CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A. C.

Construcción Algebraica de la Jacobiana de una Curva de género 3

Autor:
Jesús Romero Valencia

Asesor y Director de tesis:
Dr. Alexis M. García Zamora

27 de Octubre del 2008

Agradecimientos

En primer plano quiero agradecer a la gente más importante, mi familia, por motivarme y apoyarme en todo momento, en especial a mi madre la persona de quien más he recibido durante toda mi vida, a Flor, Quetzal y Yolo por ser mi motivación, a mis amigos (que puedo contar con los dedos de una mano) por alentarme siempre.
Agradezco enormemente a mi asesor y director de tesis, Dr. Alexis Miguel García Zamora por su invaluable tiempo, ayuda, motivación, atención y sobre todo por su infinita paciencia que me brindó durante el tiempo de realización del presente trabajo. Una mención especial merece la persona por la cual empecé a trabajar en Geometría Algebraica, el Dr. Sevin Recillas Pishmish (E.P.D.), pues gracias a las clases y conversaciones que tuve con él me interesé por trabajar en estos temas.
Agradezco a CIMAT todo el apoyo que recibí durante mis estudios, a todo el personal que ahí labora, tanto académico como administrativo, en especial a los investigadores con quienes tomé algún curso o seminario pues me ayudaron muchísimo a sentar bases firmes del conocimiento que ahora tengo, particularmente a la Dra. Leticia Brambila, Dr. Adolfo Sánchez Valenzuela, Dr. Pedro Luis del Angel y Dr. Xavier Gomez-Mont.

Agradezco el apoyo que recibí por parte de CONACyT para la realización de mis estudios.

Introducción

En diversas areas de la matemática, como la geometría algebraica, el análisis complejo y la teoría de números es de gran importancia el estudio de las variedades abelianas, las cuales son variedades algebraicas proyectivas que a su vez tienen estructura de grupo algebraico, es decir, su ley de grupo puede definirse por funciones polinomiales. Un caso particular muy importante dentro de este conjunto de variedades es el de la variedad Jacobiana de una curva. El desarrollo de estas teorías tiene múltiples aplicaciones y relaciones tanto con otras areas de la matemática como con la física, como por ejemplo en ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y criptografía, por citar solamente algunas.
A través de la historia grandes matemáticos dedicaron gran parte de su vida a desarrollar estas teorías: Bernhard Riemann, Niels H. Abel, Carl G. Jacobi, Carl F. Gauss son sólo algunos de los máximos exponentes de los inicios de estos temas.

En este trabajo nos enfocamos en el estudio de la variedad Jacobiana de una curva plana, proyectiva, no-singular y no hiperelíptica de género 3. En el primer capítulo lo que hacemos es definir y enunciar algunos resultados básicos para el desarrollo de este trabajo como por ejemplo la construcción de la variedad Jacobiana de una curva y teoremas fundamentales relacionados con ésta: el teorema de Abel, el problema de inversión de Jacobi y el teorema de la constante de Riemann. También nos referimos a algunos conceptos respecto al número de intersección de dos curvas planas planas proyectivas y un resultado básico respecto a este tema: el teorema $AF + BG$ de Noether.
En el capítulo 2 desarrollamos parte del trabajo hecho por D. Mumford en su *Tata Lectures on Theta II* respecto a curvas hiperelípticas de género arbitrario g. Comenzamos por definir un abierto dentro del conjunto de todos

los divisores efectivos de grado g donde a cada divisor de este abierto se le asocian una terna de polinomios que satisfacen ciertas propiedades, se le da estructura de variedad algebraica afín a este abierto y por último mediante un número finito de traslaciones de este abierto cubrimos a la variedad Jacobiana de la curva.
En el siguiente capítulo el resultado principal es el siguiente: dada una curva plana, proyectiva, no-singular, no-hiperelíptica de género 3 hacemos una construcción de manera explícita de variedad algebraica de su variedad Jacobiana, lo que hacemos es emular el trabajo hecho por Mumford para el caso de curvas hipereípticas: encontramos un conjunto abierto dentro de todos los divisores efectivos de grado 3 en el cual a cada elemento le asociaremos una pareja de cónicas que satisfacen propiedades muy especiales, otra vez damos estructura de variedad algebraica afín a este abierto y mediante un número finito de traslaciones de éste cubrimos a la Jacobiana de la curva. Esta parte del trabajo esta fuertemente apoyada en los teoremas de Abel-Jacobi, $AF + BG$ de Noether y el de la constante de Riemann. Para este capítulo fueron de mucha ayuda los artículos realizados por Estrada, Reinaldo, Piñeiro[10]; Anderson[2] y García-Zamora[14].
Por último en el capítulo 4 lo que se hace es encontrar algunos puntos en la Jacobiana de una curva X que satisfagan ciertas propiedades de Theta-anulamiento, el tipo de curvas que tratamos aqui son de Picard y de Fermat de grado 4 (género 3). Y viceversa, si tenemos puntos en la variedad Jacobiana de una curva que satisfacen ciertas propiedades de Theta-anulamiento; probar que la curva en cuestión es de Picard o bien de Fermat, y más aún, hallar de manera explícita la ecuación que define a esta curva. Nuestra principal herramienta aquí es el teorema de la constante de Riemann. Para esta parte del trabajo nos fueron muy útiles los artículos de Accola[1] y de García-Zamora[14].

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo nos ocuparemos de definir algunos conceptos básicos utilizados en nuestro trabajo, así como también enunciar resultados que serán de suma importancia para el desarrollo del mismo.

1.1. La Variedad Jacobiana de una Curva

Comencemos por recordar como se define el primer grupo de homología para una superficie.
Sea X una curva (superficie de Riemann), una *cadena* en X es una suma finita formal de trayectorias en X con coeficientes enteros. Toda cadena puede escribirse de manera única en la forma

$$\delta = \sum_j n_j \delta_j$$

donde $n_j \in \mathbb{Z}$ y los δ_j's son trayectorias sobre X. Dentro del conjunto de todas las cadenas en X consideremos aquellas en las cuales el punto final de cada trayectoria δ_j coincide con el punto inicial de otra, a este subconjunto lo denotaremos por $CC(X)$ y lo llamaremos las *cadenas cerradas de* X, notemos que $CC(X)$ es un subgrupo del grupo de todas las cadenas en X. Cuando un subconjunto cerrado $D \subset X$ es triangulable la cadena ∂D es una cadena cerrada, a estas cadenas cerradas las llamaremos *cadenas frontera de* X y al subgrupo de $CC(X)$ generado por todas las cadenas frontera de X lo denotaremos por $\partial C(X)$.

Definición 1.1.1 *El grupo cociente $CC(X)/\partial C(X)$ se llama* primer grupo de homología de X *y se denota por* $H_1(X,\mathbb{Z})$.

Para una superficie de Riemann compacta de género g, éste es un grupo abeliano libre de rango $2g$. Sean $\delta_1, ..., \delta_{2g}$ una base de $H_1(X,\mathbb{Z})$ de tal manera que δ_i intersecta sólo a δ_{i+g} y no intersecta a otro δ_j (ver figura). Sean $\omega_1, ..., \omega_g$ una base del espacio de 1-formas holomorfas de X, $\Omega^1(X)$.

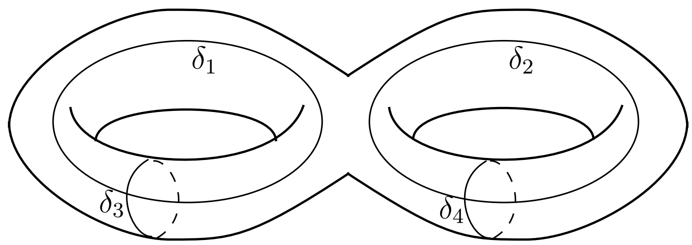

Figura 1.1: Una base para $H_1(X,\mathbb{Z})$

Definición 1.1.2 *Los vectores columna* $[\int_{\delta_i}\omega_j]_{1\le j\le g}\in\mathbb{C}^g$ *se llaman* periodos.

Lema 1.1.1 *Los $2g$ periodos son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración:

Supongamos que $\sum k_i[\int_{\delta_i}\omega_j]_{1\le j\le g}=0$, donde $k_i\in\mathbb{R}$; entonces

$$\sum k_i\int_{\delta_i}\omega_j=0,\ \ \forall j$$

luego

$$\sum k_i\int_{\delta_i}\overline{\omega}_j=0,\ \ \forall j$$

de donde

$$\sum k_i[\delta_i]=0\in H_1(X,\mathbb{R}),$$

pues $\{\omega_j,\overline{\omega}_j\}$ generan $H^1_{DR}(X)$, pero esto es imposible pues $\{\delta_i\}$ son una base de $H_1(X,\mathbb{Z})$, así $k_i=0$ para todo i y por lo tanto los $2g$ periodos son linealmente independientes. ∎

Denotemos por Λ al subgrupo del espacio dual $\Omega^1(X)^*$ generado por los periodos.

Definición 1.1.3 *Sea X una superficie de Riemann compacta. Se define la* variedad Jacobiana de X *como el grupo cociente*

$$Jac(X) = \Omega^1(X)^*/\Lambda$$

de funcionales lineales sobre el espacio de 1-formas holomorfas módulo los periodos.

Observación 1 *Como $\Omega^1(X)^*$ lo podemos identificar con el espacio de vectores columna $\mathbb{C}^g$; entonces tenemos*

$$Jac(X) = \mathbb{C}^g/\Lambda,$$

donde Λ es el subgrupo de $\mathbb{C}^g$ asociado a los periodos.

En cualquier caso notemos que $Jac(X)$ es un grupo abeliano.

Ejemplo. La variedad Jacobiana de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ es trivial, $Jac(\mathbb{P}^1) = \{0\}$, de hecho el espacio de 1-formas holomorfas $\Omega(\mathbb{P}^1)$ es trivial.

Sobre una curva X escojamos un punto base $P_0 \in X$. Para cada $P \in X$ escojamos una trayectoria γ_P en X que va de P_0 a P. Definamos

$$\mu : X \longrightarrow \Omega^1(X)^*$$

$$P \mapsto \mu(P)$$

donde $\mu(P)(\omega) = \int_{\gamma_P} \omega$. Notemos que esta aplicación no está bien definida, pues si elegimos una trayectoria diferente γ'_P de P_0 a P; entonces el valor de $\mu(P)$ cambia por el funcional el cual es la integración a lo largo de la cadena $\gamma_P - \gamma'_P$, es decir, $\mu(P)$ está bien definida módulo el subgrupo de periodos.

Definición 1.1.4 La aplicación de Abel-Jacobi para X *se define como*

$$\mu : X \longrightarrow Jac(X).$$

Observemos que μ depende del punto base P_0 elegido.

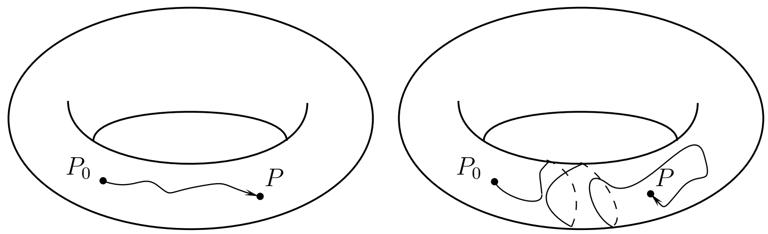

Figura 1.2: Dos trayectorias de integración de P_0 a P

Sea $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ una base para $\Omega^1(X)$, podemos considerar la aplicación de Abel-Jacobi como una aplicación a $\mathbb{C}^g/\Lambda$ mediante la fórmula

$$\mu(P) = \left(\int_{P_0}^{P} \omega_1, ..., \int_{P_0}^{P} \omega_g \right)^T \quad \text{mód } \Lambda.$$

Recordemos: *un divisor sobre una superficie de Riemann X* es una función $D : X \to \mathbb{Z}$ con soporte discreto. El conjunto de divisores tiene estructura de grupo bajo la suma puntual y lo denotamos por $Div(X)$.

Observación 2 *Si X es compacta D es un divisor si y sólo si tiene soporte finito.*

Denotaremos a un divisor de la siguiente manera

$$D = \sum_{P \in X} n_P P,$$

donde el conjunto de puntos P tales que $n_P \neq 0$ es discreto.
El grado de un divisor D sobre una superficie de Riemann compacta X se define como el siguiente número:

$$deg(D) = \sum_{P \in X} n_P.$$

Notemos que la función grado $deg : Div(X) \to \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos cuyo kernel es el subgrupo

$$Div_0(X) = \{D \in Div(X) : deg(D) = 0\}.$$

Sea f una función meromorfa sobre X no idénticamente cero, definimos *el divisor de f*, denotado por (f), como

$$(f) = (f)_0 - (f)_\infty,$$

donde $(f)_0$ es el conjunto de ceros de f y $(f)_\infty$ el conjunto de polos de f, luego (f) es un divisor de grado 0, a cualquier divisor de este tipo lo llamaremos *divisor principal sobre* X.

Observación 3 *El conjunto de divisores principales sobre X es un subgrupo de $Div_0(X)$.*

Ahora bien, veamos que podemos extender la aplicación de Abel-Jacobi al grupo de divisores sobre X definiendo

$$\mu\left(\sum n_P P\right) = \sum n_P \mu(P),$$

este homomorfismo de grupos también es llamado aplicación de Abel-Jacobi

$$\mu : Div(X) \longrightarrow Jac(X).$$

Es de vital importancia la restricción de esta aplicación al subgrupo de divisores de grado cero sobre X:

$$\mu : Div_0(X) \longrightarrow Jac(X).$$

Lema 1.1.2 *La aplicación de Abel-Jacobi restringida a $Div_0(X)$ es independiente del punto base elegido.*

Demostración:

Supongamos que escogemos un nuevo punto base Q_0; entonces

$$\mu(P) = \left(\int_{Q_0}^{P} \omega_1, ..., \int_{Q_0}^{P} \omega_g\right)^T.$$

Sea γ una trayectoria de P_0 a Q_0

$$\left(\int_{Q_0}^{P} \omega_1, ..., \int_{Q_0}^{P} \omega_g\right)^T = \left(\int_{Q_0}^{P_0} \omega_1, ..., \int_{Q_0}^{P_0} \omega_g\right)^T + \left(\int_{P_0}^{P} \omega_1, ..., \int_{P_0}^{P} \omega_g\right)^T$$

pero $\left(\int_{Q_0}^{P_0} \omega_1, ..., \int_{Q_0}^{P_0} \omega_g\right)^T \in Jac(X)$ no depende de P.
Ahora sea $D = \sum n_P P \in Div^0(X)$; entonces

$$\mu(\sum n_P P) = \sum n_P \mu(P) = 0\mu(P) = 0.$$

Por lo tanto, μ no depende del punto base elegido. ■

Ahora enunciemos el siguiente resultado, el cual es piedra angular en el estudio de superficies de Riemann.

Teorema 1.1.1 ***(Teorema de Abel.)*** *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g, sea $D \in Div^0(X)$; entonces D es el divisor de una función meromorfa sobre X si y sólo si $\mu(D) = 0$ en $Jac(X)$.*

Lo que el teorema de Abel dice es que el kernel de la aplicación μ es exactamente el conjunto de divisores principales de X, $PDiv(X)$.

Definición 1.1.5 *Se define* el grupo de Picard de X *como el grupo de divisores módulo el subgrupo de divisores principales:*

$$Pic(X) = Div(X)/PDiv(X).$$

Denotemos por $Pic^0(X) = Div^0(X)/PDiv(X)$; entonces el teorema de Abel nos da el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Div^0(S) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi"'] & Jac(S) \\ Pic^0(S) \arrow[ur, "\bar{\mu}"'] & \end{tikzcd}$$

donde π es la proyección natural y $\overline{\mu}$ se vuelve inyectiva.

Otro resultado esencial es el recíproco del teorema anterior, el cual es conocido como:

Teorema 1.1.2 ***(Teorema de Jacobi)*** *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g y sea $P_0 \in X$, dado $L \in Jac(X)$ existen $P_1, ..., P_g \in X$ tales que $\mu\left(\sum(P_i - P_0)\right) = L$, es decir, la aplicación de Abel-Jacobi es sobre.*

De los dos teoremas anteriores se desprende inmediatamente el siguiente

Corolario 1.1.1 *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g; entonces $Pic^0(X) \cong Jac(X)$.*

Ejemplo. Apliquemos estos resultados a una superficie de Riemann compacta de género 1 y veamos que ésta es isomorfa a su variedad Jacobiana. Primero veamos que $\mu : X \longrightarrow Jac(X)$ es inyectiva. En efecto, supongamos

que $P \neq Q$ y que $\mu(P) = \mu(Q)$; entonces $\mu(P - Q) = 0 \in Jac(X)$, lo cual implica que existe una función meromorfa f sobre X tal que $(f) = P - Q$, luego, $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ es una aplicación no constante de grado 1, es decir, f es un isomorfismo, lo cual es imposible, por lo tanto μ es inyectiva.
Entonces tenemos que μ es una aplicación holomorfa e inyectiva. Como es holomorfa es abierta, así $\mu(X) \subset Jac(X)$ es abierta, pero también es compacta, pues X así es y μ es continua, luego es cerrada, como $Jac(X)$ es conexa; $\mu(X) = Jac(X)$ y por lo tanto μ es un isomorfismo.
Notemos que obviamente, por cuestiones de dimensión, éste es el único caso donde se cumple $X \cong \mathrm{Jac}(X)$.

Otro resultado muy importante y necesario para nuestros propósitos es el teorema de la constante de Riemann, el cual enunciaremos a continuación.

Denotemos por $X^{(d)}$ a la variedad compleja X^d/Σ_d, donde Σ_d es el grupo simétrico en d letras, esta variedad se llama *el d-ésimo producto simétrico de X*.

