CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Teoremas de estructura para cubrientes Galois de curvas

TESIS

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

PRESENTA:

Armando Antonio Sánchez Argáez

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Sevin Recillas Pishmish.

octubre del año 2000 Guanajuato, Gto. México

Contenido

Introducción i

1 Gavillas con Acción de Grupo. 1
- 1.1 Teoremas Generales. 1
- 1.2 $\mathcal{O}_X(G)$-Módulos. 4
- 1.3 $\mathcal{O}_X(G)$-Módulos Inescindibles. 9
- 1.4 Funtores Derivados. 14

2 Cubrientes Galois. 17
- 2.1 Teoremas de Descomposición. 17
- 2.2 Teoremas de Estructura. 18
  - 2.2.1 Caso no Ramificado. 23

3 Aplicaciones 27
- 3.1 Acciones en el Tangente a JX. 27
- 3.2 Acciones del Grupo A_5. 33
  - 3.2.1 Representaciones. 33
  - 3.2.2 Variedades Jacobianas. 39
- 3.3 Cálculo de la dimensión de $H^1(X, \mathcal{T}_X)^G$ 43
  - 3.3.1 Motivación. 43
  - 3.3.2 El Cálculo 44

A Representaciones 47

B La Aplicación Traza 53

Bibliografía 58

Introducción

Sea $\mathcal{M}_g$ la variedad de móduli de curvas algebraicas lisas proyectivas e irreducibles de género g, $g > 3$, sobre un campo k algebraicamente cerrado. Se sabe que el lugar singular $Sing\mathcal{M}_g$ de esta variedad parametriza a las curvas que tienen simetrías *i.e.* curvas X tales que $Aut(X) \neq \{Id\}$ (ver por ejemplo [16],[13]); un problema importante es describir dicho lugar singular, obsérvese que cada componente de dicho lugar tiene a su vez singularidades, éstas corresponden a curvas con acción de un grupo más grande y así sucesivamente. Un problema abierto es describir dichas singularidades. Otros problemas íntimamente relacionados con éste son:

A) Dada Y una curva, G un grupo finito y g un entero positivo, cuando existe $\pi : X \longrightarrow Y$ un cubriente Galois, con grupo de Galois G y género$(X) = g$.

B) Qué datos de construcción del cubriente nos dan información de $\mathcal{M}_g$.

El problema A) para el caso de grupos cíclicos es bastante sencillo, ya que si $\pi : X \longrightarrow Y$ un cubriente Galois de curvas sobre un campo algebraicamente cerrado k, con grupo de Galois $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, con $char(k) \nmid p$ entonces es bien sabido que

$$\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{F}_{\chi_1} \oplus ... \oplus \mathcal{F}_{\chi_{p-1}}$$

donde $\mathcal{F}_{\chi_i}$ es una gavilla invertible y el grupo G actúa fibra por fibra por la representación χ_i, además, existen morfismos inyectivos

$$\mathcal{F}_{\chi_i} \otimes \mathcal{F}_{\chi_j} \longrightarrow \mathcal{F}_{\chi_i \otimes \chi_j}$$

los cuales determinan la estructura de $\mathcal{O}_Y$-álgebra de $\pi_* \mathcal{O}_X$.

Inversamente, si se tiene una gavilla $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{F}_{\chi_1} \oplus ... \oplus \mathcal{F}_{\chi_{p-1}}$ con las propiedades anteriores se tiene un cubriente de Y con acción de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Sin embargo el caso general, donde G es un grupo finito arbitrario el problema de determinar la construcción de un cubriente Galois es mucho más difícil.

El problema B) para el caso de grupos cicílicos ha sido estudiado en [3], [7],[10],[11] y para grupos arbitrarios en característica cero en [17].

El objetivo de este trabajo es obtener teoremas de estructura para la imagen directa de la gavilla estructural análogos al caso cíclico, En un trabajo posterior se demuestra que estas relaciones son suficientes para obtener cubrientes con acción de grupo. Cabe mencionar que la teoría aquí desarrollada es valida en cualquier característica con la condición de que $char(k) \nmid |G|$.

Para ésto, en el capítulo 1 se generaliza la teoría de representaciones de grupos finitos sobre un campo a representaciones en una gavilla coherente sobre un esquema íntegro. Obteniendose teoremas de clasificación de gavillas con acción de un grupo finito. Vale la pena observar que esta teoría se puede generalizar aún más; en lugar de considerar álgebras de grupo se pueden considerar A-álgebras semisimples, donde A es un álgebra de Artin, sin embargo en esta exposición nos limitaremos al estudio del primer caso.

En este primer capítulo se define la categoría de $\mathcal{O}_X(G)$-módulos, siendo ésta el lugar natural de las representaciones de G, y se prueba que

Teorema 1.2.3. *Sea X un esquema íntegro sobre un campo k, K su campo de funciones meromorfas y ϵ el punto genérico de X. Sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo localmente libre, si $\mathcal{E}_\epsilon \simeq (V_0^{n_0} \oplus .... \oplus V_r^{n_r}) \otimes_k K$ es la representación de G en el punto genérico de X, entonces la descomposición natural*

$$\mathcal{E} = e_0\mathcal{E} \oplus .... \oplus e_r\mathcal{E}$$

satisface que

i) $rango(e_i\mathcal{E}) = n_i \times dim(V_i)$

ii) La inclusión natural $(e_i\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{E}$ induce un isomorfismo de representaciones $(e_i\mathcal{E})_\epsilon \hookrightarrow V_i^{n_i} \otimes_k K$.

Mostrándose con esto que la teoría de representaciones sobre gavillas coherentes no es muy diferente de la teoría sobre espacios vectoriales. Además se obtiene una clasificación de $\mathcal{O}_X(G)$-módulos, descrita en el

Corolario 1.3.4.(Teorema de clasificación) *Sea X un esquema íntegro sobre un campo algebraicamente cerrado k y sea G un grupo finito con $char(k) \mid /|G|$. Si $\mathcal{F}$ es una gavilla coherente y $\rho : G \longrightarrow Aut(\mathcal{F})$ es una representación de G, entonces se tiene una descomposición G-invariante*

$$\mathcal{F} = \mathcal{O}(V_0) \otimes \mathcal{F}_0 \oplus ... \oplus \mathcal{O}(V_r) \otimes \mathcal{F}_r$$

donde $V_0, ..., V_r$ son las representaciones irreducibles de G sobre k y $\mathcal{O}(V_i) = \mathcal{O}_Y \otimes_k V_i$.

En el segundo capítulo se estudia el caso de cubrientes Galois de curvas, y se prueba que la descomposición isotípica de la imagen directa de la gavilla estructural corresponde a la representación regular del grupo, en forma más precisa se demuestra el siguiente

Teorema 2.1.1. *Sea X una variedad sobre un campo k algebraicamente cerrado con acción de un grupo finito G ($char(k) \nmid \mid G \mid$) y sea Y el cociente, entonces*

$$\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus (\mathcal{O}(V_1) \otimes \mathcal{E}_{V_1}) \oplus ... \oplus (\mathcal{O}(V_r) \otimes \mathcal{E}_{V_r}).$$

donde V_i son las representaciones irreducibles G sobre k y rango $\mathcal{E}_{V_i} = dimV_i$.

Además, se tiene teoremas de estructura

Teorema 2.2.13. *Sea $X \xrightarrow{\pi} Y$ un cubriente de Galois con grupo de Galois G, entonces en la descomposición*

$$\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus [\mathcal{O}(V_1) \otimes \mathcal{E}_{V_1}] \oplus ... \oplus [\mathcal{O}(V_r) \otimes \mathcal{E}_{V_r}]$$

se tienen morfismos inyectivos naturales

$$\mathcal{E}_{V_i} \otimes \mathcal{E}_{V_j} \longrightarrow \bigoplus_{l=0}^{r} \mathcal{E}_{V_l}^{n_l}$$

donde

$$V_i \otimes V_j = \bigoplus_{l=0}^{r} V_l^{n_l}.$$

Teorema 2.2.20. *Sea $X \xrightarrow{\pi} Y$ un cubriente de Galois no ramificado, con grupo de Galois G, entonces en la descomposición*

$$\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}(V_1) \otimes \mathcal{E}_{V_1} \oplus ... \oplus \mathcal{O}(V_r) \otimes \mathcal{E}_{V_r}$$

Se tiene que cada $\mathcal{E}_{V_i}$ es estable y se cumplen las siguientes identidades

$$\mathcal{E}_{V_i} \otimes \mathcal{E}_{V_j} \sim \bigoplus_{l=0}^{r} \mathcal{E}_{V_l}^{n_l}$$

donde

$$V_i \otimes V_j = \bigoplus_{l=0}^{r} V_l^{n_l}$$

además $(\mathcal{E}_{V_i})^\vee \sim \mathcal{E}_{V_i^\vee}$ y si $V_i \not\sim V_j$ entonces $\mathcal{E}_{V_i} \not\sim \mathcal{E}_{V_j}$.

generalizando los conocidos para el caso cíclico.

En el último capítulo se calculan ciertas representaciones del grupo G en grupos de cohomología obteniendo información relevante de la curva con acción de grupo, en particular se prueba el

Teorema 3.1.1. *Sea $x \in X$ un punto cerrado con grupo de isotropía $< g > \subset G$, entonces la representación en $(\pi_*\Omega_{X/Y})_{\pi(x)} \simeq k(G) - U \uparrow_{<g>}^{G}$ donde $k(G)$ es la representación regular de G y $U \uparrow_{<g>}^{G}$ la representación inducida por la trivial de $< g >$.*

apartir del cual se obtiene la representación de G en el tangente a la jacobiana de X en términos de los puntos fijos de G en X y sus grupos de isotropía. Como una aplicación se tiene la descomposición de la jacobiana de una curva con acción de A_5, y por último se calcula la dimensión de $H^1(X, \mathcal{T}_X)^G$ en el

Teorema 3.3.3. *Sea $\pi : X \longrightarrow Y$ un cubriente Galois de curvas, con grupo de Galois G, entonces $dim H^1(X, \mathcal{T}_X)^G = 3g_Y - 3 + card(Supp\, \pi_*\Omega_{X/Y})$.*

Donde dicha dimensión está relacionada con las deformaciones infinitesimales de primer orden de X que tienen acción de G.

Además se incluyen dos apéndices el primero de ellos es una breve introducción de teoría de representaciones de anillos semisimples probándose algunos teoremas importantes utilizados en el capítulo primero y el último está dedicado a demostrar que la sucesión

$$0 \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_X \longrightarrow (\pi_*\mathcal{O}_X)^\vee \longrightarrow \pi_*\Omega_{X/Y} \longrightarrow 0$$

es exacta.

Agradecimientos Por último quiero agradecer a todos los que de alguna manera han contribuido para la elaboración de este trabajo. Le agradezco al CIMAT A.C. todo el apoyo, economico, moral y casi paternal que recibí de esta institución. Tambien le agradezco a CONACyT la beca de doctorado que me concedio y al CONCyTEC por el apoyo económico durante los últimos seis meses de mi doctorado. Tambien le quiero agradecer a los profesores Leticia Brambila,Alexis García, Xavier Gómez-Mont,Esteban Gómez, José María Muñoz Porras, Laura Hidalgo, Herbert Lange y Herbert Kanarek, por todos sus comentarios y sugerencias, las cuales me fueron de gran valía. Ahora, no puedo mas que dedicar unas palabras a parte a mi asesor, quien ha sido un gran amigo a lo largo de mi doctorado, quien me apoyo incondicionalmente y en su momento me hizo notar mis errores, quien no sólo me enseño matemáticas si no tambien ética profesional, gracias Sevin.

Quiero agradecer a otras personas quienes contribuyeron en la parte no matemática de la tesis, a muy buenos amigos quienes me apoyaron en los momentos precisos; a los profesores Maite Fernández, Luis Hernández, Pedro Luis del Angel, Abel Castorena, Francisco Mirabal y espero que no se ofenda alguien si lo olvidé. Y por último dedico este trabajo con especial cariño a Tere, Daniel y bebe, a mis padres y mis hermanos. A todos ellos Gracias.

Capítulo 1

Gavillas con Acción de Grupo.

El propósito de este capítulo, es construir una teoría de representaciones de grupos finitos en gavillas coherentes sobre un esquema íntegro. A lo largo de este trabajo k es un campo algebraicamente cerrado fijo y G un grupo finito tal que la característica de k no divide al orden del grupo. Aquí se definen los $\mathcal{O}_X(G)$-módulos y los morfismos G-invariantes mostrándose que forman una categoría abeliana, se introduce el tipo de una representación y se dan teoremas de clasificación de $\mathcal{O}_X(G)$-módulos inescindibles, por último se definen funtores derivados de esta categoría y se describen en términos de funtores derivados de la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos.

1.1 Teoremas Generales.

Sea A una k-álgebra semisimple (no necesariamente conmutativa) de dimensión finita sobre k entonces se cumple que $A = e_1A \oplus .... \oplus e_rA$ con A simples y e_i proyectores, sea $n_i = dim_k e_iA$.

Definición 1. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado, consideremos $\mathcal{O}_X(A) := \mathcal{O}_X \otimes_k A$, ésta es una gavilla de álgebras no conmutativas sobre X y como $\mathcal{O}_X$-módulo es libre de rango la dimensión de A sobre k. Definimos un $\mathcal{O}_X(A)$-módulo como un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{E}$ junto con un morfismo de anillos $\rho : A \to End(\mathcal{E})$ y definimos un morfismo de $\mathcal{O}_X(A)$-módulos como una morfismo $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos tales que el siguiente diagrama conmuta para*

toda $a \in A$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{F} \\ \rho(a) \downarrow & & \downarrow \rho(a) \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{F} \end{array}$$

En este caso, también diremos que ϕ *es* A*-invariante*

Observación Apartir de esta definición, es inmediato que el kernel de un $\mathcal{O}_X(A)$-morfismo es nuevamente un $\mathcal{O}_X(A)$-módulo además se tiene que para $x \in X$, $\mathcal{E}_x$ tiene estructura natural de $\mathcal{O}_{X,x}(A)$-módulo.

