Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Clasificación de las superálgebras de Lie con álgebra de Lie subyacente $\mathfrak{gl}(V)$ y algunas generalizaciones sobre algunas clases de álgebras de Lie reductivas

TESIS

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Ma. Isabel Hernández

Directores de tesis:

Dr. O. Adolfo Sánchez Valenzuela
Dr. Gil Salgado González

Octubre 6 de 2008. Guanajuato, Gto. México

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

TESIS

Clasificación de las superálgebras de Lie con álgebra de Lie subyacente $\mathfrak{gl}(V)$ y a]gunas generalizaciones sobre algunas clases de álgebras de Lie reductivas.

Integrantes del Jurado:

Dr. Fausto Antonio Ongay Larios.

Dr. Luis Hernández Lamoneda.

Dr. Raúl Quiroga Barranco.

Dr. Alberto Elduque Palomo.

Dr. O. Adolfo Sánchez Valenzuela.

Vo.Bo. Dr. O. Adolfo Sánchez Valenzuela

Ciencia, paz y libertad.

A mi familia.

Agradeciemientos

A mi Familia por entender los “gajes del oficio” y estar conmigo.

A O. Adolfo Sánchez Valenzuela por todo su apoyo, paciencia, amistad y enseñanzas.

A Gil Salgado González por su ayuda en la realización de este trabajo, y en general, a todo el equipo del seminario de “las siete de la mañana” por sus ideas y comentarios.

A Alberto Elduque Palomo por sus sugerencias y discusiones acerca del trabajo, y por su hospitalidad en la Universidad de Zaragoza, España.

A mis grandes amigos de toda la vida, y a los que conocí durante el proceso de este trabajo, por haberme brindado su tiempo, comprensión y apoyo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por haberme otorgado una beca, desde agosto de 2004 hasta julio de 2008, para realizar este trabajo. Además de una beca mixta, durante cuatro meses, para realizar una estancia académica en la Universidad de Zaragoza, España bajo la dirección del Dr. Alberto Elduque Palomo.

Contenido

Introducción

El objetivo de esta tesis es clasificar las superálgebras de Lie para las cuales su álgebra de Lie es reductiva del tipo $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$, con $\mathfrak{m}$ simple. El ejemplo más sencillo de este tipo es $\mathfrak{gl}(V)$.

Una superálgebra de Lie consiste en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$, una representación ρ de ésta en un espacio vectorial $\mathfrak{g}_1$ y una función bilineal simétrica $\Gamma : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0$ que satisface las identidades:

(J1) $[\Gamma(u, v), x] + \Gamma(\rho(x)(u), v) + \Gamma(u, \rho(x)(v)) = 0$,

(J2) $\rho(\Gamma(u, v))(w) + \rho(\Gamma(v, w))(u) + \rho(\Gamma(w, u))(v) = 0$,

con $x \in \mathfrak{g}_0$ y $u, v, w \in \mathfrak{g}_1$. Así, para estudiar y clasificar superálgebras de Lie es necesario conocer la teoría de álgebras de Lie, sus representaciones y sus respectivos esquemas de clasificación. Dado que la clasificación de álgebras de Lie en general es aún un problema abierto, y por ende, la clasificación de las representaciones de un gran número álgebras de Lie también lo es, no podemos aspirar a realizar una clasificación general de superálgebras de Lie. Sin embargo, podemos emplear resultados conocidos en los que sí se dispone de clasificaciones parciales útiles para abordar algunos problemas particulares. De ahí que nos veamos conducidos a fijar condiciones sobre el álgebra de Lie, sobre la representación o sobre la superálgebra misma. A continuación damos algunos ejemplos.

V. Kac [7] en 1977 consiguió la clasificación de las superálgebras de Lie simples, entre las cuales quedan incluídas aquellas superálgebras simples cuya álgebra de Lie subyacente es simple o semisimple. Es importante notar que, a diferencia del caso clásico, con este resultado no se obtiene la clasificación de las superálgebras semisimples ya que no necesariamente una semisimple es suma de simples.

A. Elduque [2] en 1994 clasificó las superálgebras de Lie tales que la representación de $\mathfrak{g}_0$ en $\mathfrak{g}_1$ es completamente reducible. En particular, las que su álgebra de Lie es semisimple. Siguiendo la técnica usada en este trabajo hemos clasificado las superálgebras de Lie para las que su álgebra de Lie es simple. Los resultados se encuentran en el Teorema 44 y hemos descrito las clases de isomorfía en los Corolarios 47 y 49. Como caso particular, clasificamos aquellas que tienen por álgebra de Lie subyacente a $\mathfrak{sl}(V)$ siendo V un espacio vectorial complejo de dimensión al menos tres. Los resultados se encuentran en el Terorema 53 y en los Corolarios 54 y 55.

Un problema que originalmente planteamos como objetivo de esta tesis fue clasificar las superálgebras de Lie estructuradas sobre $\mathfrak{gl}(V)$. En el camino, sin embargo, aprendimos que la peculiaridad de tener por álgebra de Lie subyacente a un álgebra reductiva de la forma $\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}$ con $\mathfrak{m}$ simple es suficiente para conseguir una clasificación completa. Ésta es precisamente la aportación más importante que hacemos en el presente trabajo.

En trabajos como [10] se hace patente el tipo de problemas técnicos al clasificar superálgebras de Lie sobre $\mathfrak{gl}(V)$ con $\dim(V) = 2$. Otro ejemplo de ello es [9] en el cual se clasifican las superálgebras de Lie que tienen $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(V)$ y $\rho = \mathrm{ad}$, la representación adjunta. En dicho trabajo se da una lista explícita de las posibles estructuras que admite una superálgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V) \oplus \mathfrak{gl}(V)$. A diferencia del problema resuelto en [9] aquí no fijamos la representación ρ por lo que obtenemos resultados mucho más generales. El precio que pagamos, sin embargo, es perder detalle al contar las clases de isomorfía.

Los resultados obtenidos en este trabajo están divididos en dos partes. En la primera, se clasifican las superálgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ cuyo radical tiene un álgebra de Lie subyacente trivial y en la segunda aquellas cuyo radical tienen por álgebra de Lie subyacente a $\mathbb{C}$. Esta división se debe a que la parte par del radical debe ser un ideal soluble de $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$.

En la Proposición 65 se da la estructura de las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathfrak{g}_1$ con $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0 = 0$ y también se hace patente que para cualquier álgebra de Lie simple $\mathfrak{m}$ es posible encontrar dos tipos de superálgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ no isomorfas con $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0 = 0$. En las Proposiciones 66 y 72 se dan condiciones necesarias y suficientes para que dos superágebras con las hipótesis mencionadas sean isomorfas. Como caso especial clasificamos aquellas para las cuales $\mathfrak{m} = \mathfrak{sl}(V)$; es decir, aquellas estructuradas sobre $\mathfrak{gl}(V)$ con V un espacio vectorial complejo de dimensión al menos 3 y $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0 = 0$. Al contar las clases de isomorfía para la superálgebra $\mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(V) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1\rangle \oplus \mathfrak{a}(f, g)$ –misma que se describe con detalle a lo largo del trabajo– nos hemos encontrado el siguiente problema de álgebra lineal, que hemos abordado y resuelto en los Apéndices A y B:

Problema. Sea g una forma canónica de Jordan en $\mathbb{C}^m$ y $u, v \in C^m \setminus \{0\}$. Escribimos, $(u, g) \sim (v, g)$ si, y sólo si, existen un elemento S del grupo de isotropía de g, un escalar distinto de cero β y un vector no nulo $\gamma \in \mathbb{C}^m$ tales que $v = \beta^{-1}(S(u) - (g + \mathrm{id})(\gamma))$. Las clases de equivalencia, bajo $\sim$, corresponden exactamente a las clases de isomorfía de dicha superálgebra. El resultado se encuentra en el Teorema 74.

Finalmente, en la Sección 3.4 describimos la estructura de las superágebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ tales que $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}$. Esta estructura está dada en términos de una forma bilineal simétrica y ρ-invariante. Básicamente tenemos dos tipos disjuntos de superálgebras: aquellas para las cuales existe un $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-módulo complementario a $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_1$ y aquellas para las que no. En la Proposición 75 se dan concidiones para que las superálgebras así descritas sean isomorfas.

.

Capítulo 1

Preliminares

En el presente trabajo trataremos con espacios vectoriales de dimensión finita sobre campos algebraicamente cerrados y de característica cero; básicamente sobre los números complejos. También se supondrá conocida la teoría básica de álgebras asociativas y de Lie, así como sus versiones $\mathbb{Z}_2$-graduadas, aunque para fijar notación, en el caso $\mathbb{Z}_2$-graduado daremos las definiciones de los objetos que necesitemos. En este contexto, recordemos que una función de paridad $|\cdot|$ en un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-graduado $V = V_0 \oplus V_1$ es una función donde los elementos del dominio son llamados homogéneos y está dada como sigue:

$$|\cdot| : V_0\backslash\{0\} \cup V_1\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}_2 \quad \text{y} \quad |u| = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in V_0\backslash\{0\}, \\ 1 & \text{si } u \in V_1\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Convenimos que cuando aparece una fórmula en una estructura graduada, ésta se define para elementos homogéneos y se extiende por linealidad, bilinealidad, etc. Finalmente, como es tradicional, usaremos el prefijo *super* para las estructuras $\mathbb{Z}_2$-graduadas. Ver [11].

1.1 Definiciones básicas

1 Definición. Una superálgebra de Lie es un superespacio vectorial $\mathfrak{g}$ con una función bilineal $[\![\cdot,\cdot]\!] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que $[\![\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]\!] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ y para elementos homogéneos se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $[\![x, y]\!] = -(-1)^{|x||y|}[\![y, x]\!]$,

2. $(-1)^{|x||z|}[\![[\![x,y]\!],z]\!]+(-1)^{|x||y|}[\![[\![y,z]\!],x]\!]+(-1)^{|y||z|}[\![[\![z,x]\!],y]\!]=0.$

2 Observación. **Estructura general de las superálgebras de Lie**. Sea $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie. De la definición anterior se sigue que:

(a) El subespacio $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie con $[\cdot,\cdot]=[\![\cdot,\cdot]\!]|_{\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{g}_0}$.

(b) El subespacio $\mathfrak{g}_1$ es un espacio de representación para $\mathfrak{g}_0$ definiendo $\rho(x)u=[\![x,u]\!]$. En otras palabras, $\mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo.

(c) El corchete $[\![\cdot,\cdot]\!]$ restringido a $\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_1$ define una función bilineal, simétrica Γ con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ y de tal forma que se satisfacen las siguientes dos ecuaciones:

(J1) $\quad [x,\Gamma(u,v)]=\Gamma(\rho(x)u,v)+\Gamma(u,\rho(x)v),$

(J2) $\quad \rho(\Gamma(u,v))(w)+\rho(\Gamma(v,w))(u)+\rho(\Gamma(w,u))(v)=0,$

para todos $x\in\mathfrak{g}_0$ $u,v,w\in\mathfrak{g}_1$. Así, una estructura de superálgebra de Lie en un superespacio vectorial $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$ consiste en una triada $([\cdot,\cdot],\rho,\Gamma)$ donde $[\cdot,\cdot]$ es una estructura de álgebra de Lie en $\mathfrak{g}_0$, ρ es una representación de $\mathfrak{g}_0$ en $\mathfrak{g}_1$ y Γ es una función bilineal simétrica en $\mathfrak{g}_1$ que toma valores en $\mathfrak{g}_0$ y que satisface (J1) y (J2).

3 Ejemplo. **La superálgebra $\mathfrak{gl}(V_0|V_1)$**. Sea $V=V_0\oplus V_1$ un superespacio vectorial, entonces

$$\mathrm{End}(V_0\oplus V_1)=\mathrm{End}(V_0\oplus V_1)_0\oplus\mathrm{End}(V_0\oplus V_1)_1,$$

siendo

$$\mathrm{End}(V_0\oplus V_1)_i=\{T\in\mathrm{End}(V_0\oplus V_1)|\,T(V_j)\subset V_{i+j},\ j=0,1\},\ i=0,1.$$

Luego, $\mathrm{End}(V_0\oplus V_1)$ admite una estructura de superálgebra de Lie definiendo el supercorchete o superconmutador, en elementos homogéneos, de la siguiente manera:

$$[\![T,S]\!]=T\circ S-(-1)^{|T||S|}S\circ T.$$

A esta superálgebra la denotamos por $\mathfrak{gl}(V_0|V_1)$.

4 Definición. Un *morfismo* entre las superálgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ es una transformación lineal $\Phi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')_0$ tal que

$$\Phi([\![x, y]\!]) = [\![\Phi(x), \Phi(y)]\!].$$

Decimos que las superálgebras son isomorfas si existe un morfismo biyectivo entre ellas.

5 Observación. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ superálgebras de Lie con estructuras $([\cdot,\cdot], \rho, \Gamma)$ y $([\cdot,\cdot]', \rho', \Gamma')$ respectivamente y $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un morfismo. Entonces, $\Phi = T \oplus S$ donde $T : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0'$ y $S : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1'$ tales que

$$T([x, y]) = [T(x), T(y)]', \quad x, y \in \mathfrak{g}_0; \tag{1.1}$$

$$S(\rho(x)(u)) = \rho'(T(x))(S(u)), \quad x \in \mathfrak{g}_0, u \in \mathfrak{g}_1; \tag{1.2}$$

$$T(\Gamma(u, v)) = \Gamma'(S(u), S(v)), \quad u, v \in \mathfrak{g}_1. \tag{1.3}$$

De (1.1) tenemos que T es un morfismo de álgebras de Lie y de (1.2), S es una transformación equivariante para las representaciones ρ y $\rho' \circ T$. En otras palabras, S es un morfismo de $\mathfrak{g}_0$-módulos. Si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son isomorfas, entonces T y S son invertibles. Luego, T es un isomorfismo de álgebras de Lie y S es una transformación invertible equivariante. O de manera equivalente, S es un isomorfismo entre los $\mathfrak{g}_0$-módulos $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_1'$

6 Lema. *Dos superálgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son isomorfas si, y sólo si, existe un isomorfismo de álgebras de Lie $T : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0'$ y un isomorfismo de $\mathfrak{g}_0$-módulos $S : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1'$ tal que*

$$\Gamma'(\cdot, \cdot) = T\left(\Gamma(S^{-1}(\cdot), S^{-1}(\cdot))\right).$$

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie. Las definiciones de subsuperálgebra, superideal, superideal soluble, superideal nilpotente, etc., son enteramente análogas al caso clásico, sólo hay que tener en cuenta que su $\mathbb{Z}_2$-graduación sea consistente con la dada en $\mathfrak{g}$ y cuando mencionemos una subálgebra, ideal, etc., de una superálgebra de Lie nos referiremos a una subsuperálgebra, superideal, etc. Es importante notar de la definición, que si $I = I_0 \oplus I_1$ es un ideal de la superágebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, entonces I_0 es un ideal de $\mathfrak{g}_0$ e I_1 es un $\mathfrak{g}_0$-submódulo de $\mathfrak{g}_1$.

7 Definición. Decimos que una superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *simple* si $[\![\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\!] \neq 0$ y sus únicos ideales son $\{0\}$ y $\mathfrak{g}$.

8 Lema. *Sea $\mathfrak{g}$ una superálgebra de Lie simple, entonces $[\![\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\!] = \mathfrak{g}$. Más aún,*

1. $[\![\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1]\!] = \mathfrak{g}_1$.

2. *Si $\mathfrak{g}_1 \neq 0$, entonces $[\![\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]\!] = \mathfrak{g}_0$ y $\rho : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)$ es fiel.*

Demostración. Notemos que $[\![\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\!] \neq 0$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces $[\![\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\!] = \mathfrak{g}$. De la identidad de Jacobi tenemos que $\mathfrak{g}_0 \oplus [\![\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1]\!]$ y $[\![\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]\!] \oplus \mathfrak{g}_1$ son ideales de $\mathfrak{g}$. De aquí se sigue que $[\![\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1]\!] = \mathfrak{g}_1$ y $[\![\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]\!] = \mathfrak{g}_0$. Sea $\mathfrak{h} = \{g \in \mathfrak{g} | [\![g,\mathfrak{g}_1]\!] = 0\}$. Entonces, de la identidad de Jacobi tenemos que $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y ya que $\mathfrak{g}_1 \neq 0$ tenemos que $\mathfrak{h} = 0$. Así, dado $x \in \mathfrak{g}_0$ tal que $\rho(x) = 0$, entonces $x \in \mathfrak{h} = 0$, lo que muestra que ρ es fiel. $\square$

9 Definición. Decimos que $\mathfrak{g}$ es *semisimple* si todos sus ideales solubles son $\{0\}$.

De manera similar al caso clásico, la definición anterior es equivalente a que su radical $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ –el cual existe y es único– sea cero.

1.2 La supertraza en $\mathfrak{gl}(V_0|V_1)$

Análogo al funcional traza, en la categoría $\mathbb{Z}_2$-graduada tenemos que la *supertraza* es el único funcional $\mathrm{str} : \mathfrak{gl}(V_0|V_1) \to \mathbb{F}$ que se caracteriza, hasta múltiplos escalares, por que se anula en los superconmutadores.