Definición 1.1.6 *Para cualesquiera $v \in \mathbb{C}^g$ y $\Omega \in \mathbb{H}_g = \{\Omega \in Mat_{g\times g}(\mathbb{C}) : Im\Omega > 0\}$ definimos* la función Theta de Riemann *como*

$$\vartheta(v, \Omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} exp(\pi i \Omega(n, n) + 2\pi i \langle n, v\rangle).$$

Lema 1.1.3 *La función ϑ así definida, converge absoluta y uniformemente para*

$$v \in \{v = (v_1, ..., v_g) : max_i |Im(v_i)| < \frac{c_1}{2\pi}\}$$
$$\Omega \in \{\Omega : Im\Omega \geq c_2 I_g\},$$

de donde, ϑ define una función holomorfa sobre $\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g$.

Observación 4 *Cuando la matriz Ω es de la forma (I, Z), podemos considerar*

$$\vartheta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} exp(\pi i \langle n, Zn\rangle + 2\pi i \langle n, z\rangle).$$

La función ϑ poseé varias propiedades interesantes, entre las cuales podemos destacar las siguientes.

Proposición 1.1.1 *Supongamos que $\Omega = (I, Z)$ y que $I = (e_1 \cdots e_g)$, $Z = (\lambda_{n+1} \cdots \lambda_{n+g})$; entonces* *(i)* $\vartheta(z+e_\alpha)=\vartheta(z)$,

(ii) $\vartheta(z+\lambda_{n+\alpha})=\vartheta(z)exp(-\pi i Z_{\alpha\alpha}-2\pi i z_\alpha)$, *donde* $Z_{\alpha\alpha}$ *es la entrada* $\alpha\alpha$ *de la matriz* Z *y* z_α *es la* α*-ésima coordenada de* z,

(iii) $\vartheta(z)=\vartheta(-z)$,

para todo $z\in\mathbb{C}^g$.

Definición 1.1.7 *Se define* el divisor Theta dentro de la variedad Jacobiana de una curva X *como el divisor*

$$\Theta=(\vartheta).$$

A continuación enunciamos el resultado antes dicho.

Teorema 1.1.3 ***(Teorema de la constante de Riemann)*** *Sea* $W_d=\mu(X^{(d)})$; *entonces existe* $\kappa\in Jac(X)$ *tal que*

$$\Theta=W_{g-1}+\kappa,$$

donde $2\kappa=-\mu(K_X)$ *y* K_X *es un divisor canónico de* X.

1.2. El Teorema de Noether

La motivación para esta sección es la siguiente. Supongamos que tenemos tres curvas F, G y H que satisfacen $F.G > G.H$, es decir, el divisor de los puntos de intersección de F y G es más grande que el divisor de los puntos de intersección de G y H. Queremos responder la siguiente pregunta: Cuándo existe una curva B que satisfaga

$$B.H=F.H-G.H?$$

Comencemos por definir lo que es el número de intersección de dos curvas planas G y H en un punto $P\in\mathbb{A}^2$. Denotemos por $I(P,G\cap H)$ dicho número y escribamos primero una lista de propiedades que queremos que éste cumpla; entonces enunciaremos un resultado, el cual afirma que sólo hay una posible definición para este número.

Definición 1.2.1 *Diremos que* G y H se intersectan propiamente en P *si no tienen componentes comunes que contengan a* P.

Las primeras propiedades requeridas son la siguientes:

1. $I(P, G \cap H)$ es un número entero no negativo, para todos G, H y P tales que G y H se intersecten propiamente en P. $I(P, G \cap H) = \infty$ si G y H no se intersectan propiamente en P.

2. $I(P, G \cap H) = 0$ si y sólo si $P \notin G \cap H$. $I(P, G \cap H)$ depende únicamente de las componentes de G y H que contienen a P.

3. $I(P, G \cap H)$ es invariante bajo cambios de coordenadas, es decir, si T es un cambio de coordenadas en $\mathbb{A}^2$ y $T(Q) = P$; entonces $I(Q, G^T \cap H^T) = I(P, G \cap H)$, donde $F^T = F \circ T$.

4. $I(P, G \cap H) = I(P, H \cap G)$.

Antes de continuar con los requerimientos de $I(P, G \cap H)$ definamos lo siguiente.

Definición 1.2.2 *Diremos que dos curvas G y H se intersectan transversalmente en P si P es punto simple de G y H y si la recta tangente a G en P es distinta de la recta tangente a H en P.*

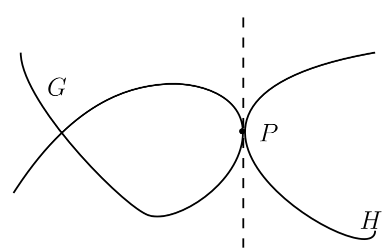

Figura 1.3: Curvas que no se intersectan transversalmente

5. Sea $m_P(F)$ la multiplicidad del punto P en la curva F. $I(P, G \cap H) \geq m_P(G)m_P(H)$ y la igualdad se cumple si y sólo si G y H no tienen rectas tangentes comunes en P.

6. Si $G = \prod G_i^{r_i}$ y $H = \prod H_j^{s_j}$; entonces $I(P, G \cap H) = \sum_{i,j} r_i s_j I(P, G_i \cap H_j)$.

7. $I(P, G \cap H) = I(P, G \cap (H + AG))$, para todo $A \in \mathbb{C}[x, y]$.

El resultado entonces está enunciado en el siguiente teorema:

Teorema 1.2.1 *Existe un único número de intersección $I(P, G \cap H)$ definido para todas las curvas planas G y H y para todos los puntos $P \in \mathbb{A}^2$ que satisface las propiedades (1)–(7), este número está dado por la fórmula*

$$I(P, G \cap H) = dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/(G, H)).$$

Dos propiedades más se tienen para el número de intersección.

8. Si P es un punto simple de G; entonces $I(P, G \cap H) = ord_P^G(H)$, donde $ord_P^G(H)$ es el orden de la función H sobre $k(G)$.

9. Si G y H no tienen componentes comunes; entonces

$$\sum_P I(P, G \cap H) = dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x, y]/(G, H)).$$

El siguiente paso es definir este mismo número pero para curvas planas proyectivas.

Definición 1.2.3 *Sean G y H curvas planas proyectivas y $P \in \mathbb{P}^2$, definimos* el número de intersección de G y H en $P \in \mathbb{C}^2$ *como*

$$I(P, G \cap H) = dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)/(G_*, H_*)),$$

donde $F_*(x, y, z) = F(x, y, 1)$.

Este número satisface las mismas propiedades (1)–(8).

Consideremos G y H curvas planas proyectivas de grados m y n, respectivamente, sin componentes comunes. Por el *Teorema de Bezout*, la intersección de G con H es un divisor efectivo de grado mn dado por

$$G.H = \sum_P I(P, G \cap H)P.$$

Definición 1.2.4 *Sean F, G y H curvas planas proyectivas y $P \in \mathbb{P}^2$. Diremos que* las condiciones de Noether se satisfacen en P *si*

$$F_* \in (G_*, H_*) \subset \mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2),$$

es decir, si existen $a, b \in \mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)$ tales que

$$F_* = aG_* + bH_*.$$

Enunciemos ahora el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.2.2 ***(de Noether.)*** *Sean F, G y H curvas planas proyectivas, supongamos que G y H no tienen componentes en común; entonces existe una ecuación $F = AG + BH$, con A y B polinomios de grados $deg(F) - deg(G)$ y $deg(F) - deg(H)$, respectivamente, si y sólo si las condiciones de Noether se satisfacen en cada punto $P \in G \cap H$.*

Demostración:

Si $F = AG + BH$; entonces obviamente $F_* = A_*G_* + B_*H_*$ en cualquier punto P.
Para probar el inverso, como $G \cap H$ es finito, mediante un cambio de coordenadas si es necesario, podemos suponer que ninguno de los puntos en $G \cap H$ está en la recta $z = 0$, es decir, $V(G, H, z) = \emptyset$. Tomemos $F_* = F(x, y, 1)$, $G_* = G(x, y, 1)$, $H_* = H(x, y, 1)$, las condiciones de Noether dicen que el residuo de F_* en $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)/(G_*, H_*)$ es cero para cada $P \in G \cap H$, luego el residuo de F_* en $\mathbb{C}[x, y]/(G_*, H_*)$ es cero, es decir, existen $a, b \in \mathbb{C}[x, y]$ tales que $F_* = aG_* + bH_*$, así, existen $r \in \mathbb{Z}$ y $A, B \in \mathbb{C}[x, y, z]$ tales que $Z^r F = AG + BH$, pero multiplicar por z en $\mathbb{C}[x, y, z]/(G, H)$ es una aplicación $1 : 1$; entonces $F = A'G + B'H$, para algunos $A', B' \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Si $A' = \sum A'_i$ y $B' = \sum B'_i$, donde A'_i, B'_i son polinomios homogeneos de grado i; entonces $F = A'_s G + B'_t G$ con $s = deg(F) - deg(G)$ y $t = deg(F) - deg(H)$. ■

La utilidad del teorema depende de asegurar que las condiciones de Noether se satisfacen, para ello es de gran utilidad la siguiente

Proposición 1.2.1 *Sean F, G y H curvas planas, $P \in G \cap H$; entonces las condiciones de Noether se satisfacen en P si una de las siguientes condiciones se cumple:*

1. *G y H se intersectan transversalmente en P y $P \in F$.*
2. *P es punto simple de G y además $I(P, F \cap G) \geq I(P, G \cap H)$.*
3. *G y H tienen tangentes distintas en P y $m_P(F) \geq m_P(G) + m_P(H) - 1$.*

Como consecuencia inmediata al *Teorema de Noether* tenemos:

Corolario 1.2.1 *Si*

- *G y H se intersectan en* $deg(G) \cdot deg(H)$ *puntos distintos y F pasa a través de estos puntos, o*
- *Todos los puntos de $G \cap H$ son puntos simples de G y $F.G > G.H$;*

entonces existe una curva B tal que $B.G = F.G - G.H$.

Capítulo 2

La Jacobiana de una curva hiperelíptica

En este capítulo desarrollaremos una construcción dada por Mumford[25] donde a cada divisor de una abierto de la Jacobiana de una curva hiperelíptica le asocia una pareja de curvas, e inversamente, dada la pareja de curvas recupera el divisor. El conjunto de curvas obtenidas a partir del conjunto de divisores tiene estructura de variedad algebraica y por lo tanto es una construcción algebraica para esta variedad.

2.1. Construcción Algebraica

Definición 2.1.1 *Una* curva hiperelíptica *es una curva proyectiva X la cual puede considerarse como un cubriente* $2:1$ *de la recta proyectiva* $\mathbb{P}^1$.

Comencemos por considerar una curva hiperelíptica X, cuya ecuación en coordenadas afines está dada por

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - a_i) = f(x),$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$ para todo i y $a_i \neq a_j$, si $i \neq j$. Observemos que X es una curva proyectiva singular y su única singularidad en el plano proyectivo está en el punto $\infty = (0:1:0)$. Por la fórmula de *Riemann-Hurwitz* X tiene género g.
Nuestro propósito es el siguiente: encontrar ecuaciones para un conjunto

abierto de divisores efectivos de grado g.

Consideremos la aplicación de Abel-Jacobi

$$\mu : Div^{+,g}(X) \longrightarrow Jac(X),$$

tal que

$$\mu(P_1 + \cdots + P_g) = P_1 + \cdots + P_g - g\infty$$

y definamos el conjunto

$$Div_0^{+,g}(X) = \{P_1 + \cdots + P_g \in Div^{+,g}(X) : P_i \neq \infty,\ P_i \neq \sigma P_j\},$$

donde la aplicación $\sigma : X \to X$ es la involución hiperelíptica, es decir, si $P = (x, y)$; entonces $\sigma(x, y) = (x, -y)$.

A cada divisor $D \in Div_0^{+,g}(X)$ le asociaremos los siguientes polinomios:

1. $u(x) = \prod_{i=1}^{g} (x - x(P_i))$, el cual es mónico y de grado g.

2. Si los $P_i's$ son distintos; sea

$$v(x) = \sum_{i=1}^{g} y(P_i) \frac{\prod_{j\neq i} (x - x(P_j))}{\prod_{j\neq i} (x(P_i) - x(P_j))}$$

   y si P_i aparece con multiplicidad m_i "aproximamos" $\sqrt{f(x)}$ hasta el orden m_i, es decir, el polinomio $v(x)$ será el polinomio de grado $\leq g-1$ tal que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^j (v(x) - \sqrt{f(x)})\Big|_{x=x(P_i)} = 0, \quad 0 \leq j \leq m_i - 1.$$

   De aquí vemos que $v(x(P_k)) = y(P_k)$, para $0 \leq k \leq g$.

   Observación 5 *Por construcción $u(x)$ divide a $f(x) - v^2(x)$.*

3. $w(x)$ lo definimos como sigue, $f(x) - v^2(x) = u(x)w(x)$.
   Como $deg(v) \leq g - 1$; $deg(v^2) < deg(f)$ y como u es mónico y de grado g; w será mónico y de grado $g + 1$.

Entonces tenemos la siguiente aplicación:

$$Div_0^{+,g}(X) \longrightarrow \mathbb{C}[x] \times \mathbb{C}[x] \times \mathbb{C}[x];$$

$$D \mapsto (u, v, w).$$

Ahora inversamente, dados $u, v, w \in \mathbb{C}[x]$ tales que $f - v^2 = uw$, con u, w mónicos $deg(u) = g$, $deg(w) = g + 1$ y $deg(v) \leq g - 1$ queremos construir un divisor $D \in Div_0^{+,g}(X)$ de tal manera que u, v, w sean los polinomios asociados a este divisor mediante la regla dada anteriormente.
Sean $x_1, ..., x_g$ las g raíces de $u(x)$; entonces $v(x_i)$ da una raíz cuadrada de $f(x)$, es decir, un valor y_i. Si $P_i = (x_i, y_i)$; entonces $D = P_1 + \cdots + P_g \in Div_0^{+,g}(X)$. En efecto:

- $P_i \neq \infty$, pues los puntos son de la forma $P_i = (x_i : y_i : 1)$, para $i = 1, 2, ..., g$
- Supongamos que existen i, j tales que $P_i = \sigma(P_j)$. Tenemos entonces que $(x_i : y_i : 1) = \sigma(x_j : y_j : 1)$; lo cual implica $(x_i : y_i : 1) = (x_j : -y_j : 1)$ de donde $x_i = x_j$ y $y_i = -y_j$ y por lo tanto $P_i = P_j$.

Todo lo hecho arriba lo podemos resumir en el siguiente:

Teorema 2.1.1 *Existe una biyección entre $Div_0^{+,g}(X)$ y el conjunto*

$$Z_1 = \{(u, v, w) \in \mathbb{C}[x]^3 : \ f - v^2 = uw, \ u, w \text{ son mónicos}, \\ deg(u) = g, deg(w) = g + 1, deg(v) \leq g - 1\}.$$

Observemos que dada la biyección anterior podemos introducir coordenadas en $Div_0^{+,g}(X)$ de la siguiente manera. Sean

$$\begin{aligned} u(x) =& x^g + u_{g-1}x^{g-1} + \cdots + u_1 x + u_0, \\ v(x) =& v_{g-1}x^{g-1} + \cdots + v_1 x + v_0, \\ w(x) =& x^{g+1} + w_g x^g + \cdots + w_1 x + w_0. \end{aligned}$$

Entonces

$$f - v^2 - uw = \sum_{\alpha=0}^{2g} a_\alpha(u_i, v_j, w_k) x^\alpha.$$

Tomando u_i, v_j, w_k como coordenadas tenemos:

$$Z_1 \cong V(a_0, ..., a_{2g}) \subset \mathbb{C}^{3g+1}.$$

Hemos probado entonces la siguiente:

Proposición 2.1.1 *Z_1 tiene estructura de variedad afín.*

Ahora vamos a parametrizar los puntos de $Div_0^{+,g}(X)$ por puntos de X como sigue. Tenemos la aplicación sobre

$$X^g \twoheadrightarrow Div_0^{+,g}(X),$$

$$(P_1, ..., P_g) \mapsto P_1 + \cdots + P_g,$$

ahora sea $(X^g)_0 \subset X$ el abierto de Zariski definido como el complemento del siguiente conjunto

$$\left(\bigcup_{i=1}^{g} \pi_i^{-1}(\infty) \right) \cup \left(\bigcup_{1 \leq i \leq j \leq g} \pi_{ij}^{-1}(\Gamma) \right),$$

donde $\pi_i : X^g \longrightarrow X$ es proyección en la i-ésima coordenada, $\pi_{ij} : X^g \longrightarrow X^2$ es la proyección de las componentes (i,j) y $\Gamma = \{(P, \sigma P) : P \in X\}$, el cual es un cerrado de Zariski dado por las ecuaciones $x_1 = x_2, y_1 = -y_2$ y $z_1 = z_2$, si $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ son coordenadas. Tenemos entonces el siguiente resultado:

Proposición 2.1.2 *La variedad $V(a_0, ..., a_{2g})$ es lisa, la aplicación*

$$(X^g)_0 \longrightarrow Div_0^{+,g}(X) \cong V(a_0, ..., a_{2g})$$

es sobre y además

$$V(a_0, ..., a_{2g}) \cong (X^g)_0 / \Sigma_g,$$

donde Σ_g es el grupo de permutaciones de g elementos.

Recordemos que el divisor theta, Θ, lo podemos definir como el conjunto de las clases de divisores de la forma $\sum\limits_{i=1}^{g-1} P_i - (g-1)\infty$.

Para nuestros porpósitos será de gran utilidad el siguiente lema.

Lema 2.1.1 *Si $D \in Div_0^{+,g}(X)$; entonces no existe una función meromorfa no constante sobre X cuyos polos estén acotados por D, es decir, $H^0(D) = \mathbb{C}$.*

Ahora procedamos a probar el siguiente resultado.

Proposición 2.1.3 *Si restringimos μ al conjunto $Div_0^{+,g}(X)$; ésta será inyectiva y además $\mu(Div_0^{+,g}(X)) = Jac(X) - \Theta$.*

Demostración:

Supongamos que existen $D_1, D_2 \in Div_0^{+,g}(X)$ tales que

$$\mu(D_1) = \mu(D_2)$$

el teorema de Abel nos implica que existe una función meromorfa h tal que

$$D_1 - D_2 = (h).$$

Por el *Lema* anterior h debe ser una función constante, luego $D_1 = D_2$, *i.e*, $\mu \mid_{Div_0^{+,g}(X)}$ es inyectiva.

