Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

# Caracterización de soluciones de juegos en forma de función de partición usando teoría de representaciones

**T E S I S**

que para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias**

con orientación en

**Matemáticas Aplicadas**

P R E S E N T A:

**Joss Erick Sánchez Pérez**

DIRECTOR DE TESIS:

**Dr. Francisco Sánchez Sánchez**

Febrero de 2009 Guanajuato, Gto.

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

# Caracterización de soluciones de juegos en forma de función de partición usando teoría de representaciones

**T E S I S**

que para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias**

con orientación en

**Matemáticas Aplicadas**

P R E S E N T A:

**Joss Erick Sánchez Pérez**

*JURADO INTEGRADO POR:*

| | |
|---|---|
| Dr. Fausto Antonio Ongay Larios | (CIMAT) |
| Dr. Luis Hernández Lamoneda | (CIMAT) |
| Dr. Leobardo Plata Pérez | (UASLP) |
| Dr. Elvio Accinelli Gamba | (UASLP) |
| Dr. Francisco Sánchez Sánchez | (CIMAT) |

Vo. Bo. Director de Tesis

## DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres Martha Estrella y José S., y a mi abuelita Chávez, de quienes siempre he recibido incondicional apoyo de toda índole. Siempre me han alentado a seguir adelante en busca de mis convicciones, por muy difíciles que éstas parezcan.

A Yael y Jared, por traer tanta dicha y alegría a mi vida.

A mis hermanos Kenia e Ivan, quienes han soportado mi ausencia todo este tiempo.

A mis tíos: Mapy, Lila, Mona, Ricar y Toto, por su inmenso cariño y apoyo.

A Dennys, Itzel, Richie, Kevin y Valerie.

A Cynthia, Elizabeth y Edith, quienes me han brindado su amistad y apoyo en todo momento.

A todos aquellos que estuvieron conmigo en esta etapa de mi vida.

## AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis Dr. Francisco Sánchez Sánchez, por su amistad, su apoyo y ya que sin su dirección no hubiera sido posible la elaboración de este trabajo. Al Dr. Luis Hernández Lamoneda, por su tiempo, su paciencia y sus invaluables aportaciones. Al Dr. Fausto Antonio Ongay Larios por sus valiosos comentarios en la preparación final de la tesis. Al Dr. Elvio Accinelli Gamba y Dr. Leobardo Plata Pérez, a quienes les expreso mi gratitud por el rigor de su revisión y por los muchos comentarios y sugerencias que hicieron ésta una mejor tesis.

Al CIMAT, por las facilidades y apoyo otorgado durante mi estancia en el centro.

A Lolita, Jannet, Bere y Lourdes, quienes siempre me dieron el mejor trato e hicieron más fácil mi estancia en CIMAT.

A Stephanie, por su amistad, su disponibilidad y sus invaluables consejos.

Al CONACyT, por la beca 183041 brindada en mis estudios de doctorado.

A mis maestros, compañeros y amigos. Gracias a todos.

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

El problema principal que se aborda en juegos cooperativos es la distribución de ganancias conjuntas o el reparto de costos comunes. La teoría más conocida que actualmente da una respuesta categórica a estos problemas es la de valores en juegos cooperativos. En ella se agrupan problemas, se definen soluciones concebibles y se pide que una solución satisfaga un conjunto de axiomas que la determinen unívocamente. El avance que se obtiene con esto es sustancial: se aceptan o se eliminan soluciones para toda una clase de problemas con sólo aceptar o no "simples" supuestos generales.

Como ejemplo de esta metodología, Shapley (1953) caracteriza el valor que lleva su nombre. Él supone que un juego está caracterizado por las valías de cada coalición $S$ del conjunto de jugadores $N$ y describe la valía de la coalición $S$ en términos de una función característica, la cual está definida sobre el conjunto $2^N$ de todos los subconjuntos de $N$.

En 1963 Lucas y Thrall introdujeron una nueva formulación para la teoría de juegos cooperativos en términos de funciones de partición. Estos autores consideraron que los jugadores se dividen en coaliciones, formando así una partición del conjunto de todos los jugadores. De esta forma, lo que obtiene cada coalición está en función de la organización de los jugadores del complemento.

Debido a la riqueza de los juegos en forma de función de partición, se han dado varias soluciones para este tipo de juegos. El primer artículo que propuso un concepto de valor para juegos en forma de función de partición fue el de Myerson (1977) y después, Bolger (1987) deriva una clase de soluciones lineales, simétricas y eficientes para este tipo de juegos. Recientemente, Albizuri et al. (2005), Macho-Stadler et al. (2006), Ju (2007) y Pham Do y Norde (2007) aplican el enfoque axiomático para caracterizar un valor.

En este trabajo, se estudian soluciones lineales y simétricas para el espacio de juegos en forma de función de partición, y para ello, se utilizan técnicas de la teoría de representaciones de grupos finitos. La teoría de representaciones es uno de los temas más bellos de las matemáticas, tanto desde un punto de vista abstracto, como de las aplicaciones; tal es el caso del artículo de Hernández et al. (2006), en donde se explota esta teoría aplicada a juegos en forma de función característica. Los métodos de la teoría son muy poderosos y permiten aprovechar la simetría de un problema dado.

El presente trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 se dan los conceptos y resultados básicos de la teoría de juegos cooperativos en forma de función característica y en forma de función de partición, así como también la axiomatización a la manera tradicional (i.e., caracterizar una solución de forma unívoca bajo un conjunto de propiedades o axiomas) de diversos valores conocidos en la literatura actual.

En la sección 3 se exponen las definiciones formales que hay dentro de la teoría de representaciones de grupos finitos, resultados importantes (tal como el Lema de Schur, el cual se confirmará su importancia en secciones posteriores) y una breve introducción a la útil teoría de caracteres. Una buena referencia para teoría de representaciones básica es Fulton y Harris (1991).

La sección 4 presenta la aplicación de la teoría de representaciones a la teoría de juegos en forma de función de partición, lo cual nunca antes se había explotado (con la notable excepción de Hernández et al. (2006)); y por ende, todos los resultados presentados en esta sección son aportaciones originales. Se encuentra una descomposición para el espacio de juegos en forma de función de partición, $G$, así como también para el espacio de vectores de pago $\mathbb{R}^n$, en subespacios invariantes bajo la acción del grupo simétrico $S_n$, el grupo de permutaciones del conjunto de jugadores, $N$.

La descomposición de $G$ se hace en tres etapas. Primero, tenemos la descomposición

$$G = \bigoplus_{\lambda \in \Pi[n]} G_\lambda$$

donde $G_\lambda$ consiste en los juegos que se anulan en particiones que no tengan estructura de acuerdo a $\lambda$. Luego, cada $G_\lambda$ lo descomponemos como

$$G_\lambda = \bigoplus_{k\in\lambda^\circ} G_\lambda^k$$

donde $G_\lambda^k$ contiene aquellos juegos que se anulan en coaliciones que no contienen exactamente $k$ jugadores. Por último, se descompone cada $G_\lambda^k$, $\lambda \neq [n]$ ($G_{[n]}^n$ es una representación trivial unidimensional generada por el juego que asigna 1 a la gran coalición y cero en el resto), en tres subespacios:

$$G_\lambda^k = U_\lambda^k \oplus V_\lambda^k \oplus W_\lambda^k$$

$U_\lambda^k$ irreducible y $V_\lambda^k$ es una suma directa de irreducibles isomorfos entre sí, mientras que $W_\lambda^k$ en general no es irreducible ($W_G = \bigoplus_{\substack{\lambda\in\Pi(n)\setminus\{[n]\}\\ k\in\lambda^\circ}} W_\lambda^k$ será no cero para $n > 3$).

Tomando en cuenta la descomposición que se logra para $G$, entonces dado un juego $w \in G$, podemos descomponerlo como

$$w = \sum_{\substack{\lambda\in\Pi(n)\\ k\in\lambda^\circ}} a_{\lambda,k} u_\lambda^k + \sum_{\substack{\lambda\in\Pi(n)\setminus\{[n]\}\\ k\in\lambda^\circ}} \sum_{j\in I_{\lambda,k}} z_{\lambda,k,j}^{\lambda,k} + r$$

Esta descomposición será de mucha utilidad para el estudio de la imagen de $w$ bajo cualquier solución lineal y simétrica. La razón es por lo que nos proporciona el lema de Schur, cuya simplicidad esconde el hecho de que es una herramienta muy poderosa.

Una vez que se tiene una descripción global de todas las soluciones lineales y simétricas, se da una plicación de este método. Todo está basado en la descomposición de $G$. Se incorpora a linealidad y simetría, el axioma de eficiencia y se caracterizan todas estas soluciones: coinciden con la solución igualitaria en el subespacio de juegos $U_G = \bigoplus_{\substack{\lambda\in\Pi(n)\\ k\in\lambda^\circ}} U_\lambda^k$, son arbitrarias en $V_G = \bigoplus_{\substack{\lambda\in\Pi(n)\setminus\{[n]\}\\ k\in\lambda^\circ}} V_\lambda^k$ y se anulan en $W_G$.

Por último, en la sección 5 se aborda el problema de caracterizar soluciones de forma unívoca. En particular, se proponen dos variantes del axioma de nulidad y se axiomatizan dos nuevos valores para juegos en forma de función de partición. Resulta ser que estos valores son extensiones del valor de Shapley y del valor de Solidaridad a este tipo de juegos. Finalmente, se obtiene una caracterización alterna a la extensión del valor de Shapley vía un axioma de marginalidad[1].

[1] Las definiciones precisas se dan en la sección 5.

# Capítulo 2

# Juegos cooperativos

La teoría de juegos es una colección de modelos matemáticos para estudiar situaciones de conflicto y/o cooperación. Su función es el explicar o dar una guía normativa para el comportamiento racional de agentes económicos enfrentando decisiones estratégicas o interacciones sociales. La teoría concierne a comportamiento estratégico, situaciones de equilibrio, negociación, formación de coaliciones, distribución justa, y conceptos similares relacionados a resolver diferencias entre grupos. La competencia en muchas actividades sociales ha hecho de la teoría de juegos un enfoque fundamental para modelar diversas situaciones, tales como en economía, ciencia política, investigación de operaciones y planeación militar.

En este capítulo abordaremos dos tipos de juegos cooperativos: los juegos en forma de función característica y los juegos en forma de función de partición.

## 2.1. Juegos en forma de función característica

En esta sección se presentan dos de los principales valores que aparecen en la literatura de juegos en forma de función característica (a los cuales nos referiremos como "juegos tradicionales"). Cada uno establece una solución axiomática para cada juego cooperativo tradicional. En lo sucesivo $2^N$ denota el conjunto potencia de $N$. Además, la cardinalidad de los conjuntos se denotará con la letra minúscula correspondiente, por ejemplo, $s = |S|$, $t = |T|$, $q = |Q|$.

**Definición 1** *Por un juego en forma de función característica, se entenderá una pareja* $(N, v)$ , *donde* $N = \{1, ..., n\}$ *es un conjunto finito de jugadores y* $v$ *es una función*

$$v : 2^N \to \mathbb{R}$$

*tal que* $v(\varnothing) = 0$*.*

La función $v : 2^N \to \mathbb{R}$ por sí misma la llamaremos juego tradicional, ya que el conjunto de jugadores será un conjunto fijo a lo largo de todo este trabajo. Denotaremos por $J$ al espacio de juegos tradicionales, es decir,

$$J = J^{(n)} = \{v : 2^N \to \mathbb{R} \mid v(\varnothing) = 0\}$$

Y es fácil mostrar que este conjunto de juegos tradicionales con espacio de jugadores $N = \{1, ..., n\}$ forma un espacio vectorial sobre el campo de los números reales si se define la suma y el producto como sigue:

**(a)** $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$ para todo $v_1, v_2 \in J$

**(b)** $(cv)(S) = cv(S)$ para todo $v \in J$ y $c \in \mathbb{R}$

A los subconjuntos $S$ de $N$ se les llama *coaliciones* y son subconjuntos de jugadores que potencialmente pueden jugar unidos. La coalición $S = N$ es denominada la *gran coalición*. Si los jugadores que forman $S$ juegan unidos tienen una valía $v(S)$; como ejemplo, las cantidades $v(S)$ pueden ser ganancias conjuntas, costos comúnes o simplemente 1 o 0 dependiendo de si la coalición $S$ logra o no mayoría en una votación. De cualquier forma a $v(S)$, siempre lo consideraremos como un número real. A este tipo de juegos se les conoce como juegos tradicionales con pagos laterales o de utilidad transferible.

Se supone que cada uno de los jugadores conoce la función $v$. Además, ellos negocian libremente para formar coaliciones. Si la coalición $S$ se forma tiene una valía $v(S)$. Una coalición se considera formada no sólo cuando los jugadores que la constituyen han decidido jugar unidos, sino que también han acordado la forma de repartir la ganancia conjunta.

Claramente, los jugadores que pertenecen a coaliciones valiosas son valiosos en el juego, pero el problema es cuantificar esta valía. Se desea asignar a cada juego $v$ un vector $x \in \mathbb{R}^n$, donde

$x_i$ sea o represente el pago "justo" para el jugador $i$ en el juego. Por esta razón, a cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$ se le llama vector de pago. Algunos conceptos de solución se limitan a asignar un conjunto de vectores de pago al juego tradicional. A grandes rasgos, este es el problema central que se aborda en este tipo de juegos.

**Ejemplo 2 (Manejo de inversiones)** *Un tesorero de una asociación X (jugador* $1$*) desea invertir la cantidad de* $\$1,800,000$ *sobre una base a corto plazo (de 3 meses). En México, el tipo de interés anual es una función de la suma invertida.*

| *Depósito* | *Tasa de interés anual* |
|---:|---:|
| $0$ - $1,000,000$ | $7.75\,\%$ |
| $1,000,000$ - $3,000,000$ | $10.25\,\%$ |
| $3,000,000$ - $5,000,000$ | $12\,\%$ |

*El tesorero de la asociación X contacta a un tesorero de otra asociación Y (jugador* $2$*) y también a un tesorero de otra asociación Z (jugador* $3$*). El tesorero Y está de acuerdo con depositar* $\$900,000$ *en el fondo común y el tesorero Z* $\$300,000$*. Así pues, se alcanza un fondo de* $\$3,000,000$ *y la tasa de interés será del* $12\,\%$*. ¿Cómo se debería repartir la ganancia entre las tres asociaciones?.*

*Simples cálculos dan lugar a que el interés total que cada coalición puede asegurar, está dado por la función característica:*

| $S$ | $v(S)$ |
|---|---|
| $\{1\}$ | $46,125$ |
| $\{2\}$ | $17,437.5$ |
| $\{3\}$ | $5,812.5$ |
| $\{1,2\}$ | $69,187.5$ |
| $\{1,3\}$ | $53,812.5$ |
| $\{2,3\}$ | $30,750$ |
| $\{1,2,3\}$ | $90,000$ |

Dar soluciones axiomáticas (o valores), es definir operadores

$$\varphi : J \to \mathbb{R}^n$$

con lo que obtiene que cualquiera que éste sea, en menor o mayor medida resuelve todos los juegos tradicionales en $J$ y el problema de resolver todos los juegos en $J$ se cambia a seleccionar una "buena" $\varphi$. Para ello, se pide que este operador satisfaga axiomas o propiedades deseables, para después demostrar que existe un único operador que los satisface.

A continuación se presentan dos soluciones axiomáticas importantes en la literatura.

### 2.1.1. Valor de Shapley

Shapley (1953) demuestra que sólo hay un operador $Sh : J \to \mathbb{R}^n$ que satisface el siguiente conjunto de axiomas.

**Axioma 3 (Aditividad)** $Sh(v_1 + v_2) = Sh(v_1) + Sh(v_2)$ *para todo* $v_1, v_2 \in J$*.*

Ahora, considere un juego tradicional y suponga que los jugadores intercambian papeles. Adicionalmente, suponga que cualquier grupo de jugadores logra la misma valía que la que conseguían en el juego tradicional original los jugadores a los que sustituyen. El axioma de simetría pide que el vector de pagos asociado a este nuevo juego tradicional, sea la permutación correspondiente del vector de pago asociado al juego tradicional original; dicho brevemente, si los jugadores intercambian papeles, entonces deben intercambiar pagos. A continuación se precisa esta idea.

Denotaremos por $S_n$ al conjunto de permutaciones del conjunto de jugadores, es decir, $S_n = \{\theta : N \to N \mid \theta \text{ es biyectiva}\}$. Así, si $\theta \in S_n$ y $S \subseteq N$, entonces $\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}$. Cada $\theta \in S_n$ se interpretará como un intercambio de papeles en el juego tradicional, en particular el jugador $i$ pasará a tomar el papel del jugador $\theta(i)$.

**Axioma 4 (Simetría)** $Sh(\theta \cdot v) = \theta \cdot Sh(v)$ *para todo* $v \in J$ *y para todo* $\theta \in S_n$*, donde el juego tradicional* $\theta \cdot v \in J$ *se define como*

$$(\theta \cdot v)(S) = v(\theta^{-1}(S))$$

*para cada* $S \subseteq N$.

**Axioma 5 (Eficiencia)** $\sum_{i \in N} Sh_i(v) = v(N)$ *para todo* $v \in J$.

En otras palabras, el monto que se reparte entre todos los jugadores bajo $Sh$ es exactamente el monto $v(N)$ que puede conseguir la gran coalición.

Finalmente, se requiere un axioma donde alguien que sólo juegue el papel de observador del juego, debe ser excluido de la repartición. Formalmente, se dirá que $i \in N$ es un jugador nulo en $v \in J$ si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N$.

**Axioma 6 (Nulidad)** *Si* $i \in N$ *es un jugador nulo en* $v \in J$, *entonces* $Sh_i(v) = 0$ *para todo* $v \in J$.

**Teorema 7 (Shapley, 1953)** *Existe un único operador* $Sh : J \to \mathbb{R}^n$ *que satisface los axiomas de aditividad, simetría, eficiencia y nulidad; y está dado por:*

$$Sh_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \not\ni i}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[ v(S \cup \{i\}) - v(S) \right]$$

La solución anterior es un "compromiso razonable" para cada uno de los jugadores. Para comprender mejor su significado, considere el siguiente proceso aleatorio:

**(a)** Se elige la cardinalidad de una coalición que no contenga al jugador $i$ de acuerdo a una distribución uniforme sobre el conjunto $\{0, ..., n-1\}$.

**(b)** Se elige aleatoriamente una coalición $S$ con la cardinalidad dada en (a), de acuerdo a una distribución uniforme sobre las $\binom{n-1}{s}$ coaliciones disponibles.

