(e^{-i\theta_1}z_1, ..., e^{-i\theta_n}z_n)\right\|_\alpha = 1$ y $(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{E}(B_{X_n})$ se tiene entonces que

$$(x_1, ..., x_n) = (e^{-i\theta_1}w_1, ..., e^{-i\theta_n}w_n) = (e^{-i\theta_1}z_1, ..., e^{-i\theta_n}z_n)$$

y en consecuencia que $(e^{i\theta_1}x_1, ..., e^{i\theta_n}x_n) = w = z$.

ii) Es consecuencia de *i*).

iii) Claramente

$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{E}(B_{X_n}) : x_k \geq 0\} \subset \{(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{E}(B_{X_n})_{\mathbb{R}} : x_k \geq 0\}.$$

Tomemos $(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{E}(B_{X_n})_{\mathbb{R}}$ con $x_k \geq 0$, $k = 1, ..., n$. Supongamos que $(x_1, ..., x_n) = \frac{w+z}{2}$, con $w, z \in S_{X_n}$. Digamos que $w = (w_1, ..., w_n)$ y $z = (z_1, ..., z_n)$. Luego, $x_k = \frac{w_k + z_k}{2}$. Puesto que $x_k \in \mathbb{R}$ y $w_k,\ z_k \in \mathbb{K}$ entonces $\operatorname{Im} w_k = -\operatorname{Im} z_k$ y $x_k = \frac{\operatorname{Re} w_k + \operatorname{Re} z_k}{2}$. Así,

$$(x_1, ..., x_n) = \frac{(\operatorname{Re} w_1, ..., \operatorname{Re} w_n) + (\operatorname{Re} z_1, ..., \operatorname{Re} z_n)}{2}$$

con $\|(\operatorname{Re} w_1, ..., \operatorname{Re} w_n)\|_\alpha$, $\|(\operatorname{Re} z_1, ..., \operatorname{Re} z_n)\|_\alpha \leq 1$, pues $|\operatorname{Re} w_k| \leq |w_k|$ y $|\operatorname{Re} z_k| \leq |z_k|$. En consecuencia

$$(x_1, ..., x_n) = (\operatorname{Re} w_1, ..., \operatorname{Re} w_n) = (\operatorname{Re} z_1, ..., \operatorname{Re} z_n)$$

y $\operatorname{Im} w_k = \operatorname{Im} z_k = 0$. Por lo tanto $(x_1, ..., x_n) = w = z$. ■

Dado un conjunto A denotaremos por $\#A$ a la cardinalidad del conjunto A. Consideremos el siguiente lema.

Lema 4.7 *Se tiene que*

$$\mathcal{E}(B_{X_n}) = \rho\left(\bigcup_{\#F=1}^{n}\left\{\frac{1}{1+\sum_{i\in F}\frac{\alpha}{2^i}}\sum_{i\in F} e_i\right\}\right).$$

Demostración Probaremos que

$$\{(x_1,...,x_n)\in\mathcal{E}(B_{X_n}):x_k\geq 0\}=\bigcup_{\#F=1}^{n}\left\{\frac{1}{1+\sum_{i\in F}\frac{\alpha}{2^i}}\sum_{i\in F}e_i\right\}\tag{4.1}$$

y por el inciso $ii)$ del lema 4.6 se tendrá lo deseado.

Supongamos primero que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Recordemos que $\mathcal{E}(B_{X_n})\subset S_{X_n}$.

Consideremos al conjunto

$$S_{X_1}^{+}=\{x\in\mathbb{K}:\|x\|_\alpha=1 \text{ y } x\geq 0\}=\left\{x\in\mathbb{K}:x+\alpha\left(\frac{x}{2}\right)=1\ \text{ y } x\geq 0\right\}.$$

Notemos que

$$S_{X_1}^{+}=\left\{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}\right\}.$$

Claramente se tiene que

$$\mathcal{E}(B_{X_1})\cap S_{X_1}^{+}=\left\{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}\right\}.$$

Consideremos ahora al conjunto

$$\begin{aligned} S_{X_2}^{+} &= \left\{(x,y)\in\mathbb{K}^2:\|(x,y)\|_\alpha=1 \text{ y } x,y\geq 0\right\}= \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{K}^2:(x\vee y)+\alpha\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2^2}\right)=1\ \text{ y } x,y\geq 0\right\}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$S_{X_2}^{+}=L_1\cup L_2,$$

donde L_1 es el segmento de recta determinado por la condición

$$x+\frac{\alpha}{2}x+\frac{\alpha}{2^2}y=1 \text{ con } 0\leq y\leq x\tag{4.2}$$

y L_2 es el segmento de recta determinado por la condición

$$y+\frac{\alpha}{2}x+\frac{\alpha}{2^2}y=1 \text{ con } 0\leq x\leq y.\tag{4.3}$$

Como los segmentos L_1 y L_2 se intersectan en $\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}}\right)(e_1+e_2)$,

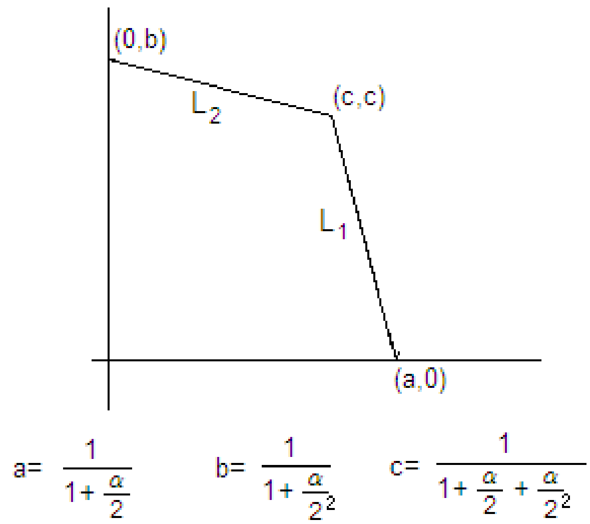

Figura 4.1:

se tiene que

$$\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}}\right)(e_1+e_2) \in \mathcal{E}(B_{X_2}).$$

Definamos $E_k = span(\{e_1, e_2\} \setminus \{e_k\}),\ k = 1,2$. Notemos que L_i no es "paralelo" a $E_k,\ i,k = 1,2$. Además B_{X_2} es simétrica respecto a los espacios $E_k,\ k = 1,2$. En consecuencia, si (x,y) cumple (4.2) y $y = 0$ se tiene que $(x,y) \in \mathcal{E}(B_{X_2})$. Análogamente, si (x,y) cumple (4.3) y $x = 0$ se tiene que $(x,y) \in \mathcal{E}(B_{X_2})$. Por lo cual

$$\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{1+\frac{\alpha}{2^2}}\right) \in \mathcal{E}(B_{X_2}).$$

Así,

$$\mathcal{E}(B_{X_2}) \cap S^+_{X_2} = \left\{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2^i}} e_i :\ i = 1,2\right\} \cup \left\{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}}(e_1+e_2)\right\}.$$

Consideremos ahora al conjunto

$$\begin{aligned} S^+_{X_3} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 : \|(x,y,z)\|_\alpha = 1 \text{ y } x,y,z \geq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 : (x \vee y \vee z) + \alpha\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2^2}+\frac{z}{2^3}\right) = 1 \ \text{ y } x,y,z \geq 0\right\}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$S_{X_3}^{+}=P_1\cup P_2\cup P_3,$$

donde P_1 es el "plano" determinado por la condición

$$x+\frac{\alpha}{2}x+\frac{\alpha}{2^2}y+\frac{\alpha}{2^3}z=1 \text{ con } 0\leq y,z\leq x,$$

P_2 es el "plano" determinado por la condición

$$y+\frac{\alpha}{2}x+\frac{\alpha}{2^2}y+\frac{\alpha}{2^3}z=1 \text{ con } 0\leq x,z\leq y,$$

y P_3 es el "plano" determinado por la condición

$$z+\frac{\alpha}{2}x+\frac{\alpha}{2^2}y+\frac{\alpha}{2^3}z=1 \text{ con } 0\leq x,y\leq z.$$

Los "planos" P_1, P_2 y P_3 se intersectan en $\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\frac{\alpha}{2^3}}\right)(e_1+e_2+e_3)$. Por

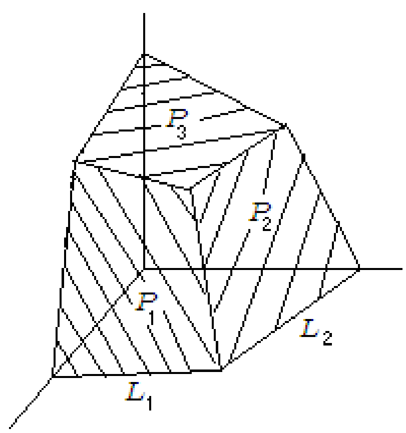

Figura 4.2:

lo tanto

$$\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\frac{\alpha}{2^3}}\right)(e_1+e_2+e_3)\in\mathcal{E}(B_{X_3}).$$

Fijemos $i\in\{1,2,3\}$. Tomemos $j\in\{1,2,3\}$ con $i\neq j$. Definamos ahora a los segmentos $L_{i,j}$ como

$$L_{i,j}=\{(x_1,x_2,x_3)\in P_j : x_i=0\}.$$

Puesto que

$$\bigcap_{j=1,\, j\neq i}^{3} L_{i,j} = \frac{1}{1+\alpha \sum_{j=1, j\neq i}^{3} \frac{1}{2^j}} \sum_{j=1, j\neq i}^{3} e_j),$$

resulta que

$$\frac{1}{1+\alpha \sum_{j=1, j\neq i}^{3} \frac{1}{2^j}} \sum_{j=1, j\neq i}^{3} e_j \in \mathcal{E}(B_{X_3(\{i\})}).$$

Como lo anterior es válido para cada $i \in \{1,2,3\}$, por el lema 4.3, resulta que

$$\frac{1}{1+\alpha \sum_{j=1, j\neq i}^{3} \frac{1}{2^j}} \sum_{j=1, j\neq i}^{3} e_j \in \mathcal{E}(B_{X_3}),\ i = 1,2,3.$$

Además, como en el caso $n = 2$, se tiene que si $k \neq i$ entonces

$$\frac{1}{1+\alpha\left(\frac{1}{2^k}\right)} e_k \in \mathcal{E}(B_{X_3(\{i\})}).$$

Luego, por el lema 4.3 resulta que

$$\frac{1}{1+\alpha \frac{1}{2^k}} e_k \in \mathcal{E}(B_{X_3}),\ k = 1,2,3.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(B_{X_3}) \cap S^+_{X_3} \quad = \quad & \left\{ \frac{1}{1+\frac{\alpha}{2^i}} e_i :\ i = 1,2,3 \right\} \\
& \cup \left\{ \frac{1}{1+\frac{\alpha}{2^i}+\frac{\alpha}{2^j}} (e_i + e_j) :\ i,j = 1,2,3,\ i \neq j \right\} \\
& \cup \left\{ \frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\frac{\alpha}{2^3}} (e_1 + e_2 + e_3) \right\}.
\end{aligned}$$

En general, mediante el mismo tipo de argumentación obtenemos (4.1) para toda $n \in \mathbb{N}$.

El caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (4.1) se sigue del caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y del inciso iii) del lema 4.6. ■

Lema 4.8 *Sea $f \in (c_{0\alpha})^*$. Entonces existe una única sucesión $\{c_n\} \in l^1$ tal que $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n^*$ y*

$$\|f\|_\alpha = \sup\left\{ \frac{\sum_{n\in F} |c_n|}{1 + \sum_{n\in F} \frac{\alpha}{2^n}} : \ F \subset \mathbb{N} \right\}.$$

Demostración Sea $f \in (c_{0\alpha})^*$. Puesto que $\{e_n\}$ es base reductora de $c_{0\alpha}$, existe una única sucesión $\{c_n\} \subset \mathbb{K}$ tal que $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n^*$. Como conjuntos $(c_{0\alpha})^* = (c_0)^*$, luego, $f \in (c_0)^*$. Así, $f = R\{a_n\}$ donde $R : l^1 \longrightarrow c_0^*$ es la representación de Riesz. En consecuencia

$$c_n = f(e_n) = R\{a_n\}(e_n) = a_n.$$

Por ende $\{c_n\} = \{a_n\} \in l^1$. Puesto que $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n^*$ entonces $\|f\|_\alpha = \text{lím}_{m\longrightarrow\infty} \left\|\sum_{n=1}^{m} c_n e_n^*\right\|_\alpha$. Ahora, por el lema 4.7 se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{m} c_n e_n^*\right\|_\alpha &= \sup\left\{ \left|\sum_{n=1}^{m} c_n e_n^*(x)\right| : \|x\|_\alpha = 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ \left|\sum_{n=1}^{m} c_n b_n\right| : \|(b_1, ..., b_m)\|_\alpha \leq 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ \left|\sum_{n=1}^{m} c_n b_n\right| : \|(b_1, ..., b_m)\|_\alpha = 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ \left|\sum_{n=1}^{m} c_n b_n\right| : (b_1, ..., b_m) \in \mathcal{E}(B_{X_m}) \right\} \\
&= \sup\left\{ \frac{\sum_{i\in F} |c_i|}{1 + \sum_{i\in F} \frac{\alpha}{2^i}} : F \subset \{1, ..., m\} \right\}.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\|f\|_\alpha = \lim_{m\longrightarrow\infty} \left\|\sum_{n=1}^{m} c_n e_n^*\right\|_\alpha = \sup\left\{ \frac{\sum_{i\in F} |c_i|}{1 + \sum_{i\in F} \frac{\alpha}{2^i}} : F \subset \mathbb{N} \right\}. \ \blacksquare$$

Para cada $t = \{t_n\} \in l^1$ consideremos la función $f_t = \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n^* \in (c_{0\alpha})^*$. Por el lema 4.8, se tiene que $\|f_t\|_\alpha = \sup\left\{ \frac{\sum_{i\in F} |t_i|}{1+\sum_{i\in F} \frac{\alpha}{2^i}} : F \subset \mathbb{N} \right\}$. Definamos

$$|||t|||_\alpha = \|f_t\|_\alpha .$$

Notemos que $|||.|||_\alpha$ es una norma en l^1.

Como conjuntos, es decir, sin tener en cuenta las normas, se tiene que $(l^1, |||.|||_\alpha) = l^1$ y entonces que $(c_0, \|.\|_\alpha)^* = (c_0)^*$. Así, podemos considerar a la función $R : (l^1, |||.|||_\alpha) \longrightarrow (c_0, \|.\|_\alpha)^*$, donde $R : l^1 \longrightarrow c_0^*$ es la representación de Riesz.

Proposición 4.9 *La función $R : (l^1, |||.|||_\alpha) \longrightarrow (c_0, \|.\|_\alpha)^*$ es un isomorfismo isométrico.*

Demostración Ya sabemos que $R : (l^1, |||.|||_\alpha) \longrightarrow (c_0, \|.\|_\alpha)^*$ es lineal, 1-1 y sobre. Sea $t = \{t_n\} \in l^1$. Notemos que

$$\|R(t)\|_\alpha = \|f_t\|_\alpha = |||t|||_\alpha.$$

Por lo cual $R : (l^1, |||.|||_\alpha) \longrightarrow (c_0, \|.\|_\alpha)^*$ es una isometría. ■

Observación 4.10 *Puesto que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_\alpha \leq (1+\alpha)\|x\|_\infty$, $x \in c_0$ y $|||.|||_\alpha$ en l^1 es la norma dual de $\|.\|_\alpha$ en c_0 resulta que*

$$\frac{1}{1+\alpha}\|x\|_1 \leq |||x|||_\alpha \leq \|x\|_1, \; x \in l^1.$$

Observación 4.11 *Aunque la proposición 4.9 se puede probar de manera más fácil una vez que tenemos a $(l^1, |||.|||_\alpha)$ como candidato para ser el dual de $(c_0, \|.\|_\alpha)$, preferimos incluir la prueba basada en los lemas 4.7 y 4.8, pues al mismo tiempo damos una descripción de los puntos extremos de B_{X_n}.*

Corolario 4.12 *$(c_{0\alpha})^*$ tiene la ω-PPF.*

Demostración Sea $K \subset (c_{0\alpha})^*$ no vacío, convexo, cerrado y acotado. Supongamos además que K es ω-compacto. Por la proposición anterior $(c_{0\alpha})^*$ es isomorfo a $(l^1, |||.|||_\alpha)$ que a su vez es isomorfo a l^1 que es un espacio de Schur. Así $(c_{0\alpha})^*$ es un espacio de Schur y en consecuencia K es un subconjunto compacto de $(c_{0\alpha})^*$. Así K tiene la PPF. ■

No hemos podido probar que alguno de los operadores no expansivos y sin punto fijo definidos en subconjuntos de l^1, ni que las construcciones análogas a los operadores no expansivos sin punto fijo en c_0, (ver [4], [5], [6], [7], [17]) sean no expansivos con respecto a la norma $|||.|||_\alpha$. Así no sabemos si $(l^1, |||.|||_\alpha)$ tiene la propiedad de punto fijo. Como P. K. Lin probó en [15] que l^1 con la norma equivalente $\|\{t_n\}\|_\gamma = \sup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \sum_{k=n}^{\infty} |t_k|$, donde $\gamma_n = \frac{8^n}{1+8^n}$, tiene la propiedad de punto fijo, un trabajo a futuro es tratar de probar que $(l^1, |||.|||_\alpha)$ sí tiene la PPF.

En lo que resta de la sección calcularemos $(l^1, |||.|||_\alpha)^*$ y para ello, de la misma forma que en el caso de $c_{0\alpha}$, empezaremos estudiando los puntos extremos de la bola de $(l^1, |||.|||_\alpha)$, aunque una vez que se tiene el candidato apropiado, la prueba de que es efectivamente el dual se puede hacer directamente.

Notemos que aunque $\{e_n\}$ es base de l^1 no sucede que $\{e_n\}$ es reductora, pues l^∞ no tiene base. De igual manera, aunque $\{e_n\}$ es base de $(l^1, |||.|||_\alpha)$ no sucede que $\{e_n\}$ es reductora.

En $\mathbb{K}^n$ definimos

$$|||(x_1, ..., x_n)|||_\alpha = \text{máx}\left\{\frac{\sum_{i\in F}|c_i|}{1+\sum_{i\in F}\frac{\alpha}{2^i}} : F \subset \{1, ..., n\}\right\}.$$

y $Y_n = (\mathbb{K}^n, |||.|||_\alpha)$.

Definición 4.13 *Sea S el espacio de sucesiones en $\mathbb{K}$ y $A \subset S$. Definimos*

$$\rho(A) = \left\{(e^{i\theta_1}x_1, e^{i\theta_2}x_2, ...) : \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in A \ y \ \theta_k \in [0, 2\pi),\ k = 1, 2, ...\right\},$$

donde i es el número imaginario $(0,1)$. Notemos que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces se tiene que

$$\rho(A) = \{(s_1x_1, s_2x_2, ...) : \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in A \ y \ s_k \in \{1, -1\},\ k = 1, 2, ...\}.$$

Denotemos por $\mathcal{E}(B_{Y_n})_\mathbb{R}$ y por $\mathcal{E}(B_{(l^1,|||.|||_\alpha)})_\mathbb{R}$ al conjunto de los puntos extremos de B_{Y_n} y de $B_{(l^1,|||.|||_\alpha)}$ respectivamente cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Lema 4.14

i) Si $(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{E}(B_{Y_n})$ y $\theta_k \in [0, 2\pi)$, $k = 1, ...n$, entonces

$$(e^{i\theta_1}x_1, ..., e^{i\theta_n}x_n) \in \mathcal{E}(B_{Y_n}).$$

ii) $\mathcal{E}(B_{Y_n}) = \rho\left(\{(x_1,...,x_n) \in \mathcal{E}(B_{Y_n}) : x_k \geq 0,\ k = 1,...,n\}\right).$

iii) $\{(x_1,...,x_n) \in \mathcal{E}(B_{Y_n}) : x_k \geq 0\} = \{(x_1,...,x_n) \in \mathcal{E}(B_{Y_n})_{\mathbb{R}} : x_k \geq 0\}.$

iv) Si $(x_1, x_2, ...) \in \mathcal{E}(B_{(l^1,|||.|||_\alpha)})$ *y* $\theta_k \in [0, 2\pi),\ k \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$(e^{i\theta_1}x_1, e^{i\theta_2}x_2, ...) \in \mathcal{E}(B_{(l^1,|||.|||_\alpha)}).$$

v) $\mathcal{E}(B_{(l^1,|||.|||_\alpha)}) = \rho\left(\left\{(x_1, x_2, ...) \in \mathcal{E}(B_{(l^1,|||.|||_\alpha)}) : x_k \geq 0,\ k \in \mathbb{N}\right\}\right).$

vi) $\left\{(x_1, x_2, ...) \in \mathcal{E}(B_{(l^1,|||.|||_\alpha)}) : x_k \geq 0\right\} = \left\{(x_1, x_2, ...) \in \mathcal{E}(B_{(l^1,|||.|||_\alpha)})_{\mathbb{R}} : x_k \geq 0\right\}.$

Demostración Los incisos $i)$ y $iv)$ se demuestran de manera análoga al inciso $i)$ del lema 4.6. Los incisos $ii)$ y $v)$ son consecuencia de $i)$ y $iv)$ respectivamente. Por último, $iii)$ y $vi)$ se prueban de manera análoga al inciso $iii)$ del lema 4.6.

Lema 4.15 *Se tiene que*

$$\mathcal{E}(B_{Y_n}) = \rho\left(\left\{e_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha}{2^j} e_j :\ i = 1,...,n\right\}\right).$$

y

$$\rho\left(\left\{e_i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^j} e_j : i \in \mathbb{N}\right\}\right) \subset \mathcal{E}(B_{(l^1,|||.|||_\alpha)}).$$

Demostración Tomemos $x = (x_1, x_2, ...) \in \mathcal{E}(B_{(l^1,|||.|||_\alpha)})$. Primero veremos que $\frac{\alpha}{2^i} \leq |x_i|,\ i \in \mathbb{N}$. Supongamos que $|x_i| < \frac{\alpha}{2^i}$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Si $x_i = 0$ entonces $y \equiv \left(x_1, ..., x_{i-1}, \frac{\alpha}{2^i}, x_{i+1}, ...\right)$ y $z \equiv \left(x_1, ..., x_{i-1}, \frac{-\alpha}{2^i}, x_{i+1}, ...\right)$ cumplen que $x = \frac{y+z}{2}$ con $x \neq y$, $x \neq z$ y con $|||y|||_\alpha = |||z|||_\alpha = 1$, lo cual es una contradicción. Y si $x_i \neq 0$ entonces $0 < |x_i| < \frac{\alpha}{2^i}$. Así, existe $r > 0$ tal que $0 < r < |x_i|$ y $|x_i| + r < \frac{\alpha}{2^i}$. Luego $y \equiv (x_1, ..., x_{i-1}, x_i + r, x_{i+1}, ...)$ y $z \equiv (x_1, ..., x_{i-1}, x_i - r, x_{i+1}, ...)$ cumplen que $x = \frac{y+z}{2}$ con $x \neq y$, $x \neq z$ y con $|||y|||_\alpha \leq 1,\ |||z|||_\alpha \leq 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto

$$\frac{\alpha}{2^i} \leq |x_i|\,,\ i \in \mathbb{N}.$$

Además como $|||x|||_\alpha = 1$ se tiene que

$$|x_i| \leq 1 + \frac{\alpha}{2^i},\ i \in \mathbb{N}.$$

Así
$$\frac{\alpha}{2^i} \leq |x_i| \leq 1 + \frac{\alpha}{2^i},\ i \in \mathbb{N}.$$
De manera análoga, si $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{E}(B_{Y_n})$ se cumple que
$$\frac{\alpha}{2^i} \leq |x_i| \leq 1 + \frac{\alpha}{2^i},\ i = 1, 2, ..., n.$$
Sean
$$E = \left\{ e_i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^j} e_j : i \in \mathbb{N} \right\}$$
y
$$E_n = \left\{ e_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha}{2^j} e_j : i \in \mathbb{N} \right\}$$