Ahora tomemos la clase de un divisor en $Jac(X) - \Theta$ y consideremos un representante $D = \sum_{i=1}^{g} P_i - g\infty$. Afirmamos que $\sum_{i=1}^{g} P_i \in Div_0^{+,g}(X)$. En efecto:

- Si $P_i = \infty$ para algún i; $D \in \Theta$.
- Si existieran i, j tales que $P_i = \sigma P_j$; tendríamos $P_i + P_j \equiv 2\infty$ y así $D \in \Theta$.

Por lo tanto, $Jac(X) - \Theta \subset \mu(Div_0^{+,g}(X))$ y como claramente $Jac(X) - \Theta \supset \mu(Div_0^{+,g}(X))$; entonces tenemos la igualdad. ■

Ahora queremos ver que mediante traslaciones de $Jac(X) - \Theta$ podemos cubrir a $Jac(X)$. Para ésto consideremos $B = \{P \in X : \ P = \sigma P\}$, es decir, B es el conjunto de los puntos de ramificación de X. Sea $T \subset B$ de cardinalidad par y definamos

$$\beta_T = \sum_{P \in T} P - \mid T \mid \infty \ \in Jac(X).$$

Observación 6 $2\beta_T = 0$.

Proposición 2.1.4 $\bigcup_T ((Jac(X) - \Theta) + \beta_T) = Jac(X)$.

Demostración:

Sea $D \in Jac(X)$; supongamos que $D = \sum_{i=1}^{g} P_i - g\infty$ escribimos entonces

$$D = \sum_{i=1}^{m} Q_i - m\infty,$$

con $Q_i \neq \infty$ y $Q_i \neq \sigma Q_j$, para todos i, j (quitando P_i, si $P_i = \infty$ y reemplazando $P_j + \sigma P_j$ por 2∞, si esto ocurriese); entonces escojamos $g - m$ puntos de ramificación $R_1, ..., R_{g-m}$ distintos de los Q_i's y de ∞, así

$$D + \sum_{i=1}^{g-m} R_i - (g-m)\infty = \sum_{i=1}^{m} Q_i + \sum_{i=1}^{g-m} R_i - g\infty \ \in Jac(X) - \Theta,$$

pues $\sum_{i=1}^{m} Q_i + \sum_{i=1}^{g-m} R_i \in Div_0^{+,g}(X)$.
Ahora, si $g-m$ es par; sea $T = \{R_1, ..., R_{g-m}\}$ y $D \in (Jac(X) - \Theta) + \beta_T$ y si $g - m$ es impar; $T = \{R_1, ..., R_{g-m}, \infty\}$.
Obviamente, para todo $T \subset B$ tenemos que $(Jac(X) - \Theta) + \beta_T \subset Jac(X)$, luego

$$\bigcup_T ((Jac(X) - \Theta) + \beta_T) \subset Jac(X)$$

y por lo tanto la igualdad está probada. ■

Capítulo 3

La Jacobiana de una curva de género 3

En este capítulo emularemos la construcción del capítulo anterior hecha por Mumford para curvas hiperelípticas. Consideraremos curvas planas, proyectivas, no-singulares de género 3 y haremos el proceso análogo. Nuestros resultados están apoyados fuertemente en los teoremas de Abel-Jacobi, en le de la constante de Riemann y muy particularmente en el teorema $AF + BG$ de Noether. Lo que queremos hacer es dar la estructura explícita de variedad algebraica para $Jac(X)$, para ello consideraremos un abierto de Zariski dentro $Div_0^{+,3}(X)$, a cada elemento de este conjunto le asociaremos una pareja de cónicas, las cuales van a satisfacer algunas propiedades que nos permitirán aplicar los teoremas antes mencionados y así dar la estructura algebraica a esta variedad.

3.1. Una construcción algebraica para $Jac(X)$

Consideremos la curva plana proyectiva X dada por la ecuación

$$F(x, y, z) = f_{400}x^4 + f_{310}x^3y + f_{301}x^3z + \cdots + f_{004}z^4,$$

donde $f_{400}, f_{310}, ..., f_{004} \in \mathbb{C}$ y el polinomio f es no singular. Supongamos que el punto $\infty = (0 : 1 : 0)$ está sobre la curva, es decir, el coeficiente f_{040} de y^4 de F es igual a cero y que en este punto X tiene una *cuatritangente*, es decir, el único punto de X sobre la tangente $z = 0$ en el punto ∞ es él mismo, además supongamos por ejemplo que el coeficiente f_{310} de x^3y es distinto de cero, digamos igual a 1. Por la fórmula del género para curvas planas proyectivas no singulares tenemos que

$$g = g(X) = \frac{(4-1)(4-2)}{2} = 3.$$

Denotemos por $Div^{+,3}(X)$ al conjunto de todos los divisores efectivos de grado 3 sobre X y consideremos el siguiente conjunto

$$\begin{aligned} Div_0^{+,3}(X) = \{D = P_1 + P_2 + P_3 \in Div^{+,3}(X) : \infty \notin Sup(D),\ h^1(D) = 0 \\ \text{y } h^1(P_i + P_j + \infty) = 0\ \forall\, i, j\}. \end{aligned}$$

Aquí $Sup(D) = \{P_1, P_2, P_3\}$. Una característica geométrica que caracteriza a los divisores del conjunto anterior la tenemos en el siguiente lema.

Lema 3.1.1 *Un divisor $D = P_1 + P_2 + P_3$ satisface $h^1(D) = 0$ si y sólo si no existe una recta L tal que $L \cdot X = P_1 + P_2 + P_3$.*

Demostración:

Recordemos la siguiente fórmula de adjunción:
Si V es una subvariedad analítica lisa de una variedad M; entonces

$$K_V = (K_M \otimes [V])|_V.$$

Apliquemos ésto a una curva plana, lisa X y obtenemos:

$$K_X = (K_{\mathbb{P}^2} \otimes [X])|_X,$$

en nuestro caso, como $K_{\mathbb{P}^2} = (-3L)$, donde L es una recta en $\mathbb{P}^2$ y $[X] = 4L$, pues X es una cuártica tenemos:

$$K_X = (L)|_X,$$

es decir, la clase canónica K_X de una curva X de género 3 es la clase de los divisores de ceros que provienen de la intersección de rectas con X.
Sea $D \in Div_0^{+,3}(X)$ y supongamos $D = P_1 + P_2 + P_3$; entonces por la *dualidad de Kodaira-Serre*[1] sabemos que $h^1(D) = h^0(K_X - D)$.
Ahora bien, tenemos

$$h^1(D) > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad h^0(K_X - D) > 0$$

[1] Si M es una variedad de dimensión n; entonces $H^q(M, \mathcal{O}(E)) \cong H^{n-q}(M, \mathcal{O}(E^* \otimes K_M))$, donde E^* es el haz dual de E.

pero $h^0(K_X - D) > 0$ si y sólo si $K_X - D \succeq 0$, es decir, $K_X - D$ es un divisor efectivo y esto sucede si y sólo si los puntos P_1, P_2, P_3 están sobre una recta. ■

Nuestro propósito inmediato será probar la existencia de una biyección entre $Div_0^{+,3}(X)$ y un conjunto de cónicas particulares, esto lo establecemos en el siguiente resultado.

Teorema 3.1.1 *Existe una biyección entre $Div_0^{+,3}(X)$ y el conjunto:*

$$\begin{aligned} Z = \{(A,G,B,H) \in \mathbb{C}_2[x,y]^{\oplus 4} : A = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y - x^2 \\ B = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y - xy \;\; \textit{que satisfacen } F = AG + BH \\ \textit{y el coeficiente } g_{11} = 0, \textit{ correspondiente al monomio } xy \textit{ de } G\}. \end{aligned}$$

Para demostrar nuestro teorema serán de gran utilidad las siguientes observaciones y lemas.

Comencemos con un divisor $D \in Div_0^{+,3}(X)$, notemos que para cada $D = P_1 + P_2 + P_3 \in Div_0^{+,3}(X)$, con $P_i \neq P_j$, la siguiente matriz es invertible:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

donde $P_i = (x_i, y_i)$, este es el punto donde utilizamos que X tiene una cuatritangente en ∞, pues cualquier otro punto tiene coordenada z distinta de cero. Así, para $D = P_1 + P_2 + P_3 \in Div_0^{+,3}(X)$ podemos resolver los siguientes sistemas de ecuaciones y obtener una única solución, si $P_i \neq P_j,\ i = 1, 2, 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{10} \\ b_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ x_3 y_3 \end{pmatrix}.$$

En el caso cuando $D = P_1 + P_2 + P_3$, con $P_1 = P_2$, resolvemos entonces los sistemas de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & F_y(P_1) & -F_x(P_1) \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 2x_1F_y(P_1) \\ x_3^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & F_y(P_1) & -F_x(P_1) \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{10} \\ b_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ F_y(P_1)y_1 - x_1F_x(P_1) \\ x_3y_3 \end{pmatrix}.$$

Y si $D = P_1 + P_2 + P_3$, con $P_1 = P_2 = P_3$; entonces debemos resolver los sitemas:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & F_y(P_1) & -F_x(P_1) \\ 0 & 0 & (F_xF_{xy} - F_yF_{xx})(P_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 2x_1F_y(P_1) \\ 2F_y^2(P_1) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & F_y(P_1) & -F_x(P_1) \\ 0 & 0 & (F_xF_{xy} - F_yF_{xx})(P_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{10} \\ b_{01} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ F_y(P_1)y_1 - x_1F_x(P_1) \\ F_y^2(P_1) + x_1(F_xF_{xy} - F_yF_{xx})(P_1) - (F_xF_y)(P_1) \end{pmatrix}.$$

Considerando a y_1 como una función de x_1, de otra manera tenemos a x_1 como función de y_1 y hacemos el procedimiento análogo.
Entonces a cada $D \in Div_0^{+,3}(X)$ le podemos asociar dos únicas cónicas A, B de tal forma que

$$A.X \geq D + \infty \quad \text{y} \quad B.X \geq D + \infty$$

además en coordenadas afines éstas tienen como ecuaciones:

$$A = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y - x^2 \quad \text{y} \quad B = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y - xy.$$

Antes de continuar con la prueba del teorema necesitamos observar algunas propiedades de estas cónicas. Veamos que características geométricas poseen A y B.

Lema 3.1.2 *Sean A y B las cónicas dadas anteriormente; entonces*

a) A es irreducible (y por lo tanto no-singular).

b) El coeficiente a_{01} de A es distinto de cero.

c) A y B no tienen componentes comunes y $A.B = D + \infty$.

d) A, B y F satisfacen las hipótesis del Teorema de Noether; luego existen dos cónicas G, H tales que

$$F = AG + BH.$$

Demostración:

(a) Sabemos que alrededor de ∞, A puede escribirse como: $a_{00}z^2 + a_{10}xz + a_{01}z - x^2$. Supongamos que A es reducible, esto es

$$a_{00}z^2 + a_{10}xz + a_{01}z - x^2 = (a + bx + cz)(d + ex + fz).$$

Desarrollando la igualdad anterior tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ad &= 0 \\ ae + bd &= 0 \\ be &= -1. \end{aligned}$$

Así, si $a = 0$; tenemos $bd = 0$, pero $b \neq 0$; entonces $d = 0$. Hacemos lo mismo si $d = 0$ y obtenemos $ae = 0$, como $e \neq 0$; entonces $a = 0$. De donde, $a = d = 0$ y podemos escribir

$$a_{00}z^2 + a_{10}xz + a_{01}z - x^2 = (bx + cz)(ex + fz).$$

Notemos que $\infty = (0 : 1 : 0)$ satisface las ecuaciones

$$bx + cz = 0 \quad \text{y} \quad ex + fz = 0.$$

Como A fue construida a partir del divisor $D = P_1 + P_2 + P_3$; no existen dos puntos $P_i, P_j \in Sup(D)$ tales que P_i, P_j satisfagan $bx + cz = 0$ o $ex + fz = 0$, en cualquier caso tenemos que ∞, P_i y P_j son colineales, i.e., $h^1(P_i+P_j+\infty) > 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, debemos tener que A es irreducible.

(b) Si $a_{01} = 0$; tenemos que $A = a_{00}z^2 + a_{10}xz - x^2$ es claramente reducible, así $a_{01} \neq 0$.

(c) Como A es irreducible y $A \neq B$ obviamente no tienen componentes comunes y $A.B = D + \infty$.

(d) Sabemos que las condiciones en el teorema de Noether se cumplen si alguna de las siguientes afirmaciones se satisface: Sea $P \in A \cap B$.

1. A y B se intersectan transversalmente en P y $P \in F$,
2. P es un punto simple de A y
$$I(P, F \cap A) \geq I(P, A \cap B),$$
3. A y B tienen tangentes distintas en P y
$$m_P(F) \geq m_P(A) + m_P(B) - 1.$$

Así, notemos que cualquier P_i es un punto simple de F. Tenemos entonces los siguientes casos:
• $P_i \neq P_j$, ésto implica que A intersecta a B transversalmente.
• Si tenemos $P_i = P_j$; entonces en este caso sabemos que $I(P_i, F \cap A) \geq I(P_j, A \cap B)$.
Por lo tanto en cualquier caso podemos aplicar el teorema de Noether y obtener nuestra ecuación. ■

Notemos que las cónicas G y H obtenidas del teorema de Noether no necesariamente son únicas, sin embargo haciendo algunas restricciones podemos asegurar la unicidad.

Lema 3.1.3 *Si fijamos el coeficiente $g_{11} = 1$ del monomio xy de la cónica G dada por el teorema de Noether; entonces G y H son únicas.*

Demostración:

En efecto, supongamos que existe otra descomposición para F de la forma deseada; entonces
$$F = AG + BH = AG' + BH';$$
de donde, tenemos
$$A(G' - G) = B(H - H') \tag{3.1}$$
luego A divide a $B(H - H')$, como A es irreducible; A divide a B o A divide a $H - H'$, por construcción sabemos que A y

B no tienen componentes comunes, de donde A debe dividir a $H-H'$, esto implica la existencia de $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $H-H' = \lambda A$ o equivalentemente

$$H' = H - \lambda A$$

sustituyendo en (3.1) tenemos

$$A(G-G') = B(H-(H-\lambda A)) \qquad = \lambda BA$$

lo cual nos implica

$$G - G' = \lambda B$$

de donde

$$G' = \lambda B + G,$$

es decir, cualquier otra pareja de cónicas G', H' que satisfaga $F = AG' + BH'$ pertenecerá a los pinceles $H - \lambda A$ y $G + \lambda B$. Fijando λ de tal manera que el coeficiente g_{11} sea igual a 1 tendremos unicidad para G y H. ■

Continuemos con la prueba de nuestro teorema. Ahora queremos hacer el procedimiento inverso, es decir, dadas dos cónicas A y B que pasan por ∞, A es irreducible y que además satisfacen

$$F = AG + BH,$$

para dos únicas cónicas G, H con el coeficiente de xy en G, $g_{11} = 1$, queremos encontrar un divisor $D \in Div_0^{+,3}(X)$ cuyas cónicas asociadas sean precisamente A y B. Sean entonces

$$\begin{aligned} A =& a_{00} + a_{10}x + a_{01}y - x^2 \quad \text{y} \\ B =& b_{00} + b_{10}x + b_{01}y - xy. \end{aligned}$$

Notemos que, por el teorema de Bezout, A y B se intersectan exactamente en 4 puntos, es decir,

$$A.B = P_1 + P_2 + P_3 + \infty.$$

Vamos a mostrar que si tomamos $D = P_1 + P_2 + P_3$; entonces $D \in Div_0^{+,3}(X)$. Primero veremos que $P_i \neq \infty$, para $i = 1, 2, 3$. Observemos que alrededor de ∞, A y B se ven de la forma:

$$\begin{aligned} A =& a_{00}z^2 + a_{10}x^2 + a_{01}z - x^2 \quad \text{y} \\ B =& b_{00}z^2 + b_{10}xz + b_{01}z - x \end{aligned}$$

entonces de la ecuación de B tenemos:

$$x = \frac{b_{00}z^2 + b_{01}z}{1 - b_{10}z},$$

por el *Teorema de Estructura de Cohen*[18], sabemos que el completado $\widehat{\mathcal{O}}_\infty$ del anillo local $\mathcal{O}_\infty$ es isomorfo a $\mathbb{C}[[x,z]]$; así

$$\begin{aligned} x &= (1 + b_{10}z + b_{10}^2z^2 + b_{10}^3z^3 + \cdots)(b_{00}z^2 + b_{01}z) \\ &= b_{01}z + (b_{00} + b_{10}b_{01})z^2 + (b_{00}b_{10} + b_{10}^2b_{01})z^3 + \cdots, \end{aligned}$$

sustituyendo la última expresión en A obtenemos:

$$a_{00}z^2 + a_{10}z(b_{01}z + (b_{00} + b_{10}b_{01})z^2 + (b_{00}b_{10} + b_{10}^2b_{01})z^3 + \cdots) +$$

$$+ a_{01}z - (b_{01}z + (b_{00} + b_{10}b_{01})z^2 + (b_{00}b_{10} + b_{10}^2b_{01})z^3 + \cdots)^2,$$

como $a_{01} \neq 0$; entonces $I(\infty, A \cap B) = 1$; luego $P_i \neq \infty$ para $i = 1, 2, 3$.

Ahora supongamos $h^1(D) > 0$; esto implica que existe una recta L de tal forma que $X.L \geq D$, pero entonces tenemos $A.L \geq D$, por el teorema de Bezout, A tendría a L como componente, lo cual es imposible, así $h^1(D) = 0$.

Por último supongamos que $h^1(P_i + P_j + \infty) > 0$ para algunos i, j, con $i \neq j$; entonces existe una linea recta L tal que $X.L \geq P_i + P_j + \infty$ y esto también implica que A tiene a L como componente, luego $h^1(P_i + P_j + \infty) = 0$. De donde $D \in Div_0^{+,3}(X)$.

Y así concluímos la demostración de nuestro teorema.