**(c)** Se le da al jugador $i$ la utilidad marginal que aporta a $v(N)$ al incorporarse a $S$, es decir, $v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

Entonces, $Sh_i(v)$ es el pago esperado para el jugador $i$ en este proceso.

Así, el pago que el Valor de Shapley asigna a cada jugador es una media ponderada de las contribuciones marginales de ese jugador a las coaliciones a las que se incorpora. Los factores de ponderación $\frac{1}{n\binom{n-1}{s}}$ forman una distribución de probabilidad sobre dichas coaliciones, al escoger de modo equiprobable el cardinal de la coalición y, posteriormente, una de las coaliciones de dicho cardinal.

### 2.1.2. Valor de Solidaridad

Nowak y Radzik (1994) introducen un nuevo valor para juegos tradicionales (al que le llaman valor de Solidaridad y lo denotamos por $\phi$) y demuestran que es la única solución que satisface los axiomas de aditividad, simetría y eficiencia usados en el valor de Shapley, y un axioma adicional en términos de contribuciones marginales promedio de los miembros de coaliciones que se pueden formar.

Formalmente, para cada coalición no vacía $S$ y cada $v \in J$, se define la cantidad

$$A^v(S) = \frac{1}{s}\sum_{j\in S}[v(S) - v(S\backslash\{j\})]$$

Claramente, $A^v(S)$ es la contribución marginal promedio de un miembro de la coalición $S$. A continuación se define el axioma adicional para la caracterización de este valor.

**Axioma 8 (A-nulidad)** *Si el jugador $i \in N$ es un jugador A-nulo en el juego tradicional $v \in J$, esto es, $A^v(S) = 0$ para toda coalición $S$ que contiene a $i$, entonces $\phi_i(v) = 0$ para todo $v \in J$.*

**Teorema 9 (Nowak y Radzik, 1994)** *Existe un único operador $\phi : J \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de aditividad, simetría, eficiencia y A-nulidad; y está dado por la expresión*

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni i}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} A^v(S)$$

## 2.2. Juegos en forma de función de partición

En la sección anterior se definió la valía de una coalición $S \subseteq N$ en términos de una función característica, la cual está definida sobre el conjunto potencia $2^N$. Aquí se verá otra formulación para juegos cooperativos, describiendo la valía de una coalición en términos de una función de partición, la cual será definida sobre el conjunto de todas las particiones de $N$.

Tal como en el caso de juegos tradicionales, consideraremos un conjunto finito y fijo de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$. Dado un subconjunto $S \subseteq N$, denotemos por $PT(S)$ el conjunto de particiones de $S$, así

$$\{S_1, S_2, ..., S_m\} \in PT(S) \;\text{ sii }\; \bigcup_{i=1}^{m} S_i = S,\; S_j \neq \varnothing\; \forall j,\; S_j \cap S_k = \varnothing\; \forall j \neq k$$

Para simplificar notación, hacemos $PT := PT(N)$. Y sea $ECL = \{(S, Q) \mid S \in Q \in PT\}$ el conjunto de *coaliciones encajadas*, es decir, el conjunto de coaliciones junto con la especificación de la estructura coalicional formada por los otros jugadores.

**Definición 10** *Una función*

$$w : ECL \to \mathbb{R}$$

*que asigna un valor real $w(S, Q)$, a cada coalición encajada $(S, Q)$ se le llama juego en forma de función de partición. El espacio de juegos en forma de función de partición con conjunto de jugadores $N$ será denotado por $G$, i.e.,*

$$G = G^{(n)} = \{w \mid w : ECL \to \mathbb{R}\}$$

El número $w(S, Q)$ representa la valía de la coalición $S$, dada la estructura coalicional $Q$. Podemos ver que en juegos en forma de función de partición (y que en este trabajo, sólo los llamaremos "juegos"), la valía de alguna coalición $S$ depende no sólo en lo que los miembros de $S$ obtienen conjuntamente, sino que también en la forma en que se organizan los jugadores en $N \backslash S$.

**Ejemplo 11 (Competencia de mercado)** *Consideremos el siguiente juego $w$, que describe la situación donde tenemos 3 compañías que están compitiendo por un mercado. Cuando los jugadores $1, 2$ y $3$ están por su propia cuenta, cada uno de ellos obtiene una valía de 50 unidades monetarias. Sin embargo, si cualesquiera de ellos se juntan, pueden acaparar una mayor parte del mercado y así obtener más ganancia, afectando al otro jugador. Finalmente, si se forma la gran coalición, acaparan todo el mercado y así obtienen la máxima ganancia de 200 unidades* *monetarias.*

| *Partición* | *Valía* | | |
|---|---|---|---|
| $\{1\},\{2\},\{3\}$ | 50 | 50 | 50 |
| $\{1,2\},\{3\}$ | 120 | 40 | |
| $\{1,3\},\{2\}$ | 125 | 45 | |
| $\{2,3\},\{1\}$ | 130 | 10 | |
| $\{1,2,3\}$ | 200 | | |

**Ejemplo 12 (Juego de contaminación)** *Supongamos que cuando los jugadores* $1$, $2$ *y* $3$ *están por su propia cuenta, cada uno de ellos obtiene una valía de* $-20$ *por los efectos de la contaminación. Sin embargo, si cualesquiera dos de ellos se juntan, pueden limpiar parcialmente la contaminación y arrojar el resto de la contaminación al otro jugador. En este caso las coaliciones de dos jugadores obtienen una valía de* $0$ *y el jugador restante obtiene* $-45$ *si es el jugador* $1$, $-50$ *si es el jugador* $2$, *y* $-55$ *si es el jugador* $3$. *Finalmente, si se forma la gran coalición, aún más contaminación se puede limpiar, resultando una valía de* $-30$.

| *Partición* | *Valía* | | |
|---|---|---|---|
| $\{1\},\{2\},\{3\}$ | $-20$ | $-20$ | $-20$ |
| $\{1,2\},\{3\}$ | $0$ | $-45$ | |
| $\{1,3\},\{2\}$ | $0$ | $-50$ | |
| $\{2,3\},\{1\}$ | $0$ | $-55$ | |
| $\{1,2,3\}$ | $-30$ | | |

Por cada $S \subseteq N$, sea $[S]$ la partición de $S$ donde todos sus elementos están separados, i.e., $[S] = \{\{j\} \mid j \in S\}$. Para $Q \in PT$, $S \in Q$ e $i \in N$, definimos $Q_S = \{S\} \cup [N \backslash S]$, $S_{+k} = S \cup \{k\}$, $S_{-k} = S \backslash \{k\}$ y $Q^i$ denota el elemento de $Q$ donde se encuentra el jugador $i$. Adicionalmente, se conservará la notación para la cardinalidad de conjuntos por su correspondiente letra minúscula, aquí por ejemplo $q_i = \left|Q^i\right|$.

Ahora bien, dados $w_1, w_2 \in G$ y $c \in \mathbb{R}$, podemos definir la suma $w_1 + w_2$ y el producto $cw_1$, en $G$, en la forma usual, i.e.,

$$(w_1 + w_2)(S,Q) = w_1(S,Q) + w_2(S,Q) \quad \text{y} \quad (cw_1)(S,Q) = cw_1(S,Q)$$

respectivamente. De esta forma, es sencillo mostrar que $G$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones.

Como anteriormente, una *solución* sobre $G$ será un operador

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^n$$

Si $\varphi$ es una solución y $w \in G$, entonces podemos interpretar $\varphi_i(w)$ como el pago que el jugador $i$ debería de esperar del juego $w$. Y de igual forma, el propósito es caracterizar soluciones en base a un conjunto de propiedades deseables.

Los axiomas más comunes que se pueden encontrar en la literatura sobre juegos son los de linealidad, simetría y eficiencia; los cuales se definen a continuación.

**Axioma 13 (Linealidad)** *La solución $\varphi$ es lineal si*

**i)** $\varphi(w_1 + w_2) = \varphi(w_1) + \varphi(w_2)$

**ii)** $\varphi(cw_1) = c\varphi(w_1)$

*para todo $w_1, w_2 \in G$ y $c \in \mathbb{R}$.*

**Axioma 14 (Simetría)** *La solución $\varphi$ se dice simétrica si y sólo si $\varphi(\theta \cdot w) = \theta \cdot \varphi(w)$ por cada $\theta \in S_n$ y $w \in G$, donde el juego $\theta \cdot w$ está definido como*

$$(\theta \cdot w)(S, Q) = w[\theta^{-1}(S, Q)]$$

*para cada $(S, Q) \in ECL$.*

**Axioma 15 (Eficiencia)** *La solución $\varphi$ es eficiente si*

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(w) = w(N, \{N\})$$

*para todo $w \in G$.*

La interpretación de estos axiomas es similar a los axiomas para soluciones a juegos tradicionales, sólo hay que definir la acción de $\theta \in S_n$ sobre $ECL$: si $\theta \in S_n$ y $(S_1, \{S_1, S_2, ..., S_l\}) \in$

$ECL$, entonces

$$\theta(S_1, \{S_1, S_2, ..., S_l\}) = (\theta(S_1), \{\theta(S_1), \theta(S_2), ..., \theta(S_l)\})$$

Debido a la gran riqueza de los juegos en forma de función de partición, varias soluciones se han dado para este tipo de juegos. A continuación se presenta una recopilación de los trabajos más importantes en lo que a soluciones axiomáticas respecta.

### 2.2.1. Valor de Myerson

El artículo de Myerson (1977) fue el primero en proponer la caracterización de una solución para estos juegos en base a tres axiomas: linealidad, simetría y otro llamado "portador", el cual engloba eficiencia y nulidad para este tipo de juegos.

Se necesitará notación adicional. Para cualesquiera $Q, \overline{Q} \in PT$, definimos

$$Q \wedge \overline{Q} = \left\{ S \cap \overline{S} \mid S \in Q, \overline{S} \in \overline{Q}, S \cap \overline{S} \neq \varnothing \right\}$$

Dados $w \in G$ y $\overline{S} \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, se dice que $\overline{S}$ es un *portador* de $w$ si y sólo si $w(S, Q) = w\left(S \cap \overline{S}, Q \wedge \{\overline{S}, N \backslash \overline{S}\}\right)$ para todo $(S, Q) \in ECL$; es decir, lo que obtienen los jugadores de $S$ en $Q$ es lo mismo que obtienen al restringirse a $\overline{S}$. Y notemos que $N$ siempre es un portador. El siguiente axioma propone que el monto que obtiene la gran coalición sea repartido entre los miembros de un portador.

**Axioma 16 (Portador)** *Para todo $w \in G$ y todo $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, si $S$ es un portador de $w$, entonces*

$$\sum_{i \in S} \varphi_i(w) = w(N, \{N\})$$

**Teorema 17 (Myerson, 1977)** *La solución $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ dada por*

$$\varphi_i(w) = \sum_{(S,Q) \in ECL} (-1)^{q-1}(q-1)! \cdot \left( \frac{1}{n} - \sum_{T \in Q \backslash \{S\}, T \not\ni i} \frac{1}{(q-1)(n-t)} \right) \cdot w(S, Q)$$

*para todo $i \in N$ y todo $w \in G$; es la única solución que satisface los axiomas de linealidad, simetría y portador.*

### 2.2.2. El valor de Albizuri et al.

Albizuri et al. (2005) caracterizan una solución usando cinco axiomas, de los cuales tres de ellos son los usuales linealidad, simetría y eficiencia; otro es un axioma de "oligarquía" y un último que especifica simetría en coaliciones encajadas. Formalmente,

**Axioma 18 (Oligarquía)** *Sea $w \in G$. Si existe $T \subseteq N$ tal que*

$$w(S,Q) = \begin{cases} w(N,\{N\}) & si\ S \supseteq T \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

*entonces,* $\sum_{i \in T} \varphi_i(w) = w(N,\{N\})$.

Básicamente, este axioma se refiere a juegos en los cuales hay una coalición específica con la cual se obtiene la valía de la gran coalición $w(N,\{N\})$, mientras que las demás coaliciones encajadas no figuran. Y en estos juegos en particular, pareciera natural pedir que la valía de la gran coalición se reparta entre los jugadores de tal coalición específica.

Ahora, sean $S \subseteq N$ y $\pi_S$ una biyección sobre $\{(T,Q) \in ECL \mid T = S\}$. Por cada $w \in G$, denotamos por $\pi_S \cdot w$ el juego definido como

$$(\pi_S \cdot w)(T,Q) = \begin{cases} w(T,Q) & \text{si } T \neq S \\ w(\pi_S(S,Q)) & \text{si } T = S \end{cases}$$

**Axioma 19 (Simetría en coaliciones encajadas)** *Sea $S \subseteq N$. Dada una biyección $\pi_S$ sobre $\{(T,Q) \in ECL \mid T = S\}$ para todo $w \in G$ y todo $i \in N$, se cumple que*

$$\varphi_i(\pi_S \cdot w) = \varphi_i(w)$$

Notemos que de acuerdo a este axioma, lo que importa son las valías de diferentes coaliciones encajadas y no qué coaliciones encajadas corresponden a tales valías.

De esta forma, la caraterización es la siguiente.

**Teorema 20 (Albizuri et al., 2005)** *Existe una única solución $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de linealidad, simetría, eficiencia, oligarquía y simetría en coaliciones encajadas.*

*Más aún, ésta tiene por expresión*

$$\varphi_i(w) = \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\ni i}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!P(S,N)} w(S,Q) - \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!P(S,N)} w(S,Q)$$

*donde* $P(S,N) = |\{(T,Q) \in ECL \mid T = S\}|$. *De hecho,* $P(S,N) = p(n-s)$ *donde* $p(k)$ *representa el número de particiones de cualquier conjunto* $K$ *de cardinalidad* $k$.

### 2.2.3. Valor de Shapley

Pham Do y Norde (2007) definen una extensión de el valor de Shapley para la clase de juegos en forma de función de partición. En este caso, caracterizan un valor con los axiomas de linealidad, simetría, eficiencia y otro de nulidad para soluciones a este tipo de juegos. La adaptación del axioma de nulidad es como sigue.

**Definición 21** *Sean* $w \in G$ *e* $i \in N$. *El jugador* $i$ *se dice I-nulo*[1] *en el juego* $w$, *si para todo* $P \in PT(N_{-i})$ *y todo* $S \in P$, *se cumple*

$$w(S, P \cup \{\{i\}\}) = w(S_{+i}, (P \backslash \{S\}) \cup \{S_{+i}\})$$

De esta forma, se puede dar la siguiente versión del axioma de nulidad para estos juegos, en donde a jugadores que tengas contribuciones marginales igual a cero, se les asigna un pago de cero.

**Axioma 22 (I-Nulidad)** *La solución* $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ *satisface la propiedad de I-nulidad si para todo* $w \in G$ *y para todo* $i \in N$ *I-nulo en* $w$, *se tiene que* $\varphi_i(w) = 0$.

Así entonces, en el siguiente teorema se verá que hay un único operador que satisface los axiomas de linealidad, simetría, eficiencia y I-nulidad; y que de hecho, tiene una estrecha relación con el valor de Shapley para juegos tradicionales.

[1] *Dado que en este trabajo se manejarán varias nociones del axioma de nulidad, se hará diferencia usando términos como I-nulo, I-nulidad, etcétera.*

**Teorema 23 (Pham Do y Norde, 2007)** *Existe una única solución que satisface los axiomas de linealidad, simetría, eficiencia y I-nulidad; y está dada por*

$$\varphi_i(w) = Sh_i(v)$$

*para todo* $i \in N$ *y todo* $w \in G$*, donde* $Sh : J \to \mathbb{R}^n$ *es el valor de Shapley para juegos tradicionales y* $v \in J$ *está definido como:*

$$v(S) = w(S, \{S, [N \backslash S]\})$$

*para cada* $S \subseteq N$*.*

### 2.2.4. Valor de Consenso

Ju (2007) propone una solución, a la que llama valor de consenso y lo define como el punto medio entre el valor de Shapley de Pham Do y Norde (2007) y la solución $\psi : G \to \mathbb{R}^n$, definida como

$$\begin{aligned} \psi_i(w) &= \frac{w(N, \{N\})}{n} + \sum_{\substack{\varnothing \neq S \subset N \\ S \not\ni i}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} w(\{i\}, \{S\} \cup [N \backslash S_{+i}] \cup \{\{i\}\}) \\ &\quad - \sum_{j \in N_{-i}} \sum_{S \subset N \backslash \{i,j\}} \frac{s!(n-s-2)!}{n!} w(\{j\}, [N \backslash S_{+i}] \cup \{S_{+i}\}) \end{aligned}$$

la cual nos dice cuánto puede ganar un jugador en un juego cuando uno se enfoca en estructuras donde tal jugador actúa por cuenta propia. O directamente, en algunas situaciones donde los jugadores no cuentan con la información de valías de muchas coaliciones encajadas, pero se conocen las valías de las participaciones individuales de cada jugador, así como también la de la gran coalición.

Con el fin de caracterizar este valor, se utiliza una variante del concepto de jugador nulo en el valor de Shapley para juegos en forma de función de partición, en donde define lo que es un jugador "cuasi-nulo". De esta forma, el autor propone un axioma de "cuasi-nulidad", en el cual no asigna pago de cero a jugadores cuasi-nulos.

**Definición 24** *En un juego $w \in G$, el jugador $i \in N$ es un jugador cuasi-nulo si para todo $P \in PT(N_{-i})$ y todo $S \in P$, se cumple*

$$w(S, P \cup \{\{i\}\}) = w(S_{+i}, (P \backslash \{S\}) \cup \{S_{+i}\})$$

*y*

$$w(\{i\}, [N]) = 0$$

Entonces, se puede verificar que un jugador cuasi-nulo $i$ será I-nulo si $w(\{i\}, P \cup \{\{i\}\}) = 0$ para todo $P \in PT(N_{-i})$.

**Axioma 25 (Cuasi-nulidad)** *Si $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$, $w \in G$ e $i \in N$ es un jugador cuasi-nulo en $w$, entonces*

$$\varphi_i(w) = \frac{w(N, \{N\}) - \sum_{j \in N} w(\{j\}, [N])}{2n} + w(\{i\}, [N])$$

De este modo, el valor de consenso se caracteriza de la siguiente forma.

**Teorema 26 (Ju, 2007)** *Existe una única solución $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de linealidad, simetría, eficiencia y cuasi-nulidad; y ésta es el valor de consenso.*

### 2.2.5. El valor de Macho-Stadler et al.

Como ejemplo final, Macho-Stadler et al. (2006) caracterizan una solución con los axiomas de linealidad, simetría, influencia similar y una nueva versión de nulidad. A continuación se precisará en los conceptos de estos dos últimos axiomas.

