Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

Operadores hipercíclicos sobre espacios de Banach

Carlos Osvaldo Osuna C.

Monografía presentada para la acreditación del examen de eficiencia profesional al Doctorado en Ciencias con orientación en Matemáticas Básicas

Jurado:
Dra. Maite Fernández Unzueta
Dr. Stephen B. Sontz
Dr. Fernando Galaz Fontes

8 de noviembre de 2002

Índice General

Preliminares

En esta sección damos una rápida introducción a algunos conceptos y resultados del análisis funcional, para una prueba de los resultados enunciados aquí véanse por ejemplo [2] y [8].

Definición: Un espacio métrico es una pareja (X, d) donde X es un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, que satisface $\forall x, y, z \in X$:

i).- $d(x, y) = 0$ sí y sólo sí $x = y$

ii).- $d(x, y) = d(y, x)$

iii).- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

La función d se llama métrica y diremos que $d(x, y)$ es la distancia entre x y y.

Dado un espacio métrico (X, d), $x \in X$ y un número $r > 0$ definimos la bola abierta de radio r y centro x como el conjunto

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Definición: Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X, d), es llamada una sucesión de Cauchy, si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para $m, n > N$.

Para muchos aspectos del Análisis es importante la siguiente condición.

Definición: Un espacio métrico X es completo si cualquier sucesión de Cauchy en el espacio converge a un punto en el espacio, es decir dada $\{x_n\}$ de Cauchy existe $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} \ d(x_n, x) = 0$.

Un conjunto A en un espacio métrico X se dice denso en ninguna parte, si su clausura $\overline{A}$ no tiene puntos interiores.

Teorema de Baire. *Un espacio métrico completo no vacío no es la unión de una familia numera-ble de conjuntos densos en ninguna parte.*

Este resultado es equivalente a decir que, en un espacio métrico completo la intersección numerable de abiertos densos es densa.

Ahora estudiaremos algunos conceptos centrales en Análisis y algunas de sus consecuencias, Cabe señalar que en estas notas sólo estaremos interesados en espacios vectoriales sobre los complejos $\mathbb{C}$.

Definición: Un espacio normado X es un espacio vectorial con una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, llamada norma y que satisface:

1.- $\|x\| = 0$ sí y sólo sí $x = 0$

2.- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

3.- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

para todo $x, y \in X$, y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Es inmediato que cualquier espacio normado es un espacio métrico definiendo

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Más aún imponiendo la restricción de completez a un espacio normado obtenemos la siguiente.

Definición: Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ que es completo con la métrica inducida por la norma, se llama un espacio de Banach.

Ejemplos:

a).- Una clase importante de espacios de Banach están son los siguientes.

Dado p tal que $1 \leq p < \infty$, sea

$$l_p := \{x = \{x_n\} |\ n \geq 0,\ x_n \in \mathbb{C} \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty\},$$

y definamos la función $\|x\|_p := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$ para todo $x \in l_p$. Puede verse que esta función define una norma sobre el espacio l_p y que con ésta, l_p es un espacio de Banach.

b).- Dados dos espacios de Banach, $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$, consideremos el conjunto $\mathcal{L}(X, Y)$ de transformaciones lineales continuas de X en Y. Es claro que $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio vectorial y definiendo para todo $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ la función,

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$$

se obtiene una norma. Con ella, $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio de Banach. Obsérvese que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es continuo sí y sólo sí $\|T\| < \infty$.

Casos particulares de interés son cuando $X = Y$. En este caso $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, Y)$

Otro caso de interés es cuando $(Y, \|\cdot\|) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$. Denotamos entonces $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$. A X^* lo llamamos el espacio dual de X y a sus elementos, funcionales.

Dentro de los espacios de Banach hay una clase de espacios muy interesantes los cuales se definen en seguida.

Definición: Un espacio con producto interior, es un espacio vectorial X con una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ tal que:

i).- $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ sí y sólo sí $x = 0$

ii).- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

iii).- $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

para todo $x, y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Diremos que $(X, \langle , \rangle)$ es un espacio de Hilbert, si la función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida como

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad \forall x \in X,$$

la cual es una norma, y con ésta X es un espacio de Banach.

No es dificil ver que l_2 es un espacio de Hilbert.

Definición: Sean X, Y espacios de Banach. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es un operador compacto si $\overline{T(B)}$ es compacto en Y, para cada subconjunto acotado B de X.

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es separable, si existe un conjunto numerable denso en X.

Ahora enunciamos dos resultados fundamentales del Análisis funcional.

Teorema del Mapeo Abierto. *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si T es sobreyectiva, entonces T lleva subconjuntos abiertos de X en subconjuntos abiertos de Y.*

Teorema de Hahn-Banach. *Sea M un subespacio de un espacio normado X, consideremos $p : X \to \mathbb{C}$ que satisface:*

i).- $p(x) \geq 0$

ii).- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$

iii).-$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Sea f un funcional lineal definido sobre M, tal que

$$|f(x)| \leq p(x) \text{ para toda } x \in M.$$

Entonces existe un funcional lineal $F : X \to \mathbb{C}$ que extiende a f y

$$|F(x)| \leq p(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Introducción a los Operadores hipercíclicos

Dado un espacio de Banach complejo $(X, \|\cdot\|)$, $T \in \mathcal{L}(X)$ y $x \in X$, la órbita de x es el conjunto

$$Orb(T, x) = \{T^n x : n \geq 0\}.$$

Definición: Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in \mathcal{L}(X)$. Se dice que $x \in X$ es hipercíclico para T, si $Orb(T, x)$ es densa en X. Diremos que T es hipercíclico si tiene un vector hipercíclico.

