

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C.**

---

---

**CIMAT**

**“Análisis Técnico Comparado con  
Estrategias de Inversión Basadas en  
Modelos Matemáticos”**

**TESINA**

que para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias  
con orientación en Probabilidad y Estadística**

presenta

**Pedro Ulises Salazar Sánchez**

Director de Tesina:

**Dr. Daniel Hernández Hernández**

Guanajuato, Gto. Julio, 2009.

---



A mi Dios.  
A la memoria de mi Padre.

---

# Agradecimientos

---

Agradezco enormemente a mi familia por todo el apoyo brindado durante el tiempo que he estado lejos de mi hogar, por sus palabras, sus consejos y por estar siempre pendientes de mí.

Agradezco a todos los amigos que confiaron en mí desde el principio, en especial a Rosario Medina, Olympia Castillo, Guadalupe Pérez, Julián Benam, Juan C. Ay, Angel Chan y David Avalos.

Agradezco a mis compañeros, colegas y amigos que me acompañaron durante mis estudios y siempre pude contar con ellos: Roxana Góngora, Leticia Escobar, Selomit Ramírez, Carlos Campos y Gustavo Cano.

Agradezco a los profesores que me brindaron sus conocimientos durante mi formación académica, por su disposición y ayuda: Dr. Victor Pérez-Abreu, Dr. Miguel Nakamura, Dr. Joaquín Ortega, Dr. José A. López, Dr. Fernando Ávila, Dr. Rogelio Ramos, Dra. Ekaterina Todorova, Dr. Erick Treviño y muy especialmente a mi asesor y director de tesis Dr. Daniel Hernández por darme siempre su apoyo y confiar en mí.

Agradezco al Centro de Investigación en Matemáticas A.C. (CIMAT) por brindarme el mejor ambiente y lugar para estudiar y hacer de mi una mejor persona y un profesionalista.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme la beca que ha hecho esto posible y por la cual mi única preocupación fueron los estudios.

Finalmente, quiero agradecer al más importante en mi vida, mi Dios, por confiar en mí, estar siempre conmigo, ayudarme en todo momento y llenar mi vida de dicha y bendiciones.

---

# Índice general

---

<b>Índice general</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1. Modelo Matemático del Mercado Financiero . . . . .	6
2.2. Componentes del Mercado Financiero . . . . .	7
2.3. Arbitraje . . . . .	9
2.4. Completez . . . . .	10
2.5. Función de Utilidad . . . . .	11
2.6. Análisis Técnico . . . . .	12
<b>3. Modelo de Mercado Financiero</b>	<b>15</b>
3.1. Método Matemático . . . . .	17
3.2. Métodos de Detección . . . . .	31
3.2.1. Método Karatzas . . . . .	32
3.2.2. Método Shiryayev . . . . .	36
3.2.3. Estrategia con el Método de Detección . . . . .	38
3.3. Análisis Técnico: Media Móvil . . . . .	39
3.3.1. Estrategia Utilizando Análisis Técnico . . . . .	39
<b>4. Simulación y Comparación Numérica</b>	<b>41</b>
4.1. Errores de Calibración . . . . .	41
4.2. Resultados . . . . .	43
4.3. Conclusiones . . . . .	48
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>

## ÍNDICE GENERAL

---



# Capítulo 1

## Introducción

---

La industria de servicios financieros típicamente se basa principalmente en dos enfoques para tomar decisiones de inversión:

- El análisis técnico que usa historias de precios y/o volúmenes.
- El enfoque matemático que está basado en modelos estocásticos.

El análisis técnico consiste en el estudio del mercado, principalmente mediante el uso de gráficas, con el objetivo de proyectar tendencias futuras del precio de un activo. El inversionista que hace uso del análisis técnico para estudiar el mercado debe incluir dos fuentes de información necesarias: precio y volumen (número de contratos que se operan en un período). El análisis técnico ha sido utilizado por inversionistas profesionales por más de un siglo, la comunidad académica aún ve sus fundamentos y desempeño con escepticismo, principalmente por la falta de justificaciones teóricas. Recientemente ha habido una renovación de interés académico en los métodos basados en el análisis técnico.

En forma paralela, en las últimas décadas ha habido un gran interés en la aplicación de modelos estocásticos para el análisis financiero, por ejemplo, Merton (1971), Black & Scholes (1973) y Cox & Rox (1976).

En años recientes los modelos estocásticos y el cálculo estocástico han sido aplicados a una gran variedad de problemas financieros como valorar contratos de compañías aseguradoras, valuación de derivados, entre muchos otros. Las técnicas usadas inicialmente fueron estadísticas (análisis técnico), sin embargo, los cambios recientes, como la introducción creciente de productos derivados, han hecho necesaria la introducción de un análisis estocástico.

Dado que la economía no es estacionaria, es imposible especificar y calibrar modelos matemáticos que puedan capturar todas las fuentes de variación en un intervalo

de tiempo largo. Además, el desempeño de cualquier estrategia de inversión, que entenderemos como la utilidad obtenida, dependerá del modelo utilizado, por lo cual siempre estaremos expuestos a errores en la estimación de los parámetros involucrados en un modelo matemático.

Uno de los objetivos de este trabajo será comparar el desempeño de estrategias obtenidas utilizando el enfoque matemático con estrategias obtenidas con el análisis técnico en el caso en que los parámetros del modelo son mal estimados. Trabajaremos con un modelo en el cual el precio de cada activo  $i$  satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dS_t^i = S_t^i (\mu_{2i} + (\mu_{1i} - \mu_{2i}) 1_{(t \leq \tau_i)}) dt + \sigma_i S_t^i dB_t^i, & i = 1, \dots, d; \\ S_0^i = s^i, \end{cases}$$

ver (3.0.1) para más detalle. Como el rendimiento medio de cada activo cambia en un tiempo aleatorio y observable sólo a través de los precios, entonces es complicado estimar correctamente los parámetros del modelo que posteriormente serán utilizados para definir las estrategias de inversión, lo cual dará como resultado que no obtenemos las utilidades esperadas con estas estrategias. Por supuesto, de los mercados financieros reales pueden obtenerse modelos de este tipo, para los cuales la correcta especificación de los parámetros es complicada, y entonces queremos conocer si en este caso es recomendable utilizar el análisis técnico libre de modelo o seguirá siendo recomendable usar una estrategia más robusta basada en un modelo estocástico del cual difícilmente tendremos los parámetros exactos. Aunque independientemente se han desarrollado y estudiado el análisis técnico y el análisis estocástico de mercados financieros, en la literatura sólo podemos encontrar comparaciones entre el enfoque fundamental (aquel que hace uso de principios económicos para formar portafolios) y el análisis técnico y entre el enfoque fundamental y el enfoque matemático.

Actualmente sólo Blanchiet-Scalliet *et al.* en [1,2] hacen comparaciones del enfoque matemático y el análisis técnico para el caso de un solo activo con riesgo. En este trabajo se extiende el estudio y se hacen comparaciones en el caso de que un inversionista desee invertir su capital en varios activos con riesgo, proponiendo la forma de diseñar el portafolio para las diferentes técnicas de inversión que serán tratadas:

- Una estrategia matemática obtenida a partir de un modelo estocástico de los precios, bajo el supuesto de que todos los parámetros involucrados son correctos.
- Dos técnicas de detección de cambios en el rendimiento medio.
- Una técnica analítica: media móvil.
- Los tres modelos anteriores bajo el supuesto de que los parámetros del modelo son incorrectos.

La estrategia matemática será aquella para la cual se maximiza la utilidad esperada y resulta ser un proceso estocástico que nos indica cuánto capital debemos invertir en cada activo en cada instante. El desarrollo de esta estrategia será tratada en la Sección 3.1 y se obtendrá explícitamente en el caso de la *utilidad logarítmica*.

Debido a que estaremos trabajando en un modelo en el que el rendimiento medio de los activos cambia en un tiempo aleatorio, entonces introduciremos dos técnicas de detección; utilizaremos las técnicas propuestas por Shiryaev (2002) y por Karatzas (2003). Ambas técnicas hacen uso de la información que se obtiene al observar los precios para obtener un tiempo de paro que detecta el tiempo  $\tau_i$  en el que el rendimiento medio de cada activo ha cambiado. En la Sección 3.2 veremos como se obtienen estos tiempos de paro en cada caso, así como también la construcción de una estrategia de inversión que hace uso de ellos.

En el caso del análisis técnico se verá que el diseño de la estrategia de inversión se hace en base a unos sencillos cálculos y una regla de decisión; trataremos el caso de la media móvil, para la cual la regla de decisión es la siguiente: invertir en el  $i$ -ésimo activo si el último precio observado es mayor o igual que el promedio de los últimos precios observados. Se definirán más formalmente estas ideas en la Sección 3.3 y también se proporcionará una estrategia de inversión cuando se utiliza el análisis técnico.

Para la construcción de la estrategia matemática y de la estrategia obtenida a través de los métodos de detección se hace uso de los parámetros del modelo, por el contrario, la estrategia que se construye utilizando el análisis técnico es libre del modelo, por lo tanto, no sólo debemos comparar el desempeño de las estrategias en el caso en que los parámetros que describen al modelo son correctos, también debemos compararlas en el caso en el que las estrategias están construidas utilizando parámetros incorrectos.

Se debe mencionar que este trabajo no es exhaustivo, pues solamente se considera una técnica analítica para el estudio (media móvil), pero dará evidencia de que, en general, no todas las técnicas analíticas tienen un mal desempeño, en comparación con estrategias que poseen fundamento teóricos, al utilizarse para diseñar portafolios.

La organización del trabajo es como sigue: En el Capítulo 2 veremos algunos conceptos financieros y la modelación estocástica de ellos. Estos conceptos son fundamentales para entender mejor el mercado que será definido en el Capítulo 3, así como la construcción de la estrategia matemática de la Sección 3.1, que maximiza la utilidad esperada bajo el supuesto de que el modelo es correcto. En la Sección 3.2 se construirán las dos estrategias de inversión utilizando métodos para detectar el tiempo en que el rendimiento medio de algún activo ha cambiado. En la Sección 3.3 se explica el uso de la técnica analítica que será usada y también se propone una estrategia de inversión para ella. Así, en el Capítulo 3 se habrá obtenido todo el respaldo teórico de las

## CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

---

técnicas de inversión que se tratarán. En el Capítulo 4 se presentarán los resultados numéricos y gráficos del desempeño, utilizando simulaciones Monte Carlo de las estrategias construidas en el Capítulo 3; en base a estos resultados podremos responder preguntas como: ¿Qué técnica de inversión debo utilizar si los parámetros de mi modelo son los correctos?, ¿Y si los parámetros son incorrectos?, ¿Con cuál estrategia se obtienen mejores utilidades? Además se expondrán algunas ventajas y desventajas de cada una de las tres técnicas de inversión. Se proponen algunas extensiones del análisis hecho en este trabajo y se proporcionan las conclusiones finales.

## Capítulo 2

# Preliminares

---

En este capítulo expondremos las primeras definiciones y conceptos básicos de matemáticas financieras que serán utilizados en los capítulos siguientes, así como una descripción general del análisis técnico. En las Secciones 2.1 y 2.2 se describe la forma en la que modelaremos estocásticamente a un mercado financiero así como sus componentes, en las Secciones 2.3 y 2.4 se describen dos conceptos importantes de un mercado financiero: arbitraje y completez, en la Sección 2.5 se definirá el concepto de función de utilidad, que no es propio de un mercado financiero, pero lo estaremos utilizando en los capítulos posteriores para definir la estrategia basada en el modelo estocástico y en la Sección 2.6 se describirá cómo se hace uso del análisis técnico para formar portafolios.

Un mercado financiero es un mecanismo que permite a los agentes económicos el intercambio de dinero por valores; anteriormente el término hacía referencia a los certificados que las compañías emitían a los inversionistas como prueba de su posesión. Actualmente casi todas las transacciones se registran electrónicamente en vez de hacerse en papel, pero el término valor se sigue utilizando. Los valores más conocidos por los inversionistas son las acciones, las corporaciones tienen su capital dividido en acciones que se ofertan en el mercado con el objetivo de obtener capital, lo cual significa que al comprar una acción de una corporación se es propietario de una parte de dicha corporación. Las acciones no tienen un valor fijo, su precio obedece a la ley de la oferta y la demanda. Entre algunos de los factores que afectan el precio de una acción están los siguientes:

- El crecimiento de las ventas o ingresos de la compañía, algunas veces denominado crecimiento bruto.
- El crecimiento de las ganancias de la compañía, algunas veces denominado crecimiento neto.

- La situación de la economía.

La razón por la cual las acciones son inversiones populares a pesar del hecho de que son volátiles, es decir cambian de valor rápidamente en el corto plazo, es debido a que históricamente las acciones en general han proporcionado un mayor rendimiento que otros valores.

Contrario a las acciones existen los bonos, los cuales son inversiones en deuda. Al comprar un bono se presta dinero por un periodo de tiempo, llamado el plazo del bono, durante el cual se ganan intereses sobre el préstamo. La tasa de interés que se paga generalmente se fija al comprar el bono y se mantiene igual durante el plazo. La diferencia entre el bono y la acción es que el rendimiento del bono es constante (se paga un interés fijo), mientras que el rendimiento de la acción es aleatorio (dependerá de la fluctuación de su precio).

### 2.1. Modelo Matemático del Mercado Financiero

Uno de los principales objetivos de matematizar los mercados financieros es construir estrategias de inversión para mejorar nuestro rendimiento, es decir, teniendo un capital, de qué manera debemos invertir en las diferentes acciones y en los bonos para obtener los mejores rendimientos. Al conjunto de diferentes acciones y bonos en los que invertiremos le llamaremos portafolio de inversión.

En los últimos años, el análisis financiero ha experimentado una serie de cambios y transformaciones que han modificado la forma de diseñar portafolios. Estos cambios han fomentado el uso de procesos estocásticos como herramienta básica para modelar el comportamiento de las variables financieras y sus derivados.

Es común encontrar en la literatura que los precios de las acciones se modelan con procesos de difusión, y este es precisamente el enfoque que se utilizará, es decir, si  $S_t$  es el precio de alguna acción al tiempo  $t$ , entonces supondremos que  $S_t$  es un proceso estocástico que satisface una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dS_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t,$$

donde  $\mu_t, \sigma_t$  son también procesos estocásticos cuyas propiedades se tratarán más adelante y  $B_t$  es un movimiento Browniano que modela precisamente el comportamiento aleatorio de los precios.

En el caso de los bonos, serán considerados con tasa de interés constante, es fácil ver que si  $S_t^0$  es el precio de un bono a tiempo  $t$  con tasa de interés constante  $r$ , entonces  $S_t^0$  satisface la ecuación

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt.$$

## 2.2. Componentes del Mercado Financiero

Seguiremos un modelo de mercado financiero en el que podemos invertir en  $d+1$  activos continuamente. El primero de estos activos consideraremos que se trata de un bono, cuyo precio  $S_t^0$  al tiempo  $t$  satisface la dinámica

$$\begin{cases} dS_t^0 = rS_t^0 dt, \\ S_0^0 = 1. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Los  $d$  activos restantes están sujetos a un riesgo sistemático, un conjunto de factores externos que afectan la variación de los precios y que no pueden ser controlados. El precio  $S_t^i$  al tiempo  $t$  del activo  $i$  satisface la dinámica

$$\begin{cases} dS_t^i = S_t^i \left[ \mu_t^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{i,j} dB_t^j \right], \\ S_0^i = s^i \end{cases}, \quad i = 1, \dots, d. \quad (2.2.2)$$

donde  $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)'$ ,  $0 \leq t \leq T$  es un movimiento Browniano  $d$ -dimensional que representa las fuentes de riesgo sistemático. Los procesos  $\mu_t = (\mu_t^1, \dots, \mu_t^d)$  y  $\sigma_t = (\sigma_t^{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ ,  $0 \leq t \leq T$  son llamados tasas de apreciación y matriz de volatilidades respectivamente. Supondremos que todos estos procesos estocásticos se encuentran definidos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathbb{F}, P)$

Asumiremos que los coeficientes satisfacen la siguiente condición de integrabilidad:

$$\int_0^T (\|\mu_t\| + \|\sigma_t\|^2) dt < \infty \quad c.s. \quad (2.2.3)$$

que nos garantiza la existencia de soluciones fuertes para las ecuaciones diferenciales estocásticas (2.2.2).