El siguiente paso es demostrar que la imagen de un $\mathcal{O}_X(A)$-morfismo es un $\mathcal{O}_X(A)$-módulo, para esto probemos el siguiente

Lema 1.1.1 *Sea* $\mathcal{F}$ *una* $\mathcal{O}_X$*-pregavilla de* $\mathcal{O}_X(A)$*-módulos, entonces la gavilla asociada* $\mathcal{F}^+$ *tiene una estructura natural de* $\mathcal{O}_X(A)$*-módulos con la cual el morfismo de inclusión es de* $\mathcal{O}_X(A)$*-módulos, además si* $\mathcal{E}$ *es un* $\mathcal{O}_X(A)$*-módulo y* $f : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ *un morfismo de* $\mathcal{O}_X(A)$*-módulos, entonces el morfismo natural* $\hat{f} : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{E}$ *es también de* $\mathcal{O}_X(A)$*-módulos.*

Demostración: Recordemos la construcción de la gavilla asociada $\mathcal{F}^+$ (ver [8] 2.1). Sea U un conjunto abierto de X y definamos $\mathcal{F}^+(U)$ como el conjunto de funciones s de U en la unión $\cup_{p \in U} \mathcal{F}_p$ de los gérmenes de $\mathcal{F}$ en cada punto de U, tales que:

1) Para cada punto $p \in U$, $s(p) \in \mathcal{F}_p$ y

2) Para cada $p \in U$, existe una vecindad V de p, contenida en U, y un elemento $t \in \mathcal{F}(V)$, tal que para todo $q \in V$, el germen t_q de t en q es igual a $s(q)$.

Ahora definamos la acción de A en $\mathcal{F}^+(U)$ mediante la acción natural de A en cada germen, *i.e* $(as)(p) = a(s(p))$, es claro que esta acción es una estructura de $\mathcal{O}_X(A)$-módulo en la gavilla $\mathcal{F}^+$y que además la inclusión es un morfismo de $\mathcal{O}_X(A)$-módulos, con lo cual se termina la demostración.$\diamondsuit$

Después de esto, tenemos que si $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de $\mathcal{O}_X(A)$-módulos entonces se tiene que la pregavilla imagen es de $\mathcal{O}_X(A)$-módulos por lo tanto la gavilla asociada también es un $\mathcal{O}_X(A)$-módulo y la existencia de cokérneles es inmediata de la propiedad universal de la gavilla asociada a la imagen al restringirnos a considerar sólo morfismos de $\mathcal{O}_X(A)$-módulos.

También se tiene que la suma directa, producto directo, límite inverso y límite directo de $\mathcal{O}_X(A)$-módulos es nuevamente un $\mathcal{O}_X(A)$-módulo.

Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ dos $\mathcal{O}_X(A)$-módulos, definimos por $Hom_A(\mathcal{E},\mathcal{F})$ al grupo formado por los morfismos de $\mathcal{O}_X(A)$-módulos, obsérvese que éste no tiene por que ser un A-módulo. Sea $U \subset X$ un conjunto abierto de X y $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X(A)$-módulo entonces $\mathcal{E}_{|U}$ es en forma natural un $\mathcal{O}_{X|U}$- módulo, y definamos por $\mathcal{H}om_A(\mathcal{E},\mathcal{F})$ la gavilla

$$U \mapsto Hom_A(\mathcal{E}_{|U}, \mathcal{F}_{|U})$$

la cual es una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos, pero no necesariamente de $\mathcal{O}_X(A)$-módulos.

El siguiente paso es mostrar que nuestra categoría no es trivial, es decir que existen $\mathcal{O}_X$-módulos con una estructura no trivial de $\mathcal{O}_X(A)$-módulos.

Proposición 1.1.2 *Sea V un A-módulo y $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo, entonces $\mathcal{M}\otimes_k V$ es un $\mathcal{O}_X(A)$-módulo.* $\diamondsuit$

Recordando que por ser A un álgebra semisimple se tiene sólo un número finito de módulos simples, sean $V_1, ...V_r$ estos módulos, por la proposición A.0.8 [Apen 1] se tiene que todo A-módulo M finitamente generado se descompone en suma directa $M_1 \oplus ... \oplus M_r$ donde cada M_i es isomorfo a $V_i^{n_i}$ y que existen $\{e_1, ...e_r\} \subset A$ tales que $e_ie_j = e_i\delta_{i,j}, e_1 + ... + e_r = 1$ y $e_iM = M_i$. Con esto se tiene un teorema de clasificación de A-módulos, el resto de este párrafo será demostrar un teorema similar en la categoría de $\mathcal{O}_X(A)$-módulos. Empezaremos con el siguiente teorema de descomposición.

Teorema 1.1.3 *Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X(A)$-módulo, no necesariamente finitamente generado, entonces $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus .... \oplus \mathcal{M}_r$ donde $\mathcal{M}_i = e_i\mathcal{M}$, además si $\mathcal{M}$ es un localmente libre entonces cada $\mathcal{M}_i$ lo es.*

Demostración: Sea e_i un proyector de A, entonces tenemos definida la aplicación $e_i : \mathcal{M} \to e_i\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ la cual escinde por la inclusión, de aquí que $e_i\mathcal{M}$ sea un sumando directo de $\mathcal{M}$, además como $e_ie_j = e_i\delta_{i,j}$ se tiene que $e_i\mathcal{M} \cap e_j\mathcal{M} = 0$ si $i \neq j$ y de la propiedad $e_1 + ... + e_r = 1$ se tiene que la inclusión $\mathcal{M}_1 \oplus .... \oplus \mathcal{M}_r \hookrightarrow \mathcal{M}$ es un isomorfismo.$\diamondsuit$

Definición 2 *Sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X(A)$-módulo, definamos la descomposición isotípica de $\mathcal{E}$, como la descomposición*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{E}_r$$

obtenida en el teorema anterior.

Proposición 1.1.4 *Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ dos $\mathcal{O}_X(A)$-módulos y $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X(A)$-morfismo, si $e_1\mathcal{E}\oplus ...\oplus e_r\mathcal{E}$ y $e_1\mathcal{F}\oplus ...\oplus e_r\mathcal{F}$ son las descomposiciones isotípicas de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ respectivamente, entonces ϕ se descompone en morfismos*

$$\phi_i : e_i\mathcal{E} \to e_i\mathcal{F}$$

Demostración: Como ϕ es un $\mathcal{O}_X(A)$-morfismo, entonces

$$e_j\phi(e_ix) = \phi(e_ie_jx) = \phi(e_i\delta_{i,j}x)$$

es decir

$$\phi_{|e_i\mathcal{E}} : e_i\mathcal{E} \to \mathcal{F} \to e_j\mathcal{F}$$

es cero si $i \neq j$ y es ϕ si $i = j$. $\diamondsuit$

Corolario 1.1.5 *Toda*

$$... \to \mathcal{E}_{i-1} \to \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_{i+1} \to ...$$

sucesión exacta de $\mathcal{O}_X(A)$-módulos se descompone en las sucesiones exactas

$$... \to e_j\mathcal{E}_{i-1} \to e_j\mathcal{E}_i \to e_j\mathcal{E}_{i+1} \to ...$$

con $j \in \{1, ..., r\}$. $\diamondsuit$

1.2 $\mathcal{O}_X(G)$-Módulos.

Como nuestro interés se centrará en gavillas con acción de grupo a partir de este momento supondremos que A es el álgebra de grupo $k(G)$, donde $char(k)/|G|$ y X un k-esquema íntegro. Denotaremos por $\mathcal{O}_X(G) := \mathcal{O}_X(k(G))$

y por $V_0, ..., V_r$ las representaciones irreducibles de G sobre k, lo cual es equivalente a los $k(G)$-módulos simples, y por $\mathcal{O}(V)$ al $\mathcal{O}_X(G)$-módulo definido por $\mathcal{O}_X \otimes_k V$, donde V es una representación de G sobre k. Por convención, V_0 denotará la representación trivial de G.

Observación: Si $k = \mathbb{C}$ entonces los proyectores e_i, son bien conocidos y están definidos por

$$e_i = \frac{dim(V_i)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V_i}(g) g$$

donde $\chi_{V_i}(g)$ es la traza de la aplicación definida por g en V_i.

Con las hipótesis anteriores tenemos que si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son $\mathcal{O}_X(G)$-módulos entonces los $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ y $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ tienen una estructura natural de $\mathcal{O}_X(G)$-módulos.

Lema 1.2.1 *Si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son $\mathcal{O}_X(G)$-módulos, entonces existe una única estructura en $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X(G)$-módulo tal que*

$$g(x \otimes y) = (gx) \otimes (gy), \ (\forall\, g \in G, x \in \mathcal{E}, y \in \mathcal{F})$$

Demostración: Ya que la aplicación $(x, y) \mapsto gx \otimes gy$ es bilineal, se tiene una transformación lineal

$$L(G) : \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$$

tal que

$$L(g)(x \otimes y) = gx \otimes gy$$

Lo anterior define una función

$$L : G \to End(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$$

dada por $g \mapsto L(g)$ que es evidentemente un morfismo de G en el grupo de unidades de $End(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$, pero L se extiende de manera única a un morfismo de $K(G)$-álgebras (ver [2] págs.75-78)

$$L : K(G) \to End(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}).$$

Esto determina una estructura de $\mathcal{O}_X(G)$-módulo en $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, en la cual $g(x \otimes y) = (gx) \otimes (gy)$. Por último, si se tiene otra estructura de $\mathcal{O}_X(G)$-módulo en $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$

$$L'(G) : \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$$

tal que

$$L'(g)(x \otimes y) = gx \otimes gy$$

entonces L' y L coinciden en G y por la unicidad $L' = L$ $\diamond$

Observación: Cabe mencionar que la fórmula

$$u(x \otimes y) = ux \otimes uy \qquad (u \in K(G))$$

no es la estructura de $\mathcal{O}_X(G)$-módulo arriba definida.

Ahora procedamos a definir la estructura de $\mathcal{O}_X(G)$-módulo en $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ mediante la aplicación

$$(g\sigma)(e) = g(\sigma)(g^{-1}e)$$

y extendiendo ésta por linealidad.

Estas últimas definiciones nos proporcionan nueva riqueza en nuestra categoría, y como veremos a continuación podemos demostrar propiedades análogas a las propiedades de $\mathcal{O}_X$-módulos.

Nota: Por convención, un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo $\mathcal{E}$ es localmente libre si lo es como $\mathcal{O}_X$-módulo.

Lema 1.2.2 *Sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo localmente libre, démosle a $\mathcal{E}^\vee$ la estructura natural de $\mathcal{O}_X(G)$-módulo entonces se tienen los siguientes isomorfismos naturales de $\mathcal{O}_X(G)$-módulos:*

a)$(\mathcal{E}^\vee)^\vee \cong \mathcal{E}$.

b)Para cualquier $\mathcal{O}_X(G)$-módulo $\mathcal{F}$, se tiene que $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}$

c)Para cualquier $\mathcal{O}_X(G)$-módulos $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, se tiene $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{G}))$.

Demostración: a) Considérese el isomorfismo $\mathcal{E} \longrightarrow (\mathcal{E}^\vee)^\vee$ dado por

$$a \in \mathcal{E}(U) \mapsto \delta_a := \delta_a(\sigma : \mathcal{E}_{|U} \longrightarrow \mathcal{O}_{X|U}) = \sigma(a)$$

entonces

$$\delta_{ga}(\sigma : \mathcal{E}_{|U} \longrightarrow \mathcal{O}_{X|U}) = \sigma(ga)$$

pero

$$(g\delta_a)(\sigma : \mathcal{E}_{|U} \longrightarrow \mathcal{O}_{X|U}) = g(\delta_a([g^{-1}\sigma]))$$
$$= \delta_a([g^{-1}\sigma]) = [g^{-1}\sigma](a) = g^{-1}[\sigma(ga)] = \sigma(ga)$$

de aquí que sea G-invariante.

b) Sea el isomorfismo $\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ dado por

$$\sigma \otimes b \in (\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F})(U) \mapsto \phi := (a \mapsto \sigma(a)b)$$

entonces

$$g(\sigma \otimes b) = g\sigma \otimes gb \mapsto (a \mapsto (g\sigma)(a)gb$$

$$= g(\sigma(g^{-1}a)gb = g(\sigma(g^{-1}a)b) = g(\phi(g^{-1}a)) = (g\phi)(a)$$

por lo tanto el isomorfismo es G-invariante.

c) Sea el isomorfismo $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{G})) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}, \mathcal{G})$ dado por

$$[\sigma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{G})] \mapsto \phi := (a \otimes b \mapsto [\sigma(a)](b))$$

entonces

$$g(\sigma) \mapsto (a \otimes b \mapsto [(g\sigma)(a)](b))$$

pero

$$[(g\sigma)(a)](b)) = [g(\sigma(g^{-1}a))](b) = g[(\sigma(g^{-1}a))]g(g^{-1}b) = g[(\sigma(g^{-1}a)](g^{-1}b)$$

$$= g(\phi((g^{-1}a) \otimes (g^{-1}b))) = g(\phi g^{-1}(a \otimes b) = (g\phi)(a \otimes b)$$

por lo tanto el isomorfismo es G-invariante.$\diamondsuit$

Ahora procederemos a demostrar el teorema principal de esta sección, el cual consiste en describir la descomposición de un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo mediante la acción del grupo en el punto genérico. Así que estudiemos la estructura local de estos $\mathcal{O}_X(G)$-módulos. Para esto supondremos X un esquema íntegro sobre un campo k, y sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo coherente libre de torsión, sea $U = Spec(R)$, un abierto afín de X donde $\mathcal{E}$ sea trivial, i.e $\mathcal{E}_{|U} \cong R^n$, consideremos la descomposición isotípica

$$(1) \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus .... \oplus \mathcal{E}_r$$

entonces $\mathcal{E}_{i|U} \cong e_i\mathcal{E}|_U$, por otro lado, como X es un esquema íntegro, tenemos que A es dominio entero, por tanto $K(X) = K(R)$, entonces localizando en el punto genérico ϵ, tenemos que $\mathcal{E}_\epsilon = R^n \otimes_R K(X) = K(X)^n$, y el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[dr] & Aut(K(X)^{\oplus n}) \\ & Aut(R^{\oplus n}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

nos dice que la descomposición (1) está determinada en el punto genérico por la representación de G en $K(X)^{\oplus n}$, de aquí que la descomposición de $\mathcal{E}$ queda determinada por la descomposición en el punto genérico como representación del grupo G. Y más aún, que la acción de G en R^n viene dada por la restricción de la acción de G en $K(X)^n$. Además por le teorema A.0.17 [Apen 1] se tiene que la representación de G en $K(X)^n$ es de la forma $V \otimes_k K(X)$, donde V es una representación de G sobre k.

