Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

# Operadores lineales compactos en espacios vectoriales topológicos

Gabriel Ruiz Hernández

Monografía que satisface el examen de eficiencia profesional, requisito para la obtención del grado de Doctor en Matemáticas Básicas

Enero de 2004, Guanajuato, Gto., México

## Agradecimientos

Deseo brindar reconocimiento a los profesores que generosamente me ayudaron a la comprensión del artículo original, además de que gracias a su critica tanto a la gramática como al rigor y claridad matemática fue posible mejorar este trabajo:

Profesor Fernando Galaz Fontes,

Profesora Helga Fetter Nathansky,

Profesora Maite Fernández Unzueta.

Además de haber sido una experiencia satisfactoria, este trabajo representa para mí una referencia y un punto de partida para uno de lo quehaceres de los matemáticos: que es comunicar su pasión por esta área del conocimiento por medio del lenguaje escrito.

# Contenido

# 1 Introducción

Este reporte está basado en el artículo [9] de J. H. Williamson, y tiene por objeto principal presentar sus resultados de manera más detallada, tarea que se ha llevado a cabo de tres maneras. Primero, exponiendo algunos de los principios básicos de la teoría de los espacios vectoriales topológicos, especificamente aquéllos que son necesarios para entender [9]. Segundo, con ayuda de los resultados generales que se incorporaron en la primera parte, se hicieron más explícitas las demostraciones del artículo. Tercero, se probaron algunas afirmaciones hechas por Williamson, las cuales supuso que eran resultados conocidos y parte del folklore del tema.
Para mayor claridad, los resultados de la teoría que se incorporaron aparecen enunciados como proposiciones, mientras que los resultados de Williamson aparecen como en el artículo original, es decir como lemas, corolario y teoremas. Estos resultados están concentrados principalmente en la subsección 4.2.

Por otro lado, el resultado principal de [9] es la extensión del teorema de "la alternativa de Fredholm" a operadores lineales compactos en espacios vectoriales topológicos, no necesariamente localmente convexos (Teorema 1).
En su trabajo, Williamson hace un uso extenso del artículo [6], de J. Leray, por lo cual se incluyeron varios resultados (con demostraciones) de tal documento.

# 2 Topología

## 2.1 Filtro

Los siguientes conceptos relacionados con filtros pueden ser consultados en [5],pags. 11-13, ó en [8], pags. 3-5.

**Definición 2.1** Una familia no vacía $F = \{F_\alpha \mid \alpha \in I\}$ de subconjuntos de un conjunto $X$ se llama un *filtro* sobre $X$, si:
(1) Todo subconjunto de $X$ que contenga un $F_\alpha$ pertenece a $F$,
(2) La intersección finita de $F_\alpha$ 's pertenece a $F$,
(3) El conjunto vacío no pertenece a $F$.

**Definición 2.2** Una familia no vacía $F'$ de subconjuntos de $X$, se llama *base filtrada* sobre X si satisface las condiciones:
(1)La intersección de dos elementos de F' contiene un elemento de F',
(2)El conjunto vacío no pertenece a F'.

Toda base filtrada $F'$ genera un único filtro $F$ sobre $X$, tal que $F$ consiste en todos aquellos subconjuntos de $X$ los cuales contienen un elemento de $F'$. La familia $F'$ se llama una base del filtro $F$.

En las siguientes dos definiciones $Y$ denotará un espacio topológico.

**Definición 2.3** Se dice que una *base filtrada* $F = \{F_\alpha \mid \alpha \in I\}$ en $Y$ *converge a* $y \in Y$, si para toda vecindad $U$ de $y$, existe un $F_\alpha \subset U$. El punto $y$ es llamado *límite de la base filtrada.*

Si $Y$ es Hausdorff, existe a lo más un límite.

**Definición 2.4** Sea $F = \{F_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una base filtrada sobre $Y$. Entonces $y \in Y$ es un *punto de adherencia* de $F$ si $y$ está en la cerradura de $F_\alpha$ para toda $\alpha \in I$.

Esto equivale a que $F_\alpha \cap V \neq \emptyset$, para toda vecindad de $y$, y para toda $\alpha \in I$.

**Definición 2.5** Sean $F$, $G$ bases filtradas sobre $Y$. Decimos que $F$ es un *refinamiento* de $G$, si $G \subset F$.

**Proposición 2.1** *Sean $F$, $G$ bases filtradas sobre $Y$. Si $G \subset F$ y $G$ converge a $x$, entonces $F$ también converge a $x$.*

Demostración: Sea $V$ una vecindad de $x$ en $Y$. Como $G$ converge a $x$, existe algún $G_\alpha \in G$ tal que $G_\alpha \subset V$. Dado que $F$ es un refinamiento de $G$, entonces $G_\alpha \in F$. En resumen, hemos exhibido un elemento, $G_\alpha$, de $F$ tal que $G_\alpha \subset V$.
□

**Proposición 2.2** *Si $F$ es una base filtrada sobre $X$ y $T : X \longrightarrow Y$, entonces $T(F)$ es una base filtrada sobre $Y$.*

Demostración: Sea $F = \{F_\alpha\}$, entonces $T(F) = \{T(F_\alpha)\}$ es una familia no vacía, y como $\emptyset \notin F$, también es cierto que $\emptyset \notin T(F)$. Así que sólo resta probar la propiedad (1) de la def. 2.2.
Sean $T(F_\alpha)$, $T(F_\beta) \in T(F)$. Sabemos que existe $F_\gamma \in F$ tal que $F_\gamma \subset F_\alpha \cap F_\beta$. Aplicando $T$ obtenemos $T(F_\gamma) \subset T(F_\alpha \cap F_\beta) \subset T(F_\alpha) \cap T(F_\beta)$.
□

**Proposición 2.3** *Sea $Y$ un espacio topológico y $T : Y \longrightarrow Y$ una función continua. Sea $F$ una base filtrada sobre $Y$ y $x$ un punto de adherencia de $F$. Entonces $T(x)$ es un punto de adherencia de $T(F)$.*

Demostración: Sea $F = \{F_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Por hipótesis, $x \in \overline{F_\alpha}$, para todo $\alpha \in I$.
Como $T$ es continua

$$T(\overline{F_\alpha}) \subset \overline{T(F_\alpha)}.$$

Por lo tanto, si $\alpha \in I$, $T(x) \in \overline{T(F_\alpha)}$. Esto indica que $T(x)$ es un punto de adherencia de $T(F)$.
□

**Definición 2.6** Un espacio topológico $Y$ es *regular*, si para todo punto $y \in Y$ y todo subconjunto $A$ de $Y$, tal que $A$ es cerrado y no contiene a $y$, se tiene que existen vecindades $U$ de $y$ y $V$ de $A$, tales que $U \cap V = \emptyset$.

Equivalentemente, para todo punto $y \in Y$ y para toda vecindad $U$ de $y$ existe una vecindad $V$ de $y$ tal que $\overline{V} \subset U$.

**Definición 2.7** Un subconjunto $A$ de un espacio métrico $Y$ es *totalmente acotado* si para todo $\epsilon > 0$, $A$ está contenido en una unión finita de bolas abiertas de radio $\epsilon$.

**Proposición 2.4** *Si $A$ es un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo $Y$, entonces las siguientes tres propiedades son equivalentes:*
*(a) $A$ es compacto.*
*(b) Todo subconjunto infinito de $A$ tiene un punto límite en $A$.*
*(c) $A$ es totalmente acotado.*

Demostración: (a) $\Rightarrow$ (b). Si $B \subset A$ es infinito y ningún punto de $A$ es punto límite de $B$, entonces existe una cubierta abierta $\{V_\alpha\}$ de $A$ tal que cada $V_\alpha$ contiene a lo más un punto de $B$. Por lo tanto $\{V_\alpha\}$ no tiene una subcubierta finita, lo cual es una contradicción.
(b) $\Rightarrow$ (c). Fijemos $\epsilon > 0$ y sea $d$ la métrica de $Y$. Elijamos $x_1 \in A$. Supongamos que se han escogido $x_1, x_2, ..., x_n \in A$ tales que tal que para todo $i \neq j$, $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$. Si es posible escoja $x_{n+1} \in A$ tal que para todo $1 \leq i \leq n$, $d(x_{n+1}, x_i) \geq \epsilon$. Este proceso debe terminar después de un número finito de pasos, pues estamos suponiendo que (b) es válido. Entonces las bolas de radio $\epsilon$ con centro en $x_1, x_2, ..., x_n$ cubren a $A$.
(c) $\Rightarrow$ (a). Sea $\Gamma$ una cubierta abierta de $A$, y supongamos (por contradicción) que ninguna



subcubierta finita contenida en $\Gamma$ cubre a $A$. Por (c) $A$ es la unión de un número finito de conjuntos cerrados de diametro $\leq 1$. Alguno de estos, digamos $A_1$, no se puede cubrir por un número finito de miembros de $\Gamma$. Ahora hagamos lo mismo con $A_1$ en lugar de $A$ y sigamos con este proceso. El resultado es una sucesión de conjuntos cerrados $\{A_i\}$ tal que:

(i) $... \subset A_2 \subset A_1 \subset A$,
(ii) diam $A_n \leq 1/n$,
(iii) Ningún $A_n$ se puede cubrir con un número finito de miembros de $\Gamma$.

Elija $x_n \in A_n$. Por (i) y (ii) $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Como $Y$ es completo y cada $A_n$ es cerrado, $\{x_n\}$ converge a un punto $x \in \bigcap A_n$. Como $\Gamma$ es cubierta de $A$, $x \in V$ para algún $V \in \Gamma$. Por (ii), tenemos que $A_n \subset V$ siempre y cuando $n$ sea suficientemente grande. Pero esto contradice (iii).
□

# 3 Espacios vectoriales topológicos

## 3.1 Nota histórica

Aunque la teoría de espacios normados estuvo mucho tiempo a la vanguardia del desarrollo del Análisis Funcional, pronto se observó que estos no agotaban la posibilidad de aplicar conceptos topológicos a la disciplina. Las diferentes nociones que pertenecen a lo que ahora llamamos la teoría general de los espacios vectoriales topológicos, hicieron su aparición de manera aleatoria y el estudio sistemático sobre el tema se inició hasta 1950.
En la tesis de M. Fréchet ya se encontraban algunos ejemplos de tales espacios. En dicho trabajo se pone énfasis no en las propiedades algebraicas sino en la posibilidad de definir su topología por una métrica y en el hecho de que los espacios métricos obtenidos de esa manera son completos. El hecho de que la suma vectorial y la multiplicación por un escalar son funciones continuas en tales espacios fue enfatizada explícitamente por Fréchet en 1926; la idea fue continuada por Banach quien consideró estos espacios de manera general bajo el nombre de "espacios de tipo F" y demostró que el teorema de la gráfica cerrada también es válido en estos espacios. Un poco después, el método que Fréchet usó para definir la distancia de sus ejemplos de 1906 fue sistematizado por S. Mazur y W. Orlicz y lo llamarón la teoría de "espacios de tipo $B_0$". Éstos son los que ahora conocemos como espacios de Fréchet, donde la topología se define por una sucesión de seminormas. Se puede probar que en los ejemplos de Fréchet la topología no se puede definir por una sola norma. Otros tipos de espacios son incluso no metrizables, observación hecha por von Neumann en 1929 para la topología débil sobre un espacio de Hilbert, de dimensión infinita.
En 1932 surgió una noción nueva, la de conjunto acotado. Banach observó que si se tenían dos normas $||x||_1$, $||x||_2$ sobre el mismo espacio vectorial tal que las razones $||x||_1/||x||_2$ y $||x||_2/||x||_1$ están acotadas para todo $x \neq 0$, entonces definen la misma topología y por lo tanto, si uno define un conjunto acotado en un espacio normado $E$ como aquél que está contenido en alguna bola, se tiene que esta noción es independiente de la norma particular elegida. Sin embargo en un espacio métrico arbitrario, dos métricas pueden dar lugar a la misma topología y dar conjuntos acotados completamente diferentes. Pero para espacios vectoriales topológicos es posible dar una definición de conjuntos acotados que sólo depende de la topología y coincide con la definición previa para espacios normados. El primer resultado general que se obtuvo haciendo uso de esta noción fue la caracterización de los espacios vectoriales topológicos para los cuales la topología se puede definir por una norma. Esta caracterización fue hallada por Kolmogoroff en 1935: son aquéllos para los cuales existe una vecindad acotada del 0.