En lo que sigue, denotaremos como  $\mathbb{F}^A$  a la filtración natural generada por el proceso estocástico  $(A_t)_{0 \leq t \leq T}$ , así, por ejemplo,  $\mathbb{F}^B$  será la filtración generada por el movimiento Browniano  $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ .

Introduzcamos al mercado un pequeño inversionista (aquel cuya participación en el mercado no afecta de manera importante el comportamiento de los precios, es decir, compra en pequeños volúmenes) y que en cada instante  $t \in [0, T]$  decide cuánto dinero  $\pi_t^i$  invertir en cada activo  $i$ . A  $\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^d)$  le llamaremos estrategia de inversión y a veces la denotaremos solamente como  $\pi$ .

Si  $W_t^{x,\pi}$  es la ganancia hasta el tiempo  $t$  de un inversionista que inicia con capital  $x$  (al tiempo cero) con la estrategia de inversión  $\pi$ , entonces  $W_t^{x,\pi}$  es la solución de la

siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dW_t^{x,\pi} = \sum_{i=1}^d \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} + \left( W_t^{x,\pi} - \sum_{i=1}^d \pi_t^i \right) \frac{dS_t^0}{S_t^0}, \quad (2.2.4)$$

lo cual es intuitivamente claro, pues la ganancia será la suma de los rendimientos por la cantidad de dinero invertida en cada activo (incluido el bono). La solución de (2.2.4) está dada por

$$\frac{W_t^{x,\pi}}{S_t^0} = x + \int_0^t \frac{1}{S_s^0} \pi_s' [\sigma_s dB_s + (\mu_s - r \underline{1}) ds]. \quad (2.2.5)$$

Ahora, por (2.2.5) podemos interpretar al proceso de capital como la suma del capital inicial y las ganancias (descontadas) hasta el tiempo  $t$ , que resultan de haber invertido en los activos con riesgo.

A continuación damos las definiciones formales de los procesos mencionados anteriormente, así como las condiciones que deben cumplir para que el modelo del mercado esté bien definido.

**Definición 1.** Un proceso  $\mathbb{F}^S$ -progresivamente medible  $\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^d)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $\mathbb{R}^n$ -valuado, tal que

$$\int_0^T \|\pi_t' \sigma_t\|^2 dt + \int_0^T |\pi_t' (\mu_t - r \underline{1})| dt < \infty, \quad c.s. \quad (2.2.6)$$

es llamado estrategia de inversión.

Una estrategia de inversión  $\pi$  se dice que está dominada si el proceso

$$M_t^\pi := \int_0^t \frac{1}{S_s^0} \pi_s' [\sigma_s dB_s + (\mu_s - r \underline{1}) ds] \quad (2.2.7)$$

está acotado casi seguramente por abajo por alguna constante real, equivalentemente si  $W_t^{x,\pi}$  es acotado inferiormente.

Para un  $x \in \mathbb{R}$  dado y  $\pi$  una estrategia de inversión, el proceso  $(W_t^{x,\pi})_{0 \leq t \leq T}$  definido en (2.2.4) es llamado proceso de capital correspondiente a la estrategia  $\pi$  con capital inicial  $x$ .

Una estrategia de inversión dominada  $\pi$  es admisible si  $W_t^{x,\pi} \geq 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ , casi seguramente.

A las estrategias de inversión se les pide que sean  $\mathbb{F}^S$ -progresivamente medibles debido a que las decisiones de invertir en las acciones deben hacerse en base a nuestro conocimiento actual del mercado y suponiendo el futuro aleatorio. Notemos que la condición (2.2.6) es necesaria para que (2.2.4) tenga solución.



Finalmente, la restricción de dominación sobre las estrategias de inversión excluye algunos tipos de “estrategias suicidas”, con las cuales podemos crear portafolios que alcancen valores arbitrariamente grandes de capital con probabilidad uno al tiempo  $t = T$  iniciando con capital cero.

### 2.3. Arbitraje

Uno de los conceptos más importantes en finanzas es el de oportunidad de arbitraje. En términos elementales, es hacer dinero de la nada con probabilidad positiva. Un ejemplo sería comprar y vender simultáneamente un valor en mercados distintos obteniendo como ganancia la diferencia de los precios, por supuesto, mientras más entes participen en el proceso de arbitraje, éste tiende a desaparecer.

La teoría de arbitraje fue presentada por el economista Stephen Ross [10] en la década de los setentas y a partir de esta teoría se desarrolla el arbitraje estadístico, el cual se refiere a la técnica empleada para detectar las diferencias de precios entre el valor de mercado y el valor estimado de un activo.

En términos de nuestro mercado, una oportunidad de Arbitraje consiste en una estrategia de inversión que nos haga ganar algún capital positivo con probabilidad positiva iniciando con capital cero. Formalizaremos en nuestro modelo el concepto de oportunidad de Arbitraje:

**Definición 2.** Una estrategia dominada  $\pi$  que satisface

$$P [M_T^\pi \geq 0] = 1, \quad P [M_T^\pi > 0] > 0,$$

es llamada oportunidad de arbitraje. Diremos que el mercado es libre de arbitraje si no existen tales estrategias.

Por supuesto, lo deseable es que en nuestro mercado no existan oportunidades de arbitraje, para ello afortunadamente existen condiciones suficientes y necesarias:

**Proposición 1.** (i) Si el mercado es libre de arbitraje, entonces existe un proceso progresivamente medible  $\varsigma : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  llamado proceso de riesgo relativo (market price of risk) tal que

$$\mu_t - r\mathbf{1} = \sigma_t \varsigma_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad c.s. \tag{2.3.1}$$

(ii) Recíprocamente, si tal proceso  $\varsigma(\cdot)$  existe y además de (2.3.1) satisface

$$E \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \|\varsigma_t\|^2 dt \right) \right] < \infty, \tag{2.3.2}$$

entonces el mercado es libre de arbitraje.

*Demostración.* Ver Karatzas and Shreve [7], Capítulo 1, Teorema 4.2. □

Esta proposición es muy útil para verificar si el mercado es libre de arbitraje; más adelante veremos que el mercado en el que trabajaremos cumple la condición (2.3.2), por lo que estaremos en la situación de un mercado libre de arbitraje.

## 2.4. Completez

En el contexto de un mercado financiero, podemos definir activos cuyo precio está basado en el precio de otro u otros activos, por ejemplo, un activo cuyo precio al tiempo  $t = T$  sea

$$Y_T = f(S_T^1, \dots, S_T^d)$$

donde  $f : (0, \infty)^d \rightarrow [0, \infty)$  es una función dada. A tales activos los llamaremos derivados. Este concepto se formaliza en la siguiente definición.

**Definición 3.** *Un contrato derivado es una variable aleatoria  $\mathcal{F}_T^S$ -medible,  $\xi : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  tal que*

$$E \left[ \frac{1}{S_T^0} \xi \right] < \infty. \tag{2.4.1}$$

*Se dice que un derivado  $\xi$  es replicable si existe un número real  $0 < u_0 < \infty$  y una estrategia de inversión admisible  $\pi$  tal que*

$$W_T^{u_0, \pi} = \xi, \text{ c.s.}$$

*A  $u_0$  se le conoce como el costo de replicación. Un mercado es llamado completo si todo derivado es replicable, en otro caso, es llamado incompleto.*

La condición (2.4.1) nos indica que el valor presente de lo que llamamos derivado debe ser finito, de otra manera, no tendríamos la esperanza de poder replicarlo con algún capital finito y entonces la idea de replicación sería vaga. Por la definición, es claro que un mercado incompleto es más interesante, pues al no existir siempre una estrategia de inversión que replique el derivado, tenemos que ingeniar ideas para “acercarnos” a este derivado mediante las estrategias de inversión admisibles. Más adelante veremos que en el mercado financiero en el que estaremos trabajando tendremos restricciones en nuestro portafolio de la forma  $\pi \in R \subset \mathbb{R}^d$ , donde  $R$  es un subconjunto propio, de modo que nuestro mercado será incompleto.

## 2.5. Función de Utilidad

En la teoría de preferencias de posiciones financieras son deseables dos propiedades en la estructura de preferencias, la monotonía y la aversión al riesgo (Ver Föllmer & Schied [3], Sección 2.3). La monotonía nos indica que siempre preferiremos aquella posición financiera que nos ofrezca mayor rendimiento esperado y la aversión al riesgo indica que será preferible algo seguro a algo aleatorio. Se obtiene como resultado que cuando la estructura de preferencias posee una representación numérica de la forma

$$u(\mu) = \int U d\mu, \quad (2.5.1)$$

donde  $U$  es una función real valuada y  $\mu$  es la distribución de nuestra posición financiera, que en nuestro contexto representa la distribución del rendimiento final de nuestro portafolio, entonces la estructura de preferencias es monótona y aversa al riesgo si, y sólo si, la función  $U$  es estrictamente creciente y estrictamente cóncava respectivamente.

Utilizamos estas ideas para definir lo que será una función de utilidad.

**Definición 4.** *Una función de utilidad es una función  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente diferenciable, estrictamente creciente y estrictamente cóncava.*

Notemos que en nuestro contexto, la representación numérica (2.5.1) está dada por

$$E[U(W_T^{x,\pi})],$$

para alguna función de utilidad  $U$ . Por lo tanto, el objetivo del inversionista será maximizar esta utilidad esperada, es decir, hallar

$$V(x) = \sup_{\pi} E[U(W_T^{x,\pi})],$$

sobre todas las estrategias admisibles  $\pi$ .

En este trabajo sólomente se considerarán funciones de utilidad que sean derivables y satisfagan las condiciones de Inada:

$$\lim_{x \downarrow 0} U'(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \uparrow \infty} U'(x) = 0,$$

con el objetivo de que tenga solución el problema primal de maximización, así como el problema dual, que se abordará más adelante.

**Definición 5.** Sea  $U$  una función de utilidad. El dual convexo de  $U$  es la función

$$\tilde{U}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [U(x) - xy], \quad 0 < y < \infty.$$

Bajo las condiciones de Inada, si denotamos como  $I(\cdot)$  la función inversa de  $U'(\cdot)$  se obtiene que el dual convexo de  $U$ ,

$$\tilde{U}(y) = \max_{0 < x < \infty} [U(x) - xy] = U(I(y)) - yI(y), \quad 0 < y < \infty.$$

Es conocido que para algunos problemas de optimización es más sencillo resolver el problema dual que el problema primal. En nuestro problema de optimización se observará que con la introducción del dual convexo y bajo las condiciones de Inada, no es complicado hallar la estrategia que maximiza la utilidad esperada.

## 2.6. Análisis Técnico

Los inversionistas que utilizan análisis técnico para hacer inversiones y predicciones acerca de la evolución del mercado generalmente definen reglas de inversión usando las historias de precios y volúmenes. Los analistas técnicos calculan indicadores basados en datos observados de los precios, es decir, se basa en el análisis de datos en base a fórmulas matemáticas para analizar el comportamiento futuro de los precios según las series de datos. En los indicadores que son usados se asume que

- El precio de un activo obedece a la ley de oferta y demanda.
- El precio tiene tendencias en ciertos períodos de tiempo.
- Las tendencias se repiten de alguna manera regular.

Por lo tanto, aquel que siga estas premisas no debe dejarse influir por factores externos a los estadísticos. Los movimientos en el portafolio se tienen que establecer (según los analistas) en base a cotizaciones, no por el conocimiento externo. Por ejemplo, una buena noticia para una empresa supone un alza en el precio de sus acciones, sin embargo, el analista debe ser capaz de detectar esta alza en los gráficos y datos a su disposición. Una de las ventajas del análisis técnico frente al enfoque matemático es que con los mismos criterios se pueden analizar cualquier tipo de valor o mercado internacional. Desde luego, también podemos llegar a una interpretación errónea de las premisas de las que partimos, fallos en el comportamiento de los precios, falsas señales en los gráficos, que pueden producir un efecto contrario al esperado. Por tanto, el analista debe

ser capaz de reconocer los errores, los cambios inesperados y no mantenerse en la misma postura esperando el cambio que le dé la razón [16].

Existen un gran número de indicadores técnicos en la práctica, de hecho, podríamos tomar cualquier predictor observando los precios como una serie de tiempo y tomar una decisión en base a tal predictor comparado con algún indicador, nosotros nos limitaremos al indicador media móvil simple por su fácil cálculo y además de que por su naturaleza nos ayudará en la detección de cambios en los rendimientos.

La regla que seguiremos para decidir si invertimos en un activo en particular será la siguiente: invertir en el  $i$ -ésimo activo con riesgo al tiempo  $t$  si

$$S_t^i \geq \frac{1}{\delta_i} \int_{t-\delta_i}^t S_s^i ds,$$

donde  $\delta_i$  se conoce como ventana de la media móvil y nos indica cuántos datos anteriores al último observado debemos tener en cuenta para calcular la media móvil. Esta regla de decisión es intuitivamente clara, si el último precio observado de algún activo es mayor o igual que el promedio de los precios anteriores, entonces el precio de tal activo se está incrementando y por lo tanto deberíamos invertir en él. En la Sección 3.3 se definirá más precisamente la media móvil y se construirá la estrategia de inversión (3.3.1) basada en este análisis técnico.



## Capítulo 3

# Modelo de Mercado Financiero

---

El objetivo de este trabajo será comparar el desempeño de una estrategia de inversión obtenida de acuerdo a un análisis técnico con el desempeño de una estrategia matemática obtenida como un problema de optimización, así como también dos métodos de detección. Para ello introduciremos un mercado financiero en el que el principal problema para estudiarlo y aplicar las técnicas para armar portafolios es precisamente la calibración, es decir, la estimación de los parámetros del modelo.

Trabajaremos con un modelo de mercado financiero  $\mathcal{M}$ , en el cual podemos invertir continuamente en  $d + 1$  activos. El primero de éstos es un activo sin riesgo, cuyo precio  $S_t^0$  al tiempo  $t$  satisface la ecuación (2.2.1).

Los  $d$  activos restantes están sujetos a un factor de riesgo sistemático y el precio  $S_t^i$  al tiempo  $t$  del activo  $i$  satisface la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dS_t^i = S_t^i (\mu_{2i} + (\mu_{1i} - \mu_{2i}) 1_{(t \leq \tau_i)}) dt + \sigma_i S_t^i dB_t^i, & i = 1, \dots, d. \\ S_0^i = s^i, \end{cases} \quad (3.0.1)$$

En este modelo las fuentes de riesgo están modeladas por las componentes independientes del movimiento Browniano  $d$ -dimensional  $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)'$ ,  $0 \leq t \leq T$  y los tiempos aleatorios  $\tau_i$ , de cambio en la deriva del activo  $i$ , independientes entre sí e independientes de  $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ , con distribución exponencial de parámetro  $\lambda_i$ :

$$P(\tau_i > t) = e^{-\lambda_i t}, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, d. \quad (3.0.2)$$

El movimiento Browniano  $B$  está definido en un espacio de probabilidad completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , denotaremos su filtración natural como  $\mathbb{F}^B = \{\mathcal{F}_t^B, 0 \leq t \leq T\}$ . En general, para algún proceso estocástico  $A$ , denotaremos a su filtración natural como  $\mathbb{F}^A$ .

El horizonte de tiempo  $T$  será considerado finito. Supondremos por último que los parámetros  $\mu_{1i}, \mu_{2i}, \sigma_i > 0$  y  $r \geq 0$  satisfacen

$$\mu_{1i} - \frac{\sigma_i^2}{2} < r < \mu_{2i} - \frac{\sigma_i^2}{2}, \quad i = 1, \dots, d. \quad (3.0.3)$$

La interpretación de esta última desigualdad es que antes del tiempo  $\tau_i$  será preferible invertir en el bono que en el activo  $i$ , mientras que después de  $\tau_i$  el activo tiene mejor rendimiento esperado.

Desde este momento empezamos a observar las dificultades de este modelo en el caso de calibración, ¿Cómo estimamos el parámetro  $\lambda_i$  de la variable aleatoria  $\tau_i$ ? Si no somos capaces de estimarlo, entonces también nuestras estimaciones de  $\mu_{1i}$  y  $\mu_{2i}$  serán incorrectas, pues posiblemente en la estimación del primero esté utilizando datos de rendimientos que correspondan al segundo (desconozco el tiempo de cambio) y viceversa.