Estos autores proponen que dos jugadores en "ambientes similares" deberían obtener pagos similares. La noción de ambiente similar y de influencia similar se formaliza en la siguiente definición.

**Definición 27** *Se dice que un par de jugadores $\{i, j\} \subseteq N$, $i \neq j$, tiene influencia similar en los juegos $w_1, w_2 \in G$ si $w_1(S, Q) = w_2(S, Q)$ para todo $(S, Q) \in ECL \backslash \{(T, P), (T, P')\}$, $w_1(T, P) = w_2(T, P')$, y $w_1(T, P') = w_2(T, P)$; donde la única diferencia entre las particiones $P$ y $P'$ es que $\{i\}, \{j\} \in P \backslash \{T\}$, mientras que $\{i, j\} \in P' \backslash \{T\}$.*

**Axioma 28 (Influencia similar)** *La solución* $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ *satisface la propiedad de influencia similar si para cualesquiera dos juegos* $w_1, w_2 \in G$ *y para cualquier par de jugadores* $\{i, j\} \subseteq N$ *que tengan influencia similar en tales juegos, se tiene que*

$$\varphi_i(w_1) = \varphi_i(w_2) \quad y \quad \varphi_j(w_1) = \varphi_j(w_2)$$

La versión de nulidad que manejan estos autores es la llamada "nulidad débil", en la cual asignan un pago de cero a jugadores que no aportan nada al juego.

**Definición 29** *Sean* $i \in N$ *y* $w \in G$*. Diremos que el jugador* $i$ *es un jugador nulo débilmente en* $w$ *si para todo* $(S, Q) \in ECL$*,*

$$w(S, Q) = w(S_{-i}, Q')$$

*donde* $Q'$ *es una partición obtenida de* $Q$ *moviendo al jugador* $i$ *a algún conjunto en* $Q$*.*

**Axioma 30 (Nulidad débil)** *Si el jugador* $i \in N$ *es nulo débilmente en* $w \in G$*, entonces* $\varphi_i(v) = 0$*.*

En el siguiente teorema, estos autores muestran que hay un único valor que satisface los axiomas de linealidad, simetría, influencia similar y nulidad débil; y además dan una fórmula simple y explícita para calcularlo.

**Teorema 31 (Macho-Stadler et al., 2006)** *Existe una única solución* $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ *que satisface los axiomas de linealidad, simetría, influencia similar y nulidad débil. La solución está dada por*

$$\varphi_i(w) = \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\ni i}} \frac{(s-1)! \prod\limits_{T\in Q\setminus\{S\}} (t-1)!}{n!} w(S,Q) - \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i}} \frac{s! \prod\limits_{T\in Q\setminus\{S\}} (t-1)!}{(n-s)n!} w(S,Q)$$

para todo $w \in G$ y para todo $i \in N$.

# Capítulo 3

# Teoría de representaciones

La teoría de representaciones de grupos es uno de los temas en álgebra abstracta con más aplicaciones en la actualidad. El análisis espectral en diseño de experimentos, el diseño de redes de comunicación, la teoría de códigos, son algunos de los campos en donde esta teoría encuentra aplicación. En particular, más adelante podrá confirmarse la importancia del uso de esta teoría aplicada a la teoría de juegos cooperativos en forma de función de partición.

En este capítulo se presentan los conceptos y resultados básicos de la teoría de representaciones de grupos finitos, así como también una breve introducción a la teoría de caracteres. La teoría es extensa y, cabe mencionar que en este trabajo sólo se presentan las definiciones y resultados necesarios para el desarrollo del mismo. Este capítulo está basado principalmente de Fulton y Harris (1991).

## 3.1. Representaciones de grupos finitos

Primero, se formalizará la noción de un grupo, para después definir lo que es una representación de un grupo finito.

**Definición 32** *Un conjunto no vacío de elementos $H$, se dice que forma un grupo si en $H$ está definida una operación binaria $\cdot : H \times H \to H$ tal que*

**i)** $h_1 \cdot h_2 \in H$ *para todo* $h_1, h_2 \in H$.

**ii)** $h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3) = (h_1 \cdot h_2) \cdot h_3$ *para todo* $h_1, h_2, h_3 \in H$.

**iii)** *$\exists e \in H$ tal que $h \cdot e = e \cdot h = h$ para todo $h \in H$.*

**iv)** *Para todo $h \in H$, $\exists h^{-1} \in H$ tal que $h \cdot h^{-1} = h^{-1} \cdot h = e$.*

**Definición 33** *Una representación del grupo finito $H$ en el espacio vectorial de dimensión finita $X$, es un homormofismo de grupos*

$$\rho : H \rightarrow GL(X)$$

*donde, $GL(X) = \{T : X \rightarrow X \mid T \text{ es lineal e invertible}\}$.*

*En otras palabras, una representación para $H$ es un mapeo que asigna a cada elemento $h \in H$ una transformación lineal $\rho(h) : X \rightarrow X$ que respeta multiplicación:*

$$\rho(h_1 h_2) = \rho(h_1)\rho(h_2)$$

*para todo $h_1, h_2 \in H$.*

Uno usualmente abusa de la notación y se habla acerca de la representación $X$ sin mencionar explícitamente el homomorfismo $\rho$. De esta forma, cuando se aplica la transformación lineal correspondiente a $h \in H$ en el elemento $x \in X$, escribimos $h \cdot x$ en lugar de $(\rho(h))(x)$.

**Ejemplo 34** *Es fácil verificar que $\mathbb{R}^2$ es una representación para el grupo $\mathbb{Z}$ (grupo de los números enteros con la operación suma), definiendo el homomorfismo $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$ como*

$$n \overset{\rho}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*donde $GL_2(\mathbb{R}) = \{A_{2\times 2} \mid \det A \neq 0\}$.*

*Del mismo modo, $\mathbb{R}^2$ también es una representación para el grupo $\mathbb{Z}$ con el homomorfismo*

$$n \overset{\rho}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 35** *El espacio de juegos tradicionales $J$ es una representación para el grupo simétrico*

$S_n$. *Donde, hay un homomorfismo de grupos* $\rho : S_n \to GL(J)$, *cuya acción está dada por*

$$(\theta \cdot v)(S) := [\rho(\theta)(v)](S) = v[\theta^{-1}(S)]$$

*para todo* $\theta \in S_n$, $v \in J$ *y* $S \subseteq N$.

**Observación 36** *En este trabajo se mantendrá que* $S_n$ *es el grupo de permutaciones de* $N$, *con la operación composición.*

**Definición 37** *Sean* $X_1$ *y* $X_2$ *dos representaciones para el grupo* $H$.

- *La transformación lineal* $T : X_1 \to X_2$ *es* $H$*-equivariante (*$H$*-lineal) si*

  $$T(h \cdot x) = h \cdot T(x)$$

  *para todo* $h \in H$ *y para todo* $x \in X_1$.

  $$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{T} & X_2 \\ h\downarrow & H & \downarrow h \\ X_1 & \xrightarrow{T} & X_2 \end{array}$$

  *para todo* $h \in H$.

- $X_1$ *y* $X_2$ *son representaciones (para* $H$*) isomorfas,* $X_1 \simeq X_2$, *si existe entre ellos un isomorfismo*[1] $H$*-equivariante.*

**Definición 38** *Sea* $Y$ *un subespacio del espacio vectorial* $X$.

- $Y$ *se dice invariante (bajo la acción del grupo* $H$*) si por cada* $y \in Y$ *y por cada* $h \in H$, *se tiene que*

  $$h \cdot y \in Y$$

[1] $T : X_1 \to X_2$ *se dice isomorfismo si cumple que:*

**i)** Si $x, y \in X_1$ *son tales que* $T(x) = T(y)$, *entonces* $x = y$.

**ii)** $\operatorname{Im} T = X_2$.

- *$Y$ es irreducible si es invariante y no contiene subespacios propios no triviales invariantes.*

**Ejemplo 39** *Si* $\dim Y = 1$*, entonces* $Y$ *es irreducible.*

**Ejemplo 40** $\mathbb{R}^2$ *como una representación para* $\mathbb{Z}$*, como en el Ejemplo 34, no es irreducible. Nótese que* $\{(x,0)\}$ *es un subespacio invariante.*

**Definición 41** *Si* $X$ *es una representación para* $H$*,* $Y \subset X$ *un subespacio vectorial, entonces* $Y$ *es una subrepresentación para* $H$ *si* $Y$ *es invariante bajo la acción de* $H$*.*

**Proposición 42** *Si* $Y$ *es una subrepresentación de una representación* $X$ *para el grupo finito* $H$*, entonces existe un subespacio complementario invariante* $Y'$ *de* $X$*, tal que*

$$X = Y \oplus Y'$$

**Observación 43** *En todo el desarrollo de este trabajo, se usará el símbolo* $\oplus$*, para denotar la suma directa de dos espacios vectoriales.*

**Ejemplo 44** *En la Proposición anterior, es necesaria la hipótesis de que* $H$ *sea un grupo finito. Por ejemplo, para la representación del Ejemplo 34 no existe un subespacio complementario invariante a* $\{(x,0)\}$*.*

**Corolario 45** *Si* $H$ *es un grupo finito y* $X$ *una representación para* $H$*, entonces* $X$ *se descompone como suma directa de representaciones irreducibles.*

Esta última propiedad es la llamada "reducibilidad" y se verá que el hecho de que la descomposición de una representación arbitraria en suma directa de irreducibles sea única, es una consecuencia del siguiente:

**Teorema 46 (Lema de Schur)** *Sean* $X_1$ *y* $X_2$ *representaciones irreducibles para el grupo* $H$*. Si* $T : X_1 \to X_2$ *es* $H$*-equivariante, entonces* $T = 0$ *o* $T$ *es un isomorfismo.*

*Más aún, si* $X_1$ *y* $X_2$ *son espacios vectoriales complejos, entonces* $T$ *es único salvo por multiplicación por un escalar* $\lambda \in \mathbb{C}$*.*

**Demostración.** La primera parte se sigue de que $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$ son subespacios invariantes de $X_1$ y $X_2$, respectivamente, por lo que es cero o es el espacio total.

Si los espacios vectoriales son complejos, $T, L : X_1 \to X_2$ $H$-equivariantes, entonces $\phi = T^{-1} \circ L : X_1 \to X_1$ debe de tener un eigen-valor $\lambda \in \mathbb{C}$. Como el eigen-espacio correspondiente a $\lambda$ es invariante, entonces debe de ser todo $X_1$, i.e., $\phi = \lambda I$ o $L = \lambda T$. ■

Este resultado es una de las razones por las cuales vale la pena "arrastrar" un grupo de simetrías cuando sólo es uno. Su simplicidad esconde el hecho de que es una herramienta muy poderosa.

**Proposición 47** *Toda representación $X$ de un grupo finito $H$ tiene una descomposición*

$$X = X_1^{\oplus a_1} \oplus X_2^{\oplus a_2} \oplus \cdots \oplus X_j^{\oplus a_j}$$

*donde las $X_i$'s son representaciones irreducibles distintas. Más aún, la descomposición es única en el sentido de que las $X_i$'s son únicas y las $a_i$'s también.*

En este trabajo nos restringiremos al estudio de representaciones para el grupo simétrico $S_n = \{\theta : N \to N \mid \theta \text{ es biyectiva}\}$. Hay dos problemas básicos que se tratarán en esta sección:

**i)** Describir todas las representaciones irreducibles para el grupo $S_n$.

**ii)** Encontrar técnicas para descomponer una representación dada de $S_n$ en suma de irreducibles. En particular, determinar las multiplicidades $a_i$'s para una representación arbitraria $X$.

### 3.1.1. Representaciones irreducibles para $S_3$

Consideremos el grupo no abeliano más simple, $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$. Donde,

$$(1): \begin{array}{c} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 3 \end{array} \quad (12): \begin{array}{c} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 3 \end{array} \quad (13): \begin{array}{c} 1 \to 3 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 1 \end{array} \quad (23): \begin{array}{c} 1 \to 1 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 2 \end{array} \quad (123): \begin{array}{c} 1 \to 3 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 2 \end{array} \quad (132): \begin{array}{c} 1 \to 2 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 1 \end{array}$$

Como $S_3$ es un grupo de permutaciones, tenemos una representación natural (llamada representación permutación), en la cual $S_3$ actúa sobre $\mathbb{R}^3$ permutando las coordenadas de $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\theta \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\theta^{-1}(1)}, x_{\theta^{-1}(2)}, x_{\theta^{-1}(3)})$$

aunque debe notarse que esta representación no es irreducible.

$S_3$ tiene tres representaciones irreducibles (hasta isomorfismo):

- $U_3$: La representación trivial; $U_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$.
- $U_3'$: La representación alternante; $\theta \cdot x = sgn(\theta) \cdot x$ para $\theta \in S_3$, $x \in \mathbb{R}$.
- $V_3$: La representación estándar; $V_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Notemos que $\dim U_3 = \dim U' = 1$ y $\dim V_3 = 2$. Cabe aclarar que cada permutación se puede escribir como producto de un número par (impar, respectivamente) de transposiciones, en este caso se dice que la permutación es par (impar, respectivamente). Así, para $\theta \in S_3$, definimos

$$sgn(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \text{ es par} \\ -1 & \text{si } \theta \text{ es impar} \end{cases}$$

Comencemos el análisis de una representación arbitraria $Z$ para $S_3$ considerando la acción del subgrupo abeliano $A_3 = \{(1), (123), (132)\} \subset S_3$ sobre $Z$. Esto desprende una descomposición muy simple: si tomamos $\tau$ como cualquier generador de $A_3$ (esto es, cualquier ciclo de tamaño 3), el espacio $Z$ es generado por eigen-vectores $v_i$ para la acción de $\tau$, cuyos eigen-valores son por supuesto todas las potencias de una raíz cúbica de la unidad $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, i.e., los eigen-valores de $\tau$ pueden ser 1, $\omega$ o $\omega^2$. Así,

$$Z = \oplus \mathbb{R} v_i \quad \text{y} \quad \tau v_i = z^{\alpha_i} v_i$$

Ahora, queremos saber cómo los elementos restantes de $S_3$ actúan sobre $Z$ en términos de esta descomposición. Sea $\sigma \in S_3$ cualquier transposición $\sigma \in \{(12), (13), (23)\}$, de tal forma que $\{\tau, \sigma\}$ generan $S_3$, con la relación $\sigma\tau\sigma = \tau^2$. Para saber dónde manda $\sigma$ a un eigen-vector $v$ para la acción $\tau$, digamos con eigen-valor $\omega^i$; veamos primero cómo actúa $\tau$ sobre $\sigma(v)$. Usamos la relación básica anterior para escribir

$$\begin{aligned}\tau(\sigma(v)) &= \sigma(\tau^2(v)) \\ &= \sigma(\omega^{2i}\cdot v) \\ &= \omega^{2i}\cdot\sigma(v)\end{aligned}$$

La conclusión, entonces, es que si $v$ es un eigen-vector para $\tau$ con eigen-valor $\omega^i$, entonces $\sigma(v)$ es también un eigen-vector para $\tau$, con eigen-valor $\omega^{2i}$.

**Ejemplo 48** *Sea $V_3$ es la representación estándar para $S_3$, $\sigma = (12)$ y $\tau = (123)$. Si $\{v_1, v_2\}$ es una base para $V_3$, con $v_1 = (\omega, 1, \omega^2)$ y $v_2 = (1, \omega, \omega^2)$; entonces*

$$\begin{aligned}\tau v_1 &= \omega v_1 \\ \tau v_2 &= \omega^2 v_2 \\ \sigma v_1 &= v_2 \\ \sigma v_2 &= v_1\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $v$ es un eigen-vector para $\tau$. Si el eigen-valor de $v$ es $\omega^i \neq 1$, entonces $\sigma(v)$ es un eigen-vector con eigen-valor $\omega^{2i} \neq \omega^i$, y por ende es independiente de $v$; además $\{v, \sigma(v)\}$ genera un subespacio $V'$ bidimensional de $Z$ invariante bajo $S_3$, y que de hecho, $V' \simeq V_3$. Por otra parte, si el eigen-valor de $v$ es 1, entonces $\sigma(v)$ puede o no ser independiente de $v$. Si no lo es, entonces $v$ genera una subrepresentación unidimensional de $Z$, isomorfa a $U_3$ si $\sigma(v) = v$ e isomorfa a $U_3'$ si $\sigma(v) = -v$. Si $\sigma(v)$ y $v$ son independientes,entonces $\{v + \sigma(v), v - \sigma(v)\}$ generan representaciones unidimensionales de $Z$, isomorfas a $U_3$ y a $V_3$, respectivamente.

Hemos entonces resuelto los dos problemas básicos que se tratarían aquí (aunque hasta ahora, sólo para el caso de $S_3$). Primero, por la discusión aterior, vemos que las únicas representaciones irreducibles para $S_3$ son las representaciones trivial, alternante y estándar. Más aún, concluímos que toda representación $Z$ de $S_3$, tiene una descomposición

$$Z = U_3^{\oplus a} \oplus U_3'^{\oplus b} \oplus V_3^{\oplus c}$$

y se tiene un método para determinar las multiplicidades $a$, $b$ y $c$. Por ejemplo, $c$ es el número de eigen-vectores independientes para $\tau$ con eigen-valor $\omega$, mientras que $a+c$ es la multiplicidad de 1 como eigen-valor de $\sigma$, y $b+c$ es la multiplicidad de $-1$ como eigen-valor de $\sigma$.

## 3.2. Caracteres de representaciones

La teoría de caracteres es una herramienta efectiva para determinar las representaciones de un grupo finito, en nuestro caso para $S_n$. En la sección anterior se dió una descripción de todas las representaciones irreducibles para el grupo $S_3$ y se encontró una técnica para descomponer una representación dada de $S_3$ en suma de irreducibles, donde se vió que las representaciones de $S_3$ fueron determinadas por los eigen-valores de la acción de los elementos $\tau, \sigma \in S_3$. Para un grupo general $S_n$, no es muy claro qué subgrupos y/o elementos jugarían el rol de $A_3$, $\tau$ y $\sigma$; y aquí es donde entra el uso de caracteres para abordar el caso general del grupo $S_n$.