La importancia de los vectores hipercícliclos para $T \in \mathcal{L}(X)$ deriva del estudio de los subespacios invariantes bajo T, i.e., un subespacio cerrado F, $0 \neq F \neq X$, tal que $T(F) \subseteq F$. Más generalmente se intenta estudiar subconjuntos cerrados invariantes K, $\{0\} \neq K \neq X$ tal que $T(K) \subseteq K$.

El subespacio vectorial cerrado generado por la órbita de un vector es el subespacio cerrado "más pequeño" que define el vector y es invariante bajo el operador. Notemos que un operador no tiene subconjuntos invariantes cerrados no triviales sí y sólo sí, cada vector no-cero es hipercíclico.

Observamos que si existe un operador hipercíclico sobre X, entonces X debe ser separable.

Un hecho realmente sorprendente es la existencia de operadores hipercíclicos, pues no hay tales operadores en espacios de dimensión finita, lo cual es una consecuencia inmediata del siguiente resultado.

Proposición 1. *Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$. Si el transpuesto T^* tiene un eigenvalor, entonces T no es hipercíclico.*

Dem: Recordemos que si $T \in \mathcal{L}(X)$ su transpuesto se define como el operador $T^* : X^* \to X^*$ dado por $T^* f := f \circ T \ \forall f \in X^*$.

Ahora las hipótesis de la Proposición dicen que existe $f \in X^*$ no nulo y un número complejo λ tal que $T^* f = \lambda f$, por lo que para cualquier entero positivo n, tenemos $T^{*n} f = \lambda^n f$. Si $x \in X$ es un vector hipercíclico tendremos

$$f(T^n x) = T^{*n} f(x) = \lambda^n f(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Observemos que $\{\lambda^n f(x)\}$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{C}$, pero como x es hipercíclico, la imagen bajo f de $\{T^n x\}$ deberia ser densa en $\mathbb{C}$, lo cual es una contradicción. ■

De aquí resultan las siguientes consecuencias inmediatas:

Corolario 1. *No existen operadores hipercíclicos sobre espacios de Banach complejos de dimensión finita.*

Corolario 2. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ y x un vector hipercíclico para T. Entonces $\{T^n x\}$ es linealmente independiente.*

El primer ejemplo de un operador hipercíclico sobre un espacio de Banach fue exhibido por Rolewicz [10] en 1969. Él mostró que sobre l_p $(1 \leq p < \infty)$ existe un tal operador, construido a partir del "shift" hacia atrás B, más especificamente él prueba que αB con $|\alpha| > 1$ es hipercíclico. Más adelante daremos una prueba de este hecho.

A continuación estudiaremos algunas propiedades del concepto de hiperciclicidad la siguiente proposición es un resultado clasico de Sistemas Dinamicos.

Proposición 2. *Sea X un espacio de Banach separable y $T \in \mathcal{L}(X)$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

a).- *T tiene un subconjunto G_δ denso de vectores hipercíclicos.*

b).- *Para cualquier par U, V de subconjuntos abiertos no vacíos de X existe un entero positivo n tal que $T^n(U) \cap V \neq \varnothing$ (equivalentemente $U \cap T^{-n}V \neq \varnothing$).*

c).- *Para todo $x, y \in X$ existe una sucesión $\{x_k\}$ convergente a x y una sucesión $\{n_k\}$ de enteros positivos tales que $T^{n_k} x_k \to y$.*

Dem: La equivalencia entre $b)$ y $c)$ es directa por lo que sólo probaremos $a) \Leftrightarrow b)$.

Fijamos una colección $\{B_m : m \in \mathbb{N}\}$ de bolas abiertas en X con radio racional y centro en un subconjunto denso numerable de X. Ahora los conjuntos

$$G_m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(B_m) \quad m = 1, 2, ...$$

son abiertos. Notemos que la colección de vectores hipercíclicos para T es justamente $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} G_m$, por lo que los vectores hipercíclicos forman un conjunto G_δ.

La condición $b)$ es equivalente a que cada conjunto G_m es denso. Por lo tanto $b)$ y el teorema de Baire, implican $a)$.

Inversamente si el conjunto de vectores hipercíclicos es denso en X entonces cada conjunto G_m también lo es, lo que implica $b)$.■

Los siguientes dos corolarios aparecen en [6].

