Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

Un Posible Mecanismo de Extinción

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestría en Ciencias

con Especialidad en

Matemáticas Aplicadas

Presenta

Daniel Olmos Liceaga

Director de la Tesis:

Dr. José Ignacio Barradas Bribiesca

Guanajuato, Gto. Diciembre de 2001

CIMAT

A Dios

A mis padres y hermanas

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Ignacio Barradas Bribiesca, por su paciencia y tiempo. Por que además de ser un excelente asesor, es una gran persona.

A la "manita" Graciela Olmos, por acompañarme y soportarme casi dos años.

Al Dr. Francisco J. Solís y al Dr. Fausto Ongay, por su sinceridad, así como sus acertados comentarios en mi tesis.

Al Dr. Pedro Miramontes, por la confianza que tuvo en mi para lograr que yo pudiera dar este importante paso en mi vida.

A mis maestros y amigos, por hacer que mi estancia en CIMAT fuese algo inolvidable.

Finalmente quiero agradecer a CONACYT por el apoyo económico brindado durante estos dos años de maestría.

Índice General

Introducción **iii**

1 Planteamiento del problema y Conceptos básicos **1**
1.1 ¿Qué es la modelación matemática? 1
1.1.1 Aspectos a considerarse en modelación. 2
1.2 Preliminares matemáticos. 3
1.2.1 Sistemas dinámicos discretos 6

2 Modelación matemática del problema **13**
2.1 Hipótesis del problema. 13
2.2 Matematización de nuestras hipótesis 14
2.2.1 Escalamiento del problema 17
2.3 Aspectos generales del problema 17
2.4 Modelo con Rectas 23
2.4.1 Análisis del modelo. 25
2.4.2 Estudio de la dinámica (E inestable) 28
2.4.3 ¿Qué significado tienen a y b? 33
2.5 Modelo cuadrático 35
2.5.1 Análisis del modelo. 37
2.5.2 Estudio de la dinámica con E inestable 40
2.5.3 ¿Qué representa cada parámetro? 43
2.6 Modelo cúbico 47
2.6.1 Región de definición. 47
2.6.2 Análisis del modelo. 50
2.6.3 Interpretación de los términos. 57

Conclusiones **61**

A Representación gráfica de una órbita. **63**

B Demostraciones Capítulo 2 **65**
B.1 Análisis de los puntos de periodo 3.(Modelo con Rectas.) 66
B.1.1 Análisis de p 66
B.1.2 Análisis de q 69

B.2 Estudio de conjuntos (Modelo Cuadrático). 69
B.3 Estudio de conjuntos (Modelo Cúbico) 71
B.4 Análisis de Y_{max} y X^* en el modelo cúbico. 72
B.5 Análisis de p y q en el modelo cúbico. 76

Bibliografía **77**

Introducción

Al evaluar una acción positiva sobre un individuo o grupo, muchas veces se consideran únicamente las consecuencias inmediatas, sin tomar en cuenta las posibles repercusiones futuras. Por ello se considera que la acción es benéfica. El problema con esta perspectiva es que no se consideran cuáles podrían ser las posibles repercusiones a otros niveles, ya sean espaciales o temporales. Por ejemplo, si consideramos la cadena alimenticia de lobos-conejos, tenemos los siguientes enfoques. Para un conejo devorado este suceso es fatal y por lo tanto indeseable, pero si consideramos en lo colectivo, el suceso es benéfico para la población al evitar efectos como la sobrepoblación en el medio. De igual manera podemos considerar el problema recíproco, esto es, que el beneficio a nivel individual puede implicar problemas a nivel poblacional. Esta perspectiva es en la que enfocaremos este trabajo. Veremos que ciertos beneficios sobre individuos de determinada especie, nos inducirán problemas a nivel poblacional. Entre los posibles problemas se encuentra el de la sobrepoblación, el cual será de gran interés, ya que un sistema con esta característica puede presentar problemas de diversa índole. Pero ¿qué posibles efectos o consecuencias negativas podemos esperar debidos al exceso de población?

El problema del exceso de población y sus consecuencias ya han sido tratados con anterioridad, mas no en su totalidad. Muestra de ello son los trabajos realizados por R. Malthus (1798) y R. May (1976). En el primero, Malthus nos habla acerca de este tema en su libro titulado "Ensayo sobre el principio de población" en el cual, elabora un análisis de la población humana considerando factores como producción de alimentos, enfermedades y guerras. En base a esto, describe la manera en que la población tiende a crecer y presenta algunas consecuencias negativas que se pueden presentar a futuro. En el segundo trabajo, el biólogo Robert May formuló otra manera para estudiar el crecimiento de una población mediante un estudio con insectos en un ecosistema cerrado (1976). May tuvo en cuenta los efectos de saturación del ecosistema que causan que, cuando la población se acerca al máximo posible que el medio ambiente puede sustentar, entonces la población se ve más afectada por este fenómeno, provocando que a mayor cantidad de individuos, menor es la población sobreviviente en la siguiente generación.

Sin embargo la propuesta de May, aunque modela los efectos de sobrepoblación, no lo hace en su totalidad. Ya que, como veremos en este trabajo, tendremos otro posible efecto en la población, el cual es la extinción de la especie.

Por tanto, este trabajo tiene como principal objetivo mostrar que la sobrepoblación, por parte de alguna especie en un determinado ecosistema, puede ser considerada como un mecanismo de extinción. Así mismo, como se mencionará a su debido momento, veremos algunas de las consecuencias resultantes de nuestro estudio. Un ejemplo de ellas es la debida a comportamientos caóticos. Una especie cuya cantidad de indviduos se rige de forma caótica, tiene la ventaja de ser impredecible en el medio y por tanto no ser considerada, por ejemplo, como base alimenticia por parte de potenciales depredadores. En este trabajo, veremos que comportamientos como el caótico en la cantidad de individuos de la población, no son siempre benéficos para la especie. Esto quiere decir que si la especie en cuestión es impredecible en el medio, bajo ciertas condiciones, puede tener repercusiones que sean fatales para su existencia, al llegar a extinguirse.

El trabajo se divide en 2 capítulos, conclusiones y dos apéndices, conformados de la siguiente manera: en el capítulo 1, planteamos nuestro problema, damos algunas nociones acerca de lo que es la modelación, así como una introducción a los sistemas dinámicos discretos, herramienta que será utilizada para lograr nuestros fines. En el capítulo 2 enunciamos las hipótesis correspondientes al problema en general. En base a esto, planteamos un posible modelo que cumpla con nuestras hipótesis, para después tomar casos particulares (tres familias de modelos matemáticos), con los cuales se pretende identificar los factores que intervienen en la sobrepoblación, la manera de modificar estos factores, de manera que sea benéfico, dañino o incluso fatal para la especie en cuestión. En el apéndice mencionamos y demostramos algunos resultados necesarios que usamos a lo largo de este trabajo.

Cabe mencionar que en este trabajo no buscamos en una primera aproximación las condiciones biológicas exactas o casi exactas que obliguen a que se presente el fenómeno de extinción por sobrepoblación, sino más bien mostrar que se puede dar la extinción por sobrepoblación.

Finalmente aclaramos que el enfoque de extinción por sobrepoblación, no se había tratado con anterioridad, razón por la cual consideramos que aporta nuevas ideas y por tanto puede ser base de futuras investigaciones en el área.

Capítulo 1

Planteamiento del problema y Conceptos básicos

El problema de nuestro interés consiste en lo siguiente: Supongamos que se tiene una especie que en un principio se ve favorecida en cierta manera, ¿podría este favorecimiento resultar contraproducente a la larga para su existencia? Por ejemplo, supongamos que tenemos una especie a la cual se le aumenta su tasa de natalidad. ¿Podríamos decir que esto la pudiese afectar negativamente a la larga?¿Afectarla a tal grado que la lleve a la extinción? O bien, si se tiene la situación de dos especies interactuando en un ecosistema, de tal manera que una de ellas este ayudando a la otra. ¿Podría esta supuesta ayuda afectar a la especie en vez de favorecerla?¿Podemos encontrar factores que la afecten o la beneficien? En caso afirmativo. ¿Pueden estos factores, ser manipulados por la otra especie?¿Puede la primer especie contrarrestar los efectos ocasionados por la segunda?

El fenómeno de provocar extinción mediante una supuesta ayuda es muy importante, debido a que puede ser utilizado por alguna especie en contra de otra extinguiéndola, o bien, por una especie misma (sin darse cuenta), provocando así la autoextinción.

Estas preguntas son las que nos interesarán. Para responder aunque sea parcialmente a ellas se considerará una sola especie, y en base al estudio de su propagación en el ecosistema, encontraremos algunos factores que la afecten o la beneficien.

Enunciado el problema, procederemos a revisar la metodología general que se usará para estudiarlo, y después daremos un breve repaso de la herramienta que aquí se utilizará, que consiste en la teoría de sistemas dinámicos discretos.

1.1 ¿Qué es la modelación matemática?

La modelación matemática es un proceso que nos ayuda, en base a ciertos razonamientos matemáticos, a decir cosas sobre un cierto problema real que se nos presente. Este proceso consta básicamente de tres pasos, los cuales explicaremos enseguida. Al principio se tiene un problema específico en el mundo real, en el cual conocemos cosas o factores que podrían

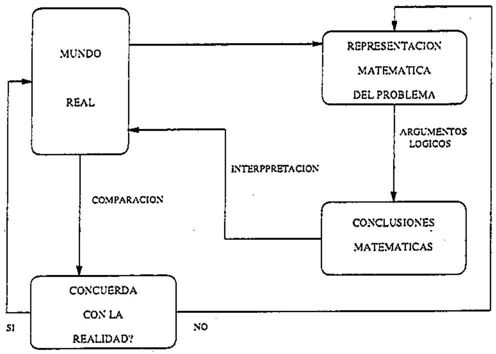

Figura 1.1: Diagrama del proceso de modelación

afectarse de alguna manera entre sí, que estén o que posiblemente estén involucrados en dicho problema. Factores que puedan medirse, como por ejemplo, temperaturas a distintos tiempos, cantidad de flujo en algún canal en un determinado tiempo, pesos de distintos objetos de una misma clase, etcétera. Así pues, el primer paso que se tiene, es pasar nuestro problema que está en el mundo real a uno que esté en el mundo matemático. Esto se logra relacionando los parámetros conocidos y los que se quieren conocer, mediante relaciones apropiadas como: leyes físicas experimentales o teóricas, químicas, o de algún otro tipo.

El segundo paso consiste en la manipulación y estudio de las relaciones y/o expresiones obtenidas en el primer paso. Esto se logra ayudándonos de la herramienta matemática disponible, (ecuaciones diferenciales, métodos numéricos, álgebra, ecuaciones en diferencias, entre otras), para llegar a relaciones entre los parámetros que no se conocían, o que nos aclaren información acerca de cosas que inicialmente se veían confusas, en fin, relaciones que nos den un panorama más amplio al inicial.

Finalmente, el último y tal vez el más importante de los tres es el de la interpretación de las relaciones matemáticas a nuestro problema original, es decir; traducir los resultados del mundo matemático al mundo real, para poder decir, describir o predecir comportamientos que se dan en el problema, en base a las relaciones matemáticas que se obtuvieron al inicio, durante y al final del análisis que se llevó a cabo.

1.1.1 Aspectos a considerarse en modelación.

Aquí cabe mencionar varios aspectos que juegan un papel muy importante en la modelación. Un ejemplo de estos es la elección de cuáles y cuántos parámetros deben elegirse para lograr un trabajo óptimo. Si tomamos un número grande de parámetros, es posible que nuestra aproximación a la solución sea muy buena pero a su vez sea imposible llegar a ella. Ya que, el trabajar un problema con muchas variables, es generalmente un problema muy difícil de resolver y/o analizar. En cambio, si se toman un número pequeño de parámetros, lo cual ayuda a que nuestro problema sea soluble de manera rápida, por así decirlo, se corre el riesgo de que la solución obtenida no tenga nada que ver con nuestro problema. Es decir, que la solución sea mala. Así pues, se recomienda que se utilicen los parámetros más representativos, en que posiblemente algún parámetro nos brinde el efecto de varios parámetros en conjunto, y así reducir nuestro problema a uno más sencillo sin perder demasiada información.

Así mismo hay que aclarar lo siguiente: Cuando se presenta un problema el cual se quiere modelar, uno no siempre está restringido a utilizar sólo una herramienta. Generalmente ésta depende de la naturaleza del problema. Es decir que hay ocasiones en las cuales, dado un problema, uno puede desarrollarlo usando distintas metodologías ya sea vía procesos estocásticos, de ecuaciones en diferencias, de ecuaciones diferenciales, entre otras. En este caso, es bueno tratar de ver cuál es mejor, ya que hay veces que modelar con ciertas técnicas es mucho más fácil que con otras, ya sea en su planteamiento y/o en la manera de resolver el problema.

El problema ya planteado de forma matemática es conocido como modelo matemático. En modelación existen 2 tipos de modelos matemáticos: los modelos predictivos y los modelos descriptivos. Un modelo predictivo, es aquel que nos da información de los comportamientos de cierto fenómeno, en tiempos futuros, presentes y algunas ocasiones del pasado mismo. Mientras que un modelo descriptivo es aquel que nos da información general acerca del problema. Nos dice cuáles comportamientos se dan, así como los parámetros que los controlan. La información cuantitativa que genere el modelo puede no ser fiable en el problema real pero, en caso de serlo, nuestro modelo será descriptivo y predictivo al mismo tiempo.
Ya que hemos visto a grandes rasgos el panorama de modelación, procederemos a repasar algunos conceptos que nos ayudarán en el estudio de nuestro problema.

1.2 Preliminares matemáticos.

En esta sección, nos dedicaremos al repaso de una serie de definiciones y resultados referentes a sistemas dinámicos discretos.
¿Qué es un sistema dinámico?

Un sistema dinámico consiste en una terna (M, G, L) donde M es una variedad, G es un grupo y L define la acción de G sobre la variedad M. Dado que esta definición matemática es muy general, podemos para nuestros fines particularizar y pensar en un sistema dinámico como un mapeo

$$f : M \times G \to M$$

donde en general f es una función continua, G representa el tiempo y M es el lugar donde las cosas evolucionan

En general no utilizaremos esta definición. Ya que nos concentraremos en una clase muy particular de sistemas dinámicos que es la de los sistemas dinámicos discretos. Por tanto para fines prácticos un sistema dinámico es un sistema que evoluciona con el tiempo.

Así que, procederemos a dar algunos ejemplos que nos permitan introducirnos a los conceptos que más adelante nos ayudarán a definir más precisamente lo que es un sistema dinámico discreto.

Nota Primero, se considerará lo que es un sistema dinámico en general, y después nos restringiremos solamente al caso de los sistemas dinámicos discretos, herramienta que finalmente se utilizará para el estudio de nuestro problema.

Ejemplo 1 Si se tiene una población de conejos, y se quiere ver cómo se comporta su crecimiento en cantidad, medido cada mes. Suponiendo que inicialmente hay 30 conejos; al primer mes es posible que sean 43, al segundo 39, al tercero 68, etcétera.

Ejemplo 2 Una posible generalización del ejemplo anterior es la competencia entre 2 especies. Es decir, en un ecosistema con 2 especies interactuando, ¿cómo se afectan entre sí? ¿Puede una especie extinguir a otra? En este caso se quiere ver cómo es que cambia el número de individuos en ambas especies con el paso del tiempo.

Ejemplo 3 Si se tiene una cierta cantidad de individuos que están afectados por alguna epidemia, ¿con qué velocidad aumenta o disminuye la cantidad de individuos enfermos? Despues de 2 años, ¿la epidemia estará controlada totalmente? Aquí se busca cómo cambia en número la población de individuos enfermos.

Ejemplo 4 Tomemos ahora el clásico problema de la cuerda vibrante, que consiste en una cuerda sujeta en sus extremos y que se encuentra completamente estirada. Al jalarla un poco en dirección perpendicular y después soltarla nos sugiere la siguiente pregunta. Para cada punto de la cuerda, ¿qué comportamiento se tendrá en el futuro? ¿Con que velocidad?

Notemos que al estudiar cada uno de estos ejemplos es necesario saber su comportamiento en un determinado tiempo t_0. Este comportamiento conocido es llamado **estado inicial** o **condición inicial** del sistema. Esto, se hace con el fin de ver cómo algo conocido está cambiando cuando el tiempo transcurre.

En el ejemplo de los conejos, la condición inicial será la población que se está trabajando al principio. Mientras que en el caso de la cuerda vibrante, la condición inicial será la posición de la cuerda, así como su velocidad al momento de soltarla.

De aquí podemos notar algunas cosas. Que el comportamiento de ciertos fenómenos es frecuentemente algo que podemos medir. Esto matemáticamente es representado por parámetros o variables que cambirán conforme el tiempo transcurre. Cuando se tenga un comportamiento conocido en algún tiempo implicará que nuestras variables habrán tomado cierto valor en particular en ese tiempo. Recíprocamente, sabremos el comportamiento del fenómeno en un determinado tiempo t_0, si sabemos cuál es el valor de nuestra variable en t_0. Supongamos otra vez nuestra población de conejos. Aquí es posible hacer la siguiente asignación: La variable $C(t)$ que represente la cantidad de conejos en el tiempo t. Mientras que en el problema de la cuerda, es posible asignar la variable $P(x,t)$ a la posición que represente la posición de la cuerda en el punto x, al tiempo t.

Ahora bien, si tenemos un problema a estudiar y tenemos sus variables asociadas podemos notar algunos detalles importantes. En el ejemplo de la epidemia, $E(t)$ que representa la cantidad de enfermos al tiempo t no puede tomar el valor -50 ni de 10.78. Ya que, estas cantidades de personas en una población carecen de sentido. Esto nos lleva a lo siguiente.

Definición 1 *Supongamos que se tiene un problema a estudiar, y así mismo que se tienen identificadas las variables a analizar conforme pasa el tiempo. El conjunto de todos los valores que las variables pueden tomar, de tal manera que tengan sentido para el problema, es conocido como* **espacio de estados** *del problema. Los elementos de este conjunto son conocidos como* **estados** *del sistema.*

Así pues, podemos tomar como el espacio de estados en el ejemplo de la epidemia $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$, ya que pueden estar enfermos $0, 24, 13$, etc. En el caso de las especies si $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ representa la cantidad de individuos al tiempo t, ($x_i(t)$ denota la cantidad de individuos de la especie i) entonces su espacio de estados será $B = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, etc.

Nota De ahora en adelante S denotará el espacio de estados correspondiente.

Hay al menos dos tipos de sistemas dinámicos importantes, los continuos y los discretos. Los sistemas dinámicos continuos comúnmente son representados por ecuaciones diferenciales y funcionan de la siguiente forma: al estudiar un determinado fenómeno en base a un estado conocido en el problema, en un determinado tiempo, podemos predecir a dónde cambió este para tiempos posteriores al conocido. Este tipo de sistemas dinámicos, también se plantea con otro tipo de condiciones distintas a las iniciales; éstas son llamadas condiciones en la frontera. El problema de la cuerda vibrante es un ejemplo de un problema que se estudia con ecuaciones diferenciales y que utilizan tanto condiciones iniciales como de frontera.

Para nuestros fines, este tipo de sistemas dinámicos no será utilizado, por lo que no se profundizará más en este camino.

Lo que realmente nos interesará para nuestro trabajo son los sistemas dinámicos discretos.

A continuación daremos un ejemplo de un sistema dinámico bastante sencillo de analizar.

Supóngase que un banco da anualmente el .05% de intereses del cápital actual. Si inicialmente se tiene una cantidad X_0, la cual será nuestro estado inicial conocido o condición inicial, entonces después de un año se tendrá una cantidad X_1, que estará dada por:

$$X_1 = X_0 + .05X_0 = 1.05X_0$$

Ahora bien ¿qué pasa al segundo año? Aplicando el mismo argumento tenemos una cantidad X_2, la cual puede ser calculada por:

$$X_2 = X_1 + .05X_1 = 1.05X_1$$

Procediendo de la misma manera obtenemos lo siguiente

$$X_k = X_{k-1} + .05X_{k-1} = 1.05X_{k-1} \tag{1.1}$$

Es decir, si queremos saber cuál será el cápital en el k-ésimo año después del depósito inicial, es posible hacerlo de la manera siguiente: Conociendo cuál fue el capital el año anterior al k y aplicando (1.1).

Observación Esto nos dice que el estado X_k depende directamente de X_{k-1} y en base al problema a estudiar, así estará dada nuestra dependencia.

En este caso tenemos que la regla de dependencia se representará como

$$X_t = f(X_{t-1})$$

Y en el modelo del banco f es igual a

$$f(y) = 1.05y$$

Observación 1 La función f representa la ley de evolución del sistema dinámico.

Observación 2 La función f va del espacio de estados al espacio de estados. Es decir, f toma comportamientos de cierto fenómeno y los manda a comportamientos del mismo fenómeno, los cuales pueden o no, ser distintos.

Observación 3 X_t puede ser un vector $(x_t^1, x_t^2, \ldots, x_t^n)$, donde $x_t^i = f_i(x_{t-1}^1, x_{t-1}^2, \ldots, x_{t-1}^n)$. Aquí cada x_t^j nos representa el comportamiento de algún fenomeno del problema, el cual puede estar influído por los demás fenómenos ocurridos ahí. Un ejemplo de esto es el de interacción de especies.

1.2.1 Sistemas dinámicos discretos

Definición 2 *Un sistema dinámico discreto es una ecuación de recurrencia de la forma*

$$X_{t+1} = f(X_t) \tag{1.2}$$

donde f es una aplicación $f : S \to S$ donde S es el espacio de estados.

Observación Al tomar $t+1$ nos referimos a una unidad de tiempo después del tiempo t.

Básicamente, tenemos que un sistema dinámico discreto consta de 3 elementos principales.