**Definición 49** *Sea $\rho : H \to GL(X)$ una representación. El carácter de $X$ es la función $\chi_X : H \to \mathbb{C}$:*

$$\chi_X(h) = Tr\,(\rho(h))$$

*donde, $Tr\,(\rho(h))$ representa la traza de la matriz asociada a la transformación lineal correspondiente a $\rho(h)$.*

**Proposición 50** *Sean $X$ y $Y$ representaciones del grupo $H$ y $h, g \in H$. Entonces:*

**a)** $\chi_{X\oplus Y} = \chi_X + \chi_Y$

**b)** $\chi_{X\otimes Y} = \chi_X \cdot \chi_Y$

**c)** $\chi_X(e) = \dim X$

**d)** $\chi_X(h^{-1}) = \overline{\chi_X(h)}$

**e)** $\chi_X(hgh^{-1}) = \chi_X(g)$

**f)** *Si $X \simeq Y$, entonces $\chi_X = \chi_Y$*

**Proposición 51** *Si $X$ es la representación permutación asociada a la acción*[2] *de un grupo $H$ sobre un conjunto finito $F$, entonces $\chi_X(h)$ es el número de elementos de $F$ fijos por $h$. Es decir,*

$$\chi_X(h) = |\{f \in F \mid h \cdot f = f\}|$$

**Ejemplo 52** *El carácter de $\mathbb{R}^3$ como representación para $S_3$, está dado por $\chi_{\mathbb{R}^3}(1) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\chi_{\mathbb{R}^3}(12) = \chi_{\mathbb{R}^3}(13) = \chi_{\mathbb{R}^3}(23) = 1$ y $\chi_{\mathbb{R}^3}(123) = \chi_{\mathbb{R}^3}(132) = 0$.*

De acuerdo al inciso e) de la proposición anterior ($\chi_X$ es constante sobre las clases de conjugación[3] de $H$), vemos que el carácter de una representación de un grupo $H$ es realmente una función sobre el conjunto de clases de conjugación en $H$. Esto sugiere expresar la información básica acerca de las representaciones irreducibles del grupo $H$ en la forma de una tabla de caracteres. Esta es una tabla con las clases de conjugación $[h]$ de $H$ listadas en la parte superior, usualmente dadas por un representante $h$, con el número de elementos en cada clase de conjugación arriba de ella; las representaciones irreducibles de $H$ listadas en la parte izquierda; y, en el lugar apropiado, el valor de el carácter de la clase de conjugación $[h]$.

**Ejemplo 53** *Calculemos la tabla de caracteres para el grupo $S_3$. Para empezar, la representación trivial $U_3$ toma los valores $(1,1,1)$ en las tres clases de conjugación $[(1)]$, $[(12)]$ y $[(123)]$, mientras que la representación alternante $U_3'$ tiene valores $(1,-1,1)$. Para calcular el carácter de la representación estándar $V_3$, notemos que $\mathbb{R}^3 = U_3 \oplus V_3$ y que $\chi_{\mathbb{R}^3} = (3,1,0)$, por*

---

[2] *La acción de $H$ en $F$ es una función binaria $\cdot : H \times F \to F$ que satisface*

**i)** $(gh) \cdot f = g \cdot (h \cdot f)$ *para todo $g, h \in H$ y $f \in F$.*

**ii)** $e \cdot f = f$ *para todo $f \in F$.*

[3] La clase de conjugación de $g \in H$ se define como $[g] = \{hgh^{-1} \mid h \in H\}$, así cada elemento del grupo $H$ pertenece precisamente a una clase de conjugación.

*lo que* $\chi_{V_3} = \chi_{\mathbb{R}^3} - \chi_{U_3} = (2, 0, -1)$*. Así pues, la tabla de caracteres para* $S_3$ *es*

| | 1 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|
| $S_3$ | $[(1)]$ | $[(12)]$ | $[(123)]$ |
| $U_3$ | 1 | 1 | 1 |
| $U_3\prime$ | 1 | $-1$ | 1 |
| $V_3$ | 2 | 0 | $-1$ |

De hecho, esto nos da otra solución al problema básico que se ha pretendido abordar: si $Z$ es cualquier representación para $S_3$, y $Z$ tiene una descomposición en representaciones irreducibles $Z = U_3^{\oplus a} \oplus U_3'^{\oplus b} \oplus V_3^{\oplus c}$, entonces $\chi_Z = a\chi_{U_3} + b\chi_{U_3'} + c\chi_{V_3}$. En particular, como las funciones $\chi_{U_3}$, $\chi_{U_3'}$ y $\chi_{V_3}$ son independientes, entonces $Z$ es determinado (salvo isomorfismos) por su carácter.

**Ejemplo 54** *¿Qué podemos decir de la descomposición (bajo* $S_3$*) de* $V_3 \otimes V_3$ *en suma directa de subespacios irreducibles?*

$$\begin{aligned}
\chi_{V_3 \otimes V_3} &= \chi_{V_3} \cdot \chi_{V_3} = (4, 0, 1) \\
&= (1, 1, 1) + (1, -1, 1) + (2, 0, -1) \\
&= \chi_{U_3} + \chi_{U_3'} + \chi_{V_3}
\end{aligned}$$

*Por lo que,* $V_3 \otimes V_3 = U_3 \oplus U_3' \oplus V_3$*.*

Podemos definir un producto Hermitiano[4] sobre el conjunto de las funciones de clase, i.e., funciones que son constantes sobre clases de conjugación.

**Definición 55** *Sea* $\mathbb{C}_{class}(H) = \{f : H \to \mathbb{C} \mid f \text{ es de clase}\}$*. Si* $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{C}_{class}(H)$*, definimos*

[4] Si $X$ es un espacio vectorial complejo, el producto Hermitiano sobre $X$ es un mapeo $\langle , \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ tal que:

**i)** $\langle x_1, x_2 \rangle = \overline{\langle x_2, x_1 \rangle}$ para todo $x_1, x_2 \in X$.

**ii)** $\langle x_1, x_2 + x_3 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_1, x_3 \rangle$ para todo $x_1, x_2, x_3 \in X$.

**iii)** $\langle \alpha x_1, x_2 \rangle = \alpha \langle x_1, x_2 \rangle$ y $\langle x_1, \alpha x_2 \rangle = \overline{\alpha} \langle x_1, x_2 \rangle$, para todo $x_1, x_2 \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

*el producto Hermitiano $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle$, como*

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \overline{\chi_1(h)} \cdot \chi_2(h)$$

**Teorema 56** *En términos del producto Hermitiano anterior, el conjunto de caracteres de representaciones irreducibles para $H$, es ortonormal.*

**Ejemplo 57** *Es fácil verificar que, para el caso de $S_3$:*

$$\langle \chi_{U_3}, \chi_{U_3} \rangle = \left\langle \chi_{U_3'}, \chi_{U_3'} \right\rangle = \langle \chi_{V_3}, \chi_{V_3} \rangle = 1$$

*y que*

$$\left\langle \chi_{U_3}, \chi_{U_3'} \right\rangle = \langle \chi_{U_3}, \chi_{V_3} \rangle = \left\langle \chi_{U_3'}, \chi_{V_3} \right\rangle = 0$$

**Corolario 58** *Toda representación de un grupo queda determinada por su carácter. Si*

$$Z = Z_1^{\oplus a_1} \oplus Z_2^{\oplus a_2} \oplus \cdots \oplus Z_j^{\oplus a_j}$$

*entonces*

$$\chi_Z = a_1 \chi_{Z_1} + a_2 \chi_{Z_2} + \cdots + a_j \chi_{Z_j}$$

*y los $\chi_{Z_i}$ son linealmente independientes.*

**Corolario 59** *Una representación $Z$ es irreducible si y sólo si $\langle \chi_Z, \chi_Z \rangle = 1$.*

De hecho, si $Z = Z_1^{\oplus a_1} \oplus Z_2^{\oplus a_2} \oplus \cdots \oplus Z_j^{\oplus a_j}$, como anteriormente, entonces $\langle \chi_Z, \chi_Z \rangle = \sum_{i=1}^{j} a_i$. Las multiplicidades $a_i$ pueden calcularse vía

**Corolario 60** *Si*

$$Z = Z_1^{\oplus a_1} \oplus Z_2^{\oplus a_2} \oplus \cdots \oplus Z_j^{\oplus a_j}$$

*la multiplicidad de $Z_i$ (representación irreducible) en $Z$, es el producto interno*

$$a_i = \langle \chi_Z, \chi_{Z_i} \rangle$$

**Proposición 61** *El número de representaciones irreducibles del grupo $H$ es igual al número de clases de conjugación de $H$. Más aún, sus caracteres $\{\chi_{X_i}\}$ forman una base ortonormal para $\mathbb{C}_{class}(H)$.*

En general, el grupo $S_n$ tiene tantas clases de conjugación como particiones[5] tiene el entero $n$; y por lo tanto, también será el número de representaciones irreducibles de $S_n$. Es decir, si $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l]$ es una partición de $n$, la correspondencia asocia a tal partición la clase de conjugación de una permutación que consiste de ciclos disjuntos de tamaño $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l$.

Terminaremos esta sección con la descripción de las representaciones irreducibles para el grupo $S_4$, mostrando su correspondiente tabla de caracteres.

**Ejemplo 62** *Ahora calculemos la tabla de caracteres para el grupo $S_4$. Primero, listemos las clases de conjugación de $S_4$:*

| *Partición* | *Clase de conjugación* |
|---|---|
| $[1,1,1,1]$ | $[(1)]$ |
| $[2,1,1]$ | $[(12)]$ |
| $[3,1]$ | $[(123)]$ |
| $[4]$ | $[(1234)]$ |
| $[2,2]$ | $[(12)(34)]$ |

*y el número de elementos en cada clase de conjugación es* $1$*,* $6$*,* $8$*,* $6$ *y* $3$*, respectivamente. Tal como en el caso del grupo $S_3$, vemos que para $S_4$: $\chi_{U_4} = (1,1,1,1,1)$, $\chi_{U'_4} = (1,-1,1,-1,1)$ y $\chi_{V_4} = (3,1,0,-1,-1)$. Así que faltan los caracteres de dos representaciones irreducibles más; en general, uno busca representaciones en los productos tensoriales. Por ejemplo, vemos que $V'_4 = V_4 \otimes U'_4$ es una representación irreducible, ya que $\left\langle \chi_{V'_4}, \chi_{V'_4} \right\rangle = 1$. Por último, la representación*

[5] $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l]$ es una partición de $n$ (denotado por $\lambda \vdash n$) si y sólo si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l$ son enteros positivos y $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l = n$.

*irreducible restante $W$, se halla por medio de las relaciones de ortogonalidad. De esta forma,*

| | 1 | 6 | 8 | 6 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_4$ | $[(1)]$ | $[(12)]$ | $[(123)]$ | $[(1234)]$ | $[(12)(34)]$ |
| $U_4$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $U_4\prime$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $-1$ | $1$ |
| $V_4$ | $3$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $-1$ |
| $V_4\prime$ | $3$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $-1$ |
| $W$ | $2$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $2$ |

# Capítulo 4

# Juegos y representaciones

En este capítulo se estudian soluciones $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ que sean lineales y simétricas en $G = \{w \mid w : ECL \to \mathbb{R}\}$, aprovechando técnicas de la teoría de representaciones; en particular, representaciones para el grupo $S_n$.

Notemos que en el lenguaje de teoría de representaciones, a lo que le estamos llamando una solución lineal y simétrica, en realidad es una transformación lineal $S_n$-equivariante.

Recordemos que hay una acción natural del grupo de permutaciones $S_n$ sobre $2^N \backslash \{\varnothing\}$ y sobre $ECL$; i.e., para $\theta \in S_n$:

$$\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}$$

$$\theta(S_1, \{S_1, S_2, ..., S_l\}) = (\theta(S_1), \{\theta(S_1), \theta(S_2), ..., \theta(S_l)\})$$

De esta forma, el grupo $S_n$ actúa naturalmente sobre $G$ vía transformaciones lineales; es decir, $G$ es una representación del grupo $S_n$.

**Proposición 63** *El espacio de juegos $G$ es una representación para el grupo simétrico $S_n$.*

***Demostración.*** *Existe un homomorfismo de grupos $\rho : S_n \to GL(G)$, cuya acción está dada por*

$$(\theta \cdot w)(S, Q) := [\rho(\theta)(w)](S, Q) = w[\theta^{-1}(S, Q)]$$

*para todo $\theta \in S_n$, $w \in G$ y $(S, Q) \in ECL$.*

*Sólo basta demostrar que en efecto, $\rho$ es un homomorfismo:*

$$\begin{aligned}[\rho(\theta_1\theta_2)(w)]\,(S,Q) &= w\left[(\theta_1\theta_2)^{-1}(S,Q)\right] = w\left[\theta_2^{-1}(\theta_1^{-1}(S,Q))\right] \\ &= [\rho(\theta_2)(w)]\,(\theta_1^{-1}(S,Q)) = [\rho(\theta_1)\rho(\theta_2)(w)]\,(S,Q)\end{aligned}$$

*para todo $\theta_1, \theta_2 \in S_n$, $w \in G$ y $(S,Q) \in ECL$.* ■

**Proposición 64** *El espacio de pagos, $\mathbb{R}^n$ es una representación para el grupo $S_n$:*

$$[\rho(\theta)](x_1, x_2, ..., x_n) = (x_{\theta^{-1}(1)}, x_{\theta^{-1}(2)}, ..., x_{\theta^{-1}(n)})$$

Así pues, dado que $G$ y $\mathbb{R}^n$ son representaciones para el grupo $S_n$, entonces estos dos espacios vectoriales tendrán una descomposición (bajo $S_n$) en subespacios irreducibles.

Para tal propósito, será necesario definir en general

$$U_n = U = \{(t, t, ..., t) \in \mathbb{R}^n\} \;\text{ y }\; V_n = V = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$$

$U$ y $V$ son representaciones irreducibles para $S_n$, llamadas usualmente la representación trivial y la representación estándar, respectivamente.

Primero se dará la descomposición de los casos particulares de $G^{(3)}$ y $\mathbb{R}^3$, usando las técnicas descritas en la sección 3.1.1.

**Proposición 65** *Descomposición de $G^{(3)}$ y $\mathbb{R}^3$ en subespacios irreducibles, bajo la acción del grupo $S_3$:*

- $G^{(3)}$ *se descompone como:*

$$G^{(3)} \simeq U_3^{\oplus 4} \oplus V_3^{\oplus 3}$$

- $\mathbb{R}^3$ *tiene una descomposición:*

$$\mathbb{R}^3 \simeq U_3 \oplus V_3$$

**Demostración.** Recordemos que toda representación $Z$ de $S_3$, tiene una descomposición

$$Z = U_3^{\oplus a} \oplus U_3'^{\oplus b} \oplus V_3^{\oplus c}$$

donde, $c$ es el número de eigen-vectores independientes para $\tau = (123)$ con eigen-valor $\omega$, mientras que $a+c$ es la multiplicidad de 1 como eigen-valor de $\sigma = (12)$, y $b+c$ es la multiplicidad de $-1$ como eigen-valor de $\sigma$.

- Así, definimos una base $\mathfrak{B} = \{u_{(S,Q)} \mid (S,Q) \in ECL\}$ para $G^{(3)}$, como

$$u_{(S,Q)}(T,P) = \begin{cases} 1 & \text{si } (T,P) = (S,Q) \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

  De esta forma, es fácil verificar que $\det([\tau]_{\mathfrak{B}} - \lambda I) = 0 \;\Rightarrow$

$$(\lambda^3 - 1)^3(\lambda - 1) = \left[(\lambda-1)(\lambda-\omega)(\lambda-\omega^2)\right]^3(\lambda - 1) = 0$$

  y que $\det([\sigma]_{\mathfrak{B}} - \lambda I) = 0 \;\Rightarrow$

$$(\lambda+1)^3(\lambda-1)^7 = 0$$

Por lo que $a = 4$, $b = 0$ y $c = 3$. Concluyendo que $G^{(3)}$ se descompone como

$$G^{(3)} \simeq U_3^{\oplus 4} \oplus V_3^{\oplus 3}$$

- Para el caso de $\mathbb{R}^3$, consideramos su base canónica $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y podemos comprobar que $\det([\tau]_{\mathfrak{B}} - \lambda I) = 0 \;\Rightarrow$

$$\lambda^3 - 1 = (\lambda-1)(\lambda-\omega)(\lambda-\omega^2) = 0$$

  y también que, $\det([\sigma]_{\mathfrak{B}} - \lambda I) = 0 \;\Rightarrow$

$$(\lambda+1)(\lambda-1)^2 = 0$$

Entonces, $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$. Y así concluímos que $\mathbb{R}^3$ tiene una descomposición

$$\mathbb{R}^3 \simeq U_3 \oplus V_3$$

$\blacksquare$

Así pues, pasamos a la descomposición de los casos generales de $\mathbb{R}^n$ y $G^{(n)}$.

**Proposición 66** *La descomposición de $\mathbb{R}^n$, bajo $S_n$, en subespacios irreducibles es:*

$$\mathbb{R}^n = U \oplus V$$

**Demostración.** Dado que $U$ es de dimensión 1, entonces es irreducible. Por lo que, sólo se necesita verificar que $V$ también lo es. Esto se hará por inducción sobre $n$. Si $n = 2$, entonces $V_n$ es de dimensión 1 y por ende, irreducible.

$V_n$ es generado por $e_1 - e_n, e_2 - e_n, ..., e_{n-1} - e_n$, donde $\{e_i\}$ es la base canónica para $\mathbb{R}^n$. El subgrupo de isotropía de $n$, $H_n = \{\theta \in S_n \mid \theta(n) = n\}$, es isomorfo a $S_{n-1}$, y $V_n$ es la representación estándar para $H_n$.

Por lo que, la hipótesis de inducción dice que

$$V_n \simeq \mathbb{R} \oplus V_{n-1}$$

es la descomposición (salvo isomorfismos) en representaciones irreducibles para $H_n$. De hecho, los sumandos de esta descomposición son $\mathbb{R}\omega$ y su complemento ortogonal dentro de $V_n$, donde $\omega = (e_1 - e_n) + (e_2 - e_n) + \cdots + (e_{n-1} - e_n) = (1, 1, ..., 1, 1 - n)$.

Ahora, si $V_n$ fuera una representación reducible para $S_n$, entonces se partiría en subespacios también invariantes bajo $H_n$. Por lo tanto, la única descomposición sería en $\mathbb{R}\omega$ y su complemento ortogonal. Pero estos subespacios no son invariantes bajo $S_n$. ■

Así, esta Proposición nos muestra que el espacio de pagos, $\mathbb{R}^n$, como espacio vectorial con grupo de simetrías $S_n$, puede escribirse como la suma ortogonal de dos subespacios ($U$ y $V$), que son invariantes bajo $S_n$ y que no pueden descomponerse más.

La descomposición para $G^{(n)}$ en general es un tanto más complicada y lo haremos en varios pasos. Primero, es necesario dar el concepto de partición de un entero y notación adicional.