Suponiendo que seremos capaces de hacer buenas estimaciones de los parámetros, se hallará una estrategia que optimice nuestra utilidad esperada y en definitiva el desempeño de dicha estrategia debería ser mejor que cualquier otro método, sin embargo, debido a que es prácticamente imposible estimar  $\lambda_i$  (sólo es posible observar  $\tau_i$  una vez en  $[0, T]$ ), entonces debemos recurrir a otras técnicas, como los métodos de detección o recurrir a un método de análisis técnico, el cual es libre del modelo.

La condición (3.0.3) aunque es algo restrictiva, es útil para hacer las comparaciones entre los diferentes métodos pues facilita la selección del portafolio en los métodos de detección y en la técnica de la media móvil como se verá en las Secciones 3.2 y 3.3.

Con el fin de hacer comparaciones entre los diferentes modelos, nuestra estrategia de inversión  $\pi$  será vista como proporciones de capital invertido y no como capital invertido, es decir,  $\pi_t^i$  es la proporción de capital invertida en el activo  $i$  al tiempo  $t$ . La proporción restante  $1 - \sum_{i=1}^d \pi_t^i$  será invertida en el bono. Para un capital inicial  $x > 0$  no aleatorio, el proceso de capital correspondiente al portafolio  $\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^d)'$ ,  $0 \leq t \leq T$ , tiene la dinámica

$$\begin{aligned}
 \frac{dW_t^{x,\pi}}{W_t^{x,\pi}} &= \left(1 - \sum_{i=1}^d \pi_t^i\right) \frac{dS_t^0}{S_t^0} + \sum_{i=1}^d \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} \\
 &= \left(1 - \sum_{i=1}^d \pi_t^i\right) r dt + \sum_{i=1}^d \pi_t^i \left( (\mu_{2i} + (\mu_{1i} - \mu_{2i}) 1_{(t \leq \tau_i)}) dt + \sigma_i dB_t^i \right) \\
 &= r dt + \sum_{i=1}^d \pi_t^i \left[ (\mu_{2i} - r + (\mu_{1i} - \mu_{2i}) 1_{(t \leq \tau_i)}) dt + \sigma_i dB_t^i \right] \\
 &= r dt + \pi_t' (\mu_t - r \underline{1} + \sigma dB_t), \tag{3.0.4}
 \end{aligned}$$

donde  $\mu_t = (\mu_{21} + (\mu_{11} - \mu_{22}) 1_{(t \leq \tau_1)}, \dots, \mu_{2d} + (\mu_{1d} - \mu_{2d}) 1_{(t \leq \tau_d)})'$ ,  $\underline{1} = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^d$  y  $\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_d)$ .

En la Sección 3.1 obtendremos la estrategia (3.1.32) como solución del problema de maximizar la utilidad esperada, mientras que en la Sección 3.2 obtendremos la estrate-



gia (3.2.18) que se basará en los tiempos en los que se han detectado cambios en el rendimiento medio de algún activo, finalmente, en la Sección 3.3 se obtendrá la estrategia (3.3.1) basada en el indicador media móvil.

### 3.1. Método Matemático

Sea  $U(\cdot)$  una función de utilidad que satisface las condiciones de Inada y  $\mathcal{A}(x)$  el conjunto de estrategias admisibles, esto es,

$$\mathcal{A}(x) = \left\{ \pi_t : \pi_t \in [0, 1]^d, \pi'_t \mathbf{1} \leq 1, W_t^{x, \pi} \geq 0, 0 \leq t \leq T \right. \\ \left. \text{y } \pi_t \text{ es progresivamente medible respecto a } \mathbb{F}^S \right\}.$$

donde  $\mathbb{F}^S$  es la filtración generada por los precios observados  $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)'$ . El objetivo es maximizar la utilidad esperada al tiempo  $T$ , es decir, dado el capital inicial  $x > 0$  hallar

$$V(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x)} E[U(W_T^{x, \pi})]. \quad (3.1.1)$$

**Nota 1.** Debido a las restricciones en nuestro portafolio, estamos considerando un mercado incompleto sin ventas en corto.

Este problema es diferente al problema de Merton por tres razones.

- Los coeficientes de deriva de los activos con riesgo no son constantes.
- La filtración generada por los precios observados  $\mathbb{F}^S$  es diferente a la filtración  $\mathbb{F}^B$  generada por el movimiento Browniano  $B$ .
- El portafolio está restringido en el rectángulo  $[0, 1]^d$ .

Para resolver el problema de la filtración, reescribiremos el proceso de precios  $S_t$  en términos de un movimiento Browniano diferente de  $B_t$  y adaptado a la filtración  $\mathbb{F}^S$ , para ello haremos uso de las probabilidades condicionales a posteriori  $F_t^i := P(\tau_i \leq t | \mathcal{F}_t^{S^i})$ .

**Proposición 2.** La probabilidad a posteriori  $F_t^i$  de que el punto de cambio haya aparecido antes del tiempo  $t$  es

$$F_t^i = \frac{\lambda_i e^{\lambda_i t} L_t^i \int_0^t e^{-\lambda_i s} (L_s^i)^{-1} ds}{1 + \lambda_i e^{\lambda_i t} L_t^i \int_0^t e^{-\lambda_i s} (L_s^i)^{-1} ds}, \quad (3.1.2)$$

donde

$$L_t^i := \left( \frac{S_t^i}{S_0^i} \right)^{\frac{\mu_{2i} - \mu_{1i}}{\sigma_i^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_i^2} \left( (\mu_{2i} - \mu_{1i})^2 + 2(\mu_{2i} - \mu_{1i}) \left( \mu_{1i} - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \right) t \right\}. \quad (3.1.3)$$

*Demostración.* Consideremos un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$  soporte de un movimiento Browniano  $d$ -dimensional  $\tilde{B}_t = (\tilde{B}_t^1, \dots, \tilde{B}_t^d)'$ ,  $0 \leq t \leq T$  y  $d$  variables aleatorias independientes  $\tau_i : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  con distribución  $Q(\tau_i > t) = e^{-\lambda_i t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, d$ . El proceso

$$B_t^i = \tilde{B}_t^i - \int_0^t \frac{(\mu_{2i} - \mu_{1i})}{\sigma_i} 1_{(\tau_i \leq s)} ds \quad (3.1.4)$$

es un  $P$ -movimiento Browniano (Teorema de Girsanov, Klebaner [8], pág. 276) bajo el cambio de medida

$$\frac{dP}{dQ} \Big|_t^i = \exp \left( \int_0^t \frac{(\mu_{2i} - \mu_{1i})}{\sigma_i} 1_{(\tau_i \leq s)} d\tilde{B}_s^i - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(\mu_{2i} - \mu_{1i})^2}{\sigma_i^2} 1_{(\tau_i \leq s)} ds \right), \quad (3.1.5)$$

dado que

$$E \left( \int_0^T \frac{(\mu_{2i} - \mu_{1i})^2}{\sigma_i^2} 1_{(\tau_i \leq s)} ds \right) \leq \frac{(\mu_{2i} - \mu_{1i})^2 T}{\sigma_i^2} < \infty.$$

De (3.1.5) tenemos que

$$\begin{aligned} Z_t^i &: = \frac{dP}{dQ} \Big|_t^i = \exp \left( \frac{(\mu_{2i} - \mu_{1i})}{\sigma_i} (\tilde{B}_t^i - \tilde{B}_{\tau_i}^i) 1_{(\tau_i \leq t)} - \frac{(\mu_{2i} - \mu_{1i})^2}{2\sigma_i^2} (t - \tau_i)^+ \right) \\ &= 1_{(\tau_i \leq t)} \exp \left( \frac{(\mu_{2i} - \mu_{1i})}{\sigma_i} (\tilde{B}_t^i - \tilde{B}_{\tau_i}^i) - \frac{(\mu_{2i} - \mu_{1i})^2}{2\sigma_i^2} (t - \tau_i) \right) + 1_{(\tau_i > t)}. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Notemos que de (3.0.1),

$$\begin{aligned} S_t^i &= S_0^i \exp \left( \int_0^t (\mu_{2i} + (\mu_{1i} - \mu_{2i}) 1_{(s \leq \tau_i)}) ds + \int_0^t \sigma_i dB_s^i - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2 ds \right) \\ &= S_0^i \exp \left( \int_0^t (\mu_{1i} + (\mu_{2i} - \mu_{1i}) 1_{(\tau_i \leq s)}) ds + \int_0^t \sigma_i dB_s^i - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2 ds \right) \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{1}{\sigma_i} \left[ \log \left( \frac{S_t^i}{S_0^i} \right) - \left( \mu_{2i} - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) t \right] = \frac{\mu_{2i} - \mu_{1i}}{\sigma_i} \int_0^t 1_{(\tau_i \leq s)} ds + B_t^i = \tilde{B}_t^i. \quad (3.1.7)$$

De (3.1.7) obtenemos entonces que

$$\begin{aligned}\tilde{B}_t^i - \tilde{B}_{\tau_i}^i &= \frac{1}{\sigma_i} \left[ \log \left( \frac{S_t^i}{S_0^i} \right) - \left( \mu_{2i} - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) t \right] - \frac{1}{\sigma_i} \left[ \log \left( \frac{S_{\tau_i}^i}{S_0^i} \right) - \left( \mu_{2i} - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) \tau_i \right] \\ &= \frac{1}{\sigma_i} \left[ \log \left( \frac{S_t^i}{S_{\tau_i}^i} \right) - \left( \mu_{1i} - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) (t - \tau_i) \right].\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\tilde{B}_t^i - \tilde{B}_{\tau_i}^i}{\sigma_i} - \frac{1}{\sigma_i^2} \log \left( \frac{S_t^i}{S_{\tau_i}^i} \right) = -\frac{1}{\sigma_i} \left( \mu_{1i} - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) (t - \tau_i). \quad (3.1.8)$$

Si  $L_t^i$  está definido como en (3.1.3), entonces

$$\begin{aligned}\frac{L_t^i}{L_{\tau_i}^i} &= \left( \frac{S_t^i}{S_{\tau_i}^i} \right)^{\frac{\mu_{2i} - \mu_{1i}}{\sigma_i^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_i^2} \left( (\mu_{2i} - \mu_{1i})^2 + 2(\mu_{2i} - \mu_{1i}) \left( \mu_{1i} - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \right) (t - \tau_i) \right\} \\ &= \left( \frac{S_t^i}{S_{\tau_i}^i} \right)^{\frac{\mu_{2i} - \mu_{1i}}{\sigma_i^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_i^2} (\mu_{2i} - \mu_{1i})^2 (t - \tau_i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sigma_i^2} \left( \mu_{1i} - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) (t - \tau_i) (\mu_{2i} - \mu_{1i}) \right\}\end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Sustituyendo (3.1.8) en (3.1.9) obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{L_t^i}{L_{\tau_i}^i} &= \left( \frac{S_t^i}{S_{\tau_i}^i} \right)^{\frac{\mu_{2i} - \mu_{1i}}{\sigma_i^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_i^2} (\mu_{2i} - \mu_{1i})^2 (t - \tau_i) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\tilde{B}_t^i - \tilde{B}_{\tau_i}^i}{\sigma_i} - \frac{1}{\sigma_i^2} \log \left( \frac{S_t^i}{S_{\tau_i}^i} \right) \right] (\mu_{2i} - \mu_{1i}) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{\mu_{2i} - \mu_{1i}}{\sigma_i} (\tilde{B}_t^i - \tilde{B}_{\tau_i}^i) - \frac{1}{2\sigma_i^2} (\mu_{2i} - \mu_{1i})^2 (t - \tau_i) \right\}.\end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Luego, sustituyendo (3.1.10) en (3.1.6) se tiene finalmente que

$$Z_t^i = \frac{L_t^i}{L_{\tau_i}^i} 1_{(\tau_i \leq t)} + 1_{(\tau_i > t)}.$$

Dado que  $\tau_i$  es independiente de  $B_t^i$ ,  $0 \leq t \leq T$ , entonces  $\tau_i$  es  $\mathcal{F}_0^{B^i}$  medible y por el teorema de cambio de medida,

$$P(\tau_i > t) = E_P [1_{(\tau_i > t)}] = E_Q [Z_0^i 1_{(\tau_i > t)}] = Q(\tau > t) = e^{-\lambda_i t}.$$

Además, por la fórmula de Bayes

$$F_t^i = P\left(\tau_i \leq t | \mathcal{F}_t^{S^i}\right) = \frac{E_Q \left[ Z_t^i 1_{(\tau_i \leq t)} | \mathcal{F}_t^{S^i} \right]}{E_Q \left[ Z_t^i | \mathcal{F}_t^{S^i} \right]}.$$

Por una parte, utilizando la independencia de  $\tilde{B}$  y  $\tau_i$  bajo  $Q$ , y por la Ecuación (3.1.7) que  $\mathbb{F}^{S^i} = \mathbb{F}^{\tilde{B}^i}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} E_Q \left[ Z_t^i | \mathcal{F}_t^{S^i} \right] &= E_Q \left[ \frac{L_t^i}{L_{\tau_i}^i} 1_{(\tau_i \leq t)} + 1_{(\tau_i > t)} | \mathcal{F}_t^{S^i} \right] \\ &= \int_0^t \frac{L_t^i}{L_s^i} \lambda_i e^{-\lambda_i s} ds + e^{-\lambda_i t}. \end{aligned}$$

Por los mismos argumentos,

$$E_Q \left[ Z_t^i 1_{(\tau_i \leq t)} | \mathcal{F}_t^{S^i} \right] = \int_0^t \frac{L_t^i}{L_s^i} \lambda_i e^{-\lambda_i s} ds.$$

Finalmente, se obtiene el resultado:

$$F_t^i = \frac{\int_0^t \frac{L_t^i}{L_s^i} \lambda_i e^{-\lambda_i s} ds}{\int_0^t \frac{L_t^i}{L_s^i} \lambda_i e^{-\lambda_i s} ds + e^{-\lambda_i t}} = \frac{\lambda_i e^{\lambda_i t} L_t^i \int_0^t e^{-\lambda_i s} (L_s^i)^{-1} ds}{1 + \lambda_i e^{\lambda_i t} L_t^i \int_0^t e^{-\lambda_i s} (L_s^i)^{-1} ds}.$$

□

De aquí, en adelante, veremos la gran utilidad que tiene la probabilidad a posteriori  $F_t^i$ . Se debe notar que  $F_t^i$  es un estadístico suficiente basado en la muestra de los precios  $S_t^i$  y puede ser utilizado como un indicador de cambio en el rendimiento medio del activo  $i$ .

**Proposición 3.** El proceso  $(F_t^i)_{t \geq 0}$  satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dF_t^i = \lambda_i (1 - F_t^i) dt + \frac{\mu_{2i} - \mu_{1i}}{\sigma_i} F_t^i (1 - F_t^i) d\bar{B}_t^i, i = 1, \dots, d. \quad (3.1.11)$$

donde

$$\bar{B}_t^i = \frac{1}{\sigma_i} \left[ \log \left( \frac{S_t^i}{S_0^i} \right) - \left( \mu_{1i} - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) t - (\mu_{2i} - \mu_{1i}) \int_0^t F_s^i ds \right], t \geq 0, i = 1, \dots, d. \quad (3.1.12)$$

*Demostración.* Sea

$$V_t^i = \frac{F_t^i}{1 - F_t^i} = \int_0^t \lambda_i \frac{L_t^i}{L_s^i} e^{\lambda_i(t-s)} ds, \quad i = 1, \dots, d. \quad (3.1.13)$$

De (3.1.3) se obtiene que

$$dL_t^i = L_t^i \left[ \frac{1}{\sigma_i^2} (\mu_{2i} - \mu_{1i}) d(\log S_t^i) - \frac{1}{\sigma_i^2} (\mu_{2i} - \mu_{1i}) \left( \mu_{1i} - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) dt \right], \quad i = 1, \dots, d.$$

Luego, aplicamos la fórmula de Itô en (3.1.13):

$$\begin{aligned} dV_t^i &= d \left( \lambda_i e^{\lambda_i t} L_t^i \int_0^t \frac{e^{-\lambda_i s}}{L_s^i} ds \right) \\ &= \left[ \lambda_i e^{\lambda_i t} dL_t^i + L_t^i \lambda_i^2 e^{\lambda_i t} dt \right] \int_0^t \frac{e^{-\lambda_i s}}{L_s^i} ds + \frac{e^{-\lambda_i t}}{L_t^i} (\lambda_i e^{\lambda_i t} L_t^i) dt \\ &= \left\{ \lambda_i + V_t^i \left( \lambda_i - \left( \frac{\mu_{2i} - \mu_{1i}}{\sigma_i^2} \right) \left( \mu_{1i} - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \right) \right\} dt \\ &\quad + \frac{\mu_{2i} - \mu_{1i}}{\sigma_i^2} V_t^i d(\log S_t^i), \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Aplicando nuevamente la fórmula de Itô en  $F_t^i = \frac{V_t^i}{1+V_t^i}$  y haciendo uso de (3.1.14) se obtiene (3.1.11).  $\square$

Al proceso  $(\bar{B}_t^i)_{t \geq 0}$  lo llamaremos el proceso de innovación del activo  $i$ .