Primero probaremos que $E \subset \mathcal{E}(B_{(l^1, |||\cdot|||_\alpha)})$. Supongamos inicialmente que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Tomemos $x \in E$, luego $x = e_i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^j} e_j$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Supongamos que $x = \frac{y+z}{2}$ con $y, z \in S_{(l^1, |||\cdot|||_\alpha)}$. Digamos que $y = \{y_n\}$ y $z = \{z_n\}$. Como $|||y|||_\alpha = |||z|||_\alpha = 1$ resulta que
$$|y_i|\, ,\ |z_i| \leq 1 + \frac{\alpha}{2^i}.$$
Puesto que $\frac{y_i+z_i}{2} = 1 + \frac{\alpha}{2^i}$ se tiene entonces que
$$1 + \frac{\alpha}{2^i} = \left| \frac{y_i + z_i}{2} \right| \leq \frac{|y_i| +\ |z_i|}{2} \leq 1 + \frac{\alpha}{2^i}.$$
Por lo cual
$$\frac{|y_i| +\ |z_i|}{2} = 1 + \frac{\alpha}{2^i}$$
con $|y_i|\, ,\ |z_i| \leq 1 + \frac{\alpha}{2^i}$, lo cual implica que
$$|y_i| = |z_i| = 1 + \frac{\alpha}{2^i}.$$
Ahora, puesto que $1 + \frac{\alpha}{2^i}$ es el punto medio de $\frac{y_i+z_i}{2}$ se tiene que $y_i > 0$ o $z_i > 0$. En cualquiera de los dos casos se tiene entonces que
$$y_i = z_i = 1 + \frac{\alpha}{2^i}.$$

Tomemos ahora $j \in \mathbb{N}$ con $j \neq i$. Como $|||y|||_\alpha = |||z|||_\alpha = 1$ resulta que

$$|y_j| + |y_i| \leq 1 + \frac{\alpha}{2^j} + \frac{\alpha}{2^i}.$$

Así,

$$|y_j| + 1 + \frac{\alpha}{2^i} = |y_j| + |y_i| \leq 1 + \frac{\alpha}{2^j} + \frac{\alpha}{2^i}.$$

Por lo cual $|y_j| \leq \frac{\alpha}{2^j}$. Análogamente $|z_j| \leq \frac{\alpha}{2^j}$. Así, tenemos que $\frac{y_j+z_j}{2} = \frac{\alpha}{2^j}$ con $|y_j|$, $|z_j| \leq \frac{\alpha}{2^j}$, lo cual implica que $|y_j| = |z_j| = \frac{\alpha}{2^j}$, y en consecuencia que

$$y_j = z_j = \frac{\alpha}{2^j}.$$

Se tiene entonces que $x = y = z$. Así, $x \in \mathcal{E}(B_{(l^1,|||.|||_\alpha)})$. Por lo tanto $E \subset \mathcal{E}(B_{(l^1,|||.|||_\alpha)})$. El caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se sigue del caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y del inciso $vi)$ del lema 4.14.

Puesto que $E \subset \mathcal{E}(B_{(l^1,|||.|||_\alpha)})$, del inciso $iv)$ del lema 4.14 obtenemos que $\rho(E) \subset \mathcal{E}(B_{(l^1,|||.|||_\alpha)})$.

Ahora probaremos que $\mathcal{E}(B_{Y_n}) = \rho(E_n)$. La prueba de que $\rho(E_n) \subset \mathcal{E}(B_{Y_n})$ es análoga a la prueba de que $\rho(E) \subset \mathcal{E}(B_{(l^1,|||.|||_\alpha)})$. Resta mostrar que $\mathcal{E}(B_{Y_n}) \subset \rho(E_n)$. Tomemos $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{E}(B_{Y_n})$ tal que $x_i \geq 0,\ i = 1, ..., n$. Se tiene que

$$\frac{\alpha}{2^i} \leq x_i \leq 1 + \frac{\alpha}{2^i},\ i = 1, ..., n.$$

Como $x \in \mathcal{E}(B_{Y_n})$ se tiene que $|||x|||_\alpha = 1$. Sea

$$N = \text{mín}\left\{ m \in \{1, ..., n\} : \#F = m \text{ y } \frac{\sum_{i\in F} |c_i|}{1 + \sum_{i\in F} \frac{\alpha}{2^i}} = 1 \right\}.$$

Si $N > 1$, entonces existen $n_1, ..., n_N \in \{1, ..., n\}$ con $n_1 < n_2 <, ..., < n_N$ tales que

$$\frac{x_{n_1} + ... + x_{n_N}}{1 + \frac{\alpha}{2^{n_1}} + ... + \frac{\alpha}{2^{n_N}}} = 1.$$

Para simplificar la notación supondremos que $n_1 = 1, ..., n_N = N$. Así,

$$x_1 + ... + x_N = 1 + \frac{\alpha}{2^1} + ... + \frac{\alpha}{2^N}.$$

Tomemos $i \in \{1, ..., n\}$ con $N < i \leq n$. Como $|||x|||_\alpha = 1$ se tiene que

$$x_1 + ... + \ x_N + x_i \leq 1 + \frac{\alpha}{2^1} + ... + \frac{\alpha}{2^N} + \frac{\alpha}{2^i}.$$

En consecuencia $x_i \leq \frac{\alpha}{2^i}$ y además, como $\frac{\alpha}{2^i} \leq x_i, \ i = 1, ..., n$, se tiene que

$$x_i = \frac{\alpha}{2^i}, \ N < i \leq n.$$

Sea $i \in \{1, ..., N\}$. Si $x_i = \frac{\alpha}{2^i}$, entonces

$$x_1 + ... + x_{i-1} + x_{i+1} + ... + \ x_N = 1 + \frac{\alpha}{2^1} + ... + \frac{\alpha}{2^{i-1}} + \frac{\alpha}{2^{i+1}} + ... + \frac{\alpha}{2^N},$$

lo que contradice la definición de N. Así,

$$\frac{\alpha}{2^i} < x_i, \ i = 1, ..., N$$

y puesto que $N > 1$ se tiene que

$$x_i < 1 + \frac{\alpha}{2^i}, \ i = 1, ..., N.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\alpha}{2^i} < x_i < 1 + \frac{\alpha}{2^i}, \ i = 1, ..., N.$$

Consideremos $A \subset \{1, ..., N\}$ tal que $\#A < N$. De la definición de N se tiene que

$$\sum_{i \in A} x_i < 1 + \sum_{i \in A} \frac{\alpha}{2^i}$$

y entonces existe $r(A) > 0$ tal que

$$\sum_{i \in A} x_i + r(A) < 1 + \sum_{i \in A} \frac{\alpha}{2^i}.$$

Sea

$$r = \text{mín}\,\{r(A) : A \subset \{1, ..., N\} \ \text{ y } \#A < N\} > 0.$$

Si N es par entonces

$$y = \left(x_1 + \frac{r}{N}, x_2 - \frac{r}{N}, ..., x_{N-1} + \frac{r}{N}, x_N - \frac{r}{N}, x_{N+1}, ..., x_n\right)$$

y

$$z = \left(x_1 - \frac{r}{N}, x_2 + \frac{r}{N}, ..., x_{N-1} - \frac{r}{N}, x_N + \frac{r}{N}, x_{N+1}, ..., x_n\right)$$

cumplen que $x = \frac{y+z}{2}$ con $x \neq y,\ x \neq z$ y $|||y|||_\alpha, |||z|||_\alpha \leq 1$, lo cual es una contradicción. Si N es impar entonces

$$\begin{aligned} y \ &= \ \Big(x_1 + \frac{r}{2N}, x_2 - \frac{r}{N}, x_3 + \frac{r}{2N}, x_4 - \frac{r}{N}, x_5 + \frac{r}{N}, ... \\ &\quad ..., x_{N-1} - \frac{r}{N}, x_N + \frac{r}{N}, x_{N+1}, ..., x_n\Big) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z \ &= \ \Big(x_1 - \frac{r}{2N}, x_2 + \frac{r}{N}, x_3 - \frac{r}{2N}, x_4 + \frac{r}{N}, x_5 - \frac{r}{N}, ... \\ &\quad ..., x_{N-1} + \frac{r}{N}, x_N - \frac{r}{N}, x_{N+1}, ..., x_n\Big) \end{aligned}$$

cumplen que $x = \frac{y+z}{2}$ con $x \neq y,\ x \neq z$ y $|||y|||_\alpha, |||z|||_\alpha \leq 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $N = 1$. En consecuencia $|||x|||_\alpha = \frac{x_i}{1+\frac{\alpha}{2^i}}$ para algún $i \in \{1, ..., n\}$. Así, $x_i = 1 + \frac{\alpha}{2^i}$. Tomemos $j \in \{1, ..., n\}$ con $j \neq i$. Puesto que $x_i + x_j \leq 1 + \frac{\alpha}{2^i} + \frac{\alpha}{2^j}$ se tiene que $x_j \leq \frac{\alpha}{2^j}$, y puesto que $\frac{\alpha}{2^j} \leq x_j$ obtenemos que $x_j = \frac{\alpha}{2^j}$. Hemos obtenido entonces que $x \in E_n$. Por lo cual

$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{E}(B_{Y_n}) \text{ tal que } x_i \geq 0,\ i = 1, ..., n\} \subset E_n.$$

Luego, por *ii*) del lema 4.14 se tiene que

$$\mathcal{E}(B_{Y_n}) = \rho\left(\{(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{E}(B_{Y_n}) \text{ tal que } x_i \geq 0,\ i = 1, ..., n\}\right) \subset \rho\left(E_n\right). \ \blacksquare$$

Como conjuntos, es decir, sin tener en cuenta las normas, se tiene que $(l^\infty, ||.||_\alpha) = l^\infty$ y $(l^1, |||.|||_\alpha)^* = (l^1)^*$. Así, podemos considerar a la función $R : (l^\infty, ||.||_\alpha) \longrightarrow (l^1, |||.|||_\alpha)^*$, donde $R : l^\infty \longrightarrow (l^1)^*$ es la representación de Riesz.

Proposición 4.16 *La función* $R : (l^\infty, ||.||_\alpha) \longrightarrow (l^1, |||.|||_\alpha)^*$ *es un isomorfismo isométrico.*

Demostración Ya sabemos que $R : (l^\infty, ||.||_\alpha) \longrightarrow (l^1, |||.|||_\alpha)^*$ es lineal, 1-1 y sobre. Resta mostrar que $R : (l^\infty, ||.||_\alpha) \longrightarrow (l^1, |||.|||_\alpha)^*$ es una isometría. Sea $c = \{c_n\} \in l^\infty$. Puesto que $\rho(E) \subset \mathcal{E}(B_{(l^1,|||\cdot|||_\alpha)})$ Se tiene que

$$\begin{aligned}
\|Rc\| &= \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right| : |||\{x_n\}|||_\alpha = 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right| : \{x_n\} \in \mathcal{E}(B_{(l^1,|||\cdot|||_\alpha)})\right\} \\
&\geq \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right| : \{x_n\} \in \rho(E)\right\} \\
&= ||c||_\alpha.
\end{aligned}$$

Por otra parte, tomemos $x = \{x_n\} \in \mathcal{E}(B_{(l^1,|||\cdot|||_\alpha)})$, entonces se tiene que

$$\frac{\alpha}{2^n} \leq |x_n|, \ n \in \mathbb{N}.$$

Así, $|x_n| = \frac{\alpha}{2^n} + r_n$ para algún $r_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ y puesto que

$$\frac{\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} r_n}{1+\alpha} = \frac{\|x\|_1}{1+\alpha} \leq |||x|||_\alpha = 1,$$

resulta que $\sum_{n=1}^{\infty} r_n \leq 1$. En consecuencia

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\,|x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \frac{\alpha}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\, r_n \leq \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{2^n} + \|c\|_\infty = ||c||_\alpha.$$

Por lo cual $\|Rc\| \leq ||c||_\alpha$ y por lo tanto

$$\|Rc\| = ||c||_\alpha. \ \blacksquare$$

4.2. El espacio $(c_0, \|.\|_D)^*$

A continuación determinaremos el espacio dual de $(c_0, \|.\|_D)^*$. En esta sección supondremos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Procederemos como en la sección anterior, calculando primero los puntos extremos de la bola unitaria de $(c_0, \|.\|_D)$.