Todos los espacios vectoriales topológicos mencionados antes pertenecen a lo que ahora llamamos "espacios localmente convexos". La definición general de estos espacios fue dada por von Neumann en 1935, en vista de un estudio de funciones casi periódicas. Este hecho coincidió con el resurgimiento en el interés acerca de las propiedades de los conjuntos convexos en espacios vectoriales topológicos, los cuales habían sido olvidados después de Helly. En el libro de Banach sólo son mencionados brevemente en una nota al final del libro.
Sin embargo, en 1933, S. Mazur dio la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach, con lo cual generaliza la teoría de Minkowski, al probar que, si $A$ es un conjunto convexo abierto



en un espacio normado $E$, entonces existe un hiperplano soporte cerrado en cada punto frontera de $A$. Un poco después M. Krein y D. Millman introdujeron el concepto de punto extremo para un conjunto convexo, es decir un punto de $A$ tal que no existe un segmento de línea abierto que contenga al punto y que esté contenido en $A$. Ellos probaron el hecho sobresaliente de que siempre existen suficientes puntos extremos para un conjunto convexo cerrado $A$. Más precisamente, $A$ es el conjunto convexo cerrado mas pequeño que contiene a todos sus puntos extremos. Este teorema tiene aplicaciones importantes en varias áreas del Análisis Funcional.

## 3.2 Definición y ejemplos

**Definición 3.1** Sea $(E, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donde $+ : E \times E \longrightarrow E$ es la suma vectorial y $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ es el producto por un escalar. Se dice que $E$ es un *espacio vectorial topológico*, (e.v.t.), si $E$ tiene una topología Hausdorff tal que se satisfacen los axiomas de compatibilidad:
(a) la aplicación $+$ es continua,
(b) la aplicación $\cdot$ es continua.

En la definición anterior $\mathbb{K}$ tiene la topología estándar y tanto $E \times E$ como $\mathbb{K} \times E$ tienen la topología producto.
A cada $x \in E$ le podemos asociar la traslación por $x$: $T_x : E \longrightarrow E$ dada por

$$T_x(y) = y + x.$$

Por otro lado, también a cada $a \in \mathbb{K}$ le podemos asociar la función $L_a : E \longrightarrow E$ dada por

$$L_a(y) = ay.$$

Estas funciones resultan ser homeomorfismos de $E$ en $E$.
Finalmente a cada $x \in E$ también le podemos asociar una función $R_x : \mathbb{K} \longrightarrow E$ dada por

$$R_x(z) = zx,$$

donde $z \in \mathbb{K}$. Esta función es inyectiva y continua. De hecho es un homeomorfismo de $\mathbb{K}$ sobre su imagen.

### Ejemplos de espacios vectoriales topológicos

1. Espacios Normados
   Son espacios vectoriales que tienen una norma $|| \cdot ||: E \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual induce una métrica:

   $$d(x, y) = ||x - y||,$$

   donde $x,\ y \in E$ y entonces una topología en $E$. Con esta topología $E$ es un espacio vectorial topológico.

2. Espacios de Banach
Son espacios normados donde la métrica inducida por la norma es completa, es decir toda sucesión de Cauchy converge.

3. Espacios pre-Hilbert
Son espacios vectoriales $E$ sobre el campo $\mathbb{K}$ con una función $(.,.) : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ llamada producto interior tal que:
Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,
(a) $(y,x) = \overline{(x,y)}$.
Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,
(a') $(y,x) = (x,y)$.
(b) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$.
(c) $(ax,y) = a(x,y)$.
(d) $(x,x) \geq 0$.
(e) $(x,x) = 0$ implica $x = 0$.

4. Espacios de Hilbert
Son espacios pre-Hilbert donde la métrica inducida por el producto interior es completa.

5. Espacios localmente convexos
Son espacios vectoriales topológicos donde toda vecindad del 0 contiene una vecindad de 0 que es convexa.

6. Espacios localmente compactos
Son espacios vectoriales topológicos donde existe una vecindad del 0 con cerradura compacta. Esta condición es muy fuerte ya que obliga a que estos espacios sean de dimensión finita.

7. Espacios localmente acotados
Son espacios vectoriales topológicos donde existe una vecindad acotada del 0.

8. Espacios metrizables
Son espacios vectoriales topológicos donde la topología es compatible con alguna métrica $d$.

9. F-espacios
En estos espacios la topología es inducida por una métrica completa $d$ que es invariante bajo traslaciones. Esto último quiere decir que para todo $x, y, z \in E$, se cumple $d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

10. Espacios de Fréchet
Son F-espacios que además son localmente convexos.

A lo largo de este reporte $E$ va a denotar a un espacio vectorial topológico, a menos que se diga lo contrario.



## 3.3 Subconjuntos, subespacios, operaciones algebraicas y topológicas

En un espacio vectorial topológico $E$ hay una gran variedad de subconjuntos. Se pueden clasificar de acuerdo a sus propiedades algebraicas, topológicas y combinaciones de ambas.

Comentario: A menos que se indique lo contrario, en adelante la palabra "vecindad" la emplearemos para referirnos a una vecindad abierta del $0 \in E$.
Notación: Fijaremos la siguiente notación estándar para algunas operaciones algebraicas (no dependen de la topología) entre subconjuntos de $E$. Sean $A, B \subset E$, $x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$x + A = \{x + a \mid a \in A\},$$
$$x - A = \{x - a \mid a \in A\},$$
$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\},$$
$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

Notación: Fijaremos la siguiente notación para algunas operaciones topológicas (no dependen de la estructura algebraica) para un subconjunto de $E$. Si $A \subset E$, entonces por $\overline{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$, $int(A)$ vamos a denotar la cerradura, la frontera y el interior de $A$ respectivamente.

**Definición 3.2** Un subconjunto $A$ de un espacio vectorial topológico $E$ se llama *acotado* si para toda vecindad $V$ de 0 en $E$ existe un número real $s > 0$ tal que $A \subset tV$ para todo $t > s$.

**Definición 3.3** Un subconjunto $B \subset E$ es *balanceado*, si para todo $x \in B$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| \leq 1$ se tiene $\alpha x \in B$.

Comentario:Dos propiedades inmediatas de los conjuntos balanceados $B \subset E$ son las siguientes:
(1) si $0 < a \leq b$, entonces $aB \subset bB$,
(2) si $0 < a$, entonces $aB$ es balanceado.
Nótese que un subconjunto balanceado es conexo y de hecho arco-conexo.

**Proposición 3.1** *Toda vecindad en $E$ contiene una vecindad balanceada.*

Demostración: Sea $U$ una vecindad de $0 \in E$. Como la multiplicación por un escalar, $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$, es una aplicación continua, existe un $\delta > 0$ y existe una vecindad $V$ del $0 \in E$ tal que $\alpha V \subset U$, para todo $|\alpha| < \delta$. Sea $W = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V$. Entonces $W$ es una vecindad de 0. Además es balanceada ya que si $\beta \in \mathbb{K}$, $|\beta| \leq 1$ y $x \in W$, entonces $x \in \alpha V$ para algún $|\alpha| < \delta$ y $\beta x \in \beta\alpha V \subset W$, ya que $|\beta\alpha| < \delta$.
□

**Proposición 3.2** *Si $V$ es una vecindad en $E$, entonces existe una vecindad $W$ tal que $W + W \subset V$.*

Demostración: Como la suma vectorial, $+$, es continua, en particular es continua en 0. Así que dada la vecindad $V$ de $0 \in E$ y como $0+0=0$, existe una vecindad de $(0,0) \in E \times E$ de la forma $V_1 \times V_2$, tal que $V_1 + V_2 \subset V$. Tomando ahora $W = V_1 \cap V_2$, se obtiene la vecindad buscada.
□

**Definición 3.4** Un subconjunto $B \subset E$ es *absorbente* si para cada $x \in E$ existe $r \in I\!R$, $r > 0$ tal que $\lambda x \in B$ para todo $\lambda \in I\!K$ con $|\lambda| \leq r$.

**Proposición 3.3** *Toda vecindad es absorbente.*

Demostración: Sea $x \in E$. Ya mencionamos que la función $R_x : I\!K \longrightarrow E$ dada por $R_x(z) = zx$, es continua. Sea $V$ cualquier vecindad. Como $R_x(0) = 0$ existe una vecindad $A$ de 0 en $I\!K$, de la forma $\{\lambda \in I\!K \mid |\lambda| \leq r\}$, tal que $R_x(A) \subset V$. Luego, $\lambda x \in V$ para todo $|\lambda| \leq r$.
□

**Proposición 3.4** *Sea $U$ una vecindad. Entonces para todo $x \in E$ existe $m \in I\!N$, tal que si $k \geq m$, se cumple que $x \in kU$.*

Demostración: Es una consecuencia de la prop. 3.3, ya que por ésta existe $r \in I\!R$, $r > 0$ tal que $\lambda x \in U$ para todo $\lambda \in I\!K$ con $|\lambda| \leq r$. Por otro lado, existe $m \in I\!N$ tal que para todo $k \geq m$, se satisface que $\frac{1}{k} \leq r$. Esto implica que $\frac{1}{k}x \in U$, es decir $x \in kU$.
□

**Proposición 3.5** *Si $E$ es un espacio vectorial topológico, entonces $E$ es regular.*

Demostración: Probemos primero el resultado para el origen.
Sea $U$ una vecindad. Tenemos que encontrar $V$ una vecindad tal que $\overline{V} \subset U$. Por las proposiciones 3.1 y 3.2 existe $V$ vecindad balanceada tal que $V + V \subset U$. Veamos ahora que $\overline{V} \subset U$. Esto se cumple ya que si $x \in \overline{V}$, $x + V$ es una vecindad de $x$ y por lo tanto $(x+V) \cap V \neq \emptyset$ de donde se deduce que existe $y \in (x+V) \cap V$, es decir que $y = x + z$ donde $y \in V$, $z \in V$, luego, $x = y - z$ y como $V$ es balanceado, $x \in y + V \subset V + V \subset U$. Esto prueba que $\overline{V} \subset U$.
Cuando tenemos una vecindad de un vector arbitrario de $E$, entonces se aplica una traslación, la cual es un homeomorfismo, para que la vecindad trasladada contenga al origen.
□