**Proposición 4.** *La filtración  $\mathbb{F}^{S^i}$ , generada por los precios del activo  $i$ , es igual a la filtración  $\mathbb{F}^{\bar{B}^i}$  generada por el proceso de innovación  $\bar{B}^i$ .*

*Demostración.* Por (3.1.12) se obtiene que  $\bar{B}_t^i$  es  $\mathbb{F}^{S^i}$  adaptado. Si escribimos (3.1.12) como

$$d(\log S_t^i) = \left( \left( \mu_{1i} - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) + (\mu_{2i} - \mu_{1i}) F_t^i \right) dt + \sigma_i d\bar{B}_t^i,$$

dado que  $F_t^i$  es  $\mathbb{F}^{\bar{B}^i}$ -medible por (3.1.11), entonces  $S_t^i$  será  $\mathbb{F}^{\bar{B}^i}$ -medible.  $\square$

Mostraremos que  $\bar{B}_t$  es un movimiento Browniano que genera la misma filtración que nuestro proceso de precios  $S_t$ , esto nos será útil pues eliminaremos uno de los primeros inconvenientes del modelo original, en el que la filtración  $\mathbb{F}^B$  no coincide con  $\mathbb{F}^S$ .

El siguiente corolario será útil en la construcción de una estrategia de inversión utilizando el método de martingalas.

**Corolario 1.** La filtración  $\mathbb{F}^S$  es la misma que  $\mathbb{F}^{\bar{B}}$ , donde  $\bar{B}_t = (\bar{B}_t^1, \dots, \bar{B}_t^d)'$ . En particular, cada martingala  $M_t$  con respecto a  $\mathbb{F}^S$  admite una representación

$$M_t = M_0 + \int_0^t \phi_s d\bar{B}_s,$$

donde  $\phi$  es un proceso  $\mathbb{F}^S$ -adaptado.

*Demostración.* Notemos que por (3.1.12) y (3.1.4),

$$\bar{B}_t^i = \tilde{B}_t^i - \frac{\mu_{2i} - \mu_{1i}}{\sigma_i} \int_0^t F_s^i ds \quad (3.1.15)$$

$$= B_t^i - \frac{\mu_{2i} - \mu_{1i}}{\sigma_i} \int_0^t [1_{(\tau_i \leq s)} ds - E(1_{(\tau_i \leq s)} | \mathcal{F}_s^S)] ds \quad (3.1.16)$$

Entonces  $\bar{B}_t^i$  es una  $\mathbb{F}^{S^i}$ -martingala con  $\langle \bar{B}^i \rangle_t = \langle B^i \rangle_t = t$ , y por la caracterización de Levy, un  $P$ -movimiento Browniano. Entonces,  $\bar{B}$  es un  $P$ -movimiento Browniano  $d$ -dimensional y por el Teorema de Representación de Martingalas, para toda martingala  $\mathbb{F}^S$ -adaptada, existe un proceso  $\mathbb{F}^S$ -adaptado  $\phi$  tal que

$$M_t = M_0 + \int_0^t \phi'_s d\bar{B}_s.$$

□

Antes de iniciar la construcción de una estrategia óptima, veamos que es posible escribir el proceso de precios  $S_t$  en términos el proceso de inovación  $\bar{B}_t$ . La ventaja de escribirlo de esta manera es que las filtraciones  $\mathbb{F}^S$  y  $\mathbb{F}^{\bar{B}}$  coinciden (Corolario 3), por lo cual si conozco un proceso, el otro también será conocido; contrario a la situación de las filtraciones  $\mathbb{F}^S$  y  $\mathbb{F}^B$ , en las que el conocer la trayectoria del movimiento Browniano  $B_t$  no es suficiente para conocer la evolución de los precios, sino que además se necesitaría el vector de tiempos aleatorios  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d)'$ .

De las igualdades (3.1.4) y (3.1.15) se obtiene que

$$dS_t^i = S_t^i (\mu_{1i} + (\mu_{2i} - \mu_{1i}) F_t^i) dt + S_t^i \sigma_i d\bar{B}_t^i, i = 1, \dots, d.$$

Definiendo  $b_t^i = \mu_{1i} + (\mu_{2i} - \mu_{1i}) F_t^i$ , podemos escribir el proceso de precios en forma vectorial como

$$dS_t = \text{diag}(S_t) [b_t dt + \sigma d\bar{B}_t].$$

Para construir la estrategia óptima se seguirán las ideas de Karatzas & Shreve [7], Capítulo 5. Lo primero que debemos notar es que nuestro portafolio tiene la restricción  $\pi \in \mathcal{A}(x)$ , por lo tanto, lo primero que se hará será extender nuestro mercado  $\mathcal{M}$  a uno sin restricciones. En el mercado sin restricciones resolveremos el problema de optimización y finalmente proyectaremos la solución al espacio  $\mathcal{A}(x)$  de estrategias admisibles.

Introduzcamos el mercado sin restricciones  $\mathcal{M}_v$  definido como sigue: Sea  $\mathcal{D}$  el conjunto de procesos  $\mathbb{F}^S$ -progresivamente medibles  $v : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  tales que

$$E \int_0^T \|v(t)\|^2 dt < \infty.$$

El bono al tiempo  $t$  estará dado por:

$$S_t^{0,(v)} = \exp \left[ rt + \int_0^t v_s^- ds \right] \quad (3.1.17)$$

y los activos con riesgo en el mercado  $\mathcal{M}_v$  tendrán dinámica:

$$dS_t^{(v)} = \text{diag} \left( S_t^{(v)} \right) \left[ (b_t + v_t^+) dt + \sigma d\bar{B}_t \right], \quad (3.1.18)$$

es decir, las volatilidades serán las mismas que en  $\mathcal{M}$ , pero el vector deriva  $b_t^{(v)} := b_t + v_t^+$  ha cambiado en  $\mathcal{M}_v$ . La función del proceso  $v \in \mathcal{D}$  se verá clara más adelante.

**Nota 2.** Consideremos los siguientes procesos,

$$\theta_t^{(v)} = \sigma_t^{-1} [b_t + v_t - r\mathbf{1}], \quad (3.1.19)$$

$$B_t^{(v)} = \bar{B}_t + \int_0^t \theta_s^{(v)} ds, \quad (3.1.20)$$

$$Z_t^{(v)} = \exp \left\{ - \int_0^t \theta_s^{(v)} d\bar{B}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_s^{(v)}\|^2 ds \right\}, \quad (3.1.21)$$

$$H_t^{(v)} = \frac{Z_t^{(v)}}{S_t^{0,(v)}}. \quad (3.1.22)$$

Tenemos que  $\theta_t^{(v)}$  está bien definido, pues nuestra matriz de volatilidades es invertible; además

cumple que

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \|\theta_s^{(v)}\|^2 ds &= \int_0^T \sum_{i=1}^d \sigma_i^{-1} (b_s^i + v_s^i - r)^2 ds \\
 &\leq \int_0^T \sum_{i=1}^d \sigma_i^{-1} (\max(\mu_{1i}, \mu_{2i}) + v_s^i - r)^2 ds \\
 &= T \sum_{i=1}^d \sigma_i^{-1} (\max(\mu_{1i}, \mu_{2i}) + v_s^i - r)^2 ds < \infty.
 \end{aligned}$$

Luego obtendremos que

$$E \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta_s^{(v)}\|^2 ds \right) \right] < \infty.$$

Por la Proposición 1, el mercado  $\mathcal{M}_v$  es libre de arbitraje. Por el Teorema de Girsanov se obtiene que el proceso  $B_t^{(v)}$  es un movimiento Browniano bajo la medida  $\mathbb{Q}$  dada por la densidad

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}}{dP} \right|_t = Z_t^{(v)},$$

y el proceso de precios descontados  $\frac{S_t^{(v)}}{S_t^{0,(v)}}$  es una  $\mathbb{Q}$ -martingala. Luego, el proceso  $H_t^{(v)} S_t^{(v)}$  es una  $P$ -martingala con respecto a la filtración  $\mathbb{F}^S$  pues

$$\frac{1}{Z_s^{(v)}} E \left[ H_t^{(v)} S_t^{(v)} | \mathcal{F}_s^S \right] = E \left[ \frac{S_t^{(v)}}{S_t^{0,(v)}} \frac{Z_t^{(v)}}{Z_s^{(v)}} | \mathcal{F}_s^S \right] = E_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{S_t^{(v)}}{S_t^{0,(v)}} | \mathcal{F}_s^S \right] = \frac{S_s^{(v)}}{S_s^{0,(v)}}.$$

Por lo tanto, en el mercado  $\mathcal{M}_v$ , el proceso  $H_t^{(v)}$  será el factor que hará a los precios una  $P$ -martingala.

En la proposición siguiente, veremos que en el mercado  $\mathcal{M}_v$  si se tiene suficiente capital como para generar el derivado  $\xi$ , entonces existe una estrategia que replica al activo, es decir, siempre que contemos con el capital suficiente, tendremos una estrategia replicadora.

En el contexto del mercado  $\mathcal{M}_v$ , definiremos al conjunto  $\mathcal{A}(x, v)$  como el conjunto de estrategias  $\pi$  progresivamente medibles respecto a  $\mathbb{F}^S$  tales que  $W_t^{x, \pi, (v)} \geq 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

**Proposición 5.** Sea  $\mathcal{M}_v$  el mercado definido en (3.1.17) y (3.1.18). Consideremos un activo contingente  $\xi$  que satisface

$$E \left[ H_T^{(v)} \xi \right] = x > 0. \tag{3.1.23}$$



Entonces existe un portafolio  $\pi \in \mathcal{A}(x, v)$  tal que  $W_T^{x, \pi, (v)} = \xi$  c.s. En particular,

$$W_t^{x, \pi, (v)} = \frac{1}{H_t^{(v)}} E \left[ H_T^{(v)} \xi | \mathcal{F}_t^S \right].$$

*Demostración.* Sabemos que los precios descontados son una martingala, es decir,

$$M_t = E \left[ H_T^{(v)} \xi | \mathcal{F}_t^S \right],$$

es una martingala. Luego, por el Corolario 1:

$$M_t = x + \int_0^t \phi'_s d\bar{B}_s, \tag{3.1.24}$$

para algún proceso  $\phi_t$  progresivamente medible tal que

$$\int_0^T \|\phi_s\|^2 ds < \infty.$$

Definamos un proceso  $X_t$  no negativo por

$$\frac{X_t}{S_t^{0, (v)}} = \frac{M_t}{Z_t^{(v)}},$$

de modo que  $X_0 = M_0 = x$ .

Aplicando la fórmula de Itô obtenemos que:

$$d \left( \frac{X_t}{S_t^{0, (v)}} \right) = d \left( \frac{M_t}{Z_t^{(v)}} \right) = \left( Z_t^{(v)} \right)^{-1} dM_t + M_t d \left( Z_t^{(v)} \right)^{-1}.$$

Por (3.1.22),  $\left( Z_t^{(v)} \right)^{-1} = \left( S_t^{0, (v)} H_t^{(v)} \right)^{-1}$ , por (3.1.24),  $dM_t = \phi'_t d\bar{B}_t$  y por (3.1.21),  $d \left( Z_t^{(v)} \right)^{-1} = \left( Z_t^{(v)} \right)^{-1} \theta_t d\bar{B}_t$ , entonces

$$\begin{aligned} d \left( \frac{X_t}{S_t^{0, (v)}} \right) &= \frac{\phi'_t d\bar{B}_t}{S_t^{0, (v)} H_t^{(v)}} + \frac{M_t \theta_t d\bar{B}_t}{S_t^{0, (v)} H_t^{(v)}} \\ &= \frac{1}{S_t^{0, (v)}} \pi'_t \sigma d\bar{B}_t, \end{aligned}$$

donde

$$\pi_t = \frac{1}{H_t^{(v)}} (\sigma')^{-1} \left[ \phi_t + M_t \theta_t^{(v)} \right] \quad (3.1.25)$$

$$= (\sigma')^{-1} \left[ \frac{\phi_t}{H_t^{(v)}} + X_t \theta_t^{(v)} \right]. \quad (3.1.26)$$

Entonces

$$\frac{X_t}{S_t^0} = x + \int_0^t \frac{1}{S_u^0} \pi_u' \sigma d\bar{B}_u^{(v)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Como  $X_t \geq 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $\pi$  es admisible haciendo  $W_t^{x,\pi,(v)} = X_t$ , además

$$W_T^{x,\pi,(v)} = \frac{S_T^0}{Z_T^{(v)}} M_T = \frac{S_T^0}{Z_T^{(v)}} \frac{Z_T^{(v)}}{S_T^0} \xi = \xi.$$

□

Lo que queremos hacer es hallar la estrategia que maximice la utilidad esperada, es decir, dado  $x > 0$ , queremos hallar

$$V(x, v) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, v)} E \left[ U(W_T^{x,\pi,(v)}) \right]. \quad (3.1.27)$$

Pero por la Proposición que se acaba de demostrar, esto es equivalente a maximizar  $E[U(\xi)]$  sobre todos los activos contingente  $\xi$  que satisfagan  $E \left[ H_T^{(v)} \xi \right] = x$ .

Utilizando la técnica del multiplicador de Lagrange, para un  $y > 0$ , nuestro objetivo es hallar

$$\sup_{\xi \in \mathcal{F}_T^S} E[U(\xi)] + y \left( x - E \left[ H_T^{(v)} \xi \right] \right). \quad (3.1.28)$$

Pero notemos que

$$E[U(\xi)] + y \left( x - E \left[ H_T^{(v)} \xi \right] \right) = E \left[ U(\xi) - y H_T^{(v)} \xi \right] + xy \leq E \left[ \tilde{U} \left( y H_T^{(v)} \right) \right] + xy, \quad (3.1.29)$$

donde  $\tilde{U}(\cdot)$  es el dual convexo de  $U(\cdot)$ . La igualdad se alcanza si, y sólo si,  $\xi = I \left( y H_T^{(v)} \right)$ .

Resumiendo, debemos hallar  $\xi$  que maximice  $E[U(\xi)] + y \left( x - E \left[ H_T^{(v)} \xi \right] \right)$ , pero (3.1.29) muestra que el candidato es  $\xi = I \left( y H_T^{(v)} \right)$ , por supuesto, faltaría determinar el multiplicador de Langrange  $y > 0$ , sin embargo, éste queda determinado de manera única por la función

$$\mathcal{X}(y) := E \left[ H_T^{(v)} I \left( y H_T^{(v)} \right) \right],$$

la cual mapea  $(0, \infty)$  en si mismo, es continua y estrictamente decreciente, por lo cual existe un único  $y > 0$  tal que  $\mathcal{X}(y) = x$ . Finalmente, utilizando la proposición anterior obtenemos la estrategia con la que se obtiene la máxima utilidad.

**Nota 3.** Si denotamos por  $\mathcal{Y}(\cdot)$  la función inversa de  $\mathcal{X}(\cdot)$  entonces el multiplicador de Langrange estará unicamente determinado como  $y = \mathcal{Y}(x)$ .