Lema 4.17 *Sea* $X = (c_0, \|.\|_D)$. *Se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(B_X) = \{\{x_n\} \in S_X : \ x_n \in \{1, 0\}, \ n \in \mathbb{N}\} \cup \\ \{\{x_n\} \in S_X : \ x_n \in \{-1, 0\}, \ n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Demostración Notemos primero que si $\{x_n\} \in S_X$ entonces $|x_n - x_m| \leq 1$, $n, \ m \in \mathbb{N}$ y $|x_n| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia si $\{x_n\} \in S_X$ es tal que $x_{n_0} = 1$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ entonces $0 \leq x_n \leq 1$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Análogamente si $\{x_n\} \in S_X$ es tal que $x_{n_0} = -1$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ entonces $-1 \leq x_n \leq 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Sean $A = \{\{x_n\} \in S_X : \ x_n \in \{1, 0\}, \ n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{\{x_n\} \in S_X : \ x_n \in \{-1, 0\}, \ n \in \mathbb{N}\}$. Así, $A, \ B \subset S_X$.

Tomemos $x = \{x_n\} \in A$ y supongamos que $x = \frac{y+z}{2}$ con $y, \ z \in S_X$. Digamos que $y = \{y_n\}$ y $z = \{z_n\}$. Como $x \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} = 1$. Si $x_n = 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$, claramente se tiene que $x_n = y_n = z_n$, pues $x_n = \frac{y_n + z_n}{2}$ y $y_n, \ z_n \leq 1$. En particular se tiene que $x_{n_0} = y_{n_0} = z_{n_0} = 1$. Por otro lado, si $x_n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, también se tiene que $x_n = y_n = z_n$, pues si $y_n < 0$ obtenemos que $|y_n - y_{n_0}| > 1$, lo cual contradice que $|y_n - y_m| \leq 1, \ n, \ m \in \mathbb{N}$ y si $y_n > 0$ entonces $z_n < 0$ y también llegamos a una contradicción. Así $x = y = z$. Por lo cual $x \in \mathcal{E}(B_X)$. Luego $A \subset \mathcal{E}(B_X)$. Análogamente $B \subset \mathcal{E}(B_X)$.

Tomemos ahora $x = \{x_n\} \in S_X \backslash \{A \cup B\}$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < |x_{n_0}| < 1$. Sean $a = \inf_n x_n$ y $b = \sup_n x_n$. Si $x_{n_0} \in (a, b)$, definamos $c = \min(|x_{n_0} - a|, \ |x_{n_0} - b|)$, $y_n = z_n = x_n$, $n \neq n_0$, $y_{n_0} = x_{n_0} - c$ y $z_{n_0} = x_{n_0} + c$. Así, $x_n = \frac{y+z}{2}$ con $y, \ z \in S_X$ y $x \neq y, \ x \neq z$. Por lo que $x \in S_X \backslash \mathcal{E}(B_X)$. Supongamos ahora que $x_{n_0} = a$ o que $x_{n_0} = b$. Como $0 < |x_{n_0}| < 1$ y $\sup\limits_{n, \ m \in \mathbb{N}} |x_n - x_m| = 1$, resulta que $0 \in (a, b)$. Puesto que $x_n \longrightarrow 0$, existe $n_1 > n_0$ tal que $x_{n_1} \in (a, b)$, lo cual nuevamente implica que $x \in S_X \backslash \mathcal{E}(B_X)$. Por lo tanto $\mathcal{E}(B_X) \subset A \cup B$. ■

Lema 4.18 *Sea* $f \in (c_0, \|.\|_D)^*$. *Entonces existe una única sucesión* $\{c_n\} \in l^1$ *tal que* $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n^*$ *y*

$$\|f\|_D = \max\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} c_n^-\right),$$

donde $c_n^+ = \max(c_n, 0)$ *y* $c_n^- = -\min(c_n, 0)$.

Demostración Sea $f \in (c_0, \|.\|_D)^*$. Puesto que $\{e_n\}$ es base reductora de $(c_0, \|.\|_D)$, existe una única sucesión $\{c_n\} \subset \mathbb{K}$ tal que $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n^*$. Como conjuntos $(c_0, \|.\|_D)^* = (c_0)^*$, luego, $f \in (c_0)^*$. Así, $f = R\{a_n\}$ donde $R : l^1 \longrightarrow c_0^*$ es la representación de Riesz. En consecuencia

$$c_n = f(e_n) = R\{a_n\}(e_n) = a_n.$$

Por ende $\{c_n\} = \{a_n\} \in l^1$. Así,

$$\begin{aligned}
\|f\|_D &= \sup_{x \in B_X} |f(x)| = \sup_{x \in \mathcal{E}(B_X)} |f(x)| \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{n \in F} c_n \right| : F \subset \mathbb{N},\ F \text{ finito} \right\} \\
&= \text{máx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} c_n^- \right),
\end{aligned}$$

donde $c_n^+ = \text{máx}(c_n, 0)$ y $c_n^- = -\text{mín}(c_n, 0)$. ■

Para cada $c = \{c_n\} \in l^1$ consideremos la función $f_c = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n^* \in (c_0, \|.\|_D)^*$. Por el lema anterior, se tiene que $\|f_c\|_D = \text{máx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} c_n^-\right)$. Definamos

$$|||c|||_D = \|f_c\|_D.$$

Notemos que $|||.|||_D$ es una norma en l^1.

Como conjuntos, es decir, sin tener en cuenta las normas, se tiene que $(l^1, |||.|||_D) = l^1$ y entonces que $(c_0, \|.\|_D)^* = (c_0)^*$. Así, podemos considerar a la función $R : (l^1, |||.|||_D) \longrightarrow (c_0, \|.\|_D)^*$, donde $R : l^1 \longrightarrow c_0^*$ es la representación de Riesz.

Proposición 4.19 *La función* $R : (l^1, |||.|||_D) \longrightarrow (c_0, \|.\|_D)^*$ *es un isomorfismo isométrico.*

Demostración Ya sabemos que $R : (l^1, |||.|||_D) \longrightarrow (c_0, \|.\|_D)^*$ es lineal, 1-1 y sobre. Sea $c = \{c_n\} \in l^1$. Notemos que

$$\|R(c)\|_D = \|f_c\|_D = |||c|||_D.$$

Por lo cual $R : (l^1, |||.|||_D) \longrightarrow (c_0, \|.\|_D)^*$ es una isometría. ■

Observación 4.20 *Puesto que* $\|x\|_\infty \leq \|x\|_D \leq 2\|x\|_\infty$, $x \in c_0$ *y* $|||.|||_D$ *en* l^1 *es la norma dual de* $\|.\|_D$ *en* c_0 *resulta que*

$$\frac{1}{2}\|x\|_1 \leq |||x|||_D \leq \|x\|_1, \; x \in l^1.$$

Procediendo como en el corolario 4.12 obtenemos lo siguiente.

Corolario 4.21 $(c_0, \|.\|_D)^*$ *tiene la* ω*-PPF.* ■

Veamos ahora si $(l^1, |||.|||_D)$ tiene la PPF, para ello consideremos la siguiente definición que es inducida por el comportamiento de la base canónica de l^1 en el espacio $(l^1, |||.|||_D)$.

Definición 4.22 *Sea* X *un espacio de Banach. Diremos que* $\{x_n\} \subset X$ *es una sucesión aibc*$(l^1, |||.|||_D)$ *si* $\{x_n\}$ *es convexamente cerrada y existe* $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ *tal que* $\varepsilon_n \to 0$ *y*

$$\begin{aligned} \max\left(\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)\,t_n^+, \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)\,t_n^-\right) &\leq \\ \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| &\leq \\ \leq \max\left(\sum_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)\,t_n^+, \sum_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)\,t_n^-\right)&, \end{aligned} \tag{4.4}$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$.

Notemos que si $\varepsilon_n = \frac{1}{2(n+1)^2-1}$, entonces $\varepsilon_n \to 0$ y $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_{n+1}} > \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{2} > 0$.

Proposición 4.23 *Sea* X *un espacio de Banach. Consideremos* $\{\varepsilon_n\} \subset (0,1)$ *tal que* $\varepsilon_n \to 0$ *y* $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_{n+1}} > 0$*. Si* X *contiene una sucesión aibc*$(l^1, |||.|||_D)$ $\{x_n\}$ *con esta* $\{\varepsilon_n\}$*, entonces* X *no tiene la PPF.*

Demostración Sean $P = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_{n+1}} > 0$, $\mu_1 = 1$ y $\mu_{n+1} = \frac{1-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_{n+1}}\mu_n$, $n \in \mathbb{N}$. Así, $\mu_{n+1} < \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$ y $\mu_n \longrightarrow P > 0$. Definamos $y_n = \mu_n x_n$, $n \in \mathbb{N}$ y $C = \overline{conv}\{y_n\}$. Así, C es no vacío, convexo, cerrado y acotado. Enseguida veremos que $\{y_n\}$ es equivalente a la base canónica $\{e_n\}$ de l^1. Sea $\{t_n\} \subset \mathbb{K}$. Puesto que $\frac{1}{2}\|c\|_1 \leq |||c|||_D \leq \|c\|_1$, $c \in l^1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{m} t_n y_n\right\| &= \left\|\sum_{n=1}^{m} t_n \mu_n x_n\right\| \leq \left|\left|\left|\sum_{n=1}^{m} (1+\varepsilon_n)\, t_n \mu_n e_n\right|\right|\right|_D \\
&\leq \left\|\sum_{n=1}^{m} (1+\varepsilon_n)\, t_n \mu_n e_n\right\|_1 \leq \left(1+\max_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n\right)\left\|\sum_{n=1}^{m} t_n \mu_n e_n\right\|_1 \\
&\leq \left(1+\max_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n\right)\left(\max_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right)\left\|\sum_{n=1}^{m} t_n e_n\right\|_1, \ m \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{m} t_n y_n\right\| &= \left\|\sum_{n=1}^{m} t_n \mu_n x_n\right\| \geq \left|\left|\left|\sum_{n=1}^{m} (1-\varepsilon_n)\, t_n \mu_n e_n\right|\right|\right|_D \\
&\geq \frac{1}{2}\left\|\sum_{n=1}^{m} (1-\varepsilon_n)\, t_n \mu_n e_n\right\|_1 \geq \frac{1}{2}\left(1-\max_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n\right)\left\|\sum_{n=1}^{m} t_n \mu_n e_n\right\|_1 \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1-\max_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n\right) P \left\|\sum_{n=1}^{m} t_n e_n\right\|_1, \ m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\{y_n\}$ es equivalente a la base canónica $\{e_n\}$ de l^1. Puesto que la base canónica de l^1 es convexamente cerrada se tiene entonces que $\{y_n\}$ es convexamente cerrada. Así,

$$C = \overline{conv}\,\{y_n\} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n : t_n \geq 0 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1\right\}.$$

Para cada $\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n \in C$ definamos $T\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_{n+1}$. Luego, $T : C \longrightarrow C$ es afín y no tiene puntos fijos. Resta mostrar que T es no expansivo. Sean $x, y \in C$ con $x \neq y$. Digamos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n$ y $y = \sum_{n=1}^{\infty} s_n y_n$ con $t_n,\ s_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1$. Entonces, si $r_n =$

$t_n - s_n,\ n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon_0 = r_0^+ = r_0^- = \mu_0 = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} r_n y_{n+1} \right\| \\
&\leq \text{máx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (1+\varepsilon_n)\, r_{n-1}^+ \mu_n, \sum_{n=1}^{\infty} (1+\varepsilon_n)\, r_{n-1}^- \mu_n \right) \\
&= \text{máx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon_{n-1})\, r_{n-1}^+ \mu_{n-1}, \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon_{n-1})\, r_{n-1}^- \mu_{n-1} \right) \\
&= \text{máx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon_n)\, r_n^+ \mu_n, \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon_n)\, r_n^- \mu_n \right) \\
&\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} r_n y_n \right\| = \|x - y\| . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Puesto que la base canónica de l^1 es una sucesión aib$(l^1, |||.|||_D)$ en $(l^1, |||.|||_D)$, de la proposición anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.24 *El espacio $(l^1, |||.|||_D)$ no tiene la PPF y en consecuencia $(c_0, \|.\|_D)^*$ no tiene la PPF.*

Apéndice A

La norma $||.||^*$

En el Capítulo 3, a partir del comportamiento de la base sumante de c_0, $\{\xi_n\}$, con las normas en cuestión, definimos sucesiones que nos permitieron construir conjuntos no vacíos, convexos, cerrados y acotados y operadores T no expansivos sin puntos fijos definidos en estos conjuntos. De hecho los operadores T se construyen como en la proposición 2.19. En este apéndice introducimos la norma $||.||^*$. Más adelante, en la definición A.5, definiremos un tipo de sucesión que se "comporta" como la base sumante de c_0 con la norma $||.||^*$. Sin embargo no hemos podido probar que el operador T definido como en la proposición 2.19 sea no expansivo. Como lo señalamos más adelante, en [7] se construyen otros operadores no expansivos sin punto fijo definidos en subconjuntos de c_0 y tampoco hemos podido probar que tales operadores sean no expansivos con respecto a la norma $||.||^*$. Un trabajo a futuro es tratar de construir alguno. Así, no sabemos si c_0 con la norma $||.||^*$ tiene la PPF. Lo que si sabemos, como se señala en la proposición A.4 es que $(c_0, ||.||^*)$ tiene la ω-PPF.