10 Lema. *Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de elementos homogéneos de $V_0 \oplus V_1$ con $|e_i| = 0$, si $1 \leq i \leq r$ y $|e_i| = 1$, si $r+1 \leq i \leq n$. Sea $f \in \mathfrak{gl}(V_0|V_1)$ tal que su representación matricial en dicha base es $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$. Entonces, hasta una constante, tenemos que*

$$\mathrm{str}(f) = tr(A) - tr(D).$$

Demostración. Sean $E_{ij} : V_0 \oplus V_1 \to V_0 \oplus V_1$ transformaciones lineales tales que $E_{ij}(e_k) = \delta_{jk} e_i,\ i,j,k = 1,\ldots,n$. Entonces, $E_{ij} \circ E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$ y $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ forman una base de $\mathfrak{gl}(V_0|V_1)$.

En lo que sigue usaremos la siguiente notación:

$$\begin{array}{ll} A_{ij} = E_{ij}, & i, j = 1, \dots, r. \\ B_{i\mu} = E_{i\mu}, & i = 1, \dots, r,\ \mu = r+1, \dots, n. \\ C_{\nu j} = E_{\nu j}, & \nu = r+1, \dots, n,\ j = 1, \dots, r. \\ D_{\nu\mu} = E_{\nu\mu}, & \nu, \mu = r+1, \dots, n. \end{array}$$

Así, sin temor a confusión escribiremos

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \sum a_{ij} A_{ij} + \sum b_{i\mu} B_{i\mu} + \sum c_{\nu j} C_{\nu j} + \sum d_{\nu\mu} D_{\nu\mu}.$$

Por otra parte, tenemos que:

1. $[\![A_{ij}, A_{kl}]\!] = \delta_{jk} A_{il} - \delta_{li} A_{kj}$,

2. $[\![D_{\mu\nu}, D_{\lambda\eta}]\!] = \delta_{\nu\lambda} D_{\mu\eta} - \delta_{\eta\mu} D_{\lambda\nu}$,

3. $[\![A_{ij}, B_{k\mu}]\!] = \delta_{jk} B_{i\mu}$,

4. $[\![A_{ij}, C_{\nu l}]\!] = -\delta_{li} C_{\nu j}$,

5. $[\![B_{i\mu}, C_{\lambda l}]\!] = \delta_{\mu\lambda} A_{il} + \delta_{li} D_{\lambda\mu}$.

Luego, de la definición de supertraza tenemos las siguientes consecuencias:

(i). De (1) tenemos que $\operatorname{str}(A_{ii}) = \operatorname{str}(A_{jj}),\ \forall\, i, j$ y $\operatorname{str}(A_{ij}) = 0,\ i \neq j$.

(ii). De (2) tenemos que $\operatorname{str}(D_{\nu\nu}) = \operatorname{str}(D_{\mu\mu}),\ \forall \nu, \mu$ y $\operatorname{str}(D_{\nu\mu}) = 0,\ \nu \neq \mu$.

(iii). De (3) tenemos que $\operatorname{str}(B_{i\mu}) = 0,\ \forall\, i, \mu$.

(iv). De (4) tenemos que $\operatorname{str}(C_{\nu j}) = 0,\ \forall\, \nu, j$.

(v). De (5) tenemos que $\operatorname{str}(A_{ii}) = -\operatorname{str}(D_{\nu\nu}),\ \forall\, i, \nu$.

Así,

$$\operatorname{str}(f) = \operatorname{str}(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) = (\operatorname{tr}(A) - \operatorname{tr}(D))\alpha$$

donde $\alpha = \operatorname{str}(A_{11})$. $\square$

Es importante notar que la supertraza, al igual que la traza, está bien definida; es decir, no depende de la base homogénea elegida, ya que los cambios de base se hacen mediante isomorfismos de espacios vectoriales $\mathbb{Z}_2$-graduados.

11 Ejemplo. **La superálgebra $\mathfrak{sl}(V_0|V_1)$.** Sea $V = V_0 \oplus V_1$ un superespacio vectorial con $V_0 \neq 0$ y $V_1 \neq 0$. Consideremos el siguiente conjunto:

$$\mathfrak{sl}(V_0|V_1) = \{T \in \mathfrak{gl}(V_0|V_1) |\ \mathrm{str}(T) = 0\}.$$

Entonces, si restringimos el supercorchete dado en $\mathfrak{gl}(V_0|V_1)$ a $\mathfrak{sl}(V_0|V_1)$ tenemos que $\mathfrak{sl}(V_0|V_1)$ es una subálgebra con las siguientes propiedades:

1. $\mathfrak{sl}(V_0|V_1)$ tiene codimensión 1.
2. Si $\dim(V_0) \neq \dim(V_1)$, entonces $\mathfrak{sl}(V_0|V_1)$ es simple.
3. Si $\dim(V_0) = \dim(V_1) \geq 2$, entonces $\mathfrak{sl}(V_0|V_1)/\langle \mathbb{I} \rangle$ es simple,

siendo $\mathbb{I} : V_0 \oplus V_1 \to V_0 \oplus V_1$ la transformación identidad. Como caso particular consideremos $V_1 = \mathbb{C}$. Entonces la superálgebra $\mathfrak{sl}(V_0|\mathbb{C})$ es simple y $\mathfrak{sl}(V_0|\mathbb{C})_0 \simeq \mathfrak{gl}(V_0)$ como álgebras de Lie. En adelante usaremos simplemente la notación $\mathfrak{sl}(V|\mathbb{C})$ donde V es un espacio vectorial arbitrario.

1.2.1 Un ejemplo interesante

Sea $V_0 \oplus V_1$ un superespacio vectorial tal que $V_0 = V_1 = V$ con $\dim(V) \geq 2$. Consideremos el siguiente conjunto:

$$\widetilde{Q}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(V|V) \right\}.$$

Entonces, $\widetilde{Q}(V)$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V|V)$ tal que $\widetilde{Q}(V)_0 \simeq \widetilde{Q}(V)_1 \simeq \mathrm{End}(V)$.

12 Lema. *Sea $f \in \widetilde{Q}(V)$ y $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ B & A \end{smallmatrix}\right)$ su representación matricial en una base formada por elementos homogéneos. Entonces, hasta múltiplos escalares, tenemos que*

$$\mathrm{str}(f) = \mathrm{str} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \mathrm{tr}(B).$$

Demostración. Sea $\{e_i\}_{i=1}^{2r}$ una base para $V \oplus V$ y definamos las transformaciones lineales $E_{ij} : V \to V$ y $F_{ij} : V \to V$ como $E_{ij}(e_k) = \delta_{jk} e_i,\ i,j,k = 1,\dots,r$, y $F_{ij}(e_k) = \delta_{(j+r)k} e_{i+r},\ i,j,k = 1,\dots,r$. Sean,

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & F_{ij} \\ F_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad i,j = 1,\dots,r.$$

Entonces, $\{A_{ij}, B_{ij}\}$ forman una base para $\widetilde{Q}(V)$ y

1. $[\![A_{ij}, A_{kl}]\!] = \delta_{jk} A_{il} - \delta_{li} A_{kj}$.

2. $[\![A_{ij}, B_{kl}]\!] = \delta_{jk} B_{il} - \delta_{li} B_{kj}$.

3. $[\![B_{ij}, B_{kl}]\!] = \delta_{jk} A_{il} + \delta_{li} A_{kj}$.

Luego, de la definición de supertraza tenemos que:

(i). De (1) y (3) se sigue que $\mathrm{str}(A_{ij}) = 0,\ \forall\, i,j$.

(ii). De (2) tenemos que $\mathrm{str}(B_{ii}) = \mathrm{str}(B_{jj}),\ \forall\, i,j$ y $\mathrm{str}(B_{ij}) = 0,\ i \neq j$.

Así,

$$\mathrm{str}(f) = \mathrm{str}(\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}) = (\mathrm{tr}(B))\alpha.$$

donde $\alpha = \mathrm{str}(B_{ii})$.

$\square$

Observemos que la supertraza en $\widetilde{Q}(V)$ definida como un funcional lineal $\mathrm{str} : \widetilde{Q}(V) \to \mathbb{C}$ que se anula en todos los elementos homogéneos de la forma $[\![x, y]\!]$, no coincide con la restricción de la supertraza definida de la misma forma en $\mathfrak{gl}(V|V)$. Esto significa que hay que hacer una elección cuando $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$; o se toma la supertraza de la definición intrínseca $\mathrm{str} : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ que se anula en $[\![\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\!]$, o se toma la restricción de $\mathrm{str} : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ a $\mathfrak{g}$. Escoger lo primero es más consistente con las peculiaridades de la categoría $\mathbb{Z}_2$-graduada y es la posición que adoptamos en este trabajo. Esto resulta patente en el siguiente ejemplo.

13 Ejemplo. **La superálgebra** $Q(V)$. Sea

$$\begin{aligned} Q(V) &= \{T \in \widetilde{Q}(V) \,|\, \operatorname{str}(T) = 0\}/\langle I\!I \rangle \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \,\middle|\, \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Entonces, $Q(V)$ es simple y $Q(V)_0 \simeq Q(V)_1 \simeq \mathfrak{sl}(V)$. Así $Q(V) \simeq \mathfrak{sl}(V) \oplus \mathfrak{sl}(V)$; supondremos que el primer sumando consiste en elementos homogéneos de grado par y el segundo de elementos homogéneos de grado impar. Si necesitamos distinguir entre ellos escribiremos $Q(V) = (\mathfrak{sl}(V))_0 \oplus (\mathfrak{sl}(V))_1$. La estructura en esta superálgebra está dada por $([\cdot,\cdot]_{\mathfrak{sl}(V)}, \operatorname{ad}, \Gamma)$ donde

$$\Gamma(B, B') = BB' + B'B - \frac{2}{\dim(V)} \operatorname{tr}(BB'), \quad B, B' \in \mathfrak{sl}(V).$$

1.3 Formas bilineales

Sea $V = V_0 \oplus V_1$ un superespacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, entonces $V \times V$, $V \otimes V$ y $\mathbb{F}$ admiten una $\mathbb{Z}_2$ graduación definiendo

1. $(V \times V)_\gamma = \bigoplus_{\alpha+\beta=\gamma} V_\alpha \times V_\beta$.
2. $(V \otimes V)_\gamma = \bigoplus_{\alpha+\beta=\gamma} V_\alpha \otimes V_\beta$.
3. $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}$ y $\mathbb{F}_1 = 0$.

14 Observación. Dado que $V \times V$ admite una $\mathbb{Z}_2$-graduación, entonces $\operatorname{Bil}(V_0 \oplus V_1)$ (*el conjunto de formas bilineales en* $V_0 \oplus V_1$) admite una $\mathbb{Z}_2$-graduación también. Así, tenemos que $\mathcal{B}$ es par (respectivamente impar) si, y sólo si,

$$\mathcal{B}(u, v) = 0, \;\; u \in V_i, \; v \in V_{i+1} \text{ (respectivamente } u, v \in V_i) \;\; i = 0, 1.$$

15 Definición. Una *forma bilineal* $\mathcal{B}$ en $V_0 \oplus V_1$ es *supersimétrica* (respectivamente *superantisimétrica*) si se satisface la siguiente condición en elementos homogéneos

$$\mathcal{B}(u, v) = (-1)^{|u||v|}\mathcal{B}(v, u) \;\; \text{(respectivamente } \; \mathcal{B}(u, v) = -(-1)^{|u||v|}\mathcal{B}(v, u)).$$

16 Definición. Sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal homogénea y no degenerada en V. Definamos

$$(\mathfrak{g}_{\mathcal{B}})_i = \{T \in \mathfrak{gl}(V_0|V_1)_i |\ \mathcal{B}(Tu, v) + (-1)^{i|u|}\mathcal{B}(u, Tv) = 0\}, \quad i = 0, 1.$$

Entonces, el conjunto de elementos *antiautoadjuntos* respecto a $\mathcal{B}$ dado por $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}} = (\mathfrak{g}_{\mathcal{B}})_0 + (\mathfrak{g}_{\mathcal{B}})_1$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V_0|V_1)$.

1.3.1 Formas bilineales pares

Sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal par supersimétrica y no degenerada en $V = V_0 \oplus V_1$. Entonces,

$$\mathcal{B}\Big(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \Big) = g(u_0, v_0) + \omega(u_1, v_1),$$

donde $g : V_0 \times V_0 \to \mathbb{F}$ es una forma bilineal simétrica y $\omega : V_1 \times V_1 \to \mathbb{F}$ es una forma bilineal antisimétrica, ambas no degeneradas. En este caso decimos que $\mathcal{B}$ es una forma *ortosimpléctica.* Notemos que si $\mathcal{B}$ es superantisimétrica entonces g es antisimétrica y ω es simétrica.

Dado que g y ω son no degeneradas podemos definir

$$\begin{array}{rl} g^\flat : & V_0 \to V_0^* \\ & v \mapsto g(v, \cdot) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rl} g^\sharp : & V_0^* \to V_0 \\ & \alpha \mapsto g^\sharp(\alpha) \end{array}$$

donde $g(g^\sharp(\alpha), v) = \alpha(v), \forall\, v \in V_0$. Análogamente definimos $\omega^\flat$ y $\omega^\sharp$. Es fácil ver que

$$(g^\flat)^{-1} = g^\sharp \quad \text{y} \quad (\omega^\flat)^{-1} = \omega^\sharp.$$

17 Ejemplo. **La superálgebra** $C(V)$. Sea $V = V_0 \oplus V_1$ un superespacio vectorial y sean $g : V_0 \times V_0 \to \mathbb{F}$ y $\omega : V_1 \times V_1 \to \mathbb{F}$ formas bilineales no degeneradas simétrica y antisimétrica respectivamente. Sea $\mathcal{B}$ la forma bilineal, par, supersimétrica no degenerada definida por g y ω. Entonces

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{B}} = \mathfrak{osp}(V_0|V_1) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ *B & D \end{pmatrix} \ \middle|\ \begin{array}{l} g^\flat \circ A + A^* \circ g^\flat = 0, \\ \omega^\flat \circ D + D^* \circ \omega^\flat = 0, \\ *B = -\omega^\sharp \circ B \circ g^\flat. \end{array} \right\}.$$

A esta superálgebra la llamamos *ortosimpléctica*. Consideremos el caso particular en que $\dim(V_0) = 2$, entonces $\mathfrak{osp}(V_0|V_1)_0 \simeq \mathbb{F} \oplus \mathfrak{sp}(V_1)$ es un álgebra de Lie reductiva. A esta superálgebra la denotamos por $C(V_1)$. Así, cuando nos refiramos a la superálgebra $C(V)$ estamos pesando en la superálgebra $\mathfrak{osp}(\mathbb{C}^2|V)$.

1.3.2 Formas bilineales impares

Sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal impar y no degenerada en $V = V_0 \oplus V_1$. Entonces,

$$\mathcal{B}\Big(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \Big) = \Phi(u_0, v_1) + \Omega(u_1, v_0),$$

donde $\Phi : V_0 \times V_1 \to \mathbb{F}$ y $\Omega : V_1 \times V_0 \to \mathbb{F}$ son formas bilneales no degeneradas, Entonces, podemos definir los isomorfismos $\Phi^\flat : V_0 \to V_1^*$ y $\Phi^\sharp : V_1^* \to V_0$ como sigue:

$$\begin{aligned} \Phi^\flat : \ & V_0 \to V_1^* \\ & v \mapsto \Phi(v, \cdot) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Phi^\sharp : \ & V_1^* \to V_0 \\ & \alpha \mapsto \Phi^\sharp(\alpha) \end{aligned}$$

donde $\Phi(\Phi^\sharp(\alpha, v)) = \alpha(v)$, $\forall\, v \in V_1$. Análogamente definimos $\Omega^\flat$ y $\Omega^\sharp$. Es fácil ver que

$$(\Phi^\flat)^{-1} = \Phi^\sharp \quad \text{y} \quad (\Phi^\flat)^* = \Omega^\flat.$$

Así, tenemos que $\mathcal{B}$ es supersimétrica (respectivamente superantisimétrica) si, y sólo si, $\Phi(u_0, v_1) = \Omega(v_1, u_0)$, (respectivamente $\Phi(u_0, v_1) = -\Omega(v_1, u_0)$) para todos $u_0 \in V_0$ y $v_1 \in V_1$. Notemos que en estos casos $\mathcal{B}$ queda determinada por la forma bilineal Φ (ú Ω) sin comprometer su estructura.