1. El lugar donde puede llevarse a cabo la evolución (espacio de estados).

2. Una ley de evolución.

3. Un estado inicial que se quiere estudiar.

Ahora bien, si tenemos X_0 un estado conocido X en el tiempo $t = 0$[1], y queremos ver su comportamiento con el paso del tiempo; tenemos entonces de (1.2) que

$$X_1 = f(X_0)$$

y X_1 es el comportamiento, un periodo de tiempo después, del estado X_0. Para calcular X_2, es decir el comportamiento 2 unidades de tiempo después del estado X_0, hay que aplicar (1.2) para obtener

$$X_2 = f(X_1) = f(f(X_0)) = (f \circ f)(X_0)$$

donde $(f \circ g)(z) = f(g(z))$ es la composición de funciones. Procediendo de la misma manera tendremos que dentro de k unidades

$$X_k = f(X_{k-1}) = f \circ (f(X_{k-2})) = \ldots = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{k-veces}(X_0)$$

Es decir, para conocer el comportamiento dentro de k periodos de tiempo hay que aplicar primeramente f a X_0. Al resultado, se le aplica f, y se repite este proceso k veces.
Para simplificar nuestra notación, tomaremos

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-veces}$$

Observación 1 Nótese que f^n no es f elevada a la n, sino que es el proceso de composición de funciones, realizado n veces.

En general, nos interesará saber cuál es el comportamiento de los estados a estudiar para periodos de tiempo muy grandes. Así que daremos algunas definiciones que nos permitan organizar estas ideas.

Nota Algo muy importante que consideraremos a partir de este momento, es que trabajaremos con sistemas dinámicos discretos en una dimensión. Es decir sólo se analizará el comportamiento de un fenómeno que estará dado por una sola variable.

Definición 3 *Sea $f : S \to S$, $X_0 \in S$. La* ***órbita*** *de X_0 bajo f es el conjunto ordenado.*

$$O_f(X_0) = \{X_0, f(X_0), f^{(2)}(X_0), \ldots\}$$

o bien

$$O_f(X_0) = \{f^{(n)}(X_0) | n \in (\mathbb{N} \cup \{0\})\}$$

con la convención $f^{(0)}(X_0) \equiv X_0$.

Observación Notemos que la órbita de X_0 bajo f puede ser vista como la sucesión

$$\{f^{(n)}(X_0)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$$

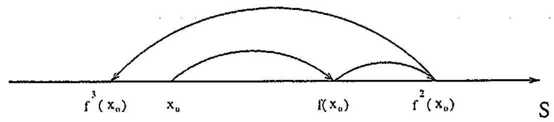

Figura 1.2: Visualización de la órbita de X_0 bajo f.

La manera en que se estudia un fenómeno con el paso del tiempo, es precisamente conociendo su órbita asociada. De hecho, hay patrones en la órbita que serán de gran interés en el estudio de nuestro problema, por lo que los mencionaremos enseguida.

Definición 4 *Sea $f : S \to S$, $X \in S$. X es un* ***punto fijo*** *de f si*

$$f(X) = X$$

Observación 1 Esta condición implicítamente nos pide que $X_{t+1} = X_t$ para toda $t \in \mathbb{N}$.

Observación 2 En este caso la órbita de X es

$$O_f(X) = \{X, X, X, \dots\}$$

Así pues si tenemos un estado fijo X, conforme pase el tiempo el comportamiento de un cierto fenómeno dado por X siempre será el mismo. En el ejemplo de el banco, tendremos que el único punto fijo es $X = 0$, que se obtiene al resover $f(X) = X$. O bien $X = 1.05X$. Lo cual significa que si se tienen 0 pesos en el banco en algún momento, entonces así se quedará para todo tiempo futuro.

Definición 5 *Sea $f : S \to S$. Un punto $X \in S$ se dice* ***periódico*** *de periodo n si*

$$f^n(X) = X$$

con n el mínimo entero con esa propiedad.

Estos estados son de gran importancia, ya que si un fenómeno tiene un comportamiento periódico, es muy predecible y por lo tanto se puede aprovechar en gran manera. En este caso la órbita del punto periódico estará dada por.

$$O_f(X) = \{X, f(X), f^{(2)}(X), \dots, f^{(n-1)}(X), X, \dots\}$$

Ya clasificados estos puntos, nos enfrentamos a otro problema que consiste en lo siguiente: Supongamos que se tiene una función f, la cual, tiene un punto fijo aislado x_0. Es decir, que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \neq x_0 \in V_\delta(x_0)$, $f(x) \neq x$. La órbita de x_0 bajo f es

$$O_f(x_0) = \{x_0, x_0, ...\}$$

¿Qué pasará si perturbamos un poco nuestro estado x_0? Es decir si queremos observar la dinámica de $x_\varepsilon \neq x_0$ tal que $x_\varepsilon \in V_\delta(x_0)$.¿Se quedará muy cercana a x_0? Para responder a estas preguntas, se verá que hay distintos fenómenos dependiendo de la función f en el punto x_0, así como en una vecindad del mismo punto. Para esto veamos las siguientes proposiciones.

[1]Se toma t=0 a manera de referencia, es decir que es donde empezamos a medir.

Proposición 1 *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to A$, con A intervalo y $f \in C^1$. Sea x_0 un punto fijo con $|f'(x_0)| < 1$. Entonces, existe un intervalo abierto U alrededor de x_0 tal que si $x \in U$ implica*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$$

Observación x_0 se conoce como **punto fijo atractor**.

Definición 6 *El conjunto de puntos $x \in A$ tales que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$, se conoce como cuenca de atracción de x_0.*

Proposición 2 *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to A$, con A intervalo y $f \in C^1$. Sea x_0 un punto fijo con $|f'(x_0)| > 1$. Entonces, existe un intervalo abierto U alrededor de x_0, tal que si $x \in U$, $x \neq x_0$ implica que existe $k > 0$ tal que $f^k(x) \notin U$.*

Observación x_0 se conoce como **punto fijo repulsor**.

De estas dos proposiciones vemos que estados cercanos a los fijos no necesariamente van a permanecer cercanos a ellos en el futuro. Por lo tanto podemos observar que la naturaleza del punto es muy importante. Esto es debido a que hay sistemas en los que se dan perturbaciones a cada momento, y por lo tanto, si el punto es repulsor no sabremos con certeza el comportamiento futuro de algunos estados.

Una generalización de los conceptos dados anteriormente se da en el caso de órbitas de puntos periódicos, los cuales, se clasifican por las siguientes proposiciones.

Proposición 3 *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to A$, con A intervalo y $f \in C^1$. Sea p un punto periódico de periodo n. Supongamos que $|(f^n)'(p)| < 1$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in V_\delta(p)$ se cumple*

$$\lim_{m\to\infty} |f^m(x) - f^m(p)| = 0$$

Es decir la órbita de x converge a la órbita de p.

Observación $O_f(p)$ se conoce como **órbita periódica estable**.

Proposición 4 *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to A$, con A intervalo y $f \in C^1$. Sea p un punto periódico de periodo n. Supongamos que $|(f^n)'(p)| > 1$. Entonces, existe un intervalo abierto U alrededor de p, tal que si $x \in U$, $x \neq p$ implica que existe $k > 0$ tal que $(f^n)^k(x) \notin U$.*

Observación $O_f(p)$ se conoce como **órbita periódica inestable o repulsora**.

En este caso, si se tiene un comportamiento periódico, y tenemos alguna perturbación, el comportamiento de nuestro estado no tendrá una dinámica que vuelva a estabilizarse en la órbita periódica.

Ya analizados estos comportamientos base hablaremos de uno más, llamado Caos, que presentan algunos sistemas.

El concepto de Caos.

Para el estudio de esta dinámica, daremos algunas definiciones básicas así como condiciones que nos permitan saber cuando un sistema dinámico es caótico, es decir cuando un fenómeno se comporta de manera caótica.
Para esto, empecemos con un ejemplo que nos permita tener una visualización general del concepto de caos.

Transladémonos unos cuantos años atrás en el tiempo. Pensemos que nos encontramos en una época anterior a la nuestra; digamos en la era cuaternaria y que por alguna razón, el ecosistema es alterado ligeramente(tal vez alguna pequeña forma de vida como una mosca, o un hongo, es destruida). Uno podría pensar que no hubo problema alguno por la insignificancia del suceso; pero no sería así. Si la forma en que se desarrolla la vida en nuestro planeta tuviese un comportamiento caótico, muy posiblemente el mundo en nuestros días no tendría nada que ver con lo que estamos viviendo hoy.
Posiblemente los aviones no existirían como los conocemos o simplemente no existirían. Posiblemente los paises que son potencias, no serían países siquiera. En fin, las cosas podrían ser totalmente diferentes.

Esto lo que nos dice es que cualquier decisión tomada o cualquier suceso por insignificante que sea, puede tener grandes repercusiones en el futuro.

En matemáticas, el efecto de alterar levemente un sistema y tener repercusiones muy notables es conocido como sensibilidad a condiciones iniciales.

Un sistema con esta característica se dice caótico y esto en términos de la dinámica, nos dice que si tomamos 2 estados arbitrariamente cercanos, entonces en el futuro pueden estar tan alejados como se quiera. Así que podríamos pensar que un sistema es caótico, si no tiene un comportamiento predecible.

Ya que se tiene un panorama general de lo que trata esta sección, procederemos a ver matemáticamente el significado de caos, así como las condiciones necesarias y suficientes para su existencia. También se mencionarán algunos criterios que nos permitan su identificación rápida.

Definición 7 *Sea $J \subset \mathbb{R}$ y $f : J \to J$ una función continua. f se dice topológicamente transitivo si para cualquier par de conjuntos abiertos U, $V \subset J$, existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Esto nos dice que funciones con esta propiedad tienen puntos que bajo iteraciones se mueven de vecindades arbitrariamente pequeñas a cualquier otras, por pequeñas que éstas sean. Esto nos implica que nuestro sistema consta de una sola pieza, es decir, no podemos estudiar nuestro problema como 2 o más subsistemas ajenos.

Observación en el caso de que J sea compacto, transitividad topológica implica la existencia de una órbita densa, y viceversa.

Definición 8 *Sea $J \subset \mathbb{R}$. Sea $f : J \to J$ una función continua. Se dice que f tiene sensibilidad a condiciones iniciales, si existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in J$ y cualquier vecindad N de x, existen $y \in N$ y $n > 0$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.*

Lo que nos dice es que para cualquier punto que demos en el conjunto, digamos x, siempre existirá al menos un punto y tan cercano como queramos a x, tal que después de determinado número de iteraciones estarán alejados en almenos δ. Esto para efectos prácticos nos dice que cualquier error que se tenga por pequeño que este sea, puede tener grandes consecuencias en el futuro.

Definición 9 *Sea $J \subset \mathbb{R}$ y $f : J \to J$ una función continua. f se dice que es caótica en J si*

1. *f tiene sensibilidad a condiciones iniciales.*
2. *f es topológicamente transitiva.*
3. *Los puntos periódicos son densos en J.*

En otras palabras, podemos decir que un sistema caótico es un sistema que cuenta con las siguientes características: Es impredecible, ya que es sensible a condiciones iniciales y por tanto cualquier error puede afectar el comportamiento en gran medida a la larga. No puede estudiarse en subsistemas, es decir separar el problema en 2 o más subconjuntos ajenos para facilitar su estudio, debido à la transitividad topológica. Y finalmente, cuenta con una componente de regularidad, ya que tenemos puntos periódicos, densos en nuestro conjunto.

Mostrar las propiedades (1-3) es en general laborioso y muchas veces imposible, pero los siguientes resultados dan criterios más manejables para ver cuando un sistema presenta el fenómeno de caos.

Teorema 1 *Sea $J \subset \mathbb{R}$ y $f : J \to J$ una función continua. Sea $a \in J$ tal que $a < f(a) < f^2(a)$ y $f^3(a) \leqslant a$ o bien $a > f(a) > f^2(a)$ y $f^3(a) \geqslant a$. Entonces existe $H \subset J$ tal que f tiene comportamiento caótico en H. (Li-Yorke [1])*

Corolario 1 *Sea $J \subset \mathbb{R}$ y $f : J \to J$ una función continua. Sea $a \in J$ tal que a es de periodo 3. Entonces existe $H \subset J$ tal que f tiene comportamiento caótico en H.*

Otras maneras para mostrar caos son, conjugación topológica y estabilidad estructural.(Devaney [2]).

Todo lo visto en esta sección nos ayuda a darnos un panorama, de cuáles dinámicas pueden presentarse en algún sistema. Cabe mencionar que en un sistema, es posible que se presenten de forma simultánea los comportamientos anteriormente presentados, pero esto depende específicamente del problema a estudiar.

Por tanto, ya vista de forma general la teoría a utilizar, procederemos a modelar nuestro problema.

Capítulo 2

Modelación matemática del problema

2.1 Hipótesis del problema.

A continuación mencionaremos algunas características que la población a estudiar tendrá y que serán base para plantear nuestro modelo, las cuales tomaremos como hipótesis.

1. Si en algún determinado tiempo, la cantidad de individuos de la población bajo estudio llega a estar por debajo de un cierto nivel que suponemos predeterminado, entonces no podrá recuperarse. Mas aún tenderá a la extinción. Este nivel será llamado umbral de extinción. Si el número de individuos está por encima de este nivel, no se puede inicialmente asegurar qué pasará con la especie.

2. Existe un segundo nivel que representa el equilibrio de la población en el medio. Es decir, si el número de individuos es menor que él, pero mayor que el umbral de extinción, la población aumenta. Pero en el caso de que este nivel sea superado, la población disminuye debido al exceso de población presente en el ecosistema.

3. Consideramos el siguiente efecto en la población. Debido a los efectos de natalidad y sobrepoblación presentes en la dinámica, suponemos que existe un nivel entre el umbral de extinción y el nivel de equilibrio, tal que:

   - Si la el número de individuos está por encima del umbral de extinción, pero debajo de este nivel, tenemos que entre más grande sea la población, mayor será la población en la siguiente generación.
   - Si el número de individuos la población se sobrepasa de este nivel, los efectos de sobrepoblación ya tendrían el peso suficiente para tener que, a mayor población, menos individuos sobreviven en la siguiente generación.

4. La existencia de un nivel, el cual nos represente la capacidad absoluta, o bien la máxima capacidad que soporta el ecosistema con dicha población.
5. La no existencia de generación espontanea o inmigración, es decir si en algún determinado tiempo nuestra población constó de cero individuos, permanecerá así para todo tiempo futuro.

Ya enunciadas las hipótesis que cumplirá nuestra población, mencionamos una más que pediremos por cuestiones de la modelación que aquí se utilizará.

Se considerarán mediciones de la población cada cierto intervalo fijo de tiempo (cada mes, día, hora, etc.) y tomadas uniformemente, es decir sin mezclar horas-días, minutos-meses,etc.

2.2 Matematización de nuestras hipótesis

Nuestro problema puede ser modelado por un sistema dinámico discreto.

$$Y_{t+1} = f(Y_t) \qquad t = 0, 1, 2, ...$$

donde Y_t denota la cantidad de individuos en el tiempo t. Esta cantidad puede ser medida en biomasa (por ejemplo), es decir, la cantidad de masa corporal de todos los individuos en conjunto.

Nuestro objetivo ahora es encontrar características de la función f, que aseguren que se cumplan las condiciones que se pidieron al principio.

Con el fin de utilizar la teoría de sistemas dinámicos discretos en espacios completos. Supondremos que f cumple con las siguientes 2 condiciones

- En primer lugar tenemos que aclarar cuál es el espacio de estados.
  En principio, el espacio de estados S consiste en todo el conjunto de valores que puede tomar Y_t. Es claro que la cantidad de individuos debe ser mayor o igual a cero, pero como el sistema sólo soporta cierta cantidad de individuos, llamada Capacidad Absoluta del Ecosistema (C), supondremos que

  $$S = \{y \in \mathbf{R} | y \in [0, C]\}$$

  o simplemente

  $$S = [0, C]$$

  Nota Recordemos que f va del espacio de estados en el espacio de estados.

- En segundo lugar pedimos continuidad de f en S.

Ya vistas estas condiciones de f, regresemos con las hipótesis del problema.

Para modelar la hipótesis 5 notamos lo siguiente. Si la población se extingue para algún tiempo t_0 , entonces $Y_{t_0} = 0$ y por tanto $Y_{t_0+k} = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Lo que significa que para todo tiempo futuro ya no hay individuos. Esto nos asegura que $f(0) = 0$; es decir 0 es un punto fijo de f.

Ahora, pasando a la existencia del umbral de extinción dado por la hipótesis 1 se tiene lo siguiente. $\exists M < C$ tal que si para algún tiempo $t_0 \in \mathbb{N}$, $Y_{t_0} < M$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} f^n(Y_{t_0}) = 0;$$

es decir la población se extingue si en algún momento está por debajo del umbral de extinción.

En base a este argumento tenemos que 0 es un punto fijo atractor. Para lograr que la cuenca de atracción de 0 sea $(0, M)$, pediremos que

$$0 < f(y) < y \qquad \text{con} \qquad y \in (0, M) \tag{2.1}$$

y consecuentemente, no permitiremos la existencia de puntos fijos en $(0, M)$.
Observación La condición (2.1) asegura que 0 sea atractor.

Proposición 5 *M es un punto fijo repulsor.*

Demostración. Primero mostraremos que M es un punto fijo de f.

De la hipótesis 2[1], sabemos que $\exists\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que si $Y \in (M, M + \delta_1)$ entonces $f(Y) > Y$. De (2.1) tenemos que $f(Y) < Y$ en $(0, M)$. De estos resultados y del hecho que f es continua en $[0, C]$ se sigue que M es un punto fijo, es decir $f(M) = M$.

Para mostrar que M es repulsor, consideramos $\delta = min\{\delta_1, M/2\}$. Sea $B_\delta(M) = (M - \delta, M + \delta)$ y $\overline{B_\delta(M)}$ su cerradura. del lema 1[2], tenemos que dado $Y \in B_\delta(M)$ existe $n = n(Y)$ tal que $f^n(Y) \notin \overline{B_\delta(M)}$ y por tanto $f^n(Y) \notin B_\delta(M)$.

De aquí se sigue que M es repulsor. ■

Ya que hemos caracterizado matemáticamente al umbral de extinción M, pasaremos al segundo nivel de interés. El nivel de equilibrio del medio, el cual denotaremos por E. De la segunda hipótesis se concluye que

- Si la población se encuentra entre M y E entonces aumenta. Es decir f debe cumplir con

$$\forall y \in (M, E) \qquad y < f(y) \tag{2.2}$$

- Ahora si $Y_t \in (E, C)$, entonces la especie sufriría efectos contraproducentes debidos al exceso de población, a tal grado que la población se reduce. Entonces se necesita que

$$\forall y \in (E, C) \qquad y > f(y)$$

[1]Poblaciones entre el umbral de extinción y el nivel de equilibrio del medio aumentan
[2]Ver apéndice

Una conclusión que se puede obtener de los puntos anteriores, así como de la continuidad de f, es la existencia de otro punto fijo, el cual es, E.

Observación La naturaleza de E puede variar, lo cual generará distintos comportamientos, tal y como se verá a lo largo de este trabajo.

Finalmente para modelar la hipótesis 3, observamos que existe una constante entre M y E, la cual denotamos como X_{MAX}[3], tal que

- Si $y \in (m, X_{MAX})$ entonces f es estrictamente creciente.
- Si $y \in (X_{MAX}, C)$ entonces f es estrictamente decreciente.

De los puntos vistos anteriormente vemos que las funciones permisibles deben cumplir con las siguientes condiciones:

- $f(0) = 0$, $f(M) = M$, $f(E) = E$.
- $0 < f(y) < y$ con $y \in (0, M) \cup (E, C)$.
- $y < f(y)$ si $y \in (M, E)$.
- f es estrictamente creciente si $y \in (m, X_{MAX})$.
- f es estrictamente decreciente si $y \in (X_{MAX}, C)$.

En la figura (2.1)mostramos dos posibles ejemplos de gráficas de las funciones que cumplen con las hipótesis que requerimos.

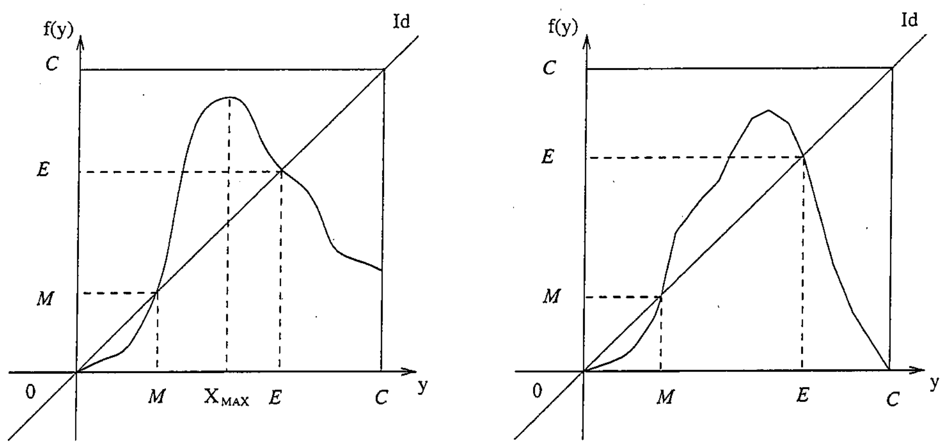

Figura 2.1: Gráficas de funciones que cumplen las hipótesis.

[3]El motivo de este nombre se ve en la siguiente sección

2.2.1 Escalamiento del problema

Con el fin de simplificar operaciones, lo que haremos será reescalar las variables del problema. Para el reescalamiento, definimos la variable X_t de la siguiente manera

$$X_t = \frac{Y_t}{C}$$

En términos de la nueva variable las constantes están dadas por

1. La Capacidad absoluta del ecosistema es 1.
2. El umbral de extinción es $m = \frac{M}{C}$.
3. El nivel de equilibrio es $e = \frac{E}{C}$.
4. $X_{max} = \frac{X_{MAX}}{C}$

En este caso, nuestra variable X_t también indica la cantidad de individuos presentes en el ecosistema. Pero en este caso la información está dada como fracción respecto al máximo posible.