Consideremos una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$ tal que $a_n > 0$ y $2a_{n+1} \leq a_n,\ n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. Para cada sucesión acotada $\{x_n\} \subset \mathbb{K}$, definamos

$$\|\{x_n\}\|^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sup_{k \geq n} |x_k| \,.$$

Notemos que en este caso $||.||^*$ y $||.||_\infty$ son equivalentes, pues

$$a_1||x||_\infty \leq ||x||^* \leq A||x||_\infty,\ x \in l^\infty,$$

donde $A = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$.

Consideremos el siguiente Lema.

Lema A.1 *Sea X un espacio de Banach con base convexamente cerrada $\{x_n\}$. Sea $C = \overline{conv}\{x_n\}$. Definamos $S : C \longrightarrow C$ como $S\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_{n+1}$ y $T : C \longrightarrow C$ como en la proposición 2.19. Si S es no expansivo entonces T es no expansivo.*

Demostración Sean $x, y \in C$. Así, $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ y $y = \sum_{n=1}^{\infty} r_n x_n$ con $t_n, r_n \geq 0$ y con $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} r_n = 1$. Definamos $\beta_n = t_n - r_n,\ n \in \mathbb{N}$. Puesto que

$$\begin{aligned} Tx - Ty &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n x_n = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_{n+1} + \frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_{n+2} + ... \\ &= \frac{1}{2}(Sx - Sy) + \frac{1}{2^2}\left(S^2x - S^2y\right) + ..., \end{aligned}$$

donde $B_1 = 0$ y $B_n = \frac{\beta_1}{2^{n-1}} + \frac{\beta_2}{2^{n-2}} + ... + \frac{\beta_{n-1}}{2},\ n \geq 2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &\leq \frac{1}{2}\|Sx - Sy\| + \frac{1}{2^2}\left\|S^2x - S^2y\right\| + ... \\ &\leq \frac{1}{2}\|Sx - Sy\| + \frac{1}{2^2}\|Sx - Sy\| + ... \leq \|x - y\|. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Consideremos a la base sumante de c_0, $\{\xi_n\}$, en el espacio $(c_0, ||.||^*)$. Sea $C = \overline{conv}\{\xi_n\}$ y $T : C \longrightarrow C$ como en la proposición 2.19. Definamos $S : C \longrightarrow C$ como $S\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_{n+1}$. Si S fuera no expansivo, por el lema A.1 se tendría que el operador T es no expansivo. De esta manera tendríamos que el operador T es no expansivo, sin embargo esto no sucede como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo A.2 *Consideremos a la base sumante de c_0, $\{\xi_n\}$, en el espacio $(c_0, ||.||^*)$. Sea $C = \overline{conv}\{\xi_n\}$, definamos $S : C \longrightarrow C$ como $S\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi_{n+1}$. Entonces S es expansivo.*

$$\|S\xi_1 - S\xi_2\|^* = \|\xi_2 - \xi_3\|^* = a_1 + a_2 + a_3 > a_1 + a_2 = \|\xi_1 - \xi_2\|^*.$$

En general tenemos lo siguiente.

Lema A.3 *Consideremos a la base sumante de* c_0, $\{\xi_n\}$, *en el espacio* $(c_0, ||.||^*)$, *donde* $||.||^*$ *está inducida por la sucesión* $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. *Sea* $C = \overline{conv}\{\xi_n\}$, *definamos* $S : C \longrightarrow C$ *como* $S\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n\xi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n\xi_{n+1}$. *Entonces*

$$\|Sx - Sy\|^* > \|x - y\|^*,$$

para cada $x, y \in C$ *con* $x \neq y$.

Demostración Sean $x, y \in C$ con $x \neq y$. Así, $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n\xi_n$ y $y = \sum_{n=1}^{\infty} r_n\xi_n$ con $t_n, r_n \geq 0$ y con $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} r_n = 1$. Definamos $\beta_n = t_n - r_n,\ n \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$x - y = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n, \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n, \sum_{n=3}^{\infty} \beta_n, ...\right)$$

y que

$$Sx - Sy = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n, \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n, ...\right).$$

En consecuencia, de que $x \neq y$ y $Sx - Sy \in c_0$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|Sx - Sy\|^* &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) \sup_{k\geq 1} \left|\sum_{m=k}^{\infty} \beta_m\right| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sup_{k\geq n} \left|\sum_{m=k}^{\infty} \beta_m\right| \\
&= \frac{1}{2} \sup_{k\geq 1} \left|\sum_{m=k}^{\infty} \beta_m\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sup_{k\geq n} \left|\sum_{m=k}^{\infty} \beta_m\right| \\
&= \frac{1}{2} \sup_{k\geq 1} \left|\sum_{m=k}^{\infty} \beta_m\right| + \frac{1}{2} \|x - y\|^* \\
&> \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{k\geq n} \left|\sum_{m=k}^{\infty} \beta_m\right| + \frac{1}{2} \|x - y\|^* \\
&= \frac{1}{2} \|x - y\|^* + \frac{1}{2} \|x - y\|^* = \|x - y\|^*. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

En [7] Dowling, Lennard y Turett construyen otros operadores no expansivos sin punto fijo en subconjuntos de c_0. No hemos podido probar que tales operadores sean no expansivos con respecto a la norma $||.||^*$, ni hemos podido construir ninguno; por lo tanto no sabemos si $(c_0, ||.||^*)$ tiene la propiedad de punto fijo. Lo que sí tenemos es que $(c_0, ||.||^*)$ tiene la ω-PPF, como lo veremos a continuación.

Proposición A.4 *$(c_0, ||.||^*)$ tiene la ω-PPF.*

Demostración Se deduce de que la base canónica de c_0 vista en $(c_0, ||.||^*)$ es incondicional con constante de incondicionalidad 1. ■

Consideremos la siguiente definición.

Definición A.5 *Sea X un espacio de Banach. Diremos que $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión aibs$||.||^*$, si $\{x_n\}$ es convexamente cerrada y existen $\{\varepsilon_k\} \subset (0, \infty)$ y $\{a_k\} \subset (0, \infty)$ tales que $\varepsilon_k \longrightarrow 0$, $2a_{k+1} \leq a_k$, $k \in \mathbb{N}$ y*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)a_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| &\leq \\ \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| &\leq \\ \leq \sum_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)a_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right|&, \end{aligned} \tag{A.1}$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

Aunque no tengamos un teorema análogo al teorema 2 de [5], tenemos lo siguiente

Proposición A.6 *Sea $K \subset (c_0, \|.\|^*)$ no vacío, convexo cerrado y acotado, donde $\|.\|^*$ está inducida por alguna sucesión $\{a_n\}$. Si K no es ω-compacto, entonces existen $\{x_n\} \subset K$, $\Lambda \neq 0$, $\{\varepsilon_n\} \subset (0, \infty)$ convergente a cero y $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ con $b_n > 0$, $2b_{n+1} \leq b_n$ tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)a_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n\left(\frac{1}{\Lambda}x_n\right)\right\|^* \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right|, \tag{A.2}$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ con $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

Demostración Probaremos primero la desigualdad izquierda de (A.2). Como K no es ω-compacto, existen $\{x_n\} \subset K$ y $x \in l^\infty$ tales que $x_n \overset{\omega^*}{\longrightarrow} x \in l^\infty \backslash c_{0.}$ Digamos que $x_n = \{\alpha_k^n\}_{k=1}^\infty$ y $x = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$. Sea Λ un límite subsecuencial de $\{\alpha_k\}$ con $\Lambda \neq 0$.

Supongamos primero que $\Lambda = 1$. Tomemos $\beta \in \left(0, \frac{4}{7}\right)$ y definamos $r = \frac{a_2\beta}{2\sum_{n=1}^\infty a_n}$. Puesto que 1 es un límite subsecuencial de $\{\alpha_k\}$, existen $\{m_k\}$ subsucesión de $\mathbb{N}$ y $\{\mu_k\} \subset \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha_{m_k} = 1 + \mu_k$$

y

$$|\mu_k| \leq \frac{\beta}{2^k},\ k \in \mathbb{N}. \tag{A.3}$$

Sea $l_1 = 1$. Como $\{x_n\}$ converge coordenada a coordenada a x, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha_{m_{l_1}}^k = 1 + \mu_{l_1} + \rho_{m_{l_1}}^k,$$

con

$$\left|\rho_{m_{l_1}}^k\right| < \frac{\beta}{2},\ k \geq n_1$$

y

$$\rho_{m_{l_1}}^k \underset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Puesto que $x_{n_1} \in c_0$, existe $N_1 > m_{l_1}$ tal que

$$|\alpha_s^{n_1}| \leq r,\ s \geq N_1.$$

Tomemos $l_2 > l_1$ tal que $m_{l_2} > N_1$. Como $\{x_n\}$ converge coordenada a coordenada a x, existe $n_2 > n_1$ tal que

$$\alpha_{m_{l_2}}^k = 1 + \mu_{l_2} + \rho_{m_{l_2}}^k,$$

con

$$\left|\rho_{m_{l_2}}^k\right| < \frac{\beta}{2^2},\ k \geq n_2$$

y

$$\rho_{m_{l_2}}^k \underset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

y que además satisface

$$\left|\rho_{m_{l_1}}^{n_1}\right| + \left|\rho_{m_{l_1}}^{k}\right| < \frac{\beta}{2},\ k \geq n_2$$

y

$$|\alpha_s^{n_2} - \alpha_s| < \frac{r}{2^2},\ 1 \leq s < N_1.$$

Como $x_{n_2},\, x_{n_1} \in c_0$, existe $N_2 > m_{l_2}$ tal que

$$|\alpha_s^{n_2}| + |\alpha_s^{n_1}| \leq r,\ s \geq N_2.$$

Tomemos $l_3 > l_2$ tal que $m_{l_3} > N_2$. Como $\{x_n\}$ converge coordenada a coordenada a x, existe $n_3 > n_2$ tal que

$$\alpha_{m_{l_3}}^k = 1 + \mu_{l_3} + \rho_{m_{l_3}}^k,$$

con

$$\left|\rho_{m_{l_3}}^{k}\right| < \frac{\beta}{2^3},\ k \geq n_3,$$

$$\rho_{m_{l_3}}^{k} \underset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\left|\rho_{m_{l_2}}^{n_2}\right| + \left|\rho_{m_{l_2}}^{k}\right| < \frac{\beta}{2^2},\ k \geq n_3$$

y

$$\left|\rho_{m_{l_1}}^{n_1}\right| + \left|\rho_{m_{l_1}}^{n_2}\right| + \left|\rho_{m_{l_1}}^{k}\right| < \frac{\beta}{2},\ k \geq n_3$$