**Lema 3.1** *([6], Lema 2.1). Sea $V$ una vecindad y $A$ un subconjunto compacto de $E$. Si $\{x_n\}_{n \in I\!N}$ es una sucesión de puntos de $A$ tal que si $s > r$, $x_s \notin x_r + V$, entonces la sucesión es finita.*

Demostración: Veamos que hipótesis implica que la sucesión $\{x_n\}$ es un subconjunto cerrado de $A$. Sea $x \in E \setminus \{x_n\}$, y $V'$ una vecindad balanceada de $x$ tal que $V' \subset V$. Si $n = min\{r \mid x_r \in x + \frac{1}{2}V'\}$, entonces $x_n \in x + \frac{1}{2}V'$. Por lo tanto, $x \in x_n + \frac{1}{2}V' \subset x_n + V$. Hemos encontrado una vecindad, $x_n + V$ de $x$ que sólo contiene un número finito de elementos de



$\{x_n\}$. Supongamos que $\{x_{n_1}, ..., x_{n_k}\} = (x_n + V) \cap \{x_n\}$. Para cada $i = 1, ..., k$ elegimos una vecindad $W_i$ de $x$ tal que $x_{n_i} \notin W_i$. Si hacemos

$$W = (\cap_{i=1}^{k} W_i) \cap (x_n + V),$$

se sigue que $W$ es una vecindad de $x$ y $W \subset E \setminus \{x_n\}$.
Dado que $\{x_n\}$ es un subconjunto cerrado de $A$, se sigue que $\{x_n\}$ es compacto. Además

$$\{x_n\} \subset \bigcup_n (x_n + V). \tag{1}$$

Si la sucesión fuera infinita, la cubierta anterior no tendría una subcubierta finita, lo cual es una contradicción.
□

**Lema 3.2** *([6], Lema 2.2). Sean $X$, $Y$ espacios topológicos, con $Y$ compacto. Sea $f : X \times Y \longrightarrow E$, una función continua y sea $x_0 \in X$. Si $F \subset E$ es cerrado y disjunto de $f(x_0, Y)$, entonces existe una vecindad abierta $V$ de $x_0$, tal que $F$ es disjunto de $f(V, Y)$.*

Demostración: Sea $y \in Y$, entonces, dado que $F$ es cerrado, existe una vecindad $W'$ de $f(x_0, y)$ que no intersecta a $F$. Si $W = f^{-1}(W') \subset X \times Y$, se sigue que existen vecindades $V(y)$ de $x_0$ y $W(y)$ de $y$ tales que $V(y) \times W(y) \subset W$. Esto implica que $F \cap f(V(y), W(y)) = \emptyset$. Como $Y$ es compacto, podemos cubrirlo con un número finito de vecindades $W_1(y_1), ..., W_m(y_m)$, las cuales tienen sus correspondientes vecindades $V_1(y_1), ..., V_m(y_m)$. Haciendo $V = \bigcap_{i=1}^{m} V_i(y_i)$, obtenemos el resultado deseado.
□

**Lema 3.3** *([6], Lema 2.3). Si $A \subset E$ es compacto y $V$ una vecindad, entonces existe una vecindad abierta $I$ del $0 \in I\!K$, tal que $IA \subset V$.*

Demostración: Sea $f := I\!K \times A \longrightarrow E$, dada por $f(\lambda, a) := \lambda a$. Sea $\lambda_0 = 0 \in I\!K$, y $F = E \setminus V$. Dado que $0 \notin F$, se deduce que $f(\lambda_0, A) \cap F = \emptyset$. Aplicando el lema 3.2, podemos deducir que existe una vecindad $I$ de $\lambda_0 \in I\!K$, y además $f(I, A) \cap (E \setminus V) = \emptyset$ .
□

**Lema 3.4** *([6], Lema 3.1). Si $B \subset I\!K - \{0\}$ es cerrado y $F \subset E - \{0\}$ también es cerrado, entonces $BF$ es cerrado.*

Demostración: Sea $C = \{b^{-1} \in I\!K \mid b \in B\} \cup \{0\}$, este conjunto es compacto. Sea $x \notin BF$, se sigue que $F \cap Cx = \emptyset$. Por el lema 3.2 aplicado a la función producto por un escalar $\cdot : I\!K \times C \longrightarrow E$ y a $x$, existe una vecindad $V$ tal que $x \in V$ y $F \cap CV = \emptyset$. Esto prueba que $BF \cap V = \emptyset$.
□

**Lema 3.5** *([6], Lema 4.1). Sea $E$ un e.v.t. donde existe una vecindad $V$ de $0$ con $\overline{V}$ compacta. Sea $Y$ un subespacio propio, cerrado de $E$. Entonces existe $x \in \overline{V}$ tal que $x \notin Y + V$.*

Demostración: Sea $z \in E$ tal que $z \notin Y$. Como $Y$ es cerrado, existe una vecindad balanceada $W$ de 0 en $E$ tal que $(z+W) \cap Y = \emptyset$ y consecuentemente $z \notin Y+W$. Como $\overline{V}$ es compacta, por el lema 3.3, existe $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ tal que $a\overline{V} \subset W$. Entonces $z \notin Y + aV$ esto es, $a^{-1}z \notin Y + V$. Así que

$$E \neq Y + V. \tag{2}$$

Supongamos que no existe $x \in \overline{V}$ tal que $x \notin Y + V$, es decir que $\overline{V} \subset Y + V$. Entones $Y + \overline{V} = Y + V$. Además $Y + V$ es abierto y como $\overline{V}$ es compacto y $Y$ cerrado, $Y + \overline{V}$ es cerrado. Pero $E$ es conexo, entonces $E = Y + V$, lo cual contradice (2).

□

## 3.4 Operadores lineales

**Definición 3.5** Sea $T : E_1 \longrightarrow E_2$ un operador lineal. El *kernel* de $T$ es el subespacio vectorial de $E_1$ definido por $\mathrm{Ker}T = T^{-1}(0)$. El *rango* de $T$ es el subespacio vectorial de $E_2$ definido por $R(T) = T(E_1)$.

**Definición 3.6** Un operador lineal $T : E_1 \longrightarrow E_2$ es *acotado* si $T$ transforma conjuntos acotados de $E_1$ en conjuntos acotados de $E_2$.

Notación:

$$\mathcal{B}(E_1, E_2) = \{T : E_1 \longrightarrow E_2 \mid T \text{ es lineal y acotado}\}.$$

En general $\mathcal{B}(E_1, E_2)$ tiene estructura de espacio vectorial que depende de la correspondiente estructura de $E_2$.

**Definición 3.7** A un operador lineal $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$, se le llama *funcional lineal* o simplemente *funcional.*

Al igual que los operadores lineales, las funcionales no son necesariamente continuas, pero la siguiente proposición caracteriza a las continuas.

**Proposición 3.6** *Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ una funcional, $f \neq 0$. Entonces cada una de las siguientes propiedades implica las otras tres:*
*(a) $f$ es continua.*
*(b) $\mathrm{Ker}f$ es cerrado.*
*(c) $\mathrm{Ker}f$ no es denso en $E$.*
*(d) $f$ es acotada en una vecindad $V$.*

Demostración: (a) $\Rightarrow$ (b): Se sigue del hecho que $\mathrm{Ker}f = f^{-1}(0)$ y $\{0\} \subset \mathbb{K}$ es cerrado.
(b) $\Rightarrow$ (c): Como $\mathrm{Ker}f$ es cerrado, $\overline{\mathrm{Ker}f} = \mathrm{Ker}f$. Por hipótesis $\mathrm{Ker}f \neq E$. Entonces $\mathrm{Ker}f$ no es denso.
(c) $\Rightarrow$ (d): De la hipótesis se sigue que $E \setminus \mathrm{Ker}f$ tiene interior no vacío. Sea $x \in E \setminus \mathrm{Ker}f$ un punto interior. Entonces existe una vecindad balanceada $V$ de $0 \in E$ tal que $(x + V) \subset E \setminus \mathrm{Ker}f$, es decir

$$(x + V) \cap \mathrm{Ker}f = \emptyset. \tag{3}$$



Como $f(V)$ es un subconjunto balanceado de $\mathbb{K}$, resulta que $f(V)$ ó es acotado en cuyo caso (d) se cumple ó $f(V) = \mathbb{K}$. En este último caso, existe $y \in V$ tal que $f(y) = -f(x)$ y entonces $x + y \in \mathrm{Ker}f$, lo cual contradice (3). De esto se sigue (d).
(d) implica (a): Como $f$ es acotada en la vecindad $V$, existe $M < +\infty$ tal que para todo $x \in V$, se satisface $|f(x)| < M$. Sea $r > 0$ y $W = (r/M)V$, entonces $|f(x)| < r$ para todo $x \in W$. Esto prueba que $f$ es continua en el origen. Entonces $f$ es continua.

□

## 3.5 Espacios de dimensión finita

Los espacios vectoriales topológicos más simples son los espacios de dimensión finita.

**Proposición 3.7** *Sea $n$ un número entero positivo. Sea $Y \subset E$ un subespacio vectorial de un espacio vectorial topológico con $n = \dim Y < \infty$. Entonces:*
*(1) Todo isomorfismo de $\mathbb{K}^n$ sobre $Y$ es un homeomorfismo,*
*(2) $Y$ es cerrado.*

Demostración: (1): Supongamos que $T : \mathbb{K}^n \longrightarrow Y$ es un isomorfismo, es decir $T$ es inyectiva, suprayectiva y lineal. Sea $K = T(\mathrm{Fr}B(1))$, donde $B(1)$ es la bola unitaria abierta de $\mathbb{K}^n$. Entonces $\mathrm{Fr}B(1) = \{(z_1, ..., z_2) \in \mathbb{K}^n \mid |z_1|^2 + ... + |z_n|^2 = 1\}$ es compacta. Como $T$ es continua $K$ también es compacto. Además $0 \notin K$ ya que $T(0) = 0$ y $T$ es inyectiva. Por lo tanto existe una vecindad balanceada $V$ que es disjunta de $K$. Entonces

$$U = T^{-1}(V) = T^{-1}(V \cap Y),$$

es disjunto de $\mathrm{Fr}B(1)$. Como $T$ es lineal y $V$ balanceada, resulta que $U$ es balanceada y por lo tanto conexa. Como $0 \in U$, $U \subset B(1)$. Entonces la aplicación lineal $T^{-1} : Y \longrightarrow \mathbb{K}^n$ manda $V \bigcap Y$ en $B(1)$. Esto prueba que $T^{-1}$ es acotada en una vecindad del $0 \in Y$. Lo cual implica que $T^{-1}$ es continua (lo cual se prueba igual que d) $\Rightarrow$ a) en la prop. 3.6).
(2): Vamos a probar que $\overline{Y} \subset Y$, con lo cual tendremos que $Y$ es cerrado. Sea $y \in \overline{Y}$ y sean $T$ y $V$ como antes. Por la prop. 3.4, existe $t > 0$ tal que $y \in tV$, por lo tanto $y \in \overline{Y \cap tV}$. Además

$$Y \cap (tV) \subset T(tB(1)) \subset T(t\overline{B(1)}) \tag{4}$$

Como $T(t\overline{B(1)})$ es compacto, se sigue que es cerrado en $E$. Entonces $y \in T(t\overline{B(1)}) \subset Y$, es decir $\overline{Y} \subset Y$.