**Teorema 1.** Supongamos que  $\mathcal{X}(y) < \infty$  y que  $V(x, v) < \infty$ ,  $0 < x < \infty$ . Definiendo  $\xi = I \left( \mathcal{Y}(x) H_T^{(v)} \right)$ , existe un portafolio  $\pi \in \mathcal{A}(x, v)$  que alcanza el supremo en (3.1.27). El capital al tiempo  $t$  está dado por

$$W_t^{x, \pi, (v)} = \frac{1}{H_t^{(v)}} E \left[ H_T^{(v)} I \left( \mathcal{Y}(x) H_T^{(v)} \right) \mid \mathcal{F}_t^S \right], \quad (3.1.30)$$

y la utilidad máxima por

$$V(x, v) = E \left[ U \left( I \left( \mathcal{Y}(x) H_T^{(v)} \right) \right) \right].$$

*Demostración.*  $\xi = I \left( \mathcal{Y}(x) H_T^{(v)} \right)$  satisface (3.1.23) por construcción. Entonces existe un portafolio  $\pi \in \mathcal{A}(x, v)$  tal que  $W_T^{x, \pi, (v)} = \xi$ . Sea  $x > 0$  y  $y^* > 0$ ,  $\pi^* \in \mathcal{A}(x, v)$  arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned} E \left[ U \left( W_T^{x, \pi^*, (v)} \right) \right] &\leq E \left[ U \left( W_T^{x, \pi^*, (v)} \right) \right] + y^* \left\{ x - E \left[ H_T^{(v)} W_T^{x, \pi^*, (v)} \right] \right\} \\ &= E \left[ U \left( W_T^{x, \pi^*, (v)} \right) - y^* H_T^{(v)} W_T^{x, \pi^*, (v)} \right] + x y^* \\ &\leq E \left[ \tilde{U} \left( y^* H_T^{(v)} \right) \right] + x y^*, \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

es decir, hemos encontrado una cota superior para  $E \left[ U \left( W_T^{x, \pi^*, (v)} \right) \right]$ , que de hecho, vale para cualquier  $y^* > 0$ . Ahora sólo debemos fijarnos en que si tomamos  $y^* = \mathcal{Y}(x)$

y  $\pi^*$  como en (3.1.25), las desigualdades en (3.1.31) serán igualdades, alcanzando dicha cota superior y

$$E \left[ U \left( W_T^{x, \pi^*, (v)} \right) \right] = E \left[ \tilde{U} \left( \mathcal{Y}(x) H_T^{(v)} \right) \right] + x \mathcal{Y}(x) = E \left[ U \left( I \left( \mathcal{Y}(x) H_T^{(v)} \right) \right) \right].$$

□

**Corolario 2.** *Supongamos que nuestra función de utilidad es  $U(x) = \log x$ , entonces la estrategia óptima es*

$$\pi_t = (\sigma')^{-1} \left[ W_t^{x, \pi, (v)} \theta_t^{(v)} \right], \quad (3.1.32)$$

con proceso de capital

$$W_t^{x, \pi, (v)} = \frac{x}{H_t^{(v)}}.$$

*Demostración.* Si  $U(x) = \log x$  entonces  $I(x) = (U')^{-1} = x^{-1}$  y el multiplicador de Langrange queda únicamente determinado como el  $y > 0$  tal que

$$x = E \left[ H_T^{(v)} I \left( y H_T^{(v)} \right) \right] = E \left[ H_T^{(v)} y^{-1} \left( H_T^{(v)} \right)^{-1} \right] = y^{-1}.$$

Luego, el proceso de capital en (3.1.30) está dado por

$$W_t^{x, \pi, (v)} = \frac{x}{H_t^{(v)}}.$$

Finalmente, para hallar la estrategia óptima, debemos hallar el proceso  $\phi$  tal que

$$E \left[ H_T^{(v)} \xi | \mathcal{F}_t^S \right] = x + \int_0^t \phi'_s d\bar{B}_s,$$

pero  $\xi = I \left( \mathcal{Y}(x) H_T^{(v)} \right) = x \left( H_T^{(v)} \right)^{-1}$ , de modo que  $E \left[ H_T^{(v)} \xi | \mathcal{F}_t^S \right] = x$  y necesariamente  $\phi_t = 0, 0 \leq t \leq T$ .

Así, por (3.1.25), la estrategia óptima que genera el proceso de capital  $W_t^{x, \pi, (v)} = \frac{x}{H_t^{(v)}}$ , está dada por

$$\begin{aligned} \pi_t &= \frac{1}{H_t^{(v)}} (\sigma')^{-1} \left[ x \theta_t^{(v)} \right] \\ &= (\sigma')^{-1} \left[ W_t^{x, \pi, (v)} \theta_t^{(v)} \right]. \end{aligned}$$

□

Hemos hallado la solución al problema de optimización (3.1.27), la pregunta es: ¿Qué relación hay entre  $V(x, v)$  y  $V(x)$ , para algún  $v \in \mathcal{D}$ ? Lo primero que se debe observar es que por la definición de  $\mathcal{A}(x)$  y  $\mathcal{A}(x, v)$ ,

$$V(x) \leq V(x, v), \quad \forall v \in \mathcal{D}.$$

Luego, la solución del problema (3.1.1) toma la forma de un problema de cobertura de la familia de problemas sin restricción: debemos encontrar un proceso  $v^*$  en  $\mathcal{D}$  para el cual

$$V(x) = V(x, v^*) \leq V(x, v), \quad \text{para todo } v \in \mathcal{D}. \quad (3.1.33)$$

La siguiente proposición nos mostrará las condiciones que debe cumplir tal  $v^*$  en  $\mathcal{D}$ .

**Proposición 6.** *Sea  $x > 0$  dado y supongamos que para algún  $v^* \in \mathcal{D}$*

$$\pi_t^{(v^*)} \in [0, 1]^d, \quad \left(\pi_t^{(v^*)}\right)' \underline{1} \leq 1 \quad \text{y} \quad (v_t^*)' \pi_t^{(v)} = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

*Entonces  $\pi^{(v)}$  es óptimo para (3.1.1) y  $V(x) = V(x, v^*)$ . Más aún,  $v^*$  minimiza  $V(x, v)$  sobre todo  $v \in \mathcal{D}$ .*

*Demostración.* Como  $\pi_t^{(v^*)} \in \mathcal{A}(x)$  entonces

$$V(x) \geq E \left[ U \left( W_T^{x, \pi^{(v^*)}} \right) \right] = E \left[ U \left( W_T^{x, \pi^{(v^*)}, v^*} \right) \right] = V(x, v^*).$$

La primera desigualdad la obtenemos por la definición de  $V(x)$  como la máxima utilidad sobre todas las estrategias en  $\mathcal{A}(x)$ , la primera igualdad se obtiene por la hipótesis  $(v_t^*)' \pi_t^{(v)} = 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ , ver Karatzas & Shreve [7], pág.268; la segunda igualdad se obtiene por la definición de  $\pi^{(v^*)}$  como la estrategia que maximiza la utilidad en el mercado  $\mathcal{M}_{v^*}$ .

Por (3.1.33) tenemos la desigualdad contraria por lo que  $V(x) = V(x, v^*)$ . Que  $v^*$  minimiza  $V(x, v)$  sobre todo  $v \in \mathcal{D}$  se obtiene inmediatamente pues  $\pi_t^{(v^*)} \in \mathcal{A}(x)$ .  $\square$

De esta forma ya tenemos una manera de pasar de la familia de mercados extendidos a nuestro mercado original, debemos resolver en problema de maximización en general para cualquier  $v \in \mathcal{D}$ , después hallaremos para que  $v^*$  se minimiza  $V(x, v)$ . Por último proyectaremos la solución  $\pi_t^{(v^*)}$  a  $\{\pi : \pi \in [0, 1]^d \text{ y } \pi' \underline{1} \leq 1\}$ .

**Corolario 3.** Si nuestra función de utilidad es  $U(x) = \log(x)$ , entonces la estrategia  $v^* = ((v^1)^*, \dots, (v^d)^*)$  que minimiza  $V(x, v)$  sobre todo  $v \in \mathcal{D}$  está dada por

$$(v_s^i)^* = \begin{cases} r - b_s^i & \text{si } \frac{b_s^i - r}{\sigma_i^2} < 0, \\ 0 & \text{si } \frac{b_s^i - r}{\sigma_i^2} \in [0, 1], \\ \sigma_i^2 + r - b_s^i & \text{En otro caso.} \end{cases} \quad (3.1.34)$$

*Demostración.* En el Corolario 2 obtuvimos que cuando  $U(x) = \log x$ ,

$$\pi_t = \frac{1}{H_t^{(v)}} (\sigma')^{-1} [x\theta_t^{(v)}].$$

En nuestro mercado tenemos que

$$\begin{aligned} \theta_t^{(v)} &= \sigma_t^{-1} [(b_t + v_t^+) - (r\mathbf{1} + v_t^-)] = \sigma_t^{-1} [b_t + v_t - r\mathbf{1}], \\ H_t^{(v)} &= \exp \left( - \int_0^t (\theta_s^{(v)})' d\bar{B}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_s^{(v)}\|^2 ds - rt - \int_0^t v_s^- ds \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$W_t^{x, \pi, (v)} = x \exp \left( \int_0^t (\theta_s^{(v)})' d\bar{B}_s + \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_s^{(v)}\|^2 ds + rt + \int_0^t v_s^- ds \right).$$

Luego, debemos hallar  $v^*$  que haga mínimo

$$\begin{aligned} E \left[ U \left( W_T^{x, \pi, (v)} \right) \right] &= E \left[ \log x + \int_0^T (\theta_s^{(v)})' d\bar{B}_s + \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta_s^{(v)}\|^2 ds + rT + \int_0^T v_s^- ds \right] \\ &= \log x + rT + E \left[ \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta_s^{(v)}\|^2 ds + \int_0^T v_s^- ds \right] \end{aligned}$$

Como  $\log x + rT$  es constante, debemos minimizar

$$v_s^- + \frac{1}{2} \|\theta_s^{(v)}\|^2.$$

Esto es equivalente a minimizar

$$(v_s^-)^i + \frac{1}{2} \left( \frac{b_s^i + v_s^i - r}{\sigma_i} \right)^2, \quad 0 \leq s \leq T, \quad i = 1, \dots, d.$$

Este mínimo se obtiene cuando

$$v_s^i = \begin{cases} r - b_s^i & \text{si } \frac{b_s^i - r}{\sigma_i^2} < 0, \\ 0 & \text{si } \frac{b_s^i - r}{\sigma_i^2} \in [0, 1], \\ \sigma_i^2 + r - b_s^i & \text{En otro caso.} \end{cases} \quad (3.1.35)$$

Finalmente, sólo debemos proyectar esta solución a nuestro espacio de estrategias admisibles para el problema (3.1.1).  $\square$

Tenemos una solución explícita para el caso de la función de utilidad logaritmo y es ésta la que usaremos para las comparaciones con los otros métodos por su simplicidad.

## 3.2. Métodos de Detección

La estrategia de optimización de portafolio de la sección anterior supone que el inversionista puede cambiar continuamente la diversificación de su capital. En la realidad existen costos por las transacciones realizadas, como por ejemplo, la venta y compra de acciones, por lo que no es tan factible rebalancear “continuamente” el portafolio. En esta sección se desarrollarán dos procedimientos de detección para decidir cuándo rebalancear el portafolio basado en el cambio de la deriva de cada activo con riesgo, además se proporciona una estrategia que optimiza la utilidad esperada si hacemos uso de estos métodos de detección.

Los dos métodos de detección que se considerarán son: el propuesto por Karatzas [4] y el propuesto por Shiryaev [15]. El objetivo en ambos métodos es encontrar un tiempo de paro  $\theta_i$  que detecte el instante  $\tau_i$  en el cual la deriva del activo  $i$  cambia.

Con el método de Karatzas se minimiza la pérdida esperada  $E|\theta_i - \tau_i|$  y con el de Shiryaev se minimiza  $\{P(\theta_i < \tau_i) + cE(\theta_i - \tau_i)^+\}$ . La diferencia entre estos métodos es que en el segundo no se le da el mismo peso al error generado por falsa alarma ( $\theta_i < \tau_i$ ) y el error generado por una alarma tardía ( $\theta_i > \tau_i$ ).

Lo primero que se debe notar es que el tiempo de cambio  $\tau_i$ , que indica el cambio de la deriva del activo  $i$ , no es conocido ni observable directamente, sin embargo, es necesario conocerlo pues nuestra estrategia de inversión pudiera ser diferente antes y después de este tiempo, mejorando de este modo la utilidad.

Buscaremos un tiempo de paro  $\theta_i$  que detecte el instante  $\tau_i$  en el que la deriva cambia. Este tiempo de paro debemos obtenerlo de la información que tenemos disponible, esto es, debemos obtenerlo a través de nuestras observaciones de los precios del activo, es decir, buscamos un tiempo de paro  $\theta_i$  respecto a la filtración  $\mathbb{F}^{S^i}$ .

### 3.2.1. Método Karatzas

Si el tiempo  $\theta_i$  detecta antes el cambio, entonces al invertir en ese activo estaríamos perdiendo en promedio  $\left(r - \mu_{1i} + \frac{\sigma_i^2}{2}\right) (\tau_i - \theta_i)$  por cada unidad monetaria, por el contrario, si hay retraso en la detección del cambio, entonces la pérdida será  $\left(\mu_{2i} + \frac{\sigma_i^2}{2} - r\right) (\theta_i - \tau_i)$  en promedio. Luego, la pérdida está medida por  $|\theta_i - \tau_i|$ , por lo que trataremos de minimizar la pérdida esperada

$$\mathcal{R}(\theta_i) = E |\theta_i - \tau_i|,$$

sobre todos los tiempo de paro  $\theta_i$  de la filtración  $\mathbb{F}^{S^i}$ . Es suficiente considerar los tiempo de paro  $\theta_i$  con  $E[\theta_i] < \infty$ , de lo contrario tendríamos  $E |\theta_i - \tau_i| = \infty$ . Sea  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}^i$  la familia de tiempos de paro  $\theta_i$  respecto a  $\mathbb{F}^{S^i}$  con  $E[\theta_i] < \infty$ .

Observemos que

$$\begin{aligned} |\theta_i - \tau_i| - \tau_i &= (\theta_i - \tau_i)^+ - (\theta_i \wedge \tau_i) \\ &= 2 \int_0^{\theta_i} \left(1_{(\tau_i \leq t)} - \frac{1}{2}\right) dt, \end{aligned}$$

por lo que

$$E |\theta_i - \tau_i| - \frac{1}{\lambda_i} = 2E \left( \int_0^{\theta_i} \left(F_t^i - \frac{1}{2}\right) dt \right),$$

donde  $F_t^i$  está definido como en (3.1.2). Finalmente obtenemos que

$$\inf_{\theta_i \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^i} E |\theta_i - \tau_i| = \frac{1}{\lambda_i} + 2 \inf_{\theta_i \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^i} E \left( \int_0^{\theta_i} \left(F_t^i - \frac{1}{2}\right) dt \right).$$

Anteriormente se obtuvo que la probabilidad a posteriori  $F_t^i$  satisface

$$dF_t^i = \lambda_i (1 - F_t^i) dt + \frac{\mu_{2i} - \mu_{1i}}{\sigma_i} F_t^i (1 - F_t^i) d\bar{B}_t^i, F_0^i = 0, \quad (3.2.1)$$

donde  $(\bar{B}_t^i)_{t \geq 0}$  es el proceso de inovación definido anteriormente y satisface que es un movimiento Browniano con  $\mathbb{F}^{\bar{B}^i} = \mathbb{F}^{S^i}$ .

Definamos  $\vartheta_i = \frac{\mu_{2i} - \mu_{1i}}{\sigma_i}$ . Se sigue de la ecuación (3.2.1) que la probabilidad a posteriori  $F_t^i$  es un proceso de difusión en  $I = (0, 1)$  con deriva  $b(x) = \lambda_i (1 - x)$  y coeficiente de



difusión  $\eta^2(x) = \vartheta_i^2 x^2 (1-x)^2$ . Su función de escala y su función escape están dadas por:

$$S(x) = \int^x S'(u) du, \text{ con } S'(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{2\lambda_i}{\vartheta_i^2}} \exp\left(\frac{2\lambda_i}{\vartheta_i^2 x}\right),$$

$$m(dx) = \frac{2dx}{S'(x)\eta^2(x)},$$

respectivamente.