Corolario 3. *Sea X un espacio de Banach separable y $T \in \mathcal{L}(X)$. Si para todo U, V abiertos no vacíos de X y para cada vecindad W del cero de X existen infinitos enteros positivos n tal que $T^n(U) \cap W \neq \varnothing$ y $T^n(W) \cap V \neq \varnothing$, entonces T es hipercíclico.*

Dem: Verificaremos la condición $c)$ de la Proposición 2

Sean x, y dos puntos de X. La hipótesis implica que existen sucesiones $x_k \to x$, $z_k \to 0$ y una subsucesión $\{n_k\}$ de enteros positivos tales que:

$$T^{n_k} x_k \to 0 \qquad T^{n_k} z_k \to y.$$

Sean $w_k = x_k + z_k$. Por linealidad de T tenemos

$$T^{n_k} w_k = T^{n_k} x_k + T^{n_k} z_k \to 0 + y = y. \blacksquare$$

Ahora damos condiciones suficientes para la hiperciclicidad. El siguiente resultado fue descubierto por C. Katai en [7] e independientemente por Gethner y Shapiro en [5].

Proposición 3. *Sea X un espacio de Banach complejo separable y $T \in \mathcal{L}(X)$ que satisface:*

a).- *Existe un subconjunto Y denso en X sobre el cual $\{T^n\}$ converge puntualmente a cero.*

b).- *Existe un subconjunto Z denso en X y una función $S : Z \to Z$ (posiblemente no continua ni lineal) tal que:*

  i).- *TS es la función identidad sobre Z*

  ii).- *$\{S^n\}$ converge puntualmente a cero sobre Z*

Entonces T es hipercíclico sobre X.

Dem: Fijemos dos subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X. Usando la densidad de Y y Z, escogemos $y \in U \cap Y$ y $z \in V \cap Z$. Entonces $T^n y \to 0$ y $S^n z \to 0$ por lo que $x_n := y + S^n z \to y$. Por lo tanto $x_n \in U$ para todo n suficientemente grande.

Ahora del hecho que $TS = I$ sobre Z tenemos que $T^n S^n = I$ sobre Z. Entonces por la linealidad de T, $T^n x_n = T^n y + z \to z$. Por tanto $T^n x_n \in V$ para todo n suficientemente grande. Así hemos verificado la condición $b)$ de la proposición 2. $\blacksquare$

Damos ahora la prueba del Teorema de Rolewicz. Para ello consideremos el espacio l^p donde $1 \leq p < \infty$, y sea $B : l^p \to l^p$ el shift hacia atrás definido como

$$Bx = (x_1, x_2, \dots), \text{ donde } x = (x_0, x_1, \dots) \in l^p.$$

Teorema de Rolewicz. *Para cualquier $|\lambda| > 1$, el operador λB es hipercíclico sobre l^p para cada $1 \leq p < \infty$.*

Dem: Fijamos un escalar λ con $|\lambda| > 1$ y aplicaremos la proposición 3 a $T = \lambda B$. Sea U el "shift" hacia adelante sobre l^p :

$$Ux = (0, x_0, x_1, \dots), \text{ donde } x = (x_0, x_1, \dots) \in l^p.$$

Sea $S = \lambda^{-1}U$. Como $BU = I$ sobre l^p, también se cumple $TS = I$. Sea $Z := l^p$ y notemos que $\|S^n x\| = |\lambda|^{-n}\|x\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Sean Y la colección de sucesiones en l^p cuyos términos son cero, a partir de cierto índice . Este es un subespacio denso de l^p porque $p < \infty$. Entonces para cada $x \in Y$ tenemos que $B^n x$ es eventualmente cero. Luego se satisfacen las hipótesis de la proposición 3. ■

Corolario 4. *Sea H un espacio de Hilbert complejo y separable, fijemos una base ortonormal $\{e_n : n \geq 0\}$. Sea el operador B definido sobre H por*

$$Be_n = e_{n-1} \text{ si } n \geq 1, \; Be_0 = 0.$$

Si $|\lambda| > 1$, entonces λB es hipercíclico.

Para generalizar estos resultados se introduce la siguiente definición que aparece en [6].

Definición: Un operador lineal acotado B sobre X espacio de Banach complejo separable, se llama operador con Kernel numerablemente denso si

$$\bigcup_{n\geq 0} KerB^n \quad \text{es denso en } X.$$

Proposición 4. *Sea B un operador con Kernel numerablemente denso sobre un espacio de Banach X complejo separable y A un operador no escalar que conmuta con B. Si $KerB \subset KerA$ y además A es sobreyectiva, entonces para todo escalar λ de módulo suficientemente grande, el operador λA es hipercíclico.*

Dem: Sea B_1 la bola abierta unitaria de X. Como A es sobreyectiva, por el teorema del mapeo abierto existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon B_1 \subset A(B_1).$$

Entonces para cualquier escalar λ de módulo mayor que $1/\epsilon$ tenemos

$$(\lambda\epsilon)^n B_1 \subset (\lambda A)^n(B_1).$$

Como $|\lambda\epsilon| > 1$ esto implica

$$X = \bigcup_{n\geq 1} (\lambda A)^n(B_1).$$

Notemos que esta igualdad se sigue cumpliendo si reemplazamos B_1 por B_r y por lo tanto para cualquier vecindad de 0, i.e., si W es vecindad de 0 y V es abierto no vacío de X, entonces

$$(\lambda A)^n(W) \cap V \neq \varnothing \tag{1}$$

para n suficientemente grande.