Una partición de un entero no negativo es una forma de expresarlo como una suma no ordenada de otros enteros positivos. Formalmente,

**Definición 67** $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l]$ *es una partición de $n$ (denotado como $\lambda \vdash n$) sii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l$ son enteros positivos y $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l = n$. Dos particiones que sólo difieren en el orden de* *sus elementos, son consideradas como la misma partición.*

*El conjunto de todas las particiones de* $n$ *será denotado por* $\Pi(n)$*, y si* $\lambda \vdash n$*,* $|\lambda|$ *es el número de elementos de* $\lambda$*.*

Por ejemplo, las particiones de $n = 5$ son $[1, 1, 1, 1, 1]$, $[2, 1, 1, 1]$, $[2, 2, 1]$, $[3, 1, 1]$, $[3, 2]$, $[4, 1]$ y $[5]$. Abreviaremos esta notación ignorando las comas, así $[3, 1, 1]$ se vuelve $[311]$.

Si $Q \in PT$, hay una única partición $\lambda_Q \in \Pi(n)$, asociada con $Q$, donde los elementos de $\lambda_Q$ son exactamente las cardinalidades de los elementos de $Q$. En otras palabras, si $Q = \{S_1, S_2, ..., S_m\} \in PT$, entonces $\lambda_Q = [s_1, s_2, ..., s_m]$.

Para $\lambda \in \Pi(n)$ dada, representamos por $\lambda^\circ$ el conjunto de números determinados por las $\lambda_i$'s y por $l(\lambda)$ denotamos el número de elementos distintos en $\lambda$, en otras palabras, $l(\lambda) = |\lambda^\circ|$. Así, si $\lambda = [4, 2, 2, 1, 1, 1]$, entonces $\lambda^\circ = \{1, 2, 4\}$ y $l(\lambda) = 3$.

Por otra parte, si $[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l] \in \Pi(n)$, para $k \geq 1$ definimos $[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l] - [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k] = [\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, ..., \lambda_l]$. Por ejemplo, $[4, 3, 2, 1, 1, 1] - [3, 1, 1] = [4, 2, 1]$.

Ahora bien, sean $\lambda \in \Pi(n)$ y $Q_\lambda = \{Q \in PT \mid \lambda_Q = \lambda\}$. Por cada $\lambda \in \Pi(n)$, definimos el subespacio de juegos

$$G_\lambda = \{w \in G \mid w(S, Q) = 0 \text{ si } Q \notin Q_\lambda\}$$

Así entonces,

$$G = \bigoplus_{\lambda \in \Pi(n)} G_\lambda$$

Por otra parte, para $k \in \lambda^\circ$, definimos el subespacio de juegos

$$G_\lambda^k = \{w \in G_\lambda \mid w(S, Q) = 0 \text{ si } \ |S| \neq k\}$$

Entonces cada $G_\lambda$ la podemos descomponer como $G_\lambda = \bigoplus_{k \in \lambda^\circ} G_\lambda^k$ y así pues, obtenemos una descomposición para $G$:

$$G = \bigoplus_{\lambda \in \Pi(n)} \left( \bigoplus_{k \in \lambda^\circ} G_\lambda^k \right) = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \Pi(n) \\ k \in \lambda^\circ}} G_\lambda^k$$

Cada subespacio $G_\lambda^k$ es invariante (aunque no no necesariamente irreducible) bajo $S_n$ y la descomposición es ortogonal con respecto al producto interno en $G$ dado por

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \sum_{(S,Q)\in ECL} w_1(S,Q)\cdot w_2(S,Q)$$

De aquí en adelante, se trabajará en la descomposición en subespacios irreducibles de cada subespacio de juegos $G^k_\lambda$, y de esa forma se tendrá para $G$.

**Ejemplo 68** *En el caso cuando tenemos un espacio de 3 jugadores ($N = \{1,2,3\}$). Primero, vemos que* $\dim G^{(3)} = 10$ *y entonces* $G^{(3)}$ *tiene una descomposición:*

$$G^{(3)} = G^1_{[1,1,1]} \oplus G^1_{[2,1]} \oplus G^2_{[2,1]} \oplus G^3_{[3]}$$

No hay que perder de vista que uno quisiera estudiar soluciones lineales y simétricas $\varphi : G \to \mathbb{R}^n = U \oplus V$, y por el Lema de Schur, sólo tenemos que ocuparnos por aquellas copias de $U$ y $V$ dentro de $G^k_\lambda$:

$$G^k_\lambda = U^{\oplus a_1} \oplus V^{\oplus a_2} \oplus W$$

Ya que, más adelante se justificará el hecho de que los subespacios restantes no juegan ningún rol en el estudio de soluciones lineales y simétricas. Con el propósito de determinar las constantes $a_1$ y $a_2$, haremos uso de teoría de caracteres.

**Teorema 69** *Cada subespacio de juegos* $G^k_\lambda$ *contiene* $\begin{cases} 1 \ \textit{copia de } U \\ \begin{cases} l(\lambda)-1 \ \textit{copias de } V & \textit{si } m_k = 1 \\ l(\lambda) \ \textit{copias de } V & \textit{si } m_k > 1 \end{cases} \end{cases}$.
*Donde* $m_k$ *denota la multiplicidad de* $k$ *en la partición* $\lambda$.

**Demostración.** De acuerdo al Corolario 59, la multiplicidad de la representación trivial $U$ en $G^k_\lambda$ es:

$$\left\langle \chi_{G^k_\lambda}, \chi_U \right\rangle = \frac{1}{n!}\sum_{\theta\in S_n} \chi_{G^k_\lambda}(\theta)\chi_U(\theta) = \frac{1}{n!}\sum_{\theta\in S_n} \chi_{G^k_\lambda}(\theta)$$

Es decir, $\left\langle \chi_{G^k_\lambda}, \chi_U \right\rangle$ nos proporciona el número de subespacios dentro de $G^k_\lambda$, que son isomorfos a $U$. Notemos que, $\chi_{G^k_\lambda}(\theta)$ es exactamente el número de parejas $(S,Q) \in ECL$ con $Q \in Q_\lambda$ y $|S| = k$ que quedan fijas bajo $\theta \in S_n$.

Si definimos

$$\{\theta\}_{(S,Q)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta(S,Q) = (S,Q) \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Entonces,

$$\chi_{G_\lambda^k}(\theta) = \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ |S|=k \\ Q\in Q_\lambda}} \{\theta\}_{(S,Q)}$$

y por tanto,

$$\left\langle \chi_{G_\lambda^k}, \chi_U \right\rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\theta\in S_n} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ |S|=k \\ Q\in Q_\lambda}} \{\theta\}_{(S,Q)} = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ |S|=k \\ Q\in Q_\lambda}} \sum_{\theta\in S_n} \{\theta\}_{(S,Q)}$$

donde,

$$\sum_{\theta\in S_n} \{\theta\}_{(S,Q)} = |\{\theta \in S_n \mid \theta(Q) = Q,\ \theta(S) = S\}|$$

Ahora, $S_n$ actúa en el conjunto $Q_\lambda$ y sea $Q \in Q_\lambda$. La órbita de $Q$ bajo $S_n$ es

$$S_n Q = \{\theta(Q) \mid \theta \in S_n\} = Q_\lambda$$

y el subgrupo de isotropía de $Q$ es

$$(S_n)_Q = \{\theta \in S_n \mid \theta(Q) = Q\}$$

Aplicando el teorema de Lagrange, obtenemos:

$$|S_n Q| = \frac{|S_n|}{|(S_n)_Q|} = |Q_\lambda| \quad \Rightarrow \quad |(S_n)_Q| = \frac{n!}{|Q_\lambda|}$$

Notemos que $H = (S_n)_Q$ actúa en $Q$ y sea $S \in Q$ tal que $|S| = k$. Denotemos por $m_k$ a la multiplicidad de $k$ en $\lambda$. Entonces, la órbita de $S$ bajo $H$ es

$$HS = \{hS \mid h \in H\} = \{T \in Q \mid |T| = k\}$$

(observemos que $|HS| = m_k$) y el subgrupo de isotropía de $S$ es

$$H_S = \{h \in H \mid h(S) = S\} = \{\theta \in S_n \mid \theta(Q) = Q,\ \theta(S) = S\}$$

De nuevo, aplicando el teorema de Lagrange, tenemos que

$$|HS| = \frac{|H|}{|H_S|} = \frac{|(S_n)_Q|}{|H_S|} = m_k \quad \Rightarrow \quad |H_S| = \frac{|(S_n)_Q|}{m_k} = \frac{n!}{|Q_\lambda|\, m_k}$$

Por lo que podemos concluir que,

$$\left\langle \chi_{G^k_\lambda}, \chi_U \right\rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ |S|=k \\ Q\in Q_\lambda}} \frac{n!}{|Q_\lambda|\, m_k} = \frac{1}{n!}\, |Q_\lambda|\, m_k \frac{n!}{|Q_\lambda|\, m_k} = 1$$

Por otra parte, para calcular la multiplicidad de la representación estándar $V$ en $G^k_\lambda$, observemos que como $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ , entonces $\chi_{\mathbb{R}^n} = \chi_U + \chi_V \Rightarrow \left\langle \chi_{G^k_\lambda}, \chi_{\mathbb{R}^n} \right\rangle = \left\langle \chi_{G^k_\lambda}, \chi_U \right\rangle + \left\langle \chi_{G^k_\lambda}, \chi_V \right\rangle$ $\Rightarrow \left\langle \chi_{G^k_\lambda}, \chi_V \right\rangle = \left\langle \chi_{G^k_\lambda}, \chi_{\mathbb{R}^n} \right\rangle - 1.$

Notemos que $G^1_{[1,1,...,1]} \simeq \mathbb{R}^n$ (como representaciones para $S_n$). Así, calculemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \chi_{G^k_\lambda}, \chi_{\mathbb{R}^n} \right\rangle &= \left\langle \chi_{G^k_\lambda}, \chi_{G^1_\mu} \right\rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\theta\in S_n} \chi_{G^k_\lambda}(\theta)\chi_{G^1_\mu}(\theta) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\theta\in S_n} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ |S|=k \\ Q\in Q_\lambda}} \{\theta\}_{(S,Q)} \sum_{\substack{(S',Q')\in ECL \\ |S'|=1 \\ Q'=Q_\mu}} \{\theta\}_{(S',Q')} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ |S|=k \\ Q\in Q_\lambda}} \sum_{\substack{(S',Q')\in ECL \\ |S'|=1 \\ Q'=Q_\mu}} \sum_{\theta\in S_n} \{\theta\}_{(S,Q)} \{\theta\}_{(S',Q')}
\end{aligned}$$

donde $\mu = [1,1,...,1] \in \Pi(n)$ y, para $x \in S$:

$$\sum_{\theta\in S_n} \{\theta\}_{(S,Q)} \{\theta\}_{(S',Q')} = \{\theta \in S_n \mid \theta(Q) = Q,\ \theta(S) = S,\ \theta(x) = x\}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos $|S| = k = \lambda_1$ y veamos el caso en el que $m_k = m_{\lambda_1} = 1$. Aquí, $M = H_S = \{\theta \in S_n \mid \theta(Q) = Q,\ \theta(S) = S\}$ actúa en $S \in Q \in Q_\lambda$ y sea $x \in S$.

La órbita de $x$ bajo $M$ es

$$Mx = \{\theta(x) \mid \theta \in M\} = S$$

y el subgrupo de isotropía de $x$ es

$$M_x = \{\theta \in M \mid \ \theta(x) = x\} = \{\theta \in S_n \mid \theta(Q) = Q, \ \theta(S) = S, \ \theta(x) = x\}$$

Y aplicando el teorema de Lagrange, resulta que

$$|Mx| = \frac{|M|}{|M_x|} = \frac{|H_S|}{|M_x|} = k \quad \Rightarrow \quad |M_x| = \frac{|H_S|}{k} = \frac{n!}{k\,|Q_\lambda|\,m_k}$$

Así entonces,

$$\begin{aligned}
\left\langle \chi_{G_\lambda^k}, \chi_{\mathbb{R}^n} \right\rangle &= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ |S|=k \\ Q\in Q_\lambda}} \left[ k\frac{n!}{k\,|Q_\lambda|\,m_k} + m_{\lambda_2}\lambda_2 \frac{n!}{m_{\lambda_2}\lambda_2\,|Q_\lambda|\,m_k} + \cdots + m_{\lambda_l}\lambda_l \frac{n!}{m_{\lambda_l}\lambda_l\,|Q_\lambda|\,m_k} \right] \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ |S|=k \\ Q\in Q_\lambda}} l(\lambda) \frac{n!}{|Q_\lambda|\,m_k} = \frac{1}{n!}\,|Q_\lambda|\,m_k \left[ l(\lambda)\frac{n!}{|Q_\lambda|\,m_k} \right] \\
&= l(\lambda)
\end{aligned}$$

Por último, sin pérdida de generalidad supongamos $|S| = k = \lambda_1$ y veamos el caso en el que $m_k > 1$. Siguiendo un razonamiento análogo a lo hecho anteriormente, llegamos a que,

$$\begin{aligned}
\left\langle \chi_{G_\lambda^k}, \chi_{\mathbb{R}^n} \right\rangle &= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ |S|=k \\ Q\in Q_\lambda}} \left[ \begin{array}{c} k\frac{n!}{k|Q_\lambda|m_k} + k(m_k-1)\frac{n!}{k(m_k-1)|Q_\lambda|m_k} + \\ m_{\lambda_2}\lambda_2 \frac{n!}{m_{\lambda_2}\lambda_2|Q_\lambda|m_k} + \cdots + m_{\lambda_l}\lambda_l \frac{n!}{m_{\lambda_l}\lambda_l|Q_\lambda|m_k} \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ |S|=k \\ Q\in Q_\lambda}} (l(\lambda)+1) \frac{n!}{|Q_\lambda|\,m_k} = \frac{1}{n!}\,|Q_\lambda|\,m_k \left[ (l(\lambda)+1)\frac{n!}{|Q_\lambda|\,m_k} \right] \\
&= l(\lambda) + 1
\end{aligned}$$

■

Un trabajo inmediato es el identificar quiénes son exactamente las copias de la representación trivial $U$ y de la representación estándar $V$, dentro de $G$. Cada subespacio $G_\lambda^k$ se descompone como una suma directa de subespacios invariantes ortogonales:

$$G_\lambda^k = U_\lambda^k \oplus V_\lambda^k \oplus W_\lambda^k$$

donde,

- $U_\lambda^k = \mathbb{R}u_\lambda^k \simeq U$ es un subespacio trivial unidimensional generado por:

$$u_\lambda^k(S,Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } Q \in Q_\lambda,\ |S| = k \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

  notemos que $G_{[n]}^n = \mathbb{R}u_{[n]}^n$, i.e., $G_{[n]}^n$ es una representación trivial unidimensional generada por el juego que asigna 1 a la gran coalición y 0 en cualquier otra parte.

- Para identificar $V_\lambda^k$, hay que dar un conjunto de funciones (una por cada copia de $V$) $\psi : V \to G_\lambda^k$ que sean 1-1 y $S_n$-equivariantes. De esta forma, $\psi(V) = \operatorname{Im}\psi$ será una copia de $V$ dentro de $G_\lambda^k$. Sea $I_{\lambda,k}$ un conjunto de índices tal que

$$I_{\lambda,k} = \begin{cases} \{1,2,...,l(\lambda)\}\backslash\{t \mid \lambda_t = k\} & \text{si } m_k = 1 \\ \{1,2,...,l(\lambda)\} & \text{si } m_k > 1 \end{cases}$$

  * Si $m_k = 1$. Para cada $j \in I_{\lambda,k}$, cada $\lambda \in \Pi(n)\backslash\{[n]\}$, cada $k \in \lambda^\circ$ y cada $z \in V$; sea $z_j^{\lambda,k} \in G_\lambda^k$ dado por

$$z_j^{\lambda,k}(S,Q) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{T \subseteq N \\ |T| = \lambda_j}} z(T) & \text{si } Q \in Q_\lambda,\ |S| = k \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

  * Si $m_k > 1$. Para cada $j \in I_{\lambda,k}$, cada $\lambda \in \Pi(n)\backslash\{[n]\}$, cada $k \in \lambda^\circ$ y cada $z \in V$; sea

$z_j^{\lambda,k} \in G_\lambda^k$ dado por

$$z_j^{\lambda,k}(S,Q) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{T\subseteq N \\ |T|=\lambda_j \\ \lambda_j \neq k}} z(T) & \text{si } Q \in Q_\lambda,\ |S| = k,\ \lambda_j \neq k \\ z(S) & \text{si } Q \in Q_\lambda,\ |S| = k,\ \lambda_j = k \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde $z(T) = \sum\limits_{i\in T} z_i$.

Así, las funciones $\psi_j^{\lambda,k} : V \to G_\lambda^k$ dadas por $\psi_j^{\lambda,k}(z) = z_j^{\lambda,k}$ cumplen que son 1-1 y $S_n$-equivariantes. Por lo tanto,

$$V_\lambda^k = \bigoplus_{j\in I_{\lambda,k}} \left\{ z_j^{\lambda,k} \mid z \in V \right\}$$

y donde, cada $\left\{ z_j^{\lambda,k} \mid z \in V \right\} \simeq V$ es un subespacio irreducible de dimensión $n-1$ isomorfo a $V$.

- $W_\lambda^k$ no contiene algún sumando isomorfo a $U$ ó a $V$, y no necesariamente es irreducible. De hecho, $W_\lambda^k$ será no cero para $n > 3$.

Ahora bien, hagamos $U_G = \bigoplus\limits_{\substack{\lambda\in\Pi(n) \\ k\in\lambda^\circ}} U_\lambda^k$. $U_G$ es un subespacio de juegos, cuyo valor en una pareja dada $(S,Q)$, depende sólo de la cardinalidad de $S$ y la estructura de $Q$. De hecho, $U_G$ es el subespacio más grande de $G$ donde $S_n$ actúa trivialmente[1]. Sea $V_G = \bigoplus\limits_{\substack{\lambda\in\Pi(n)\setminus\{[n]\} \\ k\in\lambda^\circ}} V_\lambda^k$ y $W_G = \bigoplus\limits_{\substack{\lambda\in\Pi(n)\setminus\{[n]\} \\ k\in\lambda^\circ}} W_\lambda^k$, entonces:

$$G = U_G \oplus V_G \oplus W_G$$

[1] Es decir, $\theta \cdot w = w$ para cada $\theta \in S_n$ y cada $w \in U_G$.