y tal que

$$|\alpha_s^{n_3} - \alpha_s| < \frac{r}{2^3},\ 1 \leq s < N_2.$$

Como $x_{n_3}, x_{n_2},\, x_{n_1} \in c_0$, existe $N_3 > m_{l_3}$ tal que

$$|\alpha_s^{n_3}| + |\alpha_s^{n_2}| + |\alpha_s^{n_1}| \leq r,\ s \geq N_3.$$

Tomemos $l_4 > l_3$ tal que $m_{l_4} > N_3$. Continuando de esta manera obtenemos subsucesiones $\{l_n\}, \{n_k\}$ y $\{N_n\}$ de $\mathbb{N}$ tales que

$$m_{l_n} > N_{n-1},\ n \geq 2,$$

$$\alpha_{m_{l_i}}^k = 1 + \mu_{l_i} + \rho_{m_{l_i}}^k,\ k \geq n_i,\ i \in \mathbb{N},$$

con

$$\sum_{j=i}^{\infty}\left|\rho_{m_{l_i}}^{n_j}\right| < \frac{\beta}{2^i},\ i \in \mathbb{N},$$

$$\rho_{m_{l_i}}^{k} \underset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

y además que

$$|\alpha_s^{n_{i+1}} - \alpha_s| < \frac{r}{2^{i+1}},\ 1 \leq s < N_i,\ i \in \mathbb{N}$$

y

$$\sum_{j=1}^{i}|\alpha_s^{n_j}| \leq r,\ s \geq N_i,\ i \in \mathbb{N}.$$

Seguiremos escribiendo $\{x_n\}$ en lugar de $\{x_{n_k}\}$. Así, tenemos que

$$m_{l_n} > N_{n-1},\ n \geq 2, \tag{A.4}$$

$$\alpha_{m_{l_i}}^{k} = 1 + \mu_{l_i} + \rho_{m_{l_i}}^{k},\ k \geq i,\ i \in \mathbb{N}, \tag{A.5}$$

con

$$\sum_{j=i}^{\infty}\left|\rho_{m_{l_i}}^{j}\right| < \frac{\beta}{2^i},\ i \in \mathbb{N}, \tag{A.6}$$

y además que

$$\left|\alpha_s^{i+1} - \alpha_s\right| < \frac{r}{2^{i+1}},\ 1 \leq s < N_i,\ i \in \mathbb{N} \tag{A.7}$$

y

$$\sum_{j=1}^{i}\left|\alpha_s^{j}\right| \leq r,\ s \geq N_i,\ i \in \mathbb{N}. \tag{A.8}$$

A continuación probaremos que $\{x_n\}$ cumple la desigualdad izquierda de (A.2) para toda $\{t_n\} \in l^1$ con $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$. Sea $\{t_n\} \in l^1$ con $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \alpha_1^n, \sum_{n=1}^{\infty} t_n \alpha_2^n, ...\right)$$

entonces

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\|^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j \alpha_k^j\right|.$$

Por otra parte se tiene que

$$\sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j\alpha_k^j\right| \geq \sup_{i\geq n}\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j\alpha_{m_{l_i}}^j\right|,$$

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j\alpha_{m_{l_i}}^j\right| \geq \left|\sum_{j=i}^{\infty} t_j\alpha_{m_{l_i}}^j\right| - \left|\sum_{j=1}^{i-1} t_j\alpha_{m_{l_i}}^j\right|$$

y

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=i}^{\infty} t_j\alpha_{m_{l_i}}^j\right| &= \left|\sum_{j=i}^{\infty} t_j\left(1+\mu_{l_i}+\rho_{m_{l_i}}^j\right)\right| \qquad \text{(A.9)}\\ &\geq \left|\sum_{j=i}^{\infty} t_j\right| - \left|\sum_{j=i}^{\infty} t_j\left(\mu_{l_i}+\rho_{m_{l_i}}^j\right)\right|.\end{aligned}$$

Por (A.3) y (A.6) se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=i}^{\infty} t_j\left(\mu_{l_i}+\rho_{m_{l_i}}^j\right)\right| &\leq \left|\mu_{l_i}\right|\left|\sum_{j=i}^{\infty} t_j\right| + \left|\sum_{j=i}^{\infty} t_j\rho_{m_{l_i}}^j\right| \qquad \text{(A.10)}\\ &\leq \left|\mu_{l_i}\right|\sup_{j\geq i}\left|\sum_{k=j}^{\infty} t_k\right| + \sum_{j=i}^{\infty}\left|\rho_{m_{l_i}}^j\right|\left(\sup_{j\geq i}|t_j|\right)\\ &\leq \frac{\beta}{2^{l_i}}\sup_{j\geq i}\left|\sum_{k=j}^{\infty} t_k\right| + \frac{\beta}{2^i}\sup_{j\geq i}|t_j|\\ &\leq \frac{\beta}{2^{i}}\sup_{j\geq i}\left|\sum_{k=j}^{\infty} t_k\right| + \frac{\beta}{2^i}\sup_{j\geq i}2\left|\sum_{k=j}^{\infty} t_k\right|\\ &= \frac{3\beta}{2^{i}}\sup_{j\geq i}\left|\sum_{k=j}^{\infty} t_k\right|\end{aligned}$$

y si $i \geq n$ se tiene que

$$\sup_{j\geq i}\left|\sum_{k=j}^{\infty} t_k\right|\frac{3\beta}{2^i} \leq \sup_{j\geq n}\left|\sum_{k=j}^{\infty} t_k\right|\frac{3\beta}{2^n}. \qquad \text{(A.11)}$$

Entonces, de (A.9), (A.10) y (A.11) se tiene que

$$\begin{aligned}\sup_{i\geq n}\left|\sum_{j=i}^{\infty}t_j\alpha^j_{m_{l_i}}\right| &\geq \sup_{i\geq n}\left(\left|\sum_{j=i}^{\infty}t_j\right|-\left|\sum_{j=i}^{\infty}t_j\left(\mu_{l_i}+\rho^j_{m_{l_i}}\right)\right|\right) \qquad \text{(A.12)}\\ &\geq \sup_{i\geq n}\left|\sum_{j=i}^{\infty}t_j\right|-\sup_{j\geq n}\left|\sum_{k=j}^{\infty}t_k\right|\frac{3\beta}{2^n}\\ &= \sup_{i\geq n}\left|\sum_{j=i}^{\infty}t_j\right|\left(1-\frac{3\beta}{2^n}\right).\end{aligned}$$

Por otra parte, como $\sum_{n=1}^{\infty}t_n=0$, se tiene que

$$\left|\sum_{j=1}^{i-1}t_j\alpha^j_{m_{l_i}}\right|= \qquad \text{(A.13)}$$

$$\begin{aligned}&=\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty}t_n\right)\left(\alpha^1_{m_{l_i}}-\alpha_{m_{l_i}}\right)+\left(\sum_{n=2}^{\infty}t_n\right)\left(\alpha^2_{m_{l_i}}-\alpha^1_{m_{l_i}}\right)+...+\left(\sum_{n=i}^{\infty}t_n\right)\left(\alpha^{i-1}_{m_{l_i}}\right)\right|\\ &\leq\left|\sum_{n=2}^{\infty}t_n\right|\left|\alpha^2_{m_{l_i}}-\alpha^1_{m_{l_i}}\right|+...+\left|\sum_{n=i}^{\infty}t_n\right|\left|0-\alpha^{i-1}_{m_{l_i}}\right|,\end{aligned}$$

y como $m_{l_i}>N_{i-1}$, de (A.8) resulta que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{i-1}t_j\alpha^j_{m_{l_i}}\right| &\leq \left(\sup_{2\leq k\leq i}\left|\sum_{j=k}^{\infty}t_j\right|\right)2\sum_{j=1}^{i-1}\left|\alpha^j_{m_{l_i}}\right|\\ &\leq \sup_{2\leq k\leq i}\left|\sum_{j=k}^{\infty}t_j\right|2r.\end{aligned}$$

Así,

$$\sup_{i\geq n}\left|\sum_{j=1}^{i-1}t_j\alpha^j_{m_{l_i}}\right|\leq\sup_{i\geq n}\left(\sup_{2\leq k\leq i}\left|\sum_{j=k}^{\infty}t_j\right|2r\right)\leq\sup_{k\geq 2}\left|\sum_{j=k}^{\infty}t_j\right|2r. \qquad \text{(A.14)}$$

De (A.12) y de (A.14) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{i\geq n}\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j\alpha^j_{m_{l_i}}\right| &\geq \sup_{i\geq n}\left(\left|\sum_{j=i}^{\infty} t_j\alpha^j_{m_{l_i}}\right| - \left|\sum_{j=1}^{i-1} t_j\alpha^j_{m_{l_i}}\right|\right)\\
&\geq \sup_{i\geq n}\left|\sum_{j=i}^{\infty} t_j\alpha^j_{m_{l_i}}\right| - \sup_{i\geq n}\left|\sum_{j=1}^{i-1} t_j\alpha^j_{m_{l_i}}\right|\\
&\geq \sup_{i\geq n}\left|\sum_{j=i}^{\infty} t_j\right|\left(1-\frac{3\beta}{2^n}\right) - \sup_{k\geq 2}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| 2r.
\end{aligned}$$

Por lo cual, como $r = \frac{a_2\beta}{2\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ y $\beta \in \left(0, \frac{4}{7}\right)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\|^* &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j\alpha^j_k\right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sup_{i\geq n}\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j\alpha^j_{m_{l_i}}\right|\\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sup_{i\geq n}\left|\sum_{j=i}^{\infty} t_j\right|\left(1-\frac{3\beta}{2^n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sup_{k\geq 2}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| 2r\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right|\left(1-\frac{3\beta}{2^n}\right) - a_2 \sup_{k\geq 2}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| \beta\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right|(1-\varepsilon_n),
\end{aligned}$$

donde $\varepsilon_1 = \frac{3\beta}{2},\ \varepsilon_2 = \frac{3\beta}{2^2} + \beta < 1,\ \varepsilon_k = \frac{3\beta}{2^k},\ k \geq 3.$

Supongamos ahora que $\Lambda \neq 1$. En este caso $\{y_n\}$ y y, donde $y_n \equiv \frac{1}{\Lambda}x_n$, y $y \equiv \frac{1}{\Lambda}x$ satisfacen que $y_n \xrightarrow{\omega^*} y \in l^\infty \backslash c_0$ y además se tiene que 1 es un limite subsecuencial de y, luego por el caso en que $\Lambda = 1$ obtenemos lo afirmado.

Ahora probaremos la desigualdad derecha de (A.2). Supongamos primero que $\Lambda = 1$. Sea $\{t_n\} \in l^1$ con $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$. Tomemos $q \geq 2$ y $k \in \mathbb{N}$ con $N_q \leq k < N_{q+1}$, donde la sucesión $\{N_q\}$ es como en la primera parte de la demostración. Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$, como en (A.13), obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j \alpha_k^j\right| &\leq \left|\sum_{j=2}^{\infty} t_j\right| \left|\alpha_k^2 - \alpha_k^1\right| + \left|\sum_{j=3}^{\infty} t_j\right| \left|\alpha_k^3 - \alpha_k^2\right| + ... \\
&= \sum_{s=2}^{\infty} \left|\sum_{j=s}^{\infty} t_j\right| \left|\alpha_k^s - \alpha_k^{s-1}\right|
\end{aligned}
$$

Sea $S = \sup_{x,y \in K} \|x - y\|_{\infty}$ .Como $N_q \leq k < N_{q+1}$, de (A.8) y (A.7) resulta que

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j \alpha_k^j\right| &\leq \left(\sup_{m \geq 2} \left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right|\right) \sum_{j=2}^{q} \left|\alpha_k^j - \alpha_k^{j-1}\right| + \qquad \text{(A.15)} \\
&\quad + \left|\sum_{j=q+1}^{\infty} t_j\right| \left|\alpha_k^{q+1} - \alpha_k^q\right| + \left|\sum_{j=q+2}^{\infty} t_j\right| \left|\alpha_k^{q+2} - \alpha_k^{q+1}\right| + \\
&\quad + \left(\sup_{m \geq q+3} \left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right|\right) \sum_{j=q+3}^{\infty} \left|\alpha_k^j - \alpha_k^{j-1}\right| \\
&\leq \sup_{m \geq 2} \left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| r + \sup_{m \geq q} \left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| 2S + \left(\sup_{m \geq q+3} \left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right|\right) \sum_{j=q+2}^{\infty} \frac{2r}{2^j} \\
&< \sup_{m \geq 1} \left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| 2r + \sup_{m \geq q} \left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| 2S.
\end{aligned}
$$