18 Ejemplo. **La superálgebra** $P(V)$. Sea $V_0 = V_1 = V$ un espacio vectorial y $g : V \times V \to \mathbb{F}$ una estructura ortogonal; es decir, g es una forma bilineal simétrica y no degenerada. Sea $\mathcal{B}$ la forma bilineal impar, supersimétrica y no degenerada definida en $V \oplus V$ para la que $\Phi = g$. Entonces,

$$\mathfrak{g}_\mathcal{B}(V, g) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & *A \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{ll} *A = -(g^\flat)^{-1} \circ A^* \circ g^\flat, & \\ g(Bu, v) = g(u, Bv), & \\ g(Cu, v) = -g(u, Cv), & \quad u, v \in V \end{array} \right\}.$$

Notemos que $(\mathfrak{g}_\mathcal{B}(V, g))_0 \simeq \mathfrak{gl}(V)$ y $(\mathfrak{g}_\mathcal{B}(V, g))_1 \simeq \mathrm{Sym}_g(V) \oplus \mathrm{Skw}_g(V)$ donde $\mathrm{Sym}_g(V)$ son los elementos de $\mathrm{End}(V)$ autoadjuntos respecto a g y $\mathrm{Sym}_g(V)$

los antiautoadjuntos. Luego, la estructura de superálgebra de Lie en $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(V,g)$ está dada como sigue:

$$\begin{aligned}
[\cdot,\cdot] &= [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{gl}(V)}, \\
\\
\rho(A)(B) &= A\circ B - B\circ *A, \\
\rho(A)(C) &= *A\circ C - C\circ A, \\
\\
\Gamma(B+C,B'+C') &= B\circ C' + B'\circ C.
\end{aligned}$$

para todos $A\in\mathfrak{gl}(V)$, $B,B'\in\mathrm{Sym}_g(V)$ y $C,C'\in\mathrm{Skw}_g(V)$. Si escogemos una base para V en la que g tenga por matriz asociada a la matriz identidad, entonces la representación matricial de los elementos en $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(V,g)$ es como sigue:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & *A\end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} B &= B^t, \\ C &= -C^t, \\ *A &= -A^t. \end{aligned}$$

En este contexto, definimos

$$P_g(V) = \{T\in\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(V,g) \,|\, \mathrm{str}(T)=0\}.$$

Entonces, $P_g(V)$ es una superálgebra de Lie simple tal que $P_g(V)_0\simeq\mathfrak{sl}(V)$ y $P_g(V)_1\simeq\mathrm{Sym}_g(V)\oplus\mathrm{Skw}_g(V)$. Si en esta construcción consideramos a $\mathcal{B}$ como superantisimétrica, entonces

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & *A\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{ll} *A = -(g^\flat)^{-1}\circ A^*\circ g^\flat, & \\ g(Bu,v) = -g(u,Bv), & \\ g(Cu,v) = g(u,Cv), & u,v\in V \end{array} \right\}.$$

Observemos que la simetría de $\mathcal{B}$ no es relevante en el sentido de que obtenemos superálgebras isomorfas al considerar $\mathcal{B}$ supersimétrica o superantisimétrica. Sobre el campo $\mathbb{C}$, toda forma bilineal, simétrica y no degenerada $g: V\times V\to\mathbb{C}$ es equivalente al producto escalar usual $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\mathbb{C}^n\simeq V$ y en consecuencia escribiremos

$$\begin{aligned} P(V) &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^*\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \mathrm{tr}(A) &=& 0, & \\ \langle Bu,v\rangle &=& \langle u,Bv\rangle, & \\ \langle Cu,v\rangle &=& -\langle u,Cv\rangle, & u,v\in V \end{array} \right\} \\ &= \mathfrak{sl}(V)\oplus\mathrm{Sym}(V)\oplus\mathrm{Skw}(V). \end{aligned}$$

En lo sucesivo, ya no haremos referencia a la representación matricial de los elementos de $P(V)$ y escribiremos solamente $P(V)=\mathfrak{sl}(V)\oplus\mathrm{Sym}(V)\oplus\mathrm{Skw}(V)$.

1.4 Derivaciones de una superálgebra de Lie

19 Definición. Sean $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie y $X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_0|\mathfrak{g}_1)$. Decimos que X es una derivación de grado $i,\ i = 0, 1$ si $X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_0|\mathfrak{g}_1)_i$ y para elementos homogéneos $x, y \in \mathfrak{g}$ se satisface la siguiente condición:

$$X[\![x, y]\!] = [\![Xx, y]\!] + (-1)^{i|x|}[\![x, Xy]\!].$$

Denotamos por $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})_i$ al conjunto de derivaciones de grado $i,\ i = 0, 1$. Si restringimos el supercorchete de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_0|\mathfrak{g}_1)$ a $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})_0 \oplus \mathrm{Der}(\mathfrak{g})_1$ se demuestra fácilmente que $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ es una subálgebra llamada la superálgebra de derivaciones de $\mathfrak{g}$. Decimos que X es una derivación interior de grado $i,\ i = 0, 1$ si existe $x \in \mathfrak{g}_i$ tal que $X = \mathrm{ad}(x)$ y denotamos por $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})_i$ al conjunto de derivaciones interiores homogéneas de $\mathfrak{g}$ de grado $i,\ i = 0, 1$ donde $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})_0 \oplus \mathrm{Int}(\mathfrak{g})_1$.

20 Ejemplo. Sea $P(V)$ la superálgebra definida anteriormente y sea $\epsilon : P(V) \to P(V)$ una transformación lineal definida como sigue:

$$\begin{aligned} \epsilon(A) &= 0, &\quad A &\in \mathfrak{sl}(V); \\ \epsilon(B) &= B, &\quad B &\in \mathrm{Sym}(V); \\ \epsilon(C) &= -C, &\quad C &\in \mathrm{Skw}(V). \end{aligned}$$

Entonces, ϵ es una derivación de grado par. En efecto, ya que $\mathrm{Sym}(V)$ y $\mathrm{Skw}(V)$ son $\mathfrak{sl}(V)$-submódulos, y de la definición de ϵ, basta notar lo siguiente:

1. $\epsilon[A, B] = [A, B] = [A, \epsilon(B)], \quad A \in \mathfrak{sl}(V)$ y $B \in \mathrm{Sym}(V)$.
2. $\epsilon[A, C] = -[A, C] = [A, \epsilon(C)], \quad A \in \mathfrak{sl}(V)$ y $C \in \mathrm{Skw}(V)$.
3. $\epsilon[B, C] = 0 = [\epsilon(B), C] + [B, \epsilon(C)], \quad B \in \mathrm{Sym}(V)$ y $C \in \mathrm{Skw}(V)$.

21 Ejemplo. Sea $Q(V)$ la superálgebra definida anteriormente y $D : Q(V) \to Q(V)$ una transformación lineal impar tal que $D|_{Q(v)_0} = 0$ y $D|_{Q(V)_1} : Q(V)_1 \to Q(V)_0$ es tal que $D(B) = B$, para todo $B \in Q(V)_1$. Notemos que D cambia la paridad de los elementos impares actuando como la identidad en el espacio vectorial subyacente. Más aún, D es una derivación impar. En efecto, basta notar lo siguiente:

1. $D[\![A, B]\!] = [A, B]_{\mathfrak{sl}_n} = [\![A, D(B)]\!]$, $A \in Q(V)_0$ y $B \in Q(V)_1$.

2. $D[\![B,B']\!] = 0 = [B,B']_{\mathfrak{sl}_n} + [B',B]_{\mathfrak{sl}_n} = [\![D(B),B']\!] - [\![B,D(B')]\!]$, $B,B' \in Q(V)_1 = \mathfrak{sl}(V)$.

Observemos que ϵ y D no son derivaciones interiores de las superálgebras simples $P(V)$ y $Q(V)$ respectivamente. Ésta es una diferencia importante entre la categoría de álgebras de Lie y la de superálgebras de Lie, ya que todas las derivaciones de un álgebra de Lie simple son interiores.

1.4.1 Extensión de superálgebras de Lie mediante derivaciones

La demostración de la siguiente Proposición es directa.

22 Proposición. *Sea $\mathfrak{g}$ una superálgebra de Lie y $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ una subálgebra. Consideremos ahora el superespacio vectorial $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Entonces, $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ admite una estructura de superálgebra de Lie definiendo el supercorchete como sigue:*

1. $[\![\cdot,\cdot]\!]|_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} = [\![\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}}$.
2. $[\![\cdot,\cdot]\!]|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}} = [\![\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{h}}$.
3. $[\![D,x]\!] = D(x), \ \ x \in \mathfrak{g}, \ \ D \in \mathfrak{h}$.

En tal caso decimos que extendemos a $\mathfrak{g}$ mediante la subálgebra de derivaciones $\mathfrak{h}$.

23 Observación. Notemos, en la construcción anterior, que si $\mathfrak{h}$ esta generada por una derivación impar, entonces ésta debe ser nilpotente de grado dos.

Los ejemplos que veremos a continuación son relevantes y los usaremos a lo largo del trabajo, por lo que hacemos explícita su estructura.

24 Ejemplo. **La superálgebra** $P(V) \oplus \langle\epsilon\rangle$. Si extendemos a la superálgebra $P(V)$ mediante la derivación ϵ, definida en el Ejemplo 20, la estructura en $P(V) \oplus \langle\epsilon\rangle$ está definida explícitamente como sigue:

$$\begin{aligned}
[\cdot,\cdot] &= [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{gl}(V)}, \\
\\
\rho(A)(B) &= A \circ B + B \circ A^*, \\
\rho(A)(C) &= -A^* \circ C - C \circ A, \\
\rho(\epsilon)(B) &= B, \\
\rho(\epsilon)(C) &= -C, \\
\\
\Gamma(B+C, B'+C') &= B \circ C' + B' \circ C,
\end{aligned}$$

para todos $A \in \mathfrak{sl}(V)$, $B, B' \in \mathrm{Sym}(V)$ y $C, C' \in \mathrm{Skw}(V)$.

25 Ejemplo. **La superálgebra** $Q(V) \oplus \langle D \rangle$. Sean $Q(V)$ y $D \in \mathrm{Der}(Q(V))_1$ definidas como antes, entonces la estructura en la extensión de $Q(V)$ mediante D está dada como sigue:

$$\begin{aligned}
[\cdot,\cdot] &= [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{sl}(V)}, \\
\\
\rho(A)(B) &= \mathrm{ad}(A)(B), \\
\rho(A)(D) &= 0, \\
\\
\Gamma(B, B') &= B \circ B' + B' \circ B - \tfrac{2}{\dim(V)} \mathrm{tr}(BB'), \\
\Gamma(B, D) &= D(B) = B.
\end{aligned}$$

1.5 Superálgebras asociativas superconmutativas

26 Observación. Sea V un espacio vectorial. El álgebra de Grassmann o álgebra exterior asociada a V, $\Lambda(V) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda(V)^k$, admite una $\mathbb{Z}_2$ graduación. La manera de hacerlo es escribiendo $\Lambda(V) = \Lambda(V)_0 \oplus \Lambda(V)_1$ donde

$$\Lambda(V)_0 = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda^{2k} V \quad \text{y} \quad \Lambda(V)_1 = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda^{2k+1} V.$$

Esta $\mathbb{Z}_2$-graduación permite considerarla como una superálgebra asociativa superconmutativa en el sentido de la siguiente definición.

27 Definición. Una superálgebra asociativa A es *superconmutativa* si

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba,$$

para todos $a, b \in A$ elementos homogéneos.

Una derivación de grado μ, $\mu = 0, 1$, de una superálgebra asociativa superconmutativa A, es una transformación lineal $X : A \to A$ tal que $X(A_\gamma) \subset A_{\gamma+\mu}$, $\gamma = 0, 1$ y

$$X(ab) = X(a)b + (-1)^{\mu|a|} a X(b),$$

para todos $a, b \in A$ elementos homogéneos. Es fácil ver que si restringimos el superconmutador de $\mathrm{End}(A_0|A_1)$ a $\mathrm{Der}(A) = \mathrm{Der}(A)_0 \oplus \mathrm{Der}(A)_1$ donde $\mathrm{Der}(A)_\mu$ denota el conjunto de derivaciones de grado μ, $\mu = 0, 1$, resulta que $\mathrm{Der}(A)$ es una superálgebra de Lie.

Notemos que al ser $\Lambda(V)$ una superálgebra asociativa superconmutativa, entonces admite derivaciones $\mathbb{Z}_2$-graduadas donde

$$\mathrm{Der}(\Lambda(V))_i = \{X \in \mathrm{End}(\Lambda(V)) | X(\alpha \wedge \beta) = X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{i|\alpha|}\alpha \wedge X(\beta)\},$$

$i = 0, 1$ y para todo α homogéneo.

1.6 Producto tensorial de una superálgebra de Lie y una asociativa

28 Definición. Sean $\mathfrak{g}$ una superálgebra de Lie y A una superálgebra asociativa superconmutativa. Entonces, $\mathfrak{g} \otimes A$ tiene estructura de superálgebra de Lie definiendo el corchete en elementos homogéneos de la siguiente manera:

$$[\![x \otimes a, y \otimes b]\!] = (-1)^{|a||y|}[\![x, y]\!] \otimes ab, \qquad x, y \in \mathfrak{g}, \;\; a, b \in A.$$

29 Ejemplo. **La superálgebra $\mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C})$.** Notemos que el espacio vectorial subyacente a $\Lambda(\mathbb{C})$ es $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, entonces para distinguir entre la primera y segunda copia de $\mathbb{C}$, usaremos la siguiente notación. En la primera usaremos como generador a 1 y en la segunda a e, donde $e^2 = 0$. Así, el producto en $\Lambda(\mathbb{C})$ está definido como sigue:

$$(a + be)(c + de) = ac + (ad + bc)e.$$

Ahora sea V un espacio vectorial y consideremos el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(V)$ como una superálgebra de Lie con la $\mathbb{Z}_2$ graduación trivial. De la Definición 28 tenemos que $\mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C})$ es una superálgebra de Lie tal que

$$\mathfrak{sl}(V) \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}e) \simeq \mathfrak{sl}(V) \oplus \mathfrak{sl}(V)$$

y su estructura está dada mediante $([\cdot, \cdot]_{\mathfrak{sl}(V)}, \text{ ad}, \; \Gamma = 0)$. En lo sucesivo vamos a escribir a los elementos de $\mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C})$ en la forma $A + Be$ de manera que

$$[\![A + Be, A' + B'e]\!] = [A, A']_{\mathfrak{sl}(V)} + ([A, B']_{\mathfrak{sl}(V)} + [B, A']_{\mathfrak{sl}(V)})e.$$

30 Lema. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra o superálgebra de Lie y $\delta \in \mathrm{Der}(\wedge(V))$ una derivación $\mathbb{Z}_2$-homogénea de grado $|\delta|$. Entonces, $\partial = \mathrm{id} \otimes \delta : \mathfrak{g} \otimes \wedge(V) \to \mathfrak{g} \otimes \wedge(V)$ es una derivación de la superálgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes \wedge(V)$ $\mathbb{Z}_2$-homogénea de grado $|\delta|$.*

Demostración. La demostración es directa y sólo hace falta tener en cuenta que bajo las hipótesis expresadas

$$\begin{aligned} \partial[x \otimes \alpha,\, y \otimes \beta] &= (-1)^{(|x|+|y|)|\delta|+|\alpha||y|}([x,y] \otimes \delta(\alpha)\beta \\ &\quad + (-1)^{|\alpha||\delta|}[x,y] \otimes \alpha\delta(\beta)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\partial(x \otimes \alpha), y \otimes \beta] &= (-1)^{|x||\delta|}[x \otimes \delta(\alpha), y \otimes \beta] \\ &= (-1)^{|x||\delta|+(|\delta|+|\alpha|)|y|}[x,y] \otimes \delta(\alpha)\beta, \end{aligned}$$

$$(-1)^{(|x|+|\alpha|)|\delta|}[x \otimes \alpha, \partial(y \otimes \beta)] = (-1)^{(|x|+|\alpha|)|\delta|+|y||\delta|+|\alpha||y|}[x,y] \otimes \alpha\delta(\beta).$$

Así,

$$\partial[x \otimes \alpha,\, y \otimes \beta] = [\partial(x \otimes \alpha), y \otimes \beta] + (-1)^{(|x|+|\alpha|)|\delta|}[x \otimes \alpha, \partial(y \otimes \beta)].$$

□

31 Ejemplo. **La superálgebra de derivaciones de $\Lambda(\mathbb{C})$.** Sean $d_0, d_1 \in \mathrm{End}(\Lambda(\mathbb{C}))$ tales que

$$\begin{aligned} d_0(1) &= 0, \qquad d_0(e) = e. \\ d_1(1) &= 0, \qquad d_1(e) = 1. \end{aligned}$$

Entonces, $\mathrm{Der}(\Lambda(\mathbb{C})) = \mathrm{Span}\{d_0, d_1\}$ donde $|d_0| = 0$ y $|d_1| = 1$ y el corchete en $\mathrm{Der}(\Lambda(1))$ satisface lo siguiente:

$$[\![d_0, d_0]\!] = 0, \quad [\![d_0, d_1]\!] = -d_1 \quad \text{y} \quad [\![d_1, d_1]\!] = 0. \tag{1.5}$$

Sea $\mathrm{id} : \mathfrak{sl}(V) \to \mathfrak{sl}(V)$ la trasformación identidad. Entonces, por el Lema 30 tenemos que $\mathrm{id} \otimes d_j \in \mathrm{Der}(\mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(1))_j$, $j = 0, 1$ donde

$$\mathrm{id} \otimes d_j(A + Be) = Ad_j(1) + Bd_j(e), \quad A + Be \in \mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(V).$$

32 Ejemplo. **La superálgebra** $\mathfrak{sl}(V)\otimes\Lambda(\mathbb{C})\oplus\langle \mathrm{id}\otimes d_0, \mathrm{id}\otimes d_1\rangle$. Consideremos ahora la extensión de la superálgebra $\mathfrak{sl}(V)\otimes\Lambda(\mathbb{C})$ mediente la subálgebra de derivaciones $\langle \mathrm{id}\otimes d_0, \mathrm{id}\otimes d_1\rangle$ cuya estructura está definida como sigue:

$$\begin{aligned}
[\cdot,\cdot] &= [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{sl}(V)}, \\
\\
\rho(A)Be &= \mathrm{ad}(A)(B)e, \\
\rho(\mathrm{id}\otimes d_0)Be &= Be, \\
\rho(\mathrm{id}\otimes d_0)\,\mathrm{id}\otimes d_1 &= -\,\mathrm{id}\otimes d_1, \\
\\
\Gamma(B\otimes e, \mathrm{id}\otimes d_1) &= B,
\end{aligned}$$

para todo $A\in\mathfrak{sl}(V)$ y $Be\in\mathfrak{sl}(V)\otimes\mathbb{C}e$. Notemos que el espacio vectorial subyacente a $\mathfrak{sl}(V)\otimes\Lambda(\mathbb{C})\oplus\langle \mathrm{id}\otimes d_0, id\otimes d_1\rangle$ es $\mathfrak{gl}(V)\oplus\mathfrak{gl}(V)$, haciendo la identificación $\mathrm{id}\otimes d_i \simeq I\!I \in \mathfrak{gl}(V)$, $i=0,1$.