□

**Proposición 3.8** *Sean $Y$, $Z$ subespacios vectoriales de $E$ con $Y$ de dimensión finita y $Z$ cerrado. Entonces $Y + Z$ es cerrado.*

Demostración: Sea $\pi : E \longrightarrow E/Z$ la proyección de $E$ sobre $E/Z$, donde damos a $E/Z$ la topología cociente, con la cual $E/Z$ tiene la estructura de espacio vectorial topológico. Como $\pi(Y)$ es un subespacio de dimensión finita de $E/Z$, se sigue de la prop. 3.7 que $\pi(Y)$ es cerrado. Así $\pi^{-1}(\pi(Y)) = Y + Z$ es cerrado, ya que $\pi$ es continua.

□

## 3.6 Estructura algebraica

En el siguiente lema la estructura topológica de $E$ no es relevante.

**Lema 3.6** *([9], Lema 1). Sea $T : E \longrightarrow E$ una aplicación lineal inyectiva. Sea $y \notin T(E)$, y sea $Y_n$ el subespacio lineal de $E$ generado por $y, T(y), ..., T^{n-1}(y)$. Entonces , para cualquier entero $n$:*
*(a) $Y_n$ es de dimensión $n$,*
*(b) $Y_n \bigcap T^n(E) = \{0\}$.*

Demostración: (a): Supongamos que $\dim Y_n < n$. Sea $m = min\{j \mid \dim Y_j < j\}$. Entonces $\dim Y_{m-1} = m - 1$, es decir $y, T(y), ..., T^{m-2}(y)$ son linealmente independientes y además los vectores $y, T(y), ..., T^{m-1}(y)$ son linealmente dependientes, por lo cual tenemos una combinación lineal de la forma

$$a_0 y + a_1 T(y) + ... + a_{m-1} T^{m-1}(y) = 0,$$

donde $a_{m-1} \neq 0$. Ya que $y$ no está en la imagen de $T$, se debe tener $a_0 = 0$, así que la combinación se puede reescribir como

$$T(a_1 y + ... + a_{m-1} T^{m-2}(y)) = 0.$$

Dado que $T$ es inyectiva, entonces

$$a_1 y + ... + a_{m-1} T^{m-2}(y) = 0.$$

Esto implica que la dimensión de $Y_{m-1}$ es menor que $m - 1$, pero esto contradice el hecho que $m$ es el mínimo numero natural que tiene esa propiedad. Esto concluye la prueba de (a).
(b): Supongamos que existe $x \neq 0$ con $x \in Y_n \bigcap T^n(E)$. Como $x \in T^n(E)$, entonces existe $z \in E$ tal que $x = T^n(z) \neq 0$, y dado que $x \in Y_n$, entonces

$$x = b_0 y + b_1 T(y) + ... + b_{n-1} T^{n-1}(y),$$

es decir

$$T^n(z) = b_0 y + b_1 T(y) + ... + b_{n-1} T^{n-1}(y).$$

Luego,

$$b_0 y = -b_1 T(y) - ... - b_{n-1} T^{n-1}(y) + T^n(z) = T[-b_1 y - ... - b_{n-1} T^{n-2}(y) + T^{n-1}(z)].$$

Como
$y \notin T(E)$, entonces $b_0 = 0$ y siendo $T$ inyectivo,

$$0 \neq T^{n-1}(z) = b_1 y + ... + b_{n-1} T^{n-2}(y) \in Y_{n-1},$$

es decir $Y_{n-1} \bigcap T^{n-1}(E) \neq \{0\}$. Entonces podemos repetir este proceso hasta obtener $Y_1 \bigcap T(E) \neq \{0\}$. Esto contradice el hecho que $y \notin T(E)$, lo cual concluye la demostración del lema.
□



**Lema 3.7** *([9], Lema 3). Sea $x \in E$ y sea $V$ una vecindad en $E$. Si $x \notin V$ entonces existe un número real $r$, con $0 < r \leq 1$, tal que $rx \in 2V$, $rx \notin V$.*

Demostración:
Si $x \in 2V$ , entonces tomamos $r = 1$.
Si $x \notin 2V$, definimos $n = min\{m \in V \mid x \in 2^m V\}$. Este mínimo existe por la prop. 3.4, y además $n \geq 2$.
Entonces por la definición de $n$, $x \notin 2^{n-1}V$ y $x \in 2^n V$, esto es equivalente a que $\frac{1}{2^{n-1}}x \notin V$ y $\frac{1}{2^{n-1}}x \in 2V$. Entonces $r = 2^{1-n}$ es el número real buscado.
□

# 4 Operadores compactos

## 4.1 Un poco sobre espacios de Banach

Recordemos la definición de un espacio de Banach.

**Definición 4.1** Un espacio de *Banach* es un espacio vectorial normado que es completo en la métrica definida por su norma.

**Definición 4.2** Sean $E_1$, $E_2$ espacios de Banach. Sea $U$ la bola unitaria abierta en $E_1$. Un operador lineal $T : E_1 \longrightarrow E_2$ es *compacto* si la cerradura de $T(U)$ es compacta en $E_2$.

La definición 4.5, establecerá este concepto de manera más general para espacios vectoriales topológicos.
La siguiente definición es enunciada en toda su generalidad para e.v.t..

**Definición 4.3** El *espacio dual* de un espacio vectorial topológico es el espacio vectorial $E^*$ cuyos elementos son las funcionales lineales continuas sobre $E$.

Será conveniente designar los elementos del espacio dual $E^*$ de $E$ por $x^*$ y escribir

$$< x, x^* >= x^*(x). \tag{5}$$

Comentario: Si $T : E_1 \longrightarrow E_2$ es un operador continuo entre espacios vectoriales topológicos, entonces existe un único operador $T^* : E_2^* \longrightarrow E_1^*$ continuo, llamado el *operador adjunto* tal que

$$< T(x), y^* >=< x, T^*(y^*) > .$$

Éste se define como $T^*(y^*) := y^* \circ T$, donde $y^* \in E_2^*$.

En la definición 3.6 definimos los operadores acotados $\mathcal{B}(E_1, E_2)$. En el caso que $E_1 = E_2 = E$, por simplicidad vamos a escribir $\mathcal{B}(E)$ en lugar de $\mathcal{B}(E, E)$. Cuando $E_2$ es el campo $I\!K$, $\mathcal{B}(E_1, E_2)$ es el espacio dual $E_1^*$ ya que por la prop. 3.6 las funcionales acotadas y las continuas son las mismas.
En esta subsección $E_1, E_2$ serán espacios normados. En este caso $\mathcal{B}(E_1, E_2)$ también es un espacio normado en una manera natural.

**Proposición 4.1** *Sean $E_1$ y $E_2$ espacios normados. A cada $T \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$ le asociamos el número*

$$||T|| = \sup\{||T(x)|| \mid x \in E_1, \ ||x|| \leq 1\}. \tag{6}$$

*Esta definición hace a $\mathcal{B}(E_1, E_2)$ un espacio normado. Si $E_2$ es Banach, también $\mathcal{B}(E_1, E_2)$ lo es.*

Demostración: Los subconjuntos de espacios normados son acotados si y sólo si estan contenidos en un múltiplo de la bola unitaria. De esto deducimos que para todo $T \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$, $||T|| < \infty$. Si $\alpha$ es escalar, $(\alpha T)(x) = \alpha T(x)$, así que

$$||\alpha T|| = |\alpha| ||T||. \tag{7}$$



La desigualdad del triángulo en $Y$ muestra que para todo $x \in E_1$ con $||x|| \leq 1$,

$$\begin{aligned} ||(T_1 + T_2)(x)|| &= ||T_1(x) + T_2(x)|| \leq ||T_1(x)|| + ||T_2(x)|| \\ &\leq (||T_1|| + ||T_2||)(||x||) \leq ||T_1|| + ||T_2||. \end{aligned}$$

Si $T \neq 0$, entonces existe $x \in E_1$ tal que $T(x) \neq 0$. Entonces $||T|| > 0$. Por lo tanto $\mathcal{B}(E_1, E_2)$ es un espacio normado.
Ahora supongamos que $E_2$ es completo y que $\{T_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(E_1, E_2)$. Como

$$||T_n(x) - T_m(x)|| \leq ||T_n - T_m|| ||x|| \tag{8}$$

y por hipótesis $||T_n - T_m|| \to 0$ cuando $n$ y $m$ tienden a infinito, entonces para todo $x \in E_1$, $\{T_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en $E_2$. Luego

$$T(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x) \tag{9}$$

existe. Es claro que $T : E_1 \longrightarrow E_2$ es lineal. Si $\epsilon > 0$, el lado derecho de (8) no es mayor que $\epsilon ||x||$, siempre y cuando $n, m$ sean suficientemente grandes. Entonces podemos deducir que para todo $m$ suficientemente grande

$$||T(x) - T_m(x)|| \leq \epsilon ||x||. \tag{10}$$

Entonces $||T(x)|| \leq (||T_m|| + \epsilon)||x||$, de aquí que $T \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$, y $||T - T_m|| \leq \epsilon$. Por lo tanto, $T_m \to T$ en la norma de $\mathcal{B}(E_1, E_2)$. Esto demuestra que $\mathcal{B}(E_1, E_2)$ es completo.
□

**Proposición 4.2** *Supongamos que $B$ es la bola unitaria cerrada de un espacio normado $E$. Para todo $x^* \in E^*$, definamos*

$$||x^*|| = \sup\{| < x, x^* > | \mid x \in B\}. \tag{11}$$

*(a) Con esta norma $E^*$ es un espacio de Banach.*
*(b) Sea $B^*$ la bola unitaria cerrada de $E^*$. Entonces para todo $x \in E$,*

$$||x|| = \sup\{| < x, x^* > | \mid x^* \in B^*\}. \tag{12}$$

*Como consecuencia, $x^* \mapsto < x, x^* >$ es una funcional acotada sobre $E^*$, de norma $||x||$.*

Demostración: Como $\mathcal{B}(E, I\!K) = E^*$, entonces (a) es un corolario de la prop. 4.1.
Sea $x \in E$. En todo espacio normado por el teorema de Hahn-Banach existe una funcional $y^* \in B^*$, $y^* : E \longrightarrow I\!K$ tal que $y^*(x) = ||x||$, es decir

$$< x, y^* >= ||x||. \tag{13}$$

Por otro lado, para todo $x^* \in B^*$,

$$| < x, x^* > | \leq ||x|| ||x^*|| \leq ||x||. \tag{14}$$

El inciso (b) de esta proposición es consecuencia de las dos ecuaciones anteriores.
□

**Proposición 4.3** *Si $E_1$ y $E_2$ son espacios normados y si $T \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$, entonces*

$$||T|| = \sup\{< T(x), y^* > \ | \ ||x|| \leq 1, \ ||y^*|| \leq 1\}. \quad (15)$$

Demostración: Apliquemos la parte (b) de la prop. 4.2 con $E_2$ en lugar de $E$. Con esto obtenemos que para todo $x \in E_1$,

$$||T(x)|| = \sup\{| < T(x), y^* > | \ | \ ||y^*|| \leq 1\}. \quad (16)$$

Para concluir la demostración, recordemos que

$$||T|| = \sup\{||T(x)|| \ | \ x \in E_1, \ ||x|| \leq 1\}. \quad (17)$$

□

**Definición 4.4** Un subconjunto $A \subset E$, es *totalmente acotado* si para toda vecindad V de 0 en $E$ existe un subconjunto finito $F$ de $E$ tal que $A \subset V + F$.