Observación X_t toma valores únicamente en el intervalo $[0, 1]$.

Entonces, el nuevo espacio de estados está dado por

$$S1 = \{x \in \mathbf{R} | x \in [0, 1]\}$$

o bien

$$S1 = [0, 1]$$

Nota 1 De ahora en adelante todo el análisis y la interpretación se manejarán con el modelo escalado.

Nota 2 Por claridad[4], utilizaremos la siguiente notación. Se utilizará E en vez de e.

Observación 1 Notemos que todas las hipótesis se cumplen exactamente igual con nuestro problema escalado que con el inicial.

2.3 Aspectos generales del problema

En esta sección trataremos puntos como la redefinición de funciones, así mismo veremos los comportamientos base de la dinámica de X_t, los cuales serán de gran utilidad en los modelos que aquí se presentarán.

Para ver los posibles comportamientos, definiremos algunas constantes básicas para nuestro estudio.

[4]Posible confusión con el número e, de exponencial.

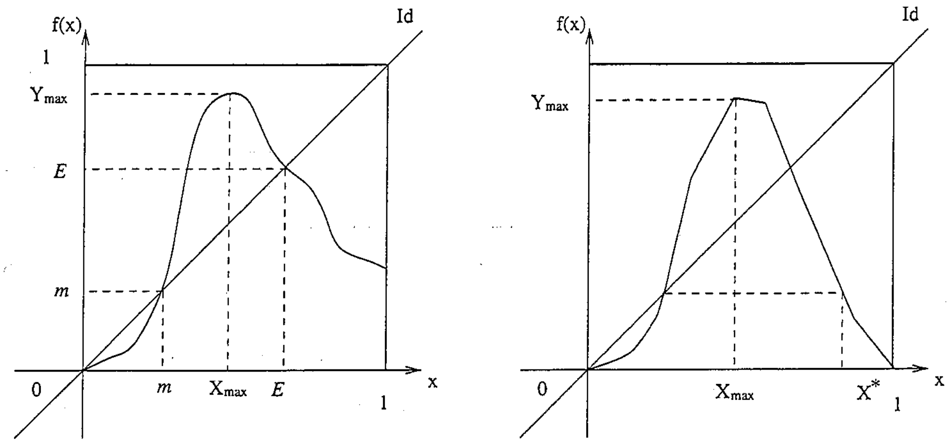

Figura 2.2: Gráficas de funciones a trabajar.

- Y_{max} = Valor máximo que toma la función en $[0, 1]$.
- $X^* \in [0, 1]$, tal que $X^* \neq m$ y $f(X^*) = m$.

Observación 1 Recordando la condición de que, entre mayor fuese la población en la región $[X_{max}, 1]$, mayor era la penalización obtenida, obtenemos que si X^* existe entonces es único. [5].

Observación 2 Algo muy importante, es el hecho que $Y_{max} = f(X_{max})$. Es decir, es en X_{max} donde la población combina los efectos de natalidad y sobrepoblación, para lograr su mayor esparcimiento en el ecosistema.

Al tratar de modelar nuestro problema, puede ocurrir que sea útil considerar funciones que cumplan con

- La existencia de los puntos fijos 0, m, E.
- Ser crecientes en $[0, X_{max}]$ y decrecientes en $[X_{max}, 1]$.

Sin embargo se puede presentar el problema que $f(X_{max}) > 1$[6], lo que contradiría el hecho de que f va del espacio de estados en el espacio de estados, y por ende no serviría para modelar nuestro problema. Para evitar una posible ambigüedad, simplemente redefinimos nuestra función de la siguiente forma.

$$f(x_0) = 1 \qquad \text{si} \qquad f(x_0) > 1$$

Observación Vemos que en este caso, la función no es estrictamente creciente o decreciente como lo visto en las hipótesis. Para efectos prácticos y para darle sentido al problema, consideraremos esta variante válida.

[5]La unicidad se da por hipótesis generales de nuestro modelo. La existencia depende del modelo en sí, ya que X^* no tiene por que existir.

[6]Por continuidad de f existe $V_\delta(X_{max})$ para algún $\delta > 0$, tal que $x \in V_\delta(X_{max})$ tiene la misma propiedad.

Nota En este caso tomaremos X_{max} como el valor obtenido antes de haber redefinido la función.

Tanto Y_{max} como X^* son de gran importancia; ya que en base a la comparación entre ellas y a la estabilidad del punto fijo E, se obtienen distintos comportamientos. Hay dos casos principales, dados por la relación entre Y_{max} y X^*, y uno tercero dado por la no existencia de X^*. Este último no lo consideraremos en este trabajo al no ser nuestro objetivo principal.

Situaciones debidas al comparar Y_{max} y X^*.

1. Supongamos $Y_{max} > X^*$.

   Como f es continua y por ser $Y_{max} = max_{[0,1]}f(x)$, existe $V_\delta(X_{max})$ tal que $\forall x \in V_\delta(X_{max})$, $f(x) > X^*$.

   Ahora, sea $X_0 \in V_\delta \Longrightarrow f(X_0) > X^*$ y como f es decreciente en $(X_{max}, 1]$ se tiene que $f^2(X_0) < m$ y por lo tanto

$$\lim_{n \to \infty} f^n(X_0) = 0$$

   Y esto quiere decir que, si en algún tiempo la población alcanza niveles suficientemente altos, se llega a extinguir (Véase fig. 2.3).

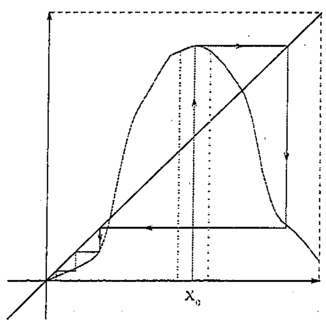

Figura 2.3: Efecto de tener $Y_{max} > X^*$.

2. La otra situación se presenta cuando $Y_{max} \leqslant X^*$. De $Y_{max} \leqslant X^*$ y de la existencia de las regiones donde f es estrictamente creciente o decreciente se tiene que $\forall x \in (m, X^*)$ $\quad m < f(x) < X^*$. De esto se sigue que $f^n(x) \in (m, X^*)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Esto significa que nuestra dinámica se reducirá al intervalo $[m, X^*]$ y por tanto la población jamás se extinguirá.

Así que hemos dividido en 2 grandes categorías nuestros modelos: Aquellos en los cuales la especie tiende a extinguirse debido al exceso de individuos en el ecosistema, y otros que no permiten que la población sature al ecosistema de tal manera que se tenga extinción por exceso de población.

Ahora bien, tenemos que cada uno de ellos puede presentar el fenómeno de que E sea estable o inestable, obteniendo así cuatro casos a estudiar. A continuación veremos estos posibles casos con más detenimiento para ver qué dinámica presentan, así como una posible interpretación biológica.

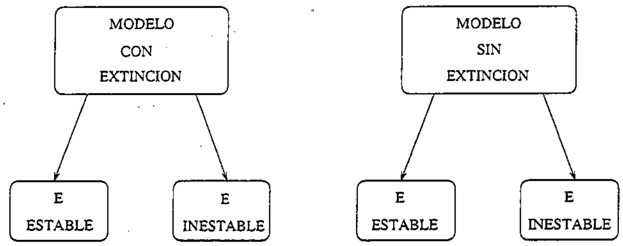

Figura 2.4: Posibles casos de la dinámica del sistema al comparar Y_{max} con X^*.

- **CASO I** : Modelo con extinción y E repulsor o inestable.

  La dinámica que obtenemos en este caso está dada de la siguiente forma

  - Existe un conjunto $A \in [m, 1]$, tal que la órbita de cualquier $x \in A$ tiende a la extinción.
  - En el complemento de A [7], donde la dinámica puede ser muy diversa, podemos tener órbitas periódicas, donde algunas de ellas pueden ser estables.

  Observación 1 En el caso de que las órbitas periódicas sean repulsoras, tendremos que la población tenderá prácticamente a la extinción.

  Observación 2 Un punto muy importante a aclarar consiste en lo siguiente: Matemáticamente podemos mostrar que existe $A \subset [0, 1]$ tal que toda población en ese conjunto tiende a la extinción. En la realidad obtenemos que el fenómeno de extinción es algo relativo, ya que al presentarse matemáticamete no se asegura el tiempo en el que se hace presente. Es decir este proceso puede llevarnos dos o tres generaciones hasta algunas de orden mucho mayor. Es decir, que el fenómeno de extinción ocurra en periodos de tiempo muy grandes, puede implicarnos para efectos prácticos que no sea observable.

- **CASO II** : Modelo con extinción y E atractor.

  En este caso se tiene que la dinámica del número de individuos de la población, tiene los siguientes comportamientos simultáneos

  1. Un conjunto $A \subset [m, 1]$, tal que cualquier órbita de $x \in A$ tiende a la extinción.

[7] Que es no vacío, ya que al menos m y X^* están.

2. Un conjunto $B \subset [m, 1]$, tal que cualquier órbita de $x \in B$ converge al nivel de equilibrio E.

Esto implica que puede pasar lo siguiente. Si una especie cuyo número de individuos se encuentra estabilizada cerca del nivel E y llega a sufrir una alteración en su población, podría nunca más estabilizarse en el nivel E. Más aún, su desarrollo podría verse alterado al grado de poder extinguirse.

Ejemplo La función cuya gráfica está dada por (2.5). Aquí se puede ver que la órbita de x_2 se estabiliza cerca de E, mientras que la órbita de x_1 tiende a 0.

Cabe mencionar que se puede tener el siguiente subcaso. En el complemento de $(A \cup B) \cap [m, 1]$ que es no vacío [8], podemos tener existencia de órbitas periódicas, donde algunas de ellas pueden ser estables.

Observación La existencia de órbitas periódicas, juegan un papel importante solamente cuando son atractoras, ya que en la naturaleza los comportamientos visiblemente periódicos no necesariamente lo son desde el punto de vista matemático. Lo que en general estaremos observando será una órbita periódica estable. Esto significa que una órbita periódica estable nos permite hacer observable los comportamientos periódicos.

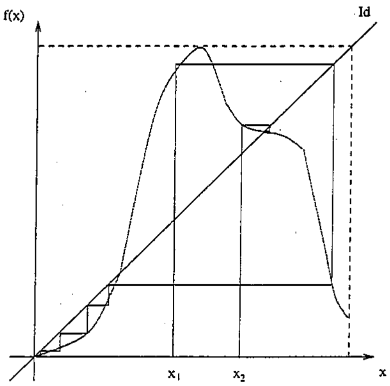

Figura 2.5: Extinción y E atractor.

Un comentario adicional es el hecho de que una especie regida por este modelo puede tener problemas si se expone a cambios repentinos y bruscos por parte del medio o de otra especie.

- **CASO III :** Modelo sin extinción y E atractor.

  Este caso puede presentar dinámicas como las siguientes.

  Que E sea un atractor global para $(m, 1]$. Este es el caso más sencillo en cuanto a dinámica se refiere. Si una población cumple con este caso en especial, nos indicará

[8] Al menos m y X^* están.

que la población tenderá a estabilizarse en el nivel E, sin presentarse el fenómeno de extinción. De hecho, aunque la población sufra alteraciones bruscas(provocadas de forma repentina), podrá recuperarse y volverse a estabilizar cerca del nivel de equilibrio E.

Nota Algo que podemos mencionar en este momento, es que aunque se converja al nivel E, la convergencia puede variar en cuanto a rapidez se refiere.

En caso de no ser E un atractor global, existe un conjunto B(de los puntos que no convergen a E) tal que la dinámica en él puede tener distintos comportamientos y ser muy complicada.

Por ejemplo, podemos tener órbitas periódicas, de las cuales algunas sean estables y por tanto, algunas de las órbitas de $x \in B$ pueden converger a E, otras converger a una órbita periódica o tener otro comportamiento.

- **CASO IV :** Modelo sin extinción y E repulsor o inestable.

  En este caso, lo que se tiene son distintas dinámicas para la población, de las cuales damos algunas de las más importantes.

  1. Presencia de órbitas periódicas. En este caso, si alguna de las órbitas es estable, tendríamos un comportamiento "predecible" para ciertos rangos de la población.
  2. Comportamiento caótico.

  De estos 2 casos nos interesará más el comportamiento caótico de la cantidad de individuos en el ecosistema, ya que tendrá repercusiones de más relevancia para nuestros propósitos.
  Una población con esta dinámica (caótica), tiene un presencia impredecible en el ecosistema y por tanto no se estabilizará en ningún estado en particular, para tiempos muy grandes. Esto nos dice que si el número de individuos de cierta especie (1) se rije de forma caótica, entonces cualquier otra especie (2) predadora de (1), no puede atenerse a ella para subsistir.

  En el caso de las órbitas periódicas estables, si la órbita estable es de periodo 2 ó 3, entonces tenemos un comportamiento completamente predecible. En caso de que la órbita estable sea de un periodo mucho mayor, tendríamos que aunque es un patrón conocido, ya no podríamos decir que es predecible en el ecosistema. Para efectos prácticos podríamos pensar que su dinámica es caótica.

Observación Hay algo que debemos notar en los 3 primeros casos. Esto es, la posible aparición de órbitas periódicas inestables. En caso de existir, son fenómenos que en la naturaleza no son observables y por tanto no los consideraremos en este trabajo.

Ya vistos estos comportamientos debidos a relaciones entre Y_{max} y X^*, pasemos al tercer caso

¿Qué pasa cuando no existe X^*?

Para apreciar mejor este comportamiento, veamos la figura (2.6). Vemos que $f(1) > m$ y por lo tanto X^* no existe. Esto significa que por más grande que sea la población, no se tendrá una pérdida suficientemente considerable de individuos, a tal grado, que la población quede debajo del umbral de extinción. En este caso no podemos hablar de extinción de una especie por sobrepoblación. Por tanto, no profundizaremos más en este tema, ya que no es el objetivo de este trabajo.

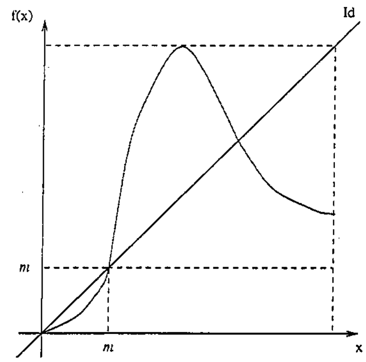

Figura 2.6: Aquí no es posible hablar de extinción por sobrepoblación.

Después de ver los comportamientos principales, procederemos a estudiar 3 familias de modelos que consisten en

1. Modelo con Rectas.
2. Modelo Cuadrático.
3. Modelo Cúbico.

los cuales son estudiados por simplicidad y fácil manipulación algebraica. En base a ellos veremos qué comportamientos vistos en los párrafos anteriores pueden ser representados por ellos. Analizaremos los parámetros que nos dan estos comportamientos y finalmente procederemos a dar una posible interpretación.

2.4 Modelo con Rectas

El modelo que a continuación se presentará consta de la unión de segmentos de recta dados por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0, \frac{(a-1)m}{a}] \\ ax - (a-1)m & si \quad x \in [\frac{(a-1)m}{a}, \frac{(a-1)m+b}{a+b}] \\ b - bx & si \quad x \in [\frac{(a-1)m+b}{a+b}, 1] \end{cases} \tag{2.3}$$

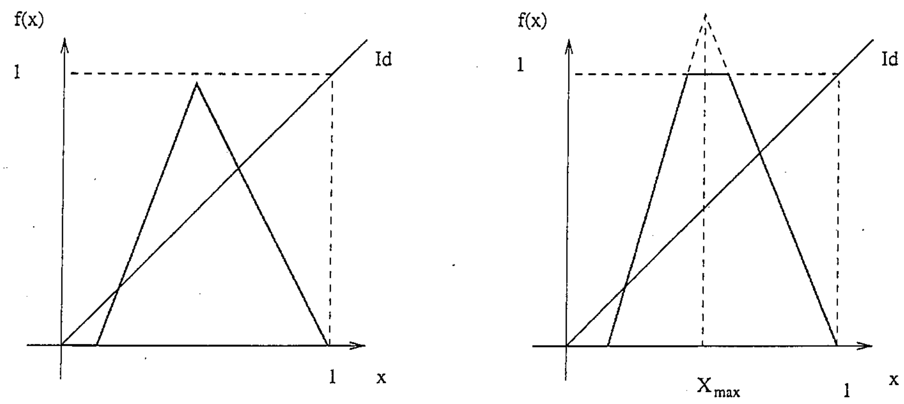

Figura 2.7: Elementos de la familia de funciones.

donde $a > 1 \quad b > \frac{m}{1-m}$

Notemos que los parámetros a y b están restingidos a tomar ciertos valores. Esto es porque pedimos que se cumplan las condiciones vistas en la sección anterior. Es decir, que nos represente la dinámica requerida.

Así, por ejemplo, las condiciones que nos dan la existencia de m son las siguientes.

- $a > 1$, ya que si $a < 1$, entonces la pendiente de la recta es menor que 1. Esto implica que $x > f(x)$ si $x > m$, contradiciendo (2.2). Si $a = 1$, entonces todos los puntos son fijos, lo cual no nos interesa.

- La otra condición necesaria para la existencia de m, es $b - bm > m$. O bien $b > \frac{m}{1-m}$ (Fig. 2.8).

Observación 1 El punto fijo E existe ya que se cumple con lo visto en la construcción general del modelo.

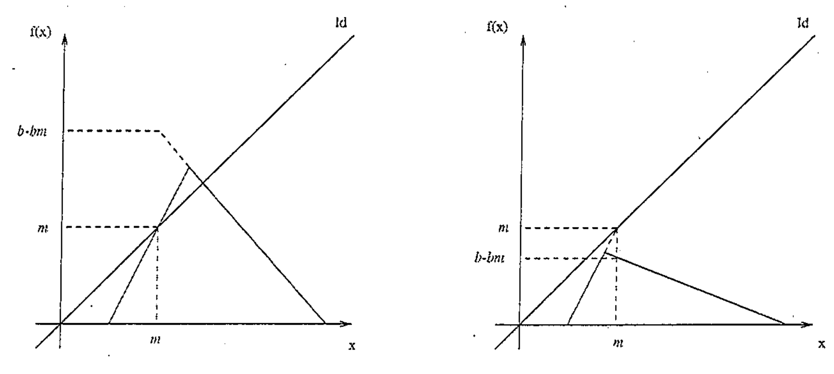

Figura 2.8: Claramente $b - bm > m$ es fundamental pera la existencia de m.

Observación 2 Notemos que m tiene naturaleza repulsora del hecho que a es mayor que 1.

Como ya vimos, estas condiciones son necesarias y suficientes para nuestros propósitos. Por lo tanto las condiciones requeridas para que la función represente la dinámica a estudiar son:

$$m \in (0,1) \qquad b \in \left(\frac{m}{1-m}, \infty\right) \qquad a \in (1,\infty) \tag{2.4}$$

2.4.1 Análisis del modelo.

Ya que hemos obtenido la región que nos representa al problema, procederemos a ver cuáles de los comportamientos presentados en la sección anterior, se cumplen. Así mismo daremos regiones sobre los parámetros involucrados, de tal forma que hagan posibles dichos comportamientos.

Observación Notemos que la función consta de 3 parámetros: a, b y m. Para encontrar las regiones de interés, procederemos de la siguiente manera. Fijamos la variable m. En base a ella encontramos la región correspondiente de b. Y finalmente hacemos lo propio con a.

Para empezar con el análisis, se dan de forma explícita los valores de las constantes Y_{max}, X^* y E.

$$Y_{max} = \frac{b(m - a(m-1))}{b+a} \qquad X^* = \frac{b-m}{b}$$

mientras que

$$E = \frac{b}{1+b}$$

Veamos ahora, la estabilidad de E.

- Para que E sea atractor pedimos que $b \in (0,1)$, es decir, la recta $y = b - bx$ debe tener pendiente menor que 1 en valor absoluto.
  Observación De la región de definición del modelo (2.4) concluimos que $b \in (\frac{m}{1-m}, 1)$ es la región donde E es atractor.
  Nota De la figura (2.9) se ve que la región que nos permite que $\frac{m}{1-m}$ sea no vacío es tomando $m \in (0, .5)$.
  Por lo tanto la región para que E sea atractor es
  $$m \in (0,.5) \qquad b \in \left(\frac{m}{1-m}, \infty\right) \qquad a \in (1,\infty)$$
- Para que E sea repulsor entonces se pide que $b > 1$.

Ahora, si pedimos que $Y_{max} > X^*$ obtenemos que la condición que hace que se cumpla es

$$a(b-1) > b \tag{2.5}$$

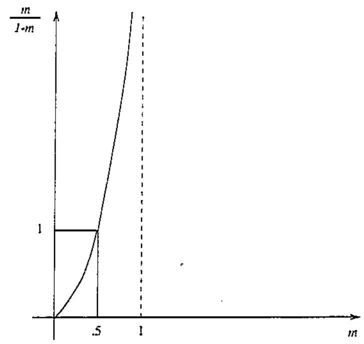

Figura 2.9: $\frac{m}{1-m}$ es menor que 1 si $m \in (0, .5)$.

mientras que $Y_{max} \leqslant X^*$ se cumple con la condición

$$a(b-1) \leqslant b. \tag{2.6}$$

Con las condiciones de estabilidad de E y del fenómeno de extinción, analizaremos los 4 casos descritos en un principio.

CASO I : Modelo con extinción y E repulsor o inestable.

Sea $m \in (0,1)$ dado. Como queremos que E sea inestable entonces pedimos que $b > 1$. Mientras que al pedir el fenómeno de extinción, necesitamos que $Y_{max} > X^*$. De (2.5) y del hecho que b sea mayor que 1 obtenemos que las condiciones que se necesitan son:

$$m \in (0,1) \qquad b \in (1, \infty) \qquad a \in \left(\frac{b}{b-1}, \infty\right)$$

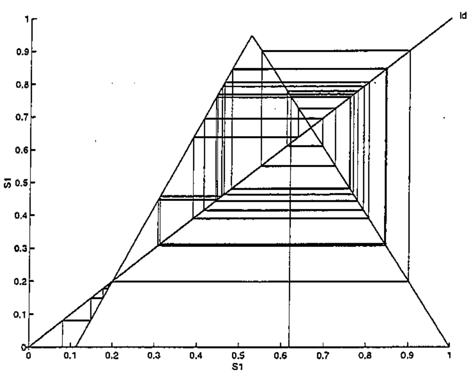

Figura 2.10: Extinción y E inestable.