33 Ejemplo. **La superálgebra** $\mathfrak{sl}(V)\otimes\Lambda(\mathbb{C})\oplus\langle \mathrm{id}\otimes d_1\rangle$. Análogo al caso anterior, el espacio vectorial subyacente a la superálgebra $\mathfrak{sl}(V)\otimes\Lambda(\mathbb{C})\oplus\langle \mathrm{id}\otimes d_1\rangle$ es $\mathfrak{sl}(V)\oplus\mathfrak{gl}(V)$ y la estructura de superálgebra de Lie es $([\cdot,\cdot]_{\mathfrak{sl}(V)}, \widetilde{\mathrm{ad}}, \Gamma)$ donde:

$$\widetilde{\mathrm{ad}}(A)|_{\mathfrak{sl}(V)\otimes\mathbb{C}} = \mathrm{ad}(A) \quad y \quad \widetilde{\mathrm{ad}}(A)|_{\langle \mathrm{id}\otimes d_1\rangle} = 0, \quad A\in\mathfrak{sl}(V),$$

$$\Gamma(Be, \mathrm{id}\otimes d_1) = B, \quad Be\in\mathfrak{sl}(V)\otimes\mathbb{C}e$$

y

$$\Gamma|_{\mathfrak{sl}(V)\otimes\mathbb{C}e\times\mathfrak{sl}(V)\otimes\mathbb{C}e} = \Gamma|_{\langle \mathrm{id}\otimes d_1\rangle\times\langle \mathrm{id}\otimes d_1\rangle} = 0.$$

34 Observación. Las superálgebras $\mathfrak{sl}(V)\otimes\Lambda(\mathbb{C})\oplus\langle \mathrm{id}\otimes d_1\rangle$ y $\mathfrak{sl}(V)\otimes\Lambda(\mathbb{C})\oplus\langle \mathrm{id}\otimes d_0, \mathrm{id}\otimes d_1\rangle$ no son simples ya que ambas tienen como ideal a $\mathfrak{sl}(V)\otimes\Lambda(\mathbb{C})$. Más adelante veremos que ambas son semisimples.

Capítulo 2

Superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ tales que $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie simple

En este capítulo clasificaremos, hasta isomorfismo, las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ tales que $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie simple y $\mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo de dimensión finita. Como caso particular, clasificaremos aquellas para las cuales $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(V)$, siendo V un espacio vectorial complejo de dimensión al menos 3. El problema de clasificar superálgebras de Lie consiste en encontrar las clases de isomorfía. Para analizar la estructura de dichas superálgebras seguiremos la técnica usada en [2] y los resultados dados en [7] acerca de las superálgebras de Lie clásicas.

2.1 Ideales minimales de una superálgebra de Lie semisimple

35 Definición. Un ideal $0 \neq I \subset \mathfrak{g}$ es *minimal* si para todo ideal J de $\mathfrak{g}$ tal que $0 \subset J \subset I$ tenemos que $J = 0$ ó $J = I$.

36 Observación. Sean $I, J \subset \mathfrak{g}$ ideales minimales tales que $I \cap J \neq 0$, entonces $I = J$. En efecto, $I \cap J$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ tal que $I \cap J \subset I$ e $I \cap J \subset J$. De aquí se sigue que $I = J$.

37 Lema. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie semisimple tal que $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie simple, entonces $\mathfrak{g}$ tiene un único ideal minimal I e $I_0 = \mathfrak{g}_0$.*

Demostración. La existencia de ideales minimales se sigue de que $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita. Sea $I = I_0 \oplus I_1$ un ideal minimal de $\mathfrak{g}$, entonces I_0 es ideal de $\mathfrak{g}_0$. Notemos que $I_0 \neq 0$, de lo contrario tendríamos que $[I, I] = 0$ e I sería un ideal soluble de $\mathfrak{g}$. Así, ya que $\mathfrak{g}_0$ es simple tenemos que $I_0 = \mathfrak{g}_0$. Sean I, J ideales minimales de $\mathfrak{g}$, entonces $I_0 = J_0 = \mathfrak{g}_0$. Luego, de la Observación 36 se sigue que $I = J$. □

A continuación veremos una serie de resultados que nos llevan a dar una caracterización de los ideales minimales de una superálgebra de Lie semisimple. Estos resultados están dados en términos de la siguiente definición.

38 Definición. Sea $\mathfrak{g}$ una superálgebra de Lie y $L \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Entonces, $\mathfrak{g}$ es *L-simple* si no contiene ideales no triviales invariantes por L. Decimos también que $\mathfrak{g}$ es *diferenciablemente simple* si es $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$-simple y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$.

39 Observación. Notemos que un ideal I no abeliano de una superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semisimple es minimal si, y sólo si, I es $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})-$simple. En efecto, supongamos que I es minimal. Sea J ideal de I tal que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})(J) \subset J$, entonces J es un ideal de $\mathfrak{g}$. Luego, ya que I es minimal tenemos que $J = 0$ ó $J = I$. Lo que muestra que I es $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})-$simple.

Supongamos ahora que I es $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})-$simple. Sea J ideal de $\mathfrak{g}$ tal que $J \subset I$, entonces J es un ideal $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})-$simple de I. Así, $J = 0$ ó $J = I$. Lo que muestra que I es minimal. Más aún, I es diferenciablemente simple, ya que si J es un ideal de I tal que $d(J) \subset J$, $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, tenemos que en particular $\mathrm{ad}(g)(J) \subset J$ y al ser I $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})-$simple $J = 0$ ó $J = I$.

40 Proposición. [1] *Sea $\mathfrak{g}$ una superálgebra de Lie diferenciablemente simple de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado y de caracteristica 0, entonces $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{a} \otimes \Lambda(U)$ donde $\mathfrak{a}$ es una superálgebra de Lie simple y U es un espacio vectorial de dimensión finita. Ver*

Como consecuencia inmediata de éstos resultados se obtiene el siguiente Corolario.

41 Corolario. *Sean $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$ y tal que $\mathfrak{g}_0$ es simple e I su ideal minimal. Entonces $I \simeq \mathfrak{a} \otimes \Lambda(U)$ donde $\mathfrak{a}$ es un superálgebra de Lie simple tal que $\mathfrak{a}_0 \simeq \mathfrak{g}_0$ y $U = 0$ ó $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_0$ y $U = \mathbb{C}$.*

Demostración. Sea I el ideal minimal de $\mathfrak{g}$, entonces por la Proposición 40 tenemos que $I \simeq \mathfrak{a} \otimes \Lambda(U)$ con $\mathfrak{a}$ una superálgebra de Lie simple y U un espacio vectorial de dimensión finita. Notemos que $\Lambda(U) = \Lambda(U)_0 \oplus \Lambda(U)_1$ lo podemos descomponer como

$$\mathbb{C} \oplus N \oplus \Lambda(U)_1 \quad \text{donde} \quad N = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Lambda^{2k} U.$$

Entonces, $N \oplus \Lambda(U)_1$ es un ideal nilpotente de $\Lambda(U)$. Luego, $\mathfrak{a}_0 \otimes N \oplus \mathfrak{a}_1 \otimes \Lambda(U)_1$ es un ideal nilpotente de $\mathfrak{a}_0 \otimes \mathbb{C} \oplus \mathfrak{a}_0 \otimes N \oplus \mathfrak{a}_1 \otimes \Lambda(U)_1 \simeq \mathfrak{g}_0$. Así, $\mathfrak{a}_0 \otimes N \oplus \mathfrak{a}_1 \otimes \Lambda(U)_1 = 0$. De aquí que $\mathfrak{a}_0 \simeq \mathfrak{g}_0$ y $U = 0$ ó $U = \mathbb{C}$. Para el caso $U = \mathbb{C}$ se cumple además, $\mathfrak{a}_1 = 0$. $\square$

42 Observación. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie semisimple tal que $\mathfrak{g}_0$ es simple, e I su ideal minimal. Entonces $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{Der}(I)$ mediante el monomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathfrak{g} &\to \mathrm{Der}(I) \\ x &\mapsto \mathrm{ad}(x)|_I \end{aligned}$$

En efecto, de la identidad de Jacobi tenemos que ϕ es un morfismo y basta verificar que es inyectivo. Notemos que $\ker(\phi)_0 \subset Z(I_0) = 0$. Entonces, $\ker(\phi)$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$. Por lo tanto $\ker(\phi) = 0$. Lo que muestra que ϕ es inyectivo.

Nuestro interes de estudiar los ideales minimales de una superálgebra de Lie semisimple radica en el siguiente resultado.

43 Teorema. [7] *Sean $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ superálgebras de Lie simples de dimensión finita y sean $U_1, \ldots, U_r$ espacios vectoriales de dimensión finita. Consideremos $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i=1}^r \mathfrak{m}_i \otimes \wedge(U_i)$. Entonces,*

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} = \mathrm{Int}(\mathfrak{m}) &= \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Int}(\mathfrak{m}_i) \otimes \wedge(U_i) \\ \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{m}) &= \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathrm{Der}(\mathfrak{m}_i) \otimes \wedge(U_i) \oplus \mathrm{id} \otimes \mathrm{Der} \wedge(U_i)). \end{aligned}$$

Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de $\mathrm{Der}(\mathfrak{m})$ *tal que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_i$ la componente de los elememtos de $\mathfrak{g}$ en* $\mathrm{id} \otimes \mathrm{Der}(\Lambda(U_i))$, $i = 1, \ldots, n$. *Entonces, $\mathfrak{g}$ es semisimple si, y sólo si, $\wedge(U_i)$ es $\mathfrak{g}_i-$simple. Además, cualquier superálgebra de Lie semisimple se puede obtener de esta manera.*

2.2 Clasificación de las superálgebras $\mathfrak{g}$ tales que $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie simple

44 Teorema. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie tal que $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie simple y $\mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo de dimensión finita. Entonces, se cumple una de las siguientes afirmaciones.*

1. *$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es un producto semidirecto del álgebra de Lie simple $\mathfrak{g}_0$ y del $\mathfrak{g}_0$-módulo $\mathfrak{g}_1$ el cual tiene producto trivial. Es decir, $\Gamma = 0$.*

2. *$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ es una suma directa de los ideales $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{h}$, donde $\mathfrak{s}$ es una superálgebra de Lie semisimple tal que $\mathfrak{s}_0 \simeq \mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{h}$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo trivial con producto trivial.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie como en la hipótesis y $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$ su radical. Entonces, $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})_0 = 0$ ya que $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})_0 \subset \mathfrak{g}_0$ es un ideal soluble. Así, $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{g}_0$-submódulo. Dado que $\mathfrak{g}_0$ es simple tenemos que existe un $\mathfrak{g}_0$-submódulo W tal que $\mathfrak{g}_1 \simeq W \oplus \operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$. Luego, $\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g}_0 \oplus W$ es una superálgebra de Lie semisimple.

Afirmación: Si $W \neq 0$, entonces $\mathfrak{g}_0 \oplus W$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$ siendo $Z(\mathfrak{g})$ el centro de $\mathfrak{g}$. En efecto, observemos que $[\![W, W]\!] \neq 0$ porque de lo contrario $[\![W, W]\!] \oplus W$ sería un ideal soluble de $\mathfrak{g}_0 \oplus W$. Así, ya que $\mathfrak{g}_0$ es simple y $[\![W, W]\!] \neq 0$ tenemos que $[\![W, W]\!] = \mathfrak{g}_0$. Luego, basta notar que

$$[\![\mathfrak{g}_0, \operatorname{Rad}(\mathfrak{g})]\!] = [\![\, [\![W, W]\!], \operatorname{Rad}(\mathfrak{g})]\!] \subset [\![\, [\![W, \operatorname{Rad}(\mathfrak{g})]\!], W]\!] = 0.$$

Así, $\mathfrak{g}_0 \oplus W$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) \subset Z(\mathfrak{g})$. Por lo tanto $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$. De aquí tenemos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus W \oplus \operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$ es la suma directa de los ideales $\mathfrak{g}_0 \oplus W$ y $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$ donde $\mathfrak{g}_0 \oplus W$ es una superálgebra de Lie semisimple cuya parte par es un álgebra de Lie simple y $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo trivial que tiene producto trivial.

Por otro lado, si $W = 0$, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$ es un producto semidirecto de la subálgebra $\mathfrak{g}_0$ y el $\mathfrak{g}_0$-módulo $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$ el cual tiene producto trivial. □

45 Observación. Es importante notar que una superálgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ como en el primer caso del Teorema 44 y una del segundo caso $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ no pueden ser isomorfas. En la primera, $\Gamma = 0$ y en la segunda $\Gamma \neq 0$. Ésta es una diferencia determinante.

46 Proposición. *Sean* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ *y* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'_0 \oplus \mathfrak{g}'_1$ *superálgebras de Lie tales que* $\Gamma = \Gamma' = 0$*. Entonces, las superálgebras de Lie* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{g}'$ *son isomorfas si, y sólo si,* $\mathfrak{g}_0$ *y* $\mathfrak{g}'_0$ *son álgebras de Lie isomorfas y* $\mathfrak{g}_1$ *y* $\mathfrak{g}'_1$ *son* $\mathfrak{g}_0$*-módulos isomorfos.*

Demostración. Sean $T : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}'_0$ un isomorfismo de álgebras de Lie y $S : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}'_1$ un isomorfismo de $\mathfrak{g}_0$-módulos. Entonces, ya que $\Gamma = \Gamma' = 0$ tenemos que

$$\Gamma'(u, v) = T^{-1}\Gamma(S^{-1}u, S^{-1}v), \quad u, v \in \mathfrak{g}'_!.$$

Luego, del Lema 6 se sigue lo deseado. □

47 Corolario. *Dada una clase de isomorfía de álgebras de Lie simples* $\mathfrak{g}_0$ *y dada una clase de isomorfía* $\mathfrak{g}_1$ *de* $\mathfrak{g}_0$*-módulos, existe, hasta isomorfismo, una única estructura de superálgebra de Lie en* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ *y es tal que* $\Gamma = 0$.

48 Proposición. *Sean* $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ *y* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{s}' \oplus \mathfrak{h}'$ *dos superálgebras de Lie tales que* $\Gamma \neq 0$ *y* $\Gamma' \neq 0$ *como en (2) del Teorema 44. Entonces,* $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'$ *si, y sólo si,* $\mathfrak{s} \simeq \mathfrak{s}'$ *y* $\dim(\mathfrak{h}) = \dim(\mathfrak{h}')$.

Demostración. Sea $\Phi = T \oplus S : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un isomorfismo de superálgebras de Lie. Entonces, $S(\mathfrak{s}_1)$ y $S(\mathfrak{h})$ son submódulos de $\mathfrak{g}'_1$. Luego, ya que $\mathfrak{h}$ es un módulo trivial, $S(\mathfrak{h})$ también lo es. Asi, $S(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$ y $S(\mathfrak{s}_1) = \mathfrak{s}'_1$. De aquí tenemos que $\Phi' = T \oplus S|_{\mathfrak{s}_1} : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}'$ es un isomorfismo de superálgebras de Lie y claramente $\dim(\mathfrak{h}) = \dim(\mathfrak{h}')$.

Por otra parte, sean $\Phi = T \oplus S' : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}'$ un isomorfismo de superálgebras de Lie y $R : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ una transformación lineal invertible. Dado que $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}'$ son $\mathfrak{g}_0$-módulos triviales tenemos que $S = S' \oplus R : \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h} \to \mathfrak{s}' \oplus \mathfrak{h}'$ es un isomorfismo de módulos y ya que $\Gamma|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{s}_1} = 0$, tenemos que

$$\Gamma'(u, v) = T(\Gamma(S^{-1}u, S^{-1}v)), \quad u, v \in \mathfrak{s}' \oplus \mathfrak{h}'.$$

Luego, del Lema 6 se sigue el resultado. □

49 Corolario. *Dada una clase de isomorfía de superálgebras de Lie semisimples* $\mathfrak{s}$ *siendo* $\mathfrak{s}_0 \neq \mathfrak{s}$ *un álgebra de Lie simple, se tiene que, para cada* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, existe hasta isomorfismo una superálgebra de Lie* $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ *donde* $\mathfrak{h}$ *es un* $\mathfrak{s}_0$*-módulo trivial con producto trivial y* $\dim(\mathfrak{h}) = k$.

2.3 Ejemplo: las superálgebras de Lie tales que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(V)$ con $\dim(V) \geq 3$

En esta sección V denota un espacio vectorial complejo de dimensión mayor o igual a 3. Procediendo como en la sección anterior daremos la clasificación de las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ con $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(V)$ y haremos explícitas las clases de isomorfía antes mencionadas en la sección anterior. Para clasificar las superálgebras de Lie en las que $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie simple básicamente seguimos el siguiente método:

1. Determinamos la estructura de los ideales minimales de $\mathfrak{g}$.

2. Usamos el Teorema 43 para encontrar las superálgebras de Lie semisimples $\mathfrak{g}$.

3. Usamos el hecho de que $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie simple para encontrar un $\mathfrak{g}_0$-módulo complementario a $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ (De este paso obtuvimos el Teorema 44).