Cuando el espacio vectorial topológico $E$ es metrizable y su métrica es invariante, entonces esta definición coincide con la def. 2.7.

**Proposición 4.4** *Si $E_1$ y $E_2$ son espacios de Banach y $K : E_1 \longrightarrow E_2$ un operador compacto, entonces $K^*$ es compacto.*

Demostración: (El recíproco de esta proposición también es cierta pero no lo probaremos.) Por el inciso (a) de la prop. 4.2 $E_1^*$ es completo. En base a la prop. 2.4, es suficiente probar que $K^*(B_{E_2^*}) \subset E_1^*$ es totalmente acotado. Sea $\epsilon > 0$. Como $K(B_{E_1})$ es totalmente acotado, podemos escoger $x_1, x_2, ..., x_n \in B_{E_1}$ tal que las bolas de radio $\frac{\epsilon}{4}$ y centro en los puntos $K(x_1), K(x_2), ..., K(x_n)$, forman una cubierta de $K(B_{E_1})$. Para cada $j = 1, ..., n$, el conjunto

$$\{< K(x_j), y^* > \ | \ y^* \in B_{E_2^*}\} \quad (18)$$

es acotado en $I\!\!K$. Por esto podemos escoger $y_1^*, ..., y_m^* \in B_{E_2^*}$ con la propiedad de que si $y^* \in B_{E_2^*}$ y $j = 1, ..., n$ entonces existe $k = 1, ..., m$ tal que

$$| < K(x_j), y^* > - < K(x_j), y_k^* > | \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (19)$$

Ahora vamos a probar que las bolas de radio $\epsilon$ y centro en los puntos $\{K^*(y_1^*), ..., K^*(y_m^*)\}$ forman una cubierta de $K^*(B_{E_2^*})$.
Sea $y^* \in B_{E_2^*}$. Escojamos $y_k^*$ como en (19). Dado $x \in B_{E_1}$, elegimos $x_j$ tal que se satisface $||K(x) - K(x_j)|| \leq \frac{\epsilon}{4}$. Entonces

$$\begin{aligned} | < x, K^*(y^*) - K^*(y_k^*) > | &= | < K(x), y^* - y_k^* > | \\ &\leq | < K(x) - K(x_j), y^* - y_k^* > | + | < K(x_j), y^* - y_k^* > | \leq \epsilon. \end{aligned}$$

□



## 4.2 Operadores compactos en e.v.t.

Observación: En esta subsección $E$ denotará un e.v.t.

**Definición 4.5** Sea $T : E \longrightarrow E$ un operador lineal. Diremos que $T$ *es compacto* si existe una vecindad $U$ tal que la cerradura de $T(U)$ es compacta.

Notación: Denotaremos por $\mathcal{K}(E)$ al conjunto de los operadores lineales compactos. Es decir

$$\mathcal{K}(E) = \{T : E \longrightarrow E \mid T \text{ operador compacto}\}.$$

Comentario: La suma y composición de operadores compactos es de nuevo un operador compacto. Al multiplicar un operador compacto por un escalar, obtenemos otro operador compacto. Así que $\mathcal{K}(E)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(E)$.
Además el operador identidad no es compacto, a menos que el espacio sea de dimensión finita (pues $E$ sería localmente compacto).

**Proposición 4.5** *Si $K \in \mathcal{K}(E)$, entonces $K$ es continuo.*

Demostración: Como $K$ es un operador compacto, existe $U$ vecindad de 0 tal que la cerradura de $K(U)$ es un subconjuto compacto de $E$. Basta probar que $K : E \longrightarrow E$ es continuo en el 0. Sea $V$ una vecindad de 0. Queremos probar que existe una vecindad $V'$ de 0 tal que $K(V') \subset V$. Por la prop. 3.1 podemos suponer que $V$ es balanceada.
Sea $x \in \overline{K(U)}$. Por la prop. 3.3 existe $a > 0$ tal que $x \in aV$. Por lo tanto $\overline{K(U)} = \bigcup_{a>0} aV$. Por la compacidad y dado que $V$ es una vecindad balanceada, $\overline{K(U)} \subset bV$ para algún $b > 0$. Entonces si hacemos $V' = \frac{1}{b}U$, tenemos que

$$K(V') = K(\frac{1}{b}U) \subset \frac{1}{b}K(U) \subset \frac{1}{b}\overline{K(U)} \subset V,$$

lo cual queríamos probar.
□

Antes de llegar al teorema principal necesitamos algunos lemas.

**Lema 4.1** *([9], Lema 2). Sea $T : E \longrightarrow E$ un operador lineal continuo y con rango cerrado, y supongamos que existe un operador lineal continuo e inverso izquierdo de $T$. Si $y \notin T(E)$ y $Y$ es el subespacio de dimensión uno generado por $y$, entonces para cualquier vecindad $V$ existe una vecindad $V'$ tal que $T(E) \cap \{Y + V'\} \subset T(V)$.*

Demostración: Sea $L : E \longrightarrow E$ un operador inverso izquierdo continuo de $T$, es decir $L \circ T = I_E$. Entonces $T$ es inyectiva y $L$ es sobreyectiva. Además $T$ es un homeomorfismo sobre su imagen: puesto que $T : E \longrightarrow T(E)$ es continua, con inversa continua $L : T(E) \longrightarrow E$. Además si $z \in T(E)$, es decir, $z = T(x)$ para algún $x \in E$, se sigue que $T \circ L(z) = T \circ L(T(x)) = T(x) = z$.
Sea $V$ una vecindad en $E$, entonces $T(V)$ es una vecindad de 0 en $T(E)$. Como $L$ es continua, existe una vecindad $V_1$ en $E$, tal que $L(V_1 \cap T(E)) \subset V$. Ahora aplicamos el operador $T$ en ambos lados de la contención anterior y obtenemos $V_1 \cap T(E) \subset T(V)$. Como la suma vectorial es una función continua existe una vecindad $V_2$ en $E$ tal que $V_2 + V_2 \subset V_1$ y por la

prop. 3.1 podemos suponer que $V_2$ es balanceada. Por otro lado, haciendo uso de la prop. 3.3 existe un número real $r > 0$ tal que $\lambda y \in V_2$ para todo $|\lambda| \leq r$. Como $T(E)$ es cerrado, existe una vecindad balanceada $V_3$ tal que $\{ry + V_3\} \cap T(E) = \emptyset$. Dado que $V_3$ es balanceada y $T(E)$ es un subespacio lineal, si $|\lambda| \geq r$ y $\lambda y + v_3 = u$ para algún $v_3 \in V_3$ y $u \in T(E)$, entonces $ry + \frac{r}{\lambda}v_3 = \frac{r}{\lambda}u$. De esto se sigue que $\{\lambda y + V_3\} \cap T(E) = \emptyset$ para todo $|\lambda| \geq r$. Para terminar la prueba veamos que $V' = V_2 \cap V_3$ es la vecindad que cumple las condiciones del lema.

Vimos que para todo $|\lambda| < r$, se satisface $\lambda y \in V_2$ y como $V' \subset V_2$, entonces $\{\lambda y + V'\} \subset V_2 + V_2$. Ya que $V_2 + V_2 \subset V_1$ y $V_1 \cap T(E) \subset T(V)$, entonces $\{V_2 + V_2\} \cap T(E) \subset T(V)$. Es decir hemos probado que

$$\{\lambda y + V'\} \cap T(E) \subset \{V_2 + V_2\} \cap T(E) \subset T(V), \ (|\lambda| < r).$$

Por otra parte, como $V' \subset V_3$, se sigue de $\{\lambda y + V_3\} \cap T(E) = \emptyset$ para $|\lambda| \geq r$ que en este caso

$$\{\lambda y + V'\} \cap T(E) = \emptyset.$$

Entonces hemos probado que

$$\{Y + V'\} \cap T(E) \subset T(V),$$

como se deseaba.

□

**Lema 4.2** *([9], Lema 4). Sea $F$ una base filtrada sobre $E$, y sean $T_1$, $T_2$ operadores lineales de $E$ en $E$. Si $x$ es un punto de adherencia de $T_1(F)$, y $T_2(F)$ converge a $y$, entonces $x + y$ es un punto de adherencia de $(T_1 + T_2)(F)$.*

Demostración: Sea $V$ una vecindad. Sea $F = \{F_\alpha\}$ y $F_\alpha \in F$. Por la prop. 3.2 existe una vecindad $V'$ de $0 \in E$ tal que $V' + V' \subset V$. Como $T_2(F)$ converge a $y$, existe $F_\beta \in F$ tal que

$$T_2(F_\beta) \subset y + V', \tag{20}$$

pues $y + V'$ es una vecindad de $y$. Ya que $F$ es una base filtrada, existe $F_\gamma \in F$ de manera que $F_\gamma \subset F_\alpha \cap F_\beta$. Puesto que $x$ es un punto de adherencia de $T_1(F)$, entonces $x \in \overline{T_1(F_\gamma)}$, es decir

$$T_1(F_\gamma) \cap (x + V') \neq \emptyset. \tag{21}$$

Entonces usando (20) y (21),

$$(T_1 + T_2)(F_\gamma) \cap (x + y + V' + V') \neq \emptyset. \tag{22}$$

Finalmente como $V' + V' \subset V$, tenemos que

$$(T_1 + T_2)(F_\alpha) \cap (x + y + V) \supset (T_1 + T_2)(F_\gamma) \cap (x + y + V) \neq \emptyset. \tag{23}$$

Es decir $x + y \in \overline{(T_1 + T_2)(F_\alpha)}$. Por lo tanto $x + y$ es un punto de adherencia de $(T_1 + T_2)(F)$.

□



De aquí en adelante, $K : E \longrightarrow E$ va a denotar a un operador lineal compacto y $U_0$ una vecindad tal que

$$\overline{K(U_0)}$$

es un conjunto compacto. Vamos a denotar por $I : E \longrightarrow E$ al operador identidad, y definimos el operador $T$ como

$$T = I - K. \tag{24}$$

**Lema 4.3** *([9], Lema 5). Sea $K : E \longrightarrow E$ un operador compacto. Si $Y \subset E$ es un subespacio de dimensión finita y la restricción $K_{|Y}$ es inyectiva, entonces $Y \cap \overline{U_0}$ es compacto.*

Demostración: Denotemos $K' = K_{|Y} : Y \longrightarrow K(Y)$ a la restricción. Como $Y$ es de dimensión finita y $K'$ es continua e inyectiva, entonces $K'$ es un homeomorfismo. Ahora vamos a usar el hecho que $\overline{K(U_0)}$ es compacto. Dado que

$$K'(Y \cap \overline{U_0}) \subset K(Y) \cap K(\overline{U_0}) \subset K(Y) \cap \overline{K(U_0)},$$

y que $K(Y) \cap \overline{K(U_0)}$ es compacto, entonces $K'(Y \cap \overline{U_0})$ es compacto ya que es un cerrado contenido en un compacto.