Lema 3.1.4 *El conjunto Z descrito en el teorema anterior es una variedad algebraica.*

Demostración:

Observemos la siguiente biyección canónica, $Z \leftrightarrow \mathbb{C}^{18}$, dada por:

$(A, G, B, H) \leftrightarrow (a_{00}, a_{10}, a_{01}, g_{00}, g_{10}, ..., g_{02}, b_{00}, b_{10}, b_{01}, h_{00}, \ldots, h_{02})$.

Como $F - AG - BH = 0$; entonces existen funciones polinomiales $\phi_{\alpha\beta\gamma} : \mathbb{C}^{18} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=4} \phi_{\alpha\beta\gamma}(a_{ij}, g_{rs}, b_{ij}, h_{rs})x^\alpha y^\beta z^\gamma = 0; \quad \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Así, $Z \cong V(\phi_{400}, \phi_{310}, \phi_{301}, \phi_{220}, \phi_{211}, \phi_{202}, ..., \phi_{004}) \subset \mathbb{C}^{18}$, lo cual da a Z estructura de variedad afín. ∎

Observación 7 *Recordemos que como F pasa por ∞; entonces el coeficiente de y^4 es cero y por como hemos definido las cónicas A y B podemos ver que no es posible obtener el término y^4, así, en realidad tenemos solamente 14 ecuaciones $\phi_{\alpha\beta\gamma}$, además $g_{11} = 1$, de donde nuestras funciones son $\phi_{\alpha\beta\gamma} : \mathbb{C}^{17} \to \mathbb{C}$. Por lo tanto, tenemos*

$$Z \cong V(\phi_{400}, \phi_{310}, \phi_{301}, \phi_{220}, \phi_{211}, \phi_{202}, ..., \widehat{\phi_{040}}, ..., \phi_{004}) \subset \mathbb{C}^{17}.$$

Lema 3.1.5 *La variedad $V(\phi_{400}, \phi_{310}, \phi_{301}, \phi_{220}, \phi_{211}, \phi_{202}, ..., \widehat{\phi_{040}}, ..., \phi_{004})$ es lisa.*

Demostración:

Consideremos una "pequeña perturbación" de las coordenadas $(a_{ij}, c_{rs}, b_{ij}, d_{rs})$. Comencemos con una solución (A, G, B, H) de la ecuación $F = AG + BH$. Queremos mostrar que el espacio vectorial

$$\{(\dot{A}, \dot{G}, \dot{B}, \dot{H}) : deg\ \dot{A}, \dot{G}, \dot{B}, \dot{H} \leq 2 \quad \text{y} \\ F = (A + \varepsilon\dot{A})(G + \varepsilon\dot{G}) + (B + \varepsilon\dot{B})(H + \varepsilon\dot{H}), \mod \varepsilon^2\}$$

tiene dimensión 3.
Notemos que

$$\begin{aligned} F &= (A + \varepsilon\dot{A})(G + \varepsilon\dot{G}) + (B + \varepsilon\dot{B})(H + \varepsilon\dot{H}), \mod \varepsilon^2 \\ &= AG + \varepsilon(A\dot{G} + \dot{A}G) + \varepsilon^2\dot{A}\dot{G} + BH + \varepsilon(B\dot{H} + \dot{B}H) + \varepsilon^2\dot{B}\dot{H}, \mod \varepsilon^2 \\ &= AG + BH + \varepsilon(A\dot{G} + \dot{A}G + B\dot{H} + \dot{B}H), \mod \varepsilon^2 \end{aligned}$$

es equivalente a

$$A\dot{G} + G\dot{A} + B\dot{H} + H\dot{B} = 0.$$

Observemos también que

$$deg(A\dot{G} + G\dot{A} + B\dot{H} + H\dot{B}) = 4.$$

Entonces, por la observación anterior, tenemos un sistema de 14 ecuaciones en un espacio de dimensión 17. Si logramos probar que cualquier polinomio de grado ≤ 4 que pase por ∞ puede escribirse de la forma $A\dot{G} + G\dot{A} + B\dot{H} + H\dot{B}$; entonces el número de ecuaciones linealmente independientes en el sistema será igual a la dimensión del espacio de polinomios de grado 4 en tres variables que se anulan en ∞, es decir, la matriz de ecuaciones tendrá rango máximo y así el espacio de soluciones de $A\dot{G} + G\dot{A} + B\dot{H} + H\dot{B} = 0$ tendrá dimensión $17 - 14 = 3$.

Consideremos el siguiente conjunto

$$W = \{p \in \mathbb{C}[x, y, z] : \deg(p) \leq 4 \text{ y } p = A\dot{G} + G\dot{A} + B\dot{H} + H\dot{B}\}.$$

Notemos que:

$$W = \{\dot{A} = \dot{B} = \dot{G} = 0\} \oplus \{\dot{H} = 0\},$$

y observemos que $\{\dot{A} = \dot{B} = \dot{G} = 0\}$ es el espacio de polinomios que son múltiplos de B; entonces $\dim\{\dot{A} = \dot{B} = \dot{G} = 0\} = 6$.
Ahora,

$$\begin{aligned} \{\dot{H} = 0\} &= \{A\dot{G} + G\dot{A} + H\dot{B} = 0\} \quad \text{y} \\ \{A\dot{G} = 0\} &\subset \{A\dot{G} + G\dot{A} + H\dot{B} = 0\} \end{aligned}$$

con $\dim\{A\dot{G} = 0\} = 6$. Para obtener la dimensión debemos encontrar dos polinomios en $\{G\dot{A} + H\dot{B} = 0\}$ linealmente independientes de tal manera que el subespacio generado por ellos al intersectarlo con el conjunto $\{A\dot{G} = 0\}$, únicamente sea el polinomio idénticamente cero.
Consideremos z^2G y z^2H, que obviamente son linealmente independientes, pues de otra manera tendríamos

$$z^2H = \lambda z^2 H \quad \Leftrightarrow \quad G = \lambda H$$

y esto implicaría

$$F = \lambda AH + BH = H(\lambda A + B),$$

es decir, F es reducible, lo cual sabemos no es así.
Ahora queremos mostrar que $\langle z^2G, z^2H\rangle \cap \{A\dot{G} = 0\} = \{0\}$. Supongamos que existen polinomios M, N tales que $Mz^2G + Nz^2H = A\dot{G}$, esto es, $z^2(MG + NH) = A\dot{G}$, como A es irreducible; la única posibilidad que tenemos es $A = MG + NH$. Veamos que esto en general no sucede.

En efecto, supongamos que estamos en el caso cuando lo anterior sucede; entonces descomponemos W de la siguiente manera:

$$W = \{\dot{A} = \dot{B} = \dot{H} = 0\} \oplus \{\dot{G} = 0\},$$

análogamente vemos que $\dim\{\dot{A} = \dot{B} = \dot{H} = 0\} = 6$, $\{\dot{G} = 0\} = \{G\dot{A} + H\dot{B} + B\dot{H} = 0\}$ y consideramos $\{B\dot{H} = 0\} \subset \{G\dot{A} + H\dot{B} + B\dot{H} = 0\}$ con $\dim\{B\dot{H} = 0\} = 6$, continuamos como antes y obtenemos

$$B\dot{H} = z^2(\lambda' G + \mu' H),$$

pero z no divide a B $(= b_{00}z^2 + b_{10}xz + b_{01}yz + xy)$, así $B = \lambda' G + \mu' H$; entonces tendríamos

$$\begin{aligned} F &= AG + BH \\ &= (\lambda G + \mu H)G + (\lambda' G + \mu' H)H \\ &= \lambda G^2 + (\mu + \lambda')GH + \mu' H^2, \end{aligned}$$

y así F sería reducible, lo cual es una contradicción.
De donde, en un mismo punto no puede suceder que $A = \lambda G + \mu H$ y $B = \lambda' G + \mu' H$.
Ahora supongamos por ejemplo que $A \neq \lambda G + \mu H$; entonces $\langle z^2 G, z^2 H\rangle \cap \{A\dot{G} = 0\} = \{0\}$ luego $\dim\{\dot{H} = 0\} = \dim\{A\dot{G} + G\dot{A} + H\dot{B} = 0\} \geq 6 + 2 = 8$, lo cual implica $\dim(W) \geq 14$; por lo tanto $\dim(W) = 14$ y el lema está probado. ■

Ahora consideremos el conjunto $\mathcal{U} = Div_0^{+,3}(X)/\equiv$, donde " $\equiv$ " denota la relación de equivalencia en $Div_0^{+,3}(X)$ dada por la equivalencia lineal de divisores. Queremos probar que éste es un subconjunto abierto de $Pic^3(X)$. Primero observemos que

$$Pic^3(X) - \mathcal{U} = \Theta' \cup \Xi,$$

donde

$$\Theta' = \{D : \infty \in Sup(D) \text{ o } h^1(D) > 0\} \quad \text{y}$$

$$\Xi = \{D = P_1 + P_2 + P_3 : h^1(P_i + P_j + \infty) > 0,\ \ i,j = 1,2,3\ \ i \neq j\}.$$

Sabemos que en $Pic^2(X)$ tenemos, de manera natural, al *divisor Theta* definido como sigue.

Definición. Definimos al *divisor Theta,* dentro de la variedad Jacobiana de X, como el siguiente conjunto

$$\Theta = \{D \in Jac(X) : D = P_1 + P_2 - 2\infty\}.$$

Es decir, un elemento de Θ es una clase de divisores en $Jac(X)$ de tal manera que en esta clase existe un divisor el cual es la imagen, bajo la aplicación de Abel-Jacobi, de otro en $Div^{+,3}(X)$ el cual contiene a ∞ en su soporte. Simbólicamente lo escribimos así, para cada $D \in \Theta$ existe $P_1 + P_2 + \infty \in Div^{+,3}(X)$ tal que

$$D = \mu(P_1 + P_2 + \infty),$$

donde μ es la aplicación de Abel-Jacobi. Además, por el *Teorema de la constante de Riemann* sabemos que $\Theta = W_2 + \kappa$, donde $W_2 = \mu(Div^{+,2}(X))$, $2\kappa = -\mu(K_X)$ y K_X es un divisor canónico en X.

Lema 3.1.6 *Los conjuntos Θ' y Ξ son cerrados de Zariski.*

Demostración:

Primero mostraremos que Θ' es cerrado.
Para este fin definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \nu : &\Theta' \to Jac(X) \\ &D \mapsto D - 3\infty \end{aligned}$$

Consideremos $D \in \Theta'$, tenemos entonces los siguientes casos:

(a) $\infty \in Sup(D)$, en este caso $D = P_1 + P_2 + \infty$ y así $\nu(D) = P_1 + P_2 - 2\infty$; entonces $\nu(D) \in W_2$.
(b) $h^1(D) > 0$, esto nos implica que $h^0(D) > 1$, de donde existe $P_1, P_2 \in X$ tal que $D \equiv P_1 + P_2 + \infty$ y otra vez estamos en el caso (a).

Por lo tanto hemos mostrado que $\nu(\Theta') \subset W_2$.
Ahora, sea $\eta \in W_2$; entonces existen $P_1, P_2 \in X$ tales que

$$\eta = \mu(P_1 + P_2) = P_1 + P_2 - 2\infty,$$

tomemos $D = P_1 + P_2 + \infty$; entonces $\nu(D) = P_2 + P_2 - 2\infty = \eta$, de donde, hemos probado que $W_2 \subset \nu(\Theta')$.
Por el teorema de la constante de Riemann, W_2 es un conjunto

cerrado, pues es un trasladado del divisor Θ, además ν es un morfismo algebraico y como $\nu(\Theta') = W_2$; podemos concluir que Θ' es cerrado.

Ahora veamos que Ξ también es cerrado.
Para ello, consideremos $D = P_1 + P_2 + P_3 \in \Xi$; entonces existen P_i, P_j, con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, tales que $h^1(P_i + P_j + \infty) > 0$, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $i = 1$ y $j = 2$; entonces del hecho $h^1(P_1 + P_2 + \infty) > 0$, podemos ver que existe una recta L_1 tal que $X.L_1 = P_1 + P_2 + \infty + Q_3$, para algún $Q_3 \in X$. Consideremos el espacio de rectas en $\mathbb{P}^2$ que pasan por ∞, éste es un $\mathbb{P}^1$, y definamos la siguiente aplicación $\sigma : \Xi \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, dada por

$$P_1 + P_2 + P_3 \mapsto (L_1, L_2),$$

donde L_2 es la recta que pasa por ∞ y P_3 (ver figura siguiente).

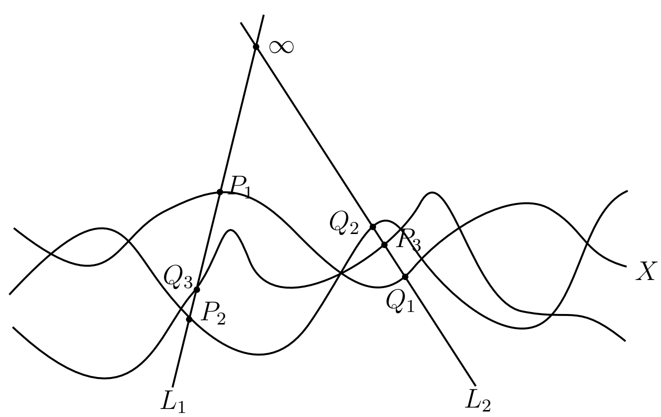

Figura 3.1: Geometría de la aplicación σ

Obviamente $\sigma(\Xi) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Ahora consideremos $(L_1, L_2) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, notemos que

$$\begin{aligned} X.L_1 &= \infty + P_1 + P_2 + Q_3 \quad \text{y} \\ X.L_2 &= \infty + Q_1 + Q_2 + P_3, \end{aligned}$$

entonces consideremos $D = P_1 + P_2 + P_3$ el cual, por construcción, claramente es un elemento de Ξ y además $\sigma(D) = (L_1, L_2)$, así $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \sigma(\Xi)$ y por lo tanto $\sigma(\Xi) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.
También observemos que si $D = P_1 + P_2 + P_3$ y L_1, L_2 son dos rectas tales que

$$X.L_1 = P_1 + P_2 + Q_3 + \infty \quad \text{y} \quad X.L_2 = Q_1 + Q_2 + P_3 + \infty$$

entonces los divisores:

$$\begin{array}{ccc}
P_1 + P_2 + P_3 & P_1 + Q_3 + P_3 & P_2 + Q_1 + P_3 \\
P_1 + P_2 + Q_1 & P_1 + Q_3 + Q_1 & P_2 + Q_1 + Q_1 \\
P_1 + P_2 + Q_2 & P_1 + Q_3 + Q_2 & P_2 + Q_1 + Q_2 \\
 & & \\
Q_1 + Q_2 + Q_3 & Q_1 + P_3 + Q_3 & Q_2 + P_1 + Q_3 \\
Q_1 + Q_2 + P_1 & Q_1 + P_3 + P_1 & Q_2 + P_1 + P_1 \\
Q_1 + Q_2 + P_2 & Q_1 + P_3 + P_2 & Q_2 + P_1 + P_2
\end{array}$$

tendrán la misma imagen bajo la aplicación σ, tal imagen es (L_1, L_2), es decir, σ es un morfismo algebraico de grado 18. Entonces, como σ es un morfismo algebraico finito a uno y como $\sigma(\Xi) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$; concluímos que Ξ es un conjunto cerrado, pues $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es una variedad completa (es propia sobre $\mathbb{C}$). ■

Ahora vamos a probar el siguiente resultado.

Proposición 3.1.1 *Sea $\mu : Div^{+,3}(X) \to Jac(X)$ la aplicación de* Abel-Jacobi*; entonces μ restringida a $Div_0^{+,3}(X)$ es inyectiva y además*

$$\mu(Div_0^{+,3}(X)) = Jac(X) - (\Theta \cup \widetilde{\Theta}),$$

donde $\widetilde{\Theta}$ es la imagen bajo μ de divisores tales que dos puntos de su soporte son colineales con ∞, es decir, $\widetilde{\Theta} = \mu(\Xi)$.

Demostración:

Tomemos $D_1, D_2 \in Div_0^{+,3}(X)$ de tal forma que $\mu(D_1) = \mu(D_2)$, ésto implica que $D_1 \equiv D_2$, así existe una función meromorfa h tal que

$$D_1 - D_2 = (h),$$

pero $H^0(D_2) = \mathbb{C}$; entonces h es constante, luego $D_1 = D_2$, por lo tanto μ es inyectiva.

Ahora consideremos $D \in Jac(X) - (\Theta \cup \widetilde{\Theta})$ con $D = P_1 + P_2 + P_3 - 3\infty$.

(*i*) $P_i \neq \infty$ para $i = 1, 2, 3$, de otra manera $D \in \Theta$.

(*ii*) $h^1(P_1 + P_2 + P_3) = 0$. En efecto, supongamos lo contrario; entonces $h^1(P_1 + P_2 + P_3) > 0$ implica, por el teorema de *Riemann-Roch*, $h^0(P_1 + P_2 + P_3) > 1$, de donde, existen $Q_1, Q_2 \in X$ tales que

$$P_1 + P_2 + P_3 \equiv Q_1 + Q_2 + \infty,$$

de donde $D \equiv Q_1 + Q_2 - 2\infty \in \Theta$.

(*iii*) $h^1(P_i + P_j + \infty) = 0$, de otra forma tendríamos $D \in \widetilde{\Theta}$.

Por lo tanto se cumple nuestra afirmación. Así podemos deducir que $Jac(X) - (\Theta \cup \widetilde{\Theta}) \subset \mu(Div_0^{+,3}(X))$, y la otra contención es clara. ■

Ahora queremos mostrar que podemos cubrir $Jac(X)$ mediante un número finito de traslaciones del abierto $Jac(X) - (\Theta \cup \widetilde{\Theta})$. Para esto, escojamos un punto $x \in X$ (el cual será ∞, mediante un cambio de coordenadas si es necesario) y una recta $\mathbb{P}^1$ de tal forma que la proyección desde ∞, $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ no sea de ramificación total. Consideremos el siguiente conjunto

$$\mathfrak{R} = (\pi^{-1}(r_i) \cup \{0\}) - \{\infty\},$$

donde $r_i \in \mathbb{P}^1$ son los valores de ramificación y $R_i \in X$ son los puntos de ramificación, i.e., $R_i = \pi^{-1}(r_i)$. Notemos que π es una aplicación $3 : 1$ (ver siguiente figura).