Dado un juego $w \in G$, podemos descomponerlo de acuerdo a lo anterior como

$$w = \sum_{\substack{\lambda \in \Pi(n) \\ k \in \lambda^\circ}} a_{\lambda,k} u_\lambda^k + \sum_{\substack{\lambda \in \Pi(n) \setminus \{[n]\} \\ k \in \lambda^\circ}} \sum_{j \in I_{\lambda,k}} z_{\lambda,k,j}^{\lambda,k} + r$$

Esta descomposición será muy útil para estudiar la imagen de $w$ bajo cualquier solución lineal y simétrica. La razón es por lo que nos ofrece la siguiente versión del Lema de Schur:

**Teorema 70** *Cualquier solución lineal y simétrica*

$$\varphi : G = U_G \oplus V_G \oplus W_G \to \mathbb{R}^n = U \oplus V$$

*satisface*

**a)** $\varphi(U_G) \subset U$

**b)** $\varphi(V_G) \subset V$

**c)** $\varphi(W_G) = 0$

*Más aún, por cada $\lambda \in \Pi(n)$, cada $k \in \lambda^\circ$ y cada $j \in I_{\lambda,k}$; existe una constante $\alpha_{\lambda,k}^j \in \mathbb{R}$ tal que, por cada $z_j^{\lambda,k} \in G_\lambda^k$,*

$$\varphi(z_j^{\lambda,k}) = \alpha_{\lambda,k}^j z \in V$$

**Proposición 71** *Sea $w \in G$. Entonces*

$$w = \sum_{\substack{\lambda \in \Pi(n) \\ k \in \lambda^\circ}} a_{\lambda,k} u_\lambda^k + \sum_{\substack{\lambda \in \Pi(n) \setminus \{[n]\} \\ k \in \lambda^\circ}} \sum_{j \in I_{\lambda,k}} z_{\lambda,k,j}^{\lambda,k} + r$$

*donde,*

1. *$a_{\lambda,k}$ es el promedio de los valores $w(S,Q)$ con $Q \in Q_\lambda$ y $|S| = k$:*

$$a_{\lambda,k} = \frac{\sum_{Q \in Q_\lambda, |S|=k} w(S,Q)}{m_k \, |Q_\lambda|}$$

*2. Para cada $\lambda \in \Pi(n)$, cada $k \in \lambda^\circ$ y cada $j \in I_{\lambda,k}$:*

* *Si $m_k = 1$:*

$$(z_{\lambda,k,j})_i = \frac{1}{n\alpha^j_{\lambda,k}} \left[ m_{\lambda_j}\lambda_j \sum_{\substack{S\in Q\in Q_\lambda, |S|=k \\ S\ni i}} w(S,Q) - k \sum_{\substack{S\in Q\in Q_\lambda, |S|=k \\ Q\ni T\ni i: |T|=\lambda_j \\ S\not\ni i}} w(S,Q) \right]$$

* *Si $m_k > 1$:*

$$(z_{\lambda,k,j})_i = \begin{cases} \frac{1}{n\alpha^j_{\lambda,k}} \left[ k(m_{\lambda_j}-1) \sum_{\substack{S\in Q\in Q_\lambda, |S|=k \\ S\ni i}} w(S,Q) - k \sum_{\substack{S\in Q\in Q_\lambda, |S|=k \\ Q\ni T\ni i: |T|=\lambda_j \\ S\not\ni i}} w(S,Q) \right] & \text{si } \lambda_j = k \\ \frac{1}{n\alpha^j_{\lambda,k}} \left[ m_{\lambda_j}\lambda_j \sum_{\substack{S\in Q\in Q_\lambda, |S|=k \\ S\ni i}} w(S,Q) - k \sum_{\substack{S\in Q\in Q_\lambda, |S|=k \\ Q\ni T\ni i: |T|=\lambda_j \\ S\not\ni i}} w(S,Q) \right] & \text{si } \lambda_j \neq k \end{cases}$$

*3. $r$ puede calcularse como "el resto", i.e.,*

$$r = w - \sum_{\substack{\lambda\in\Pi(n) \\ k\in\lambda^\circ}} a_{\lambda,k} u^k_\lambda - \sum_{\substack{\lambda\in\Pi(n)\setminus\{[n]\} \\ k\in\lambda^\circ}} \sum_{j\in I_{\lambda,k}} z^{\lambda,k}_{\lambda,k,j}$$

**Demostración.** Empecemos por calcular la proyección de $v$ sobre $U_G$. Notemos que $\{u^k_\lambda\}$ es una base ortogonal para $U_G$, y que $\left\|u^k_\lambda\right\|^2 = m_k\,|Q_\lambda|$.

Así pues, la proyección de $w$ sobre $U_G$ es

$$\sum_{\substack{\lambda\in\Pi(n) \\ k\in\lambda^\circ}} \frac{\langle w, u^k_\lambda\rangle}{\langle u^k_\lambda, u^k_\lambda\rangle} u^k_\lambda$$

y entonces,

$$a_{\lambda,k} = \frac{\langle w, u_\lambda^k \rangle}{\langle u_\lambda^k, u_\lambda^k \rangle} = \frac{\sum\limits_{Q\in Q_\lambda, |S|=k} w(S,Q)}{m_k \, |Q_\lambda|}$$

Ahora, por cada $\lambda \vdash n$ y por cada $k \in \lambda^\circ$, definimos $f^{\lambda,k} : G \to \mathbb{R}^n$ como

$$f_i^{\lambda,k}(w) = \sum_{\substack{S\in Q\in Q_\lambda, |S|=k \\ S\ni i}} w(S,Q)$$

donde cada $f^{\lambda,k}$ es $S_n$-equivariante y observemos que $f^{[n],n}(w) = w(N, \{N\})(1, ..., 1)$. Sea $z \in V$, entonces $f^{\lambda,k}(z_{\gamma,i,j}^{\gamma,i}) = 0$ si $\lambda \neq \gamma$ ó $i \neq k$, mientras que (por Lema de Schur) $f^{\lambda,k}(z_{\lambda,k,j}^{\lambda,k}) = \alpha_{\lambda,k}^j z \in V$.

Sea $p : \mathbb{R}^n \to V$ la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre $V$ dada por

$$p_i(x) = \frac{1}{n}\left(nx_i - \sum_{j=1}^n x_j\right)$$

Esta proyección es equivariante, manda $U$ a cero y es la identidad en $V$.

Definimos ahora $L^{\lambda,k} : G \to V$ como $L^{\lambda,k} = p \circ f^{\lambda,k}$. Y vemos que

$$L^{\lambda,k}(w) = \sum_{j\in I_{\lambda,k}} \alpha_{\lambda,k}^j z_{\lambda,k,j}$$

pues por equivariancia $f^{\lambda,k}$ manda $U_G$ en $U$ y $W_G$ en cero. Además $f^{\lambda,k}(z_{\gamma,i,j}^{\gamma,i}) = 0$ si $\lambda \neq \gamma$ ó $i \neq k$. Luego,

$$L_i^{\lambda,k}(w) = p_i(f_i^{\lambda,k}(w)) = \frac{1}{n}\left[(n-k)\sum_{\substack{S\in Q\in Q_\lambda, |S|=k \\ S\ni i}} w(S,Q) - k \sum_{\substack{S\in Q\in Q_\lambda, |S|=k \\ S\not\ni i}} w(S,Q)\right]$$

donde claramente se satisface que $L^{\lambda,k}(w) = \sum\limits_{j\in I_{\lambda,k}} \alpha_{\lambda,k}^j z_{\lambda,k,j}$. ■

Una vez que se tiene una descripción global de todas las soluciones lineales y simétricas, podemos entender restricciones puestas por otras condiciones o axiomas, por ejemplo, el axioma de eficiencia.

**Proposición 72** *Sea $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ una solución lineal y simétrica. Entonces $\varphi$ es eficiente si y sólo si*

1. $\varphi_i(u_\lambda^k) = 0$, *para todo $\lambda \in \Pi(n) \backslash \{[n]\}$ y para todo $k \in \lambda^\circ$, y*

2. $\varphi_i(u_{[n]}^n) = \frac{1}{n}$

**Demostración.** Primeramente, $\left(U_{[n]}^n\right)^\perp$ es exactamente el subespacio de juegos $w$ donde $w(N, \{N\}) = 0$. Así, aquellos en $V_G \oplus W_G$ trivialmente satisfacen $\sum_{i \in N} \varphi_i(w) = 0$, ya que (por Lema de Schur) $\varphi(V_G) \subset V$ y $\varphi(W_G) = 0$.

Por lo que, eficiencia sólo se necesita revisar en $U_G$. Como $u_\lambda^k$ es invariante, tenemos que

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(u_\lambda^k) = n\varphi_i(u_\lambda^k)$$

y entonces, $\varphi$ es eficiente si y sólo si $n\varphi_i(u_\lambda^k) = u_\lambda^k(N, \{N\}) = 1$ (si $\lambda = [n]$). ■

Dada la proposición anterior, una aplicación inmediata es el dar una expresión para todas las soluciones que son lineales, simétricas y eficientes. Denotemos por $LS(G)$ al espacio de soluciones lineales y simétricas sobre $G$ y por $LSE(G)$, al espacio de soluciones lineales, simétricas y eficientes sobre $G$.

**Teorema 73** *Las soluciones lineales, simétricas y eficientes son precisamente aquellas $\varphi \in LS(G)$ de la forma*

$$\varphi_i(w) = \frac{w(N, \{N\})}{n} + \sum_{\substack{\lambda \in \Pi(n) \backslash \{[n]\} \\ k \in \lambda^\circ}} \sum_{j \in I_{\lambda,k}} \beta_{\lambda,k}^j z_{\lambda,k,j}$$

*donde, $\beta_{\lambda,k}^j \in \mathbb{R}$ son arbitrarias. Más aún,* $\dim LSE(G) = \sum_{\lambda \in \Pi(n)} \sum_{k \in \lambda^\circ} |I_{\lambda,k}|$.

**Demostración.** Sea $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ una solución lineal, simétrica y eficiente. Entonces,

$$\begin{aligned}
\varphi_i(w) &= \sum_{\substack{\lambda\in\Pi(n)\\ k\in\lambda^\circ}} a_{\lambda,k}\varphi_i(u_\lambda^k) + \sum_{\substack{\lambda\in\Pi(n)\backslash\{[n]\}\\ k\in\lambda^\circ}} \sum_{j\in I_{\lambda,k}} \varphi_i(z_{\lambda,k,j}^{\lambda,k}) + \varphi_i(r) \\
&= a_{[n],n}\varphi_i(u_{[n]}^n) + \sum_{\substack{\lambda\in\Pi(n)\backslash\{[n]\}\\ k\in\lambda^\circ}} \sum_{j\in I_{\lambda,k}} \beta_{\lambda,k}^j z_{\lambda,k,j} \\
&= \frac{w(N,\{N\})}{n} + \sum_{\substack{\lambda\in\Pi(n)\backslash\{[n]\}\\ k\in\lambda^\circ}} \sum_{j\in I_{\lambda,k}} \beta_{\lambda,k}^j z_{\lambda,k,j}
\end{aligned}$$

■

Aunque el Teorema anterior nos proporciona una fórmula para toda solución lineal, simétrica y eficiente; es un tanto complicada en sus expresiones algebraicas. Por esta razón, buscamos el simplificar tal expresión general, así como dar una posible interpretación.

Primero, necesitamos definir ciertos conjuntos que serán de utilidad en análisis posteriores.

**Definición 74** *Sea $A_n$ un conjunto de parejas, asociadas con todas las particiones $\lambda \in \Pi(n)$ y con sus elementos, i.e.,*

$$A_n = \{(\lambda, s) \mid s \in \lambda^\circ \in \Pi(n)\}$$

*y de forma similar, definimos el conjunto de ternas*

$$B_n = \{(\lambda, s, t) \mid \lambda \in \Pi(n)\backslash\{[n]\}, s \in \lambda^\circ, t \in (\lambda - [s])^\circ\}$$

**Ejemplo 75** *Si $n = 4$, entonces*

$$A_4 = \{([1111], 1), ([211], 1), ([211], 2), ([22], 2), ([31], 1), ([31], 3), ([4], 4)\}$$

*y*

$$B_4 = \{([1111], 1, 1), ([211], 1, 1), ([211], 1, 2), ([211], 2, 1), ([22], 2, 2), ([31], 1, 3), ([31], 3, 1)\}$$

Así, damos la siguiente caracterización de todas las soluciones lineales y simétricas en el siguiente

**Lema 76** *Si la solución $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ satisface los axiomas de linealidad y simetría, entonces existen números reales únicos $\{\alpha_{(\lambda,s)} \mid (\lambda,s) \in A_n\} \cup \{\beta_{(\lambda,s,t)} \mid (\lambda,s,t) \in B_n\}$ tales que*

$$\varphi_i(w) = \sum_{(\lambda,s)\in A_n} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\ni i, |S|=s \\ \lambda_Q=\lambda}} \alpha_{(\lambda,s)} w(S,Q) + \sum_{(\lambda,s,t)\in B_n} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i, |S|=s \\ \lambda_Q=\lambda, |Q^i|=t}} \beta_{(\lambda,s,t)} w(S,Q) \tag{4.1}$$

*Por otro lado, para cualesquiera números reales $\{\alpha_{(\lambda,s)} \mid (\lambda,s) \in A_n\} \cup \{\beta_{(\lambda,s,t)} \mid (\lambda,s,t) \in B_n\}$, la solución dada por (4.1) es lineal y simétrica.*

**Demostración.** Sea $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ una solución lineal y simétrica. Recordemos que $\{u_{(S,Q)} \mid (S,Q) \in ECL\}$ es una base para $G$, donde

$$u_{(S,Q)}(T,P) = \begin{cases} 1 & \text{si } (T,P) = (S,Q) \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Entonces para cualquier juego $w \in G$, $w = \sum_{(S,Q)\in ECL} w(S,Q) u_{(S,Q)}$.

Por lo que, podemos escribir

$$\begin{aligned} \varphi_i(w) &= \sum_{(S,Q)\in ECL} w(S,Q)\varphi_i(u_{(S,Q)}) \\ &= \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\ni i}} w(S,Q)\varphi_i(u_{(S,Q)}) + \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i}} w(S,Q)\varphi_i(u_{(S,Q)}) \end{aligned}$$

para cada $i \in N$.

Ahora, observemos lo siguiente:

- Sean $Q_1, Q_2$ dos particiones tales que $\lambda_{Q_1} = \lambda_{Q_2}$. Sean $S_1, R_1 \in Q_1$, $S_2, R_2 \in Q_2$, tales que $S_1 \neq R_1$, $S_2 \neq R_2$, $|S_1| = |S_2|$ y $|R_1| = |R_2|$. Sean $i \in S_1$ y $j \in S_2$. Entonces, existe una permutación $\theta$ tal que $\theta(Q_1) = Q_2$, $\theta(S_1) = S_2$, $\theta(R_1) = R_2$ y $\theta(i) = j$.
- Si $\theta$ es una permutación tal que $\theta(i) = j$, entonces la simetría de $\varphi$ implica que

$$\varphi_j(u_{(\theta(S),\theta(Q))}) = \varphi_{\theta(i)}(\theta \cdot u_{(S,Q)}) = \varphi_i(u_{(S,Q)})$$

De esta observación concluímos que si $(S,Q),(T,P)\in ECL$ son tales que $|S|=|T|$, $\lambda_Q=\lambda_P$ e $S\ni i$ y $T\ni i$, entonces $\varphi_i(u_{(S,Q)})=\varphi_i(u_{(T,P)})=\alpha_{(\lambda,s)}$ donde $\lambda=\lambda_Q=\lambda_P$ y $s=|S|=|T|$. Por lo que, el primer sumando de arriba se puede escribir como

$$\sum_{\substack{(S,Q)\in ECL\\ S\ni i}} w(S,Q)\varphi_i(u_{(S,Q)}) = \sum_{(\lambda,s)\in A_n}\sum_{\substack{(S,Q)\in ECL\\ S\ni i,|S|=s\\ \lambda_Q=\lambda}} \alpha_{(\lambda,s)}w(S,Q)$$

De igual modo, recordemos que $Q^i\in Q$ es el conjunto de $Q$ que contiene a $i$, entonces el segundo sumando es igual a

$$\sum_{\substack{(S,Q)\in ECL\\ S\not\ni i}} w(S,Q)\varphi_i(u_{(S,Q)}) = \sum_{(\lambda,s,t)\in B_n}\sum_{\substack{(S,Q)\in ECL\\ S\not\ni i,|S|=s\\ \lambda_Q=\lambda,|Q^i|=t}} \beta_{(\lambda,s,t)}w(S,Q)$$

Unicidad: para revisar la unicidad, es suficiente mostrar que si

$$0=\sum_{(\lambda,s)\in A_n}\sum_{\substack{(S,Q)\in ECL\\ S\ni i,|S|=s\\ \lambda_Q=\lambda}} \alpha_{(\lambda,s)}w(S,Q)+\sum_{(\lambda,s,t)\in B_n}\sum_{\substack{(S,Q)\in ECL\\ S\not\ni i,|S|=s\\ \lambda_Q=\lambda,|Q^i|=t}} \beta_{(\lambda,s,t)}w(S,Q)$$

por cada juego $w$ y por cada jugador $i$, entonces cada $\alpha_{(\lambda,s)}$ y $\beta_{(\lambda,s,t)}$ son cero.

Así, para $(\lambda,s)\in A_n$ dado, sean $S=\{1,...,s\}$ y $Q$ cualquier partición tal que $S\in Q$ y $\lambda_Q=\lambda$. Sea $w=u_{(S,Q)}$ e $i=1$. Entonces la suma anterior se reduce a

$$0=\alpha_{(\lambda,s)}$$

De manera similar, dado $(\lambda,s,t)\in B_n$, se escoge $S$ y $Q$ como antes. También, sea $T\in Q$ tal que $|T|=t$. Sea $w=u_{(S,Q)}$ y tomemos cualquier $i\in T$. En este caso la suma es sólo

$$0=\beta_{(\lambda,s,t)}$$

Finalmente, es fácil ver que la fórmula (4.1) define una solución lineal y simétrica para cualquier elección de coeficientes. ■

**Teorema 77** *La solución $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ satisface los axiomas de linealidad, simetría y eficiencia, si y sólo si es de la forma*

$$\varphi_i(w) = \frac{w(N,\{N\})}{n} + \sum_{(\lambda,s,t)\in B_n} \beta_{(\lambda,s,t)} \left[ \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\ni i, |S|=s \\ \lambda_Q=\lambda}} \sum_{\substack{T\in Q\setminus\{S\} \\ |T|=t}} tw(S,Q) - \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i, |S|=s \\ \lambda_Q=\lambda, |Q^i|=t}} sw(S,Q) \right] \tag{4.2}$$

*para cualesquiera números reales $\{\beta_{(\lambda,s,t)} \mid (\lambda,s,t)\in B_n\}$.*

*Más aún, tal representación es única.*

**Demostración.** Por el Lema anterior,

$$\varphi_i(w) = \sum_{(\lambda,s)\in A_n} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\ni i, |S|=s \\ \lambda_Q=\lambda}} \alpha_{(\lambda,s)} w(S,Q) + \sum_{(\lambda,s,t)\in B_n} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i, |S|=s \\ \lambda_Q=\lambda, |Q^i|=t}} \gamma_{(\lambda,s,t)} w(S,Q)$$

para cualesquiera números reales $\{\alpha_{(\lambda,s)}\} \cup \{\gamma_{(\lambda,s,t)}\}$.