Dado que A conmuta con B y $KerB \subset KerA$ tenemos $KerB^n \subset KerA^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En particular el conjunto

$$\bigcup_{n\geq 1} Ker(\lambda A)^n = \bigcup_{n\geq 1} KerA^n$$

es denso en X, entonces si U es un abierto no vacío de X y W una vecindad de 0, tenemos

$$(\lambda A)^n(U) \cap W \neq \varnothing, \tag{2}$$

para todo n suficientemente grande. Así (1) y (2) muestran que λA satisface la hipótesis del corolario 3, por lo tanto es hipercíclico. ■

Teorema de Bourdon-Feldman

Estudiaremos ahora una nueva e interesante caracterización de la condición de hiperciclicidad, más concretamente probaremos el siguiente resultado.

Teorema 1. *(Bourdon-Feldman) Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita, complejo y separable, $T \in \mathcal{L}(X)$ y $x \in X$. Si int $\overline{orb(T,x)} \neq \varnothing$, entonces x es hipercíclico para T.*

Comenzemos con alguna notación y definiciones que seran útiles mas adelante.

Denotamos por $\mathcal{P}$ la colección de polinomios en una variable con coeficientes complejos y por $\mathcal{P}^* := \mathcal{P}\backslash\{0\}$. Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$, $y \in X$ entonces

$$\mathcal{S}(T) := \{p(T) |\, p \in \mathcal{S}\} \quad , \quad \mathcal{S}(T)(y) := \{p(T)y : p \in \mathcal{S}\}.$$

Así mismo tomemos $orb(x) := orb(T, x)$.

Definición: Un vector $y \in X$ es cíclico para T, si $\mathcal{P}(T)x$ es denso en X. Antes de dar la prueba del teorema, consideramos los siguientes resultados.

Lema 1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$, $x \in X$ tal que int $\overline{orb(x)} \neq \varnothing$, entonces todo elemento de $orb(x)$ es un vector cíclico para T.*

Obsérvese primero que si $y \in orb(x)$, entonces *int* $\overline{orb(y)} =$ *int* $\overline{orb(x)}$.

Ahora dado que $orb(y) \subseteq \mathcal{P}(T)(y)$, entonces *int* $\overline{\mathcal{P}(T)(y)} \neq \emptyset$ y como $\overline{\mathcal{P}(T)(y)}$ es un subespacio vectorial entonces $\mathcal{P}(T)(y) = X$, pues un subespacio vectorial cerrado que contenga un abierto debe ser todo el espacio. Entonces $\mathcal{P}(T)y$ es denso en X. ■

Lema 2. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$, $x \in X$ tal que int $\overline{orb(x)} \neq \varnothing$, entonces todo $p(T)$ con $p \in \mathcal{P}^*$ tiene rango denso.*

Dem: Fijando $p \in \mathcal{P}^*$ entonces podemos escribir $p(T) = (T - \alpha_1 I) \ldots (T - \alpha_n I)$ donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son números complejos. Luego basta mostrar que cada factor $T - \alpha_i I$ tiene rango denso. Fijamos $\alpha \in \mathbb{C}$, si $T - \alpha I$ no tiene rango denso en X entonces por el Teorema de Hahn-Banach, existe un funcional lineal continuo f no idénticamente cero sobre X, que se anula en la imagen de $(T - \alpha I)$. Así $f \circ (T - \alpha I) = 0$ luego $f \circ T = \alpha f$, por lo tanto T^* tiene un eigenvalor α con eigenvector f. Ahora tenemos $f(intorb(x))$ es un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ (pues los funcionales lineales no nulos preservan abiertos). Pero $\{\alpha^n f(x)\}$ es denso en ninguna parte, i.e. $int\ \overline{\{\alpha^n f(x)\}} = \emptyset$, asi llegamos a una contradicción pues

$$\{f(T^n x)\} = \{\alpha^n f(x)\} \quad n \geq 0. \blacksquare$$

Lema 3. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$, $x \in X$ tal que $U := int\ \overline{orb(T,x)} \neq \varnothing$, entonces $X \backslash U$ es T-invariante.*

Dem: Sea $F := \overline{orb(x)}$. Dado que $U \neq \emptyset$, entonces cada punto de U es un punto límite de $orb(x)$. Como U es abierto entonces algún punto de $orb(x)$ pertenece a U. Así sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \in U$, esto porque $int\ \overline{orb(y)} = int\ \overline{orb(x)}$ $\forall y \in orb(x)$.

Ahora supongamos que $X \backslash U$ no es T-invariante. Por lo tanto existe algún $y \notin U$ tal que $Ty \in U$, más aún podemos suponer que $y \notin F$. En efecto, si $y \in F \backslash U$ entonces y está en la frontera de F. Luego podemos encontrar $y' \notin F$ suficientemente cercano a y, tal que Ty' esté suficientemente cercano a Ty por continuidad. Así Ty' esta en el abierto U y podemos tomar y' en lugar de y lo que prueba la afirmación.