Con lo cual hemos probado el siguiente

Teorema 1.2.3 *Sea X un esquema íntegro sobre un campo k, K su campo de funciones meromorfas y ϵ el punto genérico de X. Sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo coherente libre de torsión, si $\mathcal{E}_\epsilon \simeq (V_0^{n_0} \oplus .... \oplus V_r^{n_r}) \otimes_k K$ es la representación de G en el punto genérico de X, entonces la descomposición natural*

$$\mathcal{E} = e_0\mathcal{E} \oplus .... \oplus e_r\mathcal{E}$$

satisface que

i) $rango(e_i\mathcal{E}) = n_i \times dim(V_i)$

ii) La inclusión natural $(e_i\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{E}$ induce un isomorfismo de representaciones $(e_i\mathcal{E})_\epsilon \hookrightarrow V_i^{n_i} \otimes_k K$

Definición 3 *Sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo localmente libre sobre un esquema íntegro sobre un campo k, K su campo de funciones meromorfas y sea $\mathcal{E}_\epsilon \simeq V \otimes_k K$ la representación de G en el punto genérico, entonces definiremos a la representación V como el tipo del $\mathcal{O}_X(G)$-módulo $\mathcal{E}$*

Corolario 1.2.4 *Sean X y $\mathcal{E}$ como en el teorema anterior, y sea V el tipo de la representación en $\mathcal{E}$, entonces la representación de G en la fibra a un punto de X es genéricamente V.*

A partir del teorema 1.2.3 podemos conocer el comportamiento de la estructura de $\mathcal{O}_X(G)$-módulo bajo las operaciones básicas entre $\mathcal{O}_X$-módulos, algunas de las cuales se describen a continuación.

Teorema 1.2.5 *Sea X un esquema íntegro sobre un campo k, si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son $\mathcal{O}_X(G)$-módulos de tipo V y W respectivamente, entonces*
i) $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ es de tipo $V \otimes W$.
ii) $\Lambda^r \mathcal{E}$ es de tipo $\Lambda^r V$, y
iii) $S^n \mathcal{E}$ es de tipo $S^n V$

Demostración: Simplemente debemos observar que si ϵ es punto genérico de X entonces $(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_\epsilon = \mathcal{E}_\epsilon \otimes_{K(X)} \mathcal{F}_\epsilon$, $(\Lambda^r \mathcal{E})_\epsilon = \Lambda^r(\mathcal{E}_\epsilon)$ y $(S^n \mathcal{E})_\epsilon = S^n(\mathcal{E}_\epsilon)$, la conclusión se sigue de la teoría general de representaciones sobre un campo.$\diamondsuit$

Corolario 1.2.6 *Sean $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j$ dos $\mathcal{O}_X(G)$-módulos localmente libres de tipo V_i, V_j, respectivamente y ambas representaciones de G irreducibles distintas. Entonces $\mathcal{H}om_G(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j) = 0$*

Demostración: Obsérvese que el rango de $\mathcal{H}om_G(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j)$ está determinado por la dimensión sobre $K(X)$ de la parte de tipo 0 del localizado en el punto genérico de la gavilla $\mathcal{E}_i^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_j$, pero está es cero por teoría general de representaciones, y como $\mathcal{H}om_G(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j)$ es una gavilla localmente libre, se concluye lo deseado. $\diamondsuit$

Lema 1.2.7 *Sean $k = \mathbb{C}$ y $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ dos $\mathcal{O}_X(G)$-módulos localmente libres del tipo V_i, entonces*

$$rango \mathcal{H}om_G(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = rango\ \mathcal{E}_1 \times rango\ \mathcal{E}_2 / dim V_i^2$$

Demostración: Como $k = \mathbb{C}$ tenemos una teoría de caracteres y la igualdad es un resultado directo de ésta. $\diamondsuit$

1.3 $\mathcal{O}_X(G)$-Módulos Inescindibles.

Sea $\mathcal{F}$ una gavilla coherente libre de torsión sobre un esquema íntegro, una pregunta natural es cuando $\mathcal{F}$ admite una estructura de $\mathcal{O}_X(G)$-módulo, como veremos posteriormente, esto será sólo si la descomposición en inescindibles de $\mathcal{F}$ tiene cierta estructura.

Lema 1.3.1 *Sea V una representación irreducible sobre k de G, supongamos que $dim_k V \geq 2$, entonces existe un subgrupo $H \leq G$ tal que $V \downarrow_H^G$ tiene al menos dos componentes isotípicas*

Demostración: Supongamos que es falso, entonces para todo $g \in G$, $V \downarrow_{<g>}$ tiene sólo una componente isotípica, es decir, el elemento g actúa en V por multiplicación de una constante, en este caso cualquier subespacio de V de dimensión 1 es G invariante, contradiciendo la hipótesis de que V es irreducible de dimensión mayor o igual a dos.$\diamondsuit$

Lema 1.3.2 *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente libre de torsión e inescindible, si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo para algún grupo G, entonces el tipo de la representación es $V = W^n$ para algún W irreducible de dimensión 1, más aún, se tiene que todo elemento $g \in G$ actúa por multiplicación de una constante.*

Demostración: Por ser $\mathcal{F}$ irreducible el tipo de la representación es $V = W^n$ para algún W irreducible, además debe tener ésta misma estructura al restringirla a cualquier subgrupo de G, pero por el lema anterior se tiene que W debe tener dimensión 1, en particular, si $g \in G$, éste actúa por multiplicación de una constante en cada fibra, de aquí que actúa por multiplicación de una constante globalmente. $\diamondsuit$

Ahora estamos en posición de clasificar a los $\mathcal{O}_X(G)$-módulos inescindibles

Teorema 1.3.3 *Sea X un esquema proyectivo íntegro y sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo coherente libre de torsión e inescindible de tipo W, entonces $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{F}$ con $\mathcal{F}$ inescindible como $\mathcal{O}_X$-módulo y $W \simeq V^{rango \mathcal{F}}$ con V una representación irreducible.*

Demostración: Sea $\mathcal{E} = \mathcal{F}_1^{n_1} \oplus ... \oplus \mathcal{F}_r^{n_r}$ la descomposición de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{O}_X$-módulos inescindibles con $\mathcal{F}_i \neq \mathcal{F}_j, i \neq j$. Esta descomposición es única salvo permutaciones de los sumandos, de aquí que si $g \in G$ entonces $g\mathcal{E} = g\mathcal{F}_1^{n_1} \oplus ... \oplus g\mathcal{F}_r^{n_r}$ por lo tanto $g\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_j$ para algún j, entonces $\mathcal{F}_i \simeq \mathcal{F}_j$ así que $i = j$, por lo tanto cada sumando $\mathcal{F}_i^{n_i}$ es G-invariante, y como $\mathcal{E}$ es inescindible, entonces $r = 1$, es decir $\mathcal{E} = \mathcal{F}^n$ con $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo inescindible. Por lo tanto el tipo de la representación es V^s con V irreducible.

El siguiente paso será demostrar que $s = rango \mathcal{F}$ y $dim V = n$. Sea ϵ el punto genérico de X, entonces $\mathcal{E}_\epsilon = V^s \otimes K(X)$. Ahora, sea $g \in G$, y consideremos la representación de $< g >$ obtenida por restricción, entonces

$\mathcal{E}$ tiene una descomposición isotípica de la forma $\mathcal{E} = \mathcal{F}_{\chi_1}^{n_1} \oplus ... \oplus \mathcal{F}_{\chi_s}^{n_s}$ con χ_i correspondiendo a representaciones irreducibles de $< g >$, y por el lema anterior tenemos que en cada sumando los elementos de $< g >$ actúan como un múltiplo escalar de la identidad, entonces $\mathcal{E} = [\mathcal{O}(V_{\chi_1})^{n_1} \oplus ... \oplus \mathcal{O}(V_{\chi_s})^{n_s}] \otimes \mathcal{F}$ y en el punto génerico se tiene que $\mathcal{E}_\epsilon = [V_{\chi_1}^{n_1} \oplus ... \oplus V_{\chi_s}^{n_s}] \otimes \mathcal{F}_\epsilon$, por otro lado, en el punto genérico se tiene que $\mathcal{E}_\epsilon = (V \downarrow_{<g>}^G)^s \otimes K(X)$ y por la unicidad de la descomposición en representaciones irreducibles sobre espacios vectoriales y del hecho de que sobre un campo algebraicamente cerrado los caracteres forman una base de $K(G)$ (ver [5] págs. 207-217)se tiene que $(V \downarrow_{<g>}^G) \otimes \mathcal{F}_\epsilon = [V_{\chi_1}^{n_1} \oplus ... \oplus V_{\chi_s}^{n_s}] \otimes \mathcal{F}_\epsilon$ y por tanto $s = rango\mathcal{F}$ y $dimV = n$.

Ahora, considérese la parte de tipo V_0 de $\mathcal{O}(V^\vee) \otimes \mathcal{E}$, donde $V^\vee$ es la representación dual de V, entonces ésta es un sumando directo de $\mathcal{O}(V^\vee) \otimes \mathcal{E} \simeq \mathcal{F}^{n^2}$ de rango el rango de $\mathcal{F}$, por lo tanto es $\mathcal{F}$. Considérese la inclusión natural

$$\mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{O}(V^\vee) \otimes \mathcal{E}$$

y como $\mathcal{O}(V^\vee)$ es naturalmente G-isomorfo a $\mathcal{O}(V)^\vee$ se tiene el morfismo

$$\mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{O}(V^\vee) \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

dado por

$$v \otimes \delta \otimes e \mapsto \delta(a)e$$

entonces se tiene un morfismo natural

$$\mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$$

y por teoría general de representaciones sobre un campo, se tiene que este morfismo es isomorfismo en el punto genérico, por lo tanto es genéricamente inyectivo, pero por ser gavillas libres de torsión sobre un esquema íntegro se tiene que es inyectivo, nuevamente por ser un esquema proyectivo se tiene que debe ser sobreyectivo y por tanto un isomorfismo, con lo cual se concluye el teorema. $\diamondsuit$

De este último se obtiene como corolario el siguiente

Teorema 1.3.4 ***(de clasificación)*** *Sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo coherente libre de trosión de tipo $V_0^{n_0} \oplus ... \oplus V_r^{n_r}$, entonces la descomposición isotípica de $\mathcal{E}$ está dada por*

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}(V_0) \otimes \mathcal{F}_0 \oplus ... \oplus \mathcal{O}(V_r) \otimes \mathcal{F}_r$$

donde $\mathcal{F}_i$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo de rango n_i $\diamondsuit$

Proposición 1.3.5 *Sea*

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{O}(V_0) \otimes \mathcal{F}_{0,i} \oplus ... \oplus \mathcal{O}(V_r) \otimes \mathcal{F}_{r,i}, \quad i = 1, 2$$

entonces

$$\mathcal{H}om_G(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{j=0}^{r} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_{j,1}, \mathcal{F}_{j,2})$$

Demostración: Por el corolario 1.2.6.,

$$Hom_G(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \bigoplus_{j=0}^{r} Hom_G(\mathcal{O}(V_j) \otimes \mathcal{F}_{j,1}, \mathcal{O}(V_j) \otimes \mathcal{F}_{j,2})$$

así que supongamos $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{F}_i$ con V una representación irreducible.

Definamos la aplicación natural

$$\sigma : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \mapsto Id \otimes \sigma : \mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{F}_2$$

y definamos la aplicación inversa de la siguiente manera, sea $V^\vee$ la representación dual de V, entonces $V \otimes V^\vee \sim U \oplus W$ donde U es la representación trivial de G, de aquí que $\mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{O}(V^\vee) \sim \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}(W)$, así, si $\rho : \mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{F}_2$ es un morfismo G-invariante, tenemos un morfismo natural

$$Id \otimes \rho : \mathcal{O}(V^\vee) \otimes \mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{O}(V^\vee) \otimes \mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{F}_2$$

definamos σ como la restricción a la parte correspondiente a la representación trivial, claramente estos morfismo son inversos.$\diamondsuit$

Proposición 1.3.6 *Sean $\mathcal{E}, \mathcal{F}_0, ...\mathcal{F}_r$ gavillas coherentes sobre X, $W = V_0 \oplus ... \oplus V_r$ representación de G sobre k y supongamos*

$$\phi : \mathcal{O}(W) \otimes \mathcal{E} \longrightarrow (\mathcal{O}(V_0) \otimes \mathcal{F}_0) \oplus ... \oplus (\mathcal{O}(V_r) \otimes \mathcal{F}_r)$$

un morfismo G-invariante, entonces existe un morfismo natural

$$\bar{\phi} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}_0 \oplus ... \oplus \mathcal{F}_r$$

y además cumple que ϕ es inyectiva si y sólo si $\bar{\phi}$ lo es.

Demostración: Por la proposición anterior se tiene que $Hom_G(\mathcal{O}(W) \otimes \mathcal{E}, (\mathcal{O}(V_0)\otimes\mathcal{F}_0)\oplus...\oplus(\mathcal{O}(V_r)\otimes\mathcal{F}_r))$ es naturalmente isomorfa a $\bigoplus_{i=0}^{r} Hom(\mathcal{E},\mathcal{F}_i)$, sea $\bar{\phi}$ la imagen de ϕ bajo dicho isomorfismo.