Ahora como $K'$ es un homeomorfismo entonces $Y \cap \overline{U_0}$ es compacto.

□

**Corolario 4.1** *([9], Corolario). Sea $K : E \longrightarrow E$ un operador compacto y $T = I - K$. Si $Y$ es un subespacio de dimensión finita y existe un entero $m$ tal que $Y \cap T^m(E) = \{0\}$, entonces $Y \cap \overline{U_0}$ es compacto.*

Demostración: Sea $m$ un entero tal que $Y \cap T^m(E) = \{0\}$. Veamos que $K_{|Y}$ es inyectiva y entonces podremos aplicar el lema 4.3.

Sea $y \in Y$ tal que $K(y) = 0$, entonces $T(y) - y = 0$, es decir $T(y) = y$. Aplicando $T$ a ambos lados de la ecuación, $T^2(y) = T(y) = y$. Si continuamos con este proceso obtenemos

$$y = T(y) = T^2(y) = \dots = T^m(y),$$

entonces $y \in Y \cap T^m(Y) = \{0\}$. Luego, $y = 0$, por lo tanto $K_{|Y}$ es inyectiva. Por el lema anterior $Y \cap \overline{U_0}$ es compacto.

□

**Lema 4.4** *([6], Lema 6.1). Si $F \subset E$ es un subconjunto cerrado de $\overline{U_0}$, entonces $T(F)$ es cerrado.*

Demostración: Sea $y \notin T(F)$. Tenemos que construir una vecindad de $y$ disjunta de $T(F)$. Sea $V$ una vecindad cerrada de $y$ tal que

$$V \cap T(F \cap (y + \overline{K(U_0)})) = \emptyset, \tag{25}$$

donde debe observarse que $y + \overline{K(U_0)}$ es compacto. Sea

$$F_1 = F \cap T^{-1}(V).$$

Veamos que es suficiente construir una vecindad $V_1$ de $y$, disjunta de $T(F_1)$: Si $V_1 \cap T(F_1) = \emptyset$,

$$V_1 \cap T(F \cap T^{-1}(V)) = V_1 \cap T(F) \cap T(T^{-1}(V)) = \emptyset.$$

Además $V_1 \cap T(F) \cap V \subset V_1 \cap T(F) \cap T(T^{-1}(V))$. La vecindad de $y$ buscada es $V_1 \cap V$.
Así que resta ver que existe tal vecindad $V_1$.
Ahora bien $F_1$ es cerrado y por (25) se tiene que

$$F_1 \cap (y + \overline{K(U_0)}) = \emptyset. \tag{26}$$

Nótese que $K(F_1) \subset \overline{K(U_0)}$. De esto se sigue que $y \notin F_1 - \overline{K(U_0)}$ y que $T(F_1) \subset F_1 - \overline{K(U_0)}$.
Además $F_1 - \overline{K(U_0)}$ es cerrado. Si hacemos $V_1 := E \setminus (F_1 - \overline{K(U_0)})$, se obtiene que

$$V_1 \cap T(F_1) = \emptyset.$$

□

**Lema 4.5** *([6], Lema 6.2). El rango de $T$ es un subespacio cerrado de $E$.*

Demostración: Sea $F_1 = T^{-1}(T(\overline{U_0})) = \overline{U_0} + \mathrm{Ker}T$, el cual es cerrado ya que $T(\overline{U_0})$ es cerrado por el lema 4.4 y $T$ es continua.
Sea $V = T^{-1}(T(U_0)) = U_0 + \mathrm{Ker}T \subset F_1$, el cual es claramente abierto. Sea $F_2 = F_1 \setminus V$.
Entonces $F_2$ es cerrado y $\mathrm{Fr}(F_1) \subset F_2$. Sea $x \notin F_1$, como el 0 es un punto interior de $F_1$, entonces el segmento de 0 a $x$ es conexo y contiene al menos un punto de $\mathrm{Fr}(F_1)$. Si $B$ es el conjunto de números reales $\beta \geq 1$, entonces $x \in B\mathrm{Fr}(F_1) \subset BF_2$. De esto vemos que $E = F_1 \cup BF_2$ y por consiguiente

$$T(E) = T(F_1) \cup T(BF_2). \tag{27}$$

Para ver que $T(E)$ es cerrado, veamos que cada conjunto de la descomposición (27) es cerrado.
Como $T(F_1) = T(\overline{U_0})$ por el lema 4.4, $T(F_1)$ es cerrado. Por otro lado $T(F_2) = T(\overline{U_0}) \setminus T(U_0)$, así pues $T(F_2) = T(F_3)$, donde $F_3 = \overline{U_0} - \overline{U_0} \cap V$, el cual es cerrado y por el lema 4.4, $T(F_2)$ es cerrado. Finalmente por el lema 3.4, dado que $0 \notin T(F_2)$ y $B$ es cerrado, $BT(F_2)$ es cerrado. Por lo tanto $T(E)$ es cerrado.
□

El resultado principal del artículo [9], de Williamson es el siguiente.

**Teorema 4.1** *([9], Teorema 1). Sea $K : E \longrightarrow E$ un operador compacto y $T = I - K$. Entonces ó bien $T$ es bicontinua sobre $E$ ó no es inyectiva.*

Demostración: Las posibilidades para que $T$ no sea un homeomorfismo de $E$ sobre $E$ son las siguientes, las cuales son excluyentes.
(a) $T$ no es inyectiva.
(b) $T$ es inyectiva, y $T : E \longrightarrow T(E)$ no es bicontinua.
(c) $T : E \longrightarrow T(E)$ es biyectiva, bicontinua y $T(E) \neq E$.
Vamos a probar que (b) y (c) no son posibles en nuestro caso.



Supongamos que (b) se cumple. Como la correspondencia $T : E \longrightarrow T(E)$ es biyectiva pero no bicontinua, entonces el operador inverso izquierdo $L : T(E) \longrightarrow E$, $L \circ T = I_E$, no es continuo. Entonces veamos que existe una vecindad $U_1$ de 0, tal que $0 \in \overline{T(U_1^c)}$:
Dado que $L$ no es continuo, existe una vecindad $U_1$ en $E$ tal que, $L^{-1}(U_1)$ no es una vecindad del 0 en $T(E)$. Se sigue que para toda vecindad $W$ en $E$, $W \cap (T(E) \setminus L^{-1}(U_1)) \neq \emptyset$. Además

$$T(E) \setminus L^{-1}(U_1) = T(E \setminus U_1) = T(U_1^c).$$

Esto implica que 0 esta en la cerradura de $T(U_1^c)$.

Sea $U_2$ una vecindad balanceada tal que $U_2 \subset U_0 \cap U_1$, entonces también

$$0 \in \overline{T(U_2^c)} \tag{28}$$

ya que $U_1^c \subset U_2^c$.
Sea $F = \{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una base de vecindades balanceadas de 0. Sea

$$F_1 = \{T^{-1}(V_\alpha) \cap U_2^c \cap 2U_0\}. \tag{29}$$

Afirmamos que esta familia es una base filtrada:
Para simplificar la notación vamos a escribir $W_\alpha = T^{-1}(V_\alpha) \cap U_2^c \cap 2U_0$, para cada $\alpha \in I$.
La propiedad (1) de la definición 2.2 se satisface claramente ya que los $V_\alpha$'s son una base de vecindades. La propiedad que debemos verificar es que $W_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in I$.
Supongamos que existe $\beta \in I$ tal que $W_\beta = \emptyset$, entonces dado que $U_2 \subset U_0$

$$T^{-1}(V_\beta) \cap 2U_2 \subset T^{-1}(V_\beta) \cap 2U_0 \subset U_2. \tag{30}$$

Sea $x \in T^{-1}(V_\beta)$, $x \notin U_2$. Por el lema 3.7 existe $0 < r \leq 1$ tal que $rx \in 2U_2$ y $rx \notin U_2$.
Además, $T^{-1}(V_\beta)$ es balanceada ya que $V_\beta$ lo es, de esto se sigue que $rx \in T^{-1}(V_\beta)$. Por lo tanto

$$rx \in T^{-1}(V_\beta) \cap 2U_2 \text{ y } rx \notin U_2.$$

Esto contradice (30). Para concluir que la familia definida en (29) es base filtrada hay que verificar que existe $x \in T^{-1}(V_\beta) \setminus U_2$. Si no existe tal $x$, se tiene que $T^{-1}(V_\beta) \subset U_2$, es decir, $T^{-1}(V_\beta) \cap U_2^c = \emptyset$. De aquí deducimos que $V_\beta \cap T(U_2^c) = T(T^{-1}(V_\beta)) \cap T(U_2^c) = \emptyset$. Obsérvese que lo anterior contradice el hecho que $U_2$ satisface (28).

Dado que $F_1$ es base filtrada, el conjunto vacío no está en $F_1$ y por lo tanto tampoco está en $T(F_1) = \{V_\alpha \cap T(U_2^c \cap 2U_0)\}$, es decir toda vecindad de 0 intersecta a $T(U_2^c \cap 2U_0)$.

Afirmamos ahora que la base filtrada $K(F_1) = \{K(W_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ tiene un punto de adherencia, digamos $x_0$:
Supongamos que no existe tal punto de adherencia. Como $K(2U_0) \subset \overline{K(2U_0)}$, para todo $\alpha \in I$, $K(W_\alpha)$ está contenido en el compacto $\overline{K(2U_0)}$. De la suposición se sigue que para cada $x \in \overline{K(2U_0)}$, existe $\alpha(x) \in I$ tal que $x \notin \overline{K(W_{\alpha(x)})}$, es decir $x \in E \setminus \overline{K(W_{\alpha(x)})}$. Obtenemos así una cubierta abierta de $\overline{K(2U_0)}$. Por compacidad se sigue que existen $x_1, \ldots, x_k \in \overline{K(2U_0)}$ tal que

$$\overline{K(2U_0)} \subseteq \cup_{j=1}^{k}(E \setminus \overline{K(W_{\alpha(x_j)})}),$$

es decir
$$\overline{K(2U_0)}\bigcap \cap_{j=1}^{k}\overline{K(W_{\alpha(x_j)})} = \emptyset. \qquad (31)$$
Por otro lado, dado que $K(F_1)$ es base filtrada $\emptyset \neq \cap_{j=1}^{k}\overline{K(W_{\alpha(x_j)})} \subset \overline{K(2U_0)}$. Esto contradice (31). Entonces existe el $x_0 \in \overline{K(2U_0)}$ buscado.