Veamos que podemos suponer que existe un $p \in P^*$ tal que $y = p(T)x$. En efecto, como x es cíclico, es decir, $\mathcal{P}(T)x$ es denso en X, existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(T)x$ es suficientemente cercano a y el cual se encuentra en el abierto $X \backslash F$ y su imagen se encuentra en U (por continuidad de T y del hecho que U es abierto no vacío).

Es claro que p no es el polinomio cero pues $p(T)x \neq Tp(T)x$. Ahora dado que F es T-invariante y contiene a $Tp(T)x$ tenemos que

$$T^n p(T)x = p(T)T^n x \quad \in \quad F \qquad (n = 0, 1, \dots).$$

Por lo tanto

$$p(T)(orb(Tx)) \quad \subset \quad F.$$

Luego

$$p(T)\ int \overline{orb(Tx)} = p(T)U \quad \subseteq \quad p(T)F \quad \subset \quad F.$$

Como $x \in U$ entonces $p(T)x \in F$, lo que contradice que $p(T)x \notin F$. $\blacksquare$

Prueba del Teorema de Bourdon-Feldman.

Recordemos que, suponiendo $U := int\ \overline{orb(T,x)} \neq \varnothing$ esperamos probar que si $F := \overline{orb(x)}$, entonces $F = X$.

Supongamos que no. Por ser x cíclico para T entonces $\mathcal{P}(T)x$ es denso en X. Luego podemos encontrar una subcolección $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^*$ de polinomios tales que $\mathcal{Q}(T)x$ sea denso en $X\backslash F$. Por el lema 3, el conjunto $X\backslash U$ es T-invariante, así $\mathcal{Q}(T)(orb(x)) \subset X\backslash U$ y por continuidad tenemos:

$$\mathcal{Q}(T)(\overline{orb(x)}) \subseteq \overline{\mathcal{Q}(T)(orb(x))} \subseteq X\backslash U$$

Lema 4. *Para todo $p \in \mathcal{P}^*$ tenemos que $p(T)x \notin \partial U$ (donde ∂U es la frontera de U)*

Supongamos válido el lema 4 por un momento. Es claro que el conjunto

$$Z = \{p(T)x | p \in \mathcal{P}^*\}$$

es conexo. Por otra parte, podemos expresar a Z como la unión disjunta de los siguientes subconjuntos

$$G_1 = Z \cap U \quad \text{y} \quad G_2 = Z \cap (X\backslash U)$$

Ahora G_1 es abierto relativo en Z y por el lema 4, G_2 también lo es. Ambos son no vacíos pues $x \in G_1$ y $\mathcal{Q}(T)x \subset G_2$, lo que contradice la conexidad de Z y con ésto se demuestra el teorema 1. ■

Solo resta probar el lema 4. Para ello supongamos que $p(T)x \in \partial U$ para algún $p \in \mathcal{P}^*$. Sea $H := U \cup \mathcal{Q}(T)x$, el cual es denso en X. Ahora

$$p(T)H := p(T)U \cup p(T)\mathcal{Q}(T)x.$$

Tenemos entonces:

I.- Que $p(T)U$ se encuentra en $X\backslash U$ pues $p(T)x \in \partial U$. Como $X\backslash U$ es T-invariante entonces $p(T)(orb(x)) \subset X\backslash U$. Por continuidad de $p(T)$ tenemos que $p(T)U \subset p(T)F \subset X\backslash U$

II.- Por otra parte los elementos del segundo conjunto son de la forma $p(T)q(T)x = q(T)p(T)x$ para algún $q \in \mathcal{Q}$. Sin embargo $q(T)F \subset X\backslash U$ y $q(T)p(T)x \in q(T)F \subset X\backslash U$. Entonces $p(T)\mathcal{Q}(T)x \subset X\backslash U$.

Así, por (I) y (II) $p(T)H$ se encuentra contenido en $X\backslash U$, lo que contradice que $p(T)$ tiene rango denso (lema 2).■

Existencia de operadores Hipercíclicos

En [10] Rolewicz propuso el siguiente problema: ¿Existe un operador hipercíclico en cualquier espacio de Banach separable de dimensión infinita?

Una respuesta afirmativa al problema de Rolewicz fue dada por Ansari en [1], sin embargo L. Bernal en [3] da una prueba constructiva de este hecho, la cual daremos a continuación.

Teorema 2. *Sea X un espacio de Banach separable de dimensión infinita. Entonces existe $T \in \mathcal{L}(X)$ que es hipercíclico.*

Para la prueba de este Teorema se requieren los siguientes dos resultados, el primero aparece en [9] y el segundo en [11].

Proposición 5. *Si X es un espacio de Banach separable de dimensión infinita, entonces existe una sucesión $\{e_p\}_0^\infty \subset X$ y una sucesión $\{\varphi_q\}_0^\infty \subset X^*$ tales que:*

a).- $\varphi_q(e_p) = \delta_{pq}$ $\forall p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

b).- $\overline{span\{e_p | p \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}} = X$.

c).- $\|e_p\| = 1$ $\forall p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y* $sup_{q \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \|\varphi_q\| = c < \infty$.