Proposición 3.1.2 *Bajo las condiciones anteriores tenemos:*

$$\bigcup_{R_i \in \mathfrak{R}} \Big[(Jac(X) - (\Theta \cup \widetilde{\Theta})) + (R_1 + \cdots + R_k - k \cdot \infty)\Big] = Jac(X).$$

Demostración: Consideremos $D' = D - 3\infty$, donde $D = P_1 + P_2 + P_3$, si $D' \notin \Theta \cup \Theta'$, será suficiente tomar $R = 0$. Supongamos ahora que $D' \in \Theta \cup \widetilde{\Theta}$, abordaremos esto en tres casos, los cuales a su vez se dividen en varios subcasos.

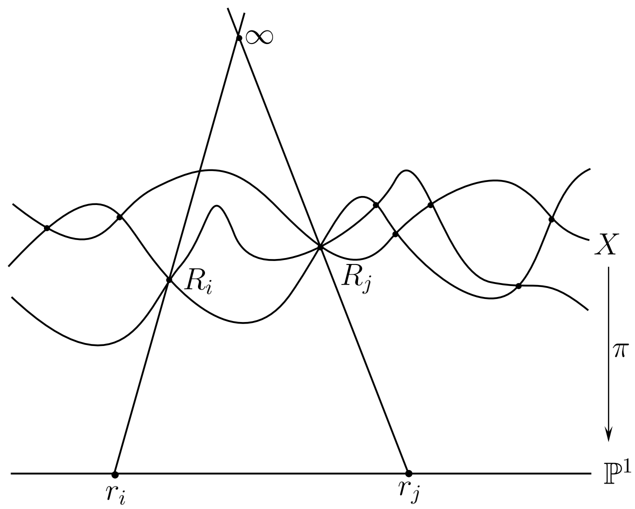

Figura 3.2: La aplicación π y algunos puntos de ramificación

1. $\infty \in Sup(D)$.

   a) $D = 3\infty$. Tomemos $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}$ de tal manera que ambos no estén sobre una misma fibra $\pi^{-1}(r_i)$, R_1 no es un punto de ramificación, R_2 sí lo es, y R_2 no está en la recta tangente a R_1 (ver figura); entonces

   $$\infty + 2R_1 + R_2 - 6\infty \equiv 2R_1 + R_2 - 3\infty.$$

   (i) Por la manera en cómo construímos $\mathfrak{R}$, es claro que $R_1, R_2 \neq \infty$.

   (ii) $h^1(2R_1 + R_2) = 0$, pues R_2 no está en la recta tangente a R_1.

   (iii) $h^1(2R_1 + \infty) = 0$, ya que R_1 no es un punto de ramificación (y las únicas rectas tangentes que pasan por ∞ son las que pasan por los puntos de ramificación).

   (iv) $h^1(R_1 + R_2 + \infty) = 0$, pues R_1 y R_2 no están en la misma fibra.

   b) $D = P + 2\infty$, con $P \neq \infty$. Tomemos $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}$ de tal forma que P no esté sobre las rectas $\overline{R_1, \infty}$, $\overline{R_2, \infty}$, $\overline{R_1, R_2}$ y R_1, R_2 no estén sobre la misma fibra $\pi^{-1}(r_i)$; entonces

   $$P + 2\infty + R_1 + R_2 - 5\infty \equiv P + R_1 + R_2 - 3\infty.$$

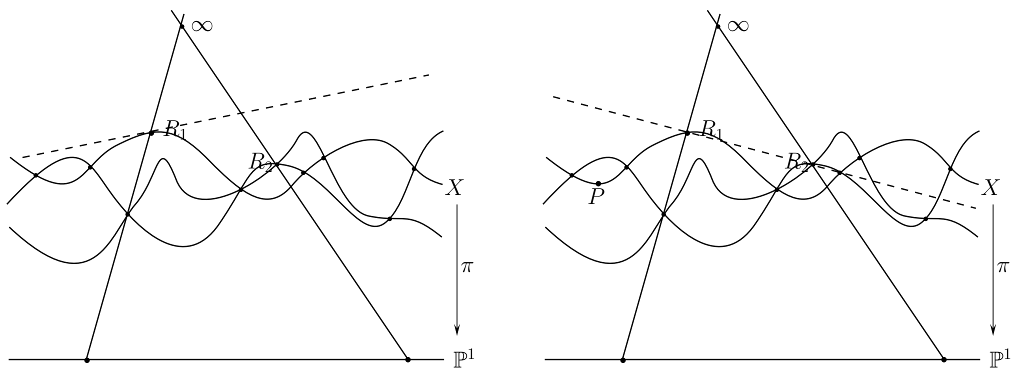

Figura 3.3: Casos (a) y (b)

(i) Es obvio que $P, R_1, R_2 \neq \infty$.

(ii) $h^1(R_1 + R_2 + P) = 0$, pues $P \notin \overline{R_1, R_2}$.

(iii) $h^1(P + R_i + \infty) = 0$, ya que $P \notin \overline{R_i, \infty}$.

(iv) $h^1(R_1 + R_2 + \infty) = 0$, debido a que R_1, R_2 no están sobre la misma fibra.

c) $D = P_1 + P_2 + \infty$.

(c.1) $\infty \notin \overline{P_1, P_2}$. Tomemos $R \in \mathfrak{R}$ de tal manera que R no esté sobre las rectas $\overline{P_1, P_2}$ y $\overline{P_i, \infty}$; entonces

$$P_1 + P_2 + R + \infty - 4\infty \equiv P_1 + P_2 + R - 3\infty.$$

(i) Obviamente $P_1, P_2, R \neq \infty$.

(ii) $h^1(P_1 + P_2 + R) = 0$, pues $R \notin \overline{P_1, P_2}$.

(iii) $h^1(P_i + R + \infty) = 0$, debido a que $R \notin \overline{P_i, \infty}$.

(iv) $h^1(P_1 + P_2 + \infty) = 0$, por hipótesis.

(c.2) $\infty \in \overline{P_1, P_2}$. Tomemos $R \in \mathfrak{R}$ de tal manera que R es un punto de ramificación y $R \notin \overline{P_1, P_2}$; entonces

$$P_1 + P_2 + \infty + 2R - 5\infty \equiv Q_1 + Q_2 + Q_3 - 3\infty.$$

(i) $Q_i \neq \infty$, para todo i, pues podemos escogerlos de esta forma.

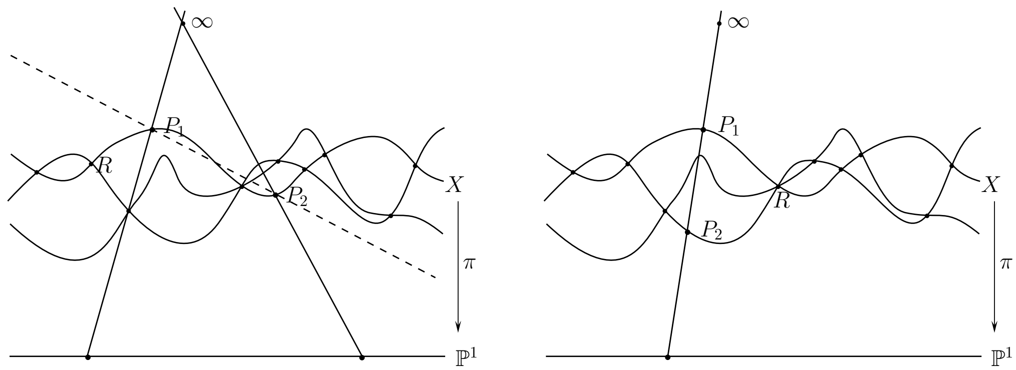

Figura 3.4: Casos (c.1) y (c.2)

(ii) $h^1(Q_1+Q_2+Q_3)=0$, de otra forma existiría una recta L tal que $X \cdot L = Q_1+Q_2+Q_3+Q$, además, sabemos que existe otra recta M que intersecta a X en el divisor $X \cdot M = P_1+P_2+\infty+P$; entonces

$$P_1+P_2+\infty+2R+P+Q \equiv Q_1+Q_2+Q_3+Q+P+2\infty$$

como

$$Q_1+Q_2+Q_3+Q \equiv K_X \equiv P_1+P_2+\infty+P$$

tenemos

$$2R+Q \equiv P+2\infty,$$

y esto no puede ser una igualdad porque R sería el punto ∞, lo cual es imposible, luego lo anterior es una equivalencia lineal; entonces $h^0(2R+Q) = h^0(P+2\infty) \geq 2$, esto implica $h^1(2R+Q) = h^1(P+2\infty) \geq 1$, es decir, existe una recta M' tal que $X \cdot M' \geq P+2\infty$, de donde esta recta debe ser M, así $P_1=\infty$ o $P_2=\infty$ y por lo tanto estamos en el caso *1.b*.

(iii) $h^1(Q_1+Q_2+\infty)=0$, de lo contrario existiría una recta L de tal forma que $X \cdot L = Q_1+Q_2+\infty+Q$ y sabemos que existe otra recta M tal que $X \cdot M = P_1+P_2+\infty+P$; entonces

$$P_1+P_2+\infty+2R+P+Q \equiv Q_1+Q_2+Q_3+Q+P+2\infty \tag{3.2}$$

como

$$Q_1 + Q_2 + \infty + Q \equiv K_X \equiv P_1 + P_2 + \infty + P$$

tenemos

$$2R + Q \equiv P + Q + \infty.$$

Otra vez, si esto fuera una igualdad tendríamos $R = P = Q_3$ y $Q = \infty$, así $R \in \overline{P_1, P_2}$ lo cual no puede ser. Luego lo anterior debe ser una equivalencia lineal, de donde, existe una recta L' tal que $X \cdot L' \geq 2R + Q$ y como R es un punto de ramificación y L' es la recta tangente en R tenemos $X \cdot L' = 2R + Q + \infty$, así $L' = L$, lo cual nos implica $R = Q_1 = Q_2$, sustituyendo en (3.2) tenemos

$$P_1 + P_2 + \infty + Q_1 + Q_2 \equiv Q_1 + Q_2 + Q_3 + 2\infty$$

de donde

$$P_1 + P_2 + \infty \equiv Q_3 + 2\infty$$

y por lo tanto estamos otra vez en el caso *1.b*.

De manera análoga se demuestra que $h^1(Q_1+Q_3+\infty) = 0$ y $h^1(Q_2 + Q_3 + \infty) = 0$.

2. $h^1(D) > 0$. En este caso tenemos $h^0(D) > 1$; entonces existen $Q_1, Q_2 \in X$ tales que

$$D \equiv Q_1 + Q_2 + \infty$$

y esto es análogo al caso anterior.

3. $h^1(P_i + P_j + \infty) > 0$, para algunos i, j, supongamos, sin pérdida de generalidad $i = 1$ y $j = 2$. Esto implica la existencia de una recta L tal que $X \cdot L = P_1 + P_2 + \infty + P$. Tomemos $R \in \mathfrak{R}$ de tal manera que R no esté sobre las rectas $\overline{P_,P_2}$, $\overline{P_1, P_3}$ y $\overline{P_2, P_3}$ (ver figura); entonces existen $Q_1, Q_2, Q_3 \in X$ tales que

$$P_1 + P_2 + P_3 + R - 4\infty \equiv Q_1 + Q_2 + Q_3 - 3\infty. \tag{3.3}$$

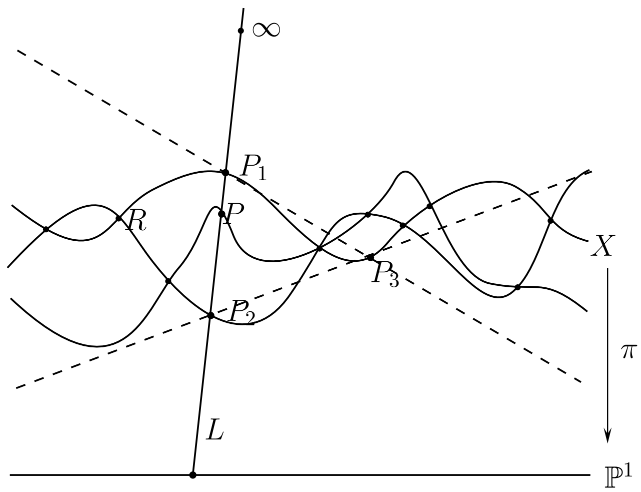

Figura 3.5: Caso $h(P_1 + P_2 + \infty) > 0$

(a) Si $h^1(Q_1+Q_2+Q_3) = 0$ estamos en lo correcto, si no es así; existe una recta M tal que $X \cdot M = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q$; entonces

$$P_1 + P_2 + P_3 + R + P + \infty + Q \equiv Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q + P + 2\infty$$

lo cual implica

$$P_3 + R + Q \equiv P + 2\infty.$$

- Si $P_3 + R + Q = P + 2\infty$; entonces $R = P$ y $P_3 = Q = \infty$, de esta manera estamos en el caso 1.
- Si $P_3 + R + Q \equiv P + 2\infty$; entonces existe una recta L' tal que $X \cdot L' \geq P + 2\infty$, así tenemos $L' = L$; entonces $P_1 = \infty$ o $P_2 = \infty$, de donde, estamos otra vez en el caso 1.

(b) Si $h^1(Q_i + Q_j + \infty) = 0$ para todo i, j; nada hay que demostrar. Supongamos lo contrario, es decir, $h^1(Q_i + Q_j + \infty) \neq 0$, esto implica que existe una recta M tal que $X \cdot M = Q_1 + Q_2 + \infty + Q$, suponiendo $i = 1$ y $j = 2$; tenemos

$$P_1 + P_2 + P_3 + \infty + R + P + Q \equiv Q_1 + Q_2 + Q_3 + 2\infty + P + Q$$

lo cual implica

$$P_3 + R + Q \equiv Q_3 + P + \infty.$$

- Si $P_3 + R + Q = Q_3 + P + \infty$, tenemos dos posibilidades:
  (a) $R = Q_3, P_3 = P, Q = \infty$ y en este caso tenemos $h^1(P_1 + P_2 + P_3) > 0$ y así estamos en el caso 2.
  (b) $R = Q_3, P_3 = \infty$ y $Q = P$, es el caso 1 otra vez.
- Si $P_3 + R + Q \equiv Q_3 + P + \infty$; entonces existe una recta L' tal que $X \cdot L' \geq P + Q_3 + \infty$, así $L' = L$ y por lo tanto $Q_3 = P_1$ o $Q_3 = P_2$. Supongamos, por ejemplo, $Q_3 = P_1$; entonces sustituyendo en (3.3) tenemos

$$P_2 + P_3 + R \equiv Q_1 + Q_2 + \infty$$

  esto es, $h^0(P_2+P_3+R) \geq 2$, lo cual implica $h^1(P_2+P_3+R) \geq 1$, pero esto es imposible pues hemos escogido a R de tal forma que no esté sobre las rectas $\overline{P_i, P_j}$.

Por lo tanto, podemos cubrir la variedad Jacobiana de la curva X con un número finito de translaciones (por elementos de $\mathfrak{R}$) del conjunto $(Jac(X) - (\Theta \cup \widetilde{\Theta}))$ como queríamos probar. ∎

Resumiendo, hemos demostrado el siguiente resultado:

Teorema 3.1.2 *Sea X una curva no-singular y no-hiperelíptica de género 3; existe un conjunto abierto afín Z, el cual es isomorfo a $V(\phi_{ijk})$, de tal manera que $Jac(X)$ está definida por el cubriente afín*

$$Jac(X) = \bigcup_{R_i \in \mathfrak{R}} \left[(Jac(X) - Z) + (R_1 + \cdots + R_k - k \cdot \infty)\right],$$

donde $\mathfrak{R}$ es el conjunto de puntos de ramificación de la aplicación proyección desde ∞, $\pi : X \to \mathbb{P}^1$

3.2. Ley de grupo en $Jac(X)$

En esta sección vamos a describir tan explícito como nos es posible la ley de suma en la variedad Jacobiana de nuestra curva X. La descripción nos da también un algoritmo para calcular el inverso de un elemento y la suma de dos elementos en $Jac(X)$.

Consideremos el siguiente morfismo

$$\begin{aligned} \pi_\infty : Pic^3(X) &\to Jac(X) \\ D &\mapsto D - 3\infty \end{aligned}$$

Por el Teorema de la inversión de Jacobi y el Teorema de Riemann-Roch, sabemos que este morfismo es sobre, además de que en el conjunto descrito en la sección anterior $Div_0^{+,3}(X)$ es inyectivo. Abusando un poco de la notación denotaremos por Z tanto a la imagen de $Div_0^{+,3}(X)$ en $Jac(X)$ como a la variedad construída anteriormente (pues de hecho son isomorfas).

Teorema 3.2.1 *El abierto Z es invariante bajo multiplicación por -1 en $Jac(X)$, es decir, dado un elemento de Z su inverso también está en Z. En las coordenadas halladas para este conjunto Z, la aplicación está dada por*

$$(A, B, G, H) \mapsto (A, H, G, B).$$

Demostración:

Sea $D \in Div_0^{+,3}(X)$ y denotemos por D^- a su inverso, es decir, al divisor tal que

$$D + D^- - 6\infty \equiv 0.$$

Sea A_D la cónica construída en la sección anterior para el divisor D; entonces

$$X.A = D + 2\infty + D'$$

donde D' es un divisor efectivo de grado 3. Denotemos por L a la recta $\{z = 0\}$; como L es la tangente a X en ∞ y en este punto X tiene una cuatritangente; entonces

$$X.A \equiv X.(2L) \equiv 8\infty,$$

de donde $D' = D^-$. Supongamos que $D^- = Q_1 + Q_2 + Q_3$ y demostremos ahora que $D^- \in Div_0^{+,3}(X)$.

1. $\infty \notin Sup(D^-)$.
   Por un argumento análogo al dado en la demostración del teorema 3.1.1 tenemos que

   $$I(\infty, X \cap A) = 2.$$

2. $h^1(D^-) = 0$.
   Supongamos que $h^1(D^-) > 0$; entonces Q_1, Q_2, Q_3 son colineales, pero estos puntos están sobre A; luego, por el teorema de Bezout, A contiene a L como componente, es decir, A es reducible, lo cual es una contradicción.