CASO II : Modelo que represente extinción y E atractor.

Sea $m \in (0, .5)$ dado. Para que E sea atractor tenemos que $b \in (\frac{m}{1-m}, 1)$. Para tener extinción, pedimos que $Y_{max} > X^*$ y por tanto de (2.5) tenemos que

$$m \in (0, .5) \qquad b \in \left(\frac{m}{1-m}, 1\right) \qquad a \in \left(1, \frac{b}{b-1}\right)$$

Ahora, como $b \in (0, 1)$, obtenemos que $\frac{b}{b-1} < 0$. y por lo tanto $\left(1, \frac{b}{b-1}\right)$ es vacío.

Por lo tanto concluímos que este caso no puede representarse con elementos de esta familia de modelos.

Ya que hemos cubierto el caso de $Y_{max} > X^*$ ahora procederemos a estudiar la otra desigualdad.

CASO III : Modelo que represente no extinción y E atractor.

Para esto pedimos que $Y_{max} \leqslant X^*$ y que $b \in (\frac{m}{1-m}, 1)$.
De (2.6), obtenemos la condición

$$a \geqslant \frac{b}{b-1}$$

como $b < 1$, $\frac{b}{b-1} < 0$. Por tanto, tenemos que dado $m \in (0, .5)$ se pide que

$$b \in \left(\frac{m}{1-m}, 1\right) \qquad \text{y} \qquad a > 1$$

Y por tanto, los niveles de la población se van a mantener muy cercanos al nivel E (Figura 2.11).

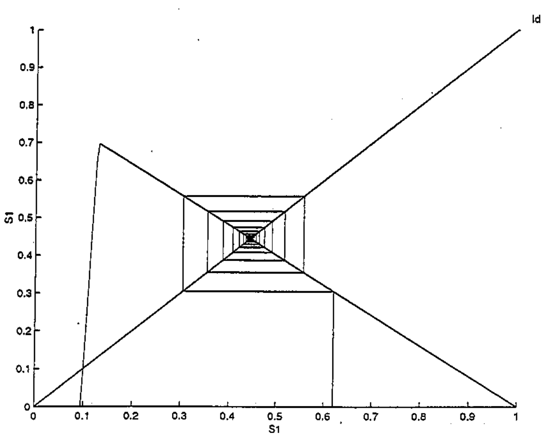

Figura 2.11: Sin extinción y E atractór.

CASO IV : Modelo sin extinción y E repulsor.

Primeramente, para que no haya extinción hay que pedir que $Y_{max} \leqslant X^*$. Mientras que para que sea repulsor se pide que $b \in (1, \infty)$.

Para que se presenten los comportamientos de E repulsor y extinción por sobrepoblación, se obtuvieron las siguientes condiciones sobre los parámetros

$$m \in (0,1), \qquad b \in (1,\infty) \qquad \text{y} \qquad a \in \left(1, \frac{b}{b-1}\right)$$

Gráficamente tenemos una dinámica como la de la figura (2.12)

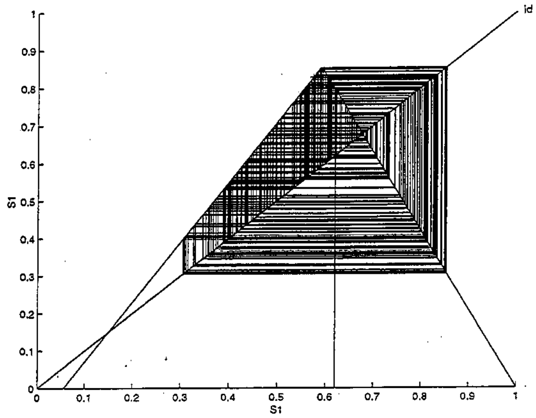

Figura 2.12: Sin extinción y E inestable.

2.4.2 Estudio de la dinámica (E inestable)

Analizados los casos anteriores, veremos cuál es la dinámica que va a seguir un estado que se gobierne mediante un modelo del caso IV. Así mismo veremos cuál es su relación con la dinámica del caso I.

Lo que se mostrará enseguida es que dicha dinámica, (Caso IV) es caótica, es decir, que la población tiene un comportamiento impredecible. La manera en que mostraremos la existencia de tal comportamiento, se basa en el teorema de caos debido a Li-Yorke [1] enunciado en el capítulo 1; esto es, mostraremos la existencia de puntos periódicos de periodo 3, ya que nos implicarán comportamientos caóticos. Para mostrar la existencia de los puntos periódicos de periodo 3, daremos estos puntos de forma explícita y buscaremos condiciones para que estén bien definidos.

Definición 10 *Sea f un elemento de la familia definida por (2.3). Al conjunto de valores de x tales que $x \in [m, X_{max}]$ se le llamará R_1. Mientras que al de x tales que $x \in [X_{max}, X^*]$ se le llamará R_2. Véase figura (2.13).*

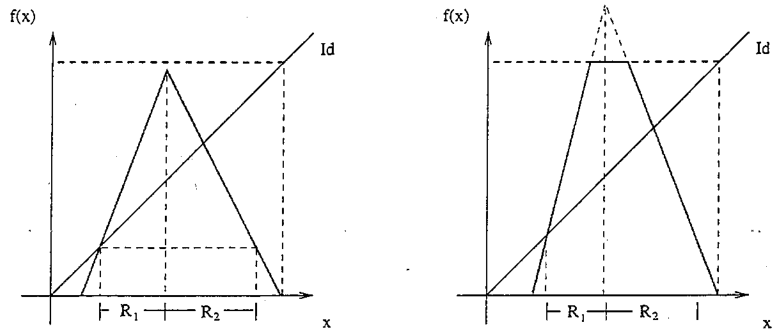

Figura 2.13: R_1 y R_2

Observación Notemos que tener el caso $Y_{max} < X^*$ nos implica lo siguiente: Si $X_0 \in [m, X^*]$, entonces $f^n(X_0) \notin [0, m) \cup (X^*, 1]$ para ningún $n \in \mathbb{N}$ ya que contradice el hecho de la no extinción. Entonces $f^n(X_0) \in [m, X^*]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Esto nos quiere decir que la dinámica se reduce a la región $R_1 \cup R_2$ solamente.

De aquí, vemos que se tienen las siguientes posibilidades para un punto de periodo 3.

$$p \in R_1, \qquad f(p) \in R_1, \qquad f^2(p) \in R_2, \qquad \text{y} \qquad f^3(p) = p \tag{2.7}$$

ó bien

$$q \in R_1, \qquad f(q) \in R_2, \qquad f^2(q) \in R_2, \qquad \text{y} \qquad f^3(q) = q \tag{2.8}$$

Específicamente, las condiciones (2.7) y (2.8) nos implican que p tiene que cumplir

$$m < p < X_{max}, \qquad f(p) < X_{max}, \qquad \text{y} \qquad X_{max} < f^2(p) < X^*. \tag{2.9}$$

Mientras que q debe cumplir con

$$m < q < X_{max}, \qquad X_{max} < f(q) < X^* \qquad \text{y} \qquad X_{max} < f^2(q) < X^* \tag{2.10}$$

Al resolver $f^3(X) = X$, en base a (2.7) y (2.8) vemos que se tienen 2 órbitas ajenas de puntos de periodo 3, que son generadas por cada uno de los puntos

$$p = \frac{b(a^2m - m + 1)}{a^2b + 1} \qquad\qquad q = \frac{b(b(1 - m + am) - 1)}{ab^2 - 1}$$

De (2.9) y de (2.10) obtenemos condiciones sobre los parámetros a y b, que nos aseguran que las órbitas periódicas están bien definidas. Estas condiciones son

$$m \in (0,1) \qquad\qquad b > 1 \begin{cases} b \in (1,2) & a \in \left(\frac{1}{b-1}, \infty\right) \\ b \in (2,\infty) & a \in (1,\infty) \end{cases}$$

Nota 1 En el caso de que $Y_{max} < 1$ esto se sigue del trabajo de Méndez Lango [3].

Nota 2 Del mismo artículo [3], vemos que si los parámetros se encuentran en $b \in (1,2)$, $a \in \left(1, \frac{1}{b-1}\right]$ se tiene comportamiento caótico.

Así, llegamos a que las condiciones para obtener un comportamiento caótico son

$$m \in (0,1), \qquad b > 1 \quad \text{y} \quad a > 1 \tag{2.11}$$

Esto nos dice que en cuanto tengamos que E sea inestable, el comportamiento será caótico.

Observación Notemos que se tiene comportamiento caótico, independientemente de si se tiene extinción o no.

De esto, podemos concluir que existe una estrecha relación entre los casos I y IV. Vemos que la existencia de puntos periódicos de periodo 3 se da con valores de $a \in (k, \infty)$. Al tomar a lo suficientemente grande lo que obtenemos es $Y_{max} > X^*$ y existencia de periodo 3. Es decir tenemos extinción y al mismo tiempo un comportamiento caótico en el número de individuos del ecosistema. Esto lo podemos interpretar de la siguiente manera. Si el número de individuos de alguna población se comporta de forma caótica y $Y_{max} < X^*$, entonces la población es impredecible. Este factor de impredicibilidad la beneficia en el sentido de que para especies depredadoras les es prácticamente imposible depender de ella. El problema se presenta cuando aumentamos la tasa de natalidad (por ejemplo) y logramos que $Y_{max} > X^*$. Esto implica que la condición de impredicibilidad puede hacer que la especie se extinga.

En esta familia de modelos, obtenemos la existencia de un conjunto que es de Cantor ([2]). En el caso $Y_{max} > X^*$, matemáticamente se puede mostrar que todo tiende a la extinción exceptuando un conjunto de Cantor[9], lugar donde tenemos existencia de puntos periódicos.

El problema de estos puntos periódicos radica principalmente en la estructura del conjunto de Cantor, al ser este último totalmente disconexo. Este problema se refleja en la naturaleza de la siguiente forma: cualquier población regida por el caso 1 tiende irremediablemente a la extinción. El problema con las órbitas periódicas es que aunque matemáticamente existen, tienen probabilidad 0 de ocurrir.

Supongamos ahora que hay una especie 1 que se rige con este modelo (El caso IV) y que está interactuando con otra (especie 2). Supongamos también que la especie 1 puede manipular su parámetro a, mientras que la especie 2 puede modificar b. ¿Se puede mandar a la especie 1 a la extinción vía caos?¿ Puede la especie 1 impedirlo?.

Para poder responder a estas preguntas, consideremos los siguientes conjuntos

$$A_1 := \left\{ (m,b,a) \in \mathbb{R}^3 \mid m \in (0,1)\,, b > 1, a \in \left(1, \frac{b}{b-1}\right) \right\}$$

$$A_2 := \left\{ (m,b,a) \in \mathbb{R}^3 \mid m \in (0,1)\,, b > 1\,, a \in \left(\frac{b}{b-1}, \infty\right) \right\}$$

[9]Véase pag. 33-38 de Devaney ([2]).

Nota Sea f un elemento de la familia de funciones definida por (2.3). f se identifica biyectivamente con la terna (m, b, a).

De acuerdo a esta identificación, los conjuntos arriba definidos tienen sentido. En este caso

- A_1 es la región donde se asegura el comportamiento caótico pero sin extinción. Es decir cualquier función tal que $(m, b, a) \in A_1$, cumple con tener un comportamiento caótico, y no presenta el fenómeno de extinción.
- A_2 es la región donde tenemos extinción y comportamiento caótico.

Ya que hemos definido estos conjuntos procederemos a mostrar las siguientes proposiciones.

Proposición 6 *Dado un sistema que cumple* $(m, b, a) \in A_1$. *Entonces existe* $\delta \in \mathbb{R}$ *tal que* $(m, b + \delta, a) \in A_2$.

Demostración. Sean m_0, b_0, $a_0 \in \mathbb{R}$ tales que $(m_0, b_0, a_0) \in A_1$. Entonces $a \in \left(1, \frac{b_0}{b_0-1}\right)$ Ahora

$$\frac{d}{db}\left(\frac{b}{b-1}\right) = \frac{-1}{(b-1)^2} < 0$$

por lo tanto $\frac{b}{b-1}$ es estrictamente decreciente. Ahora, como $\lim_{b\to\infty} \frac{b}{b-1} = 1$, y $\frac{b}{b-1}$ es continua en $(1, \infty)$, sabemos que existe $b^* \in (1, \infty)$ tal que

$$a_0 \in \left(1, \frac{b_0}{b_0 - 1}\right) \qquad a_0 \notin \left(1, \frac{b^*}{b^* - 1}\right) \qquad \text{y por tanto} \qquad a_0 \in \left(\frac{b^*}{b^* - 1}, \infty\right)$$

De aquí se sigue el resultado, con δ igual a $b^* - b_0$ ∎

Proposición 7 *Dado un sistema que cumple* $(m, b, a) \in A_2$. *Entonces existe* $\delta \in \mathbb{R}$ *tal que* $(m, b, a - \delta) \in A_1$

Demostración. Notemos primero lo siguiente: $X^* \equiv X^*(m, b)$ y $Y_{max} \equiv Y_{max}(m, b, a)$. Así si fijamos m y b y movemos a, Y_{max} cambiará mientras que X^* no.
Sean m_0, b_0, $a_0 \in \mathbb{R}$ tales que $(m_0, b_0, a_0) \in A_2$. Entonces

$$b_0 > 1 \qquad a_0 \in \left(\frac{b_0}{b_0 - 1}, \infty\right)$$

De aquí sabemos que existe $a^* < a_0$ tal que

$$a^* \in \left(1, \frac{b_0}{b_0 - 1}\right)$$

dependiendo del valor de b. Tomando $\delta \in (a_0 - \frac{b_0}{b_0-1}, a_0 - 1)$, se sigue el resultado. ∎

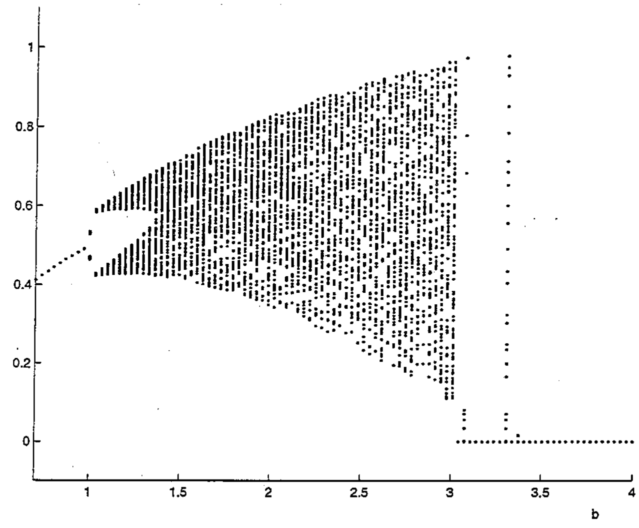

Figura 2.14: Comportamientos de la dinámica, variando el parámetro b.

Estas dos proposiciones pueden interpretarse como sigue: Si tenemos cierta especie (especie 1), cuya dinámica puede ser modelada por una función $(m, b, a) \in A_1$, entonces la proposición (6) muestra que bajo perturbaciones, que podrían ser ocasionadas por ejemplo por la presencia de otra especie, su dinámica puede cambiar a la región 2, donde se presenta el fenómeno de extinción. Pero recíprocamente, si la dinámica ya está en A_2, la proposición (7) muestra que bajo perturbaciones(que podrían por ejemplo ser ajustes en el comportamiento de la especie 1), se puede revertir el proceso y regresar a A_1.

Para concluir con el análisis de las dinámicas del modelo con rectas, veamos la figura (2.14). Esta figura, nos dice hacia dónde tienden las órbitas, de una condición inicial dada, dado un valor de b fijo.

Analíticamente se mostró que la dinámica es caótica al tomar valores de b mayores que 1. En la gráfica podemos observar lo siguiente

- Si $b > 2$, tenemos que se presenta el fenómeno de extinción.
- Si $b < 1$, tenemos que E es atractor.
- Si $1 < b < 2$, tenemos comportamiento caótico sin extinción.

Observación Notemos que en el caso que $b \in (1, 1.2)$ tenemos caos. El problema es que la región donde la población lleva a cabo su dinámica es muy restringida. Podemos pensar que en la práctica se tiene un comportamiento periódico de periodo 2.

2.4.3 ¿Qué significado tienen a y b?

Para poder dar una interpretación de lo que los parámetros significan, notemos primero que $a > 1$. Si la cantidad de individuos de la población es mayor que m y menor de E, entonces la población aumenta al menos en la siguiente generación. Es por esto que podemos pensar que a es la tasa de natalidad de la especie.

Ahora notemos que en la región R_1 la dinámica se rige por la recta

$$y = ax - (a-1)m$$

Entonces el valor $k = (a-1)m$, es una constante que no depende de la cantidad de individuos presentes en un determinado tiempo, pero sí de la tasa de crecimiento. Esta constante obviamente representa pérdida de elementos en la población y si la cantida de individuos es menor m, no importa cuál sea la tasa de natalidad, k pesará lo suficiente como para que se extinga la especie.

Observación Esto nos dice que el aumentar la tasa de natalidad, aunque puede ser benéfico a nivel individual, puede ser detrimental para la especie, como comentábamos en la introducción.

Para ver una posible interpretación del parámetro b, notemos los siguiente.

$$E = \frac{b}{b+1} \qquad \text{y por lo tanto} \qquad \frac{dE}{db} = \frac{1}{(b+1)^2} > 0$$

Esto implica que conforme aumentemos el parámetro b, el valor de E aumenta. Esto se puede interpretarse al decir que conforme aumentemos b, la población alcanza niveles más altos antes de ser penalizada, y por tanto puede llegar a tener más presencia en el ecosistema. Notemos ahora lo siguiente. Sean (m, b_1, a) y (m, b_2, a) ternas que nos definen 2 funciones de la familia (2.12) tales que $b_1 > b_2$. De estas 2 funciones definimos el conjunto A como (Véase fig. 2.15)

$$\text{A} = [X_M, 1]$$

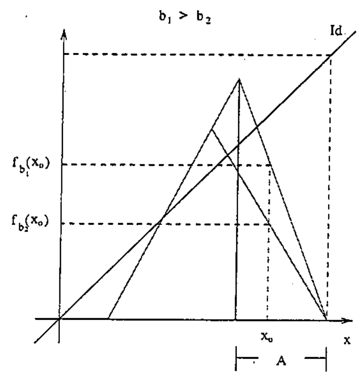

Figura 2.15: Valores de b mayores, dan menor penalización.

donde X_M está dado por

$$X_M = max\{X_{max}(b_1), X_{max}(b_2)\}$$

Si tomamos x_0 en A,[10] vemos que si el parámetro b es menor, la población se penaliza aún más (Figura 2.15).

Observación Visto desde esta perspectiva, b representa una tasa de penalización por exceso de población, donde por tasa entendemos a la fracción de individuos presentes en cierto tiempo respecto a la generación anterior.

De estos hechos anteriores, uno podría pensar que aumentar el parámetro b, es bueno para la presencia de la especie en el ecosistema. Pero no es cierto del todo como lo veremos enseguida.

En la región $[X_{max}, 1]$ la población se rige por $y = b - bx$, donde la pendiente de esta recta es precisamente $-b$. Al tomar valores en b cada vez mayores, lo que obtenemos es que la inclinación de la recta es cada vez más pronunciada, logrando así que la caída sea más significativa (figura 2.16). Entonces, aunque la cantidad de individuos de la población puede alcanzar niveles mayores antes de ser penalizada, cuando el nivel E es superado, el efecto de reducción de individuos es mucho mayor. Este efecto será llamado intensidad de penalización por exceso de población.

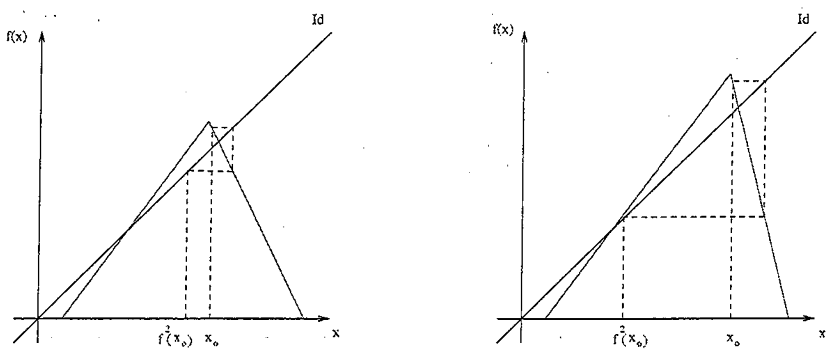

Figura 2.16: Otro efecto de b

Observación De esto, vemos que b puede controlar el efecto de la intensidad de penalización por exceso de población.

Por lo tanto podemos interpretar b de 2 formas distintas, de acuerdo a la perspectiva con la que se vea. Puede ser visto como una "tasa de penalización por exceso de población", así como una "medida de intensidad de penalización por sobrepasar el nivel de equilibrio" de la especie.

[10]Región donde el exceso de población no permite niveles mayores en ambos modelos.

Observación Notemos que el efecto de "tasa de penalización por exceso de población" es un efecto puntual. Es decir se define a partir de un punto x_0 y su comportamiento una generación después. Mientras que el efecto "medida de intensidad de penalización por sobrepoblación" depende principalmente del nivel de equilibrio E y su efecto es observable dos generaciones después.

Otro detalle que podemos observar es que $\frac{\partial Y_{max}}{\partial b} > 0$. Más aún, si a está dada con anterioridad, sabemos que existe una única b_0 tal que $Y_{max} = X^*$. De lo que se concluye que si tenemos a fijo, podemos aumentar b de manera suficiente tal que tengamos extinción. Lo que sucede, es que la pendiente disminuyó a tal grado que poblaciones muy altas son mandadas a niveles bajísimos, de tal manera que la población ya no se puede recuperar. Por estas razones, valores grandes de b no son convenientes para la especie.