También se tiene que $T(F_1)$ converge a 0 (ver la def. 2.3), ya que para cualquier vecindad $V$ de 0 existe $V_\alpha \in F$, con $V_\alpha \subset V$ ($F$ base de vecindades) y por lo tanto existe $V_\alpha \cap T(U_2^c \cap 2U_0) \in T(F_1)$ tal que $V_\alpha \cap T(U_2^c \cap 2U_0) \subset V_\alpha \subset V$.
Por el lema 4.2, $x_0 = x_0 + 0$ es un punto de adherencia de $F_1 = (T+K)(F_1) = I(F_1)$. Como $x_0 \in \overline{U_2^c} = U_2^c$, $x_0 \neq 0$. Además por la prop. 2.3, $T(x_0)$ es un punto de adherencia de $T(F_1)$, pero el único punto de adherencia de $T(F_1)$ es el 0 (ya que converge a 0). Entonces $T(x_0) = 0$ con $x_0 \neq 0$, lo cual contradice el hecho que $T$ es inyectiva. Así que (b) no es posible.

Supongamos que (c) se cumple. Sea $y \notin T(E)$, y sea $Y_n$ el subespacio de $E$ generado por $y, T(y), ..., T^{n-1}(y)$. Por el lema 3.6, $\dim Y_n = n$ y $Y_n \cap T^n(E) = \{0\}$. Entonces por el corolario 4.1, $Y_n \cap \overline{U_0}$ es compacto para todo $n$. Así que si $U \subset U_0$, $Y_n \cap \overline{U}$ también es compacto para todo $n$. Como $T : E \longrightarrow T(E)$ es biyectiva y bicontinua, existe $L : T(E) \longrightarrow E$ continuo tal que $L \circ T = I_E$, es decir $L$ es inverso izquierdo de $T$. Además por el lema 4.5, $T(E)$ es cerrado. Entonces por el lema 4.1, existe una vecindad $U'$ tal que
$$(Y_1 + U') \cap T(E) \subset T(U_0). \qquad (32)$$
Sea $U$ una vecindad abierta balanceada tal que $\overline{U} \subset U_0 \cap U'$. Como para cada $n$, $Y_{n-1}$ es un subespacio cerrado de $Y_n$ y $Y_n \cap U$ es una vecindad en $Y_n$ tal que $\overline{Y_n \cap U} = Y_n \cap \overline{U}$ es compacto, entonces por el lema 3.5 aplicado a $n = 1, 2, 3, ...$, existe un punto $y_n' \in Y_n \cap \overline{U}$ y $y_n' \notin Y_{n-1} + U$.
Por otro lado si $y_n' \in Y_n$, podemos escribir de forma única $y_n' = T(z_{n-1}) + a_n y$, donde $z_{n-1} \in Y_{n-1}$. Además como $y_n' \in \overline{U}$ podemos deducir que $T(z_{n-1}) \in Y_1 + \overline{U}$, para todo $n$. Claramente $T(z_{n-1}) \in T(E)$, y como $\overline{U} \subset U'$ entonces por (32), $T(z_{n-1}) \in T(U_0)$ y al ser $T$ inyectiva, podemos concluir que $z_{n-1} \in U_0$ para todo $n$.
Ahora como $T = I - K$,
$$\begin{aligned} K(z_m) - K(z_n) &= z_m - T(z_m) - z_n + T(z_n) \\ &= z_m - y_{m+1}' + a_{m+1}y - z_n + y_{n+1}' - a_{n+1}y \\ &= -y_{m+1}' + (z_m + a_{m+1}y + y_{n+1}' - z_n - a_{n+1}y), \end{aligned}$$
si $m > n$ la expresión entre paréntesis es un elemento de $Y_m$. Como $y_{m+1}' \notin Y_m + U$, entonces obtenemos que $K(z_m) - K(z_n) \notin U$ ó $K(z_m) \notin K(z_n) + U$ para todo $m > n$. Pero $\{K(z_n)\} \subset K(U_0) \subset \overline{K(U_0)}$, el cual es compacto. Entonces por el lema 3.1, la sucesión $\{z_n\}$ es finita. Esto es una contradicción, entonces (c) no es válida.
□

Si $E$ es un espacio de Banach, por la prop. 4.4 se tiene que si $K : E \longrightarrow E$ es un operador compacto, entonces el operador adjunto $K^*$ también es compacto.
Esta afirmación no es válida en un espacio vectorial topológico en general. Sin embargo,



como veremos, es posible probar por otros métodos algunos resultados tales como el teorema 4.2. Dicho resultado había sido probado para espacios de Banach utilizando la compacidad del operador adjunto $K^*$.

**Lema 4.6** *([9], Lema 6). Si $E = Y \oplus Z$, donde $Y$ y $Z$ son subespacios cerrados de $E$, y $\dim Y = p < +\infty$, entonces el conjunto de las funcionales lineales continuas sobre $E$ que se anulan en $Z$ es de dimensión $p$.*

Demostración: Supongamos que $\dim Y = p \geq 1$. Sea $W_1 = Z$, y para cada $1 < r \leq p$ sea $W_r$ el subespacio de $E$ generado por $Z, y_1, ...y_{r-1}, y_{r+1}, ..., y_p$, donde $y_1, y_2, ..., y_p$ es una base de $Y$. Por la prop. 3.8, $W_r$ es cerrado. Definimos las funcionales $f_r$ tal que $f_r(y_r) = 1$ y $\mathrm{Ker} f_r = W_r$. Como el kernel de $f_r$ es cerrado entonces $f_r$ es continua. Además $f_1, f_2, ..., f_p$ son linealmente independientes.
De esto podemos concluir que para cualquier $p$ finito, el conjunto de las funcionales continuas que se anulan sobre $Z$ tiene dimensión al menos $p$.
Pero el conjunto de todas las funcionales $f$ continuas o no con $Z \subset \mathrm{Ker} f$ tiene dimensión a lo más $p$. Esto se debe a que la restricción de funcionales linealmente independientes tales que $Z \subset \mathrm{Ker} f$ a $Y$ son lin. indep. Entonces se sigue la afirmación del lema.
□

Comentario: Recordemos que a menos que se diga lo contrario $K \in \mathcal{K}(E)$ y $T = I - K$.

**Lema 4.7** *([6], Lema 9.1). Sea $E$ un e.v.t. Entonces el espacio $\mathrm{Ker}T$ es un subespacio de dimensión finita y cerrado. Además $\mathrm{Ker}T \cap \overline{U_0}$ es una vecindad compacta de 0 en $\mathrm{Ker}T$.*

Demostración: Claramente $Y = \mathrm{Ker}T$ es cerrado ya que $T$ es continua. Si $x \in Y$, entonces $K(x) = x$. Luego $\mathrm{Ker}T \cap \overline{U_0} = \mathrm{Ker}T \cap K(\overline{U_0}) \subset \overline{K(U_0)}$. Así que $\mathrm{Ker}T \cap \overline{U_0}$ es una vecindad compacta de 0 en $Y$. Es decir $Y$ es localmente compacto, y entonces $Y$ es de dimensión finita.
□

**Lema 4.8** *([6], Lema 9.2). Si $k \in I\!N$, entonces el espacio $\mathrm{Ker}T^k$ es un subespacio de dimensión finita y cerrado. Además $\mathrm{Ker}T^k \cap \overline{U_0}$ es una vecindad compacta de 0 en $\mathrm{Ker}T^k$.*

Demostración: Expresemos $T^k = (I-K)^k = I - K'$. Entonces, K' es un polinomio en $K$ sin término constante. De aquí que $K'$ es un operador compacto. Sea $T' := I - K' = T^k$. Por el lema 4.7 obtenemos que $\mathrm{Ker}T' = \mathrm{Ker}T^k$ es de dimensión finita y cerrado.
También obtenemos $\mathrm{Ker}T' \cap \overline{U_0} = \mathrm{Ker}T^k \cap \overline{U_0}$ es una vecindad compacta de 0 en $\mathrm{Ker}T' = \mathrm{Ker}T^k$.
□

**Lema 4.9** *([6], Lema 9.3). Existe un entero $n$ tal que para todo $m \geq n$*
$$\mathrm{Ker}T^m = ... = \mathrm{Ker}T^n \supset \mathrm{Ker}T^{n-1} \supset ... \supset \mathrm{Ker}T. \qquad (33)$$

Demostración: Sea $s \in I\!N$, $s > 1$, entonces $\mathrm{Ker}T^{s-1} \subset \mathrm{Ker}T^s$ pues $T^{s-1}(x) = 0$ implica $T^s(x) = 0$. Supongamos que

$$\mathrm{Ker}T^{s-1} \neq \mathrm{Ker}T^s. \tag{34}$$

Entonces por el lema 3.5 tomando como el espacio $\mathrm{Ker}T^s$, y el lema 4.8, existe un punto $x_s \in \overline{U_0}$ tal que

$$x_s \in \mathrm{Ker}T^s \cap \overline{U_0} \text{ y } x_s \notin \mathrm{Ker}T^{s-1} + U_0. \tag{35}$$

Por (35), $T^s(x_s) = 0$, lo cual implica que

$$T(x_s) \in \mathrm{Ker}T^{s-1}. \tag{36}$$

Para $r < s$ se sigue de $T^r(x_r) = 0$ que

$$x_r \in \mathrm{Ker}T^{s-1},\ T(x_r) \in \mathrm{Ker}T^{s-1}. \tag{37}$$

Usando (35), (36), (37), obtenemos que

$$x_s \notin T(x_s) + x_r - T(x_r) + U_0, \text{ ó } K(x_s) = x_s - T(x_s) \notin x_r - T(x_r) + U_0 = K(x_r) + U_0$$

es decir para $r < s$, $K(x_s) \notin K(x_r) + U_0$.
Por otra parte, por (35) $x_s \in \overline{U_0}$ y como $K(\overline{U_0}) \subset \overline{K(U_0)}$, entonces $K(x_s) \in \overline{K(U_0)}$, que es compacto.
Se sigue del lema 3.1, que la sucesión $\{x_s\}$ es finita. Sea $n = max\{s \mid$ que satisfacen $(34)\}$.
□
Comentario: De aquí en adelante $n$ será como en el lema 4.9.

**Lema 4.10** *([6], Lema 9.4). Si $k > 0$ entonces $KerT^k \cap T^n(E) = \{0\}$.*

Demostración: Sea $x \in \mathrm{Ker}T^k \cap T^n(E)$. Entonces existe $y \in E$ tal que $x = T^n(y)$. Además $T^k(x) = 0$ implica que $T^{n+k}(y) = 0$, es decir $y \in \mathrm{Ker}T^{n+k} = \mathrm{Ker}T^n$ (por el lema 4.9). De esto obtenemos $x = T^n(y) = 0$ como queríamos probar.
□

La prueba de Leray para el siguiente lema está basada en una proposición de F. Riesz. La prueba dada aquí es una variante de este resultado basada en el teorema principal (teo. 4.1) de Williamson.