3. $h^1(Q_i + Q_j + \infty) = 0$.
   La demostraión es análoga a la anterior.

Por lo tanto Z es invariante bajo multiplicación por (-1).

Notemos que la cónica A_{D^-} es la misma que A_D simplemente por construcción. Denotemos entonces por A a ambas cónicas. Ahora, como

$$F = AG_D + B_D H_D = AG_{D^-} + B_{D^-} H_{D^-};$$

tenemos que

$$A.F = A.(AG_{D^-} + B_{D^-} H_{D^-}) = A.B_{D^-} + A.H_{D^-}$$

y como sabemos que

$$A.F = D + D^- + 2\infty \quad \text{y} \quad A.B_{D^-} = D^- + \infty;$$

entonces

$$A.B_D = A.H_{D^-},$$

por unicidad de la descomposición $F = AG + BH$ para A y B fijos tenemos que $B_{D^-} = H_D$.
De esta manera, la 4-ada de cónicas asociada al divisor D^- es (A_D, H_D, G_D, B_D). ■

Observación 8 *Notemos que la existencia de una cónica A que satisfaga $A.X \geq D + 2\infty$ es independiente de que D esté o no en el conjunto $Div_0^{+,3}(X)$. Luego, un algoritmo explícito para calcular el inverso de un divisor $D - 3\infty$ es tomar la clase del divisor $A.X - D - 5\infty$.*

Para la suma de dos elementos en $Jac(X)$ daremos un algoritmo igual de simple.
Sean $D_1, D_2 \in Div_0^{+,3}(X)$ y consideremos sus imagenes $D_1 - 3\infty$ y $D_2 - 3\infty$ en $Jac(X)$ bajo la aplicación de Abel. Sean C la cúbica que satisface

$$X.C = D_1 + D_2 + 3\infty + E^-$$

donde E^- es un divisor efectivo de grado 3 y A_E una cónica tal que

$$X.A_E^- = E^- + 2\infty + E$$

con E un efectivo de grado 3. Así

$$D_1 + D_2 + E^- \equiv 9\infty$$

luego

$$E + E^- \equiv 6\infty$$

por lo tanto

$$D_1 + D_2 \equiv E + 3\infty.$$

Notemos que Z no es invariante bajo la ley de suma, pues no podría ser subgrupo de $Jac(X)$, así no podremos encontrar una descripción de la suma en términos de las coordenadas afines de Z.

Capítulo 4

Propiedades de Theta-Anulamiento

Una buena manera de caracterizar a una curva es mediante su variedad Jacobiana, dentro de ésta tenemos un divisor muy especial, el cual ha sido estudiado amplia y exahustivamente, el DIVISOR THETA. En trabajos como los de Accola[1] y García-Zamora[14] caracterizan curvas a partir de propiedades en este divisor. En este capítulo nos enfocaremos en propiedades de Theta-anulamiento sobre dos tipos de curvas especiales de género tres, las de Picard y las de Fermat. Así, nuestros objetivos serán los siguientes:

• Dada una curva no-singular y no-hiperelíptica X, encontrar algunos puntos en su variedad Jacobiana los cuales van a satisfacer algunas propiedades de Theta-anulamiento

• Y recíprocamente, si tenemos puntos en la variedad Jacobiana de una curva no-singular y no-hiperelíptica X de género 3 que satisfagan ciertas propiedades de Theta-anulamiento, hallar la ecuación de la curva en cuestión y por lo tanto poder decir de qué tipo de curva se trata.

Como se dijo anteriormente, sólo nos ocuparemos de curvas de *Picard* y de *Fermat*, cuyas ecuaciones proyectivas generales son de la forma:

$$y^3 = \lambda(x - a_1z)(x - a_2z)(x - a_3z)(x - a_4z) \qquad \text{y}$$

$$y^4 = \mu(x - b_1z)(x - b_2z)(x - b_3z),$$

respectivamente, donde $\lambda, a_1, a_2, a_3, a_4, \mu, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}$.

4.1. Theta-Anulamiento sobre curvas de Picard

Supongamos que tenemos una curva de Picard X cuya ecuación proyectiva es

$$y^3 = \lambda(x - a_1 z)(x - a_2 z)(x - a_3 z)(x - a_4 z),$$

con $\lambda, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}$; entonces es relativamente sencillo hallar puntos en su variedad Jacobiana que satisfagan algunas propiedades de Theta-anulamiento. Esto lo hacemos explícitamente en el siguiente resultado:

Proposición 4.1.1 *Sea X una curva de Picard; entonces existen $\Delta, \eta_1, ..., \eta_4 \in Jac(X)$ tales que*

1. $2\Delta = 0$ *y* $3\eta_i = 0$, *para* $i = 1, 2, 3, 4$.
2. $\Delta \in \Theta$ *y* $\eta_i + \Delta \in \Theta$, *para* $i = 1, 2, 3, 4$.

Demostración:

Por la ecuación de la curva X, sabemos que en coordenadas afines ésta se ve de la siguiente forma:

$$y^3 = \lambda(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4);$$

entonces, considerando la aplicación proyección $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$, tenemos que los puntos de ramificación son $R_1 = (a_1 : 0 : 1)$, $R_2 = (a_2 : 0 : 1)$, $R_3 = (a_3 : 0 : 1)$, $R_4 = (a_4 : 0 : 1)$ y $R_5 = \infty = (0 : 1 : 0)$.
Definamos $\Delta = \kappa$, $\eta_1 = R_1 - \infty$, $\eta_2 = R_2 - \infty$, $\eta_3 = R_3 - \infty$, $\eta_4 = R_4 - \infty$, donde κ es la constante de Riemann ($\Theta = W_2 + \kappa$). Recordemos que en este caso, estamos tomando como punto base para la aplicación de Abel-Jacobi al punto ∞; entonces

$$\mu(K_X) = \mu(4\infty) = 4\mu(\infty) = 4(\infty - \infty) = 0.$$

Ahora, como $2\kappa = -\mu(K_X)$, obtenemos $2\Delta = 0$, $3\eta_i = 3(R_i - \infty)$ y por las propiedades geométricas de la curva tenemos $3R_i + \infty \equiv 4\infty \equiv K_X$, así $3R_i \equiv 3\infty$, luego $3\eta_i = 0$ en $Jac(X)$, de donde hemos probado la primera parte de la proposición.
Como $\Theta = W_2 + \kappa$, podemos ver que $\Delta = \kappa \in \Theta$ y como $\eta_i = R_i - \infty$; entonces $\mu(R_i + \infty) = R_i + \infty - 2\infty = \eta_i \in W_2$, luego $\eta_i + \Delta = \eta_i + \kappa \in \Theta$ y por lo tanto hemos probado *(2)*. ■

Para lograr nuestro objetivo será muy útil tener la ecuación explícita de una cónica que intersecta a una cuártica satisfaciendo algunas propiedades específicas. Para esto, probemos la siguiente proposición.

Proposición 4.1.2 *Sean C una cónica y F una cuártica irreducible y no-singular tales que existe un punto P que satisface $F.C \geq 3P$; entonces existe un sistema de coordenadas homogeneo en $\mathbb{P}^2$ tal que C en estas coordenadas se puede escribir como*

$$C = xz + ax^2 + bxy + f_{02}y^2, \tag{4.1}$$

donde f_{02} es el coeficiente de y^2z^2 en la expresión de F en estas coordenadas.

Demostración:

Consideremos un sistema coordenado homogeneo en $\mathbb{P}^2$ de tal manera que $P = (0 : 0 : 1)$ y F tenga como recta tangente en P a $\{x = 0\}$; entonces F se escribe de la siguiente forma:

$$F = x + f_{20}x^2 + f_{11}xy + f_{02}y^2 + f_{30}x^3 + \cdots + f_{04}y^4.$$

Como $F.C \geq 3P$ la primera condición que se debe satisfacer es que la tangente a C en P debe coincidir con la recta tangente a F en P, esto es, la recta tangente en P también debe ser $\{x = 0\}$, luego

$$C = x + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2.$$

Ahora veamos que otra condición se debe cumplir para que se satisfaga $F.C \geq 3P$. De la ecuación de C tenemos

$$x = \frac{-c_{02}y^2}{1 + c_{20}x + c_{11}y},$$

por el teorema de Estructura de Cohen sabemos que $\hat{\mathcal{O}}_P \cong \mathbb{C}[[x, y]]$, luego

$$\frac{1}{1 + c_{20}x + c_{11}y} = 1 - c_{20}x - c_{11}y + c_{20}^2x^2 + 2c_{20}c_{11}xy + c_{11}^2y^2 + \cdots .$$

Sustituyendo en F obtenemos

$$\frac{-c_{02}y^2}{1 + c_{20}x + c_{11}y} + f_{20}\left(\frac{-c_{02}y^2}{1 + c_{20}x + c_{11}y}\right)^2 + f_{11}\left(\frac{-c_{02}y^2}{1 + c_{20}x + c_{11}y}\right)y +$$
$$+ f_{02}y^2 + f_{30}\left(\frac{-c_{02}y^2}{1 + c_{20}x + c_{11}y}\right)^3 + \cdots + f_{04}y^4,$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
&- c_{02}y^2(1 - c_{20}x - c_{11}y + c_{20}^2x^2 + 2c_{20}c_{11}xy + c_{11}^2y^2 + \cdots)+\\
&+ f_{20}c_{02}^2y^4(1 - c_{20}x - c_{11}y + c_{20}^2x^2 + 2c_{20}c_{11}xy + c_{11}^2y^2 + \cdots)^2-\\
&- f_{11}c_{02}y^3(1 - c_{20}x - c_{11}y + c_{20}^2x^2 + 2c_{20}c_{11}xy + c_{11}^2y^2 + \cdots)+\\
&+ f_{02}y^2-\\
&- f_{30}c_{02}^3y^6(1 - c_{20}x - c_{11}y + c_{20}^2x^2 + 2c_{20}c_{11}xy + c_{11}^2y^2 + \cdots)^3+\\
&+ \cdots +\\
&+ f_{13}c_{02}y^5(1 - c_{20}x - c_{11}y + c_{20}^2x^2 + 2c_{20}c_{11}xy + c_{11}^2y^2 + \cdots)+\\
&+ f_{04}y^4
\end{aligned}$$

si queremos que se satisfagan nuestros requerimientos debemos tener que los términos cuadráticos deben cancelarse, así $c_{02} = f_{02}$, luego

$$C = x + c_{20}x^2 + c_{11}xy + f_{02}y^2,$$

escribiendo la ecuación proyectiva de la ecuación anterior obtenemos nuestro resultado. ■

Nuestro siguiente objetivo será demostrar el recíproco de la proposición 4.1.1, es decir, si tenemos puntos en $Jac(X)$, donde X es una curva no-singular y no hiperelíptica de género 3 que satisfacen algunas propiedades especiales; entonces esta curva debe ser de Picard.

Supongamos que existen puntos $\Delta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \in Jac(X)$ tales que

- $2\Delta = 0$
- $3\eta_i = 0$, para $i = 1, 2, 3, 4$
- $\Delta \in \Theta$ y $\eta_i \in \Theta$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

En lo que sigue de nuestra discusión fijaremos $\eta = \eta_j$, cualquiera pero fijo.

Recordemos que el teorema de la constante de Riemann establece que

$$\Theta = W_2 + \kappa,$$

donde $W_2 = \mu(X^{(2)}),\ 2\kappa = -\mu(K_X)$ y K_X es un divisor canónico sobre X. Como $\Delta \in \Theta$; entonces existen $Q_1, Q_2 \in X$ tales que

$$\Delta = \mu(Q_1 + Q_2) + \kappa$$

y como $\eta + \Delta \in \Theta$; existen $P_1, P_2 \in X$ tales que

$$\eta + \Delta = \mu(P_1 + P_2) + \kappa.$$

Lema 4.1.1 *Existen una recta L y una cónica C tales que $L \cdot X = 2Q_1 + 2Q_2$ y $X \cdot C = 3P_1 + 3P_2 + Q_1 + Q_2$.*

Demostración:

Del hecho $2\Delta = 0$ se desprende la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} 0 &= 2(\mu(Q_1 + Q_2) + \kappa) \\ &= \mu(2Q_1 + 2Q_2) + 2\kappa \\ &= \mu(2Q_1 + 2Q_2) - \mu(K_X) \end{aligned}$$

esto es

$$\mu(2Q_1 + 2Q_2) = \mu(K_X)$$

luego

$$2Q_1 + 2Q_2 \equiv K_X, \tag{4.2}$$

por lo tanto tenemos la primera parte del lema, es decir existe una línea recta L tal que

$$X.L = 2Q_1 + 2Q_2.$$

Como también tenemos que $3\eta = 0$; entonces

$$3(\eta + \Delta) = \Delta = 3(\mu(P_1 + P_2) + \kappa) = \mu(3P_1 + 3P_2) + 3\kappa$$

sumando Δ a cada miembro de la igualdad obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(3P_1 + P_2) + 3\kappa + \mu(Q_1 + Q_2) + \kappa \\ &= \mu(3P_1 + 3P_2 + Q_1 + Q_2) + 4\kappa \\ &= \mu(3P_1 + 3P_2 + Q_1 + Q_2) - 2\mu(K_X), \end{aligned}$$

es decir,

$$\mu(2K_X) = \mu(3P_1 + 3P_2 + Q_1 + Q_2)$$

de donde, tenemos

$$2K_X \equiv 3P_1 + 3P_2 + Q_1 + Q_2,$$

por lo tanto existe una cónica C que satisface

$$X.C = 3P_1 + 3P_2 + Q_1 + Q_2 \tag{4.3}$$

y el lema está probado. ∎

Ahora veamos una característica importante de la cónica hallada.

Lema 4.1.2 *La cónica dada por* (4.7) *es reducible.*

Demostración:

Comencemos fijando la siguiente notación, escojamos un sistema coordenado en $\mathbb{P}^2$ de tal forma que $Q_1 = (1 : 0 : 0)$, $P_1 = (0 : 0 : 1)$, $P_2 = (1 : 1 : 1)$ y $\{x = 0\}$ sea la recta tangente a F en P_1. Observemos que, en estas cordenadas, la recta que pasa por P_1 y P_2 es $\{x - y = 0\}$ y la recta que une P_1 y Q_1 es $\{y = 0\}$. Usando estas coordenadas, por la proposición anterior, tenemos que la ecuación afín de C puede ser escrita en la forma (4.1), es decir, la ecuación afín de C es

$$C = x + c_{20}x^2 + c_{11}xy + f_{02}y^2$$

además, como $Q_1 \in C$, tenemos

$$0 = C(Q_1) = C(1 : 0 : 0) = 1 \cdot 0 + c_{20}1^2 + c_{11}1 \cdot 0 + f_{02}0^2 = c_{20}$$

y como $P_2 \in C$; entonces

$$0 = C(P_2) = C(1 : 1 : 1) = 1 \cdot 1 + c_{11}1 \cdot 1 + f_{02}1^2 = 1 + c_{11} + f_{02},$$

esto es, $c_{11} = -1 - f_{02}$, de donde

$$C = x + (-1 - f_{02})xy + f_{02}y^2.$$

Consideremos un cambio de coordenadas en $\mathbb{P}^2$ de tal manera que $P_2 \mapsto P_1$; entonces, otra vez por el teorema de Estructura de Cohen, C se puede escribir de la siguiente manera:

$$C = -f_{02}(x-1)+(f_{02}-1)(y-1)+(-f_{02}-1)(x-1)(y-1)+f_{02}(y-1)^2$$

donde $u = -f_{02}(x - 1) + (f_{02} - 1)(y - 1)$ es la recta tangente a C en P_2. Aplicando otra vez la proposición de arriba, debemos tener que C se debe escribir de la forma

$$C = u + au^2 + buv + f'_{02}v^2,$$

donde f'_{02} es el coeficiente de v^2 de F en estas nuevas coordenadas y v es otra línea recta que debe anularse en $P_2 = (1 : 1 : 1)$, luego $v = \alpha(x - 1) + \beta(y - 1)$; entonces se tiene que cumplir que

$$-f_{02}(x - 1) + (f_{02} - 1)(y - 1) + (-f_{02} - 1)(x - 1)(y - 1)+$$

$$+f_{02}(y-1)^2 = u + au^2 + buv + f'_{02}v^2$$

o equivalentemente

$$(-f_{02}-1)(x-1)(y-1) + f_{02}(y-1)^2 = au^2 + buv + f'_{02}v^2.$$

Sustituyendo las expresiones de u y v tenemos

$$(-f_{02}-1)(x-1)(y-1)+f_{02}(y-1)^2 = a(-f_{02}(x-1)+(f_{02}-1)(y-1))^2$$
$$+b(-f_{02}(x-1)+(f_{02}-1)(y-1))(\alpha(x-1)+\beta(y-1)+f'_{02}(\alpha(x-1)+$$
$$+\beta(y-1)^2,$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
-1 =& a - b\alpha - b\beta + f'_{02}\alpha^2 + 2f'_{02}\alpha\beta + f'_{02}\beta^2\\
f_{02}+1 =& -2af_{02} + b\alpha + bf_{02}\alpha - 2f'_{02}\alpha^2 + bf_{02}\beta - 2f'_{02}\alpha\beta\\
-f_{02}+1 =& -2a + 2af_{02} + b\alpha - bf_{02}\alpha + 2b\beta - bf_{02}\beta - 2f'_{02}\alpha\beta -\\
&- 2f'_{02}\beta^2\\
0 =& af_{02}^2 - bf_{02}\alpha + f'_{02}\alpha^2\\
-1-f_{02} =& 2af_{02} - 2af_{02}^2 - b\alpha + bf_{02}\alpha - bf_{02}\beta + 2f'_{02}\alpha\beta\\
f_{02} =& a + 2af_{02} + af_{02}^2 - b\beta + bf_{02}\beta + f'_{02}\beta^2.
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}
u(1:0:0) =& -f_{02}(1-0) + (f_{02}-1)(0-0) = -f_{02}\\
v(1:0:0) =& \alpha(1-0) + \beta(0-0) = \alpha.
\end{aligned}$$

Como $Q_1 \in C$: entonces

$$\begin{aligned}
0 =& C(Q_1) = C(1:0:0)\\
=& u(1:0:0) + au^2(1:0:0) + bu(1:0:0)v(1:0:0) +\\
&+ f'_{02}v^2(1:0:0)\\
=& -f_{02} + af_{02}^2 - bf_{02}\alpha + f'_{02}\alpha^2.
\end{aligned}$$

Combinando esta igualdad con la cuarta ecuación del sistema anterior obtenemos $f_{02} = 0$, así

$$C = x - xy = x(1-y)$$

por lo tanto C es reducible. ■

Para llegar a nuestra meta será necesario demostrar que los puntos Q_1 y Q_2 coinciden.