De este análisis podemos concluir lo siguiente.
El aumentar la tasa de natalidad a una especie, puede ser visto como benéfico a nivel individuo. Pero si vemos este fenómeno a nivel poblacional, se observa que puede tener repercusiones fatales para la especie.

2.5 Modelo cuadrático

En esta sección estudiaremos el mismo fenómeno utilizando otra familia de funciones. Estas son las cuadráticas; en particular trabajaremos con parábolas. Para esto, proponemos una familia de funciones conformadas por la unión de una parábola, con un segmento de recta, dada por

$$p(x) = \begin{cases} \frac{m(1-x)(x-a)}{(1-m)(m-a)} & si \quad x \in (a,1) \\ 0 & si \quad x \in (0,a] \end{cases} \tag{2.12}$$

con

$$m \in (0,1) \qquad \text{y} \qquad a \in (m^2, m) \tag{2.13}$$

región de los parámetros donde tiene sentido la función para el problema. Un ejemplo de estas funciones está dada en la figura (2.17).

Al igual que en el modelo anterior, mencionaremos qué factores son los que influyen para considerar la región (2.13).

1. Primero, como m es un punto fijo y a es el punto de intersección de la parábola con el eje x, se necesita que a sea menor que m.
2. Como E está dado por
$$E = \frac{a}{m} \tag{2.14}$$
necesitamos asegurarnos que están bien definidos, esto es que no se intercambien los papeles entre m y $\frac{a}{m}$. Para esto, pedimos que $m < \frac{a}{m}$. Esto nos implica que $a > m^2$.

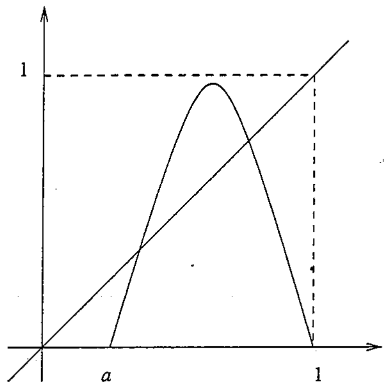

Figura 2.17: Ejemplo de la familia.

3. Por último pedimos que m sea repulsor. Para que esto suceda, pedimos que $|p'(m)|$ sea mayor que 1. Esta condición nos implica $a > m^2$, la cual se cumple del punto 2. Esto nos dice que al existir el punto fijo m, automáticamente tendrá naturaleza repulsora.

Por lo tanto (2.13) es el dominio que necesitamos para representar nuestro modelo. Una pregunta que surge al tener funciones que representan el modelo es: ¿Se podría haber modelado nuestro problema, utilizando solamente una parábola?

La respuesta es no. Para ver esto mostraremos la siguiente proposición.

Proposición 8 *No existen a, b, $c \in \mathbb{R}$ tales que $p(x) = ax^2+bx+c$ cumpla simultaneamente las siguientes condiciones.*

$$p(0) = 0, \qquad p(1) = 0, \qquad 0 \leq p'(0) < 1, \qquad p'(m) > 1$$

$$y \qquad p(m) = m \quad con \quad m \in (0,1)$$

Demostración.

Notemos que $p(0) = 0$, $p(1) = 0$. Esto implica que $p(x)$ es de la forma

$$p(x) = \lambda x(1-x) \qquad \text{con} \qquad \lambda > 0$$

La condición $p(m) = m$ implica que $m = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

Ahora para que $m \in (0,1)$ implica que $\lambda \in (1, \infty)$.

Por último, tenemos $p'(x) = \lambda(1-2x)$. Entonces $p'(0) = \lambda$. De la tercer condición obtenemos que $\lambda < 1$. De aquí, obtenemos que este sistema no tiene solución ya que pedíamos que $\lambda \in (1, \infty)$. Y por lo tanto queda demostrada la proposición. ■

2.5.1 Análisis del modelo.

Ya que hemos restringido el dominio, procederemos a checar las condiciones base para realizar el análisis correspondiente

Las condiciones base a analizar son:

1. E repulsor (atractor).

2. $Y_{max} > (\leqslant) X^*$.

1. Veamos cuándo E es un punto fijo repulsor y cuándo es atractor.
Para que sea repulsor pedimos la condición $\left|p'(\frac{a}{m})\right| > 1$, mientras que para que sea atractor que sea menor que 1.
Estas condiciones nos implican que

   - E es atractor si
   $$a \in \left(m^2, \frac{m(2-m)}{3-2m}\right) \tag{2.15}$$
   (Región III de la figura (2.18)).
   - E es repulsor si
   $$a \in \left(\frac{m(2-m)}{3-2m}, m\right) \tag{2.16}$$
   donde m está entre 0 y 1. (Regiones I y II de la figura (2.18)).

2. Ahora veamos cuando $Y_{max} > (\leqslant) X^*$. Es decir cuándo hay o no, extinción. Es fácil ver que Y_{max} y X^* están dados por:
$$Y_{max} = \frac{m(a-1)^2}{4(1-m)(m-a)} \qquad X^* = a+1-m$$
Lo único que hay que ver es cuándo
$$\frac{m(a-1)^2}{4(1-m)(m-a)} - (a+1-m) > (<) 0$$
Después de hacer uso de herramienta algebraica obtenemos que dado $m \in (0,1)$

   - Se tiene extinción si
   $$a \in \left(\frac{m(2m-3)}{3m-4}, m\right) \tag{2.17}$$
   (Región I de a figura (2.18)).
   - No tenemos extinción si
   $$a \in \left(m^2, \frac{m(2m-3)}{3m-4}\right] \tag{2.18}$$
   (Región II y III de (2.18)).

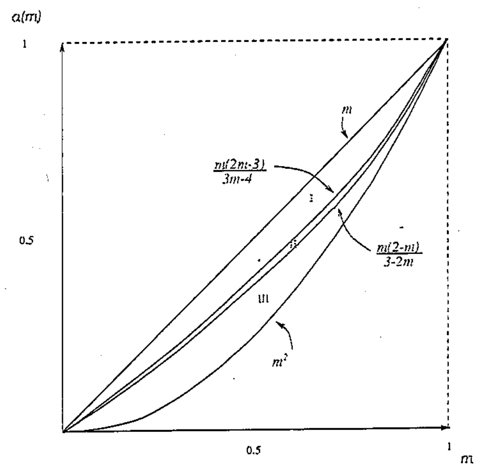

Figura 2.18: Región de los posibles valores de a dado m.

el número $\frac{m(2m-3)}{3m-4}$, es la frontera entre la existencia de extinción y la no extinción de la especie por efectos de sobrepoblación.

A continuación damos 3 proposiciones que nos aseguran que los conjuntos (2.15), (2.16), (2.17) y (2.18), son no vacíos.[11]

Proposición 9 *Sea $m \in (0,1)$ dado. Entonces se cumple*

$$\frac{m(2m-3)}{3m-4} > \frac{m(2-m)}{3-2m}$$

Proposición 10 *Sea $m \in (0,1)$ dado. Entonces*

$$\frac{m(2m-3)}{3m-4} < m$$

Proposición 11 *Sea $m \in (0,1)$ dado. Entonces*

$$m^2 < \frac{m(2-m)}{3-2m}$$

Ya obtenidas estas condiciones base procederemos al análisis de los casos vistos en los modelos de rectas.

CASO I : Modelo con extinción y E inestable.
Sea $m \in (0,1)$. Para tener extinción pedimos $Y_{max} > X^*$. Esto se logra mediante la condición

$$a \in \left(\frac{m(2m-3)}{3m-4}, m\right),$$

[11]Las demostraciones se encuentran en el apéndice.

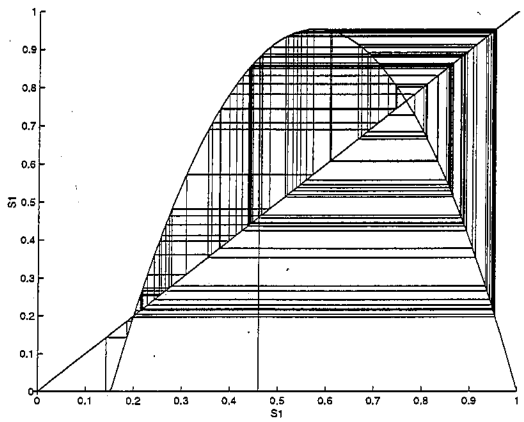

Figura 2.19: Extinción y E repulsor.

mientras que E inestable implica

$$a \in \left(\frac{m(2-m)}{3-2m}, m \right).$$

Intersectando estos conjuntos obtenemos que la región para que haya extinción y E sea repulsor es

$$a \in \left(\frac{m(2m-3)}{3m-4}, m \right)$$

De la proposición (9) este conjunto es no vacío. La región (I) de la figura (2.18) es la región correspondiente de a dado m, tal que se da este comportamiento.

CASO II Modelo que presente extinción y E atractor.

Para este caso, nos volvemos a referir a la proposición (9). Notemos que $a \in \left(\frac{m(2m-3)}{3m-4}, \infty\right)$ nos dice que hay extinción, mientras que $a \in \left(m^2, \frac{m(2-m)}{3-2m}\right)$ nos da E atractor. De la proposición se sigue que el conjunto intersección es vacío. Lo que se concluye es que en esta familia de modelos no podemos tener E atractor y extinción de manera simultanea.

Observación De hecho se puede ver lo siguiente. Si E es atractor (que por ende no hay extinción), al aumentar el parámetro a vemos que E se convierte en repulsor (pasamos de la región III a la región II en (2.18)). Si el parámetro a es aumentado lo suficiente, obtendremos que E sigue siendo repulsor pero ahora si se tendrá extinción (pasamos de la región II a la región I en (2.18)).

CASO III : Modelo que represente la no extinción y E sea un punto fijo atractor.

Este caso es directo de la condición de E atractor y de la proposición (9). Por lo tanto la condición es

$$a \in \left(m^2, \frac{m(2-m)}{3-2m}\right)$$

De la proposición (11), este conjunto es no vacío. Por lo tanto, este comportamiento sí se puede modelar con esta familia de funciones.

CASO IV : Modelo sin extinción y E repulsor.

Es muy fácil ver que la región que nos cumple estas condiciones es

$$m \in (0,1) \qquad a \in \left(\frac{m(2-m)}{3-2m}, \frac{m(2m-3)}{3m-4}\right]$$

De la proposición (9), vemos que este conjunto es no vacío. Por lo tanto, sí podemos modelar este caso con esta familia.

2.5.2 Estudio de la dinámica con E inestable

Ya que hemos analizado qué casos se pudieron modelar, procederemos a mostrar lo mismo que se mostró en el modelo de rectas. Esto es, queremos ver cuál es la dinámica que tiene el sistema cuando E es repulsor.

Recordando el modelo de rectas, teníamos que E repulsor implicaba comportamiento caótico. Este caso va a ser un poco diferente, ya que tendremos otros comportamientos además del caótico, como lo son órbitas periódicas de periodo k, las cuales pueden ser estables.

Observemos que la no extinción, implica $Y_{max} < X^*$. Como en el caso del modelo de rectas, la dinámica se restringe al intervalo $[m, X^*]$ (Ver fig. 2.20) y el problema se reduce a analizar el modelo cuadrático estudiado por R. Devaney [2].

Así, proponemos un cambio de variables para que sea más fácil de analizar. Sea p un elemento de (2.12), $Y = p(X)$ y $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ definidos como:

$$\tilde{X} = \frac{X-m}{a+1-2m} \qquad \tilde{Y} = \frac{Y-m}{a+1-2m}$$

Sustituyendo el valor de estas nuevas variables y restringiéndonos al intervalo $[m, X^*]$, obtenemos una nueva función $P : [0,1] \to [0,1]$, dada por

$$\tilde{Y} = P(\tilde{X}) = \frac{m\tilde{X}(1-\tilde{X})(a-2m+1)}{(a-m)(m-1)}$$

que tiene la forma

$$y = \tilde{\lambda}x(1-x) \tag{2.19}$$

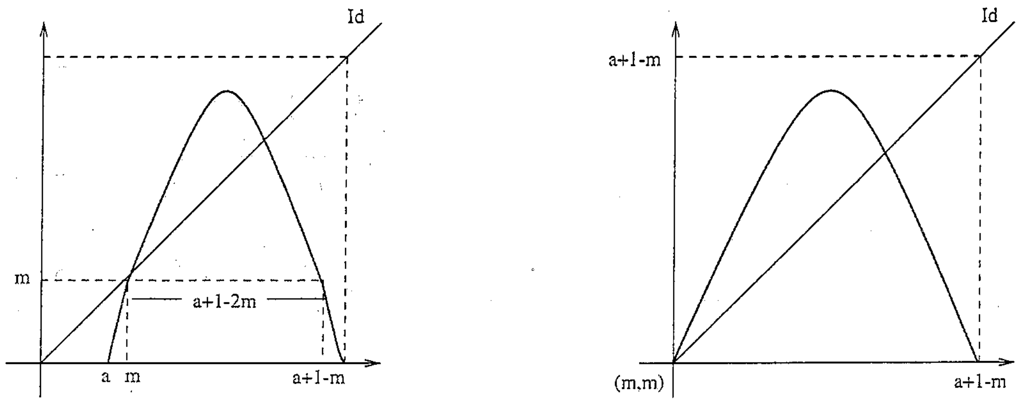

Figura 2.20: Restricción de la dinámica.

con $\tilde{\lambda}$ determinada por la relación

$$\tilde{\lambda} = \frac{m(a-2m+1)}{(a-m)(m-1)} \tag{2.20}$$

Ahora bien, la dinámica de la familia cuadrática (2.19) es conocida para los distintos valores de $\tilde{\lambda}$(Ver Devaney [2]). La siguiente proposición, da la relación con el problema sin escalar.

Proposición 12 *Sean p la función definida por (2.12) y P la función reescalada, donde*

$$Y = p(X) \qquad y \qquad \tilde{Y} = P(\tilde{X})$$

Sean Y_{max} y $\tilde{Y}_{max}$ sus respectivos valores máximos en los dominios propios de definición. Sean $m \in (0,1)$, x_0 y a_0 dados. Entonces, para estos valores de a_0 y m se cumple que

$$\tilde{Y}_{max} = \frac{Y_{max} - m}{a+1-2m}$$

$$p'(x_0) = P'\left(\frac{x_0 - m}{a+1-2m}\right)$$

Demostración. Son obvias del cambio de variable. ■

Como conocemos la dinámica $\tilde{Y} = P(\tilde{X})$ en base a $\tilde{\lambda}$, podemos fijarla en un valor de k.

$$k = \frac{m(a-2m+1)}{(a-m)(m-1)}$$

Tomando un valor de m fijo, vemos que se puede encontrar a tal que se cumpla la igualdad, y que está dada por

$$a = \frac{m(k(m-1)-2m+1)}{k(m-1)-m}$$

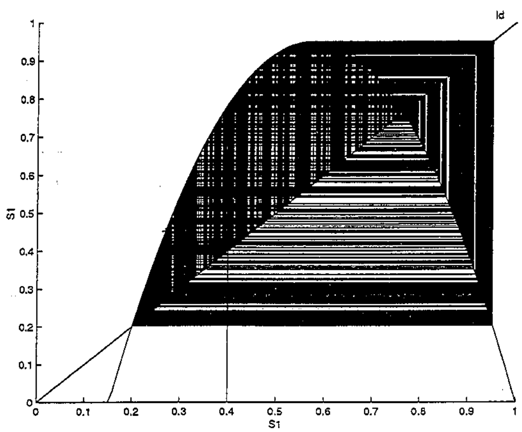

Figura 2.21: Comportamiento caótico.

De la proposición, tenemos que este valor de a nos sirve para conservar las propiedades del modelo dado por (p, λ).

Observación Del estudio realizado por Devaney ([2]), vemos que antes de tener extinción, ya se tiene comportamiento caótico, y éste se sigue presentando al aparecer el fenómeno de extinción.

Cabe mencionar que en la familia cuadrática, también se presenta el fenómeno del conjunto de Cantor, visto en los modelos con rectas.

Así mismo es muy sencillo ver que se da exactamente el mismo comportamiento y que siempre se tendrá extinción cuando Y_{max} es mayor que X^*.

Observación En este trabajo, no daremos las condiciones analíticas para la existencia de este tipo de órbitas (periódicas estables), sin embargo veremos algunos ejemplos gráficos para ilustrar su presencia en algunos modelos.

Antes de hacer el análisis de qué representa cada parámetro presentamos un diagrama (figura 2.22) el cual nos da los comportamientos para tiempos futuros muy grandes, con distintos valores de a y m fijo.

- Podemos ver que si tomamos los valores de $m = .1$ y $a = .075$ obtenemos un comportamiento caótico.

- Si $m = .1$ y $a = .079$ vemos que se presenta el caso de extinción.

- Si $m = .1$ y $a = .071$ vemos que se tiene E repulsor y existencia de órbita periódica de periodo 2, atractora.

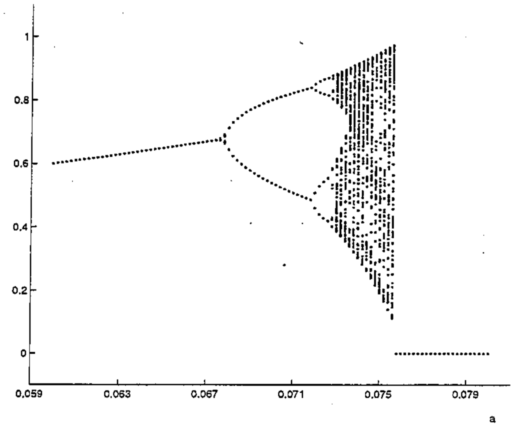

Figura 2.22: Diagrama de bifurcación con $m = .1$ y variando el parámetro a.

2.5.3 ¿Qué representa cada parámetro?

Para responder a esta pregunta lo que se hará será estudiar el modelo de dos formas distintas, las cuales explicamos a continuación.

Primera interpretación de los términos.

Proposición 13 *Sea $p(m, a, x)$ un elemento de (2.12). Sean m y x fijos. Entonces $p(m, a, x)$ es creciente respecto a a si $x > m$, y decreciente si $x > m$.*

Observación De aquí se sigue que Y_{max} es una función creciente respecto al parámetro a.

Proposición 14 *Sea $p(m, a, x)$ un elemento de (2.12). Sean E dado por (2.14) y λ dado por*

$$\lambda = \frac{m}{(1-m)(m-a)} \tag{2.21}$$

Entonces E y λ son funciones crecientes respecto a a. Más aún en la región $m \in (0, 1)$ y $a \in (m^2, m)$ el valor de λ es mayor que 1.

Ahora considérese la función dada por (2.12)

$$p(x) = \lambda(1-x)(x-a)$$

desarrollándola obtenemos

$$p(x) = \lambda((1+a)x - x^2 - a)$$

o bien

$$p(x) = \lambda(1+a)x - \lambda x^2 - \lambda a = Ax - Bx^2 - C \tag{2.22}$$

Notemos que $\lambda > 0$. El término Ax representa la manera en cómo se reproduciría la especie si no se penalizara por efectos posibles de sobrepoblación. Como $A > 1$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$, tendríamos que la población crecería sin límites. (Esto es porque el ecosistema es infinitamente grande, y se dan las condiciones para su desarrollo).

Observación Si pensamos en un espacio acotado, usamos el hecho de redefinir la función Ax. Esto nos dice es que al saturarse el ecosistema, así permanecera para todo tiempo futuro.

Ahora veamos el término $-Bx^2$. El signo negativo nos dice que es una reducción de individuos y nos describe la manera cómo se afectan los individuos al interactuar con miembros de la misma especie. Notemos que entre mayor es la población, mayor es el término Bx^2. Esto significa que entre más grande es la población, los individuos se empiezan a "estorbar" entre ellos mismos con mayor intensidad y por ende la población tiene más pérdidas.
Finalmente C, es una constante que está penalizando a la población y no depende del número de individuos presentes en algún tiempo.

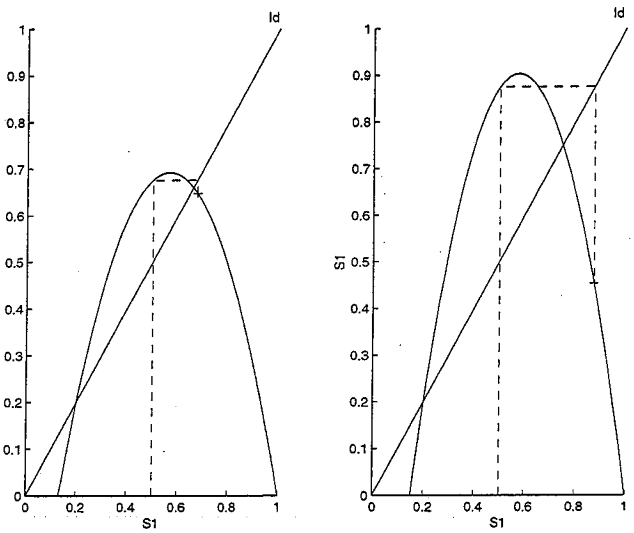

Figura 2.23: Un efecto del parámetro a.

¿Qué podemos decir de a? Podemos ver que al aumentar el parámetro a, tenemos que para tiempos grandes la presencia de individuos en el ecosistema, es mayor.(Y_{max} y E son cada vez mayores). Al mismo tiempo, de la figura (2.23) vemos que aunque el nivel de equilibrio E aumenta, la intensidad de mortandad por sobrepoblación también aumenta.

De hecho, de (2.22) tenemos que todos los coeficientes son crecientes respecto a a. Esto da como resultado, que todos los efectos se vean aumentados en alguna medida, teniendo así, efectos más pronunciados en algunas regiones que en otras.