Lema 5. *Sea $C_n = (c_{ij}(n))$ una matriz $2^k \times 2^k$, con entradas $c_{ij} = \binom{n}{2^k + j - i}$. Sea $B_n = (b_i(n))$ un vector columna tal que $b_i(n)$ es un polinomio en n de grado a lo mas $2^k - i$ ($i = 1, 2, ..., 2^k$). Entonces para n suficientemente grande existe una solución $X_n = (x_i(n))$ de la ecuación $B_n = C_n X_n$ y las entradas $x_i(n)$ satisfacen $|x_i(n)| < p/n^i$ donde $p = p(k)$ es una constante.*

Consideremos una sucesión $\{a_p\}_1^\infty$ de números reales positivos tal que la serie $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_p$ converja y definamos el operador lineal $S : X \to X$ como

$$Sx = \sum_{p=0}^{\infty} a_{p+1} \varphi_{p+1}(x) e_p \quad \forall x \in X$$

donde $\{e_p\}_0^\infty$ y $\{\varphi_p\}_0^\infty$ son como en la proposición 5. Es fácil ver que S está bien definido y es acotado, probaremos que $T := I + S$ es hipercíclico.

Tomemos una sucesión densa $\{z_k\}_1^\infty$ en X de la forma $z_k = \sum_{i=0}^{2^k-1} z_{i,k}e_i$ $(k \in \mathbb{N})$ y escalares $z_{i,k}$ $(k \in \mathbb{N},\ i = 0, 1, ..., 2^k - 1)$. Tenemos ahora el siguiente lema.

Lema 6. *Existe una sucesión creciente de números naturales $\{n_j\}_1^\infty$ y vectores $y_j = \sum_{i=2^j}^{2^{j+1}-1} b_ie_i$ $(j \in \mathbb{N})$ que cumplen:*

1. $\|y_j\| \leq 2^{-j}(1 + \|T\|)^{-n_{j-1}}$.
2. $\left\| T^{n_j}\left(\sum_{p=1}^{j} y_p\right) - z_j \right\| \leq 2^{-j}$.

Suponiendo verdadero el lema anterior, probaremos el teorema 2. Para ello considere-mos $y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j$ y veamos que éste es hipercíclico para T

Dado que $\{z_k\}$ es denso en X, basta probar que

$$\lim_{k\to\infty} \|T^{n_k}y - z_k\| = 0, \tag{3}$$

lo cual se sigue de

$$\begin{aligned}
\|T^{n_k}y - z_k\| &\leq \left\| T^{n_k}\left(\sum_{j=1}^{k} y_j\right) - z_k \right\| + \left\| \sum_{j=k+1}^{\infty} T^{n_k}y_j \right\| \\
&\leq 2^{-k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j}(1 + \|T\|)^{n_k}(1 + \|T\|)^{-n_{j-1}} \\
&\leq 2^{-k+1}
\end{aligned}$$

Esto prueba (3) y por lo tanto el teorema 2. ∎

Ahora procederemos a probar por inducción el lema 6. Tenemos que $T^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} S^r$ con $S^0 = I$. Además $Se_i = a_ie_{i-1}$ para $i \in \mathbb{N}$ y $Se_0 = 0$. En particular se cumple, para $m \in \mathbb{N}$

$$S^m e_s = \begin{cases} \left(\prod_{l=s-m+1}^{s} a_l\right) e_{s-m} & \text{si} \quad m \leq s \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para verificar el primer paso de inducción necesitamos encontrar $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ tales que

$$\|T^n(x_1e_2 + x_2e_3) - z_1\| \leq 1/2 \quad \text{con} \quad z_1 = \sum_{i=0}^{2-1} z_{i,1}e_i = z_{0,1}e_0 + z_{1,1}e_1.$$

Para esto observemos que

$$\begin{aligned} T^n(x_1e_2+x_2e_3)-z_1 &= x_1\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}S^re_2+x_2\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}S^re_3-z_1\\ &= x_1\left[\binom{n}{0}e_2+\binom{n}{1}a_2e_1+\binom{n}{2}a_2a_1e_0\right]\\ &+x_2\left[\binom{n}{0}e_3+\binom{n}{1}a_3e_2+\binom{n}{2}a_2a_3e_1+\binom{n}{3}a_3a_2a_1e_0\right]-z_1\\ &= (x_1+na_3x_2)e_2+x_2e_3+\left[\binom{n}{2}a_1a_2x_1+\binom{n}{3}a_1a_2a_3x_2-z_{0,1}\right]e_0\\ &+\left[\binom{n}{1}a_2x_1+\binom{n}{2}a_2a_3x_2-z_{1,1}\right]e_1. \end{aligned}$$

Imponiendo la condición

$$\varphi_p(T^n(x_1e_2+x_2e_3)-z_1)=0 \quad (p=0,1)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \binom{n}{2}x_1+\binom{n}{3}a_3x_2 &= \frac{z_{0,1}}{a_1a_2}\\ \binom{n}{1}x_1+\binom{n}{2}a_3x_2 &= \frac{z_{1,1}}{a_2}. \end{aligned}$$