Lema 4.1.3 *$Q_1 = Q_2$.*

Demostración:

Supongamos que $Q_1 \neq Q_2$ y consideremos un sistema coordenado homogeneo de $\mathbb{P}^2$ de tal forma que $Q_1 = (1 : 0 : 0)$ y $Q_2 = (0 : 1 : 0)$. Aplicando la construcción del capítulo anterior, asociamos al divisor $3Q_1$ dos cónicas A y B que satisfacen las condiciones que deben satisfacer; así B será la cónica

$$B = L_1 L_2$$

donde L_1 es la línea recta que une Q_1 con Q_2 y L_2 es la recta tangente a F en Q_1, luego

$$B = zL_2.$$

Por la proposición anterior, la ecuación de A debe escribirse de la forma (4.1), es decir

$$A = z + a_{20}z^2 + a_{11}zL + f_{02}L^2,$$

donde L es una recta que pasa por Q_1, así

$$L = \alpha y + \beta z;$$

entonces

$$A = z + a_{20}z^2 + a_{11}z(\alpha y + \beta z) + f_{02}(\alpha y + \beta z)^2.$$

Como $Q_2 \in A$; obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= A(Q_2) = A(0 : 1 : 0) \\ &= 1 \cdot 0 + a_{20}0^2 + a_{11}0(\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0) + f_{02}(\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0)^2 \\ &= f_{02}\alpha^2, \end{aligned}$$

y esto implica $f_{02} = 0$ o $\alpha = 0$. Tenemos entonces dos casos posibles:

(i) Si $f_{02} = 0$; entonces

$$A = z + a_{20}z^2 + a_{11}zL$$

y así A y B son reducibles, pero esto es imposible, de donde $Q_1 = Q_2$ o $h^1(3Q_1) > 0$. Si $h^1(3Q_1) > 0$; entonces existe una línea recta M tal que

$$X \cdot M \geq 3Q_1,$$

pero sabemos que $2Q_1+2Q_2 \equiv K_X$, y por lo tanto $Q_1 = Q_2$.

(ii) Si $\alpha = 0$; tenemos

$$\begin{aligned} A &= z + a_{20}z^2 + a_{11}z(\beta z) + f_{02}(\beta z)^2 \\ &= z + a_{20}z^2 + a_{11}\beta z^2 + f_{02}\beta^2 z^2, \end{aligned}$$

entonces tenemos, otra vez, que A y B son reducibles y estamos en el caso anterior, luego $Q_1 = Q_2$.

Así, ambos casos son imposibles, luego nuestra suposición debe ser erronea y por lo tanto debemos tener $Q_1 = Q_2$. ∎

Ahora ya sabemos que C es reducible y que además satisface

$$X.C = 3P_1 + 3P_2 + 2Q.$$

Recordemos que en el sistema coordenado en el cual estamos trabajando tenemos $Q = Q_1 = Q_2 = (1:0:0)$, $P_1 = (0:0:1)$, $P_2 = (1:1:1)$ y $C = xz - xy = x(z-y)$. Podemos fácilmente ver que P_2 no está sobre la recta $L_1 = \{x = 0\}$, luego $X.L_1 = 3P_1 + Q$ y si $L_2 = \{z - y = 0\}$; entonces $X.L_2 = 3P_2 + Q$, esto es,

$$3P_1 + Q \equiv K_X \quad \text{y} \quad 3P_2 + Q \equiv K_X.$$

Además, de la ecuación (4.2), tenemos $4Q \equiv K_X$, y combinando esto con nuestras últimas relaciones obtenemos lo siguiente:

$$3P_1 \equiv 3Q \quad \text{y} \quad 3P_2 \equiv 3Q.$$

Tengamos en mente que todo ésto lo hemos hecho fijando un η, como tenemos cuatro de estos puntos en $Jac(X)$; entonces por cada η_i escojemos

P_1^i o P_2^i y lo llamaremos simplemente P_i.

Como $3P_i \equiv 3Q$; existe una función meromorfa $h_i \in \mathcal{M}(X)$ que satisface

$$(h_i) = 3P_i - 3Q.$$

Y como también tenemos $3P_i \equiv 3P_j$ y $h^0(3Q) = 2$ obtener las siguientes relaciones

$$h_i = \alpha_i h_1 + \beta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

De esto último tenemos que

$$\left(\prod_{i=1}^{4} h_i \right) = \sum_{i=1}^{4} 3P_i - 12Q.$$

El divisor de ramificación de h_1 es $B = 2(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + Q)$, y por la fórmula de *Riemann-Hurwitz* tenemos

$$K_X = h_1^* K_{\mathbb{P}^1} + B,$$

Como $K_{\mathbb{P}^1} = -2P$, para algún $P \in \mathbb{P}^1$, tomemos P como un punto de ramificación, así $h_1^*(-2P) = -3P_1 - 3P_2$ y consideremos $K_X = 4Q$; entonces

$$4Q \equiv -3P_1 - 3P_2 + 2(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + Q)$$

de donde

$$2Q + P_1 + P_2 \equiv 2P_3 + 2P_4.$$

Ahora tomemos $S_1, S_2 \in X$ tales que $P_1 + P_2 + S_1 + S_2 \equiv K_X$; entonces

$$2P_3 + 2P_4 + S_1 + S_2 \equiv 2Q + P_1 + P_2 + S_1 + S_2 \equiv 6Q \equiv 3P_3 + 3P_4,$$

luego

$$S_1 + S_2 \equiv P_3 + P_4$$

como X no es hiperelíptica debemos tener la igualdad, es decir, $S_1 + S_2 = P_3 + P_4$, lo cual implica

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \equiv 4Q.$$

Ahora sea g una función meromorfa que satisfaga $(g) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - 4Q$; entonces

$$(g^3) = \sum_{i=1}^{4} 3P_i - 12Q = \left(\prod_{i=1}^{4} h_i \right)$$

y en el campo de todas las funciones racionales sobre X tenemos

$$g^3 = \lambda \prod_{i=1}^{4} h_i, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Si definimos la aplicación $\rho : X - \{Q\} \longrightarrow \mathbb{A}^2$ por $\rho(P) = (h_1(P), g(P))$; entonces la imagen de ρ es la cuártica no-singular

$$y^3 = \lambda x \prod_{i=2}^{4} (\alpha_i x - \beta_i),$$

como X es de género 3; entonces ρ es un isomorfismo. Por lo tanto hemos recobrado la ecuación de una curva de Picard.

Podemos resumir todo esto en el siguiente resultado:

Teorema 4.1.1 *Sea $Jac(X)$ la variedad Jacobiana de una curva no-singular y no-hiperelíptica de género tres. Supongamos que existen puntos $\Delta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \in Jac(X)$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) $2\Delta = 0$, $3\eta_i = 0$, *para* $i = 1, 2, 3, 4$, $\eta_i \neq 0$ *y* $\eta_i \neq \eta_j$

(ii) $\eta_i + \Delta \in \Theta$, *para* $i = 1, 2, 3, 4$ *y* $\Delta \in \Theta$*;*

entonces X es una curva de Picard.

4.2. Theta-Anulamiento sobre curvas de Fermat

En esta sección aplicaremos el mismo procedimiento de la sección anterior, pero para curvas de Fermat de género 3. Es decir, si tenemos una curva de Fermat X con ecuación proyectiva

$$y^4 = \lambda z(x - a_1 z)(x - a_2 z)(x - a_3 z),$$

donde $\lambda, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$, hallaremos puntos en su variedad Jacobiana que satisfagan ciertas propiedades de Theta-anulamiento, como lo dice el siguiente resultado:

Proposición 4.2.1 *Si X es una curva de Fermat de grado cuatro dada por la ecuación anterior; entonces existen $\Delta, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in Jac(X)$ tales que:*

(i) $2\Delta = 0$ *y* $4\eta_i = 0$, *para* $i = 1, 2, 3$.

(ii) $\Delta \in \Theta$ *y* $\Delta + \eta_i \in \Theta$, *para* $i = 1, 2, 3$.

Demostración:

Sabemos que X tiene la siguiente ecuación en coordenadas afines:

$$y^4 = \lambda(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3),$$

donde $\lambda, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ y $a_i \neq a_j$, si $i \neq j$; entonces, considerando la aplicación $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$, tenemos que los puntos de ramificación son $R_1 = (a_1 : 0 : 1)$, $R_2 = (a_2 : 0 : 1)$, $R_3 = (a_3 : 0 : 1)$ y $R = \infty = (1 : 0 : 0)$.
Definamos $\eta_1 = R_1 - \infty$, $\eta_2 = R_2 - \infty$, $\eta_3 = R_3 - \infty$ y $\Delta = \kappa$, donde κ es la constante de Riemann. En nuestro caso, como estamos tomando ∞ como punto base para la aplicación de Abel-Jacobi; entonces

$$\mu(K_X) = \mu(4R) = 4\mu(R) = 4(R - \infty) = 4 \cdot 0 = 0$$

y como $2\kappa = -\mu(K_X) = 0$; tenemos

$$2\Delta = 0.$$

También obtenemos que $4\eta_i = 4(R_i - \infty)$ y por las propiedades geométricas de la curva en cuestión tenemos

$$4R_i \equiv K_X \equiv 4R = 4\infty,$$

luego $4R_i \equiv 4\infty$, así

$$4\eta_i = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

y hemos probado la primera parte de la proposición.

Para la parte restante obserevemos que como $\Theta = W_2 + \kappa$; claramente $\kappa \in \Theta$, así $\Delta \in \Theta$ y como $\eta_i = R_i - \infty$; entonces

$$\mu(R_i + \infty) = R_i + \infty - 2\infty = \eta_i \in W_2$$

por lo tanto $\eta_i + \Delta = \eta_i + \kappa \in \Theta$. ■

Nuestro objetivo ahora es probar el recíproco de la proposición anterior, es decir, si tenemos puntos en $Jac(X)$, donde X es una curva no-singular y no hiperelíptica de género 3 que satisfacen ciertas propiedades específicas; entonces esta curva debe ser una curva de Fermat.

Para lograr nuestro objetivo nos será de mucha utilidad obtener la ecuación explícita de una cónica que intersecta a una cuártica de manera muy especial, esto lo hacemos a detalle en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.2 *Sean C una cónica y F una cuártica irreducible y no-singular tales que existe un punto $P \in \mathbb{P}^2$ que satisface $F.C \geq 4P$; entonces existe un sistema coordenado homogeneo en $\mathbb{P}^2$ de tal manera que C tiene la siguiente ecuación en dichas coordenadas:*

$$C = xz + ax^2 + \left(f_{11} - \frac{f_{03}}{f_{02}}\right) xy + f_{02}y^2, \quad si \;\; f_{02} \neq 0 \tag{4.4}$$

o

$$C = xz + ax^2 + bxy, \quad si \;\; f_{02} = 0 \tag{4.5}$$

donde f_{11}, f_{02}, f_{03} son los coeficientes de xyz^2, y^2z^2, y^3z, respectivamente, en la expresión de F en estas coordenadas.

Demostración:

Consideremos un sistema coordenado homogeneo en $\mathbb{P}^2$ tal que $P = (0 : 0 : 1)$ y F tenga como tangente en P a la recta $\{x = 0\}$; entonces la ecuación de F puede escribirse de la siguiente forma:

$$F = x + f_{20}x^2 + f_{11}xy + f_{02}y^2 + f_{30}x^3 + \cdots + f_{04}y^4.$$

Sea $C = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2$, como $C(P) = 0$ lo primero que debemos tener es $c_{00} = 0$, la condición $F.C \geq 4P$ implica que la segunda situación que debe cumplirse es que la tangente a C en P debe coincidir con la recta tangente a F en el mismo punto, es decir, tal recta debe ser $\{x = 0\}$, luego

$$C = x + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2.$$

Veamos otra condición para que se satisfaga $F.C \geq 4P$.
De la ecuación de C obtenemos

$$x = \frac{-c_{02}y^2}{1 + c_{20}x + c_{11}y},$$

por el teorema de estructura de Cohen, podemos escribir

$$\frac{1}{1+c_{20}x+c_{11}y} = 1-c_{20}x-c_{11}y+c_{20}^2x^2+2c_{20}c_{11}xy+c_{11}^2y^2+\cdots.$$

Sustituyendo en F tenemos lo siguiente:

$$\frac{-c_{02}y^2}{1+c_{20}x+c_{11}y}+f_{20}\left(\frac{-c_{02}y^2}{1+c_{20}x+c_{11}y}\right)^2+$$
$$+f_{11}\left(\frac{-c_{02}y^2}{1+c_{20}x+c_{11}y}\right)y+f_{02}y^2+f_{30}\left(\frac{-c_{02}y^2}{1+c_{20}x+c_{11}y}\right)^3+\cdots+f_{04}y^4,$$

o equivalentemente

$$-c_{02}y^2(1-c_{20}x-c_{11}y+c_{20}^2x^2+2c_{20}c_{11}xy+c_{11}^2y^2+\cdots)+$$
$$+f_{20}c_{02}^2y^4(1-c_{20}x-c_{11}y+c_{20}^2x^2+2c_{20}c_{11}xy+c_{11}^2y^2+\cdots)^2-$$
$$-f_{11}c_{02}y^3(1-c_{20}x-c_{11}y+c_{20}^2x^2+2c_{20}c_{11}xy+c_{11}^2y^2+\cdots)+$$
$$+f_{02}y^2-$$
$$-f_{30}c_{02}^3y^6(1-c_{20}x-c_{11}y+c_{20}^2x^2+2c_{20}c_{11}xy+c_{11}^2y^2+\cdots)^3+$$
$$+f_{21}c_{02}^2y^5(1-c_{20}x-c_{11}y+c_{20}^2x^2+2c_{20}c_{11}xy+c_{11}^2y^2+\cdots)^2-$$
$$-f_{12}c_{02}y^4(1-c_{20}x-c_{11}y+c_{20}^2x^2+2c_{20}c_{11}xy+c_{11}^2y^2+\cdots)+$$
$$+f_{03}y^3+$$
$$+f_{40}c_{02}^4y^8(1-c_{20}x-c_{11}y+c_{20}^2x^2+2c_{20}c_{11}xy+c_{11}^2y^2+\cdots)^4-$$
$$-f_{31}c_{02}^3y^7(1-c_{20}x-c_{11}y+c_{20}^2x^2+2c_{20}c_{11}xy+c_{11}^2y^2+\cdots)^3+$$
$$+f_{22}c_{02}^2y^6(1-c_{20}x-c_{11}y+c_{20}^2x^2+2c_{20}c_{11}xy+c_{11}^2y^2+\cdots)^2-$$
$$+f_{13}c_{02}y^5(1-c_{20}x-c_{11}y+c_{20}^2x^2+2c_{20}c_{11}xy+c_{11}^2y^2+\cdots)+$$
$$+f_{04}y^4.$$

Para que se cumpla lo que queremos, debemos tener que los términos cuadrático y cúbico deben anularse, es decir,

$$c_{02}=f_{02} \quad \text{y}$$
$$c_{02}c_{11}-f_{11}c_{02}=-f_{03}.$$

Tenemos entonces dos casos:

(i) Si $f_{02} \neq 0$; entonces

$$c_{02} = f_{02} \quad \text{y} \quad c_{11} = \frac{f_{02}f_{11} - f_{03}}{f_{02}}$$

en este caso C puede escribirse de la forma (4.4)

$$C = x + c_{20}x^2 + \left(\frac{f_{02}f_{11} - f_{03}}{f_{02}}\right) xy + f_{02}y^2$$

(ii) Si $f_{02} = 0$; entonces

$$c_{02} = 0 \quad \text{y} \quad f_{03} = 0$$

y en este caso tenemos que C es reducible, ya que lo podemos escribir de la forma (4.5)

$$C = x + c_{20}x^2 + c_{11}xy.$$

Por lo tanto nuestra proposición está probada. ■

Ahora nuestro objetivo inmediato será demostrar el recíproco de la proposición 4.2.1 y aún más, encontraremos su ecuación de manera explícita.

Sea X una curva no-singular y no-hiperelíptica de género de 3. Supongamos que existen puntos $\Delta, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in Jac(X)$ tales que $2\Delta = 0$, $4\eta_i = 0$, para $i = 1, 2, 3$, y además satisfacen $\Delta \in \Theta$ y $\Delta + \eta_i \in \Theta$, para $i = 1, 2, 3$. En lo que sigue de nuestra discusión fijamos $\eta = \eta_j$, para cualquier j.