- Si nos encontramos en la región $(m, 1)$, aumenta la tasa de natalidad teniendo más peso que los términos de penalización.
- Conforme se toma el valor de x mayor (haciendo tender x a 1), tenemos que el término de penalización por sobrepoblación termina imponiéndose.
- Si la población tiene una cantidad muy pequeña de individuos ($x \in (0, m)$), al aumentar a el término λx^2 no tiene mucho peso. En este caso el término λa, que no depende de la población presente, pesa cada vez más, obteniendo que debajo del nivel m se da el efecto de que la función es decreciente (respecto a a).

Así, el parámetro a influye en los comportamientos de tasa de natalidad, de tasa de mortalidad por sobrepoblación, así como el efecto de intensidad de penalización por sobrepoblación, y por tanto no tiene una interpretación única. Pero lo que se puede concluir es que para la especie no es bueno tomar valores muy grandes en su parámetro a, ya que aunque esto da más presencia en el ecosistema, termina por extinguirla.

Segunda interpretación de los términos.

Notemos que $p(x)$ se puede escribir como

$$p(x) = q(x)r(x)$$

donde $q(x)$ está dada por $\frac{1-x}{1-m}$, y $r(x)$ por $\frac{m(x-a)}{m-a}$. Así que, para facilitar la interpretación, las estudiaremos por separado.

1. Para esto notemos los siguientes puntos respecto a $q(x)$
   (a) Es mayor que 0.
   (b) Es decreciente respecto a x.
   (c) Cuando x tiende a 1, la función tiende a 0.
   (d) Para $x < m$, la función es mayor que 1.
   (e) Para $x > m$, la función es menor que 1.

   Lo primero que podemos pensar es que $q(x)$ es un factor de penalización por sobrepoblación en el ecosistema. Y vemos que este efecto aumenta conforme nos acercamos a la máxima capacidad del ecosistema.

2. Ahora para $r(x)$.
   (a) Es una función creciente respecto a x.
   (b) Si $x < a$, la función es negativa (Caso que no nos interesa).
   (c) Si $x \in (a, m)$ tenemos que la función es menor que m.
   (d) Si $x = m$, la función es igual a m.
   (e) Si $x > m$, la función es mayor que m.

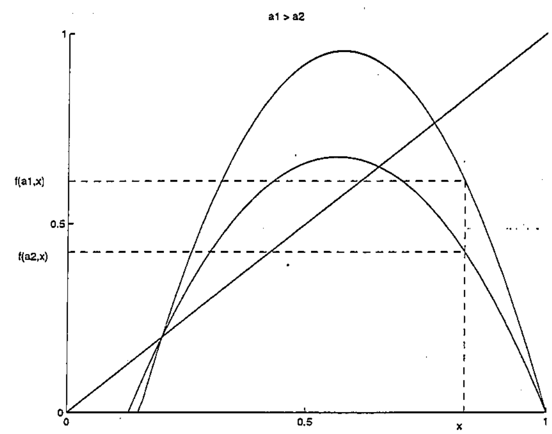

Figura 2.24: Un efecto de a: Reducción de la tasa de penalización.

Si pensamos en el sistema

$$x_{t+1} = r(x_t)$$

Tendremos que si la cantidad de individuos de la población se encuentra debajo del nivel a, entonces tenemos que la población desaparece en la siguiente generación. Si nos encontramos por debajo de m pero arriba de a, lo que obtenemos es que aunque la población existe en la siguiente generación, tiende a la extinción. Si nos encontramos por encima de m, vemos que la población crece tanto como se quiera.

Esto sucede porque no se consideran los efectos de sobrepoblación, dados por $q(x)$. Ahora bien, notemos que se tienen 2 factores que están actuando de forma simultánea en la población. Entonces al combinar dichos efectos, obtenemos fenómenos más acordes a la realidad.

En resumen, podemos decir que el parámetro a

- Controla el nivel de equilibrio del ecosistema E.[12]
- Controla la tasa de penalización por exceso de población.
- Controla la intensidad de penalización por exceso de población.
- Controla la tasa de natalidad de la especie.

Observación De la gráfica (2.22), vemos que aumentar el parámetro a, hace que el comportamiento caótico del número de individuos de la población provoque que ésta desaparezca del ecosistema.

De aquí vemos que valores de a "grandes" no son convenientes para la población, aunque sí lo sean a nivel de individuo.

[12]E es creciente respecto a a.

2.6 Modelo cúbico

La última familia de modelos que analizaremos en este trabajo consiste en polinomios de tercer grado. Esta familia está dada de la siguiente forma.

$$p(x) = \frac{x(1-x)(x+b)}{(1-m)(m+b)} \tag{2.23}$$

donde

$$m \in (0, .5) \qquad \text{y} \qquad b \in (0, 1-2m) \tag{2.24}$$

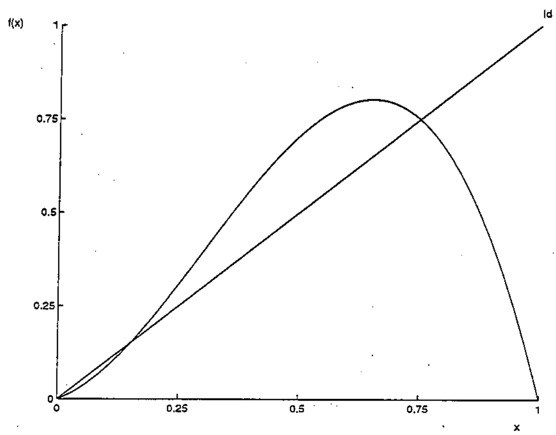

Figura 2.25: Ejemplo de la familia cúbica.

Estas funciones tienen gráficas como las que se presentan en la figura (2.25).

2.6.1 Región de definición.

En esta subsección, mencionaremos los factores que se consideraron para que los parámetros estuviesen en sus respectivas regiones. Consideramos, una familia de funciones de la forma

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

y pedimos que se cumplan las siguientes condiciones [13]

1. $p(0) = 0 \qquad\qquad p(1) = 0.$
2. $p'(0) < 1 \qquad\qquad p'(0) \geqslant 0.$
3. $p(m) = m.$

[13]Estas son las condiciones de funciones que cumplen con las hipótesis iniciales y del hecho que p es C^∞.

4. $p'(m) > 1$.

Del punto 1 tenemos que $p(x)$ debe ser de la forma

$$p(x) = \lambda x(x-1)(x-b) \qquad \text{con} \qquad \lambda \neq 0 \tag{2.25}$$

Como $p'(0) = \lambda b$, necesitamos que $\lambda b \in [0,1)$. Para que esta condición se cumpla, tenemos que

$$\lambda > 0 \quad \text{y} \quad b \geqslant 0 \qquad \text{o bien} \qquad \lambda < 0 \quad \text{y} \quad b \leqslant 0$$

Consideremos primeramente el caso en que $\lambda > 0$ y $b \geqslant 0$.

Proposición 15 *Sea p un polinomio de la forma (2.25). El caso $\lambda > 0$ y $b \geqslant 0$ no tiene sentido o no cumple con las condiciones pedidas en un principio.*

Demostración. Veamos primero el caso $b \in [0,1)$. El polinomio puede escribirse de la forma

$$p(x) = \lambda x(x-b)(x-1)$$

donde $\lambda > 0$. Si $x_0 \in (b,1)$ entonces $p(x_0) < 0$, obteniendo así poblaciones negativas. Lo cual es imposible.
Ahora veamos el caso $b \geqslant 1$.

$$p(x) = \lambda x(x-1)(x-b)$$

como pedimos $p(m) = m$, nos implica que λ tiene la forma

$$\lambda = \frac{1}{(m-1)(m-b)}$$

y por lo tanto

$$p(x) = \frac{1}{(m-1)(m-b)} x(x-b)(x-1)$$

De aquí, los puntos fijos obtenidos son

$$x = 0 \qquad x = m \qquad x = b - m + 1$$

Claramente vemos que $x = b - m + 1$ es mayor que 1. Y nosotros necesitamos, aparte de $x = 0$ otros 2 puntos fijos en $[0,1]$, uno para el umbral de extinción y otro para el nivel de equilibrio. ∎

Si $\lambda < 0$ y $b \leqslant 0$, en lugar de trabajar con (2.25) trabajaremos con

$$p(x) = \lambda x(1-x)(x+b) \tag{2.26}$$

donde $\lambda > 0$ y $b \geqslant 0$.

1. ¿Cuándo $p(m) = m$?

$$p(m) = \lambda m(1-m)(m+b)$$

igualándolo a m y resolviendo para λ obtenemos que

$$\lambda = \frac{1}{(1-m)(m+b)}$$

De aquí, la función a estudiar es

$$p(x) = \frac{x(1-x)(x+b)}{(1-m)(m+b)} \tag{2.27}$$

2. Ahora, ¿qué valores de m y b nos dan $0 \leqslant p'(0) < 1$?
Primeramente, sabemos que $p'(0) = \lambda b$. Como $\lambda = \frac{1}{(1-m)(m+b)}$ tenemos que ver bajo qué condiciones

$$0 \leqslant \frac{b}{(1-m)(m+b)} < 1$$

Para la primer desigualdad vemos que $b \geqslant 0$ y por lo tanto el numerador es positivo o cero. En cuanto al denominador, vemos que también es positivo ya que $m \in (0,1)$. Por lo tanto $\lambda b \geqslant 0$. Ahora veamos la segunda desigualdad. Es muy fácil ver que se cumple cuando $m + b < 1$. Por lo tanto obtenemos que dado $m \in (0,1)$, las b que hacen que $0 \leqslant p'(0) < 1$ son

$$b < 1 - m$$

3. Finalmente ¿Cuándo tenemos $p'(m) > 1$?
Esto se cumple si y sólo si

$$p'(m) = \frac{3m^2 + 2(b-1)m - b}{(m-1)(m+b)} > 1$$

Después de realizar las operaciones requeridas obtenemos que esto se cumple cuando

$$b < 1 - 2m$$

Hasta ahora, la región que define al modelo es

$$m \in (0,1) \qquad b \in (0, 1-2m) \tag{2.28}$$

Una condición más que debemos tomar en cuenta, es ver que no se intercambien los papeles entre m y E. Para esto pedimos que m sea menor que E, donde E está dado por

$$E = 1 - m - b$$

Por lo tanto, hay que ver cuando

$$m < 1 - m - b$$

Claramente podemos ver que esto sucede si y sólo si $b < 1 - 2m$ y $m \in (0, .5)$; esta condición se satisface si nos restringimos a tomar.

$$m \in (0, .5) \qquad b \in (0, 1 - 2m) \tag{2.29}$$

Por lo tanto la región en la que procederemos a trabajar, está dada por (2.29).

2.6.2 Análisis del modelo.

Como hemos hecho en los modelos anteriores, analicemos los siguientes puntos:

- La estabilidad del nivel de equilibrio E.
- La relación entre Y_{max} y X^*.

Comencemos con la estabilidad del punto E.

1. Veamos cuándo E es un punto fijo atractor.
   E está dado por $1 - b - m$. Entonces hay que ver cuándo se cumple la condición

   $$|p'(1 - b - m)| < 1$$

   Esta condición equivale a resolver las siguientes desigualdades

   $$-1 < p'(1 - b - m) < 1$$

   De la desigualdad $-1 < p'(1 - b - m)$, obtenemos la condición

   $$b \in \left(\frac{(4 - 5m) - \sqrt{9m^2 - 20m + 12}}{2}, \frac{(4 - 5m) + \sqrt{9m^2 - 20m + 12}}{2} \right)$$

   mientras que

   $$b \in (0, 1 - 2m) \cup (1 - m, \infty)$$

   se obtienen al resolver $p'(1 - b - m) < 1$.
   Tomando la intersección de estos 2 conjuntos, obtenemos la condición

   $$b \in \left(\frac{(4 - 5m) - \sqrt{9m^2 - 20m + 12}}{2}, 1 - 2m \right) \cup \left(1 - m, \frac{(4 - 5m) + \sqrt{9m^2 - 20m + 12}}{2} \right)$$

   donde $m \in (0, .5)$.

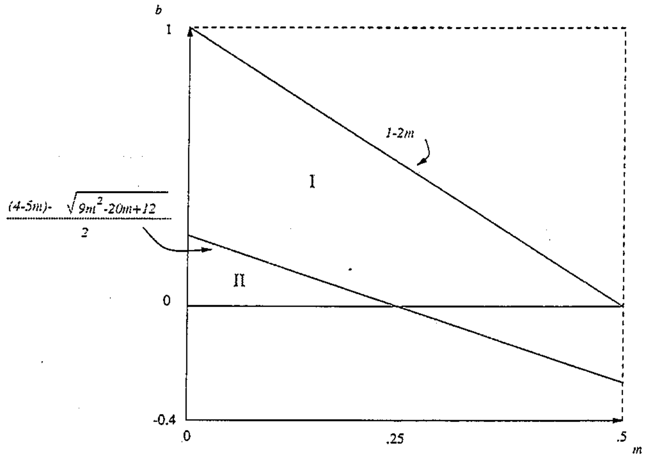

Figura 2.26: Regiones donde E es: repulsor (II) y atractor (I).

Ahora, sabemos que $b \in (0, 1-2m)$, por lo tanto la condición para que E sea atractor, se reduce a

$$m \in (0, .5) \qquad b \in \left(\frac{(4-5m)-\sqrt{9m^2-20m+12}}{2}, 1-2m\right)$$

En el apéndice probamos que este conjunto es no vacío.

Sea $k(m) = \frac{(4-5m)-\sqrt{9m^2-20m+12}}{2}$. Claramente $k'(m) < 0$. Como $k(\frac{1}{4}) = 0$, se concluye que $k(m) > 0$ si $m \in (0, .25)$ y $k(m) < 0$ si $m \in (.25, .5)$. De aquí obtenemos finalmente la región donde E es un punto fijo atractor. (Ver región (I) de la figura (2.26))

$$m \in (0, .5) \begin{cases} Si \quad m \in (0, \frac{1}{4}) & b \in \left(\frac{(4-5m)-\sqrt{9m^2-20m+12}}{2}, 1-2m\right) \\ Si \quad m \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) & b \in (0, 1-2m) \end{cases} \tag{2.30}$$

2. Ahora veamos cuándo E es un punto fijo repulsor.

   Por las condiciones de la función basta con ver cuando

   $$p'(1-b-m) < -1$$

   Realizando las operaciones requeridas, llegamos a la región dada por $m \in (0, .5)$ y

   $$b \in \left(0, \frac{(4-5m)-\sqrt{9m^2-20m+12}}{2}\right) \cup \left(\frac{(4-5m)+\sqrt{9m^2-20m+12}}{2}, 1-2m\right)$$

   Se puede mostrar[14], que el intervalo de la derecha es vacío, y por ende

   $$b \in \left(0, \frac{(4-5m)-\sqrt{9m^2-20m+12}}{2}\right)$$

[14] Ver apéndice

VALORES QUE CUMPLEN CON $Y_{max} = X^*$		REGION DE b DONDE E ES	
m	b	INESTABLE	ESTABLE
.02	.171374	(0 , .246797)	(.246797 , .96)
.04	.151121	(0 , .225604)	(.225604 , .92)
.05	.140985	(0 , .214992)	(.214992 , .9)
.06	.130841	(0 , .204364)	(.204364 , .88)
.08	.110532	(0 , .183089)	(.183089 , .84)
.1	.090193	(0 , .161762)	(.161762 , .8)
.12	.069821	(0 , .140384)	(.140384 , .76)
.14	.049415	(0 , .118954)	(.118954 , .72)
.15	.039197	(0 , .108218)	(.108218 , .7)
.16	.028971	(0 , .097468)	(.097468 , .68)
.18	.008487	(0 , .075923)	(.075923 , .64)
.188275	0	(0 , .066991)	(.066991 , .62345)

Por la misma razón del inciso anterior, llegamos a que la región dada por

$$m \in (0, \frac{1}{4}) \qquad \text{con} \qquad b \in \left(0, \frac{(4-5m) - \sqrt{9m^2 - 20m + 12}}{2}\right) \tag{2.31}$$

nos dice que el punto E tiene naturaleza repulsora. (Región (II) de figura (2.26))

Ya analizada la estabilidad de E pasemos a la relación entre Y_{max} y X^*.

Proposición 16 *Sea $m \in (0, .5)$ fijo. Entonces $Y_{max} \equiv Y_{max}(b)$ y $X^* \equiv X^*(b)$ son funciones estrictamente decrecientes en $b \in (0, 1-2m)$*[15].

Observación La proposición nos dice que ambas funciones son decrecientes, pero no se pudo mostrar cúal lo hacía más rápido.

Nos preguntamos ahora cuándo es que se presenta el fenómeno de extinción por sobrepoblación, es decir, ¿cuándo $Y_{max} > X^*$?
Debido a la complejidad de las funciones, se optó por recurrir a resultados numéricos.

Primeramente damos una tabla donde dado m, nos dice un valor de b (que no tiene por que ser único) tal que $Y_{max} = X^*$.

Observación Esta posible no unicidad del valor de b nos llevaría al siguiente fenómeno: Supongamos que nos encontramos en una región con caos y sin extinción. Al disminuir el parámetro b podríamos entrar a la región de extinción. Si se disminuye aún más, regresar a la zona caótica sin extinción, y así sucesivamente como sugiere la figura (2.27).
Sin embargo, tenemos lo siguiente

[15] Ver demostración en apéndice.

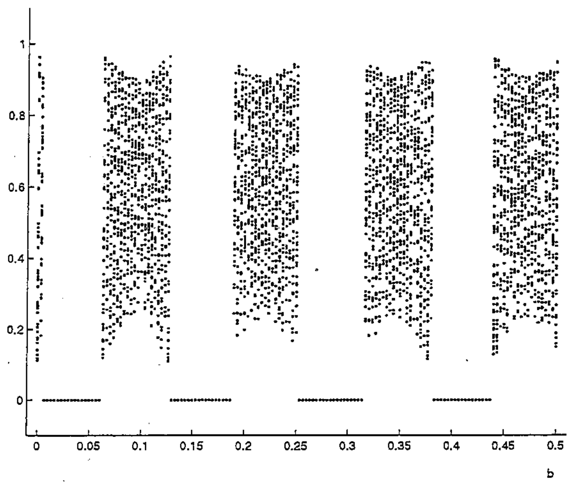

Figura 2.27: Posible efecto del parámetro b.

Conjetura 1 *Dado $m \in (0, .5)$, X^* y Y_{max} se cortan a lo más una sola vez.*

Observación Si la conjetura es cierta, el fenómeno repetitivo de caos-extinción (figura 2.27), no se puede dar.

Encontrando región de extinción y no extinción.

Ya que hemos conjeturado que las funciones X^* y Y_{max} se cortan una sola vez, procederemos a encontrar numéricamente la gráfica de la función que nos da la igualdad. Para esto haremos uso de una conjetura más.

Conjetura 2 *Considerese la función $G(m, b) = Y_{max} - X^*$. Entonces es posible aplicarle el teorema de la función implícita a G en $m \in (0, .5)$, $b \in (0, 1-2m)$.*[16].

De este teorema, sabemos que existe g tal que $b = g(m)$ con $m \in (0, .5)$. Numéricamente se encontró la gráfica de g y está dada en la figura (2.28)

Observación Esta función g es la que delimita la existencia del fenómeno de extinción por sobrepoblación. De la proposición (16) tenemos que: si b es menor que $g(m)$, entonces tenemos extinción; si es mayor no hay extinción por sobrepoblación.

Conjetura 3 *La función g es decreciente (Ver figura 2.28).*

Observación Cuando $m = .188275$, obtenemos que el valor de b que hace que Y_{max} sea igual a X^* es 0, esto es $g(.188275) = 0$ (Ver figura 2.28). Si la conjetura anterior es cierta

[16]No es posible encontrar m_1 y b_1 tales que $G(m_1, b_1)$ sea 0. Y aunque se puede mostrar su existencia es casi imposible mostrar que $\frac{\partial G(m,b)}{\partial b}$ en m_1 y b_1 son distintas de 0

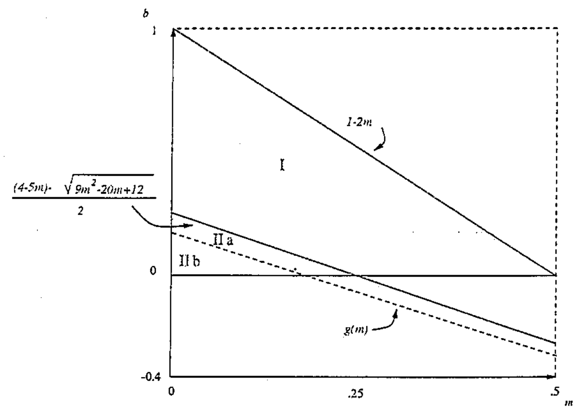

Figura 2.28: Regiones de b dado m.($Y_{max} = X^*$ Resultado numérico.)

(g es decreciente), vemos que es necesario tomar valores de $m \in (0, .188275)$[17]para lograr el fenómeno de extinción.

Por lo tanto, obtenemos la siguiente conclusión.

- Para tener extinción, debemos de tener

$$m \in (0, .188275) \qquad b \in (0, g(m))$$

Región(IIb) de la figura (2.28).

- Mientras que para no tener extinción, pedimos

$$m \in (0, .5) \left\{ \begin{array}{lll} Si & m \in (0, .188275) & b \in [g(m), 1-2m) \\ Si & m \in (.188275, \frac{1}{2}) & b \in (0, 1-2m) \end{array} \right.$$

Regiones (I,IIa) de la figura (2.28).

Después de hacer este análisis numéricamente, haremos mención de los principales fenómenos que estamos estudiando.

En gran parte lo que mencionaremos, tendrá una estrecha relación con la información presentada en la figura (2.28).

Pasemos primeramente a ver si se cumplen los siguientes casos.

CASO I : El modelo presenta el fenómeno de extinción y E inestable.
Lo que podemos ver de la gráfica (2.28), es que este fenómeno sí puede ser representado por la familia cúbica. Este caso corresponde a la región (IIb) de (2.28), y esta región está dada por

$$m \in (0, .188275) \qquad b \in (0, g(m))$$

[17]Para un análisis más completo ver apéndice, en la parte de Y_{max} y X^*.