**Lema 4.11** *([6], Lema 9.5). Si $k \in I\!N$, entonces el subespacio $T^k(E)$ es cerrado y para $m \geq n$*

$$T^m(E) = ... = T^n(E) \subset T^{n-1}(E) \subset ... \subset T(E) \subset E. \tag{38}$$

Demostración: Vamos a probar por inducción sobre $k$ que $T^k(E)$ es cerrado. Para $k = 1$ es cierto por el lema 4.5. Supongamos que $T^k(E)$ es cerrado. La restricción de $K$ a $T^k(E)$ aplica $T^k(E)$ en sí mismo y es una aplicación compacta. Nuevamente por el lema 4.5, $(I_{T^k(E)} - K_{T^k(E)})(T^k(E))$ es cerrado y dado que $K$ y $T$ conmutan $I_{T^k(E)}(T^k(E)) - K_{T^k(E)}(T^k(E)) = T^{k+1}(E)$. Lo que termina la inducción.
Por el lema 4.10 para $k = 1$, la aplicación $T$ restringida a $T^n(E)$ es inyectiva. Entonces por el teorema 4.1, es una aplicación biyectiva y bicontinua sobre $T^n(E)$. En particular $T^{n+1}(E) = T^n(E)$.
□



**Lema 4.12** *([6], Lema 9.6). El espacio $E$ tiene la siguiente descomposición en suma directa $E = KerT^n \oplus T^n(E)$.*

Demostración: Sea $x \in E$. Se sigue del lema 4.11 que existe $y \in E$ tal que $T^{2n}(y) = T^n(x)$. Lo cual implica que $T^n(T^n(y) - x) = 0$, es decir $x \in \mathrm{Ker}T^n + T^n(E)$. El lema 4.10 aplicado a $k = n$, nos dice que esta suma es directa.
□
Resumiendo:
Sea $K \in \mathcal{K}(E)$, $I : E \longrightarrow E$ la identidad y $T = I - K$. Entonces por los lemas 4.8, 4.11, y 4.12, se cumple:
i) Existe $n \in I\!N$ tal que $T^{n+1}(E) = T^n(E)$,
ii) $E = Y \oplus Z$, donde $Y = \mathrm{Ker}T^n$, $Z = T^n(E)$,
iii) $\dim Y < +\infty$,
iv) $Z$ es cerrado.

El segundo resultado más importante en el trabajo [9] de Williamson es el siguiente teorema.

**Teorema 4.2** *([9], Teorema 2). La dimensión de $KerT^r$ es igual a la de $KerT^{*r}$ para cada $r = 1, 2, ..., n$.*

Demostración: Nótese que se tienen las siguientes contenciones

$$Z = T^{n+1}(E) = T^n(E) \subset T^{n-1}(E) \subset ... \subset T(E) \subset E, \tag{39}$$

$$Y = \mathrm{Ker}T^n \supset \mathrm{Ker}T^{n-1} \supset ... \supset \mathrm{Ker}T \supset \{0\}. \tag{40}$$

Si $y \in Y$, entonces $T^n(y) = 0$. Luego $0 = T^{n+1}(y) = T^n(T(y))$. Por lo tanto $T(y) \in Y = \mathrm{Ker}T^n$. Esto indica que $T(Y) \subset Y$.
También es cierto que

$$T(Z) = T(T^n(E)) = T^{n+1}(E) = Z. \tag{41}$$

Por el lema 4.12, $E = T^n(E) \oplus \mathrm{Ker}T^n$. Sea

$$W = \{u \in E^* \mid u \text{ es continua},\ Z = T^n(E) \subset \mathrm{Ker}(u)\},$$

por el lema 4.6 $\dim(W) = \dim(\mathrm{Ker}T^n) = \dim Y < \infty$. Nótese que

$$\mathrm{Ker}T^{*r}_{|W} = \{u \in W \mid T^{*r}(u) = 0\} = \{u \in E^* \mid T^{*r}(u) = 0\} \cap W = \mathrm{Ker}T^{*r} \cap W.$$

Si $u \in \mathrm{Ker}T^{*r}$, tenemos que $T^{*r}(u) = 0$, es decir, $u \circ T^r = 0$. Entonces $T^r(E) \subset \mathrm{Ker}(u)$ y dado que $Z \subset T^r(E)$, obtenemos que $Z \subset \mathrm{Ker}(u)$.
Hemos probado que $\mathrm{Ker}T^{*r} \subset \mathrm{Ker}T^{*r}_{|W}$. Por lo tanto $\mathrm{Ker}T^{*r}_{|W} = \mathrm{Ker}T^{*r}$.

Si $u \in W$, entonces $Z \subset \mathrm{Ker}(T^*(u))$ ya que $T^*(u) = u \circ T$ y $\mathrm{Ker}(T^*(u)) = \mathrm{Ker}(u \circ T) = (u \circ T)^{-1}(0) = T^{-1}(u^{-1})(0) = T^{-1}(\mathrm{Ker}(u)) \supset T^{-1}(Z)$, pero $T^{-1}(Z) \supset Z$ por (41).
Es decir hemos probado que $T^*(u)$ se anula en $Z$, así que $T^*(u) \in W$. Por lo tanto $T^*(W) \subset W$. Esto implica que $T^{*r}(W) \subset W$, o sea que tenemos una transformación bien definida $T^{*r}_{|W} : W \longrightarrow W$. Consideremos el isomorfismo siguiente entre espacios vectoriales de dimensión

finita $S : W \longrightarrow Y^*$, dado por $S(u) := u_{|Y}$. Dado que $\dim Y^* = \dim Y = \dim W$ y claramente $S$ es inyectiva, existe $S^{-1}$. Entonces se puede ver directamente que $(T_{|Y})^{*r} \circ S = S \circ T^{*r}_{|W}$, es decir $(T_{|Y})^{*r} = S \circ T^{*r}_{|W} \circ S^{-1}$, ya que $T^r(Y) \subset Y$.
Dado que $(T_{|Y})^{*r} : Y^* \longrightarrow Y^*$ es un operador entre espacios de dimensión finita,

$$\dim \mathrm{Ker} T^r_{|Y} = \dim \mathrm{Ker}(T_{|Y})^{*r}.$$

Entonces

$$\dim \mathrm{Ker} T^r = \dim \mathrm{Ker} T^r_{|Y} = \dim \mathrm{Ker}(T_{|Y})^{*r} = \dim \mathrm{Ker}(S \circ T^{*r}_{|W} \circ S^{-1}) = \dim \mathrm{Ker} T^{*r}_{|W} = \dim \mathrm{Ker} T^{*r}.$$

□

Para concluir este reporte se darán unas consecuencias del teorema anterior.

**Definición 4.6** Sea $E$ un espacio vectorial sobre el campo $I\!K$. Un *valor propio* de un operador $S : E \longrightarrow E$ es un escalar $\lambda$ tal que $(S - \lambda I)x = 0$ tiene solución no trivial en $E$.

En las siguientes dos proposiciones $K$ es, al igual que antes, un operador compacto.

**Proposición 4.6** *Los valores propios no nulos de $K$ y de $K^*$ son iguales.*

Demostración: Sea $\lambda \neq 0$ y $K' = \lambda^{-1}K$, que es un operador compacto. Sea $T' = I - K'$, entonces por el teorema 4.2, $\dim(\mathrm{Ker} T') = \dim(\mathrm{Ker} T'^*)$, pero

$$\mathrm{Ker} T' = (I - K')^{-1}(0) = (I - \lambda^{-1}K)^{-1}(0) = (\lambda I - K)^{-1}(0) = (K - \lambda I)^{-1}(0),$$

y de igual forma

$$\mathrm{Ker} T'^* = (I - K')^{*-1}(0) = (I^* - \lambda^{-1}K^*)^{-1}(0) = (\lambda I^* - K^*)^{-1}(0) = (K^* - \lambda I^*)^{-1}(0).$$

Además $\lambda$ es un valor propio de $K$ si y sólo si $\dim(\mathrm{Ker} T') \neq 0$, y por la igualdad de dimensiones, podemos concluir la igualdad de los valores propios.
□

**Definición 4.7** Sea $\lambda$ un valor propio de un operador $S : E \longrightarrow E$. La *multiplicidad de orden* $r$ de $\lambda$, denotado por $m_S(\lambda, r)$, se define como $m_S(\lambda, r) := \dim \mathrm{Ker}(S - \lambda I)^r$.

**Proposición 4.7** *Las multiplicidades de todos los órdenes de todos los valores propios no nulos son iguales para $K$ y $K^*$.*

Demostración: Sea $K' = \lambda^{-1}K$ y $T' = I - K'$. La idea es similar a la demostración de la proposición anterior. Sólo que ahora usamos las igualdades

$$\mathrm{Ker} T'^r = (K - \lambda I)^{-r}(0), \ \mathrm{Ker} T'^{*r} = (K^* - \lambda I^*)^{-r}(0).$$

La igualdad de las dimensiones, garantizada por el teorema 4.2, permite deducir que $m_K(\lambda, r) = \dim(\mathrm{Ker} T'^r) = \dim(\mathrm{Ker} T'^{*r}) = m_{K^*}(\lambda, r)$, para todo $r = 1, 2, ..., n$, donde $n$ está dado por el lema 4.9. Finalmente usamos nuevamente el lema 4.9 y el teorema 4.2, para hacer la conclusión para todo entero positivo $r$.
□



**Definición 4.8** Un operador $K : E \longrightarrow E$ es *casi-nilpotente* si no tiene valores propios $\neq 0$.

**Proposición 4.8** *Si existe un operador compacto en $E$ que no es casi-nilpotente, entonces existe una funcional $f \neq 0$ continua.*

Demostración: Supongamos que existe un operador compacto $K : E \longrightarrow E$ con un valor propio $\lambda \neq 0$. Entonces $\dim(I - \lambda^{-1}K)^{-1}(0) \neq 0$ y por los lemas 4.8, 4.9 y 4.12, tenemos que $E = (I - \lambda^{-1}K)^{-n}(0) \oplus T^n(E)$, donde como antes $T = I - \lambda^{-1}K$, $T^n(E)$ es cerrado y $k = \dim(I - \lambda^{-1}K)^{-n}(0) < \infty$. Sea $y_1, ..., y_k$ una base de $(I - \lambda^{-1}K)^{-n}(0)$, entonces $E = < y_1 > \oplus E_2$, donde $E_2 = < y_2, ... y_k > \oplus T^n(E)$ ($< y_1 >$ y $< y_2, ..., y_k >$ son los espacios generados). Entonces todo elemento $x$ de $E$ tiene una representación única de la forma $x = a y_1 + e_2$, donde $e_2 \in E_2$. Definimos la funcional $f : E \longrightarrow I\!K$ por $f(x) := a$. Nótese que $\mathrm{Ker} f = E_2$ es cerrado por la prop. 3.8. Por la prop. 3.6, $f$ es continua.
□

# Referencias


[1] C. Bosch Giral y E. Fernández Bermejo, *Análisis Funcional I*, Monografias del Instituto de Matemáticas, UNAM, 1989.

[2] J. Dieudonne, *History of Functional Analysis*, North-Holland, 1981.

[3] H. Fetter and B. Gamboa, *Introducción al análisis funcional y a la geometría de espacios de Banach*, Ed. Interamericana.

[4] F. Galaz, *Elementos de Análisis Funcional*, Manuscrito, CIMAT, 2003.

[5] G. Kothe, *Topological Vector Spaces I, II* Springer-Verlag, New York Inc., 1969.

[6] J. Leray, "Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme completement continu d'un espace vectoriel a voisinages convexes", *Acta Sci. Math. Szeged*, **12**, Pars B (1950), 177-186.

[7] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc., 1991.

[8] H. H. Schaefer and M. P. Wolff, *Topological Vector Spaces*, Springer, 1999.

[9] J.H. Williamson, "Compact Linear Operators in Linear Topological Spaces", *J. London Math. Soc.* **29** (1954), 149-156.