El sistema lineal anterior posee una matriz como la matriz C_n del lema 5, con respecto a x_1, u_2 donde ($u_2 := a_3x_2$). Por lo tanto existe una constante p tal que $|x_1| < p/n$ y $|u_2| < p/(n^2)$, para n suficientemente grande. Haciendo $b_2 = x_1$, $b_3 = x_2$ y $y_1 = b_2e_2+b_3e_3$ entonces

$$\|y_1\| \leq (1/2)(1+\|T\|)^{-n_0} \quad \text{con } n_0 = 0.$$

Ahora tomamos $n_1 = n \in \mathbb{N}$ que satisface

$$\|y_1\| = \|x_1e_2+x_2e_3\| \leq |x_1|+|x_2| \leq p/n+p/n^2(a_3) \leq 1/2.$$

y

$$\|(x_1+n_1a_3x_2)e_2+x_2e_3\| \leq |x_1|+|x_2|+|n_1a_3x_2| \leq p/n+p/n^2(a_3)+p/n \leq 1/2.$$

Por tanto

$$\|T^{n_1}(x_1e_2+x_2e_3)-z_1\| \leq 1/2.$$

Ahora supongamos que $n_0 = 0 < n_1 < ... < n_{k-1}$ y $y_1, ..., y_{k-1}$ han sido construidos satisfaciendo las condiciones (1) y (2) del Lema 6. Hagamos el siguiente paso inductivo y por comodidad, definamos $b_0 = b_1 = 0$. Consideremos el sistema lineal

$$\varphi_p\left(T^n\left(\sum_{j=1}^{k-1} y_j + \sum_{i=1}^{2^k} x_i e_{2^k+i-1}\right) - z_k\right) = 0 \ (p = 0, 1, ..., 2^k - 1). \tag{4}$$

Para $p \in \{0, 1, ..., 2^k - 1\}$ fijo, de la ecuación anterior tenemos que

$$\left\{\sum_{j=1}^{2^k} x_j \varphi_p\left(T^n e_{2^k+j-1}\right) - \varphi_p(z_k)\right\} + \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{q=2^j}^{2^{j+1}-1} \varphi_p(T^n b_q e_q) = 0. \tag{5}$$

Observemos que

$$\sum_{j=1}^{2^k} x_j \varphi_p(T^n e_{2^k+j-1}) - \varphi_p(z_k) = \sum_{j=1}^{2^k} x_j \left[\varphi_p(e_{2^k+j-1}) + \sum_{q=1}^{n}\binom{n}{q}\varphi_p(S^q e_{2^k+j-1})\right] - z_{p,k}. \tag{6}$$

Ahora como $p \leq 2^k - 1$ y tomando $n \geq 2^{k+1}$ tenemos $\varphi_p(e_{2^k+j-1}) = 0$ si $j \geq 1$. Así, (6) es igual a

$$\sum_{j=1}^{2^k} x_j \sum_{q=1}^{2^k+j-1}\binom{n}{q}\left(\prod_{r=2^k+j-q}^{2^k+j-1} a_r\right)\cdot\varphi_p(e_{2^k+j-1-q}) - z_{p,k}.$$

Como

$$\varphi_p(e_{2^k+j-1-q}) = \delta_{p,2^k+j-1-q},$$

entonces tomando $p = 2^k + j - 1 - q$ obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{2^k} x_j \binom{n}{2^k + j - 1 - q}\left(\prod_{r=p+1}^{2^k+j-1} a_r\right) - z_{p,k}.$$

Por otro lado y usando los mismos argumentos, el segundo término en (5) es igual a

$$\begin{aligned}\sum_{q=2}^{2^k-1} b_q\left[\varphi_p(e_q) + \sum_{r=1}^{n}\tbinom{n}{r}\varphi_p(S^r e_q)\right] &= b_q + \sum_{q=2}^{2^k-1} b_q \sum_{r=1}^{q}\tbinom{n}{r}\left(\prod_{l=q-r+1}^{q} a_l\right)\delta_{p,q-r} \\ &= b_q + \alpha_p,\end{aligned}$$

donde

$$\alpha_p = \begin{cases} \sum_{q=2}^{2^k-1} b_q \binom{n}{q-p} \prod_{l=p+1}^{q} a_l & \text{si} \quad p < 2^k - 1 \\ 0 & \text{si} \quad p = 2^k - 1. \end{cases}$$

Haciendo $i = p + 1$ para $i \in \{1, ..., 2^k\}$, la matriz de (4) con entradas $d_{ij} = \binom{n}{2^k+j-i} \cdot \prod_{r=i}^{2^k+j-1} a_r$ es esencialmente la matriz $2^k \times 2^k$ del lema 5 (para una prueba de que los pesos conformados por productos de a_i, no afectan los estimados de los $\{x_i\}_{i=1}^{2^k}$ ver Salas [11]).