Eficiencia implica:

1.
$$0 = \sum_{i\in N} \varphi_i(u_{(S,Q)}) = s\alpha_{(\lambda_Q,s)} + \sum_{T\in Q\setminus\{S\}} t\gamma_{(\lambda_Q,s,t)}$$
para cada $(S,Q) \neq (N,\{N\})$.

2.
$$1 = \sum_{i\in N} \varphi_i(u_{N,\{N\}}) = n\alpha_{([n],n)}$$

Por ende,

$$\alpha_{(\lambda_Q,s)} = -\frac{1}{s} \sum_{T\in Q\setminus\{S\}} t\gamma_{(\lambda_Q,s,t)}$$

para cada par $(S,Q) \neq (N,\{N\})$, y

$$\alpha_{([n],n)} = \frac{1}{n}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\varphi_i(w) &= \frac{w(N,\{N\})}{n} - \sum_{(\lambda,s)\in A_n} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\ni i,|S|=s \\ \lambda_Q=\lambda}} \sum_{T\in Q\setminus\{S\}} \frac{t}{s}\gamma_{(\lambda_Q,s,t)} w(S,Q) \\
&\quad + \sum_{(\lambda,s,t)\in B_n} \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i,|S|=s \\ \lambda_Q=\lambda,|Q^i|=t}} \gamma_{(\lambda,s,t)} w(S,Q) \\
&= \frac{w(N,\{N\})}{n} - \sum_{(\lambda,s,t)\in B_n} \gamma_{(\lambda,s,t)} \left[ \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\ni i,|S|=s \\ \lambda_Q=\lambda}} \sum_{\substack{T\in Q\setminus\{S\} \\ |T|=t}} \frac{t}{s} w(S,Q) - \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i,|S|=s \\ \lambda_Q=\lambda,|Q^i|=t}} w(S,Q) \right]
\end{aligned}$$

Hacemos $\beta_{(\lambda,s,t)} = -\frac{1}{s}\gamma_{(\lambda,s,t)}$, entonces

$$\varphi_i(w) = \frac{w(N,\{N\})}{n} + \sum_{(\lambda,s,t)\in B_n} \beta_{(\lambda,s,t)} \left[ \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\ni i,|S|=s \\ \lambda_Q=\lambda}} \sum_{\substack{T\in Q\setminus\{S\} \\ |T|=t}} t w(S,Q) - \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i,|S|=s \\ \lambda_Q=\lambda,|Q^i|=t}} s w(S,Q) \right]$$

La parte restante es un cálculo sencillo, y la unicidad se sigue de la parte de unicidad en el lema anterior. ■

Denotaremos por $\varphi^\beta$ la solución $\varphi$ con parámetros $\{\beta_{(\lambda,s,t)} \mid (\lambda,s,t) \in B_n\}$ cuando necesitemos referirnos a sus parámetros.

**Observación 78** *La fórmula anterior puede escribirse como*

$$\varphi_i(w) = \frac{w(N,\{N\})}{n} + \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ (S,Q)\neq(N,\{N\}) \\ S\ni i}} \sum_{T\in Q\setminus\{S\}} t\beta^t_{\lambda_Q,s} w(S,Q) - \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i}} s\beta^{q_i}_{\lambda_Q,s} w(S,Q)$$

*La cual puede interpretarse como sigue. Comenzamos dando* $\frac{w(N,\{N\})}{n}$ *a cada jugador. Seguimos con una transferencia de* $T$ *a* $S$ *para cada* $T \in Q \backslash \{S\}$ *y cada* $(S,Q) \in ECL$*: cada jugador en* $T$ *paga* $s\beta_{(\lambda_Q,s,t)}w(S,Q)$ *y cada jugador en* $S$ *recibe* $t\beta_{(\lambda_Q,s,t)}w(S,Q)$*. Al final, el jugador* $i$ *tiene la cantidad* $\varphi_i(w)$ *dada por la fórmula anterior.*

**Corolario 79** *El espacio de todas las soluciones lineales y simétricas en* $n$ *jugadores tiene dimensión* $|A_n| + |B_n|$*. De igual forma, el espacio de todas las soluciones lineales, simétricas y eficientes en* $n$ *jugadores tiene dimensión* $|B_n|$*. Es decir,*

$$\dim LS(G^{(n)}) = |A_n| + |B_n|$$

*y*

$$\dim LSE(G^{(n)}) = |B_n|$$

**Proposición 80** *La relación*

$$\dim LS(G^{(n)}) = \dim LSE(G^{(n+1)})$$

*se cumple para cada* $n$[2]*.*

**Demostración.** Se mostrará que, para $n \geq 1$

$$|A_n| + |B_n| = |B_{n+1}|$$

Definimos

$$f : A_n \cup B_n \to B_{n+1}$$

como sigue. Dado $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p] \in \Pi(n)$, denotamos $\lambda \cup [1] := [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p, 1] \in \Pi(n+1)$. Para $(\lambda, s) \in A_n$ definimos

$$f(\lambda, s) := (\lambda \cup [1], s, 1)$$

Para $(\lambda, s, t) \in B_n$ escojemos $j$ tal que $\lambda_j = t$ y que $j$ sea el mínimo $k$ tal que $\lambda_k = t$. Sea

[2] *Se agradece al Dr. Ernesto Vallejo por dar una prueba simple de este hecho.*

$\widetilde{\lambda} := [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{j-1}, \lambda_j + 1, \lambda_{j+1}, ..., \lambda_p] \in \Pi(n+1)$ y definimos

$$f(\lambda, s, t) := (\widetilde{\lambda}, s, t+1)$$

Afirmamos que $f$ es una biyección. En efecto,

- Para ver que $f$ es inyectiva. Tomamos $a, b \in A_n \cup B_n$ tales que $f(a) = f(b) = (\mu, x, y)$.

**i)** Si $y = 1$. $a, b \in A_n$ y claramente $a = b$.

**ii)** Si $y > 1$. $a, b \in B_n$ y es fácil verificar que $a = b$.

Por lo tanto, $f$ es inyectiva.

- Para ver que $f$ es suprayectiva. Tomamos $(\mu, x, y) \in B_n$.

**i)** Si $y = 1$. Se tiene al menos una parte igual a 1. Sea $\lambda$ obtenida de $\mu$ quitando el último cero de $\mu$. Entonces $\lambda \in \Pi(n)$, $(\lambda, x) \in A_n$ y $f(\lambda, x) = (\mu, x, y)$.

**ii)** Si $y > 1$. Sea $j$ el máximo de las $k$'s tales que $\mu_k = y$. Definimos $\lambda = [\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{j-1}, \mu_j - 1, \mu_{j+1}, ...]$ y así $\lambda \in \Pi(n)$. Fácilmente puede verse que $f(\lambda, x, y-1) = (\mu, x, y)$.

Por lo tanto, $f$ es suprayectiva.

Así entonces, concluímos que $|A_n| + |B_n| = |B_{n+1}|$ y

$$\dim LS(G^{(n)}) = \dim LSE(G^{(n+1)})$$

■

**Ejemplo 81** *Si $N = \{1, 2, 3\}$, entonces cualquier solución lineal, simétrica y eficiente es de la forma (para el jugador 1):*

$$\begin{aligned}
\varphi_1(w) &= \frac{w(N, \{N\})}{n} \\
&+\beta_{([111],1,1)} \left[2w(\{1\}, (1,2,3)) - w(\{2\}, (1,2,3)) - w(\{3\}, (1,2,3))\right] \\
&+\beta_{([21],1,2)} \left[2w(\{1\}, (1,23)) - w(\{2\}, (2,13)) - w(\{3\}, (3,12))\right] \\
&+\beta_{([21],2,1)} \left[w(\{1,2\}, (3,12)) + w(\{1,3\}, (2,13)) - 2w(\{2,3\}, (1,23))\right]
\end{aligned}$$

*con* $\beta_{([111],1,1)}, \beta_{([21],1,2)}, \beta_{([21],2,1)} \in \mathbb{R}$ *arbitrarios.*

**Ejemplo 82** *Algunos casos,*

| $n$ | $\dim G^{(n)}$ | $\dim LS(G^{(n)})$ | $\dim LSE(G^{(n)})$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 3 | 1 |
| 3 | 10 | 7 | 3 |
| 4 | 37 | 14 | 7 |
| 5 | 151 | 26 | 14 |
| 6 | 674 | 45 | 26 |

Bolger (1987) demuestra que hay muchas soluciones LSE para juegos en forma de función de partición. Este autor da la siguiente clase de soluciones LSE:

$$\Phi_i(w) = \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\ni i}} a(s,n,q)w(S,Q) - \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i}} \frac{s}{n-s} a(s,n,q)w(S,Q)$$

con $a(n,n,1) = \frac{1}{n}$.

Tal clase se recupera de la fórmula general que se obtuvo, con los parámetros $\beta_{(\lambda,s,t)} = \frac{a(s,n,|\lambda|)}{n-s}$ en (4.2).

De hecho, también es posible dar una expresión para todas las soluciones lineales, simétricas y eficientes para juegos tradicionales. Recordemos que

$$J = \{v : 2^N \to \mathbb{R} \mid v(\varnothing) = 0\}$$

es el espacio de juegos tradicionales con conjunto de jugadores $N$.

**Corolario 83** *La solución* $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ *satisface los axiomas de linealidad, simetría y eficiencia si y sólo si es de la forma*

$$\varphi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{\substack{S\subsetneq N \\ S\ni i}} \rho_s \frac{v(S)}{s} - \sum_{\substack{S\subset N \\ S\not\ni i}} \rho_s \frac{v(S)}{n-s}$$

*para cualesquiera números reales* $\{\rho_s\}_{s=1}^{n-1}$.

**Demostración.** Tomemos $w \in G$ tal que $w(S,Q) = v(S)$ para todo $(S,Q) \in ECL$ en la fórmula (4.2). ■

Una expresión equivalente de todas las soluciones lineales, simétricas y eficientes para juegos tradicionales se puede encontrar en el artículo de Ruiz et al. (1998).

Para finalizar este capítulo, daremos los parámetros correspondientes a cada una de las soluciones para juegos dadas en la Sección 3.2.

**Ejemplo 84** *Determinación de parámetros para los valores de la sección 2.2.*

- *El valor de Myerson se recupera de la expresión general (4.2) con los parámetros*

$$\beta_{(\lambda,s,t)} = \frac{(-1)^{|\lambda|}(|\lambda|-1)!}{s}\left(\frac{1}{n} - \sum_{t\in(\lambda-[r,s])^{\circ}} \frac{1}{(|\lambda|-1)(n-t)}\right)$$

- *El valor de Albizuri et al. es también de la forma (4.2). Los parámetros correspondientes son*

$$\beta_{(\lambda,s,t)} = \frac{(n-s-1)!(s-1)!}{n!\cdot p(n-s)}$$

- *El valor de Shapley para juegos en forma de función de partición se obtiene a partir de la fórmula (4.2) con*

$$\beta_{(\lambda,s,t)} = \begin{cases} \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{n!} & si\ \lambda \in \{[m,1,...,1]\}_{m=1}^{n-1}, s=m\ y\ r=1 \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

- *La solución "expected stand-alone value" se recupera de la expresión (4.2), tomando*

$$\beta_{(\lambda,s,t)} = \begin{cases} \frac{(s-1)!(n-s-2)!}{n!} & si\ \lambda \in \{[m,1,...,1]\}_{m=1}^{n-1}, s=1\ y\ r=m \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

- *Así, los parámetros correspondientes para el valor de Consenso son*

$$\beta_{(\lambda,s,t)} = \begin{cases} \frac{1}{2n(n-2)} & si\ \lambda = [1,1,...,1]\ \ y\ s = r = 1 \\ \frac{(s-1)!(n-s-2)!}{2n!} & si\ \lambda \in \{[m,1,...,1]\}_{m=1}^{n-1}, s = 1\ \ y\ r = m \\ \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{2n!} & si\ \lambda \in \{[m,1,...,1]\}_{m=1}^{n-1}, s = m\ \ y\ r = 1 \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

- *Finalmente, el valor de Macho-Stadler et al. también es de la forma (4.2) con parámetros*

$$\beta_{(\lambda,s,t)} = \frac{(s-1)! \prod\limits_{t\in(\lambda-[s])^{\circ}} (t-1)!}{(n-s)n!}$$

# Capítulo 5

# Caracterización de soluciones

En este capítulo se aborda el problema de caracterizar soluciones de forma unívoca. Para ello, se proponen dos variantes del concepto de jugador nulo, y de esta forma dar un axioma de nulidad en términos de cierta contribución marginal (un trabajo ya hecho para juegos tradicionales) para juegos en forma de función de partición. Se obtienen dos valores distintos, uno de ellos lo podemos ver como una extensión del valor de Shapley a este tipo de juegos y el otro como una extensión del valor de Solidaridad.

## 5.1. Extensión del valor de Shapley para $G$

**Definición 85** *Sean $i \in N$ y $w \in G$, decimos que el jugador $i$ es II-nulo en el juego $w$ si para todo $(S, Q) \in ECL$ tal que $S \ni i$:*

$$w(S, Q) = w(S_{-i}, Q_S^i)$$

*donde $S_{-i} = S \backslash \{i\}$ y $Q_S^i = \{S_{-i}, \{i\}\} \cup Q \backslash \{S\}$.*

**Axioma 86 (II-Nulidad)** *Sean $i \in N$ y $w \in G$. Si el jugador $i$ es II-nulo en el juego $w$, entonces $\varphi_i(w) = 0$.*

Para introducir el valor que se quiere caracterizar, necesitamos algo más de notación. Para $\theta \in S_n$ y $j \in N$ dados, definimos la coalición $S_j^\theta$ y la partición $Q_j^\theta$, asociados con $\theta$ y $j$, como

$$S_j^\theta = \{\theta(1), \theta(2), ..., \theta(j)\} \quad \text{y} \quad Q_j^\theta = \{S_j^\theta\} \cup [N \backslash S_j^\theta]$$

Para un juego $w$, podemos definir contribuciones marginales como sigue. El vector de contribuciones marginales $C^\theta(w)$ corresponde a la situación donde los jugadores entran a un cuarto, uno por uno en el orden $\theta(1), \theta(2), ..., \theta(n)$. El primer jugador de acuerdo a $\theta$, i.e., $\theta(1)$, recibe $C_{\theta(1)}^\theta(w) = w(\{\theta(1)\}, [N]) = w(S_1^\theta, Q_1^\theta)$. Si el segundo jugador $\theta(2)$ se une, entonces los dos jugadores juntos pueden obtener $w(S_2^\theta, Q_2^\theta)$ y la contribución marginal del jugador $\theta(2)$ es $C_{\theta(2)}^\theta(w) = w(S_2^\theta, Q_2^\theta) - w(S_1^\theta, Q_1^\theta)$.

De forma similar, la contribución marginal de el $k-$ésimo jugador $\theta(k)$, a la coalición $S_k^\theta$ es

$$C_{\theta(k)}^\theta(w) = w(S_k^\theta, Q_k^\theta) - w(S_{k-1}^\theta, Q_{k-1}^\theta)$$

Basados en estos vectores de contribuciones marginales $\{C^\theta(w)\}_{\theta \in S_n}$, podemos definir un valor $\varphi$ del juego $w$, como el promedio de los $n!$ vectores de contribuciones marginales,

$$\varphi(w) = \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in S_n} C^\theta(w) \tag{5.1}$$

**Ejemplo 87** *Para el juego de compañías $w$, los vectores de contribuciones marginales son*

| *Partición* | *Valía* | | |
|---|---|---|---|
| $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ | 50 | 50 | 50 |
| $\{1, 2\}, \{3\}$ | 120 | 40 | |
| $\{1, 3\}, \{2\}$ | 125 | 45 | |
| $\{2, 3\}, \{1\}$ | 130 | 10 | |
| $\{1, 2, 3\}$ | 200 | | |

| $\theta \in S_3$ | $C^\theta(w)$ |
|---|---|
| $(1, 2, 3)$ | $(50, 70, 80)$ |
| $(1, 3, 2)$ | $(50, 75, 75)$ |
| $(2, 1, 3)$ | $(70, 50, 80)$ |
| $(2, 3, 1)$ | $(70, 50, 80)$ |
| $(3, 1, 2)$ | $(75, 75, 50)$ |
| $(3, 2, 1)$ | $(70, 80, 50)$ |

**Lema 88** $\{w_{(R,P)} \mid (R, P) \in ECL\}$ *constituye una base para el espacio de juegos $G$. Donde,*

*por cada $(R,P) \in ECL$, definimos*

$$w_{(R,P)}(S,Q) = \begin{cases} 1 & si\ S \supseteq R\ y\ (\forall T' \in Q\backslash\{S\})(\exists T \in P) : T' \subseteq T \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases} \tag{5.2}$$

**Teorema 89** *Existe una única solución sobre $G$ que satisface los axiomas de linealidad, simetría, eficiencia y II-nulidad. Más aún, ésta es*

$$\varphi(w) = \frac{1}{n!}\sum_{\theta \in S_n} C^{\theta}(w)$$

*para todo $w \in G$.*

**Demostración.** Sea $\varphi$ una solución que satisface tales axiomas. Recordemos que para cualquier juego dado $w \in G$, existen $\delta_{(R,P)} \in \mathbb{R}$ únicos tales que $w = \sum_{(R,P)\in ECL} \delta_{(R,P)} w_{(R,P)}$. Luego, por linealidad,

$$\varphi(w) = \sum_{(R,P)\in ECL} \delta_{(R,P)} \varphi(w_{(R,P)})$$

Se mostrará que $\varphi(w)$ está determinada para todo $w \in G$ y por lo anterior, es suficiente mostrar que $\varphi(w_{(R,P)})$ está determinada para todo $(R,P) \in ECL$. Así, la solución $\varphi$ para cada $w_{(R,P)}$ es único y el de $w$ también lo será.