Ahora, ϕ es inyectiva si y sólo si

$$\phi_i : \mathcal{O}(V_i) \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}(V_i) \otimes \mathcal{F}_i$$

lo es para $i = 0, ..., r$, si y sólo si

$$Id \otimes \phi_i : \mathcal{O}(V_i^\vee) \otimes \mathcal{O}(V_i) \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}(V_i^\vee) \otimes \mathcal{O}(V_i) \otimes \mathcal{F}_i$$

lo es para $i = 0, ..., r$, si y sólo si

$$\bar{\phi}_i : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}_i$$

lo es para $i = 0, ..., r$ $\diamondsuit$

Para finalizar esta sección se demostrará la existencia de resoluciones localmente libres, G-invariantes, para $\mathcal{O}_X(G)$-módulos

Sea X un esquema proyectivo sobre una anillo noetheriano B, démosle a la gavilla estructural torcida $\mathcal{O}_X(1)$ la estructura de $\mathcal{O}_X(G)$-módulo mediante la acción trivial, entonces tenemos el siguiente lema.

Lema 1.3.7 *Sea X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano B y sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo, entonces $\mathcal{F}(n)$ es un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo.*

Recordemos ahora un teorema de Serre.

Teorema 1.3.8 *(Serre) Sea X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano B, sea $\mathcal{O}_X(1)$ una gavilla invertible muy amplia en X, sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente. Entonces existe un entero n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ la gavilla $\mathcal{F}(n)$ está generada por un número finito de secciones globales.*

Demostración: Ver [8] página 121 $\diamondsuit$

De aquí se sigue el siguiente

Corolario 1.3.9 *Sea X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano B. Entonces cualquier $\mathcal{O}_X(G)$-módulo $\mathcal{F}$ que sea $\mathcal{O}_X$-coherente en X puede ser escrita como un cociente de un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo $\mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es una suma finita de gavilla estructurales torcidas $\mathcal{O}_X(n)$ para algún entero n.*

Demostración: Sea $\mathcal{F} = \mathcal{O}(V_0) \otimes \mathcal{F}_0 \oplus .... \oplus \mathcal{O}(V_r) \otimes \mathcal{F}_r$ la descomposición isotípica de $\mathcal{F}$, entonces tomado resoluciones localmente libres para los sumandos $\mathcal{F}_i$ se obtiene lo deseado. $\diamondsuit$

1.4 Funtores Derivados.

En esta sección estudiremos la teoría básica de los funtores derivados de la categoría de $\mathcal{O}_X(G)$-módulos. Obsérvese que los funtores $\Gamma(X, .)$, $Hom(., .)$ y $\mathcal{H}om(., .)$ de la teoría clásica, tiene una nueva estructura, los dos primeros valoran en la categoría de $k(G)$-módulos y el último en la categoría de $\mathcal{O}_X(G)$-módulos y es con esta estructura que estudiaremos sus funtores derivados, por abuso de notación y esperando no causar confusión emplearemos la misma notación para los funtores arriba mencionados. Por otro lado en esta categoría aparecen en forma natural dos nuevos funtores, $Hom_G(., .)$ y $\mathcal{H}om_G(., .)$ los cuales serán estudiados también. El presente párrafo pretende mostrar relaciones entre estos funtores y los funtores tradicionales de la teoría de $\mathcal{O}_X$-módulos, y en algunos casos específicos calcularlos en términos de estos últimos.

Por teoría general de módulos sabemos que para un anillo arbitrario A la categoría de A-módulos tiene suficientes inyectivos. Así que repitiendo las mismas demostraciones que para $\mathcal{O}_X$-módulos se tiene que la categoría de $\mathcal{O}_X(G)$-módulos tiene suficientes inyectivos, por lo tanto los funtores $\Gamma(X, .)$, $Hom(., .)$, $\mathcal{H}om(., .)$ y $Hom_G(., .)$, $\mathcal{H}om_G(., .)$, tienen funtores derivados.

Teorema 1.4.1 *Los funtores derivados de $\Gamma(X, .)$ son naturalmente isomorfos como k-espacio vectorial con los funtores derivados clásicos*

Demostración: Sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo, obsérvese que la hacificación de la resolución de Čech es de $\mathcal{O}_X(G)$-módulos por lo que la cohomología de Čech está bien definida en la categoría de $K(G)$-módulos,por lo tanto el funtor de cohomología clásico está en la categoría de $K(G)$-módulos y es un funtor universal de aquí que la identidad induce un morfismo natural de los funtores derivados de $\Gamma(X, .)$ en la categoría de $\mathcal{O}_X(G)$-módulos con el funtor de cohomología clásico, este morfismo es de k-espacios vectoriales; pero como todo funtor derivado es universal también se tiene que la identidad define un

morfismo natural entre el funtor definido por la cohomología de Cěch y los funtores derivados de $\Gamma(X,.)$, este último es de $K(G)$-módulos, de aquí que sean funtores isomorfos.$\diamondsuit$

Corolario 1.4.2 *Sea*

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X(G)$-módulos, entonces la sucesión exacta larga de cohomología es de A-módulos.$\diamondsuit$

Corolario 1.4.3 *Sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo y sea $e_0\mathcal{E} \oplus ... \oplus e_r\mathcal{E}$ su descomposición isotípica, entonces se tienen isomorfismos naturales*

$$H^i(X,\mathcal{E}) \simeq H^i(X, e_0\mathcal{E}) \oplus ... \oplus H^i(X, e_r\mathcal{E})$$

de $k(G)$-módulos.$\diamondsuit$

Observación: En los resultados anteriores se puede reemplazar $K(G)$ por una k-álgebra de Artin semisimple.

Estudiemos ahora los funtores derivados de $Hom(.,.)$, $Hom_G(.,.)$, $\mathcal{H}om(.,.)$ y $\mathcal{H}om_G(.,.)$.

Teorema 1.4.4 *Sea X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano B, entonces los funtores derivados de $Hom(\mathcal{E},.)$ y $\mathcal{H}om(\mathcal{E},.)$ con $\mathcal{E}$ coherente, coinciden con los funtores derivados clásicos.*

Demostración: Obsérvese que por el corolario 1.3.9 se tiene que todo módulo coherente tiene una resolución por módulos localmente libres de aquí que el funtor $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F},\mathcal{G})$ de la teoría clásica se puede obtener mediante una resolución por módulos localmente libres, pero el mismo corolario 1.3.9 nos dice que dicha resolución es de $\mathcal{O}_X(G)$-módulos por lo que dicho funtor valora en la categoría de $\mathcal{O}_X(G)$-módulos, y nuevamente por propiedades de funtores universales se tiene el isomorfismo deseado. Como los funtores derivados son universales (Ver [8] sección 3.1) y como se tiene que los elementos de $K(G)$ definen una familia de morfismos en $Hom(.,.)$ entonces los funtores derivados $Ext^i(.,.)$ tiene una estructura natural de G-módulos de aquí se sigue lo deseado.$\diamondsuit$

Corolario 1.4.5 *Sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo, entonces se tienen isomorfismos naturales $Ext^i_G(.,.) \cong e_1Ext^i(.,.)$ y $\mathcal{E}xt^i_G(.,.) \cong e_1\mathcal{E}xt^i(.,.)$.*

Demostración: Es inmediato de los teoremas de funtores universales (ver [8] sección 3.1). $\diamondsuit$

Proposición 1.4.6 *Para cualquier $\mathcal{O}_X(G)$-módulo $\mathcal{G}$ se tiene $\mathcal{O}_X(G)$-isomorfismos naturales*
a) $\mathcal{E}xt^0(\mathcal{O}_X,\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}$
b) $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X,\mathcal{G}) = 0$ para $i > 0$
y G-isomorfismos naturales
c) $Ext^i(\mathcal{O}_X,\mathcal{G}) \cong H^i(X,\mathcal{G})$.

Demostración: El funtor $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X,.)$ es el funtor identidad el cual es un $\mathcal{O}_X(G)$-morfismo de aquí que sus funtores derivados sean 0 para $i > 0$, esto prueba a) y b). Nuevamente el funtor $Hom(\mathcal{O}_X,.)$ y $\Gamma(X,.)$ son iguales, así que sus funtores derivados son los mismos.$\diamondsuit$

Lema 1.4.7 *Si $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo localmente libre de rango finito , e $\mathcal{I}$ es un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo inyectivo, entonces $\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}$ es inyectivo.*

Demostración: Para esto debemos probar que el funtor $Hom_G(.,\mathcal{L}\otimes\mathcal{I})$ es exacto, pero éste es el mismo que $Hom_G(.\otimes\mathcal{L}^\vee,\mathcal{I})$ el cual es exacto por ser $.\otimes\mathcal{L}^\vee$ un funtor exacto e $\mathcal{I}$ inyectivo. $\diamondsuit$

Proposición 1.4.8 *Sea $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X(G)$-módulo localmente libre de rango finito, y sea $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om(\mathcal{L},\mathcal{O}_X)$ su dual. Entonces para cualquier $\mathcal{F},\mathcal{G}$, $\mathcal{O}_X(G)$-módulos se tiene un isomorfismo natural de $k(G)$-módulos*
$Ext^i(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L},\mathcal{G}) \cong Ext^i(\mathcal{F},\mathcal{L}^\vee\otimes\mathcal{G})$
y para la gavilla $\mathcal{E}xt$ se tiene un isomorfismo natural de $\mathcal{O}_X(G)$-módulos
$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L},\mathcal{G}) \cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F},\mathcal{L}^\vee\otimes\mathcal{G}) \cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F},\mathcal{G})\otimes\mathcal{L}^\vee$.

Demostración: El caso $i = 0$ se sigue del lema 1.2.2. Para el caso general, nótese que todos los funtores son δ-funtores en la variable $\mathcal{G}$, como tensorizar por $\mathcal{L}^\vee$ es un funtor exacto, para $i > 0$ y $\mathcal{G}$ inyectivo todos son cero, y de la teoría general de δ-funtores se sigue lo deseado (ver [8] sección 3.1). $\diamondsuit$

Capítulo 2

Cubrientes Galois.

En este capítulo aplicaremos la teoría desarrollada en el capítulo anterior al estudio de cubrientes Galois de curvas. Para nosotros curva significa un esquema completo no singular de dimensión 1 sobre un campo algebraicamente cerrado, por cubriente de curvas entenderemos un morfismo finito y separable.

2.1 Teoremas de Descomposición.

Sea X una variedad algebraica proyectiva, y sea G un grupo finito actuando en X efectivamente por automorfismos, entonces el cociente $Y = X/G$ es variedad algebraica, además en Y tenemos un $\mathcal{O}_Y(G)$ módulo muy especial, a saber $\pi_*\mathcal{O}_X$, la imagen directa de la gavilla estructural de X. Estudiemos la descomposición de esta gavilla.

Teorema 2.1.1 *Sea X una variedad sobre un campo k algebraicamente cerrado con acción de un grupo finito G ($char(k) \nmid \mid G \mid$)y sea Y el cociente, entonces*

$$\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus (\mathcal{O}(V_1) \otimes \mathcal{E}_{V_1}) \oplus ... \oplus (\mathcal{O}(V_r) \otimes \mathcal{E}_{V_r})$$

donde V_i son las representaciones irreducibles G sobre k y rango $\mathcal{E}_{V_i} = dimV_i$

Demostración: Como el cubriente $\pi : X \to X/G = Y$ es de Galois, tenemos que la extensión de campos $K(X) : K(Y)$ es de Galois con grupo de Galois G, por el teorema de la base normal existe un elemento $\zeta \in K(X)$ tal que

$\{g\zeta\}_{g\in G}$ es una base de $K(X)$ como espacio vectorial sobre $K(Y)$, de aquí que $K(X)$ sea la representación regular de G sobre $K(Y)$, por otro lado ésta es la acción de G en $(\pi_*\mathcal{O}_X)_{\epsilon(Y)}$, así que la representación en el punto genérico es la regular. Usando el teorema 1.2.3 hemos concluido la demostración. $\diamondsuit$

Corolario 2.1.2 *Con las hipótesis del teorema anterior, sea $H \leq G$ y $\phi : X/H \longrightarrow Y$ el morfismo natural inducido, entonces*

$$\phi_*\mathcal{O}_{X/H} = (\pi_*\mathcal{O}_X)^H = \mathcal{O}_Y \oplus (\mathcal{O}(V_1^H) \otimes \mathcal{E}_{V_1}) \oplus ... \oplus (\mathcal{O}(V_r^H) \otimes \mathcal{E}_{V_r}).$$

Demostración: Ver [14] págs. 65-69

2.2 Teoremas de Estructura.

Teorema 2.2.1 *Sea $X \longrightarrow Y$ un cubriente Galois, entonces se tiene la siguiente sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \pi_*\pi^*\pi_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \bigoplus_{g\in G} \pi_*(g^*\mathcal{O}_X) \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{O}_Y(G)$-módulos, donde suupD $\in$ supp$\pi_*\pi^*\pi_*\Omega_{X/Y}$.

Demostración: Sea $y \in Y - supp(\pi_*\Omega_{X/Y})$ un punto cerrado de Y, entonces la sucesión anterior localizada en y es evidentemente exacta, y por lo tanto la sucesión es exacta y D tiene soporte en $supp(\pi_*\Omega_{X/Y})$.$\diamondsuit$

Corolario 2.2.2 *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla localmente libre en X, entonces se tiene la siguiente sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \pi_*\pi^*\pi_*\mathcal{F} \longrightarrow \bigoplus_{g\in G} \pi_*(g^*\mathcal{F}) \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{O}_Y(G)$-módulos, donde supp D está contenido en $supp(\pi_*\Omega_{X/Y})$

Demostración: Obsérvese que la sucesión exacta del teorema anterior se puede escribir como

$$0 \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_X \otimes_{\pi_*\mathcal{O}_X} \bigoplus_{g\in G} \pi_*\mathcal{O}_X \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

mientras que la sucesión que nos interesa se obtiene tensorisando esta última por $\pi_*\mathcal{F} \otimes_{\pi_*\mathcal{O}_X} -$

$$0 \longrightarrow \pi_*\mathcal{F} \otimes_{\pi_*\mathcal{O}_X} \pi_*\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \pi_*\mathcal{F} \otimes_{\pi_*\mathcal{O}_X} \pi_*\mathcal{O}_X \otimes_{\pi_*\mathcal{O}_X} \bigoplus_{g\in G} \pi_*\mathcal{O}_X$$

y como $\pi_*\mathcal{O}_X$ es $\mathcal{O}_Y$-plano y $\mathcal{F}$ es $\pi_*\mathcal{O}_X$-plano, entonces la sucesión es exacta y *supp* D está contenido en $supp(\pi_*\Omega_{X/Y})$.$\diamondsuit$

El hecho de que este morfismo sea G-invariante nos permitirá comparar las descomposiciones isotípicas $\pi_*\pi^*\pi_*\mathcal{F} \simeq \pi_*\mathcal{F} \otimes \pi_*\mathcal{O}_X$ y de $\oplus_{g\in G}\pi_* g_*\mathcal{F}$. El siguente paso será describir dichas descomposiciones.