De manera similar si $1 \leq k < N_2$ se tiene que

$$
\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j \alpha_k^j\right| < \sup_{m \geq 1} \left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| 2r + \sup_{m \geq 1} \left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| 2S.
$$

Luego, como $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) 2r = a_2\beta < a_1$, resulta que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\|^* &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j \alpha_k^j\right| \\
&= \sum_{n=1}^{N_2-1} a_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j \alpha_k^j\right| + \sum_{n=N_2}^{N_3-1} a_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j \alpha_k^j\right| + \ldots \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{N_2-1} a_n\right) 2r \sup_{m\geq 1}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| + \left(\sum_{n=1}^{N_2-1} a_n\right) \sup_{m\geq 1}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| 2S + \\
&+ \left(\sum_{n=N_2}^{N_3-1} a_n\right) 2r \sup_{m\geq 1}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| + \left(\sum_{n=N_2}^{N_3-1} a_n\right) \sup_{m\geq 2}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| 2S + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) 2r \sup_{m\geq 1}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| + \\
&+ \sum_{n=1}^{N_2-1} a_n \sup_{m\geq 1}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| 2S + \sum_{n=N_2}^{N_3-1} a_n \sup_{m\geq 2}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| 2S + \ldots \\
&\leq a_1 \sup_{m\geq 1}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| + \sum_{n=1}^{N_2-1} a_n \sup_{m\geq 1}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| 2S + \sum_{n=N_2}^{N_3-1} a_n \sup_{m\geq 2}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| 2S + \ldots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right|,
\end{aligned}$$

donde $b_1 = a_1 + 2S\sum_{k=1}^{N_2-1} a_k$, y $b_k = 2S\sum_{j=N_k}^{N_{k+1}-1} a_k,\ k \geq 2$.

Supongamos ahora que $\Lambda \neq 1$. Consideremos a $\{y_n\}$ y y, donde $y_n \equiv \frac{1}{\Lambda}x_n$, y $y \equiv \frac{1}{\Lambda}x$. En este caso se tiene que 1 es un limite subsecuencial de y, luego por el caso en que $\Lambda = 1$ obtenemos lo afirmado. ■

Observación A.7 *Observemos que en la demostración de la proposición anterior no promediamos los* $x_n^{■s}$. *Notemos que si* $\limsup \alpha_k = 1$ *podemos elegir la sucesión* $\{x_n\}$ *de la proposición anterior de manera que se cumplan simultáneamente las condiciones (A.4), (A.5), (A.7) y (A.8) y las condiciones* $(1■), (2■), (3■)$ *y* $(4■)$ *del teorema 4 de [5]. En el teorema 4 de [5]* *escriben* $x_n = \{\xi_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ *en lugar de* $x_n = \{\alpha_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ *y* $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *en lugar de* $x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Sea $\{m_k\}$ *una subsucesión de* $\mathbb{N}$. *Notemos que si* y_n *es un promedio de* $x_{m_{n-1}}, x_{m_{n-1}+1}, ..., x_{m_n}$ *se siguen cumpliendo las condiciones (A.4), (A.5), (A.7) y (A.8) con algunas constantes* $\tau_{m_{l_i}}^k$ *en lugar de* $\rho_{m_{l_i}}^k$ *y con* N_{m_k} *en lugar de* N_k, *y en consecuencia* $\{y_n\}$ *sigue cumpliendo la desigualdad izquierda de (A.2). En el teorema 4 de [5] mediante un promedio de este tipo construyen una sucesión* $\{y_n\}$ *tal que* $\{y_n\}$ *es una sucesión aibsc*$_0$, *es decir,* $\{y_n\}$ *cumple la condición (1.1). Así, esta* $\{y_n\}$ *sigue cumpliendo la desigualdad izquierda de (A.2). Más precisamente en [5] construyen* $\{y_n\}$ *a partir de* $\{x_n\}$ *de la siguiente manera. (véase pág. 283 de [5]). Como* K *es acotado, existe* $B > 0$ *tal que* $\|x_k\|_{\infty} \leq B$, $k \in \mathbb{N}$. *Toman una sucesión creciente* $\{\delta_k\} \subset (0,1)$ *tal que* $\delta_n < \frac{\delta}{4^n}$, $n \in \mathbb{N}$ *(*δ *es un número positivo fijado de antemano). Toman una sucesión creciente de números naturales* $\{M(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *tal que* $\frac{B}{\Delta_n} < \delta_n$, $n \in \mathbb{N}$, *donde* $\Delta_n = M(n) - M(n-1)$ *y* $M(0) = 0$. *Finalmente definen* $y_n = \frac{1}{\Delta_n} \sum_{l=M(n-1)+1}^{M(n)} x_l$ *y denotan* $y_n = \{y_k^n\}_{k=1}^{\infty}$.

Seguiremos escribiendo $\{x_n\}$ *en lugar de* $\{y_n\}$ *con* $x_n = \{\alpha_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ *y* $x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$. *Así, si* $E_q \leq k < E_{q+1}$, *para algún* $q \geq 0$, *donde* $E_q = N_{M(q)}$, *de* (3■) *se tiene que (véase pág. 285 de [5])*

$$|\alpha_k| \leq 1 + \frac{4\delta}{4^{q+2}},$$

$$\left|\alpha_k^{q+1} - \alpha_k^q\right| \leq \frac{2\delta}{4^q} + \frac{j}{\Delta_n} |\alpha_k| \leq \frac{2\delta}{4^q} + \left(1 + \frac{4\delta}{4^{q+2}}\right) \leq 1 + \frac{3\delta}{4^q}$$

y

$$\left|\alpha_k^{q+2} - \alpha_k^{q+1}\right| \leq \frac{2\delta}{4^q} + \frac{\Delta_n - j}{\Delta_n} |\alpha_k| \leq \frac{2\delta}{4^q} + \left(1 + \frac{4\delta}{4^{q+2}}\right) \leq 1 + \frac{3\delta}{4^q},$$

para algún $j \in \{1, ..., \Delta_n\}$. *Luego, si* $E_q \leq k < E_{q+1}$ *con* $q \geq 2$, *en lugar de*

(A.15) se tiene que

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j \alpha_k^j\right| \leq \left(\sup_{m\geq 2}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right|\right)\sum_{j=2}^{q}\left|\alpha_k^j-\alpha_k^{j-1}\right| +$$

$$+\left|\sum_{j=q+1}^{\infty} t_j\right|\left|\alpha_k^{q+1}-\alpha_k^{q}\right| + \left|\sum_{j=q+2}^{\infty} t_j\right|\left|\alpha_k^{q+2}-\alpha_k^{q+1}\right| +$$

$$+\left(\sup_{m\geq q+3}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right|\right)\sum_{j=q+3}^{\infty}\left|\alpha_k^j-\alpha_k^{j-1}\right|$$

$$\leq \sup_{m\geq 2}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| r + \sup_{j\geq q}\left|\sum_{m=j}^{\infty} t_m\right| 2\left(1+\frac{3\delta}{4^q}\right) +$$

$$+\left(\sup_{m\geq q+3}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right|\right)\sum_{j=q+3}^{\infty}\frac{r}{2^j}$$

$$< \sup_{m\geq 1}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| 2r + \sup_{j\geq q}\left|\sum_{m=j}^{\infty} t_m\right| 2\left(1+\frac{3\delta}{4^q}\right).$$

De manera similar, si $1 \leq k < E_2$ se tiene que

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j \alpha_k^j\right| \leq \sup_{m\geq 1}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| 2r + \sup_{j\geq 1}\left|\sum_{m=j}^{\infty} t_m\right| 2\left(1+\frac{3\delta}{4}\right).$$

Luego, como $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) 2r = a_2\beta < a_1$, tenemos que

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\|^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j \alpha_k^j\right| \leq a_1 \sup_{m\geq 1}\left|\sum_{j=m}^{\infty} t_j\right| +$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{E_2-1} a_n\right) 2\left(1+\frac{3\delta}{4}\right)\sup_{j\geq 1}\left|\sum_{m=j}^{\infty} t_m\right| +$$

$$+\left(\sum_{n=E_2}^{E_3-1} a_n\right) 2\left(1+\frac{3\delta}{4^2}\right)\sup_{j\geq 2}\left|\sum_{m=j}^{\infty} t_m\right| + ...$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{m=k}^{\infty} t_m\right|\left(1+\frac{3\delta}{4^n}\right),$$

donde $b_1 = \frac{a_1}{1+\frac{3\delta}{4}} + 2\left(\sum_{k=1}^{E_2-1} a_k\right)$, y $b_k = 2\left(\sum_{j=N_k}^{N_{k+1}-1} a_k\right)$, $k \geq 2$.

De la observación A.7 y la proposición A.6 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario A.8 *Sea* $K \subset (c_0, \|.\|^*)$ *no vacío, convexo cerrado y acotado, donde la norma* $\|.\|^*$ *está inducida por alguna sucesión* $\{a_n\}$*. Si* K *no es* ω*-compacto, entonces existen* $\{x_n\} \subset K$ *,* $\Lambda \neq 0$*,* $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *y* $\{\varepsilon_k\} \subset (0,\infty)$ *tales que* $\{x_n\}$ *es una sucesión* $\frac{1}{\Lambda}$*-aibsc*$_0$*,* $b_n > 0$*,* $2b_{n+1} \leq b_n$*,* $\varepsilon_k \longrightarrow 0$ *y*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)a_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n\left(\frac{1}{\Lambda}x_n\right)\right\|^* \leq \sum_{n=1}^{\infty} F_n b_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right|,$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ *con* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$*, donde* $F_n = \left(1+\frac{3\delta}{4^n}\right)$ *y* δ *es un número positivo fijado de antemano.*

Apéndice B

Resumen de normas, espacios y sucesiones

En este apéndice daremos un resumen de las normas, espacios y sucesiones que empleamos en este trabajo.

B.1. Normas

Sea $\{x_n\}$ en el espacio de sucesiones de escalares acotadas. Definimos:

- La norma $||.||_s$ como
$$\|\{x_n\}\|_s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n}.$$
- La norma $||.||_\alpha$, $(\alpha > 0)$ como
$$||\{x_n\}||_\alpha = ||\{x_n\}||_\infty + \alpha \|\{x_n\}\|_s .$$
- La norma $||.||_*$ como
$$\|\{x_n\}\|_* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{1\leq k\leq n} |x_k| .$$

- La norma $||.||_{\alpha *}$ como

$$\left\| \{x_n\} \right\|_{\alpha *} = ||\{x_n\}||_\infty + \alpha \left\| \{x_n\} \right\|_* .$$

- La norma $||.||^*$ como

$$\left\| \{x_n\} \right\|^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{k \geq n} |x_k| .$$

Tomemos ahora $\{x_n\}$ en el espacio de sucesiones convergentes a cero. Definimos:

- La norma $\|.\|_D$ como

$$\|x\|_D = \sup_{1 \leq i \leq j} |x_i - x_j| = \sup_{i,j \in \mathbb{N}} |x_i - x_j| .$$

B.2. Espacios

Sean $E_1,\ E_2$, y E_3 los espacios de sucesiones de escalares convergentes a cero, convergentes y acotadas respectivamente. Definimos:

- El espacio $c_{0\alpha}$ como $(E_1, ||.||_\alpha)$.
- El espacio c_α como $(E_2, ||.||_\alpha)$.
- El espacio l_α^∞ como $(E_3, ||.||_\alpha)$.
- Los espacios X_i como $(E_i, ||.||_s)$, $i = 1, 2, 3.$
- Los espacios Y_i como $(E_i, ||.||_*)$, $i = 1, 2, 3.$

Además también consideramos a los espacios:

- $(c_0, ||.||_{\alpha *})$.
- $(c_0, ||.||_D)$.
- $(l^1, |||.|||_\alpha) = (c_0, \|.\|_\alpha)^*$, donde

$$|||\{x_n\}|||_\alpha = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left[\text{máx} \left\{ \frac{\sum_{n\in F} |x_n|}{1+\sum_{n\in F} \frac{\alpha}{2^n}} \colon F \subset \mathbb{N},\ \#F = k \right\} \right]$$
$$= \sup \left\{ \frac{\sum_{n\in F} |x_n|}{1+\sum_{n\in F} \frac{\alpha}{2^n}} \colon F \subset \mathbb{N},\ F \text{ finito} \right\},$$

  para cada $\{x_n\} \in l^1$.
- $(l^1, |||.|||_D) = (c_0, \|.\|_D)^*$, donde

$$|||\{x_n\}|||_D = \text{máx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- \right),$$

  $x_n^+ = \text{máx}(x_n, 0)$ y $x_n^- = -\text{mín}(x_n, 0)$, para cada $\{x_n\} \in l^1$.
- $(c_0, ||.||^*)$.