4. Determinamos cuándo dos superálgebras de Lie así obtenidas, son isomorfas.

5. Contamos las clases de isomorfía.

Seguiremos este método para encontrar explícitamente las clases de isomorfía de las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V) \oplus \mathfrak{g}_1$.

50 Lema. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V) \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie semisimple e I su ideal minimal. Entonces, I es isomorfo a una de las siguientes superálgebras de Lie*

$$I \simeq \begin{cases} \mathfrak{sl}(V), \\ P(V), \\ Q(V), \\ \mathfrak{sl}(V) \otimes \wedge(\mathbb{C}). \end{cases}$$

Demostración. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V) \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie como en la hipótesis. Entonces, si $\mathfrak{g}$ es simple, de los resultados dados en [7] tenemos que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de las siguientes superálgebras de Lie:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{sl}(V), & \text{si} & \mathfrak{g}_1 = 0, \\ P(V), & \text{si} & \dim(\mathfrak{g}_1) = \dim(V)^2, \\ Q(V), & \text{si} & \dim(\mathfrak{g}_1) = \dim(V)^2 - 1. \end{array}$$

Luego, del Corolario 41 se sigue inmediatamente el resultado. □

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V) \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie semisimple e I su ideal minimal, entonces de la Observación 42 tenemos que $I \subset \mathfrak{g} \subset \mathrm{Der}(I)$ por lo que usaremos el Teorema 43 para encontrar las superálgebras de Lie semisimples. Antes hacemos referencia a un resultado acerca de las derivaciones de dichos ideales minimales, ver [7].

51 Lema. *Usando la notación de los Ejemplos 20, 21 y 31 se tiene que:*

1. $\mathrm{Der}(P(V)) = \mathrm{Int}(P(V)) \oplus \langle \epsilon \rangle$,

2. $\mathrm{Der}(Q(V)) = \mathrm{Int}(Q(V)) \oplus \langle D \rangle$,

3. $\mathrm{Der}(\mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C})) = \mathrm{Int}(\mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C})) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle$. *Más aún,* $\mathrm{Der}(\mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C})) = \mathrm{Int}(\mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C})) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle$, *para cualquier álgebra de Lie simple* $\mathfrak{m}$.

52 Proposición. *Sea* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V) \oplus \mathfrak{g}_1$ *una superálgebra de Lie semisimple, entonces* $\mathfrak{g}$ *es isomorfa a una de las siguientes superálgebras de Lie.*

$$\mathfrak{g} \simeq \begin{cases} \mathfrak{sl}(V), \\ P(V), \\ Q(V), \\ Q(V) \oplus \langle D \rangle, \\ \mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle. \end{cases}$$

Demostración. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V) \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie semisimple e I su ideal minimal. Procedemos a analizar cada una de las posibilidades para los ideales minimales dados en el Lema 50.

1. **Caso $I = \mathfrak{sl}(V)$.** Notemos que $\mathrm{Der}(\mathfrak{sl}(V)) = \mathfrak{sl}(V)$. Entonces tenemos que $\mathfrak{sl}(V) \subset \mathfrak{g} \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{sl}(V)) = \mathfrak{sl}(V)$. Por lo tanto $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$.

2. **Caso** $I = P(V)$**.** Del Lema 51 tenemos que

$$P(V) \subset \mathfrak{g} \subset \mathrm{Der}(P(V)) = P(V) \oplus \langle \epsilon \rangle.$$

Luego, ya que ϵ es una derivación par, tenemos que $\mathfrak{g} = P(V)$.

3. **Caso** $I = Q(V)$**.** Del Lema 51 tenemos que

$$Q(V) \subset \mathfrak{g} \subset \mathrm{Der}(Q(V)) = Q(V) \oplus \langle D \rangle.$$

Dado que D es una derivación impar, $\mathfrak{g} = Q(V)$ ó $\mathfrak{g} = Q(V) \oplus \langle D \rangle$.

4. **Caso** $I = \mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C})$**.** Del Lema 51 tenemos que

$$\mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle.$$

Notemos que $\Lambda(\mathbb{C})$ es $\mathrm{id} \otimes d_1-$simple. Luego, por el Teorema 43 tenemos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle$.

□

Luego, como Corolario del Teorema 44 y de la Proposición 52 tenemos el siguiente resultado.

53 Teorema. *Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión al menos tres y sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie con $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(V)$ y $\mathfrak{g}_1$ un $\mathfrak{sl}(V)$-módulo de dimensión finita. Entonces, se cumple una de las siguientes afirmaciones.*

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V) \oplus \mathfrak{g}_1$ *es un producto semidirecto de $\mathfrak{sl}(V)$ y del $\mathfrak{sl}(V)$-módulo $\mathfrak{g}_1$ el cual tiene producto trivial.*

2. $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ *es suma directa de dos ideales, $\mathfrak{h}$ es un $\mathfrak{sl}(V)$-módulo trivial con producto trivial y $\mathfrak{s}$ una de los siguientes superálgebras de Lie semisimples:*

$$\mathfrak{s} = \begin{cases} P(V), \\ Q(V), \\ Q(V) \oplus \langle D \rangle, \\ \mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle. \end{cases}$$

Finalmente, de las Proposiciones 46 y 48 obtenemos los siguientes resultados.

54 Corolario. *Para cada clase de isomorfia* $\mathfrak{g}_1$ *de* $\mathfrak{sl}(V)$*-módulos existe, hasta isomorfismo, una única estructura de superálgebra de Lie en* $\mathfrak{sl}(V)\oplus\mathfrak{g}_1$ *y es tal que* $\Gamma = 0$.

55 Corolario. *Para cada* $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *existe, hasta isomorfismo, una superálgebra de Lie* $\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{h}$ *donde* $\mathfrak{h}$ *es un* $\mathfrak{sl}(V)$*-módulo trivial con producto trivial y dim*$(\mathfrak{h}) = k$ *y* $\mathfrak{s}$ *una de las siguientes superálgebras de Lie:*

$$\mathfrak{s} = \begin{cases} P(V), \\ Q(V), \\ Q(V)\oplus\langle D\rangle, \\ \mathfrak{sl}(V)\otimes\wedge(1)\oplus\langle \mathrm{id}\otimes d_1\rangle. \end{cases}$$

Capítulo 3

Superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ tales que $\mathfrak{m}$ es un álgebra de Lie simple

En este capítulo estudiaremos las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ donde $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$ es un álgebra de Lie reductiva con $\mathfrak{m}$ simple y $\mathfrak{g}_1$ un $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-módulo de dimensión finita. Dado que $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$ no es un álgebra de Lie simple, no es posible aplicar directamente el método usado en el capítulo anterior. Sin embargo, el hecho de que los únicos ideales no triviales de $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$ sean $\mathfrak{m}$ y $\mathbb{C}$ hace que podamos proceder de manera semejante. Observemos también que $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0$ es un ideal soluble de $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$. Entonces, $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0 = 0$ ó $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}$. Por lo que estudiamos de forma independiente cada una de estas posibilidades.

3.1 Superálgebras de Lie semisimples

De los resultados dados en [7] tenemos que si $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ es simple, entonces es clásica; es decir, la acción de $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$ en $\mathfrak{g}_1$ es completamente reducible y además se tiene el siguiente resultado.

56 Proposición. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie simple. Entonces,*

1. $\mathfrak{g}_1 = U \oplus U^*$ *es suma de dos módulos contragredientes, irreducibles y tales que* $[\![U, U^*]\!] = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$.

2. $\mathrm{Der}(\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1) = \mathrm{Int}(\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1)$.

Más aún, $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}(V|\mathbb{C})$ *ó* $\mathfrak{g} \simeq C(V)$ *con* $\dim(V) \geq 2$.

57 Observación. En $\mathfrak{g}_1 = U \oplus U^*$ el hecho relevante para nosotros será que U –y por lo tanto U^*– es irreducible.

58 Lema. *Sea* $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ *una superálgebra de Lie semisimple y sea* $I \subset \mathfrak{g}$ *un ideal minimal. Entonces,* I *es único e* $I \simeq \mathfrak{a} \otimes \Lambda(U)$ *con* $\mathfrak{a}$ *una superálgebra de Lie simple tal que* $\mathfrak{a}_0 \simeq \mathfrak{m}$ *y* $U = 0$*, ó* $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{m}$ *y* $U = \mathbb{C}$*, ó bien* $\mathfrak{a}_0 \simeq \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$ *y* $U = 0$*.*

Demostración. Sea $I \subset \mathfrak{g}$ un ideal minimal. Entonces, ya que I_0 es un ideal de $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$, $I_0 = \mathbb{C}$ ó $I_0 = \mathfrak{m}$, ó bien $I_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$. De la Proposición 40 tenemos que $I \simeq \mathfrak{a} \otimes \Lambda(U)$ donde $\mathfrak{a}$ es una superálgebra de Lie simple y U es un espacio vectorial de dimensión finita.

1. Si $I_0 = \mathbb{C}$, entonces $\mathbb{C} \simeq \mathfrak{a}_0 \otimes \Lambda(U)_0 \oplus \mathfrak{a}_1 \otimes \Lambda(U)_1$. De aquí se sigue que $U = 0$ y $\mathfrak{a}_0 \simeq \mathbb{C}$, lo cual no es posible pues no hay superálgebras de Lie simples cuya parte par tenga dimensión uno.

2. Si $I_0 = \mathfrak{m}$, entonces procedemos como en el Lema 41 para concluir que $\mathfrak{a}_0 \simeq \mathfrak{m}$ y $U = 0$ ó $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ y $U = \mathbb{C}$.

3. Si $I_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$, entonces $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \simeq \mathfrak{a}_0 \otimes \mathbb{C} \oplus \mathfrak{a}_0 \otimes N \oplus \mathfrak{a}_1 \otimes \Lambda(U)_1$ siendo $\Lambda(U) = \mathbb{C} \oplus N \oplus \Lambda(U)_1$ como en el Corolario 41. Si $U = 0$, entonces $\mathfrak{a} \simeq I$. De aquí, $\mathfrak{a}_0 \simeq \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$. Finalmente, para $U \neq 0$ se sigue que $\mathfrak{a}_0 \otimes N \oplus \mathfrak{a}_1 \otimes \Lambda(U)_1$ es un ideal nilpotente de $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$. Por lo tanto, $\mathfrak{a}_0 \otimes N \oplus \mathfrak{a}_1 \otimes \Lambda(U)_1 \simeq \mathbb{C}$. Así, $\dim(U) = 1$ ó $\dim(U) = 2$ y $\dim(\mathfrak{a}_1) = 1$ ó $\dim(\mathfrak{a}_0) = 1$ respectivamente, lo cual no es posible en ambos casos.

Sean I y J ideales minimales de $\mathfrak{g}$, entonces de lo anterior tenemos que $I \cap J \neq 0$. Luego, por la Observación 36 tenemos que $I = J$, lo que muestra lo deseado,

□

59 Observación. Análogo a la Observación 42 tenemos que si $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ es una superálgebra de Lie semisimple e I es su ideal minimal, entonces $I \subset \mathfrak{g} \subset \mathrm{Der}(I)$. En efecto, basta verificar que el morfismo $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(I)$ es inyectivo para el caso $I_0 \simeq \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$. En tal caso, notemos que $\ker(\phi)_0 \subset Z(\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Por lo tanto, $\ker(\phi)$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$. De aquí se sigue que $\ker(\phi) = 0$.

60 Proposición. *Sea* $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ *una superálgebra de Lie semisimple. Entonces,* $\mathfrak{g}$ *es isomorfa a una de las siguientes superálgebras*

$$\mathfrak{g} \simeq \begin{cases} P(V) \oplus \langle \epsilon \rangle, \\ \mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \operatorname{id} \otimes d_0, \operatorname{id} \otimes d_1 \rangle, \\ \mathfrak{sl}(V|\mathbb{C}), \\ C(V). \end{cases}$$

Demostración. Sea I el ideal minimal de $\mathfrak{g}$. Usemos el Teorema 43 para cada uno de los casos dados en el Lema 58.

1. **Caso** $I = \mathfrak{a}$ con $\mathfrak{a}$ simple y $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{m}$. Notemos que si $\mathfrak{g} \subset \operatorname{Der}(\mathfrak{a})$, entonces $\operatorname{Der}(\mathfrak{a})_0 \neq \mathfrak{m}$. Así, de los resultados dados en [7] tenemos que la única posilidad es $\mathfrak{a} = P(V)$. Luego, $P(V) \subset \mathfrak{g} \subset \operatorname{Der}(P(V)) = P(V) \oplus \langle \epsilon \rangle$. De aquí, $\mathfrak{g} \simeq P(V) \oplus \langle \epsilon \rangle$.

2. **Caso** $I = \mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C})$. Del Lema 51 tenemos que

$$\mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{g} \subset \operatorname{Der}(\mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C})) = \mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \operatorname{id} \otimes d_0, \operatorname{id} \otimes d_1 \rangle.$$

   Observemos que $\operatorname{id} \otimes d_0(\langle e \rangle) = \langle e \rangle$, por lo que $\Lambda(\mathbb{C})$ no es $\langle \operatorname{id} \otimes d_0 \rangle$-simple. Luego, por el Teorema 43, $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \operatorname{id} \oplus d_0, \operatorname{id} \oplus d_1 \rangle$.

3. **Caso** $I = \mathfrak{sl}(V|\mathbb{C})$ **ó** $I = C(V)$. De la Proposición 56 tenemos que $\operatorname{Der}(\mathfrak{sl}(V|\mathbb{C})) = \operatorname{Int}(\mathfrak{sl}(V|\mathbb{C}))$. Luego, $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}(V|\mathbb{C})$. Análogamente para $I = C(V)$, $\mathfrak{g} \simeq C(V)$.

□

3.2 Superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ con $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})_0 = 0$

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie con estructura $([\cdot,\cdot]_{\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}}, \rho, \Gamma)$ y tal que $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})_0 = 0$, entonces $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-módulo. Sea $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$, entonces $\widetilde{\mathfrak{g}}$ es una superálgebra de Lie semisimple con $\widetilde{\mathfrak{g}}_0 \simeq \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$ y denotamos por $([\cdot,\cdot]_{\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}}, \widetilde{\rho}, \widetilde{\Gamma})$ su estructura inducida. Sea W un $\mathfrak{m}$-módulo complementario a $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$, entonces $\mathfrak{g}_1 = W \oplus \operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$ como $\mathfrak{m}$-módulos y $\widetilde{\mathfrak{g}} \simeq \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus W$ pero sólo como espacios vectoriales ya que W no necesariamente es invariante bajo la acción de $\mathbb{C}$. Luego, podemos escribir la estructura en $\mathfrak{g}$ mediante la estructura de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ y la de $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ como sigue:

$$\begin{aligned}
[\cdot,\cdot] &= [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}}, & & \\
\rho(A) &= \widetilde{\rho}(A)\oplus\rho_R(A), & & \text{donde } \rho_R(A)=\rho(A)|_{\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})}, A\in\mathfrak{m}. \\
\rho(1) &= \widetilde{\rho}(1)+f+\rho_R(1), & & \text{con } f: W\to\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \text{ una transforma-} \\
& & & \text{ción lineal y } \rho_R(1)=\rho(1)|_{\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})}. \\
\Gamma|_{W\times W} &= \widetilde{\Gamma}, & & \\
\Gamma|_{W\times\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})} &= 0, & & \\
\Gamma|_{\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})\times\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})} &= 0. & &
\end{aligned}$$

61 Observación. Notemos que el $\mathfrak{m}$-módulo W es un $\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}$-módulo si, y sólo si, $f=0$.

Así, estudiemos cada una de las posibilidades para $\widetilde{\mathfrak{g}}$ dadas en la Proposición 60, para determinar las propiedades de la transformación lineal f. Para ello, veamos una propiedad importante que satisface el radical de las superálgebras $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathfrak{g}_1$.

62 Lema. *Sea* $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathfrak{g}_1$ *una superálgebra de Lie tal que* $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0=0$, *entonces* $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ *es un* $\mathfrak{m}$*-módulo trivial.*

Demostración. Consideremos la descomposición $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}\oplus W\oplus\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ dada anteriormente. Notemos que $[\![W,W]\!]$ es un ideal de $\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$ y $[\![W,W]\!]\neq 0$, de lo contrario $[\![W,W]\!]\oplus W$ sería un ideal soluble de $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Luego, $[\![W,W]\!]=\mathfrak{m}$ ó $[\![W,W]\!]=\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}$ y de la identidad de Jacobi tenemos que:

$$[\![\mathfrak{m},\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})]\!]\subset[\![[\![W,W]\!],\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})]\!]\subset[\![[\![\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}),W,]\!],W]\!]=0.$$

Esto muestra que $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ es un $\mathfrak{m}$-módulo trivial. Más aún, si $[\![W,W]\!]=\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}$, entonces $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ es un $\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}$-módulo trivial. $\square$

63 Observación. En el caso particular en que $\widetilde{\mathfrak{g}}$ sea simple, entonces $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ es un $\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}$-módulo trivial.