**Proposición 7.** *Supongamos que tenemos una función  $\mathcal{Q}_i : [0, 1] \rightarrow (-\infty, 0]$  de clase  $C^1(0, 1] \cap C^2((0, 1] \setminus \{p_i^*\})$  con algún  $p_i^* \in (\frac{1}{2}, 1)$  que satisface:*

$$\lambda_i (1-x) \mathcal{Q}'_i(x) + \frac{1}{2} \vartheta_i^2 x^2 (1-x)^2 \mathcal{Q}''_i(x) = \frac{1}{2} - x, \quad 0 < x < p_i^*, \quad (3.2.2)$$

$$\lambda_i (1-x) \mathcal{Q}'_i(x) + \frac{1}{2} \vartheta_i^2 x^2 (1-x)^2 \mathcal{Q}''_i(x) > \frac{1}{2} - x, \quad p_i^* < x < 1, \quad (3.2.3)$$

$$\mathcal{Q}_i(x) < 0, \quad 0 \leq x < p_i^*, \quad (3.2.4)$$

$$\mathcal{Q}_i(x) = 0, \quad p_i^* \leq x \leq 1. \quad (3.2.5)$$

Sea

$$\theta_i^* = \inf \{t \geq 0 : F_t^i \geq p\}, \quad (3.2.6)$$

Entonces

$$E \int_0^{\theta_i^*} \left[ F_s^i - \frac{1}{2} \right] ds = \mathcal{Q}_i(0).$$

*Demostración.* Para un  $\theta_i \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ , obtenemos aplicando la regla de Itô que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_i(F_{\theta_i}^i) &= \mathcal{Q}_i(F_0^i) + \int_0^{\theta_i} \mathcal{Q}'_i(F_s^i) dF_s^i + \frac{1}{2} \int_0^{\theta_i} \mathcal{Q}''_i(F_s^i) d\langle F^i \rangle_s \\ &= \mathcal{Q}_i(0) + \int_0^{\theta_i} \left[ \lambda_i (1-F_s^i) \mathcal{Q}'_i(F_s^i) + \frac{\vartheta_i^2}{2} (F_s^i)^2 (1-F_s^i)^2 \mathcal{Q}''_i(F_s^i) \right] ds \\ &\quad + \vartheta_i \int_0^{\theta_i} F_s^i (1-F_s^i) \mathcal{Q}'_i(F_s^i) d\bar{B}_s^i. \end{aligned}$$

De (3.2.2) y (3.2.3) obtenemos que

$$\mathcal{Q}_i(F_{\theta_i}^i) \geq \mathcal{Q}_i(0) + \int_0^{\theta_i} \left[ \frac{1}{2} - F_s^i \right] ds + \vartheta_i \int_0^{\theta_i} F_s^i (1-F_s^i) \mathcal{Q}'_i(F_s^i) d\bar{B}_s^i. \quad (3.2.7)$$

Además como

$$E \int_0^{\theta_i} [F_s^i (1 - F_s^i)]^2 [\mathcal{Q}'_i(F_s^i)]^2 ds \leq \frac{1}{4} \left( \max_{0 \leq x \leq 1} |\mathcal{Q}'(x)| \right)^2 E\theta_i < \infty,$$

se obtiene que

$$\int_0^{\theta_i} F_s^i (1 - F_s^i) \mathcal{Q}'_i(F_s^i) d\bar{B}_s^i$$

es una martingala. Luego por (3.2.7)

$$E \int_0^{\theta_i} \left[ F_s^i - \frac{1}{2} \right] ds \geq \mathcal{Q}_i(0) - E\mathcal{Q}_i(F_{\theta_i}^i) \geq \mathcal{Q}_i(0). \quad (3.2.8)$$

Si

$$\theta_i^* = \inf \{ t \geq 0 : F_t^i \geq p \}, \quad (3.2.9)$$

obtendríamos que las desigualdades de (3.2.7) y (3.2.8) son de hecho igualdades y entonces

$$E \int_0^{\theta_i^*} \left[ F_s^i - \frac{1}{2} \right] ds = \mathcal{Q}_i(0).$$

□

Regresando a nuestro problema original, con esta proposición obtenemos que

$$\inf_{\theta_i \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^i} \mathcal{R}(\theta_i) = \frac{1}{\lambda_i} + 2\mathcal{Q}_i(0).$$

Por supuesto, faltaría demostrar que en efecto  $\theta_i^* \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^i$  y la construcción de una función  $\mathcal{Q}_i$  con las propiedades (3.2.2)-(3.2.5) para cada  $i = 1, \dots, d$ .

Por la teoría estándar de procesos de difusión se obtiene que  $E[\theta_i^*] < \infty$ , con  $\theta_i^*$  definido como en (3.2.9) (ver [6] pag. 343).

Si  $\mathcal{Q}_i(\cdot)$  satisface (3.2.2), definamos la función  $h(\cdot)$  como

$$h(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\mathcal{Q}'(x)}{S'(x)} \right) = \frac{2 \left( \frac{1}{2} - x \right)}{S'(x)\eta^2(x)} = \frac{\left( \frac{1}{2} - x \right) m(dx)}{dx}, 0 < x < p_i^*. \quad (3.2.10)$$

Luego,

$$\frac{\mathcal{Q}'(z)}{S'(z)} = - \int_z^{p_i^*} h(u) du, 0 \leq z \leq p_i^*,$$

Integrando nuevamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x) &= \int_x^{p_i^*} \left( \int_z^{p_i^*} h(u) du \right) S'(z) dz \\ &= \int_x^{p_i^*} h(u) \int_x^u S'(z) dz du = \int_x^{p_i^*} h(u) [S(u) - S(x)] du, \quad 0 \leq x \leq p_i^*. \end{aligned}$$

Ahora definimos

$$\mathcal{Q}(x) = \begin{cases} \int_x^{p_i^*} h(u) [S(u) - S(x)] du, & 0 \leq x \leq p_i^*, \\ 0, & p_i^* < x \leq 1. \end{cases} \quad (3.2.11)$$

Por construcción,  $\mathcal{Q}(\cdot)$  satisface (3.2.2) y (3.2.5) y es de clase  $C^1(0, 1] \cap C^2((0, 1] \setminus p_i^*)$ . Si  $p_i^* > \frac{1}{2}$  entonces se satisface (3.2.3) pues para  $\frac{1}{2} < p_i^* < x \leq 1$ ,  $\mathcal{Q}'(x) = \mathcal{Q}''(x) = 0$  y entonces

$$\lambda_i (1-x) \mathcal{Q}'_i(x) + \frac{1}{2} \vartheta_i^2 x^2 (1-x)^2 \mathcal{Q}''_i(x) = 0 > \frac{1}{2} - x.$$

Finalmente, sólo falta mostrar que  $\mathcal{Q}(\cdot)$  satisface (3.2.4) y es de esta forma que  $p_i^*$  queda determinado. Sea  $G(x) = \mathcal{Q}'(x)/S'(x)$ , veamos que es suficiente que  $G(0+) = 0$  para que (3.2.4) se satisfaga. Notemos que  $G(0+) = 0$  es equivalente a seleccionar  $p_i^* \in (\frac{1}{2}, 1)$  tal que  $\int_0^{p_i^*} h(u) du = 0$  o equivalentemente

$$\int_0^{1/2} h(u) du = \int_{1/2}^{p_i^*} (-h(u)) du. \quad (3.2.12)$$

Esta última condición determina  $p_i^*$  de manera única, pues  $D(x) = \int_{1/2}^x (-h(u)) du$  es una función estrictamente creciente con  $D(\frac{1}{2}+) = 0$  y  $D(1-) = \infty$ .

Fijado de esta manera  $p_i^*$ , tenemos por construcción que  $G(0+) = 0$  y  $G(p_i^*-) = 0$  y por (3.2.10)  $G(\cdot)$  es estrictamente creciente en  $(0, \frac{1}{2})$  y estrictamente decreciente en  $(\frac{1}{2}, p_i^*)$ , concluimos con esto que  $G(\cdot)$  es una función estrictamente positiva en  $(0, p_i^*)$ , pero como  $G(x) = \mathcal{Q}'(x)/S'(x)$  y  $S'(x) > 0$  para  $x \in (0, p_i^*)$ , entonces también obtenemos que  $\mathcal{Q}'(x) > 0$  para  $x \in (0, p_i^*)$ , pero  $\mathcal{Q}(p_i^*) = 0$ , entonces podemos concluir que  $\mathcal{Q}(x) < 0$  para  $x \in (0, p_i^*)$ .

De esta manera hemos determinado el tiempo de paro  $\theta_i$  que minimiza la pérdida esperada como

$$\theta_i = \inf \{t \geq 0 : F_t \geq p_i^*\},$$

donde  $p_i^*$  es la única solución en  $(\frac{1}{2}, 1)$  de la ecuación

$$\int_0^{1/2} \frac{(1-2u) \exp(-\beta_i/u)}{(1-u)^{2+\beta_i}} u^{2-\beta} du = \int_{1/2}^{p_i^*} \frac{(2u-1) \exp(-\beta_i/u)}{(1-u)^{2+\beta_i}} u^{2-\beta_i} du, \quad (3.2.13)$$

donde  $\beta_i = \frac{2\lambda_i}{\vartheta_i^2}$ .

Dada la Hipótesis (3.0.3) se tomará (arbitrariamente)  $\pi = (0, 0, \dots, 0)$  antes de algún cambio en las derivas y posteriormente se harán los movimientos en el portafolio.

### 3.2.2. Método Shiryaev

Como se mencionó anteriormente, este método de detección fue propuesto por Shiryaev [15] y de manera similar al método de Karatzas este método busca minimizar la cantidad

$$B(c_i) := \inf_{\theta_i} \{P(\theta_i < \tau_i) + c_i E(\theta_i - \tau_i)^+\}, \quad (3.2.14)$$

sobre todos los tiempos de paro finitos  $\theta_i$  respecto a la filtración  $\mathbb{F}^{S^i}$  y  $c_i$  es la cantidad con la que penalizaremos una alarma tardía.

Es fácil ver que (3.2.14) es equivalente a

$$B(c_i) = \inf_{\theta_i} E \left\{ (1 - F_t^i) + c_i \int_0^{\theta_i} F_s^i ds \right\}. \quad (3.2.15)$$

Se sigue del proceso de difusión (3.2.1) que

$$\int_0^t F_s^i ds = \frac{F_0^i - F_t^i}{\lambda_i} + \frac{\mu_{2i} - \mu_{1i}}{\lambda_i \sigma_i} \int_0^t F_s^i (1 - F_s^i) d\bar{B}_s^i + t. \quad (3.2.16)$$

Utilizando (3.2.15) junto con (3.2.16) y dado que  $E[\theta_i] < \infty$ , llegamos a que  $B(c_i)$  puede ser representado como

$$B(c_i) = \inf_{\theta_i} E \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{c_i}{\lambda_i} \right) F_{\theta_i} + c_i \theta_i \right\}. \quad (3.2.17)$$

El esquema general para resolver un problema como (3.2.17) consiste en resolver el problema de Stefan [12]:

$$\begin{aligned} \lambda_i (1-x) \rho_i'(x) + \frac{1}{2} \vartheta_i^2 x^2 (1-x)^2 \rho_i''(x) &= -c_i x, \quad x \in [0, A) \\ \rho_i(x) &= 1-x, \quad x \in [A, 1] \\ \rho_i'(A) &= -1, \\ \rho_i'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Cuya solución está dada por

$$\rho_i(x) = \begin{cases} 1 - A_i^* - \int_0^{A_i^*} y_*^i(x) dx, & x \in [0, A_i^*), \\ 1 - x, & x \in [A_i^*, 1], \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} y_*^i(x) &= -C_i \int_0^x e^{-\Lambda_i[G(x)-G(y)]} \frac{dy}{y(1-y)^2}, \\ G(y) &= \log \frac{y}{1-y} - \frac{1}{y}, \\ C_i &= \frac{2c_i\sigma_i^2}{(\mu_{2i} - \mu_{1i})^2}, \quad \Lambda_i = \frac{2\lambda_i\sigma_i^2}{(\mu_{2i} - \mu_{1i})^2}. \end{aligned}$$

El parámetro  $A_i^*$  está definido como la única raíz en  $[0, 1]$  de la ecuación

$$y_*^i(A^*) = -1.$$

Para más detalles ver [12]-[14]. La técnica es análoga a la empleada en el método de Karatzas, se muestra que

$$\rho_i(0) = B(c_i),$$

y el tiempo de paro óptimo  $\theta_i^*$  satisface

$$\theta_i^* = \inf \{t \geq 0 : F_t^i \geq A^*\}.$$

Entonces,

$$B(c_i) = P(\theta_i^* < \tau_i) + c_i E(\theta_i^* - \tau_i)^+.$$

El detector de Shiryaev entonces lo definiremos como

$$\theta_i^* := \inf \{t \geq 0 : F_t^i \geq A^*\},$$

donde  $A^*$  está definido como la raíz de la ecuación

$$\begin{aligned} &\int_0^{A^*} \exp\left(-\frac{2\lambda_i\sigma_i^2}{y(\mu_{2i} - \mu_{1i})^2}\right) \frac{1}{y(1-y)^2} \left(\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{2\lambda_i\sigma_i^2}{(\mu_{2i} - \mu_{1i})^2}} dy \\ &= \frac{(\mu_{2i} - \mu_{1i})^2}{2c_i\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{2\lambda_i\sigma_i^2}{A^*(\mu_{2i} - \mu_{1i})^2}\right) \left(\frac{A^*}{1-A^*}\right)^{\frac{2\lambda_i\sigma_i^2}{(\mu_{2i} - \mu_{1i})^2}}. \end{aligned}$$

### 3.2.3. Estrategia con el Método de Detección

A diferencia que en el método matemático, en el método de detección, sólo haremos rebalances en nuestro portafolio cada vez que detectemos un tiempo aleatorio  $\tau_i$ , pues es precisamene en esos momentos en los que el rendimiento medio cambia.

Es claro que, dada la Hipótesis (3.0.3), al tiempo  $t = 0$  deberíamos tener todo nuestro capital invertido en el activo sin riesgo. Posteriormente, debido a la misma hipótesis, al detectar el cambio en el rendimiento medio de algún activo debemos reinvertir todo el capital en dicho activo. Al detectar algún otro cambio en algún activo, la estrategia consiste en invertir en esos dos activos y así sucesivamente. Continuamos de esta manera hasta llegar al tiempo  $t = T$ , en la que pudieron o no haber cambios en todos los rendimientos medios.

Para formalizar estas ideas, sean  $\theta_{(1)}, \dots, \theta_{(m)}$  los tiempos en los que se van detectado cambios en los rendimientos medios (en ese orden). Como es posible que no todos los activos tengan cambios antes de  $t = T$ , entonces tendremos  $m \leq d$ . Sea  $S^{(i)}$  el precio del  $i$ -ésimo activo en el que se detectó un cambio,  $i = 1, \dots, m$ . Entonces entre el tiempo  $t = 0$  y  $t = \theta_{(1)}$  invertiremos todo nuestro capital en el bono y entre el tiempo  $t = \theta_{(i)}$  y  $t = \theta_{(i+1)}$  invertiremos todo el capital en los activos  $S^{(1)}, \dots, S^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Como en cada rebalanceo del portafolio nuestro objetivo es maximizar la utilidad esperada, haremos uso de la estrategia (3.1.32) obtenida en el método matemático para dividir el capital entre los activos en los que se hayan detectado cambios. Entonces utilizando la notación anterior, en el tiempo  $t = \theta_{(i)}$  la estrategia  $\pi_{\theta_{(i)}}^D$  utilizando el método de detección será

$$\pi_{\theta_{(k)}}^{i,D} = \begin{cases} \frac{\pi_{\theta_{(k)}}^i \cdot 1_{(\theta_{(k)} \geq \theta_i)}}{\sum_{j=1}^d \pi_{\theta_{(k)}}^j \cdot 1_{(\theta_{(k)} \geq \theta_j)}} & \text{si } \sum_{j=1}^d \pi_{\theta_{(k)}}^j \cdot 1_{(\theta_{(k)} \geq \theta_j)} > 0, \\ 0_{d \times 1} & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.2.18)$$

Dividimos entre la suma para garantizar que todo nuestro capital será invertido en los activos con riesgo; en el caso contrario de que la estrategia  $\pi$  nos indique que no debemos invertir en los activo con riesgo, entonces respetaremos esta posición aunque hayamos detectado algún cambio. La definición de una estrategia  $\pi_{\theta_{(i)}}^D$  en los tiempos  $\theta_{(1)}, \dots, \theta_{(m)}$  es suficiente, pues sólo en estos tiempos rebalancearemos nuestro portafolio como se ha mencionado.