Sea $Spec(A) \subset Y$ un abierto afín y $Spec(B) = \pi^{-1}(Spec(A))$. Sea $M = \mathcal{F}(Spec(B))$, entonces se tiene que $\mathcal{F}_{|Spec(B)} = \tilde{M}$. Obsérvese que $Spec(B)$ es G-invariente. Apartir de esto tenemos que $\pi^*\pi_*\mathcal{F}_{|Spec(B)} = \widetilde{M \otimes_A B}$ y la acción de G en $M \otimes_A B$ está determinada por $g(m \otimes b) = m \otimes gb$. Es decir que la descomposición isotípica de $\pi_*\pi^*\pi_*\mathcal{F}$ es simplemente

$$\pi_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi_*\mathcal{O}_X = \pi_*\mathcal{F} \oplus \mathcal{O}(V_1) \otimes (\pi_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}_{V_1}) \oplus$$
$$\ldots \oplus \mathcal{O}(V_r) \otimes (\pi_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}_{V_r})$$

por otro lado tenemos que $g^*\mathcal{F}_{|Spec(B)} = g^*\tilde{M} = \widetilde{M \otimes_B g^*B}$, donde la estructura de B-módulo en g^*M está determinada por $b * m = g^{-1}(b)m$, en particular si $a \in A$ se tiene que $a * m = g^{-1}(a)m = am$, además la acción de G en $\bigoplus_{g\in G} g^*M$ por $(m \otimes b)_g \overset{h}{\longmapsto} (m \otimes b)_{hg}$ es decir que el grupo actúa permutando las entradas, de aquí que la descomposición isotípica de la imagen directa de $\bigoplus_{g\in G} g^*\mathcal{F}$ sea

$$\bigoplus_{g\in G} \pi_* g^*\mathcal{F} = \pi_*\mathcal{F} \oplus \mathcal{O}(V_1)^{dimV_1} \otimes \pi_*\mathcal{F} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(V_r)^{dimV_r} \otimes \pi_*\mathcal{F}$$

Ahora, como el morfismo natural

$$\pi_*\pi^*\pi_*\mathcal{F} = \pi_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \bigoplus_{g\in G} \pi_* g^*\mathcal{F}$$

es G-invariante, tenemos que $\mathcal{O}(V_i) \otimes (\pi_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}_{V_i})$ se inyecta naturalmente en $\mathcal{O}(V_i)^{dimV_i} \otimes \pi_*\mathcal{F} = \mathcal{O}(V_i) \otimes \pi_*\mathcal{F}^{dimV_i}$ y por la proposición 1.3.6 se tiene un morfismo natural, inyectivo $\pi_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}_{V_i} \longrightarrow \pi_*\mathcal{F}^{dimV_i}$, lo cual queda resumido en el siguiente

Teorema 2.2.3 *Sea $X \xrightarrow{\pi} Y$ un cubriente Galois con grupo de Galois G, y $\mathcal{F}$ una gavilla localmente libre en X, entonces se tienen morfismos inyectivos naturales*

$$0 \longrightarrow \pi_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}_{V_i} \xrightarrow{\phi_i} \pi_*\mathcal{F}^{dimV_i}.$$

Ahora estudiemos el caso en que $\mathcal{F}$ es G-estable, es decir, que la imagen directa tiene estructura de $\mathcal{O}_Y(G)$-módulo (ver [14] págs. 65-69) para esto estudiaremos la relación de esta estructura con los morfismos ϕ_i, nuevamente, siguiendo la notación anterior, tenemos que el morfismo ϕ está determinado localmente por $m \otimes_{\mathcal{O}_Y} b \longmapsto \oplus_{g\in G}(g^{-1}(b)m)_g$, definamos en $\oplus_{g\in G}\pi_*\mathcal{O}_X$ la siguiente acción de G,

$$(*) \qquad \oplus_{g\in G}\,(a_g)_g \overset{\hat{h}}{\mapsto} \oplus_{g\in G}(ha_g)_{gh^{-1}},$$

(nos referiremos a esta nueva estructura por G') de aquí se tiene que la acción de G' en el primer factor también se preserva, es decir ϕ es G'-invariante para esta segunda estructura de G-módulo y además conmuta con la estructura anterior, por último, obsérvese que el morfismo ϕ_i del teorema anterior también es G'-invariante. Ahora estudiemos cual es la descomposición isotípica, bajo esta nueva acción, de $\oplus_{g\in G}\pi_*\mathcal{F}$. Para esto considere la acción de G en $\mathcal{O}_Y^{\oplus|G|} \otimes \pi_*\mathcal{F}$ definida por

$$v \otimes a \overset{h}{\mapsto} h^*v \otimes h(a)$$

donde h^*v es la acción definida por

$$\oplus_{g\in G}(v_g)_g \overset{h^*}{\mapsto} \oplus_{g\in G}(v_g)_{gh^{-1}}$$

Obsérvese que ésta es la representación dual a la definida por

$$\oplus_{g\in G}(v_g)_g \overset{h}{\mapsto} \oplus_{g\in G}(v_g)_{hg}$$

y que el isomorfismo natural

$$\mathcal{O}_Y^{\oplus|G|} \otimes \pi_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \bigoplus_{g\in G} \pi_*\mathcal{F}$$

es G'-invariante, de aquí que la descomposición isotípica de $\bigoplus_{g\in G}\pi_*\mathcal{O}_X$ sea la obtenida del producto tensorial

$$\mathcal{O}_Y(G)^\vee \otimes [\mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}(V_1)\otimes\mathcal{F}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{O}(V_r)\otimes\mathcal{F}_r].$$

El siguiente paso es comparar esta descomposición con la descomposición obtenida por la primera acción de G. Sea $\mathcal{O}_Y(V_i)^{\oplus dim(V_i)}\otimes\pi_*\mathcal{F}$ la componente isotípica bajo la primera acción de G, entonces la segunda acción restringe a esta gavilla y su descomposición isotípica queda determinada por

$$\mathcal{O}_Y(V_i^\vee)^{\oplus dim(V_i)} \otimes [\mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}(V_1)\otimes\mathcal{F}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{O}(V_r)\otimes\mathcal{F}_r].$$

donde $V_i^\vee$ es la representación dual de V_i.

Ahora podemos enunciar el siguiente teorema de estructura

Teorema 2.2.4 *Sea $X \xrightarrow{\pi} Y$ un cubriente de Galois con grupo de Galois G, y $\mathcal{F}$ una gavilla localmente libre en X, G-estable, entonces si*

$$\pi_*\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}(V_1)\otimes\mathcal{F}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{O}(V_r)\otimes\mathcal{F}_r$$

es la descomposición isotípica de $\pi_*\mathcal{F}$ entonces se tiene un morfismo inyectivo

$$\mathcal{F}_i \otimes \mathcal{E}_{V_j} \longrightarrow \bigoplus_{l=0}^{r} \mathcal{F}_l^{n_l}$$

donde

$$V_i \otimes V_j = \bigoplus_{l=0}^{r} V_l^{n_l}$$

Demostración: Del teorema 2.2.3 tenemos los siguientes morfismos naturales

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(V_j)\otimes(\pi_*\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{E}_{V_j}) \xrightarrow{\phi_i} \mathcal{O}(V_j)^{dimV_j}\otimes\pi_*\mathcal{F} \simeq$$

$$\mathcal{O}(V_j)\otimes\pi_*\mathcal{F}^{dimV_j}$$

y por las observaciones anteriores tenemos que es G-invariante bajo la acción definida por (*), por lo tanto descompone en morfismos inyectivos

$$\mathcal{O}(V_j)\otimes(\mathcal{O}(V_i)\otimes\mathcal{E}_{V_i})\otimes\mathcal{E}_{V_j} \longrightarrow (\mathcal{O}(V_j^\vee)\otimes\pi_*\mathcal{F}^{dimV_j})$$

$$\simeq \mathcal{O}(V_j^\vee)\otimes[\mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}(V_1)\otimes\mathcal{F}_1 \oplus ...\mathcal{O}(V_r)\otimes\mathcal{F}_r]^{dimV_j}$$

$$\simeq [\mathcal{O}(V_j^\vee)\otimes\mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}(V_j^\vee)\otimes\mathcal{O}(V_1)\otimes\mathcal{F}_1 \oplus ...\mathcal{O}(V_j^\vee)\otimes\mathcal{O}(V_r)\otimes\mathcal{F}_r]^{dimV_j}$$

$$\simeq [\mathcal{O}(V_j^\vee)\otimes\mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}(V_j^\vee\otimes V_1)\otimes\mathcal{F}_1 \oplus ...\mathcal{O}(V_j^\vee\otimes V_r)\otimes\mathcal{F}_r]^{dimV_j}$$

cada uno factorizando por la parte respectiva de tipo V_i; para esto introduzcamos un poco de notación: Sea W un representación de G y V una representación irreducible; definamos $< W, V >$:=dimensión con la que aparece V en W.

Sea $s_l^i =< V_j^\vee \otimes V_l, V_i >$ entonces la parte de tipo V_i, está determinada por

$$\mathcal{O}(V_i)\otimes[\bigoplus_{l=1}^{r}\mathcal{F}_l^{s_l^i}]^{dimV_j}$$

de aquí que se tengan los morfismos inyectivos

$$\mathcal{O}(V_i)\otimes(\mathcal{F}_i\otimes\mathcal{E}_{V_j})^{dimV_j} \longrightarrow \mathcal{O}(V_i)\otimes[\bigoplus_{l=0}^{r}\mathcal{F}_l^{s_l^i}]^{dimV_j}$$

y por la proposición 1.3.6 se tienen los morfismos inyectivos

$$\mathcal{F}_i\otimes\mathcal{E}_{V_j} \longrightarrow \bigoplus_{l=0}^{r}\mathcal{F}_l^{s_l^i}$$

pero por teoría de representaciones $< V_j^\vee \otimes V_l, V_i >=< V_j \otimes V_i, V_l >= n_l$ donde

$$V_j \otimes V_i = \bigoplus_{l=1}^{r} V_l^{n_l}$$

con lo cual se concluye el teorema. $\diamondsuit$

Ahora, resumiendo estos teoremas tenemos el resultado principal de esta sección

Teorema 2.2.5 *Sea $X \xrightarrow{\pi} Y$ un cubriente de Galois con grupo de Galois G, entonces en la descomposición*

$$\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}(V_1)\otimes\mathcal{E}_{V_1} \oplus ... \oplus \mathcal{O}(V_r)\otimes\mathcal{E}_{V_r}$$

Se tienen morfismos inyectivos naturales

$$\mathcal{E}_{V_i}\otimes\mathcal{E}_{V_j} \longrightarrow \bigoplus_{l=0}^{r}\mathcal{E}_{V_l}^{n_l}$$

donde

$$V_i \otimes V_j = \bigoplus_{l=0}^{r} V_l^{n_l}.$$

2.2.1 Caso no Ramificado.

Lema 2.2.6 *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla localmente libre en X, entonces se cumple que:*

i)Para todo carácter $\chi \in \hat{G}$, tenemos un isomorfismo canónico $\mathcal{F}_\chi \otimes \pi_*\mathcal{F} \to \pi_*\mathcal{F}$.

ii)$\pi^*\pi_*\mathcal{F} \simeq \bigoplus_{g\in G} g^*\mathcal{F}$ y dicho isomorfismo es G-invariante.

iii) Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son irreducibles en X con $\pi_*\mathcal{F} \simeq \pi_*\mathcal{F}'$ entonces $\mathcal{F} \simeq g^*\mathcal{F}'$ para algún $g \in G$.

iv) $grado(\pi_*\mathcal{F}) = grado(\mathcal{F})$ y $rango(\pi_*\mathcal{F}) = n \times rango(\mathcal{F})$.

v)$\pi_*\mathcal{F}$ es semiestable si y sólo si $\mathcal{F}$ es semiestable.

vi)$\pi_*\mathcal{F}$ es estable si y sólo si $\mathcal{F}$ es estable y $\mathcal{F} \neq g^*\mathcal{F}$ para toda $g \in G$.

*Demostración:*Ver [15]. $\diamondsuit$

Observaciones: Las afirmaciones *v)* y *vi)* se cumplen siempre para cubiertas no Galois.

Lema 2.2.7 *Si $\pi : X \to Y$ es un morfismo de curvas no ramificado, entonces $\pi^*\omega_Y$ es naturalmente isomorfo a ω_X.*

Demostración: Por ser un cubriente no ramificado tenemos que $\omega_{X/Y} = 0$ y del la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \pi^*\omega_Y \longrightarrow \omega_X \longrightarrow \omega_{X/Y} \longrightarrow 0$$

se sigue el resultado. $\diamondsuit$

Lema 2.2.8 *Si $\pi : X \to Y$ es un morfismo de curvas no ramificado, entonces $(\pi_*\mathcal{O}_X)^\vee$ es naturalmente isomorfo a $\pi^*\mathcal{O}_X$.*

Demostración: Recordando que $\mathcal{H}om(\pi_*\mathcal{O}_X, \omega_Y) = \pi_*\omega_X$ y del lema anterior, tenemos que

$$(\pi_*\mathcal{O}_X)^\vee = \omega_Y^{-1} \otimes \pi_*\omega_X = \pi_*(\pi^*(\omega_Y)^{-1} \otimes \omega_X) = \pi_*\mathcal{O}_X$$

con lo cual se concluye.$\diamondsuit$

Proposición 2.2.9 *Sea $X \xrightarrow{\pi} Y$ un cubriente de Galois no ramificado, con grupo de Galois G, entonces en la descomposición*

$$\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus [\mathcal{O}(V_1) \otimes \mathcal{E}_{V_1}] \oplus ... \oplus [\mathcal{O}(V_r) \otimes \mathcal{E}_{V_r}]$$

Se tiene que cada $\mathcal{E}_{V_i}$ es estable, además $(\mathcal{E}_{V_i})^\vee \sim \mathcal{E}_{V_i^\vee}$ y $\mathcal{E}_{V_i} \not\sim \mathcal{E}_{V_j}$ si $i \neq j$

Demostración: Como $\pi_*\mathcal{O}_X$ es suma directa de poliestables entonces cada sumando $\mathcal{E}_{V_i}$ también lo es, veamos que cada $\mathcal{E}_{V_i}$ es simple, i.e. $End(\mathcal{E}_{V_i}) = k$, y por lo tanto inescindible.