B.3. Tipos de sucesiones

Sean X un espacio de Banach y $\{x_n\} \subset X$. Las siguientes definiciones están inducidas por el comportamiento de la base sumante de c_0 con la norma señalada.

- (Inducida por la norma $\|.\|_\infty$). *Se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión asintóticamente isométrica a la base sumante de c_0,* **aibs**c_0 *por brevedad, si existe $\{\varepsilon_n\} \subset (0, \infty)$ con $\varepsilon_n \to 0$ y tal que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\varepsilon_n)^{-1} \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\varepsilon_n) \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j \right|,$$

  para toda $\{t_n\} \in c_{00}$. Si $L > 0$, se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión L-aibsc_0 si $\{Lx_n\}$ es una sucesión aibsc_0.

- (Inducida por la norma $\|.\|_s$). *Diremos que* $\{x_n\}$ *es una sucesión* **aibs**X_1, *si* $\{x_n\}$ *es convexamente cerrada y existen* $\{a_k\} \subset (0,\infty)$ y $\{\delta_k\} \subset (0,\sqrt{2}-1)$ *tales que* $\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$, $\delta_{k+1} \leq \delta_k,\ k \in \mathbb{N}$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)^{-1}\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| a_n \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| a_n,$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

- (Inducida por la norma $\|.\|_s$). *Diremos que* $\{x_n\}$ *es una sucesión* 2**aibs**X_1, *si* $\{x_n\}$ *es convexamente cerrada y existen* $\{a_k\} \subset (0,\infty)$ y $\{\delta_k\} \subset (0,\sqrt{2}-1)$ *tales que* $a_{k+1} \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}$, $\delta_{k+1} \leq \delta_k,\ k \in \mathbb{N}$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)^{-1}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| 2a_{k+1} \leq$$
$$\leq \left\|\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k\right\| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}(1+\delta_k)\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| a_k,$$

para toda $\{t_k\} \in l^1$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

- (Inducida por la norma $\|.\|_\alpha$). Sea $\alpha > 0$. *Diremos que* $\{x_n\}$ *es una sucesión* **aibs**$c_{0\alpha}$ *si* $\{x_n\}$ *es convexamente cerrada y existen* $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$, $\{a_n\} \subset (0,\infty)$ *y* $\{\delta_k\} \subset (0,\sqrt{2}-1)$ *tales que* $\varepsilon_n \to 0$, $\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \leq a_n,\ n \in \mathbb{N}$, $\delta_{n+1} \leq \delta_n,\ n \in \mathbb{N}$.*y*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_n)^{-1}\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)^{-1}\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| a_n \leq$$
$$\leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq$$
$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_n)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| a_n,$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

- (Inducida por la norma $\|.\|_\alpha$). *Sea* $\alpha > 0$. *Diremos que* $\{x_n\}$ *es una sucesión* 2**aibs**$c_{0\alpha}$ *si* $\{x_n\}$ *es convexamente cerrada y existen* $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$, $\{a_n\} \subset (0,\infty)$ *y* $\{\delta_n\} \subset \left(0, \sqrt{2}-1\right)$ *tales que* $\varepsilon_n \to 0$, $a_{n+1} \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\delta_{n+1} \leq \delta_n$, $n \in \mathbb{N}$ *y*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_n)^{-1}\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)^{-1}\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| 2a_{n+1} \leq$$
$$\leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq$$
$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_n)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| a_n,$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

- (Inducida por la norma $\|.\|_*$). *Diremos que* $\{x_n\}$ *es una sucesión* **aibs**$||.||_*$, *si* $\{x_n\}$ *es convexamente cerrada y existen* $\{a_k\} \subset (0,\infty)$ y $\{\delta_k\} \subset (0, \sqrt{2}-1)$ *tales que* $2a_{k+1} \leq a_k$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta_{k+1} \leq \delta_k$, $k \in \mathbb{N}$ *y*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)^{-1} a_n \max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| \leq$$
$$\leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n) a_n \max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right|,$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

- (Inducida por la norma $\|.\|_{\alpha *}$). *Sea* $\alpha \geq 0$. *Diremos que* $\{x_n\}$ *es una sucesión* **aibs**$c_{0\alpha *}$ *si* $\{x_n\}$ *es convexamente cerrada y existen* $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$, $\{a_n\} \subset (0,\infty)$ *y* $\{\delta_k\} \subset (0, \sqrt{2}-1)$ *tales que* $\varepsilon_n \to 0$, $2a_{n+1} \leq$

$a_n,\ n \in \mathbb{N}$, $\delta_{n+1} \leq \delta_n,\ n \in \mathbb{N}$ y

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_n)^{-1}\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)^{-1}a_n \max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| \leq$$
$$\leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq$$
$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_n)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_n)a_n \max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right|,$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

- (Inducida por la norma $\|.\|_D$). *Diremos que $\{x_n\}$ es una sucesión* **aibs**c_{0D} *si $\{x_n\}$ es convexamente cerrada y existe $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ tal que $\varepsilon_n \to 0$, y tal que*

$$\sup_{1\leq n\leq m}(1+\varepsilon_m)^{-1}\left|\sum_{k=n}^{m} t_k\right| \leq$$
$$\leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq$$
$$\leq \sup_{1\leq n\leq m}(1+\varepsilon_m)\left|\sum_{k=n}^{m} t_k\right|,$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

La siguiente definición está inducida por el comportamiento de la base alternante de c_0 con la norma $\|.\|_D$.

- (Inducida por el comportamiento de la base alternante de c_0 con la norma $\|.\|_D$). *Diremos que $\{x_n\}$ es una sucesión* **aiba**c_{0D} *si $\{x_n\}$ es convexamente cerrada y existe $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ tal que $\varepsilon_n \to 0$, y tal que*

$$I_1\left(\{\varepsilon_n\},\{t_n\},\mathfrak{P}\right) \vee I_2\left(\{\varepsilon_n\},\{t_n\},\mathfrak{Q}\right) \leq$$
$$\leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq$$
$$\leq D_1\left(\{\varepsilon_n\},\{t_n\},\mathfrak{P}\right) \vee D_2\left(\{\varepsilon_n\},\{t_n\}\mathfrak{Q}\right),$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$, *donde*

$$I_1\left(\{\varepsilon_n\},\{t_n\},\mathfrak{P}\right) = \left(\sup_{n<l,\ (n,l)\in\mathfrak{P}} (1+\varepsilon_{l-1})^{-1}\left|\sum_{k=n}^{l-1} t_k\right|\right),$$

$$I_2\left(\{\varepsilon_n\},\{t_n\},\mathfrak{Q}\right) = \left(\sup_{n<l,\ (n,l)\in\mathfrak{Q}} (1+\varepsilon_{l-1})^{-1}\left|\sum_{k=n}^{l-1} t_k + 2\sum_{k=l}^{\infty} t_k\right|\right),$$

$$D_1\left(\{\varepsilon_n\},\{t_n\},\mathfrak{P}\right) = \left(\sup_{n<l,\ (n,l)\in\mathfrak{P}} (1+\varepsilon_{l-1})\left|\sum_{k=n}^{l-1} t_k\right|\right),$$

$$D_2\left(\{\varepsilon_n\},\{t_n\}\mathfrak{Q}\right) = \left(\sup_{n<l,\ (n,l)\in\mathfrak{Q}} (1+\varepsilon_{l-1})\left|\sum_{k=n}^{l-1} t_k + 2\sum_{k=l}^{\infty} t_k\right|\right).$$

En el siguiente caso la definición está inducida por el comportamiento de la base canónica de l^1 con la norma señalada.

- (Inducida por la norma $|||.|||_D$). *Aquí suponemos que* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. *Diremos que* $\{x_n\}$ *es una sucesión* $\mathbf{aibc}(l^1, |||.|||_D)$ *si* $\{x_n\}$ *es convexamente cerrada y existe* $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ *tal que* $\varepsilon_n \to 0$ *y*

$$\begin{aligned} \text{máx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)\,t_n^+, \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)\,t_n^-\right) &\leq \\ \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| &\leq \\ \leq \text{máx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)\,t_n^+, \sum_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)\,t_n^-\right)&, \end{aligned}$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

- (Inducida por la norma $\|.\|^*$). *Diremos que* $\{x_n\}$ *es una sucesión* $\mathbf{aibs}||.||^*$, *si* $\{x_n\}$ *es convexamente cerrada y existen* $\{\varepsilon_k\} \subset (0,\infty)$ *y* $\{a_k\} \subset$

$(0,\infty)$ *tales que* $\varepsilon_k \longrightarrow 0$, $2a_{k+1} \leq a_k$, $k \in \mathbb{N}$ *y*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)a_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right| &\leq \\ \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| &\leq \\ \leq \sum_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)a_n \sup_{k\geq n}\left|\sum_{j=k}^{\infty} t_j\right|,\end{aligned}$$

para toda $\{t_n\} \in l^1$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 0$.

Bibliografía

[1] Aksoy A.G., and Khamsi M.A. *Nonstandard Methods in Fixed Point Theory.* Springer-Verlag, New York, 1990.

[2] Borwein J.M., and Sims B. *Nonexpansive mappings on Banach lattices and related topics.* Houston J. Math., **10** (1984), 339-356.

[3] Domínguez-Benavidez T., Japón-Pineda M.A., and Prus S. *Weak compactness and fixed point property for affine mappings.* Journal of Functional Analysis **209** (2004), 1-15.

[4] Dowling P.N., Lennard C.J., and Turett B. *The fixed point property for subsets of some classical Banach spaces.* Nonlinear Analysis, **49** (2002), 141-145.

[5] Dowling P.N., Lennard C.J., and Turett B. *Characterizations of weakly compact sets and new fixed point free maps in* c_0. Studia. Math., **154** (2003), 277-293.

[6] Dowling P.N., Lennard C.J., and Turett B. *Weak compactness is equivalent to the fixed point property in* c_0. Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004), 1659-1666.

[7] Dowling P.N., Lennard C.J., and Turett B. *Some more examples of subsets of* c_0 *and* $L^1[0,1]$ *failing the fixed point property.* Contemporary Math., **328** (2003), 171-176.

[8] Fetter H., and Gamboa de Buen B. *A 3-space problem related to the fixed point property.* Bull. Austral. Math. Soc., **64** (2001), 51-56.

[9] Fetter H., and Gamboa de Buen B. *Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de Espacios de Banach.* Grupo Editorial Iberoamérica, 2002.

[10] Garcia-Falset J. *Basis and fixed points for nonexpansive mappings.* Rad. Mat., **8** (1992), 67-75.

[11] Goebel K., and Kirk W.A. *Topics in metric fixed point theory.* Cambridge studies in advanced mathematics 28. Cambridge University Press, 1990.

[12] Khamsi M.A., and Kirk W.A. *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory.* John Wiley & sons, 2001.

[13] Kirk W.A. *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances.* Amer. Math. Monthly **72** (1965), 1004-1006.

[14] Kirk W.A., and Sims B. *Handbook of Metric Fixed Point Theory.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 2001.

[15] Lin, P. K. There is an equivalent norm on l_1 that has the fixed point property. Nonlinear An. 68 (2008), 2303-2308.

[16] Lindenstrauss J., and Tzafriri L. *Classical Banach Spaces I and II.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.

[17] Llorens-Fuster E., and Sims B. *The fixed point property in* c_0. Canad. Math. Bull., **41** (1998), 413-422.

[18] Maurey B. *Points fixes des contractions sur un convex ferme de* L^1, in Seminaire d'Analyse fonctionnelle **80-81**, Ecole Polytechnique, 1980.