Notemos que,

**a)** $w_{(R,P)}(N, \{N\}) = 1$

**b)** Si $i \in N\backslash R$, las siguientes expresiones son equivalentes:

1. $S \supseteq R$ y $(\forall T' \in Q\backslash\{S\})(\exists T \in P) : T' \subseteq T$
2. $S_{-i} \supseteq R$ y $(\forall T' \in \{\{i\}\} \cup Q\backslash\{S\})(\exists T \in P) : T' \subseteq T$

Por lo que, $w_{(R,P)}(S,Q) = 1$ sii $w_{(R,P)}(S_{-i}, Q_S^i\}) = 1$, i.e., $i$ es nulo en $w_{(R,P)}$.

**c)** Si $i, j \in R$ y $\theta \in S_n$ es tal que $\theta = (ij)$, entonces las siguientes expresiones son equivalentes:

1. $S \supseteq R$ y $(\forall T' \in Q\backslash\{S\})(\exists T \in P) : T' \subseteq T$
2. $\theta^{-1}(S) \supseteq R$ y $(\forall T' \in \theta^{-1}(Q\backslash\{S\}))(\exists T \in \theta^{-1}(P)) : T' \subseteq T$

Por lo que, $w_{(R,P)}(S,Q) = 1$ sii $w_{(R,P)}(\theta^{-1}(S,Q)) = 1$, i.e., $v_{(R,P)} = \theta \cdot w_{(R,P)}$. Además por simetría,

$$\varphi_i(w_{(R,P)}) = \varphi_i(\theta \cdot w_{(R,P)}) = \varphi_{\theta(i)}(w_{(R,P)}) = \varphi_j(w_{(R,P)})$$

Tomando en cuenta lo anterior señalado, junto con axioma de eficiencia, tenemos que

$$\varphi_i(w_{(R,P)}) = \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{si } i \in R \\ 0 & \text{si } i \notin R \end{cases}$$

Y finalmente obtenemos,

$$\varphi_i(w) = \sum_{\substack{(R,P)\in ECL \\ R \ni i}} \frac{\delta_{(R,P)}}{r}, \qquad \forall i \in N$$

Por otra parte, fácilmente se puede verificar que $\varphi$ satisface los axiomas que se pide en el teorema. ■

**Ejemplo 90** *Consideremos el caso en el que tenemos un espacio de* $3$ *jugadores* ($N = \{1,2,3\}$)*. Tomemos el juego* $w_{(R,P)}$*, con* $R = \{1\}$ *y* $P = \{\{1\},\{2,3\}\}$*, que es un elemento de la base para* $G^{(3)}$*.*

| *Partición* | *Valía* |
|---|---|
| $\{1\},\{2\},\{3\}$ | $1 \quad 0 \quad 0$ |
| $\{1,2\},\{3\}$ | $1 \quad 0$ |
| $\{1,3\},\{2\}$ | $1 \quad 0$ |
| $\{2,3\},\{1\}$ | $0 \quad 1$ |
| $\{1,2,3\}$ | $1$ |

*De acuerdo al Teorema anterior, los jugadores* $2$ *y* $3$ *son II-nulos en* $w_{(R,P)}$*. Por lo que,* $\varphi(w_{(R,P)}) = (1,0,0)$*.*

**Observación 91** *La solución que se ha caracterizado en el Teorema anterior es una extensión para el valor de Shapley. Primero, notemos que el subespacio de* $G$ *formado por los juegos* $w$ *tales que* $w(S,Q) = w(S)\ \forall (S,Q) \in ECL$*, pueden ser identificados con el espacio de juegos tradicionales* $J$*. Así, tomando en cuenta la expresión (5.1), ésta coincide con el valor de Shapley* *para estos juegos.*

Por otra parte, es posible también dar una caracterización alterna para la solución dada por (5.1) empleando los axiomas de simetría, eficiencia y otro que llamaremos "marginalidad". Como su nombre lo pudiera indicar, este último axioma se refiere a contribuciones marginales; y básicamente trata de que si coinciden las contribuciones marginales de un jugador en juegos distintos, entonces sería natural pedir que éste jugador obtenga el mismo pago en ambos juegos. En definiciones posteriores se precisará en los conceptos de contribución marginal y axioma de marginalidad.

**Definición 92** *Sean $i \in N$ y $(S,Q) \in ECL$ tal que $S \ni i$. Entonces la contribución marginal de $i$ a $(S,Q)$ está dada por*

$$C^i_{(S,Q)}(w) = w(S,Q) - w(S_{-i}, Q^i_S)$$

*por cada juego $w \in G$. El vector de contribuciones marginales para el jugador $i$ se obtiene al variar $(S,Q)$:*

$$C^i(w) = \left(C^i_{(S,Q)}(w)\right)_{(S,Q)\in ECL, S\ni i}$$

Observemos que de acuerdo a esta definición, un jugador $i \in N$ será II-nulo en $w \in G$ si $C^i(w) = 0$.

**Axioma 93 (Marginalidad)** *Sean $i \in N$ y $w_1, w_2 \in G$. Si $C^i(w_1) = C^i(w_2)$, entonces*

$$\varphi_i(w_1) = \varphi_i(w_2)$$

Así entonces, se puede demostrar que hay una única solución que satisface los axiomas de simetría, eficiencia y marginalidad.

**Teorema 94** *La solución $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ dada por (5.1) es la única solución que satisface los axiomas de simetría, eficiencia y marginalidad.*

**Demostración.** Tal como en el Teorema anterior, aquí también se mostrará que $\varphi(w_{(R,P)})$ está determinada para todo $(R,P) \in ECL$, donde $w_{(R,P)} \in G$ está dado por (5.2) . Por lo que, la solución $\varphi$ para cada $w_{(R,P)}$ es único y el de $w$ también lo será.

Dado que, para $i \in N \backslash R$, $w_{(R,P)}(S,Q) = 1$ sii $w_{(R,P)}(S_{-i}, Q_S^i) = 1$, entonces

$$C^i(w_{(R,P)}) = C^i(w^0)$$

donde $w^0$ es el juego nulo (i.e., $w^0(S,Q) = 0 \ \forall (S,Q) \in ECL$). El axioma de marginalidad implica que

$$\varphi_i(w_{(R,P)}) = \varphi_i(w^0)$$

Por otra parte, usando el axioma de simetría, resulta que $\varphi_j(w_{(R,P)}) = \varphi_k(w_{(R,P)})$ para todo $j \neq k$; y por el axioma de eficiencia, $\sum\limits_{i \in N} \varphi_i(w_{(R,P)}) = 0$. Por lo que, $\varphi_i(w^0) = 0$. Por lo tanto,

$$\varphi_i(w_{(R,P)}) = 0$$

y así,

$$\varphi_i(w_{(R,P)}) = \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{si } i \in R \\ 0 & \text{si } i \notin R \end{cases}$$

■

## 5.2. Extensión del valor de Solidaridad para $G$.

Aquí, generalizaremos el valor de Solidaridad a la clase de juegos en forma de función de partición. Para lograrlo, primero definimos para cada $(S,Q) \in ECL$ tal que $S \neq \varnothing$ y cada $w \in G$:

$$\overline{C}^w(S,Q) = \frac{1}{s} \sum_{j \in S} \left[ w(S,Q) - w(S_{-j}, Q_S^j) \right]$$

O de forma equivalente,

$$\overline{C}^w(S,Q) = \frac{1}{s} \sum_{j \in S} C^j_{(S,Q)}(w)$$

De donde, podemos interpretar $\overline{C}^w(S,Q)$ como una contribución marginal promedio[1] de un miembro de $S$, dada la estructura coalicional $Q$. Por convención, $w(\varnothing, Q) = 0$ para todo $Q \in PT$.

[1] Justo como su contraparte para juegos tradicionales (c.f. Nowak y Radzik, 1994).

Ahora, damos la siguiente versión del axioma de nulidad para esta clase de juegos:

**Axioma 95 (III-Nulidad)** *Si $i \in N$ es un jugador III-nulo en $w \in G$, i.e., $\overline{C}^w(S,Q) = 0$ para todo $(S,Q) \in ECL$ tal que $S \ni i$, entonces $\varphi_i(w) = 0$.*

Por lo cual, ya podemos dar la caracterización de esta extensión.

**Teorema 96** *La solución $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ dada por*

$$\varphi_i(w) = \sum_{\substack{(S,Q_S)\in ECL \\ S\ni i}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} \cdot \overline{C}^w(S,Q_S) \tag{5.3}$$

*para todo $i \in N$ y para todo $w \in G$; es la única solución que satisface los axiomas de linealidad, simetría, eficiecia y III-nulidad.*

**Demostración.** La colección de juegos $\{e_{(R,P)} \mid (R,P) \in ECL\}$ definidos como

$$e_{(R,P)}(S,Q) = \begin{cases} \binom{s}{r}^{-1} & \text{si } S \supseteq R \text{ y } (\forall T' \in Q\backslash\{S\})(\exists T \in P) : T' \subseteq T \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

constituye una base para $G$.

Notemos que la solución dada por (5.3) es de la forma (4.2), por lo que satisface los axiomas de linealidad, simetría y eficiencia; y es fácil ver que también satisface el axioma de nulidad.

Demostramos la unicidad. Sea $\varphi$ una solución que satisface los cuatro axiomas. Para cualquier $w \in G$, existen $\delta_{(R,P)} \in \mathbb{R}$ tales que $w = \sum_{(R,P)\in ECL} \delta_{(R,P)} e_{(R,P)}$. Entonces, por linealidad,

$$\varphi(w) = \sum_{(R,P)\in ECL} \delta_{(R,P)} \varphi(e_{(R,P)})$$

Mostraremos que $\varphi(w)$ está determinada para todo $w \in G$ y por la discusión anterior, es suficiente mostrar que $\varphi(e_{(R,P)})$ está determinada para todo $(R,P) \in ECL$. De esta forma, $\varphi$ es única para cada $e_{(R,P)}$ y por lo tanto también para $w$.

Notemos que,

**i)** $e_{(R,P)}(N,\{N\}) = \binom{n}{r}^{-1}$

**ii)** Si $i \in N \backslash R$, entonces $\overline{C}^{e_{(R,P)}}(S,Q) = 0$ para todo $(S,Q) \in ECL$ tal que $S \ni i$, i.e., $i$ es III-nulo en $e_{(R,P)}$.

En efecto, es obvio si $S \not\supseteq R$ o (para algún $T' \in Q\backslash\{S\}$)$(\nexists T \in P) : T' \subseteq T$. Sólo nos ocupamos del caso donde $S \supseteq R$ y $(\forall T' \in Q\backslash\{S\})(\exists T \in P) : T' \subseteq T$:

$$\begin{aligned}
\overline{C}^{e_{(R,P)}}(S,Q) &= e_{(R,P)} - \frac{1}{s}\sum_{j \in S} e_{(R,P)}(S_{-j}, Q_S^j) \\
&= \binom{s}{r}^{-1} - \frac{1}{s}\sum_{j \in S\backslash R} e_{(R,P)}(S_{-j}, Q_S^j) \\
&= \binom{s}{r}^{-1} - \frac{1}{s}(s-r)\binom{s-1}{r}^{-1} = 0
\end{aligned}$$

**iii)** Si $i, j \in R$ y $\theta \in S_n$ es tal que $\theta(i) = j$ y $\theta(R) = R$, entonces $\theta \cdot e_{(R,P)} = e_{(R,P)}$ y por simetría:

$$\varphi_i(e_{(R,P)}) = \varphi_i(\theta \cdot e_{(R,P)}) = \varphi_{\theta(i)}(e_{(R,P)}) = \varphi_j(e_{(R,P)})$$

Por lo tanto, por el axioma de eficiencia:

$$\varphi_i(e_{(R,P)}) = \begin{cases} \frac{1}{r}\binom{n}{r}^{-1} & \text{si } i \in R \\ 0 & \text{si } i \notin R \end{cases}$$

Finalmente,

$$\varphi_i(w) = \sum_{\substack{(R,P) \in ECL \\ R \ni i}} \frac{\delta_{(R,P)}}{r}\binom{n}{r}^{-1}, \qquad \forall i \in N$$

■

**Ejemplo 97** *Consideremos el caso en el que tenemos un espacio de* $3$ *jugadores* ($N = \{1,2,3\}$)*. Tomemos el juego* $e_{(R,P)}$*, con* $R = \{2,3\}$ *y* $P = \{\{1\},\{2,3\}\}$*, que es un juego elemento de la* *base para* $G^{(3)}$.

| *Partición* | *Valía* | | |
|---|---|---|---|
| $\{1\},\{2\},\{3\}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\{1,2\},\{3\}$ | 0 | 0 | |
| $\{1,3\},\{2\}$ | 0 | 0 | |
| $\{2,3\},\{1\}$ | 1 | 0 | |
| $\{1,2,3\}$ | $\frac{1}{3}$ | | |

*De acuerdo al Teorema anterior, el jugador* 1 *es III-nulo en* $e_{(R,P)}$. *Por lo que,* $\varphi(e_{(R,P)}) = (0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.

# Capítulo 6

# Conclusiones

El uso de técnicas de la teoría de representaciones aplicado a la teoría de juegos cooperativos es prometedor, interesante y versátil. En particular, tal teoría la podemos ver como una herramienta natural para la investigación en soluciones para juegos cooperativos. En la presente tesis, se puede constatar la utilidad del uso de este tipo de técnicas, ya que se presenta la información en una forma más clara y concisa.

De forma breve, la idea clave en el trabajo fue la siguiente. Se deriva una descomposición para el espacio de juegos en forma de función de partición y para el espacio de vectores pago, en suma directa de piezas "elementales". Más aún, cualquier solución lineal y simétrica restringida a cualquier subespacio elemental, es cero o una multiplicación por un escalar; independientemente de la dimensión del subespacio elemental -esto se sigue del llamado lema de Schur; por lo que toda solución lineal y simétrica, se puede escribir (simultaneamente) como suma de mapeos triviales.

Como simple ejemplo del alcance de la teoría de representaciones, Bolger (1987) deriva una clase de soluciones lineales, simétricas y eficientes; y comenta sobre la gran complejidad de poder caracterizar la clase de todas estas soluciones. Sin embargo, usando la descomposición para $G$ y $\mathbb{R}^n$ (así como también el lema de Schur), en la sección 4 se caracterizan todas las soluciones lineales y simétricas, y se logra demostrar que cualquier solución lineal, simétrica y eficiente, es de la forma

$$\varphi_i(w) = \frac{w(N,\{N\})}{n} + \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ (S,Q)\neq(N,\{N\}) \\ S\ni i}} \sum_{T\in Q\setminus\{S\}} t\beta^{t}_{\lambda_Q,s} w(S,Q) - \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i}} s\beta^{q_i}_{\lambda_Q,s} w(S,Q)$$

Una vez ya caracterizadas todas las soluciones lineales, simétricas y eficientes, se pueden imponer más restricciones o axiomas a las soluciones. Por ejemplo, en la sección 5 se demuestra que incorporando dos nuevos axiomas de nulidad (de forma independiente), se obtiene la axiomatización de dos valores: extensiones del valor de Shapley y del valor de Solidaridad a juegos en forma de función de partición.

También importante, se reemplazan los axiomas de linealidad y nulidad por uno llamado "marginalidad" y se axiomatiza en forma tradicional esta extensión del valor de Shapley.

Dadas las aportaciones que brinda este trabajo, podemos concluir que la teoría de representaciones es una herramienta poderosa y natural al aplicarla al estudio de soluciones en juegos en forma de función de partición.

# Bibliografía


[1] Albizuri M. J., Arin J., and Rubio J. (2005), "An axiom system for a value for games in partition function form", International Game Theory Review, 7(1), 63-72.

[2] Bolger E. M. (1983), "The Banzhaf index for multicandidate presidential elections", Journal of Algebraic and Discreet Methods, 4(4), 442-458.

[3] Bolger E. M. (1985), "Power indices for multicandidate voting games", International Journal of Game Theory, 15(3), 175-186.

[4] Bolger E. M. (1987), "A class of efficient values for games in partition function form", Journal of Algebraic and Discreet Methods, 8(3), 460-466.

[5] Bolger E. M. (1987), "A Set of Axioms for a Value for Partition Function Games", International Journal of Game Theory, 18(1), 37-44.

[6] Clippel G. and Serrano R. (2006), "Marginal contributions and externalities in the value", preprint.

[7] Fulton W. (1991), "Representation theory; a first course", New York: Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics, 129.

[8] Hernández L. L., Juárez G. R. and Sánchez S. F. (2006), "Dissection of solutions in cooperative game theory using representation techniques", International Journal of Game Theory, 35, 395-426.

[9] Ju Y. (2007), "The Consensus Value for Games in Partition Function Form", International Game Theory Review, forthcoming.

[10] Lemaire J., "Cooperative game theory and its insurance applications", Invited Paper, University of Pennsylvania.

[11] Lucas W. F. and Thrall R. M. (1963), "n-person games in partition function form", Naval Research Logistics Quarterly, 10, 281-298.

[12] Macho-Stadler I., Pérez-Castrillo D. and Wettstein D. (2006), "Sharing the surplus: An extension of the Shapley value for environments with externalities", Journal of Economic Theory, 135, 339-356.

[13] Macho-Stadler I., Pérez-Castrillo D. and Wettstein D. (2006), "Efficient bidding with externalities", Games and Economic Behavior, 57, 304-320.

[14] Maskin E. (2003), "Bargaining, Coalitions and Externalities", Presidential Address to the Econometric Society, Institute for Advanced Study, Princeton.

[15] Myerson R. B. (1977), "Values of games in partition function form", International Journal of Game Theory, 6(1), 23-31.

[16] Nowak A. and Rakzik T. (1994), "A Solidarity Value for n-Person Transferable Utility Games", International Journal of Game Theory, 23, 43-48.

[17] Pham Do K. and Norde H. (2007), "The Shapley value for partition function games", International Game Theory Review, 9, forthcoming.

[18] Ruiz L., Valenciano F. and Zarzuelo J. (1998), "The family of the Least Square Values for transferable utility games", Games and Economic Behavior, 24, 109-130.

[19] Sánchez-Pérez J. (2005), "El Axioma de Consistencia en Juegos Cooperativos", Tesis de Maestría, Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT).

[20] Shapley L. (1953), "A value for n-person games", Contribution to the Theory of Games, 2, 307-317.

[21] Sobolev A., (1973), "The functional equations that give the payoffs of the players in an n-person game", Advances in Game Theory. Vilkas E. (ed), 151-153.

[22] Thomson W. and Myerson R. (1980), "Monotonicity and independence axioms", International Journal of Game Theory, 9, 37-49.

[23] Young H. P. (1982), "Monotonic Solutions of Cooperative Games", International Journal of Game Theory, 14(2), 65-72.