64 Lema. *Sean* $\mathfrak{g}$ *y* $f: W\to\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ *como antes.*

$$\textit{Si}\quad \widetilde{\mathfrak{g}}\simeq\begin{cases}\mathfrak{sl}(V|\mathbb{C}),\\ C(V),\\ P(V)\oplus\langle\epsilon\rangle,\end{cases}\qquad \textit{entonces}\quad f=0.$$

$$\textit{Si}\quad \widetilde{\mathfrak{g}}\simeq\mathfrak{m}\otimes\Lambda(\mathbb{C})\oplus\langle\mathrm{id}\otimes d_0,\mathrm{id}\otimes d_1\rangle,\quad \textit{entonces}\quad \begin{array}{l} f|_{\mathfrak{m}\otimes\mathbb{C}e}=0 \textit{ y}\\ f|_{\langle\mathrm{id}\otimes d_1\rangle} \textit{ es arbitraria.}\end{array}$$

Demostración. De la identidad de Jacobi evaluada en $1 \in \mathbb{C}$, un elemento de $\mathfrak{m}$ y uno de W, tenemos las siguientes consecuencias según la superálgebra $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

1. Si $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus W$ es simple, entonces de la Proposición 56 tenemos que $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus W = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus U \oplus U^*$, donde U y U^* son $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-módulos contragredientes, irreducibles y $[\![U, U^*]\!] = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$. Observemos que $\widetilde{\rho}(\mathfrak{m})U$ y $\widetilde{\rho}(\mathfrak{m})U^*$ son $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-invariantes. En efecto, ya que $\mathbb{C} = Z(\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C})$ basta notar que $(\widetilde{\rho}(1) \circ \widetilde{\rho}(m))u = (\widetilde{\rho}(m) \circ \widetilde{\rho}(1))u \in \widetilde{\rho}(\mathfrak{m})U$, $m \in \mathfrak{m}$. Luego, ya que U es irreducible tenemos que $\widetilde{\rho}(\mathfrak{m})U = U$. Análogamente, $\widetilde{\rho}(\mathfrak{m})U^* = U^*$. Así, de la identidad de Jacobi tenemos que $f(\widetilde{\rho}(A)u) = 0$ y $f(\widetilde{\rho}(A)\phi) = 0$, $A \in \mathfrak{m}$, $u \in U$ y $\phi \in U^*$. De aquí se sigue que $f = 0$ para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V|\mathbb{C})$ y $\mathfrak{g} = C(V)$.

2. Si $\widetilde{\mathfrak{g}} = P(V) \oplus \langle \epsilon \rangle$, entonces $f(\widetilde{\rho}(A)B) = 0$ y $f(\widetilde{\rho}(A)C) = 0$, $A \in \mathfrak{sl}(V)$, $B \in \mathrm{Sym}(V)$ y $C \in \mathrm{Skw}(V)$. Luego, ya que $P(V)$ es simple tenemos que $\widetilde{\rho}(\mathfrak{sl}(V)) \mathrm{Sym}(V) = \mathrm{Sym}(V)$ y $\widetilde{\rho}(\mathfrak{sl}(V)) \mathrm{Skw}(V) = \mathrm{Skw}(V)$. De aquí se sigue que $f = 0$.

3. Si $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle$, entonces $f(\widetilde{\rho}(A)Be) = 0$, $A \in \mathfrak{m}$ y $Be \in \mathfrak{m} \otimes \mathbb{C}e$. De aquí se sigue que $f|_{\mathfrak{m} \otimes \mathbb{C}e} = 0$, y ya que la identidad de Jacobi no impone condiciones para $f|_{\langle \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle}$, tenemos que ésta es una función lineal arbitraria.

$\square$

Los resultados dados en los Lemas 62 y 64 los concentramos en la siguiente proposición.

65 Proposición. *Sea* $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ *una superálgebra de Lie tal que* $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0 = 0$*, entonces* $\mathfrak{g}$ *es isomorfa a una de las siguientes superálgebras:*

$$\mathfrak{g} \simeq \begin{cases} \mathfrak{sl}(V|\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{a}, \\ C(V) \oplus \mathfrak{a}, \\ P(V) \oplus \langle \epsilon \rangle \oplus \mathfrak{a}(g), \\ \mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(g), \\ \mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(f, g), \end{cases}$$

donde

1. $\mathfrak{sl}(V|\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{a}$ *es una suma directa de ideales;* $\mathfrak{sl}(V|C)$ *es simple y* $\mathfrak{a}$ *es un* $\mathfrak{gl}(V)$*-módulo trivial con producto trivial.*

2. $C(V) \oplus \mathfrak{a}$ *es una suma directa de ideales;* $C(V)$ *es simple y* $\mathfrak{a}$ *es un* $\mathfrak{sp}(V) \oplus \mathbb{C}$*-módulo trivial con producto trivial.*

3. $P(V) \oplus \langle \epsilon \rangle \oplus \mathfrak{a}(g)$ *es un producto semidirecto de la superálgebra de Lie semisimple* $P(V) \oplus \langle \epsilon \rangle$ *y del ideal* $\mathfrak{a}(g)$ *que es un* $\mathfrak{sl}(V)$*-módulo trivial. La acción de* ϵ *en* $\mathfrak{a}(g)$ *está dada mediante la transformación lineal* $g : \mathfrak{a}(g) \to \mathfrak{a}(g)$.

4. $\mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(g)$ *es un producto semidirecto de la superálgebra de Lie semisimple* $\mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle$ *y del ideal* $\mathfrak{a}(g)$ *que es un* $\mathfrak{m}$*-módulo trivial. La acción de* $\mathrm{id} \otimes d_0$ *en* $\mathfrak{a}(g)$ *está dada mediante la transformación lineal* $g : \mathfrak{a}(g) \to \mathfrak{a}(g)$.

5. $\mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(f, g)$ *tiene las siguientes propiedades:*

   (a) $\mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0 \rangle$ *es una subálgebra no semisimple con ideal soluble* $0 \oplus \mathfrak{m} \otimes \mathbb{C}e$.

   (b) $\langle \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(g)$ *es un* $\mathfrak{m}$*-módulo trivial con producto trivial. La acción de* $\mathrm{id} \otimes d_0$ *en* $\langle \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(g)$ *está dada mediante las transformaciones lineales* $0 \neq f : \langle \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \to \mathfrak{a}(f, g)$ *y* $g : \mathfrak{a}(f, g) \to \mathfrak{a}(f, g)$ *como sigue:*

   $$\rho(\mathrm{id} \otimes d_0)(\mathrm{id} \otimes d_1 + r) = -\mathrm{id} \otimes d_1 + f(\mathrm{id} \otimes d_1) + g(r),$$

   con $r \in \mathfrak{a}(f, g)$.

   (c) $\mathfrak{a}(f, g)$ *es un ideal con producto trivial.*

66 Proposición. *Sean* $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{a}(g)$ *y* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{s}' \oplus \mathfrak{a}'(g')$ *productos semidirectos de las superálgebras semisimples* $\mathfrak{s}$ *y* $\mathfrak{s}'$ *con* $\mathfrak{s}_0 \simeq \mathfrak{s}'_0 \simeq \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$ *y los* $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$*-módulos* $\mathfrak{a}(g)$ *y* $\mathfrak{a}'(g')$ *los cuales son* $\mathfrak{m}$*-módulos triviales y actuar con* $1 \in \mathbb{C}$ *en* $\mathfrak{a}(g)$ *y* $\mathfrak{a}'(g')$ *está dado por las transformaciones lineales* $g : \mathfrak{a}(g) \to \mathfrak{a}(g)$ *y* $g' : \mathfrak{a}'(g') \to \mathfrak{a}'(g')$ *respectivamente. Entonces,* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{g}'$ *son isomorfas si, y sólo si, las superálgebras de Lie* $\mathfrak{s}$ *y* $\mathfrak{s}'$ *lo son y si existe una transformación lineal* $S : \mathfrak{a}(g) \to \mathfrak{a}'(g')$ *tal que* $g' = S^{-1} \circ g \circ S$.

Demostración. Sea $\Phi = T \oplus \widetilde{S} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un isomorfsmo de superálgebras de Lie. La prueba es enteramente análoga a la Proposición 48, basta notar que $\widetilde{S}|_{\mathfrak{a}(g)} : \mathfrak{a}(g) \to \mathfrak{a}'(g')$ es un isomorfismo de módulos. Así, para todo $r \in \mathfrak{a}(g)$

$$\widetilde{S}|_{\mathfrak{a}(g)}(\rho(1)(r)) = \widetilde{S}|_{\mathfrak{a}(g)}(g(r)) = \rho'(T(1))(\widetilde{S}|_{\mathfrak{a}(g)}(r)) = \alpha g'(\widetilde{S}|_{\mathfrak{a}(g)}(r))$$

siendo $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. De aquí se sigue lo deseado. □

67 Observación. Notemos que en particular si $\widetilde{\mathfrak{g}}$ es simple, entonces $g = 0$.

68 Corolario. *Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe, hasta isomorfismo, una única superálgebra de Lie $\mathfrak{sl}(V|\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{a}$ tal que* $\dim(\mathfrak{a}) = k$.

69 Corolario. *Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe, hasta isomorfismo, una superálgebra de Lie $C(V) \oplus \mathfrak{a}$ tal que* $\dim(\mathfrak{a}) = k$.

70 Corolario. *Sea $[\mathfrak{a}]$ una clase de equivalencia de $\mathfrak{gl}(V)$-módulos con representante $\mathfrak{a}$ y tal que $\mathfrak{a}$ es un $\mathfrak{sl}(V)$-módulo trivial. Para cada clase de conjugación $g \in \mathrm{End}(\mathfrak{a})$ existe, hasta isomorfismo, una superálgebra de Lie $P(V) \oplus \langle \epsilon \rangle \oplus \mathfrak{a}(g)$.*

71 Corolario. *Sea $[\mathfrak{a}]$ una clase de equivalencia de $\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}$-módulos con representante $\mathfrak{a}$ y tal que $\mathfrak{a}$ es un $\mathfrak{m}$-módulo trivial. Para cada clase de conjugación $g \in \mathrm{End}(\mathfrak{a})$ existe, hasta isomorfismo, una superálgebra de Lie $\mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(g)$.*

72 Proposición. *Las superálgebras $\mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(f, g)$ y $\mathfrak{m} \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}'(f', g')$ son isomorfas si, y sólo si, existen:*

1. *Una transformación lineal invertible $S : \mathfrak{a}(f, g) \to \mathfrak{a}'(f', g')$,*
2. *$\beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$,*
3. *$\gamma \in \mathfrak{a}'(f', g')\backslash\{0\}$,*

tales que

$$\begin{aligned} g' &= S \circ g \circ S^{-1}, \\ f'(\mathrm{id} \otimes d_1) &= \beta^{-1}(S \circ f(\mathrm{id} \otimes d_1) - (g' + \mathrm{id})\gamma). \end{aligned}$$

Demostración. La prueba es análoga a las anteriores, sólo hay que observar que $\langle \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle$ no es un $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-submódulo pero $\langle \mathrm{id} \otimes d_0 \rangle \oplus \mathfrak{a}(f,g)$ sí lo es:

Sea $\widetilde{S} : \langle \mathrm{id} \otimes d_0 \rangle \oplus \mathfrak{a}(f,g) \to \langle \mathrm{id} \otimes d_0 \rangle \oplus \mathfrak{a}'(f',g')$ un isomofismo de $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-módulos. Dado que $\mathfrak{a}(f,g)$ es un submódulo de $\langle \mathrm{id} \otimes d_0 \rangle \oplus \mathfrak{a}(f,g)$ tenemos que $\widetilde{S}(\mathfrak{a}(f,g))$ también lo es. Entonces, $\widetilde{S}|_{\mathfrak{a}(f,g)} : \mathfrak{a}(f,g) \to \mathfrak{a}'(f',g')$ es un isomorfismo de $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-módulos. Análogo al caso anterior, ya que $\mathfrak{a}(f,g)$ es un $\mathfrak{m}$-módulo trivia, esta condición es equivalente a la existencia de una transformación lineal invertible $S : \mathfrak{a}(f,g) \to \mathfrak{a}'(f',g')$ tal que $g' = S \circ g \circ S^{-1}$. Por otro lado, ya que $\langle \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle$ no es un $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$-submódulo tenemos que $\widetilde{S}(\mathrm{id} \otimes d_1) = \beta \, \mathrm{id} \otimes d_1 + \gamma$ con $\beta \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ y $\gamma \in \mathfrak{a}'(f',g') \backslash \{0\}$. Luego de la condición

$$\widetilde{S}[\![\mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1]\!] = [\![\mathrm{id} \oplus d_0, \widetilde{S}(\mathrm{id} \otimes d_1)]\!],$$

tenemos que $f'(\mathrm{id} \otimes d_1) = \beta^{-1}(S \circ f(\mathrm{id} \otimes d_1) - (g' + \mathrm{id})\gamma)$. □

3.3 Ejemplo: las superálgebras $\mathfrak{gl}(V) \oplus \mathfrak{g}_1$ con $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0 = 0$

En esta sección, al igual que en la Sección 2.3, V denota un espacio vectorial complejo de dimensión mayor o igual a tres y haremos explícitos los resultados dados en la sección anterior sobre las superálgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} + \mathfrak{g}_1$ con $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0 = 0$. En este caso, $\mathfrak{m} = \mathfrak{sl}(V)$ y encontraremos las clases de isomorfía de dichas superálgebras.

73 Proposición. *Sea* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V) \oplus \mathfrak{g}_1$ *una superálgebra de Lie tal que* $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0 = 0$*, entonces* $\mathfrak{g}$ *es isomorfa a una de las siguientes superálgebras:*

$$\mathfrak{g} \simeq \begin{cases} \mathfrak{sl}(V|\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{a}, \\ P(V) \oplus \langle \epsilon \rangle \oplus \mathfrak{a}(g), \\ \mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(g), \\ \mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(f,g). \end{cases}$$

donde

1. $\mathfrak{sl}(V|\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{a}$ *es una suma directa de ideales;* $\mathfrak{sl}(V|C)$ *es simple y* $\mathfrak{a}$ *es un* $\mathfrak{gl}(V)$*-módulo trivial con producto trivial.*

2. $P(V) \oplus \langle \epsilon \rangle \oplus \mathfrak{a}(g)$ *es un producto semidirecto de la superálgebra de Lie semisimple* $P(V) \oplus \langle \epsilon \rangle$ *y el ideal* $\mathfrak{a}(g)$ *que es un* $\mathfrak{sl}(V)$*-módulo trivial.*

La acción de ϵ *en* $\mathfrak{a}(g)$ *está dada mediante la transformación lineal* $g : \mathfrak{a}(g) \to \mathfrak{a}(g)$.

3. $\mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(g)$ *es un producto semidirecto de la superálgebra de Lie semisimple* $\mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle$ *y el ideal* $\mathfrak{a}(g)$ *el cual es un* $\mathfrak{sl}(V))$*-módulo trivial y operar con* $\mathrm{id} \otimes d_0$ *en* $\mathfrak{a}(g)$ *está dado mediante la transformación lineal* $g : \mathfrak{a}(g) \to \mathfrak{a}(g)$.

4. $\mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(f,g)$ *tiene las siguientes propiedades:*

   (a) $\mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0 \rangle$ *es una subálgebra no semisimple con ideal soluble* $0 \oplus \mathfrak{sl}(V) \otimes \mathbb{C}e$.

   (b) $\langle \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(g)$ *es un* $\mathfrak{sl}(V)$*-submódulo trivial con producto trivial y operar con* $\mathrm{id} \otimes d_0$ *en* $\langle \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(g)$ *está dado mediante las transformaciones lineales* $0 \neq f : \langle \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \to \mathfrak{a}(f,g)$ *y* $g : \mathfrak{a}(f,g) \to \mathfrak{a}(f,g)$ *como sigue:*

   $$\rho(\mathrm{id} \otimes d_0)(\mathrm{id} \otimes d_1 + r) = -\,\mathrm{id} \otimes d_1 + f(\mathrm{id} \otimes d_1) + g(r),$$

   con $r \in \mathfrak{a}(f,g)$.

   (c) $\mathfrak{a}(f,g)$ *es un ideal con producto trivial.*

Resta encontrar explícitamente las clases de isomorfía de las superálgebras $\mathfrak{sl}(V) \otimes \Lambda(\mathbb{C}) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id} \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(f,g)$. De la Proposición 72 vemos que el problema a resolver es el siguiente: sean $u = f(\mathrm{id} \otimes d_1)$ y $v = f'(\mathrm{id} \otimes d_1)$. Fijemos un representante g de la clase de conjugación de g', digamos g es una forma canónica de Jordan. Escribimos, $(u,g) \sim (v,g)$ si, y sólo si, existen un elemento S del grupo de isotropía de g, $\beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y $\gamma \in \mathbb{C}^m\backslash\{0\}$ tal que $v = \beta^{-1}(S(u) - (g + \mathrm{id})(\gamma))$.

Notemos que $\sim$ es una relación de equivalencia. De hecho, las clases de equivalencia corresponden exactamente a las clases de isomorfía de dichas superálgebras. Así, el problema queda reducido a encontrar las clases de equivalencia.

74 Teorema. *Sea* $[\mathfrak{a}]$ *una clase de equivalencia de* $\mathfrak{gl}(V)$*-módulos y* g *un representante canónico de una clase de conjugación en* $\mathrm{End}(\mathfrak{a})$ *tal que* g *tiene* k *bloques de Jordan de tamaños* $m_1, \cdots, m_k$ *y valores propios* $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$. *Sea* $p = \text{mín}\{j \mid \lambda_p = -1\}$ *y* $B = \{m_{p+i} \mid m_{p+i} = m_{p+i+1},\ i = 0, \ldots, k-p-1\}$.