Así para n suficientemente grande, las soluciones satisfacen $|x_i| \leq p/n^i$ con $p = p(k)$ constante. Ahora

$$\begin{aligned} T^n\left(\sum_{j=1}^{k-1} y_j + \sum_{i=1}^{2^k} x_i e_{2^k+i-1}\right) - z_k &= \sum_{q=2}^{2^k-1} b_q \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S^j\right) e_q + \sum_{q=1}^{2^k} \left(\sum_{j=q}^{n} \binom{n}{j} S^j\right) x_q e_{2^k+q-1} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{2^k-1} z_{q,k} e_q + \sum_{q=1}^{2^k} \left(\sum_{j=0}^{q-1} \binom{n}{j} S^j\right) x_q e_{2^k+q-1} \end{aligned}$$

De (4) tenemos que los coeficientes en la expansión $\{e_p\}_0^\infty$ son nulos para $p = 0, 1, ..., 2^k - 1$. La ecuación anterior resulta entonces igual a

$$\sum_{q=1}^{2^k} \left(\sum_{j=0}^{q-1} \binom{n}{j} S^j\right) x_q e_{2^k+q-1}.$$

Así,

$$\left\| T^n\left(\sum_{j=1}^{k-1} y_j + \sum_{i=1}^{2^k} x_i e_{2^k+i-1}\right) - z_k \right\| \leq \sum_{q=1}^{2^k} \left(\sum_{j=0}^{q-1} \binom{n}{j} S^j\right) \|x_q\| \leq Q/n,$$

para alguna constante Q (que solo depende de k).

Eligiendo $n_k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $|x_i(n_k)| \leq 4^{-k}(1 + \|T\|)^{-n_{k-1}}$ para $i = 1, ..., 2^k - 1$ y $n_k > \max\{2^k Q, n_{k-1}\}$, hacemos

$$b_{2^k+i-1} := x_i \ (i = 1, ..., 2^k) \ \text{ y } \ y_k = \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} b_i e_i.$$

Luego

$$\|y_k\| \leq 2^{-k}(1+\|T\|)^{-n_{k-1}} \text{ y } \left\| T^{n_k}\left(\sum_{j=1}^{k} y_j\right) - z_k \right\| \leq Q/n_k \leq 2^{-k}.$$

Así, hemos verificado las condiciones (1) y (2) del lema 6 para $j = k$, lo que termina la inducción y por lo tanto prueba el Lema 6.■

Dado que el operador hipercíclico que se ha construido en [3] es de la forma $I + K$ con K compacto. Se plantea la siguiente cuestión:

Problema 1: ¿En un espacio de Banach existe un operador hipercíclico que no sea de la forma $I + K$?.

Una respuesta parcial la da el siguiente lema.

Lema 7. *Sea $T \in mathcalL(X)$ y X un espacio de Banach complejo separable. Si T es un operador hipercíclico de la forma $T = I + K$ con K compacto, entonces T es invertible.*

Dem: Sea x el vector hipercíclico para T. Por ser T un operador Fredholm, el rango de T es cerrado. Se cumple entonces que $X = \overline{\{T^n x\}} \subseteq RangoT$. Por lo tanto T es sobreyectiva.

Además, $dimKerT = dimKerT^* = 0$ por ser T sobreyectiva. Luego T es invertible. ■

Corolario 5. *Los operadores con Kernel numerablemente denso sobre espacios de Banach complejos separables, no son de la forma $I+K$ con K compacto. En particular el problema 1 se responde afirmativamente en espacios de Hilbert.*

Agradecimientos

Agradezco a la Dra. Maite Fernández U. por haberme propuesto este tema. También a los Drs. Fernando Galaz F. y Stephen B. Sontz, por sus comentarios tanto en el contenido como en la presentación, los cuales resultaron muy útiles en el desarrollo de esta monografía.

Bibliografía

[1] S.I. Ansari, Hypercyclic operators on topological spaces. *J. Func. Anal.*; to appear

[2] Bachman, G. and Narici, L, *Functional Analysis.*; Dover Publication, Inc. (2000)

[3] Bernal-Gonzalez, On Hypercyclic operators on Banach spaces *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol. 127 Num. 4 (1999), 1003-1010.

[4] Bourdon S.P. and Feldman N.S, Somewhere dense orbits are everywhere dense. Preprint. (2001).

[5] R.R. Gethner and J. H. Shapiro, Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 100 (1987), 281-288.

[6] G. Godefroy and J. Shapiro, Operators with dense, invariant cyclic vector manifolds, *J. Funct. Anal.* 98 (19919, 229-269.

[7] C. Katai, *Invariant closed sets for linear operator*, Thesis, Univ. of Toronto, 1982.

[8] Morrison, T.J, *An Introduction to Banach Space Theory*, A Wiley-Interscience series of Texts, (2000), p. 359.

[9] R.I. Ousepian and A. Pelczynski, The existence in every separable Banach space of a fundamental total and bounded biorthogonal sequence and related constructions of uniformily bounded orthogonal systems in L^2, *Studia Math.* 54 (1975), 149-155.

[10] S. Rolewicz, On orbits of elements, *Studia Math.* 33 (1969) 17-22

[11] H.N. Salas, Hypercyclic weighted shifts, *Trans. Amer. Math. Soc.* 347 (1995), 993-1003.