Sabemos que $\Theta = W_2 + \kappa$. Del hecho de que $\Delta \in \Theta$; tenemos que existen $Q_1, Q_2 \in X$ tales que

$$\Delta = \mu(Q_1 + Q_2) + \kappa.$$

Lema 4.2.1 *Existe una recta L tal que $X.L = 2Q_1 + 2Q_2$.*

Demostración:

Como $2\Delta = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} 2\Delta = 0 = 2(\mu(Q_1 + Q_2) + \kappa) &= \mu(2Q_1 + 2Q_2) + 2\kappa \\ &= \mu(2Q_1 + 2Q_2) - \mu(K_X), \end{aligned}$$

esto es
$$\mu(K_X) = \mu(2Q_1 + 2Q_2)$$
así tenemos
$$K_X \equiv 2Q_1 + 2Q_2, \tag{4.6}$$
es decir, existe una recta L tal que $X.L = 2Q_1 + 2Q_2$. ■

Como también $\Delta + \eta \in \Theta$ tenemos que existen $P_1, P_2 \in X$ tales que
$$\Delta + \eta = \mu(P_1 + P_2) + \kappa.$$

Lema 4.2.2 *Existe una cónica C que satisface $X.C = 4P_1 + 4P_2$.*

Demostración:

Las condiciones $4\eta = 0$ y $2\Delta = 0$ implican
$$4(\Delta + \eta) = 0 = 4(\mu(P_1 + P_2) + \kappa) = \mu(4P_1 + 4P_2) + 4\kappa$$
$$= \mu(4P_1 + 4P_2) - 2\mu(K_X),$$
es decir,
$$\mu(2K_X) = \mu(4P_1 + 4P_2)$$
luego
$$2K_X \equiv 4P_1 + 4P_2,$$
de donde, existe una cónica C que satisface
$$X.C = 4P_1 + 4P_2. \tag{4.7}$$
Y hemos probado nuestro lema. ■

Ahora veamos una característica importante de la cónica hallada arriba.

Lema 4.2.3 *La cónica dada por* (4.7) *es reducible.*

Demostración:

Fijemos la siguiente notación, escojamos un sistema coordenado de $\mathbb{P}^2$ de tal forma que $P_1 = (0:0:1)$, $P_2 = (1:1:1)$ y $\{x = 0\}$ sea la recta tangente a F en P_1. Observemos que en estas coordenadas la recta que pasa por P_1 y P_2 es $\{x - y = 0\}$.

Usando estas coordenadas y suponiendo que tal cónica es irreducible, por la proposición anterior, tenemos que C debe poder escribirse de la forma (4.4), es decir,

$$C = x + ax^2 + \left(f_{11} - \frac{f_{03}}{f_{02}}\right) xy + f_{02}y^2, \quad \text{con } f_{02} \neq 0$$

y como $P_2 \in C$ obtenemos

$$0 = C(P_2) = 1 \cdot 1 + c_{20} \cdot 1^2 + \left(f_{11} - \frac{f_{03}}{f_{02}}\right)(1 \cdot 1) + f_{02} \cdot 1^2,$$

de donde, $c_{20} = -1 - f_{02} + \frac{f_{03}}{f_{02}} - f_{11}$, por lo tanto

$$C = x + \left(-1 - f_{02} + \frac{f_{03}}{f_{02}} - f_{11}\right) xy + f_{02}y^2.$$

Consideremos un cambio de coordenadas en $\mathbb{P}^2$ de tal manera que $P_2 \mapsto P_1$; entonces mediante un cambio de coordenadas C se escribe:

$$\begin{aligned} C = & \left(-2f_{02} + \frac{f_{03}}{f_{02}} - f_{11} - 1\right)(x-1) + \\ & + \left(-\frac{f_{03}}{f_{02}} + f_{11} + 2f_{02}\right)(y-1) + \\ & + \left(\frac{f_{03}}{f_{02}} - f_{11} - f_{02} - 1\right)(x-1)^2 + \\ & + \left(f_{11} - \frac{f_{03}}{f_{02}}\right)(x-1)(y-1) + f_{02}(y-1)^2 \end{aligned}$$

donde la recta tangente a C en P_2 es $u = -f_{02}(x-1) + (f_{02} - 1)(y-1)$. Aplicando otra vez la proposición anterior debemos tener que C debería poder escribirse de la siguiente forma:

$$C = u + au^2 + \left(f'_{11} - \frac{f'_{03}}{f'_{02}}\right) uv + f'_{02}v^2, \quad \text{con } f'_{02} \neq 0,$$

donde $f'_{11}, f'_{02}, f'_{03}$ son los coeficientes de uv, v^2, v^3, respectivamente, de F en estas nuevas coordenadas y v es otra recta que debe anularse en $P_2 = (1:1:1)$, luego $v = \alpha(x-1) + \beta(y-1)$. Así, debemos tener

$$\left(-2f_{02} + \frac{f_{03}}{f_{02}} - f_{11} - 1\right)(x-1) + \left(-\frac{f_{03}}{f_{02}} + f_{11} + 2f_{02}\right)(y-1) +$$

$$+\left(\tfrac{f_{03}}{f_{02}}-f_{11}-f_{02}-1\right)(x-1)^2=$$

$$=u+au^2+\left(f'_{11}-\frac{f'_{03}}{f'_{02}}\right)uv+f'_{02}v^2+$$

$$+\left(f_{11}-\frac{f_{03}}{f_{02}}\right)(x-1)(y-1)+f_{02}(y-1)^2,$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-1=f'_{02}\alpha^2+2\beta f'_{02}\alpha-f'_{11}\alpha+\frac{f'_{03}}{f'_{02}}\alpha+a+\beta^2f'_{02}-\beta f'_{11}+\beta\frac{f'_{03}}{f'_{02}}$$

$$2+2f_{02}+f_{11}-\frac{f_{03}}{f_{02}}=-2f'_{02}\alpha^2-2\beta f'_{02}\alpha+2f_{02}f'_{11}\alpha+f_{11}f'_{11}\alpha-$$

$$-\frac{f_{03}}{f_{02}}f'_{11}\alpha+2f'_{11}\alpha-2f_{02}\frac{f'_{03}}{f'_{02}}\alpha-f_{11}\frac{f'_{03}}{f'_{02}}\alpha+$$

$$+\frac{f_{03}}{f_{02}}\frac{f'_{03}}{f'_{02}}\alpha-2\frac{f'_{03}}{f'_{02}}\alpha-2a-4af_{02}-2af_{11}+2a\frac{f_{03}}{f_{02}}+$$

$$+2f_{02}\beta f'_{11}+f_{11}\beta f'_{11}-\frac{f_{03}}{f_{02}}\beta f'_{11}+\beta f'_{11}-2f_{02}\beta\frac{f'_{03}}{f'_{02}}-$$

$$-f_{11}\beta\frac{f'_{03}}{f'_{02}}+\frac{f_{03}}{f_{02}}\beta\frac{f'_{03}}{f'_{02}}-\beta\frac{f'_{03}}{f'_{02}}$$

$$-2f_{02}-f_{11}+\frac{f_{03}}{f_{02}}=-2f'_{02}\beta^2-2\alpha f'_{02}\beta-2f_{02}f'_{11}\beta-f_{11}f'_{11}\beta+$$

$$+\frac{f_{03}}{f_{02}}f'_{11}\beta+f'_{11}\beta+2f_{02}\frac{f'_{03}}{f'_{02}}\beta+f_{11}\frac{f'_{03}}{f'_{02}}\beta-\frac{f_{03}}{f_{02}}\frac{f'_{03}}{f'_{02}}\beta-$$

$$-\frac{f'_{03}}{f'_{02}}\beta+4af_{02}+2af_{11}-2a\frac{f_{03}}{f_{02}}-2f_{02}\alpha f'_{11}-f_{11}\alpha f'_{11}+$$

$$+\frac{f_{03}}{f_{02}}\alpha f'_{11}+2f_{02}\alpha\frac{f'_{03}}{f'_{02}}+f_{11}\alpha\frac{f'_{03}}{f'_{02}}-\frac{f_{03}}{f_{02}}\alpha\frac{f'_{03}}{f'_{02}}$$

$$-1-f_{02}-f_{11}+\frac{f_{03}}{f_{02}}=4af_{02}^2+4af_{02}+4af_{11}f_{02}-4a\frac{f_{03}}{f_{02}}f_{02}-$$

$$-2\alpha f'_{11}f_{02}+2\alpha\frac{f'_{03}}{f'_{02}}f_{02}+af_{11}^2+a\frac{f_{03}}{f_{02}}^2+a+2af_{11}-$$

$$-2a\frac{f_{03}}{f_{02}}-2af_{11}\frac{f_{03}}{f_{02}}+\alpha^2f'_{02}-f_{11}\alpha f'_{11}+\frac{f_{03}}{f_{02}}\alpha f'_{11}-$$

$$-\alpha f'_{11}+f_{11}\alpha\frac{f'_{03}}{f'_{02}}-\frac{f_{03}}{f_{02}}\alpha\frac{f'_{03}}{f'_{02}}+\alpha\frac{f'_{03}}{f'_{02}}$$

$$f_{11}-\frac{f_{03}}{f_{02}}=-8af_{02}^2-4af_{02}-8af_{11}f_{02}+8a\frac{f_{03}}{f_{02}}f_{02}+2\alpha f'_{11}f_{02}-$$
$$-2\beta f'_{11}f_{02}-2\alpha\frac{f'_{03}}{f'_{02}}f_{02}+2\beta\frac{f'_{03}}{f'_{02}}f_{02}-2af_{11}^2-$$
$$-2a\frac{f_{03}}{f_{02}}^2-2af_{11}+2a\frac{f_{03}}{f_{02}}+4af_{11}\frac{f_{03}}{f_{02}}+2\alpha\beta f'_{02}+$$
$$+f_{11}\alpha f'_{11}-\frac{f_{03}}{f_{02}}\alpha f'_{11}-f_{11}\beta f'_{11}+\frac{f_{03}}{f_{02}}\beta f'_{11}-\beta f'_{11}-$$
$$-f_{11}\alpha\frac{f'_{03}}{f'_{02}}+\frac{f_{03}}{f_{02}}\alpha\frac{f'_{03}}{f'_{02}}+f_{11}\beta\frac{f'_{03}}{f'_{02}}-\frac{f_{03}}{f_{02}}\beta\frac{f'_{03}}{f'_{02}}+\beta\frac{f'_{03}}{f'_{02}}$$

$$f_{02}=4af_{02}^2+4af_{11}f_{02}-4a\frac{f_{03}}{f_{02}}f_{02}+2\beta f'_{11}f_{02}-2\beta\frac{f'_{03}}{f'_{02}}f_{02}+$$
$$+af_{11}^2+a\frac{f_{03}}{f_{02}}^2-2af_{11}\frac{f_{03}}{f_{02}}+\beta^2f'_{02}+f_{11}\beta f'_{11}-$$
$$-\frac{f_{03}}{f_{02}}\beta f'_{11}-f_{11}\beta\frac{f'_{03}}{f'_{02}}+\frac{f_{03}}{f_{02}}\beta\frac{f'_{03}}{f'_{02}}.$$

Pero el sistema anterior es incompatible, no puede resolverse para todas las variables que aparecen, por lo tanto C es reducible y debe tener la forma (4.5). ■

Ahora ya sabemos que C es reducible y que satisface

$$X.C = 4P_1 + 4P_2.$$

Aplicando el lema 4.1.3 de la sección anterior, podemos inferir que $Q_1 = Q_2$, así podemos nombrarlo simplemente Q.

Tengamos en mente que en las coordenadas en las cuales estamos trabajando tenemos que $Q = (1 : 0 : 0)$, $P_1 = (0 : 0 : 1)$, $P_2 = (1 : 1 : 1)$ y $C = xz + ax^2 + (-1 - a)xy$. Podemos ver que P_2 no está en la recta $L_1 = \{x = 0\}$, luego $X.L_1 = 4P_1$ y si $L_2 = \{z + ax + (-1 - a)y = 0\}$; entonces $X.L_2 = 4P_2$, esto es,

$$4P_1 \equiv K_X \quad \text{y} \quad 4P_2 \equiv K_X,$$

además, de la ecuación (4.6) obtenemos

$$4Q \equiv K_X.$$

Recordemos que todo lo hecho hasta ahora fue fijando un η, como tenemos 3 puntos de este tipo en la Jacobiana de la curva; entonces por cada η_i podemos escoger P_1^i o P_2^i y denotarlo simplemente por P_i.

Del hecho $4P_i \equiv K_X \equiv 4Q$ tenemos que existe una función meromorfa $h_i \in \mathcal{M}(X)$ que cumple

$$(h_i) = 4P_i - 4Q.$$

Y como también tenemos que $h^0(4Q) = 2$ obtenemos las siguientes relaciones

$$h_i = \alpha_i h_1 + \beta_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

De lo anterior tenemos que

$$\left(\prod_{i=1}^{3} h_i\right) = \sum_{i=1}^{3} 4P_i - 12Q.$$

El divisor de ramificación de h_1 es $B = 3(P_1 + P_2 + P_3 + Q)$, por la fórmula de *Riemann-Hurwitz* tenemos

$$K_X = h_1^* K_{\mathbb{P}^1} + B,$$

como $K_{\mathbb{P}^1} = -2P$, para algún $P \in \mathbb{P}^1$, tomemos P como un punto de ramificación, así $h_1^*(-2P) = -4P_1 - 4P_2$ y tomemos $K_X = 4Q$; entonces

$$4Q \equiv -4P_1 - 4P_2 + 3(P_1 + P_2 + P_3 + Q)$$

de donde

$$Q + P_1 + P_2 \equiv 3P_3.$$

Sean S_1, S_2 puntos en X que satisfacen $P_1 + P_2 + S_1 + S_2 \equiv K_X$; entonces

$$3P_3 + S_1 + S_2 \equiv P_1 + P_2 + S_1 + S_2 + Q \equiv K_X + Q \equiv 4P_3 + Q,$$

luego

$$S_1 + S_2 \equiv P_3 + Q$$

como X no es hiper-elíptica debemos tener una igualdad, es decir, $S_1 + S_2 = P_2 + P_4$ y por lo tanto

$$P_1 + P_2 + P_3 + Q \equiv 4Q \quad \Leftrightarrow \quad P_1 + P_2 + P_3 \equiv 3Q.$$

Sea g una función meromorfa que satisface $(g) = P_1 + P_2 + P_3 - 3Q$; entonces

$$(g^4) = \sum_{i=1}^{3} 4P_i - 12Q = \left(\prod_{i=1}^{3} h_i\right)$$

y en el campo de las funciones racionales sobre X tenemos

$$g^4 = \lambda \prod_{i=1}^{3} h_i, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Si definimos la aplicación $\rho : X - \{Q\} \longrightarrow \mathbb{A}^2$ por $\rho(P) = (h_1(P), g(P))$, la imagen de ρ es la cuártica no-singular

$$y^4 = \lambda \prod_{i=1}^{3} (\alpha_i x - \beta_i) = \lambda x(\alpha_2 x - \beta_2)(\alpha_3 x - \beta_3),$$

como X es de género 3; ρ debe ser un isomorfismo. Por lo tanto hemos recobrado la ecuación de una curva de Fermat.
Resumimos todo lo anterior en el siguiente:

Teorema 4.2.1 *Sea $Jac(X)$ la variedad Jacobiana de una curva no-singular y no-hiper-elíptica de género tres, supongamos que existen puntos $\Delta, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in Jac(X)$ que satisfacen:*

(i) $2\Delta = 0$, $4\eta_i = 0$, $\eta_i \neq 0$ *y* $\eta_i \neq \eta_j$ *para* $i = 1, 2, 3$

(ii) $\eta_i \in \Theta$, *para* $i = 1, 2, 3$ *y* $\Delta \in \Theta$;

entonces X es una curva de Fermat de grado cuatro.

Bibliografía

[1] Accola Robert; **On cyclic trigonal Riemann surfaces**; I. Transactions of the American Mathematical Society 283 1984 No. 2.

[2] Anderson Greg W.; **An Explicit Algebraic Representation of the Abel Map**; International Mathematics Research Notices No. 11 1997.

[3] Arbarello E., Cornalba M.; **Geometry of Algebraic Curves**; Springer Verlag 1985.

[4] Atiyah Michael F., Macdonald I.G.; **Introduction to Commutative Algebra**; Addison Wesley 1969.

[5] Beauville Arnaud; **Jacobiennes des courbes spectrales et systèmes hamiltoniens complètement intégrables**; Acta Mathematica, Vol. 164 1990.

[6] Cantor David G.; **Computing in the Jacobian of a Hyperelliptic Curve**; Mathematics of Computation, Volume 48, Number 177 1987.

[7] Chaves Gabriela; **Revêtements ramifiés de la droite projective complexe**; Mathematische Zeitschrift Number 226 1997.

[8] Eisenbud David; **Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry**; Springer Verlag 1995.

[9] Eisenbud David, Harris Joe; **Schemes, The Language of Modern Algebraic Geometry**; Wadsworth 1992.

[10] Estrada Sarlabous Jorge, Reinaldo Barreiro Ernesto, Piñeiro Barceló Alejandro; **On the Jacobian Varieties of Picard Curves: Explicit Addition Law and Algebraic Structure**; Mathematische Nachrichten 208 1999.

[11] Farkas Hershel, Kra Irving; **Riemann Surfaces**; Springer Verlag 1980.

[12] Forster Otto; **Lectures on Riemann Surfaces**; Springer Verlag 1991.

[13] Fulton William; **Algebraic Curves; An Introduction to Algebraic Geometry**; The Benjamin/Cumming 1969.

[14] García Zamora Alexis; **Some remarks on the Jacobian variety of Picard curves**; Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana (3) Vol. 3 1997.

[15] Griffiths Philip, Harris Joseph; **Principles of Algebraic Geometry**; New York: John Wiley, Pure and Applied Mathematics 1978.

[16] Gunning Robert C.; **Lectures on Riemann Surfaces**; Princeton University Press 1968.

[17] Harris Joe; **Algebraic Geometry, A first Course**;Springer Verlag 1992.

[18] Hartshorne Robin; **Algebraic Geometry**; Springer Verlag 1977.

[19] Leitenberg Frank; **The group law for the Jacobi variety of plane curves**; Fachbereich Mathematik, Universität Rostock, D-18051, Germany 2005.

[20] Matsumura Hideyuki; **Commutative Ring Theory**; Cambridge University Press 1992.

[21] Miranda Rick; **Algebraic Curves and Riemann Surfaces**; American Mathematical Society 1995.

[22] Mumford David; **Abelian Varieties**; Oxford University Press 1988.

[23] Mumford David; **Curves and their Jacobians**; The University of Michigan Press 1975.

[24] Mumford David; **Tata Lectures on Theta I**; Birkhauser 1983.

[25] Mumford David; **Tata Lectures on Theta II**; Birkhauser 1983.

[26] Mumford David; **The Red Book of Varieties and Schemes**; Springer Verlag 1988.

[27] Walker Robert J.; **Algebraic Curves**; Springer Verlag 1978.