Tenemos que

$$Hom(\pi_*\mathcal{O}_X, \pi_*\mathcal{O}_X) \supseteq \bigoplus_{i=0}^{r} Hom(\mathcal{O}(V_i) \otimes \mathcal{E}_{V_i}, \mathcal{O}(V_i) \otimes \mathcal{E}_{V_i})$$

$$= \bigoplus_{i=0}^{r} Hom(\mathcal{E}_{V_i}, \mathcal{E}_{V_i})^{(dim\, V_i)^2}$$

y como $h^0(\mathcal{H}om(\mathcal{E}_{V_i}, \mathcal{E}_{V_i})) \geq 1$ tenemos que

$$h^0(\mathcal{H}om(\pi_*\mathcal{O}_X, \pi_*\mathcal{O}_X)) \geq \sum_{i=0}^{r} (dim\, V_i)^2 = \mid G \mid$$

por otro lado, por el lema 2.2.6 tenemos que

$$h^0(\pi_*\mathcal{O}_X \otimes \pi_*\mathcal{O}_X) = h^0(\pi^*\pi_*\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_X^{\oplus|G|}) = \mid G \mid$$

y como $(\pi_*\mathcal{O}_X)^\vee \sim \pi_*\mathcal{O}_X$ entonces

$$\mid G \mid = h^0(\pi_*\mathcal{O}_X \otimes \pi_*\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{H}om(\pi_*\mathcal{O}_X, \pi_*\mathcal{O}_X)) \geq \mid G \mid$$

de aquí que se tenga la igualdad, pero esto implica que $h^0(Hom(\mathcal{E}_{V_i}, \mathcal{E}_{V_i})) = 1$ y por tanto que cada $\mathcal{E}_{V_i}$ es simple y de aquí que sea estable. Ahora obsérvese

que $h^0(Hom(\mathcal{E}_{V_i}, \mathcal{E}_{V_j})) = 0$ para $i \neq j$, esto implica que $\mathcal{E}_{V_i} \not\sim \mathcal{E}_{V_j}$ si $i \neq j$. Por último veamos que $(\mathcal{E}_{V_i})^\vee \sim \mathcal{E}_{V_i^\vee}$, pero eso es consecuencia inmediata de que $\pi_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{Tr} (\pi_*\mathcal{O}_X)^\vee$ es un isomorfismo y la aplicación traza es G-invariante.$\diamondsuit$

A continuación transcribiremos los teoremas 2.2.3,2.2.4,2.2.5 al caso especial de cubrientes no ramificados, obsérvese que las demostraciones son inmediatas en todos los casos.

Teorema 2.2.10 *Sea $X \xrightarrow{\pi} Y$ un cubriente de Galois no ramificado, con grupo de Galois G, y $\mathcal{F}$ una gavilla localmente libre en X, entonces se tienen isomorfismos naturales*

$$\pi_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}_{V_i} \xrightarrow{\phi_i} \pi_*\mathcal{F}^{dimV_i}$$

Teorema 2.2.11 *Sea $X \xrightarrow{\pi} Y$ un cubriente de Galois no ramificado, con grupo de Galois G, y $\mathcal{F}$ una gavilla localmente libre en X G-estable, entonces si*

$$\pi_*\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}(V_1) \otimes \mathcal{F}_1 \oplus ...\mathcal{O}(V_r) \otimes \mathcal{F}_r$$

es la descomposición isotípica de $\pi_*\mathcal{F}$ entonces se cumple que

$$\mathcal{F}_i \otimes \mathcal{E}_{V_j} \sim \bigoplus_{l=0}^{r} \mathcal{F}_l^{n_l}$$

donde

$$V_i \otimes V_j = \bigoplus_{l=0}^{r} V_l^{n_l}$$

Teorema 2.2.12 *Sea $X \xrightarrow{\pi} Y$ un cubriente de Galois no ramificado, con grupo de Galois G, entonces en la descomposición*

$$\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}(V_1) \otimes \mathcal{E}_{V_1} \oplus ... \oplus \mathcal{O}(V_r) \otimes \mathcal{E}_{V_r}$$

Se tiene que cada $\mathcal{E}_{V_i}$ es estable y se cumplen las siguientes identidades

$$\mathcal{E}_{V_i} \otimes \mathcal{E}_{V_j} \sim \bigoplus_{l=0}^{r} \mathcal{E}_{V_l}^{n_l}$$

donde

$$V_i \otimes V_j = \bigoplus_{l=0}^{r} V_l^{n_l}$$

además $(\mathcal{E}_{V_i})^\vee \sim \mathcal{E}_{V_i^\vee}$ y si $V_i \not\sim V_j$ entonces $\mathcal{E}_{V_i} \not\sim \mathcal{E}_{V_j}$.

Corolario 2.2.13 *Sea $X \xrightarrow{\pi} Y$ cubriente de Galois no ramificado, entonces $\pi_*\mathcal{O}_X$ es poliestable.*

Demostración: Inmediata del lema 2.2.6 y de la proposición 2.2.9

Capítulo 3

Aplicaciones

En este último capítulo aplicaremos la teoría anterior para el cálculo de la representación de G en el grupo de cohomología $H^1(X, \mathcal{O}_X)$, obteniendo información de la acción natural de G en la jacobiana JX de X, posteriormente usando técnicas elementales de teoría de representaciones sobre $\mathbb{C}$ se describirá la descomposición de JX en términos de variedades de Prym de cocientes intermedios cuando el grupo a considerar es A_5 y por último se calcula la dimensión de $H^1(X, \mathcal{T}_X)^G$.

3.1 Acciones en el Tangente a JX.

Sea X una curva proyectiva lisa sobre un campo algebraicamente cerrado, y sea G un subgrupo finito del grupo de automorfismos de X, sea $Y = X/G$, en este caso, aplicando la teoría anterior tenemos que

$$\pi_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}(V_1) \otimes \mathcal{E}_{V_1} \oplus .... \oplus \mathcal{O}(V_r) \otimes \mathcal{E}_{V_r}.$$

El presente párrafo pretende estudiar más profundamente este caso.

La primera observación es que por ser $\pi : X \to Y$ una aplicación afín, se tienen isomorfismos naturales $H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(Y, \pi_* \mathcal{F})$ para toda gavilla coherente, de aquí que se tengan los siguientes isomorfismos $H^0(Y, \pi_* \mathcal{O}_X) = k$ y $T_e JX = H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^1(Y, \pi_* \mathcal{O}_X) = H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \oplus H^1(Y, \mathcal{O}(V_1) \otimes \mathcal{E}_{V_1}) \oplus .... \oplus H^1(Y, \mathcal{O}(V_r) \otimes \mathcal{E}_{V_r})$, además dichos isomorfismos son de $k(G)$-módulos, por lo tanto conocer la representación de G en $T_e JX$ es equivalente a conocer los grupos de cohomología de $\mathcal{O}(V_i) \otimes \mathcal{E}_{V_i}$, pero por Riemann-Roch y del hecho que $H^0(Y, \mathcal{O}(V_i) \otimes \mathcal{E}_{V_i}) = 0$ sólo necesitamos conocer sus grados. Para esto

consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \pi_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{Tr} (\pi_*\mathcal{O}_X)^\vee \to \pi_*\Omega_{X/Y} \to 0$$

donde Tr es la aplicación definida por la métrica de la traza (ver [Apen 2]), dicha aplicación es G-invariante, de aquí que dicha sucesión se descompone en suma directa de sucesiones

$$0 \to \mathcal{O}(V_i) \otimes \mathcal{E}_{V_i} \to (\mathcal{O}(V_i^\vee) \otimes \mathcal{E}_{V_i^\vee})^\vee \to (\pi_*\Omega_{X/Y})_{V_i} \to 0$$

así que, conociendo $h^0([\pi_*\Omega_{X/Y}]_{V_i})$ conoceremos el grado de $det(\mathcal{O}(V_i) \otimes \mathcal{E}_{V_i})^{-1} \otimes det(\mathcal{O}(V_i^\vee) \otimes \mathcal{E}_{V_i^\vee})^\vee$, pero $(\pi_*\Omega_{X/Y})_{V_i}$ es una gavilla con soporte en puntos, así que podemos calcular punto a punto, esto último también es posible conociendo la representación de $\pi_*\Omega_{X/Y}$ punto a punto y tomando la parte correspondiente a V_i, será esto último lo que haremos.

Teorema 3.1.1 *Sea $x \in X$ un punto cerrado con grupo de isotropía $< g > \subset G$, entonces la representación en $(\pi_*\Omega_{X/Y})_{\pi(x)} \simeq k(G) - U \uparrow^G_{<g>}$ donde $k(G)$ es la representación regular de G y $U \uparrow^G_{<g>}$ la representación inducida por la trivial de $< g >$.*

Demostración: Como el problema es local en $\pi_*\Omega_{X/Y}$ consideremos la sucesión exacta

$$0 \to (\pi_*\mathcal{O}_X)_y \to (\pi_*\mathcal{O}_X)_y^\vee \to (\pi_*\Omega_{X/Y})_y \to 0$$

donde $y = \pi(x)$; sean (A, m_y) el anillo local $\mathcal{O}_{Y,y}$ y $B = (\pi_*\mathcal{O}_X)_y$, entonces la sucesión exacta anterior se reescribe como

$$0 \to B \to B^\vee \to C \to 0$$

donde $C = (\pi_*\Omega_{X/Y})_y$, y tomando completaciones para la topología del ideal maximal m_y de A se obtiene

$$0 \to \widehat{B} \to \widehat{B}^\vee \to C \to 0$$

pues son A-módulos finitos y C es completo por tener soporte en el punto cerrado de $Spec(A)$.

Por la estabilidad de la traza bajo cambio de base, si $\widehat{K}$ es el campo de cocientes del completado $\widehat{A}$ de A, la aplicación $0 \to \widehat{B} \to \widehat{B}^\vee$ es la inducida por la traza de la $\widehat{K}$-algebra $K(X) \otimes_{K(Y)} \widehat{K}$.

Sea $mB = p_1^{\alpha}...p_s^{\alpha}$ la descomposición de mB en B, entonces se sigue que $\widehat{B} = \prod_{i=1}^{s} \widehat{B}_{p_i}$ donde $\widehat{B}_{p_i}$ es el completado de B_{p_i} para la topología de su ideal máximo. Así, si Σ_i es el campo de cocientes de $\widehat{B}_{p_i}$ se tendrá que $K(X) \otimes_{K(Y)} \widehat{K} = \prod_{i=1}^{s} \Sigma_i$ y si $p_i : K(X) \otimes_{K(Y)} \widehat{K} \to \Sigma_i$ son la proyecciones, entonces $Tr_{K(X)\otimes_{K(Y)}\widehat{K}/\widehat{K}} = \sum_{i=1}^{s} Tr_{\Sigma_i/\widehat{K}} \circ p_i$.

Con esto se prueba que cada Σ_i es finito y separable sobre $\widehat{K}$ y que la sucesión

$$0 \to \widehat{B} \to \widehat{B}^{\vee} \to C \to 0$$

rompe en sucesiones exactas

$$0 \to \widehat{B}_{p_i} \to \widehat{B}_{p_i}^{\vee} \to C_i \to 0$$

inducidas por las trazas respectivas. De aquí que se tengan las siguientes igualdades

$$(\pi_* \Omega_{X/Y})_y = \Omega_{B/A} = \widehat{\Omega}_{B/A} = \Omega_{\widehat{B}/\widehat{A}} = \bigoplus_{i=1}^{s} \Omega_{\widehat{B}_{p_i}/\widehat{A}}$$

Obsérvese que la topología en B_p del ideal máximo es la misma que la inducida por $m_y B_p = p^{\alpha}$, entonces las completaciones son las mismas, i.e. si completamos la sucesión exacta

$$0 \to B_p \to B_p^{\vee} \to \Omega_{B_p/A} \to 0$$

tenemos

$$0 \to \widehat{B}_p \to \widehat{B}_p^{\vee} \to \Omega_{B_p/A} \to 0$$

entonces tenemos que $\Omega_{\widehat{B}_p/\widehat{A}} = \Omega_{B_p/A}$ y por lo tanto $\Omega_{B/A} = \bigoplus_{i=1}^{s} \Omega_{B_{p_i}/A}$.

Sea $p \in \{p_1...p_s\}$ un punto en la fibra con isotropía $< g >$ entonces B_p es el anillo local asociado al punto p, por tanto es $< g >$-invariante, sea (C, n) la A-subálgebra local de B_p donde el grupo actúa en forma trivial, geométricamente es el anillo local del punto $z \in X/ < g >$ imagen de x, obsérvese también que la aplicación $X/ < g > \to X/G$ no tiene ramificación en el punto z, de donde $\Omega_{C/A} = 0$ y usando la sucesión exacta

$$\Omega_{C/A} \otimes_C B \to \Omega_{B/A} \to \Omega_{C/A} \to 0$$

tenemos que $\Omega_{B/A} \simeq \Omega_{C/A}$ como C-módulos, y usando que tenemos un isomorfismo natural $C/n \simeq A/m$ tenemos que $lon(\Omega_{C/A}) = dim \Omega_{C/A} \otimes_C C/n =$

$dim \Omega_{B/A} \otimes_A A/m = lon(\Omega_{B/A})$, así que podemos reducir nuestro problema al caso en que $G =< g >$.