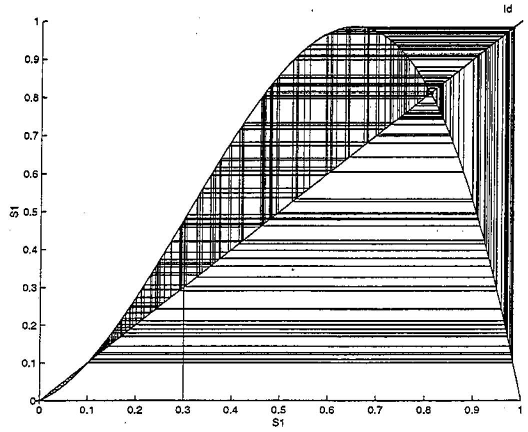

Figura 2.29: Extinción con E inestable.

CASO II : Extinción y E atractor.

De la misma gráfica, es posible concluir que el fenómeno de extinción y E atractor no se puede presentar.

CASO III : Modelo que representa el fenómeno de no extinción y E atractor.

Para pedir que E sea atractor hay que ver que (m, b) cumplan con estar en (2.30), es decir

$$m \in (0, .5) \begin{cases} Si \quad m \in (0, \frac{1}{4}) & b \in \left(\frac{(4-5m)-\sqrt{9m^2-20m+12}}{2}, 1-2m\right) \\ Si \quad m \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) & b \in (0, 1-2m) \end{cases}$$

Mientras que para que tener no extinción pedimos

$$m \in (0, .5) \begin{cases} Si \quad m \in (0, .188275) & b \in [g(m), 1-2m) \\ Si \quad m \in (.188275, \frac{1}{2}) & b \in (0, 1-2m) \end{cases}$$

Por lo tanto la región que nos interesa es la (I) de la figura (2.28), la cual está dada por

$$m \in (0, .5) \begin{cases} Si \quad m \in (0, \frac{1}{4}) & b \in \left(\frac{(4-5m)-\sqrt{9m^2-20m+12}}{2}, 1-2m\right) \\ Si \quad m \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) & b \in (0, 1-2m) \end{cases}$$

Parte de esta información también está contenida en la tabla. Vemos que siempre que tengamos E atractor se tendrá el fenómeno de no extinción. De esto podemos asegurar que el fenómeno de no extinción y E atractor sí puede ser representado con esta familia de modelos.

CASO IV : En cuanto al caso donde E es repulsor y no se presenta el fenómeno de extinción, vemos que la región que nos modela este caso está dada por

$$m \in (0, .25) \begin{cases} Si \quad m \in (0, .188275) & b \in \left[g(m), \frac{(4-5m)-\sqrt{9m^2-20m+12}}{2}\right) \\ Si \quad m \in (.188275, \frac{1}{4}) & b \in \left(0, \frac{(4-5m)-\sqrt{9m^2-20m+12}}{2}\right) \end{cases}$$

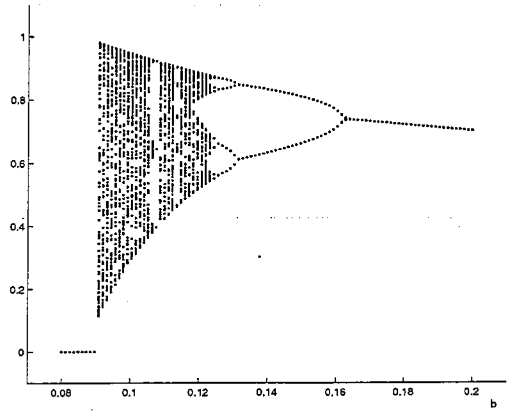

Figura 2.30: Diagrama de bifurcación con $m = .1$ y variando el parámetro b.

que es la región (IIa) de la figura (2.28).

Observación De (2.31), vemos que solamente en la región $m \in (0, .188275)$, es posible modificar b tal que se presente la extinción por exceso de población.

Después de ver estos casos, nos preguntamos si en nuestro modelo se presenta el fenómeno de caos, y en dado caso, bajo qué condiciones. En este modelo, no se pudo mostrar gran cosa debido a la complejidad de las expresiones, por lo que procederemos a hacer un estudio numérico, como anteriormente.

Para esto veamos la figura (2.30). Esta gráfica, dado un valor de b fijo, nos dice a donde tienden las órbitas de una condición inicial dada[18]. Por ejemplo

- Si $b = .18$, tenemos que la población tiende al nivel E.
- Si $b = .15$, la órbita converge a una órbita periódica de periodo 2.
- Si $b = .1$, vemos que la órbita no tiene un comportamiento predecible.
- Y finalmente si $b = .07$ vemos que la población se extingue (la órbita tiende a 0).

Podemos ver que conforme disminuimos el valor de b, entramos a una región donde tenemos un comportamiento que no es en general regular. De hecho, podemos decir que en la región para $b \in (.09, .11)$ parece presentarse un comportamiento caótico.

Observación 1 Para $b \in (.09, .11)$ lo que se ve es un comportamiento que no es predecible. Posiblemente no sea caótico pero, para efectos prácticos, podemos decir que sí lo es.

Observación 2 Algo que podemos decir, es que la famila cúbica, tiene dinámicas similares a la familia cuadrática (Ver figuras 2.22 y 2.30).

[18]El valor de m está fijo y se tomó igual a .1.

2.6.3 Interpretación de los términos.

Ya realizado el análisis adecuado, procederemos a ver qué significa f en términos biológicos.

Recordemos que estamos estudiando el sistema dado por

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{2.32}$$

donde

$$f(x) = \frac{x(1-x)(x+b)}{(1-m)(m+b)} \tag{2.33}$$

Ahora, pensemos (2.32) de la siguiente forma

$$x_{t+1} = kx_t$$

donde k está dada por

$$k = \frac{(1-x_t)(x_t+b)}{(1-m)(m+b)}$$

Visto de esta manera, k representa la tasa de natalidad de la especie.

Para esto, estudiaremos cada uno de los factores involucrados por separado.

- $\frac{1-x}{1-m}$

  1. Si $x \in (0, m)$ entonces $\frac{1-x}{1-m} > 1$. Esto nos dice que es un factor de ayuda para la tasa de natalidad si $x \in (0, m)$.
  2. Si $x \in (m, 1)$ entonces $\frac{1-x}{1-m} < 1$, que nos dice que es un factor que afecta la tasa de natalidad.
  3. Notemos que si $x = m$, tenemos que este factor es igual a 1. Esto nos indica que no afecta a la población.

  De aquí notemos que al tener poblaciones cada vez mayores, nos estamos acercando a 1. Esto nos implica que $\frac{1-x}{1-m}$ se acerca a 0. Por tanto $\frac{1-x}{1-m}$ tiene más peso conforme se tienen poblaciónes mayores.

  De hecho, este factor nos asegura la existencia de la penalización por sobrepoblación. Sin embargo no nos ayuda a controlar los niveles que la población puede alcanzar. Este fenómeno está controlado por el siguiente factor de f,

- $\frac{x+b}{m+b}$

  1. Si $x \in (0, m)$ entonces $\frac{x+b}{m+b} < 1$. Esto nos dice que es un factor de penalización para la tasa de natalidad si $x \in (0, m)$.
  2. Si $x \in (m, 1)$ entonces $\frac{x+b}{m+b} > 1$. Esto nos dice que es un factor de ayuda.

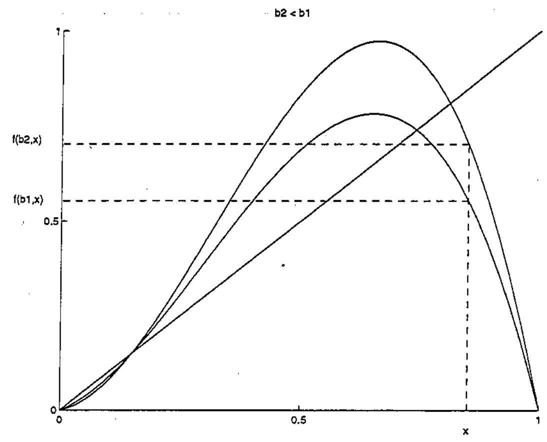

Figura 2.31: Un efecto de b: Reducción de la tasa de penalización.

3. Al igual que el caso anterior si $x = m$, tenemos que este factor es igual a 1.

Hagamos algo similar que en el modelo cuadrático. Si pensamos solamente en el sistema dado por

$$x_{t+1} = \frac{x_t + b}{m + b} x_t$$

y si nos encontramos debajo de m, vemos que la tasa de natalidad es menor que 1. Esto implica que la población tiende a extinguirse.

En el caso de que nos encontremos arriba de m, la población crece sin ser penalizada por sobrepoblación. Esto nos dice que el sistema estará siempre saturado.

El efecto que tienen en combinado se puede deducir de las siguientes proposiciones.

Proposición 17 *Sean p y q dados por*

$$p = \frac{1-x}{1-m} \qquad\qquad q = \frac{x+b}{m+b} \tag{2.34}$$

1. *Si $x \in (0, m)$ entonces $pq < 1$.*
2. *Si $x \in (m, E)$ entonces $pq > 1$.*
3. *Si $x \in (E, 1)$ entonces $pq < 1$.*

Luego:

- Si la cantidad de individuos de la especie es menor que m, entonces la tasa de natalidad es menor que 1, y por lo tanto la especie empieza a desaparecer. De hecho, aquí tenemos que la población no se recupera nunca más.
- En caso que la cantidad de individuos esté en (m, E) entonces la tasa es mayor que 1, es decir, la población aumenta.

- Finalmente, vemos que si el número de individuos superó el nivel E, este producto es menor que 1,(más aún, tiende a cero cuando x tiende a 1) y por tanto hay pérdida de individuos.

En base a la figura (2.31) vemos que los efectos causados por b en este modelo, son exactamente los mismos que los de la variable a en el modelo cuadrático. Es decir controla los fenómenos de penalización y natalidad, así como el nivel de equilibrio.
Notemos en este caso que valores muy pequeños de b afectan a la población en general, aunque de forma individual no sea así.

Con esto, damos por terminado el análisis de algunas funciones que pueden representar la dinámica del problema.

Algunos comentarios finales que se pueden decir de las familias de modelos son las siguientes: Debido a que los 3 modelos tienen carácter meramente descriptivo, no podemos decir cuál de ellos nos representa una mejor aproximación a la realidad. Sin embargo, notamos que en ciertos aspectos los modelos presentan ventajas y desventajas entre sí.
En el caso de los modelos cúbico y cuadrático se requirió solamente de un parámetro para controlar 3 efectos diferentes que fueron

- Tasa de natalidad.
- Tasa de penalización por exceso de población.
- Intensidad de penalización por exceso de población.

mientras que en el modelo de rectas, obtuvimos que estos fenómenos podían controlarse mediante 2 parámetros, uno para la tasa de natalidad y otro para la tasa y la intensidad de población. Esto nos da un grado más de libertad para manejar los efectos de los parámetros y por tanto en este aspecto, el modelo con rectas representa una ventaja sobre los 2 restantes.

Observación Notemos que en modelación es conveniente tomar parámetros representativos (como se menciona en el capítulo anterior), que brinden el efecto de varios parámetros en conjunto. En este caso no tenemos inconveniente en trabajar con modelos con uno o dos parámetros, ya que la complejidad de las funciones a estudiarse casi no presentan problemas para su estudio.

Aunque se considere que el modelo con rectas tiene ventajas sobre los 2 restantes al tener más parámetros involucrados, notamos que el modelo con rectas presenta desventajas de otro tipo frente al cúbico y al cuadrático. Al ser segmentos de rectas los que modelan al problema, vemos que en la región (m, X_{max}) se tiene una tasa de natalidad constante a. Esto difiere un poco en las familias cúbicas y cuadráticas, por lo siguiente: la tasa de natalidad es variable, ya que se combinan los efectos de natalidad con los de sobrepoblación.

Observación Los efectos de natalidad y sobrepoblación se presentan simultáneamente en el intervalo $[0, 1]$, con intensidad decreciente y creciente respectivamente.

De este hecho y de tener segunda derivada distinta de 0, vemos que los efectos por sobrepoblación se dan de manera natural, a diferencia del modelo de rectas donde en la región (m, X_{max}) el efecto de sobrepoblación aunque exista siempre es el mismo. Es a partir de X_{max} donde los efectos de sobrepoblación consideran la cantidad de individuos presentes en el ecosistema. Esto podemos interpretarlo como si los efectos de sobrepoblación se dieran de forma repentina.

Conclusiones

Las conclusiones que podemos mencionar en este trabajo se discutirán a continuación.

1. Cualquier elemento de las familias de modelos aquí presentadas puede ser considerado como un modelo descriptivo.

    - Pensemos en dos de los fenómenos que se estudian en este trabajo: extinción y no extinción. Consideremos dos modelos de una de nuestras familias, de tal manera que uno de los modelos presente el fenómeno de extinción y el otro no lo presente. Si deseamos pasar de un modelo al otro, entonces alguno de nuestros parámetros debe de dejar de cumplir alguna condición. Por ejemplo, en la familia cuadrática para pasar de no extinción a extinción la condición $a \leqslant g(m)$ deja de satisfacerse y se cumple entonces que $a > g(m)$ con $g(m) = \frac{m(2m-3)}{3m-4}$.

      En nuestros modelos aparecen funciones que determinan distintos comportamientos, entre ellas la función $g(m)$ mencionada anteriormente. Este tipo de funciones tiene un grado de complejidad tal que no permite una interpretación biológica inmediata, así pues, en nuestros modelos es difícil especificar qué factores biológicos se requieren para tener uno u otro comportamiento (extinción, no extinción por ejemplo).

    - Por el momento no podemos asegurar si alguno de nuestros modelos tiene carácter predictivo. Esto es debido a que el fenómeno de extinción por sobrepoblación, hasta donde sabemos, no está documentado en la literatura, y por tanto no ha sido estudiado con la debida atención.

    - Las funciones utilizadas en este trabajo, no son las únicas que pueden ser empleadas para representar y estudiar nuestro modelo. Sin embargo, visto como una introducción al tema y una primera versión del trabajo (descriptiva), es muy útil para desarrollar trabajos posteriores.

      Así que, se propone que se estudien los efectos de sobrepoblación con más detenimiento, ya que, como se vió a lo largo de este trabajo, puede conducir a la extinción.

2. Existencia del fenómeno de extinción vía caos. En al menos los modelos con rectas y los cuadráticos, notamos lo siguiente. Cuando la cantidad de individuos de una determinada especie se comporta de manera caótica y $Y_{max} < X^*$, tenemos que la población es impredecible en el medio. Esto puede tener ventajas, al no permitir que especies

depredadoras incluyan de forma regular a la especie en su alimentación, buscando (por ejemplo) otras alternativas de sobrevivencia. El problema para la especie, se presenta cuando le son modificados ciertos factores, como su tasa de natalidad. Al aumentar ésta podemos llegar al caso que $Y_{max} > X^*$, permitiendo que esta condición aparentemente benéfica para la especie, resulte contraproducente para su existencia, al permitir o inducir su extinción.

3. El último comentario es sobre el concepto de ayuda. Se podría decir que el hecho de aumentar los niveles de población no es ayuda para la especie en general, pues la ayuda brindada a la especie es más bien a nivel de individuos.

   Un ejemplo que podemos ver de este fenómeno, es el caso del cáncer. Al aplicar métodos como la quimioterapia se destruyen células sanas y cancerosas al mismo tiempo. Esto, para la célula sana destruida, no fue ayuda. Pero si lo vemos desde el punto de vista poblacional, tiene un impacto que puede ser benéfico para el organismo afectado.

   Así que, el hablar de ayuda es algo muy relativo. Es por eso que se debería reflexionar en las posibles consecuencias, antes de llevar a cabo la llamada "ayuda".

Finalmente, considero que este modelo tiene gran relevancia, ya que al ser algo que no se ha estudiado con detenimiento, no se ha aprovechado a conciencia y por tanto puede sugerir futuras investigaciones.

Apéndice A

Representación gráfica de una órbita.

En esta sección veremos una representación gráfica de la órbita de X_0 bajo f que utilizaremos a lo largo de este trabajo con el fin de facilitarnos ciertos conceptos, así como para aprovechar las propiedades geométricas de f.

Como mencionamos anteriormente, manejaremos $S = A \subset \mathbb{R}$ con A intervalo y $f : S \to S$. Esto es, sólo trabajaremos con fenómenos representados por una sola variable.
Para realizar esto notemos lo siguiente:

Observación 1 Sea $p \in S$. p puede identificarse de manera natural con $(p, 0)$, $(0, p)$, (p, p), en el eje **X**, **Y** y la recta identidad respectivamente.(Ver figura A.2). Si conocemos la posición de p en alguno de los ejes o de la recta identidad, automáticamente sabremos su posición en los 2 restantes.

Sea $X_0 \in S$. Pensemos X_0 en el eje **X** del plano cartesiano. Al aplicarle f lo manda a $f(X_0) \in$ **Y**, es decir obtenemos un punto en f que es el $(X_0, f(X_0))$. Por la observación, $f(X_0)$ se identifica con $(f(X_0), f(X_0)) \in Id$. Finalmente al proyectar $(f(X_0), f(X_0))$ en **X**, obtenemos a donde se fué X_0 bajo f en su primera iteración.

Así, para encontrar a dónde se fue X_0 en la k-ésima iteración, basta seguir el "camino" generado al unir los puntos en f y en la identidad, de la siguiente manera. $(X_0, f(X_0))$, $(f(X_0), f(X_0))$, $(f(X_0), f^2(X_0))$, etc.. $(f^k(X_0), f^k(X_0))$. La órbita de X_0 bajo f, estará dada por los puntos que toquen la recta identidad en el orden (X_0, X_0), $(f(X_0), f(X_0))$, $(f^2(X_0), f^2(X_0))$, ...; Estos se pueden proyectar al eje X, en los puntos X_0, $f(X_0)$, f^2X_0, etcétera.

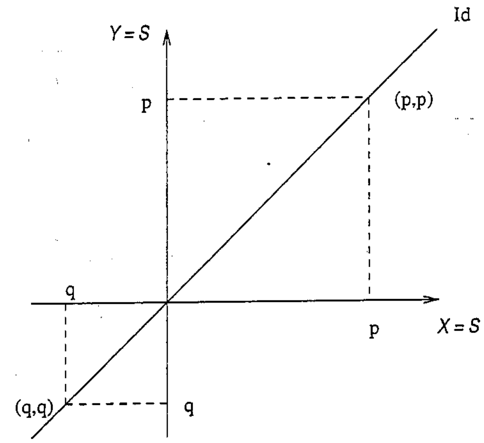

Figura A.1: biyección de S y la Identidad

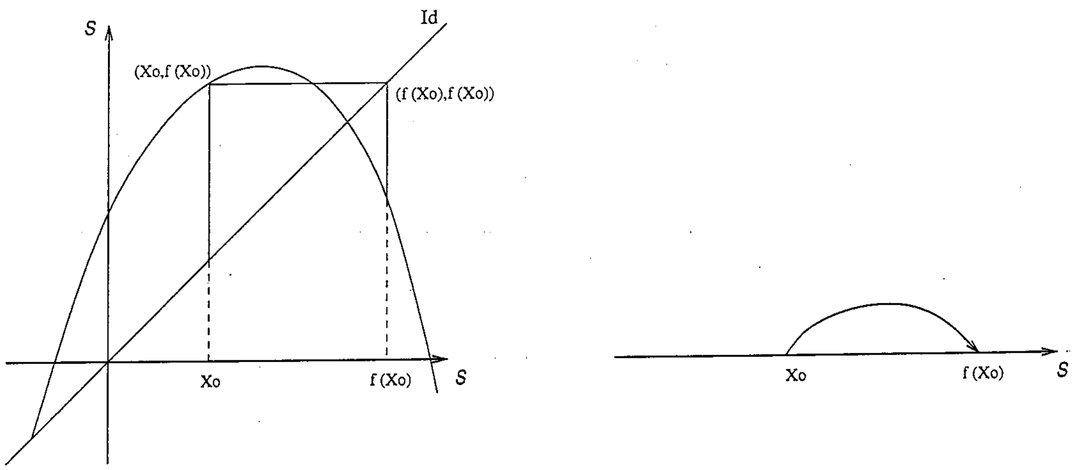

Figura A.2: Graficacion de la órbita

Apéndice B

Demostraciones Capítulo 2

Lema 1 Sea $S = [c, d] \subset \mathbf{R}$, $f : S \to S$ una función continua , $[a, b] \subset S$. Sea $f(x) < x \; \forall x \in [a, b]$ y $a \neq c$. Entonces para $f^k(x) \in [a, b]$ se cumple que $f^i(x) < f^j(x)$ para $i > j$. Más aún, existe $n = n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) < a$.
Demostración. Sea $x_0 \in [a, b]$.

$$O_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\} = \{x_0, f(x_0), f(x_1), \dots\}$$

Entonces

$$x_{k+1} = f(x_k) < x_k = f(x_{k-1})$$

De aquí tenemos que $f^{k+1}(x) < f^k(x)$. Para $i > j$ se procede de manera iterativa. Para mostrar la segunda parte, supongamos que existe $x \in [a, b]$, $f^n(x) > a \; \forall n \in \mathbf{N}$.
Entonces $\{f^n(x)\}$ es una sucesión acotada y decreciente. Por lo tanto converge, y el límite está en $[a, b]$ por ser cerrado.
Sea M tal que $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = M$. Como $f^n(x_0) = f(x_{n-1}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = M$. Por la continuidad de f tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = M$$

y esto equivale a

$$f(\lim_{n\to\infty} f^{n-1}(x_0)) = M$$

y por lo tanto $f(M) = M$.
Por lo tanto $M \in [a, b]$ es punto fijo. Contradiciendo la hipótesis $f(x) < x \; \forall x \in [a, b]$. De aquí queda demostrada la proposición ■

Observación Un resultado análogo se sigue para $f(x) > x$.

B.1 Análisis de los puntos de periodo 3.(Modelo con Rectas.)