1. *Si todos los valores propios de g son diferentes de -1, entonces existe, hasta isomorfismo, una estructura de superálgebra de Lie en* $\mathfrak{sl}_n \otimes \Lambda(1) \oplus \mathrm{id} \otimes \langle d_0, \mathrm{id}_1 \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(f, g)$.

2. *Si g tiene algún valor propio igual a -1, entonces existen, hasta isomorfismo, $k - p + 2 - \#B$ estructuras de superálgebra de Lie distintas en* $\mathfrak{sl}_n \otimes \Lambda(1) \oplus \langle \mathrm{id} \otimes d_0, \mathrm{id}_1 \otimes d_1 \rangle \oplus \mathfrak{a}(f, g)$.

La demostracíon ha sido incluida en las Apéndices A y B.

3.4 Superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ con $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}$

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie como antes con estructura dada por $([\cdot, \cdot]_{\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}}, \rho, \Gamma)$. Supongamos también que $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}$, entonces $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \oplus U$ donde $U \subset \mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-módulo y sea $([\cdot, \cdot]_{\mathbb{C}}, \rho_R, \Gamma_R)$ su estructura inducida.

Sea $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} / \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$, entonces $\widetilde{\mathfrak{g}}$ es una superálgebra de Lie semisimple con $\widetilde{\mathfrak{g}}_0 \simeq \mathfrak{m}$ y denotamos por $([\cdot, \cdot]_{\mathfrak{m}}, \widetilde{\rho}, \widetilde{\Gamma})$ su estructura inducida. Sea W un $\mathfrak{m}$-módulo complementario a U, entonces $\mathfrak{g}_1 = W \oplus U$ y $\widetilde{\mathfrak{g}} \simeq \mathfrak{m} \oplus W$ como espacios vectoriales. Notemos que $f = \rho(1)|_W : W \to U$. Entonces, W es un $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-módulo si, y sólo si, $f = 0$. Luego, podemos escribir la estructura en $\mathfrak{g}$ en términos de las estructuras de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ y $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
[\cdot, \cdot] &= [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}}, \\[1em]
\rho(A) &= \widetilde{\rho}(A) \oplus \rho_R(A), \qquad \text{con } \rho_R(A) = \rho(A)|_U, \ A \in \mathfrak{m}; \\
\rho(1)(w + u) &= f(w) + \rho_R(1)(u), \quad w \in W, u \in U; \\
\Gamma|_{W \times W} &= \widetilde{\Gamma} + \mathcal{B}|_{W \times W} \\
\Gamma|_{W \times U} &= \mathcal{B}|_{W \times U}, \\
\Gamma|_{U \times U} &= \mathcal{B}|_{U \times U}, .
\end{aligned}
$$

siendo $\mathcal{B} : W \oplus U \times W \oplus U \to \mathbb{C}$ una forma bilineal simétrica y $\Gamma|_R = \mathcal{B}|_{U \times U}$. Así, en adelante usaremos $([\cdot, \cdot], \rho, \Gamma, f, \mathcal{B})$ para denotar la estructura de una superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con transformación lineal f y forma bilineal $\mathcal{B}$ asociadas.

75 Proposición. *Sea* $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}_1$ *una superálgebra de Lie como antes y consideremos la descomposición* $\mathfrak{g} \simeq \widetilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C} \oplus U \simeq \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus W \oplus U$ *con estructura* $([\cdot,\cdot], \rho, \Gamma, f, \mathcal{B})$. *Entonces,*

1. $\mathcal{B}$ *es* ρ*-invariante.*
2. *Si* $f \neq 0$, *entonces* $\mathcal{B}|_{W \times W} = 0$.
3. *Si* $\rho_R(1) \neq 0$, *entonces* $U \subset \mathrm{Rad}(\mathcal{B}) = \{u \in \mathfrak{g}_1 | \mathcal{B}(u,v) = 0,\ v \in \mathfrak{g}_1\}$.
4. *Si* $\rho_R(1) \neq 0$ *o bien* $\rho_R(1) = 0$ *y* $f = 0$, *entonces para todo* $A \in \mathfrak{m}$, $\rho_R(A) = \lambda_A \rho_R(1)$ *con* $\lambda_A \in \mathbb{C}$.
5. $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ *tiene grado de solubilidad a lo más dos.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ como en la hipótesis.

1. Como consecuencia inmediata de la identidad de Jacobi tenemos que $\mathcal{B}$ es ρ-invariante; es decir,

$$\mathcal{B}(\rho(A)u, v) + \mathcal{B}(u, \rho(A)v) = 0, \quad A \in \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}, u, v \in W \oplus U.$$

2. De la identidad de Jacobi tenemos que $\mathcal{B}(w,w)f(w) = 0$, $w \in W$. Luego, si $w \notin \ker(f)$, entonces $\mathcal{B}(w,w) = 0$ y de la identidad de Jacobi se sigue que

$$\mathcal{B}(w,w)f(v) + 2\mathcal{B}(v,w)f(w) = 0, \quad v, w \in W.$$

   Así, $\mathcal{B}(v,w) = 0$ para todo $w \notin \ker(f)$ y $v \in W$. Más aún, observemos que existe una base $\{w_i\}$ de W tal que $\{w_i\} \subset W \setminus \ker(f)$. Por lo tanto, $B|_{W \times W} = 0$.

3. Sea $u \in U$. Procediendo como en el caso anterior tenemos que si $u \notin \ker(\rho_R(1))$, entonces $\mathcal{B}(u,u) = 0$. Luego, $\mathcal{B}(u,v) = 0$ para todos $u \in U \setminus \ker(\rho_R(1))$ y $v \in W \oplus U$. Luego, si $\rho_R(1) \neq 0$ existe una base $\{u_i\}$ de U tal que $\{u_i\} \subset U \setminus \ker(\rho_R(1))$. Así, $U \in \mathrm{Rad}(\mathcal{B})$.

4. Ya que $\widetilde{\mathfrak{g}}$ es semisimple y $\widetilde{\mathfrak{g}}_0 \simeq \mathfrak{m}$ tenemos que $\widetilde{\Gamma}(W,W) = \mathfrak{m}$ (ver demostración del Teorema 44). Luego, usando la identidad de Jacobi para $v, w \in W$ y $u \in U$ obtenemos lo siguiente:

$$\rho_R(\widetilde{\Gamma}(v,w))u + \mathcal{B}(v,w)\rho_R(1)u + \mathcal{B}(w,u)f(v) + \mathcal{B}(v,u)f(w) = 0.$$

Si $\rho_R(1) \neq 0$, entonces usando la propieded (3) tenemos que

$$\rho_R(\widetilde{\Gamma}(v,w)) = -\mathcal{B}(v,w)\rho_R(1),$$

para todos $v, w \in W$. Así, ya que $\mathfrak{m} = \widetilde{\Gamma}(W,W)$, dado $A \in \mathfrak{m}$, $A = \sum_{ij} \alpha_{ij}\widetilde{\Gamma}(v_i, w_j)$ tenemos que

$$\rho_R(A) = \sum_{ij} \alpha_{ij}\mathcal{B}(v_i, w_j)\rho_R(1) = \lambda_A \rho_R(1).$$

Análogamente, si $\rho_R(1) = 0$ y $f = 0$, tenemos que $\rho_R(A) = 0,\ A \in \mathfrak{m}$. Por lo tanto, U es un $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-módulo trivial.

5. Notemos que

$$[\![\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})]\!]_0 := \ \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0^{(1)} = \mathrm{Span}\{\Gamma_R(u,v) | u, v \in U\},$$

$$[\![\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})]\!]_1 := \ \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_1^{(1)} = \mathrm{Im}(\rho_R(1)).$$

Así, basta probar que $[\![\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0^{(1)}, \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_1^{(1)}]\!] = 0$. Si $\rho_R(1) = 0$ inmediatamente tenemos que $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})^{(2)} = 0$. En caso contrario sean $u, v, w \in U$ tales que $\rho_R(1)(u) \neq 0$. Luego, usando la identidad de Jacobi y notando que $U \subset \mathrm{Rad}(\mathcal{B})$, tenemos que

$$]\!]\Gamma_R(v,w), \rho_R(1)(u)]\!] = -[\![[\![w, \rho_R(1)(u)]\!], v]\!] - [\![[\![\rho_R(1)(u), v]\!], w]\!] = 0.$$

Lo que muestra que $[\![\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_0^{(1)}, \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})_1^{(1)}]\!] = 0$.

□

76 Observación. Sea $\mathfrak{g} \simeq \widetilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C} \oplus U \simeq \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus W \oplus U$. Notemos que $\widetilde{\mathfrak{g}}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$ si, y sólo si, W es un $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-módulo y $B|_{W\times W} = 0$, siendo B su forma bilineal asociada.

77 Proposición. *Sean $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C} \oplus U \simeq \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C} \oplus W \oplus U$ y $\mathfrak{g}' = \widetilde{\mathfrak{g}}' \oplus \mathbb{C} \oplus U' \simeq \mathfrak{m}' \oplus \mathbb{C} \oplus W' \oplus U'$ superálgebras de Lie con estructuras $([\![\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}}, \rho, \Gamma, f, \mathcal{B})$ y $([\![\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{m}'\oplus\mathbb{C}}, \rho', \Gamma', f', \mathcal{B}')$, respectivamente. Entonces $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son isomorfas si, y sólo si, existen*

1. *Un isomorfismo de superálgebras de Lie $\widetilde{T} \oplus S_{11} : \widetilde{\mathfrak{g}} \to \widetilde{\mathfrak{g}}'$.*

2. *Un isomorfismo de superálgebras de Lie* $t \oplus S_{22} : \mathbb{C} \oplus U \to \mathbb{C} \oplus U'$.

3. *Una transformación lineal* $S_{21} : W \to U'$,

tales que

(a) $f' = t^{-1}(S_{22} \circ f + t\rho'_R(1) \circ S_{21}) \circ S_{11}^{-1}$.

(b) $\mathcal{B}'(S_{11}(w_1), S_{11}(w_2)) + \mathcal{B}'(S_{11}(w_1), S_{21}(w_2)) + \mathcal{B}'(S_{11}(w_2), S_{21}(w_1)) + \mathcal{B}'(S_{21}(w_1), S_{21}(w_2)) = t\mathcal{B}(w_1, w_2)$, *para todos* $w_1, w_2 \in W$.

(c) $\mathcal{B}'(S_{11}(w), S_{22}(u)) + \mathcal{B}'(S_{21}(w), S_{22}(u)) = t\mathcal{B}(w, u)$, *para todos* $w \in W$ *y* $u \in U$.

Demostración. Sea $\Phi = T \oplus S : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un isomorfismo de superálgebras de Lie. Entonces. $T = \widetilde{T} \oplus t$ donde $\widetilde{T} : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}'$ es un isomorfismo de álgebras de Lie con $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $S : W \oplus U \to W' \oplus U'$ es un isomorfismo de módulos. Dado que $\Phi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}')$ tenemos que $S_{22} = S|_U : U \to U'$ es un isomorfismo de módulos. Así, $t \oplus S_{22} : \mathbb{C} \oplus U \to \mathbb{C} \oplus U'$ es un isomorfismo de superálgebras de Lie. Por otro lado, $S|_W : W \to W' \oplus U'$, entonces podemos escribir $S|_W = S_{11} + S_{21}$ donde $S_{11} : W \to W'$ y $S_{21} : W \to U'$. Notemos que S_{11} es invertible y $\widetilde{T} \oplus S_{11} : \widetilde{\mathfrak{g}} \to \widetilde{\mathfrak{g}}'$ es un isomorfismo de superálgebras de Lie. Además, para que $W \oplus U$ y $W' \oplus U'$ sean $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-módulos isomorfos debe cumplirse que

$$S([\![1, w]\!]) = [\![T(1), S(w)]\!], \quad w \in W.$$

De aquí se sigue que $f' = t^{-1}(S_{22} \circ f + t\rho'_R(1) \circ S_{21}) \circ S_{11}^{-1}$. Finalmente, de las condiciones

$$\Gamma'(S(w_1), S(w_2)) = T(\Gamma(w_1, w_2)),$$

y

$$\Gamma'(S(w_1), S(u)) = T(\Gamma(w_1, u)),$$

para todos $w_1, w_2 \in W$ y $u \in U$ se obtienen (b) y (c) respectivamente.

Por otro lado, si suponemos ciertas las hipótesis las superálgebras son isomorfas por construcción. $\square$

Dado que los submódulos una superálgebra de Lie se preservan bajo isomorfismos, usando la Proposición 75 y la Proposición 77 tenemos el siguiente Corolario.

78 Corolario. *Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ como en la Proposición 77. Si W es un $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-módulo, entonces $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son isomorfas si, y sólo si, existen*

1. *Un isomorfismo de superálgebras de Lie $\widetilde{T} \oplus S_{11} : \widetilde{\mathfrak{g}} \to \widetilde{\mathfrak{g}}'$.*
2. *Un isomorfismo de superálgebras de Lie $t \oplus S_{22} : \mathbb{C} \oplus U \to \mathbb{C} \oplus U'$,*

tales que

$$B'(\cdot,\cdot) = tB(S_{11}^{-1}(\cdot), S_{11}^{-1}(\cdot)),$$

y

$$\mathcal{B}'(\cdot,\cdot) = t\mathcal{B}(S_{11}^{-1}(\cdot), S_{22}^{-1}(\cdot)).$$

79 Corolario. *Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ como en la Proposición 77. Si W no es un $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}$-módulo, entonces $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son isomorfas si, y sólo si, existen*

1. *Un isomorfismo de superálgebras de Lie $\widetilde{T} \oplus S_{11} : \widetilde{\mathfrak{g}} \to \widetilde{\mathfrak{g}}'$.*
2. *Un isomorfismo de superálgebras de Lie $t \oplus S_{22} : \mathbb{C} \oplus U \to \mathbb{C} \oplus U'$.*
3. *Una transformación lineal $0 \neq S_{21} : W \to U'$,*

tales que

$$f' = t^{-1}(S_{22} \circ f + \rho'_R(1) \circ S_{21}) \circ S_{11}^{-1},$$

y

$$\mathcal{B}'(\cdot,\cdot) = t\mathcal{B}(S_{11}^{-1}(\cdot), S_{22}^{-1}(\cdot)).$$

Apéndice A

El grupo de isotropía de una forma canónica

Sea $g : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ una transformación lineal. Entonces, por el Teorema de Jordan, existe una base de $\mathbb{C}^m$ en la cual la forma canónica de g consiste en bloques de Jordan ordenados de la siguiente manera:

(a) Los primeros bloques, ordenados por tamaños de mayor a menor, corresponden a bloques de Jordan con valores propios distintos de -1.

(b) Los bloques correspondientes al valor propio -1 están ordenados por tamaños de mayor a menor.

Así, en adelante supondremos que g está descrita de esta manera.

80 Notación. Fijemos la siguiente notación:

1. $\{e_i\}_{i=1}^m$ denota la base canónica de $\mathbb{C}^m$,
2. $G_g = \{S \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) |\, gS = Sg\}$, el grupo de isotropía de g,
3. $A_g = \{S \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C}) |\, gS = Sg\}$, el álgebra de matrices que conmutan con g.