Como B_p es un anillo con acción de $< g >$ y además $K(B_p)/K(A)$ es una extensión Galois con grupo de Galois $< g >$, tenemos que $B_p = A \oplus Az_1 \oplus ... \oplus Az_{\alpha-1}$ con $z_i \in B_p$, también tenemos que B_p corresponde a un punto liso, así que $p = (t)$ y este ideal es $< g >$-estable, entonces $g^{\alpha} t = t$ por lo tanto $gt = \omega t$ con ω una p-ésima raíz primitiva de unidad, de donde $At^i \subseteq Az_i$, sea v_p la valuación de B_p, entonces $v_p(z_i) = i$ por lo que

$$B_p = A \oplus At^1 \oplus ... \oplus At^{\alpha-1}.$$

Por otro lado tenemos que la métrica de la traza nos permite identificar a $B_p^{\vee}$ con un subgrupo de $K(B_p)$, así que debemos encontrar elementos c_j de $K(B_p)$ tales que $Tr(t^i c_j) = \delta_{i,j}$, para esto recordemos que la definición de traza esta dada por $b \mapsto \sum_{i=1}^{\alpha} g^i b$, lo cual es un proyector en le sentido de la teoría de representaciones, y dicho proyector corresponde a la representación trivial del grupo, así que, si $b \in K(B_p) = K(A) \oplus K(A)t^1 \oplus ... \oplus K(A)t^{\alpha-1}$ se expresa como $b = b_0 + ... + b_{\alpha-1}$ con $b_i \in K(A)t^i$, tenemos que $Tr(b) = \alpha b_0$, después de estas consideraciones proponemos a $c_i = 1/(\alpha t^i)$. Probémoslo:

$$tr(t^j . \frac{1}{\alpha t^i}) = tr(t^j . \frac{t^{\alpha-i}}{\alpha t^{\alpha}}) = \frac{1}{\alpha t^{\alpha}} tr(t^{\alpha-i+j})$$

y ésto es distinto de cero si y sólo si $\alpha - i + j \equiv 0 \, mod(\alpha)$, como $0 \leq i, j < \alpha$ entonces $0 \leq \alpha - i \leq \alpha - i + j \leq 2\alpha - i < 2\alpha$ así que

$$\alpha - i + j \equiv 0 \; mod(\alpha) \leftrightarrow \alpha - i + j = \alpha \leftrightarrow i = j,$$

por último, si $i = j$ tenemos que

$$tr(t^i . \frac{1}{\alpha t^i}) = tr(\frac{1}{\alpha}) = 1$$

con lo cual hemos probado que

$$B_p^{\vee} \simeq A \oplus A\frac{1}{t^1} \oplus ... \oplus A\frac{1}{t^{\alpha-1}}.$$

Ahora debemos de analizar la acción de $< g >$ en cada sumando, para esto observemos que

$$g(\frac{a}{t^i}) = ag(\frac{1}{t^i}) = ag(t^{-i}) = a(g(t))^{-i} = a(\omega t)^{-i} = \frac{a\omega^{\alpha-i}}{t^i}$$

ya que la acción de $< g >$ en $K(B_p)$ es por automorfismos de campos, además como la traza es $< g >$-invariante tenemos que la sucesión exacta

$$0 \to B_p \xrightarrow{Tr} B_p^\vee \to \Omega_{B_p/A} \longrightarrow 0$$

rompe en sucesiones exactas

$$0 \to At^i \xrightarrow{Tr_i} A\frac{1}{t^{\alpha-i}} \to (\Omega_{B_p/A})_i \longrightarrow 0.$$

La imagen de dicha aplicación está determinada por la imagen de t^i y ésta última es de la forma $\Sigma\lambda_j(1/t^j)$ donde

$$\lambda_j^i = tr(t^j t^i) = \alpha t^\alpha \delta_{i,\alpha-j}$$

si $i \neq 0$ y $tr(1) = \alpha$. Así que

$$(\Omega_{B_p/A})_i \simeq \frac{A\frac{1}{t^{\alpha-i}}}{A\frac{\alpha t^\alpha}{t^{\alpha-i}}} \simeq A/(t^\alpha A) \simeq k$$

si $i \neq 0$ y 0 si $i = 0$.

De aquí que conocemos la representación de $< g >$ en $\Omega_{B_p/A}$. Ahora regresemos al caso general donde el grupo $< g >$ es un subgrupo cíclico de G y $\Omega_{B/A} = \oplus\Omega_{B_{p_i}/A}$, aquí tenemos que $\{p_1 ... p_s\} \simeq G/ < g >$ como G-conjuntos, así tenemos que la representación de G en $\Omega_{B/A}$ es la inducida por la representación de $< g >$ en $\Omega_{B_{p_i}/A}$ es decir

$$\Omega_{B/A} \simeq (k(< g >) - U_{<g>}) \uparrow_{<g>}^G$$

como $k(G)$-espacios vectoriales, con lo cual se termina la demostración.$\diamond$

Sean $y \in supp(\pi_*\Omega_{X/Y})$, $x \in \pi^{-1}(y_i)$ y $< g_y >$ su estabilizador, obsérvese que la clase de conjugación de este subgrupo no depende del elemento que se escogió en la fibra, entonces

Corolario 3.1.2 *Con las hipótesis anteriores, se tiene que*

$$grado(\mathcal{O}(V_i) \otimes \mathcal{E}_{V_i}) + grado(\mathcal{O}(V_i^\vee) \otimes \mathcal{E}_{V_i^\vee}) =$$

$$\sum_{y \in supp(\pi_*\Omega_{X/Y})} dim(k(G) - U \uparrow_{<g_y>}^G)_{V_i}$$

Corolario 3.1.3 *Con las mismas hipótesis se tiene*

$$grado(\mathcal{E}_{V_i}) + grado(\mathcal{E}_{V_i^\vee}) =$$

$$\frac{1}{dim V_i} \sum_{y \in supp(\pi_*\Omega_{X/Y})} dim(k(G) - U \uparrow_{<g_y>}^G)_{V_i}$$

Corolario 3.1.4 *Con las hipótesis anteriores*

$$dim\, H^1(X, [\mathcal{O}(V_i) \otimes \mathcal{E}_{V_i}] \oplus [\mathcal{O}(V_i^\vee) \otimes \mathcal{E}_{V_i^\vee}]) =$$

$$2dim\, V_i^2(género(Y) - 1) + \sum_{y \in supp(\pi_*\Omega_{X/Y})} dim(k(G) - U \uparrow_{<g_y>}^G)_{V_i}$$

Corolario 3.1.5 *Siguiendo con las mismas hipótesis, sea $H \leq G$ y $g_H = género(X/H)$, entonces*

$$g_H = |\frac{G}{H}|(g_Y - 1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{y \in supp(\pi_*\Omega_{X/Y})} dim(k(G) - U \uparrow_{<g_y>}^G)^H$$

Corolario 3.1.6 *Supongamos que $k = \mathbb{C}$, y $m = card(supp(\pi_*\Omega_{X/Y}))$ entonces se tiene que*

$$grado(\mathcal{O}(V_i) \otimes \mathcal{E}_{V_i}) + grado(\mathcal{O}(V_i^\vee) \otimes \mathcal{E}_{V_i^\vee}) =$$

$$m(dim V_i)^2 - \sum_{y \in supp(\pi_*\Omega_{X/Y})} < \chi_{U\uparrow_{<g_y>}^G}, \chi_{V_i} >$$

donde χ_W es el caracter de la representación W.

3.2 Acciones del Grupo A_5.

Sea $k = \mathbb{C}$, sea C una superficie de Riemann compacta y G un grupo actuando en C por automorfismos holomorfos, entonces tenemos una acción en JC la cual nos induce en forma natural una representación de G en T_eJC, esta representación tiene una latiz Λ de rango máximo que es también G-invariante, sea

$$T_eJC = V_0^{n_0} \oplus ... \oplus V_r^{n_r}$$

la descomposición isotípica de T_eJC, si la latiz $\Lambda \cap V_i^{n_i}$ es de rango máximo en $V_i^{n_i}$, entonces la imagen de $V_i^{n_i}$ bajo la aplicación exponencial es una subvariedad abeliana de JC que es G-invariante, sin embargo es falso que para todo i, $\Lambda \cap V_i^{n_i}$ sea una latiz de rango máximo, pero siempre existen $i_1, ..., i_s$ tales que $\Lambda \cap [V_i^{n_i} \oplus V_{i_1}^{n_{i_1}} \oplus ... \oplus V_{i_s}^{n_{i_s}}]$ sea latiz de rango máximo, es decir, existe una descomposición $T_eJC = W_1 \oplus ... \oplus W_l$ tal que W_i sea tangente a una subvariedad abeliana de JC que es G-invariante y $< \chi_{W_i}, \chi_{W_j} >= 0$ si $i \neq j$; sea $W_i = V_{i_1}^{n_{i_1}} \oplus ... \oplus V_{i_s}^{n_{i_s}}$ la descomposición isotípica de W_i, si además se cumple que $\Lambda \cap V_{k_1}^{n_{k_1}} \oplus ... \oplus V_{k_l}^{n_{k_l}}$ no es latiz de rango máximo con $\{k_1, ..., k_l\} \subsetneq \{i_1, ...i_s\}$ entonces diremos que la isogenia natural definida por las inclusiones

$$A_{W_1} \oplus ... \oplus A_{W_l} \to JC$$

es la descomposición isotípica de JC, donde A_{W_i} es la subvariedad abeliana definida por la imagen de W_i en JC bajo la aplicación exponencial.

3.2.1 Representaciones.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $\rho : G \to Aut(V)$ una representación de un grupo finito en V, denotaremos por χ_ρ el caracter de la representación el cual está definido por $\chi_\rho(g) = Traza(\rho(g))$, obsérvese que por ser la traza invariante bajo cambios de base, esta aplicación sólo depende de la clase de conjugación de g. Por abuso de notación denotaremos por V a la representación si no hay peligro de confusión. Si H es un subgrupo de G, $\mathbb{C}(G/H)$ denotará la reprensentación inducida a G por la representación trivial de H y por $V^H = \{v \in V \mid hv = v, \forall h \in H\}$. Si V es una representación de G, la

descomposición G-invariante

$$V = V_1^{n_1} \oplus ... \oplus V_r^{n_r}$$

con V_i irreducible y $V_i \neq V_j$ si $i \neq j$ se llamará la descomposición isotípica de V y a $V_i^{n_i}$ una componente isotípica de V.

A continuación enunciaremos sin demostración algunos teoremas básicos de teoría de representaciones, estos resultados se pueden encontrar en [6] capítulos 1, 2 y 3.

Proposición 3.2.1 *Sea G un grupo finito y sea $\rho : G \to Aut(V)$ una representación irreducible de G, entonces existe un único producto hermitiano (salvo escalares) definido en V que es G invariante y no degenerado.* $\diamond$

Proposición 3.2.2 *Si W es una componente isotípica de una representación V de G, entonces existe un subespacio complementario G-invariante, W' de V, tal que $V = W \oplus W'$, además dicha descomposición es ortogonal en cualquier métrica hermitiana G-invariante.*$\diamond$

Corolario 3.2.3 *Sea G un grupo finito, H un subgrupo de G y sea $\rho : G \to Aut(V)$ una representación de G, sean $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ dos productos hermitianos en V, G-invariante y H-invariante respectivamente, si W es un subespacio H-isotípico de V, entonces $W^{\perp \mathcal{H}_1} = W^{\perp \mathcal{H}_2}$.* $\diamond$

Sean V y W dos representaciones de G definamos el siguiente producto entre las funciones de caracteres de representaciones de G

$$< \chi_V, \chi_W >= \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \bar{\chi}_W(g)$$

donde $\bar{\chi}_W(g)$ es el conjugado complejo de $\chi_W(g)$

Proposición 3.2.4 *Sea V una representación de G y*

$$V = V_1^{n_1} \oplus ... \oplus V_r^{n_r}$$

su descomposición isotípica, entonces

$$< \chi_V, \chi_{V_i} >= n_i$$

$\diamond$

Teorema 3.2.5 *(Reciprocidad de Frobenius). Si W es una representación de H y V una representación de G, entonces*

$$< \chi_{W\uparrow_H^G}, \chi_V >_G = < \chi_W, \chi_{V\downarrow_H^G} >_H$$

$\diamond$

Corolario 3.2.6 *Sea V una representación de G y $H < G$, entonces $dimV^H$ $=< \chi_V, \chi_{\mathbb{C}(G/H)} >$.$\diamond$*

Después de estos resultados básicos de la teoría de representaciones, empecemos por plantearnos el siguiente problema: Si V es una representación de G, dar una descomposición en espacios fijos por subgrupos de G y tal que sea ortogonal en cualquier métrica hermitiana G-invariante. Este problema así planteado no lo resolveremos, en cambio daremos condiciones suficientes para que exista una descomposición de V es espacios fijos por subgrupos y ciertos sumandos de dicha descomposición sean ortogonales entre si.

Empecemos mostrando condiciones suficientes para que exista una descomposición en subespacios fijos por subgrupos de G.

Lema 3.2.7 *Sea W una representación irreducible de G tal que existe un subgrupo H de G con $< \chi_W, \chi_{\mathbb{C}(G/H)} >= 1$, entonces existen $g_1, ..., g_s$, $s = dim(W)$, elementos de G tales que $W = W^{g_1Hg_1^{-1}} \oplus ... \oplus W^{g_sHg_s^{-1}}$, además se puede escoger $g_1 \in H$.*

Demostración: Sea $v \in W^H$, $v \neq 0$ entonces $< gv >_{g\epsilon G} = W$ por ser W irreducible, de aquí que podamos extraer una base $g_1v, ..., g_sv$, además es claro que $g_iv \in W^{g_iHg_i^{-1}}$.