### 3.3. Análisis Técnico: Media Móvil

A diferencia de los dos métodos anteriores para formar estrategias, en el caso de análisis técnico no rebalancearemos continuamente nuestro portafolio, pero tampoco podemos hacer uso de tiempos óptimos para cambiarlo pues es una técnica libre de modelo. Consideremos que el inversionista tomará decisiones de rebalancear el portafolio en tiempos discretos durante el intervalo de tiempo  $[0, T]$  con incrementos  $\Delta t = T/N$  tales que

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, \quad t_t = k\Delta t.$$

Sea  $\pi_t^i$  la proporción de capital que será invertido en el activo con riesgo  $i$ -ésimo al tiempo  $t$ . Consideremos el indicador media móvil simple del  $i$ -ésimo activo definido como

$$M_t^{i,\delta_i} = \frac{1}{\delta_i} \int_{t-\delta_i}^t S_u^i du.$$

Los parámetros  $\delta_i$  indican el tamaño de la ventana para calcular la media móvil, es decir, cuántos datos anteriores al actual consideraremos para calcular el indicador.

#### 3.3.1. Estrategia Utilizando Análisis Técnico

La regla de inversión que definiremos estará basada en la historia de precios y el indicador asociado, que en nuestro caso se trata de la media móvil. Como el objetivo no es cambiar el portafolio constantemente, sino sólo en ciertos tiempos  $t_n$ , entonces será suficiente con definir la manera de invertir en los activos sólo en estos tiempos. Al tiempo  $t = 0$ , al igual que en el método de detección, se invertirá todo el capital en el bono y en cada tiempo  $t = t_n$ ,  $n = 1, \dots, N - 1$ , se debe seguir una simple regla para la inversión: invertir capital en el  $i$ -ésimo activo con riesgo si el precio  $S_{t_n}$  es mayor o igual que el indicador media móvil  $M_{t_n}^{i,\delta_i}$  asociado a ese activo. Si para ningún activo se cumple esta condición, entonces de nuevo todo el capital debe ser invertido en el bono.

Cuando debemos invertir en varios activos simultáneamente, la manera de dividir el capital se hará en forma análoga que en el caso del método de detección, es decir, en cada tiempo  $t_n$  haremos uso de la estrategia matemática  $\pi$ . Sólo debemos definir nuestra estrategia de análisis técnico  $\pi^M$  en los tiempos  $t_n$  en los que haremos cambios en el portafolio; inicialmente tomaremos  $\pi_{t_0}^M = 0_{d \times 1}$  y después

$$\pi_{t_n}^{i,M} = \begin{cases} \frac{\pi_{t_n}^i 1(S_{t_n}^i \geq M_{t_n}^{i,\delta_i})}{\sum_{j=1}^d \pi_{t_n}^j 1(S_{t_n}^j \geq M_{t_n}^{j,\delta_j})} & \text{si } \sum_{j=1}^d \pi_{t_n}^j 1(S_{t_n}^j \geq M_{t_n}^{j,\delta_j}) > 0, \\ 0_{d \times 1} & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad n = 1, \dots, N - 1. \quad (3.3.1)$$

### CAPÍTULO 3. MODELO DE MERCADO FINANCIERO

---

Al igual que en el método de detección, dividiremos entre la suma para garantizar que todo nuestro capital será invertido en activos con riesgo, sólo en caso de que la estrategia matemática indique que no se debe invertir en activos riesgosos, entonces invertiremos todo el capital en el bono aunque algunos precios hayan superado a su indicador.

Definimos la estrategia  $\pi^M$  con el afán de maximizar la utilidad utilizando esta técnica, pues en un análisis técnico, la manera de invertir en los activos también se hace mediante una regla práctica, por ejemplo, podríamos tomar como regla dividir el capital en partes iguales para todos los activos cuyo precio haya superado a su indicador. Como ventaja tenemos que estaremos maximizando la utilidad utilizando análisis técnico, la desventaja es que estamos volviendo el análisis dependiente del modelo.



# Simulación y Comparación Numérica

---

En el capítulo anterior se desarrollaron diferentes estrategias de inversión para el mercado definido en (3.0.1), en este capítulo compararemos su desempeño utilizando simulaciones y el método Monte Carlo. En la Sección 4.1 se describe un problema al que se enfrentan los inversionistas cuando tratan de adaptar un modelo matemático para obtener una estrategia de inversión: errores en la calibración del modelo. Entendemos como calibración la estimación de todos los parámetros que están involucrados en algún modelo de mercado financiero. En nuestro mercado, la calibración consiste en la estimación de los parámetros  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma$  y  $\lambda$ . Siempre nos enfrentaremos a problemas para calibrar correctamente un modelo, desde falta de datos hasta malos estadísticos. En la Sección 4.2 se describe como se han llevado a cabo las simulaciones y se muestran gráficamente los resultados obtenidos. Se considerarán ambos casos, cuando las estrategias están basadas en los parámetros correctos y cuando se trabaja en un modelo con errores en la calibración. Es posible observar como algunas estrategias son menos sensibles a errores en la calibración que otras. Se observa como el análisis técnico obtiene utilidades esperadas bastante cercanas a los otros métodos con la ventaja de ser libre de modelo.

Finalmente, en la Sección 4.3 se dan las conclusiones de las simulaciones, así como posibles extensiones del análisis y el modelo.

## 4.1. Errores de Calibración

En la realidad es extremadamente difícil conocer los parámetros exactos que caracterizan a un modelo matemático. En particular en nuestro modelo es posible estimar con bastante precisión el vector de rendimientos medios  $\mu_1$  y la matriz de volatilidades  $\sigma$  basados en precios históricos de nuestros activos, sin embargo, encontraremos problemas al estimar los otros parámetros.

## CAPÍTULO 4. SIMULACIÓN Y COMPARACIÓN NUMÉRICA

---

Para estimar  $\mu_2$  necesitaríamos conocer los tiempos de los cambios en las derivas, pero requerimos tener buenas estimaciones de los parámetros  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , y el vector aleatorio  $\tau$  sólo es observado, a lo más, una vez en el intervalo de tiempo  $[0, T]$ .

Los errores en la estimación impactarán a nuestras estrategias definidas en el capítulo anterior, obteniendo como resultado posible un menor rendimiento al esperado.

Los cambios en el rendimiento debido a errores en la estimación de los parámetros del modelo, deben afectar de manera diferente a los distintos tipos de estrategias, en particular, se espera que impacte en menor manera al análisis técnico que es más independiente del modelo que los otros métodos de inversión. Se llevarán a cabo simulaciones con los parámetros exactos y con parámetros incorrectos y en ambos casos se calculará mediante el método Monte Carlo la utilidad esperada para diferentes horizontes de tiempo  $T$ . En la sección siguiente se verá gráficamente como son afectadas las diferentes estrategias de inversión por los errores de calibración en el modelo así como la comparación del análisis técnico con los otros métodos.

Supongamos que  $\mu_1, \mu_2, \sigma$  y  $\lambda$  son los parámetros correctos del modelo (3.0.1) y  $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\sigma}$  y  $\bar{\lambda}$  son los parámetros estimados. Las simulaciones de los precios se harán su poniendo que

$$dS_t^i = S_t^i (\mu_{2i} + (\mu_{1i} - \mu_{2i}) 1_{(t \leq \tau_i)}) dt + \sigma_i S_t^i dB_t^i,$$

donde  $\tau_i \sim \exp(\lambda_i)$ . Posteriormente, todos los cálculos se harán utilizando los parámetros  $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\sigma}$  y  $\bar{\lambda}$ , por ejemplo, una aproximación de la probabilidad a posteriori la calcularemos como

$$\bar{F}_t^i = \frac{\bar{\lambda}_i e^{\bar{\lambda}_i t} \bar{L}_t^i \int_0^t e^{-\bar{\lambda}_i s} \bar{L}_s^{-1} ds}{1 + \bar{\lambda}_i e^{\bar{\lambda}_i t} \bar{L}_t^i \int_0^t e^{-\bar{\lambda}_i s} \bar{L}_s^{-1} ds},$$

donde

$$\bar{L}_t^i := \left( \frac{S_t^i}{S_0^i} \right)^{\frac{\bar{\mu}_{2i} - \bar{\mu}_{1i}}{\bar{\sigma}_i^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\bar{\sigma}_i^2} \left( (\bar{\mu}_{2i} - \bar{\mu}_{1i})^2 + 2(\bar{\mu}_{2i} - \bar{\mu}_{1i}) \left( \bar{\mu}_{1i} - \frac{\bar{\sigma}_i^2}{2} \right) \right) t \right\}.$$

Es claro que esto nos llevará a estrategias no óptimas, así como a detectores de Karatzas y Shiryaev erróneos, sin embargo en situaciones reales los errores en la calibración de un modelo son inevitables y uno de los objetivos de este trabajo es analizar el impacto de estos errores.

## 4.2. Resultados

Después de los resultados que se verán en esta sección se podrá responder a las preguntas: ¿Es mejor invertir de acuerdo a una técnica analítica que a un modelo matemático? Si hay errores en la calibración, ¿De acuerdo a qué técnica es mejor invertir?.

Por supuesto, debido a la complejidad de las expresiones que hemos obtenido, no es factible responder a estas preguntas de manera analítica, pero basándonos en métodos de simulación Monte Carlo podemos responder a esas preguntas, al menos, de manera numérica. Las simulaciones están basadas en el modelo (3.0.1) con los parámetros:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= (-0.01, 0.03, 0.001, -0.04, 0.01), \\ \mu_2 &= (0.07, 0.08, 0.1, 0.08, 0.1), \\ \sigma &= \text{diag}(0.05, 0.1, 0.2, 0.15, 0.2), \\ \lambda &= (2, 3, 2, 3, 2),\end{aligned}$$

los cuales cumplen la condición (3.0.3).

Los parámetros mal “estimados” que se utilizaron para calcular la utilidad en un modelo mal calibrado son los siguientes:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_1 &= (-0.009, 0.011, 0.002, -0.039, 0.011), \\ \bar{\mu}_2 &= (0.071, 0.081, 0.101, 0.081, 0.101), \\ \bar{\sigma} &= \text{diag}(0.051, 0.011, 0.21, 0.17, 0.22), \\ \bar{\lambda} &= (1.5, 2.5, 1.6, 2.5, 1.8).\end{aligned}$$

Se utilizó como función de utilidad  $U(x) = \log(x)$ , pues cumple las condiciones de Inada y tenemos por los Corolarios 2 y 3 la forma explícita (3.1.32) para la estrategia matemática  $\pi$ .

Se tomó la utilidad del capital final como función del horizonte de tiempo  $T$ , para cada tiempo  $T = 0,01, 0,02, \dots, 5$  se realizaron 100 simulaciones y se tomó como utilidad esperada el promedio de esas simulaciones. Este procedimiento se realizó para cada método, con parámetros exactos y con parámetros erróneos.

Las gráficas de las siguientes páginas muestran la utilidad esperada como función del horizonte del tiempo  $T$ .

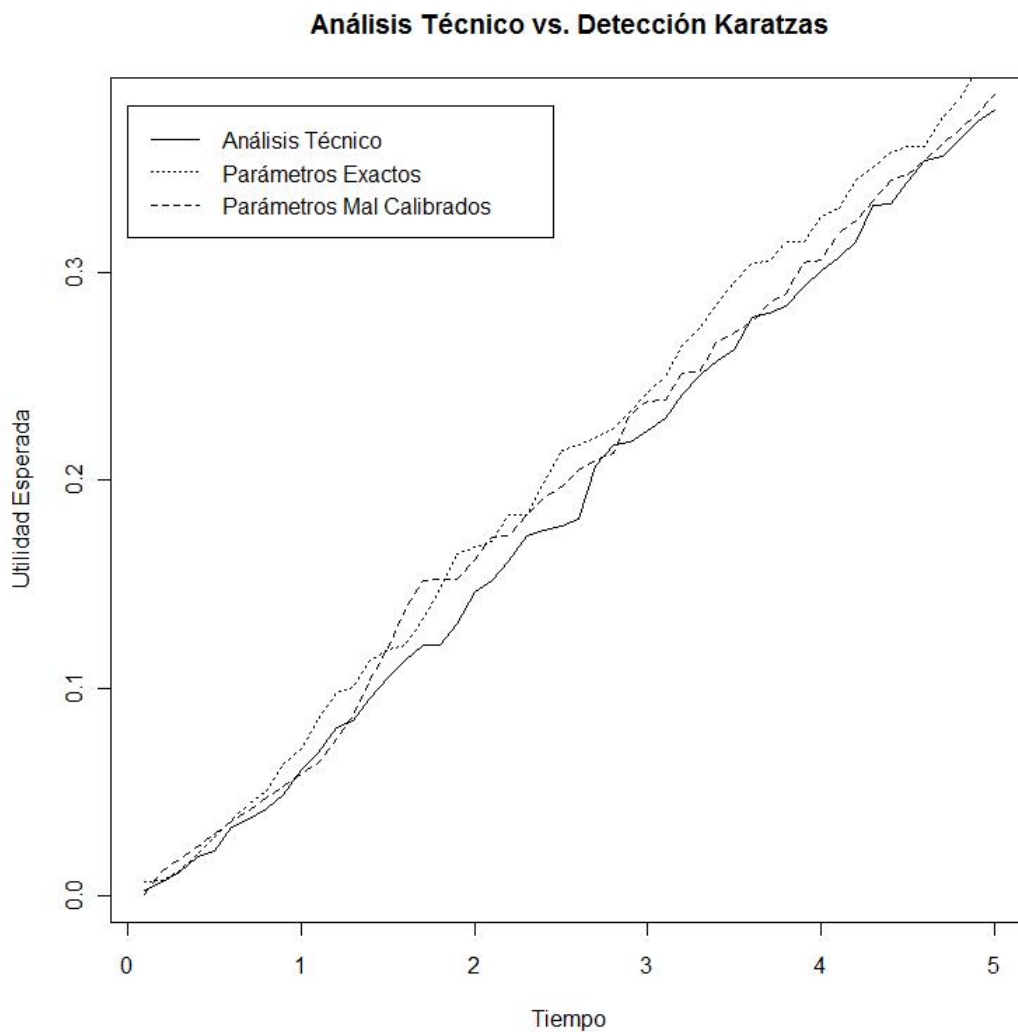


Figura 4.1: Comparación de las utilidades esperadas cuando se utiliza la estrategia basada en el método de detección de Karatzas cuando el modelo es correctamente calibrado y cuando existen errores en la estimación de los parámetros y una estrategia basada en análisis técnico