A continuación, daremos y mostraremos las condiciones que nos aseguran que los puntos periódicos de periodo 3 existen y están bien definidos.
Sean R_1 y R_2 como se definieron anteriormente (Véase definición 10 de la página 28). Sean p y q puntos tales que

$$p \in R_1 \qquad f(p) \in R_1 \qquad f^2(p) \in R_2 \qquad f^3(p) = p$$

$$q \in R_1 \qquad f(q) \in R_2 \qquad f^2(q) \in R_2 \qquad f^3(q) = q$$

Para encontrar el valor de p y q procedemos de la siguiente manera.
Como $p \in R_1$ entonces

$$f(p) = ap - (a-1)m$$

Ahora, $f(p) \in R_1$ entonces

$$f^2(p) = a(ap - (a-1)m) - (a-1)m$$

Finalmente como $f^2(p) \in R_2$ tenemos que

$$f^3(p) = b - b(a(ap - (a-1)m) - (a-1)m) = p$$

Resolviendo para p llegamos a que

$$p = \frac{b(a^2m - m + 1)}{a^2b + 1}$$

De manera análoga para q, tenemos

$$q = \frac{b(b(1 - m + am) - 1)}{ab^2 - 1}$$

Ya que se obtuvieron estos puntos se procederá con el análisis correspondiente a su definición y región de existencia.

B.1.1 Análisis de p

Las condiciones a checar para p son las siguientes

$$m < p < X_{max} \qquad f(p) < X_{max} \qquad X_{max} < f^2(p) < X^*$$

con las hipótesis $m \in (0,1)$, $b > 1$, $b > \frac{m}{1-m}$ y $a > 1$. Por lo que nos preguntamos

1. ¿Cuándo $p > m$?

$$p = \frac{b(a^2m - m + 1)}{a^2b + 1}$$

entonces $p > m$ si y solo si $\frac{ba^2m - bm + b}{a^2b+1} > m$.

Por hipótesis sabemos que

$$b > \frac{m}{1-m}$$

multiplicando por $(1-m)$ y sumando ba^2m a ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$ba^2m - bm + b > a^2bm + m$$

o bien

$$ba^2m - bm + b > (a^2b + 1)m$$

y como $a^2b + 1 > 0$ entonces

$$\frac{ba^2m - bm + b}{a^2b + 1} > m$$

Y lo que se concluye es que $p > m$ si $b > \frac{m}{1-m}$.

2. ¿Qué condiciones nos dan $p < X_{max}$?

$$p = \frac{a^2bm - bm + b}{a^2b + 1} \qquad X_{max} = \frac{(a-1)m + b}{a + b}$$

$X_{max} > p$ si y sólo si

$$\frac{(a-1)m + b}{a + b} - \frac{a^2bm - bm + b}{a^2b + 1} > 0$$

o de manera equivalente

$$\frac{-(a^2b - a - b + 1)(b(m-1) + m)}{(a + b)(a^2b + 1)} > 0$$

Claramente el denominador es positivo ya que tanto a como b son mayores que 1. Sólo nos falta ver cuándo el numerador tiene signo positivo. Primero, $b(m-1) + m \geqslant 0$ si y sólo si $b \leqslant \frac{m}{1-m}$. Esto obviamente no se cumple de nuestra hipótesis, por lo tanto

$$b(m-1) + m < 0$$

De aquí debemos ver cuándo $-(a^2b-a-b+1)<0$ o bien, $a^2b-a-b+1>0$.
Resolviendo la ecuación cuadrática para a tenemos las raíces

$$a=1 \qquad a=\frac{1-b}{b};$$

como $b>1$ tenemos $\frac{1-b}{b}<0$ y por lo tanto $a^2b-a-b+1>0$ si $a>1$ o si $a<0$.
Lo que podemos concluir es que $X_{max}>p$ si $a>1$ y $b>1$ (La condición $b>\frac{m}{1-m}$ se dá directamente de tener $b>1$). Y como estas condiciones se dan de las hipótesis, se cumple lo deseado.

3. ¿Cuándo $f(p)<X_{max}$?

$$f(p)=m-\frac{a(b(m-1)+m)}{a^2b+1} \qquad X_{max}=\frac{(a-1)m+b}{a+b}$$

$f(p)<X_{max}$ si y sólo si

$$\frac{am+b-m}{a+b}-\left[m-\frac{a(b(m-1)+m)}{a^2b+1}\right]>0$$

o de manera equivalente

$$\frac{(b(m-1)+m)(-a^2(b-1)+(ab-1))}{(a+b)(a^2b+1)}>0$$

Obviamente el denominador es positivo. Ahora, el término $b(m-1)+m$ es negativo y por lo tanto hay que ver cuándo $-a^2(b-1)+(ab-1)$ es negativo.
$-a^2(b-1)+(ab-1)<0$ si y sólo si $a^2(b-1)+(1-ab)>0$. Esta última desigualdad equivale a ver cuándo $(a-1)(a-\frac{1}{b-1})>0$.
Pero a siempre es mayor que 1, entonces la condición que pedimos es

$$(a-\frac{1}{b-1})>0 \qquad \text{o bien} \qquad a>\frac{1}{b-1}$$

de aquí tenemos dos subcasos debidos a los valores de b.

$$b>1\begin{cases} b\in(1,2) & a\in(\frac{1}{b-1},\infty) \\ b\in[2,\infty) & a\in(1,\infty)\end{cases}$$

de aquí dado $m\in(0,1)$ vemos que tomando b y a en esta región, se obtiene que $f(p)<X_{max}$.

4. ¿Cuándo $f^2(p)>X_{max}$?

$$f^2(p)=\frac{b(m-1)+m}{b(a^2b+1)}+\frac{b-m}{b} \qquad X_{max}=\frac{(a-1)m+b}{a+b}$$

$f^2(p) > X_{max}$ sólo si

$$\frac{b(m-1)+m}{b(a^2b+1)} + \frac{b-m}{b} - \frac{(a-1)m+b}{a+b} > 0$$

o equivalentemente

$$\frac{(1-a^3)(b(m-1)+m)}{(a+b)(a^2b+1)} > 0$$

un análisis similar nos dice que bajo las hipótesis supuestas esto se cumple.

5. Finalmente tenemos que ver cuando $f^2(p) < X^*$.

$$X^* - f^2(p) = \frac{b-m}{b} - \frac{b(m-1)+m}{b(a^2b+1)} + \frac{b-m}{b}$$

esto es mayor que cero si y sólo si

$$\frac{b(1-m)-m}{b(a^2b+1)} > 0$$

Esto se sigue de las hipótesis.

B.1.2 Análisis de q

Las condiciones que se piden para q son:

$$m < q < X_{max} \qquad X_{max} < f(q) < X^* \qquad X_{max} < f^2(q) < X^*$$

con las hipótesis $m \in (0,1)$, $b > 1$, $b > \frac{m}{1-m}$ y $a > 1$.

Haciendo un análisis similar, concluímos que ambas órbitas existen cuando $(m, b, a) \in A$ donde

$$A := \left\{ (m,b,a) \in \mathbb{R}^3 \,|\, m \in (0,1)\,, b > 1 \left\{ \begin{array}{ll} b \in (1,2) & a \in (\frac{1}{b-1}, \infty) \\ b \in [2,\infty) & a \in (1,\infty) \end{array} \right. \right\}$$

B.2 Estudio de conjuntos (Modelo Cuadrático).

En esta sección, se demostrará que algunos conjuntos del modelo cuadrático, son no vacíos.

Proposición 18 *Sea $m \in (0,1)$ dado. Entonces se cumple*

$$\frac{m(2m-3)}{3m-4} > \frac{m(2-m)}{3-2m}$$

Demostración. Notemos primero lo siguiente

$$(m-1)^2 > 0 \qquad \text{con} \qquad m \in (0,1)$$

esto implica que

$$1 - 2m + m^2 > 0$$

Sumando en ambos lados $8 - 10m + 3m^2$ obtenemos

$$9 - 12m + 4m^2 > 8 - 10m + 3m^2$$

ahora, factorizando ambos miembros de la desigualdad, llegamos a

$$(3-2m)^2 > (2-m)(4-3m)$$

Multiplicando por m, dividiendo por $3m-4$ y $3-2m$ que son términos distintos de 0, se tiene

$$\frac{m(2m-3)}{3m-4} > \frac{m(2-m)}{3-2m}$$

obteniendo así nuestro resultado. ■

Proposición 19 *Sea $m \in (0,1)$ dado. Entonces*

$$\frac{m(2m-3)}{3m-4} < m$$

Demostración. Primero notemos lo siguiente

$$m(1-m) > 0 \qquad \text{si} \qquad m \in (0,1)$$

desarrollando esta expresión y sumando $3m^2 - 4m$ a ambos lados de la desiguladad, llegamos a que

$$2m^2 - 3m > 3m^2 - 4m \qquad \text{si} \qquad m \in (0,1)$$

factorizando m en ambos lados y dividiendo por $3-4m$ tenemos que

$$\frac{m(2m-3)}{3m-4} < m \qquad \text{si} \qquad m \in (0,1)$$

y se sigue la demostración. ■

Proposición 20 *Sea $m \in (0,1)$ dado. Entonces*

$$m^2 < \frac{m(2-m)}{3-2m}$$

Demostración. En este caso partimos de la desigualdad

$$(m-1)^2 > 0 \qquad \text{si} \qquad m \in (0,1)$$

desarrollando esta expresión y multiplicando por -1 tenemos que

$$2m - m^2 - 1 < 0 \qquad \text{si} \qquad m \in (0,1)$$

ahora multiplicando por 2 y sumando $2m - m^2$ a ambos lados llegamos a

$$3m^2 - 2m^3 < 2m - m^2 \qquad \text{si} \qquad m \in (0,1)$$

finalmente factorizamos m en el lado derecho, m^2 en el izquierdo y dividimos por $3-2m$ que es distinto de 0 en $m \in (0,1)$, para llegar a

$$m^2 < \frac{m(2-m)}{3-2m} \qquad \text{si} \qquad m \in (0,1)$$

quedando demostrada la proposición. ∎

B.3 Estudio de conjuntos (Modelo Cúbico)

En esta sección, mostraremos que algunos conjuntos del modelo cúbico son vacíos, mientras que otros no.

Proposición 21 *Sea $m \in (0,.5)$ entonces*

$$\left(\frac{(4-5m) - \sqrt{9m^2 - 20m + 12}}{2}, 1 - 2m\right)$$

es no vacío.

Demostración. Para mostrarlo sea $m \in (0,.5)$. Fijemonos en la siguiente desigualdad

$$(m-1)^2 > 0$$

desarrollando esta expresión, y multiplicando por 8, obtenemos

$$8m^2 - 16m + 8 > 0$$

Sumando $m^2 - 4m + 4$ a ambos lados de la desigualdad y factorizando el lado derecho equivale a

$$9m^2 - 20m + 12 > (2-m)^2$$

Ahora, como ambas cantidades son positivas, tomamos raíz cuadrada en ambos miembros de la desigualdad para llegar a

$$\sqrt{9m^2 - 20m + 12} > 2 - m$$

Finalmente, sumamos $5m - 4$ y dividimos por -2 obteniendo

$$\frac{4 - 5m - \sqrt{9m^2 - 20m + 12}}{2} < 1 - 2m$$

llegando así al resultado pedido. ∎

Proposición 22 *Sea* $m \in (0, .5)$. *Entonces*

$$\left(\frac{(4-5m) + \sqrt{9m^2 - 20m + 12}}{2}, 1 - 2m \right)$$

es vacío.

Demostración. Primero notemos lo siguiente

$$9m^2 - 20m + 12 > 0 \qquad \forall m \in \mathbb{R}$$

Al ser positivo, es mayor que cualquier cantidad menor que cero. De hecho

$$\sqrt{9m^2 - 20m + 12} > m - 2 \qquad \text{si} \qquad m \in (0, .5)$$

Sumando $4 - 5m$ en ambos lados, obtenemos

$$\frac{(4-5m) + \sqrt{9m^2 - 20m + 12}}{2} > 1 - 2m \qquad \text{con} \qquad m \in (0, .5)$$

Obteniendo así nuestro resultado.

■

B.4 Análisis de Y_{max} y X^* en el modelo cúbico.

En esta sección mencionaremos y demostraremos algunas proposiciones de las funciones Y_{max} y X^*, dadas por

$$X^* = \frac{1 - (m+b) + \sqrt{b^2 + 2b(1-m) - 3m^2 + 2m + 1}}{2}$$

$$Y_{max} = \frac{2(b^2 + b + 1)^{3/2} - 2b^3 - 3b^2 + 3b + 2}{27(1-m)(b+m)}$$

Proposición 23 *Sea* $m \in (0, .5)$ *fijo. Entonces* $Y_{max} \equiv Y_{max}(b)$ *es estrictamente decreciente en* $b \in (0, 1-2m)$.

Demostración. Para demostrar que Y_{max} es estrictamente decreciente, basta mostrar que $\frac{\partial Y_{max}}{\partial b} < 0$.
Para esto sea

$$p(x, b, m) = \frac{x(1-x)(x+b)}{(1-m)(m+b)}$$

Notemos que $x(1-x)$ no depende de b y además es positivo. Así que analizando solo lo que depende de b definimos $q(x, b, m)$ como.

$$q(x, b, m) = \frac{x+b}{(1-m)(m+b)}$$

donde $m \in (0, .5)$ y $x \in [0, 1]$ están fijos.
Ahora derivando q respecto a b tenemos

$$\frac{\partial q}{\partial b} = \frac{x - m}{(b + m)^2(m - 1)}$$

Notemos que $\frac{\partial q}{\partial b} < 0$ si $x > m$ y $\frac{\partial q}{\partial b} > 0$ si $x < m$. De esto y de la observación del término $x(1 - x)$ concluímos lo siguiente. Sean $m \in (0, .5)$ y $x \in [0, 1]$ fijos. Entonces, $\frac{\partial p}{\partial b} < 0$ si $x > m$ y $\frac{\partial p}{\partial b} > 0$ si $x < m$.
Como $X_{max} > m$(Por construcción de la función) entonces $Y_{max} = p(X_{max}, m, b)$ cumple con

$$\frac{\partial Y_{max}}{\partial b} < 0$$

Y por lo tanto, queda demostrada nuestra proposición. ∎

Proposición 24 *Sea $m \in (0, .5)$ fijo. Entonces $X^* \equiv X^*(b)$ es estrictamente decreciente en $b \in (0, 1 - 2m)$.*

Demostración. Procediendo de similar manera calculamos $\frac{\partial X^*}{\partial b}$.

$$\frac{\partial X^*}{\partial b} = \frac{b - m + 1 - \sqrt{b^2 + 2b(1 - m) + (1 - m)(3m + 1)}}{2\sqrt{b^2 + 2b(1 - m) + (1 - m)(3m + 1)}}$$

El denominador siempre es positivo, por lo que analizaremos el numerador.

$$b - m + 1 - \sqrt{b^2 + 2b(1 - m) + (1 - m)(3m + 1)} < 0$$

si y sólo si

$$b - m + 1 < \sqrt{b^2 + 2b(1 - m) + (1 - m)(3m + 1)}$$

elevando al cuadrado(ya que ambos lados son mayores que 0) y simplificamos obtenemos a que esto equivale a mostrar que

$$m(-4 + 4m) < 0$$

y como $m \in (0, .5)$ obtenemos que esto es cierto. Por lo tanto $\frac{\partial X^*}{\partial b} < 0$ y de esto se concluye que X^* es una función estrictamente decreciente respecto a b. ∎

A continuación vemos algunos de los comportamientos que presentan Y_{max} y X^*. Estos resultados son gráficos, ya que de manera analítica no fué posible mostrar gran cosa.

De la figura (B.2) observamos lo siguiente: Si $b = 1 - 2m$, entonces para toda $m \in (0, .5)$, Y_{max} es menor que X^* ($X^* - Y_{max}$ siempre es positiva).

Observación No fue posible mostrar cuál de las dos funciones decrecía más rápido, y por tanto no se puede asegurar que dichas funciones se corten a lo más una vez.

Esto nos abre la posibilidad de que exista el fenómeno de caos-extinción como sugiere la figura (2.27) de la página (53).

Conjetura Dado $m \in (0, .5)$, Y_{max} y X^* se cortan a lo más una vez.

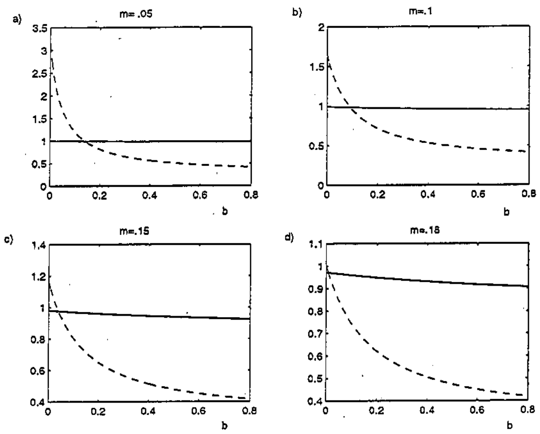

Figura B.1: Gráficas de Y_{max}(- -) y X^*(-) con valores de m fijos.

Esta conjetura se basa principalmente en las gráficas de la figura (B.1). En caso de ser cierta significa que el fenómeno de caos-extinción no se puede presentar. De aquí, al tomar valores de b cada vez más pequeños, (haciendo tender b a cero) observamos que Y_{max} logra ser mayor que X^* con ciertos valores de m (figura B.3).

- Si $m \in (0, .188275)$ y $b = 0$, entonces Y_{max} es mayor que X^* (figura(B.3)). Lo que significa es que solo para valores de $m \in (0, .188275)$ se pude modelar el fenómeno de extinción.

- De la figura (B.3), se puede ver que el caso $m \in (.188275, .5)$ implica que se conserva la desigualdad $Y_{max} < X^*$. De esta propiedad y de la conjetura, se concluye que si $m \in (.188275, .5)$, Y_{max} y X^* no se cortan con $b \in (0, 1 - 2m)$. Por lo tanto aquí no se puede hablar de extinción por sobrepoblación.

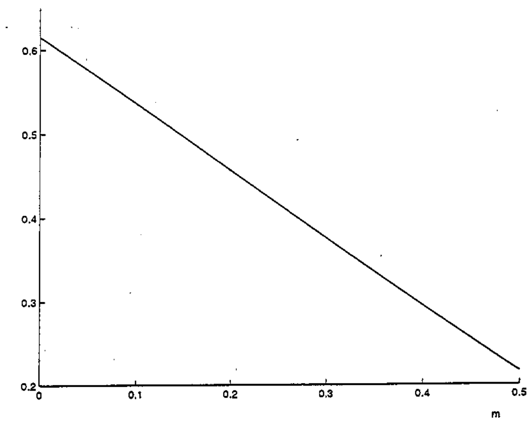

Figura B.2: Gráfica de $X^* - Y_{max}$ tomando $b = 1 - 2m$

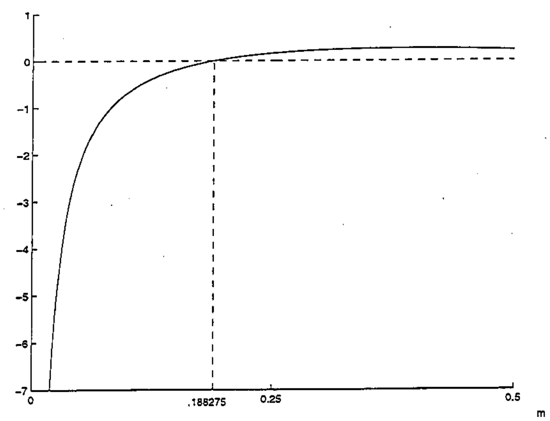

Figura B.3: Gráfica de $X^* - Y_{max}$ tomando $b = 0$

B.5 Análisis de p y q en el modelo cúbico.

Proposición 25 *Sean p y q dados por*

$$p = \frac{1-x}{1-m} \qquad q = \frac{x+b}{m+b}$$

1. *Si $x \in (0,m)$ entonces $pq < 1$.*
2. *Si $x \in (m,E)$ entonces $pq > 1$.*
3. *Si $x \in (E,1)$ entonces $pq < 1$.*

Demostración.

1. Si $x \in (0,m)$ entonces $pq < 1$.

   Notemos que tanto p como q son no negativos. Por lo tanto mostrar que $pq < 1$, equivale a mostrar que $q - \frac{1}{p} < 0$.

   Después de realizar las operaciones requeridas, vemos que hay que mostrar que

   $$q - \frac{1}{p} = \frac{(x+b+m-1)(x-m)}{(b+m)(x-1)} < 0$$

   Claramente el denominador es negativo, por lo que basta analizar el numerador. Para esto, notemos que en nuestras condiciones vistas al inicio del modelo dicen que

   $$m < 1-b-m$$

   como $x < m$ entonces $x < 1-b-m$.

   De estos hechos queda mostrada la primera parte de la proposición.

2. Si $x \in (m,E)$ entonces $pq > 1$.

   Para este caso, se procede de manera similar a la anterior. Así que después de las operaciones necesarias hay que mostrar que

   $$q - \frac{1}{p} = \frac{(x+b+m-1)(x-m)}{(b+m)(x-1)}$$

   es mayor que cero. En este caso E es igual a $1-b-m$, y por tanto podemos concluir fácilmente el resultado.

3. Si $x \in (E,1)$ entonces $pq < 1$.

   Procediendo de manera similar se obtiene lo deseado.

■

Bibliografía

[1] Tien-Yien Li and J. A. Yorke
Period three implies chaos, The American Mathematical Monthly. Volume 82, number 10.

[2] Robert L. Devaney *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Printed in the United States of America.1987

[3] Héctor Méndez Lango *LAS QUEBRADITAS(Propiedades dinámicas de una peculiar familia de funciones en el intervalo).* Notas preliminares del autor.(UNAM)

[4] Miguel Martín, Manuel Morán, Miguel Reyes.
Iniciación al Caos Editorial Sintesis. Impreso en España. ISBN:84-7738-293-X