81 Lema. *Sea $g : \mathbb{C}^m \to C^m$ una transformación lineal cuya forma canónica es un bloque de Jordan con valor propio λ, entonces*

$$G_g = \{S \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) |\, S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1m} \\ 0 & S_{11} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & S_{12} \\ 0 & \dots & 0 & S_{11} \end{pmatrix},\ S_{1\,1} \neq 0\}.$$

Demostración. Sea $S \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$. Notemos que

$$(Sg)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} S_{ik} g_{kj} = \lambda S_{ij} + S_{ij-1}$$

y

$$(gS)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_{ik} S_{kj} = \lambda S_{ij} + S_{i+1j}.$$

Entonces, $Sg = gS$ si, y sólo si,

$$S_{ij} = S_{i+1j+1} \quad \text{y} \quad S_{i+11} = S_{mj} = 0,$$

$i, j = 1, \ldots, m-1$. Luego, de estas condiciones se sigue que $S_{ij} = 0,\ j < i = 2, \ldots, m$. Notemos también que la diagonal de profundidad k, $\{S_{1k}, S_{2k+1}, \ldots, S_{m-k+1m}\}$, cumple que $S_{1k} = S_{2k+1} = \cdots = S_{m-k+1m},\ k = 1, \ldots, m$; obteniendo lo deseado. De esta manera, la condición de que S sea invertible se reduce a tener $S_{11} \neq 0$. $\square$

82 Lema. *Sea $g : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ una transformación lineal cuya forma canónica está formada por k bloques de Jordan $J_1, \ldots, J_k$ de tamaños $m_1, \ldots, m_k$ y con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ respectivamente. Sea $S \in G_g$, entonces S está formada por bloques $S^{pq} \in \mathrm{Mat}_{m_p \times m_q}(\mathbb{C})$ como*

$$S = \begin{pmatrix} S^{11} & \ldots & S^{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ S^{k1} & \ldots & S^{kk} \end{pmatrix}$$

y tales que:

1. *$S^{pp} \in A_{J_p},\ p = 1, \ldots, k$.*
2. *Si $\lambda_p \neq \lambda_q$, entonces $S^{pq} = 0$ y $S^{qp} = 0,\ p < q = 1, \ldots, k$.*
3. *Si $\lambda_p = \lambda_q$, entonces*
   - *(a) $S^{pq} = \begin{pmatrix} X^{pq} \\ 0 \end{pmatrix}$ con $X^{pq} \in A_{J_q}$ y $0 \in \mathrm{Mat}_{(m_1-m_2)\times m_2}(\mathbb{C})$.*
   - *(b) $S^{qp} = \begin{pmatrix} 0 & Y^{qp} \end{pmatrix}$ con $Y^{qp} \in A_{J_q}$ y $0 \in \mathrm{Mat}_{m_2\times(m_1-m_2)}(\mathbb{C})$.*

Demostración. Sea $S \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$. Notemos que

$$Sg = \begin{pmatrix} S^{11}J_1 & \dots & S^{1k}J_k \\ \vdots & & \vdots \\ S^{k1}J_1 & \dots & S^{kk}J_k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad gS = \begin{pmatrix} J_1S^{11} & \dots & J_1S^{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ J_kS^{k1} & \dots & J_kS^{kk} \end{pmatrix}.$$

Entonces, $Sg = gS$ si, y sólo si,

$$S^{pq}J_q = J_pS^{pq},\ p,q = 1,\dots,k. \tag{A.1}$$

Sean $p,q \in \{1,\dots,k\}$. Si $p = q$, entonces de la ecuación anterior tenemos que $S^{pp} \in A_{J_p},\ p = 1,\dots,k$. Supongamos que $p < q$, entonces $m_p \geq m_q$. Si $\lambda_p = \lambda_q$ de (A.1) tenemos que:

1. $S^{pq}_{ij} = S^{pq}_{i+1j+1},\ i = 1,\dots,m_p - 1,\ j = 1,\dots,m_q - 1;$
2. $S^{pq}_{m_pj} = S^{pq}_{i+11} = 0,\ i = 1,\dots,m_p - 1,\ j = 1,\dots,m_q - 1.$

Luego, de estas dos condiciones tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= S^{pq}_{21} = S^{pq}_{32} = \dots = S^{pq}_{m_q+1q}\,, \\ 0 &= S^{pq}_{31} = S^{pq}_{42} = \dots = S^{pq}_{m_q+2q}\,, \\ &\vdots \\ 0 &= S^{pq}_{m_p-11} = S^{pq}_{m_p2}, \\ 0 &= S^{pq}_{m_p1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $S^{pq} = \begin{pmatrix} X^{pq} \\ 0 \end{pmatrix}$ donde $X^{pq} \in A_{J_q}$ y $0 \in \mathrm{Mat}_{(m_p-m_q)\times m_q}(\mathbb{C})$. De (A.1) también se sigue que:

1. $S^{qp}_{ij} = S^{qp}_{i+1j+1},\ i = 1,\dots,m_q - 1,\ j = 1,\dots,m_p - 1.$
2. $S^{qp}_{m_qj} = S^{qp}_{i+11} = 0,\ i = 1,\dots,m_q - 1,\ j = 1,\dots,m_p - 1.$

Luego, de estas dos ecuaciones tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= S^{qp}_{m_qm_p-1} = S^{qp}_{m_q-1m_p-2} = \dots = S^{qp}_{1m_p-m_q}\,, \\ 0 &= S^{qp}_{m_qm_p-2} = S^{qp}_{m_q-1m_p-3} = \dots = S^{qp}_{1m_p-m_q-1}\,, \\ &\vdots \\ 0 &= S^{qp}_{m_q2} = S^{qp}_{m_q-11}, \\ 0 &= S^{qp}_{m_q1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $S^{qp} = \begin{pmatrix} 0^t & Y^{qp} \end{pmatrix}$ donde $Y^{qp} \in A_{J_q}$. Por otra parte, si $\lambda_p \neq \lambda_q$ de (A.1) tenemos que:

1. $\lambda_q S^{pq}_{ij} + S^{pq}_{ij-1} = \lambda_p S^{pq}_{ij} + S^{pq}_{i+1j},\ i = 1, \ldots, m_p - 1,\ j = 2, \ldots, m_q\,.$
2. $\lambda_q S^{pq}_{m_p j} + S^{pq}_{m_p j-1} = \lambda_p S^{pq}_{m_p j},\ j = 2, \ldots, m_q\,.$
3. $\lambda_q S^{pq}_{i1} = \lambda_p S^{pq}_{i1} + S^{pq}_{i+11}\,,\ i = 1, \ldots, m_p - 1.$
4. $\lambda_q S^{pq}_{m_p 1} = \lambda_p S^{pq}_{m_p 1} = 0.$

Luego, un proceso recursivo muestra que $S^{pq} = 0$. Análogamente, $S^{qp} = 0$. $\square$

Apéndice B

Clases de equivalencia

Sean $u, v \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ y $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Escribimos, $(u, g) \sim (v, g)$ si, y sólo si, existen un elemento S del grupo de isotropía de g, $\beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y $\gamma \in \mathbb{C}^m\backslash\{0\}$ tales que $v = \beta^{-1}(S(u) - (g + \mathrm{id})(\gamma))$. Un cálculo directo muestra que $\sim$ es una relación de equivalencia.

83 Lema. *Sea $g : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ una transformación lineal cuya forma canónica es un bloque de Jordan con valor propio λ. Sean $u, v \in \mathbb{C}^m\backslash\{0\}$. Entonces $(u, g) \sim (v, g)$ si, y sólo si, alguna de las siguientes condiciones se cumple.*

1. *$\lambda \neq -1$.*
2. *$\lambda = -1$ y $u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_m = 0\}$ ó $u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_m \neq 0\}$.*

Demostración. Sean $S \in G_g$, $\beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y $\gamma \in \mathbb{C}^m\backslash\{0\}$. Entonces,

$$\beta^{-1}(S(e_1) - (g + \mathrm{id})(\gamma)) = \beta^{-1} \begin{pmatrix} S_{11} - (\lambda+1)\gamma_1 - \gamma_2 \\ -(\lambda+1)\gamma_2 - \gamma_3 \\ \vdots \\ -(\lambda+1)\gamma_{n-1} - \gamma_m \\ -(\lambda+1)\gamma_m \end{pmatrix}.$$

Notemos que si $\lambda \neq -1$ y $v \in \mathbb{C}^m\backslash\{0\}$, entonces podemos resolver la ecuación

$$v = \beta^{-1}(S(e_1) - (g + \mathrm{id})(\gamma)) \tag{B.1}$$

Así, $(e_1, g) \sim (v, g)$. Luego, $(u, g) \sim (v, g)$ para $u, v \in \mathbb{C}^m\backslash\{0\}$.

Si $\lambda = -1$ y $v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_m = 0\}$, entonces también podemos resolver (B.1). Análogamente, $(u, g) \sim (v, g)$, $u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_m = 0\} \backslash \{0\}$. Observemos que si $v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_m \neq 0\}$ no es posible resolver (B.1). Entonces, $(e_1, g) \not\sim (v, g)$. Más aún, $(u, g) \not\sim (v, g)$, $u \in \{v \in \mathbb{C}^m | v_m = 0\} \backslash \{0\}$ y $v \in \{v \in \mathbb{C}^m | v_m \neq 0\}$. Por otra parte,

$$\beta^{-1}(S(e_m) - (g + \mathrm{id})(\gamma)) = \beta^{-1} \begin{pmatrix} S_{1m} - \gamma_2 \\ S_{1m-1} - \gamma_3 \\ \vdots \\ S_{12} - \gamma_m \\ S_{11} \end{pmatrix}.$$

Entonces, si $v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_m \neq 0\}$, y dado que $S_{11} \neq 0$, es posible resolver la ecuación $v = \beta^{-1}(S(e_m) - (g + \mathrm{id})(\gamma))$. Así, $(e_m, g) \sim (v, g)$. Por lo tanto, $(u, g) \sim (v, g)$ para $u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_m \neq 0\}$. $\square$

84 Lema. *Sea $g : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ una transformación lineal cuya forma canónica está dada por dos bloques de Jordan J_1 y J_2 de tamaños m_1 y m_2 con valores propios λ_1 y λ_2 respectivamente. Sean $u, v \in \mathbb{C}^m \backslash \{0\}$. Entonces $(u, g) \sim (v, g)$ si, y sólo si, alguna de las siguientes condiciones se cumple.*

1. $\lambda_1 \neq -1$ *y* $\lambda_2 \neq -1$.
2. $\lambda_1 \neq -1$, $\lambda_2 = -1$ *y* $u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_m = 0\}$.
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ *y* $u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_{m_1} = w_m = 0\}$ *o si* $m_1 = m_2$ *y* $u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_{m_1} \neq 0$ *ó* $w_m \neq 0\}$.

Demostración. Sea $S \in G_g$, $\beta \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ y $\gamma \in \mathbb{C}^m \backslash \{0\}$. Entonces,

$$\beta^{-1}(S(e_1) - (g + \mathrm{id})(\gamma)) = \beta^{-1} \begin{pmatrix} S_{11} - (\lambda_1 + 1)\gamma_1 - \gamma_2 \\ -(\lambda_1 + 1)\gamma_2 - \gamma_3 \\ \vdots \\ -(\lambda_1 + 1)\gamma_{m-1} - \gamma_m \\ -(\lambda_1 + 1)\gamma_m \\ S_{m_1+11} - (\lambda_2 + 1)\gamma_{m_1+1} - \gamma_{m_1+2} \\ -(\lambda_2 + 1)\gamma_{m_1+2} - \gamma_{m_1+3} \\ \vdots \\ -(\lambda_2 + 1)\gamma_{m-1} - \gamma_m \\ -(\lambda_2 + 1)\gamma_m \end{pmatrix}$$

Para los casos 1 y 2 anteriores, procedemos como en el Lema 83. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ y $v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_{m_1} = w_m = 0\}$, entonces es posible resolver la ecuación

$$v = \beta^{-1}(S(e_1) - (g + \mathrm{id})(\gamma)) \tag{B.2}$$

De aquí se sigue que $(u, g) \sim (v, g)$ siempre que $u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_{m_1} = w_m = 0\}$. Observemos que si $v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_{m_1} \neq 0 \text{ ó } w_m \neq 0\}$, entonces no es posible resolver (B.2). Luego $(e_1, g) \not\sim (v, g)$. Más aún, $(u, g) \not\sim (v, g)$, $u \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_{m_1} = w_m = 0\}$ y $\{w \in \mathbb{C}^m | w_{m_1} \neq 0 \text{ ó } w_m \neq 0\}$. Por otra parte tenemos que

$$\beta^{-1}(S(e_{m_1}) - (g + \mathrm{id})(\gamma)) = \beta^{-1} \begin{pmatrix} S_{1\,m_1} - \gamma_2 \\ S_{1\,m_1-1} - \gamma_3 \\ \vdots \\ S_{12} - \gamma_{m_1} \\ S_{11} \\ S_{m_1+1\,m_1} - \gamma_{m_1+2} \\ \vdots \\ S_{m_1+1\,2} - \gamma_m \\ S_{m_1+1\,1} \end{pmatrix}.$$

Entonces, si $m_1 = m_2$ tenemos que $S_{11} \neq 0$ ó $S_{m_1+1\,1} \neq 0$. Luego si $v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_{m_1} \neq 0 \text{ ó } w_m \neq 0\}$ podemos resolver la ecuación

$$v = \beta^{-1}(S(e_{m_1}) - (g + \mathrm{id})(\gamma)) \tag{B.3}$$

Así, $(e_{m_1}, g) \sim (v, g)$. Por lo tanto, $(u, g) \sim (v, g)$, $u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_{m_1} \neq 0 \text{ ó } w_m \neq 0\}$. Notemos que si $m_1 > m_2$, entonces $S_{m_1+1\,1} = 0$. Luego, si $v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_m \neq 0\}$ no es posible resolver (B.3). Así, $(e_{m_1}, g) \not\sim (v, g)$. Más aún, $(u, g) \not\sim (v, g)$, $u \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_{m_1} \neq 0\}$ y $v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_m \neq 0\}$. $\square$

85 Proposición. *Sea $g : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ una transformación lineal cuya forma canónica esta formada por k bloques de Jordan $J_1, \ldots, J_k$ de tamaños $m_1, \ldots, m_k$ y con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ respectivamente. Sean $\alpha(p) = \sum_{i=1}^{p} m_i$, $p \in \{1, \ldots, k\}$ y $p \leq q \in \{0, \ldots k-1\}$ y $u, v \in \mathbb{C}^m \backslash \{0\}$. Entonces, $(u, g) \sim (v, g)$ si, y sólo si, alguna de las siguientes condiciones se cumple.*

1. *$\lambda_{p+1} \neq -1$, $\lambda_{q+1} \neq -1$ y $u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_i = 0,\ i \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{ \alpha(p)+1, \ldots, \alpha(p+1), \alpha(q)+1, \ldots, \alpha(q+1) \} \}$.*

2. $\lambda_{p+1} \neq -1,\ \lambda_{q+1} = -1$ *y* $u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_i = 0,\ i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{ \alpha(p)+1, \ldots, \alpha(p+1), \alpha(q)+1, \ldots, \alpha(q+1)-1 \} \}$.

3. *Si* $\lambda_{p+1} = \lambda_{q+1} = -1$ *y* $u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_i = 0,\ i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{\alpha(p)+1, \ldots, \alpha(p+1)-1, \alpha(q)+1, \ldots, \alpha(q+1)-1 \} \}$ *ó si* $m_p = m_q$ *y* $u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_{\alpha(p+1)} \neq 0$ *ó* $w_{\alpha(q+1)} \neq 0\}$.

$\square$

86 Teorema. *Sea g como en la Proposición anterior. Si $\lambda_i \neq -1$, $i = 1, \ldots, k$, entonces existe una, y sólo una, clase de equivalencia. De otra forma, sea $p = min\{j \mid \lambda_p = -1\}$ y $B = \{m_{p+i} \mid m_{p+i} = m_{p+i+1},\ i = 0, \ldots, k-p-1\}$. Entonces, existen $k-p+2-\#B$ clases de equivalencia.*

Demostración. Si $\lambda_i \neq -1,\ i = 1, \ldots, k$ de la Proposición anterior tenemos que $(u, g) \sim (v, g),\ u, v \in \mathbb{C}^m \backslash \{0\}$. Por lo tanto, hay sólo una clase de equivalencia. En otro caso, sea $p = min\{j \mid \lambda_p = -1\}$, entonces $\lambda_{p+i} = -1,\ i = 0, \ldots, k-p$. Sean $u, v \in \mathbb{C}^m \backslash \{0\}$, por el Lema anterior tenemos que $(u, g) \sim (v, g),\ u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_{\alpha(p+i)} = 0, i = 0, \ldots, k-p\}$. Así, resta analizar el caso en que $u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m | w_{\alpha(p+i)} \neq 0,$ *para algún* $i \in 0, \ldots, k-p\}$. De la Proposición anterior tenemos también que si $m_{p+i} = m_{p+j}$, entonces

$$(u, g) \sim (v, g),\ u, v \in \{w \in \mathbb{C}^m \mid w_{\alpha(p+i)} \neq 0 \ \text{ ó } \ v_{\alpha(q+j)} \neq 0\},$$

$i \leq j = 0, \ldots, k-p$. Sea $B = \{m_{p+i} | m_{p+i} = m_{p+i+1},\ i = 0, \ldots, k-p-1\}$. Notemos que $A = \{m_p, m_{p+1}, \ldots, m_k\} \backslash B$ está formado por elementos distintos dos a dos. Luego, por el Lema anterior tenemos que

$$(u, g) \not\sim (v, g),\ u \in \{w \in \mathbb{C}^m \mid w_x \neq 0\} \text{ y } u \in \{w \in \mathbb{C}^m \mid w_y \neq 0\}$$

$x, y \in A$, $x \neq y$. Así, existen $1 + \#A = k-p+2-\#B$ clases de equivalencia distintas. $\square$

Referencias

[1] Cheng, S-J. Differentiably Simple Lie Superalgebras and Representation of Semisimple Lie Superalgebras. *Journal of Algebra*, **173** (1995), 1-43.

[2] Elduque, A. Lie Superalgebras with Semisimple Even Part. *Journal of Algebra*, **183** (1996), 649-663.

[3] Fulton, W., Harris, J. *Representation Theory, a First Course.* Graduate Texts in Mathematics, **129**, Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] Hall, B. C. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations An elementary Introduction.* Graduate Texts in Mathematics, **222**, Springer, New York, 2004.

[5] Hernández, I., Salgado, G., Sánchez-Valenzuela, O.A. Lie Superalgebras Based on a 3-Dimensional Real or Complex Lie Algebra. *Journal of Lie Theory*, **16** (2006), 539-560.

[6] Jacobson, N. *Lie Algebras.* Dover Publications, Inc. New York, 1979.

[7] Kac,V.G. Lie Superalgebras. *Advances in Mathematics*, **26** (1977), 8-96.

[8] Onishchik, A.L., Vinberg, E.L. *Lie Groups and Algebraic Groups.* Springer Verlag, Heidelberg, 1990.

[9] Salgado, G., Sánchez-Valenzuela, O.A. Lie Superalgebras Based on $\mathfrak{gl}_n$ Associated to the Adjoint Representation and Invariant Geometric Structure Defined on Them. *Communications in Mathematical Physics*, **241** (2003), 505-518.

[10] Salgado, G., Sánchez-Valenzuela, O.A. Lie Superalgebras over $\mathfrak{gl}(2)$. Sometido a publicación.

[11] Scheunert, M. *The Theory of Lie Superalgebras, an Introduction.* Lecture Notes in Mathematics, **716**, Springer-Verlag, New York, 1979.