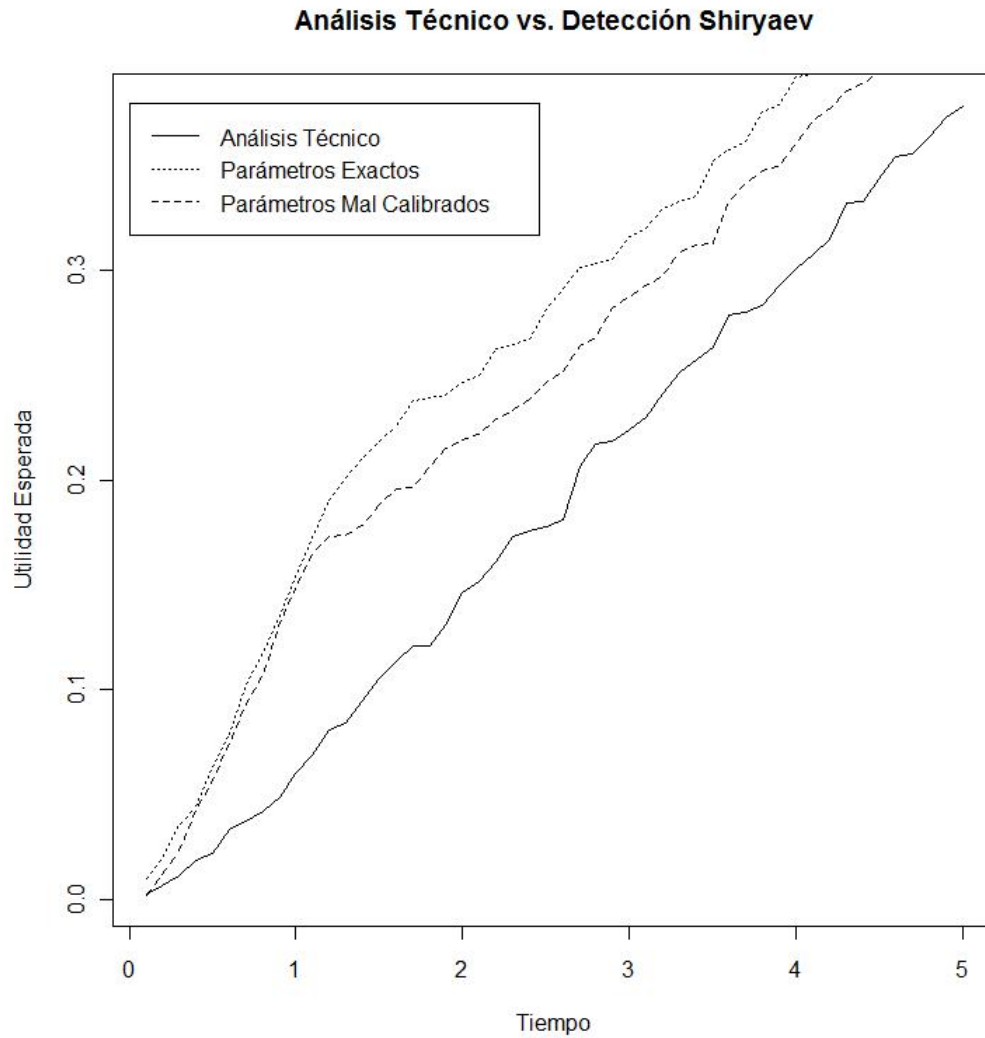


Figura 4.2: Comparación de las utilidades esperadas cuando se utiliza la estrategia basada en el método de detección de Shiryaev cuando el modelo es correctamente calibrado y cuando existen errores en la estimación de los parámetros y una estrategia basada en análisis técnico

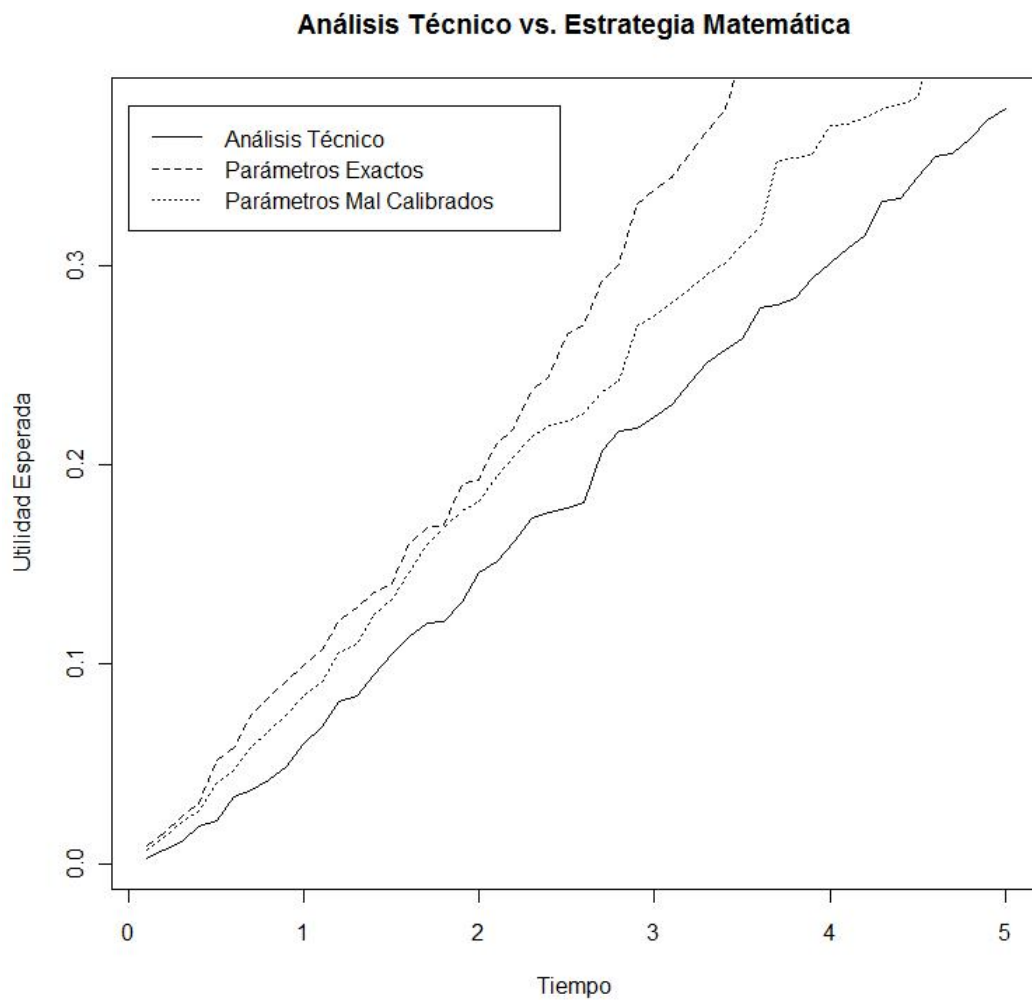


Figura 4.3: Comparación de las utilidades esperadas cuando se utiliza la estrategia basada en el método matemático cuando el modelo es correctamente calibrado y cuando existen errores en la estimación de los parámetros y una estrategia basada en análisis técnico

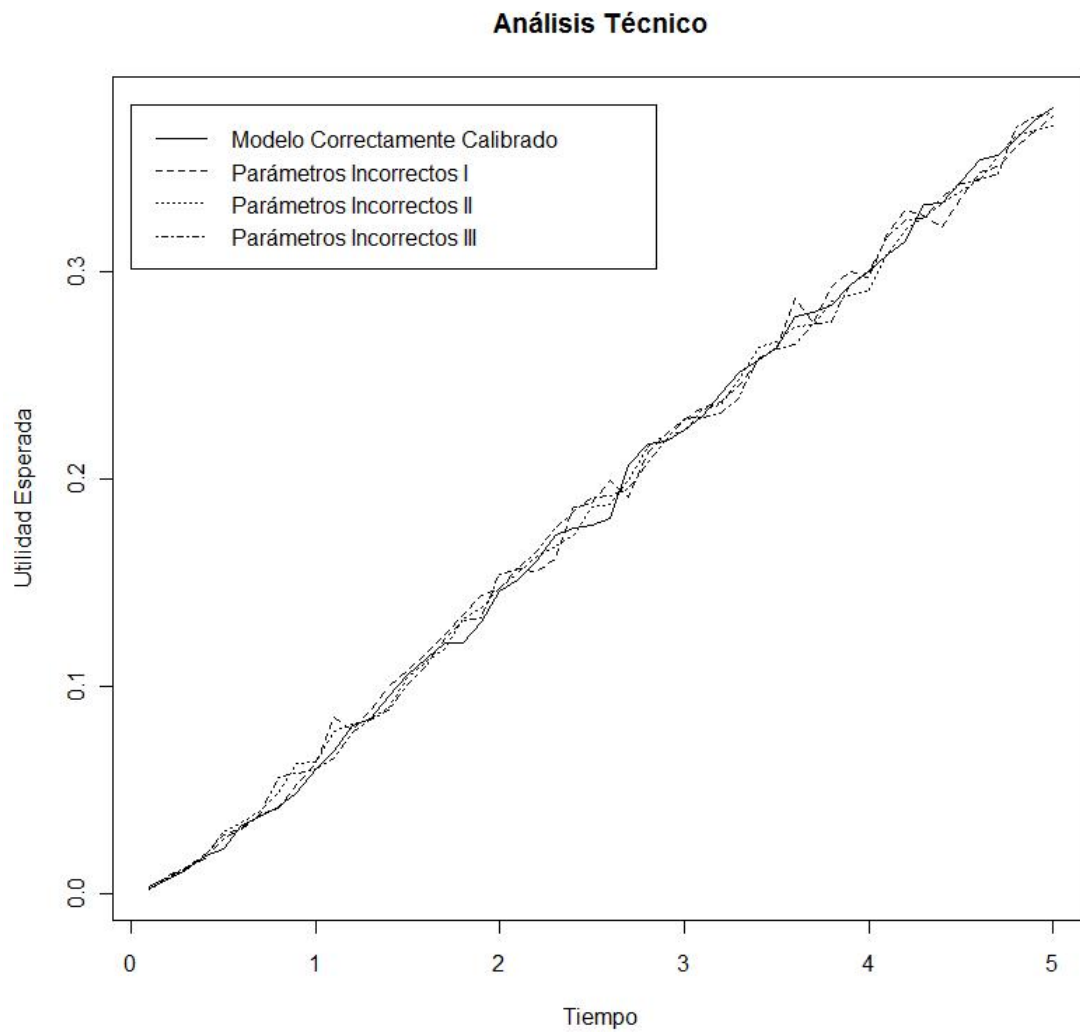


Figura 4.4: Comparación de las utilidades esperadas utilizando análisis técnico con parámetros exactos y con errores en la calibración. Se puede observar la poca sensibilidad de la técnica analítica cuando los parámetros son cambiados

### 4.3. Conclusiones

De acuerdo con los resultados de la Sección 4.2 podemos ahora dar conclusiones basadas en las simulaciones.

Las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3 muestran que tanto la estrategia matemática, así como los métodos de detección de Karatzas y Shiryaev son sensibles a errores en la calibración del modelo, siendo la estrategia matemática la más afectada debido a estos errores. Por el contrario, la Figura 4.4 muestra que el análisis técnico es poco sensible a errores en la calibración.

Cuando hablamos de utilidad esperada, se obtiene que en general la estrategia matemática obtiene mejores utilidades en comparación con los métodos de detección y el análisis técnico, tanto cuando se tiene el modelo exacto o cuando se tienen parámetros incorrectos. El análisis técnico no obtuvo buenos resultados comparado con los métodos de detección y la estrategia matemática, aún cuando estos tenían errores de calibración, sin embargo, se debe destacar una ventaja: no es muy sensible a dichos errores.

Como implicación práctica obtenemos que cuando tenemos suficiente certeza en las estimaciones de los parámetros, será preferible trabajar con modelos matemáticos que con análisis técnicos, sin embargo, no debemos desaprovechar las ventajas del análisis técnico, como fácil manejo y poca sensibilidad a los errores de estimación, sobre todo si tenemos bastante incertidumbre acerca de nuestras estimaciones.

De acuerdo a Blanchet-Scalliet, et. al. [2] no se debe aún desestimar el desempeño del análisis técnico, pues la utilidad usando los métodos de detección suele deteriorarse rápidamente cuando  $\lambda$  es mal estimado o cuando  $\mu_2$  no es grande en comparación con  $\mu_1$ .

No hay regla universal para elegir el modelo para invertir, pero por el análisis hecho, se debe optar por los modelos matemáticos que en general ofrecen mejores utilidades, sin embargo, un inversionista podría elegir el análisis técnico para invertir debido a su fácil manejo e implementación.

Estas conclusiones están basadas en los resultados de la Sección 4.2 utilizando el modelo de precios descrito en (2.2.1) y (3.0.1), un modelo bastante sencillo el cual nos ha permitido la realización de un análisis de comparación, de un análisis técnico con estrategias matemáticas basadas en análisis estocástico, en el caso de errores en la calibración del modelo debido a su peculiar cambio en el rendimiento medio en un tiempo aleatorio, que dificulta la estimación de los parámetros como se mencionó en la Sección 4.1, sin embargo, este modelo puede fácilmente ser extendido a uno más real con las mismas ideas: podemos considerar que la utilidad media hace no solamente un cambio en un tiempo aleatorio, sino que cambia varias veces en el intervalo de tiempo  $[0, T]$  y que los cambios pueden ser tanto un incremento en el rendimiento medio (que ha sido



el tratado en este trabajo), así como una disminución. Los cambios en el rendimiento medio, en principio, podría considerarse que ocurren en tiempos exponenciales y de esta manera aprovechar las características conocidas de un proceso de Poisson, posteriormente, se podrían considerar procesos de renovación más generales que modelen los tiempos en los que el rendimiento cambia. Otra de las posibles extensiones del modelo (3.0.1) consiste en considerar matrices de volatilidades más generales, es decir, aquellas en las que consideremos las posibles relaciones entre los activos en los que estuviésemos interesados en invertir.

Para los objetivos del trabajo ha sido suficiente considerar sólo una técnica analítica, la media móvil, que muestra las características de un análisis técnico; una extensión del análisis hecho aquí podría consistir en comparar el desempeño de las estrategias matemáticas con otras técnicas analíticas que podrían obtener mejores rendimientos, pero como se mencionó anteriormente, existen muchísimas técnicas analíticas y no existe un método para conocer cuál se adaptará mejor a nuestro modelo; la media móvil fue elegida por su sencillez y naturaleza de detectar cambios en la media y ha mostrado un buen desempeño en las simulaciones.

Como conclusión final obtenemos que la elección de la estrategia de inversión siempre debe estar basada en la cantidad de información que tengamos del modelo y que no se deben subestimar las técnicas que se basan en la práctica y no en fundamentos teóricos.



# Bibliografía

---

- [1] Blanchet-Scalliet, C., Diop, A., Gibson, R., Talay, D., Tanré, E. *Technical Analysis Compared to Mathematical Models Based Methods under Parameters mis-Specification*. Journal of Banking and Finance 31, Pags. 1351-1373, Elsevier B.V. 2006.
- [2] Blanchet-Scalliet, C., Diop, A., Gibson, R., Talay, D., Tanré, E. *Technical Analysis Techniques versus Mathematical Models: Boundaries of Their Validity Domains*. Monte Carlos and Quasi-Monte Carlo Methods 2004, Springer-Verlag, Berlin 2004.
- [3] Föllmer, H., Schied, A. *Stochastic Finance, 2nd. Ed.* de Gruyter Studies in Mathematics 27, Walter de Gruyter, Berlin 2004.
- [4] Karatzas, I. *A Note on Bayesian Detection of Change-Points with an Expected Miss Criterion*. Statistics and Decisions 21, Pags. 3-13, New York 2003.
- [5] Karatzas, I. *Lectures on the Mathematics of Finance*. Centre de Recherches Mathématiques Monograph Series, American Mathematical Society, USA 1997.
- [6] Karatzas, I., Shreve, S. E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd. Ed.* Graduate Texts in Mathematics 113, Springer-Verlag 1991.
- [7] Karatzas, I., Shreve, S. E. *Methods of Mathematical Finance*. Applications of Mathematics 39, Springer-Verlag 1998.
- [8] Klebaner, F. C. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications, 2nd. Ed.* Imperial College Press, London 2005.
- [9] Rogers, L.C.G. *Duality in constrained optimal investment and consumption problems: a synthesis*. Lecture Notes in Mathematics 1814, Pags. 95-131, Springer-Verlag 2003.
- [10] Ross, Sthephen *The Arbitrage Theory of Capital Pricing*. Journal of Economic Theory, v13, 1976.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [11] Shiryaev, A.N. *The Problem of Quickest Detection of the Destruction of a Stationary Regime*. Dokl. Acad. Nauk., Pags. 1039-1042, 1961.
- [12] Shiryaev, A.N. *On Optimum Methods in the Quickest Detections Problems*. Theory of Probability and its Applications 8, Pags. 22-46, 1963.
- [13] Shiryaev, A.N. *Optimal Stopping Rules*. Springer-Verlag 1978.
- [14] Shiryaev, A.N. *Essentials of Sthocastic Finance*. World Scientific 1999.
- [15] Shiryaev, A.N. *Quickest Detection Problems in the Technical Analysis of Financial Data*. Mathematical Finance - Bachelier Congress, 2000 (Paris), Springer Finance, Pags. 487-521, Berlin 2002.
- [16] Urraca, J. *Curso de Análisis Técnico*. Departamento de Valores, Banco Santander Central Hispano.
- [17] Venegas, F. *Opciones, Cobertura y Procesos de Difusión con Saltos*. Mathematical Finance Group, Oxford University, Inglaterra 2001.