Falta probar que la descomposición es en suma directa, pero por el teorema de Frobenius la condición $< \chi_W, \chi_{\mathbb{C}(G/H)} >= 1$ implica que $dimW^H = 1$ por lo tanto $dimW^{g_iHg_i^{-1}} = 1$, de aquí que si $W^{g_iHg_i^{-1}} \cap W^{g_jHg_j^{-1}} \neq 0$ entonces $W^{g_iHg_i^{-1}} = W^{g_jHg_j^{-1}}$, es decir $g_iv = \lambda g_jv$, contradiciendo que $\{g_lv\}$ son base de W $\diamond$

Y por tanto podemos enunciar el siguiente

Teorema 3.2.8 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $\rho : G \to Aut(V)$ una representación de un grupo finito en V, y sea*

$$V = V_0^{n_0} \oplus ... \oplus V_r^{n_r}$$

la descomposición isotípica de V; es decir, cada V_i es irreducible y $V_i \neq V_j$ si $i \neq j$, si además se tiene que para cada V_i existe H_i tal que $< \chi_{V_i}, \chi_{\mathbb{C}(G/H_i)} >= 1$,entonces se tendrá que existen $g_1^i, ..., g_{s_i}^i$ tales que $s_i = dimV_i$ y

$$V = (V_0^{n_0})^{g_1^0H_0(g_1^0)^{-1}} \oplus ... \oplus (V_0^{n_0})^{g_{s_0}^0H_0(g_{s_0}^0)^{-1}} \oplus ...$$

$$\oplus (V_r^{n_r})^{g_1^rH_r(g_1^r)^{-1}} \oplus ... \oplus (V_r^{n_r})^{g_{s_r}^rH_r(g_{s_r}^r)^{-1}}$$

además podemos escoger $g_1^i \in H_i$

Demostración: Es inmediata del lema anterior. $\diamond$

Observación: la descomposición del teorema anterior no es una descomposición ortogonal en cualquier métrica hermitiana G-invariante sin embargo en los siguientes lemas corregiremos ese problema.

Teorema 3.2.9 *Si V es una representación de G y $W_1^{n_1}, ..., W_s^{n_s}$ son componentes isotípicas distintas de V tales que existen $N < G$ y $H < N$ satisfaciendo:*

i) $< \chi_{W_i}, \chi_{\mathbb{C}(G/H)} >= 1$ para $i = 1, ...s$ y

ii)$\chi_{W_1} + ... + \chi_{W_s} = \chi_{\mathbb{C}(G/H)} - \chi_{\mathbb{C}(G/N)}$

entonces se tiene que

$$V^H = V^N \oplus (W_1^{n_1})^H \oplus ... \oplus (W_s^{n_s})^H$$

y esta descomposición es ortogonal en cualquier producto hermitiano G-invariante en V.

Demostración: Sea

$$V = V_1^{m_1} \oplus ... \oplus V_r^{m_r} \oplus W_1^{n_1} \oplus ... \oplus W_s^{n_s}$$

la descomposición isotípica de V, entonces

$$V^H = (V_1^{m_1})^H \oplus ... \oplus (V_r^{m_r})^H \oplus (W_1^{n_1})^H \oplus ... \oplus (W_s^{n_s})^H$$

y

$$V^N = (V_1^{m_1})^N \oplus ... \oplus (V_r^{m_r})^N \oplus (W_1^{n_1})^N \oplus ... \oplus (W_s^{n_s})^N$$

Probemos que $(V_i^{m_i})^N = (V_i^{m_i})^H$ y que $(W_i^{n_i})^N = 0$.

Por ser $H < N$ se tiene que para toda representación irreducible T, $T^N \subseteq T^H$, por otra parte, aplicando la proposición 3.2.4, el teorema de reciprocidad de Frobenius y las condiciones $i)$ y $ii)$ se tiene

$$dimV_i^N =< \chi_{V_i}, \chi_{\mathbb{C}(G/N)} >=< \chi_{V_i}, \chi_{\mathbb{C}(G/H)} - \chi_{W_1} - \dots - \chi_{W_s} >=$$

$$< \chi_{V_i}, \chi_{\mathbb{C}(G/H)} > - \sum_{l=1}^{r} < \chi_{V_i}, \chi_{W_l} >=< \chi_{V_i}, \chi_{\mathbb{C}(G/H)} >= dimV_i^H$$

y

$$dimW_i^N =< \chi_{W_i}, \chi_{\mathbb{C}(G/N)} >=< \chi_{W_i}, \chi_{\mathbb{C}(G/H)} - \chi_{W_1} - \dots - \chi_{W_s} >=$$

$$< \chi_{W_i}, \chi_{\mathbb{C}(G/H)} > - \sum_{l=1}^{r} < \chi_{W_i}, \chi_{W_l} >= 0$$

y de aquí se concluye que

$$V^H = V^N \oplus (W_1^{n_1})^H \oplus \dots \oplus (W_s^{n_s})^H$$

y aplicando el corolario 3.2.3 se tiene que dicha descomposición es ortogonal en cualquier métrica hermitiana N-invariante, en particular G-invariante. $\diamondsuit$

Serán de nuestro interés las representaciones V de G que admiten una latiz de rango máximo que sea G-invariante, así que veamos el siguiente

Lema 3.2.10 *Una condición necesaria para que una representación V de G tenga una latiz Λ de rango máximo G-invariante es que $2Re(\chi_V) \in \mathbb{Z}$.*

Demostración: Sea $g \in G$ y considerémoslo como operador en Λ entonces la traza de este operador es necesariamente un número entero, por otro lado, por ser Λ de rango máximo, se tendrá que un conjunto de generadores es una base para el espacio real subyacente en V y como la traza es invariante bajo cambio de base, obtenemos lo deseado.$\diamondsuit$

Obsérvese que la representación $\mathbb{C}(G/H)$ tiene siempre caracteres racionales (ver [6], pág. 34) de aquí que si $H_1 < H_2$ son subgrupos de G se tenga que $\chi_{\mathbb{C}(G/H_1)}(g) - \chi_{\mathbb{C}(G/H_2)}(g)$ sea racional para toda $g \in G$,

Ejemplo Consideremos el caso en que $G = A_5$, entonces tenemos cinco representaciones irreducibles U, V, W, Y y Z cuyos caracteres presentamos en la siguiente tabla:

	1	20	15	12	12
A_5	$\chi(1)$	$\chi((123))$	$\chi((12)(34))$	$\chi((12345))$	$\chi((21345))$
U	1	1	1	1	1
V	4	1	0	-1	-1
W	5	-1	1	0	0
Y	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Z	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Sean $\mathbb{Z}_5 \sim< (12345) >, D_5 \sim< (12345), (25)(34) >$ y $A_4 \sim< (23)(45), (24)(35), (345) >$ entonces

$$< \chi_V, \chi_{\mathbb{C}(A_5/A_4)} >= 1$$

$$< \chi_W, \chi_{\mathbb{C}(A_5/D_5)} >= 1$$

$$< \chi_Y, \chi_{\mathbb{C}(A_5/Z_5)} >= 1$$

$$< \chi_Z, \chi_{\mathbb{C}(A_5/Z_5)} >= 1$$

de aquí que se tenga una descomposición del tipo del teorema 3.2.8 para cualquier representación T de A_5, pero como hemos observado antes, esta descomposición no es ortogonal en cualquier métrica G-invariante, sin embargo se cumplen las siguientes identidades

$$\chi_V = \chi_{\mathbb{C}(A_5/A_4)} - \chi_{\mathbb{C}(A_5/A_5)}$$

$$\chi_W = \chi_{\mathbb{C}(A_5/D_5)} - \chi_{\mathbb{C}(A_5/A_5)}$$

$$\chi_Y + \chi_Z = \chi_{\mathbb{C}(A_5/\mathbb{Z}_5)} - \chi_{\mathbb{C}(A_5/D_5)}$$

Así que, si

$$T = U^{n_1} \oplus V^{n_2} \oplus W^{n_3} \oplus Y^{n_4} \oplus Z^{n_5}$$

es la descomposición isotípica de T , entonces se tiene que

$$T^{A_4} = T^{A_5} \oplus (V^{n_2})^{A_4} = U^{n_1} \oplus (V^{n_2})^{A_4}$$

$$T^{D_5} = T^{A_5} \oplus (W^{n_3})^{D_5} = U^{n_1} \oplus (W^{n_3})^{D_5}$$

$$T^{\mathbb{Z}_5} = T^{A_5} \oplus (Y^{n_4})^{\mathbb{Z}_5} \oplus (Z^{n_5})^{\mathbb{Z}_5} = U^{n_1} \oplus (W_{n_3})^{D_5} \oplus (Y^{n_4})^{\mathbb{Z}_5} \oplus (Z^{n_5})^{\mathbb{Z}_5}$$

donde todas son descomposiciones ortogonales en cualquier métrica hermitiana G-invariante.

Por otro lado si dicha representación admite una latiz G-invariante, deberemos tener que

$$n_4 =< \chi_T, \chi_Y >=< \chi_T, \chi_Z >= n_5$$

para que se satisfaga que $2Re(\chi_X(g)) \in \mathbb{Z}$, en este caso podemos garantizar que en la descomposición de T del teorema 28 se tiene que

$$Y^n \oplus Z^n = (Y^n \oplus Z^n)^{g_1\mathbb{Z}_5 g_1^{-1}} \oplus (Y^n \oplus Z^n)^{g_2\mathbb{Z}_5 g_2^{-1}} \oplus (Y^n \oplus Z^n)^{g_3\mathbb{Z}_5 g_3^{-1}}$$

para ciertos g_1, g_2, g_3.

3.2.2 Variedades Jacobianas.

Para nosotros una superficie de Riemann C será una variedad proyectiva lisa e irreducible de dimensión 1 sobre el campo de los complejos. Dado un morfismo $f : C \to C'$ entre superficies de Riemann, $P(C/C') \subseteq JC$ denotará la variedad de Prym i.e. la componente conexa, conteniendo al origen, del kernel de la aplicación inducida $Nmf : JC \to JC'$ entre las correspondientes variedades jacobianas. $AutC$ denotará el grupo de automorfismos de C, el cual es un grupo finito si el género de C es mayor que 1 y por último g_C =género de C.

Sea G un grupo finito, si $g \in G$, $< g >$ denotará el subgrupo cíclico de G generado por g. Si $H, K \subseteq G$ son subgrupos de G, $K\backslash G/H$ denotará el conjunto de representantes de las (H, K) clases dobles de G. Sea $\{g_i\}_{i=1}^r$ un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos cíclicos de G. Si $G \subseteq AutC$ donde C es una superficie de Riemann, denotaremos por C^G a la superfiecie de Riemann cociente C/G. Sea $\hat{\alpha}$ el número de puntos fijos en C bajo la acción de G que tienen a $< g >$ como estabilizador. Entonces tenemos el siguiente

Lema 3.2.11 *Sea C una superficie de Riemann $G \subseteq AutC$, Entonces*

$$[N(< g_i >) :< g_i >] \mid \hat{\alpha}_i$$

y

$$\alpha_i = \frac{\hat{\alpha}_i}{[N(< g_i >) :< g_i >]}$$

es el número de puntos de ramificación de C^G de tipo $< g_i >$, $N(< g_i >)$ el normalizador de $< g_i >$ en G.

Demostración: Simplemente debemos calcular cuantos puntos fijos por $< g_i >$ hay en una órbita, así que si $p \in C$ es punto fijo entonces hp es fijo por $h < g_i > h^{-1}$, de aquí que haya tantos puntos fijos por $< g_i >$, en la órbita de p, como elementos en $[N(< g_i >) :< g_i >]$ de aquí que se tenga que

$$\hat{\alpha}_i = \alpha_i[N(< g_i >) :< g_i >]$$

$\diamond$

Dado $H \subseteq G$ un subgrupo de G, definamos el conjunto

$$S_i^H = \{s \in H\backslash G/ < g_i >| \; s < g_i > s^{-1} \cap H \neq \emptyset\}$$

Lema 3.2.12 *Sea C una superficie de Riemann y asumamos que el grupo G actúa en C , H un subgrupo de G y α_i, S_i^H como antes, entonces:*

$$g_C =\mid \frac{G}{H} \mid (g_{C^H} - 1) + 1 + \frac{1}{2}\Sigma_{i=1}^r [ord(g_i) - 1]\frac{|H|}{ord(g_i)} \mid S_i^H \mid \alpha_i$$

Demostración: Sea $p \in C$ un punto fijo bajo $< g_i >$, es suficiente ver cuantos elementos en $orb_G(p)$ al restringir la acción a H tiene estabilizador no trivial, para esto observemos que $orb_G(p) = G/ < g_i >$ como G-conjuntos, y que $orb_H(g < g_i >) = \{Hg < g_i >\} \in H\backslash G/ < g_i >$, por otro lado tenemos que

$$hg < g_i >= g < g_i > \Leftrightarrow g^{-1}hg < g_i >=< g_i >$$

$$\Leftrightarrow g^{-1}hg \in < g_i > \Leftrightarrow g^{-1} < g_i > g \cap H \neq \emptyset$$

es decir, el conjunto buscado es

$$S_i^H = \{s \in H\backslash G/ < g_i >| \; s < g_i > s^{-1} \cap H \neq \emptyset\}$$

por último, para obtener la ecuación buscada basta aplicar la fórmula de Hurwitz.$\diamond$

Observación: Nuevamente sea C superficie de Riemann con acción de G y H un subgrupo de G, sea C^H la superficie de Riemann cociente por la acción de H y sea $\pi_H : C \to C^H$, la proyección entonces tenemos una aplicación natural $d(\pi_H^*) : T_eJ(C^H) \to T_eJC$ donde la imagen $d(\pi_H^*)(T_eJ(C^H)) = (T_eJC)^H$, de aquí que, si $V_1, ..., V_r$ son representacines irreducibles de G tales que existen subgrupos $H_1 \subseteq H_2$ de G satisfaciendo las hipótesis del teorema 3.2.9 entonces

$$(T_eJC)^{H_1} = (T_eJC)^{H_2} \oplus (V_1^{\oplus n_1})^{H_1} \oplus ... \oplus (V_r^{\oplus n_r})^{H_1}$$

y dicha descomposición es ortogonal en la polarización de JC y en la forma hermitiana en $(T_eJC)^{H_1}$ inducida por la polarización de $J(C^{H_1})$, pero esto implica que $(V_1^{\oplus n_1})^{H_1} \oplus ... \oplus (V_r^{\oplus n_r})^{H_1}$ es el tangente a la inclusión de la variedad de Prym $P(C^{H_1}/C^{H_2})$ en JC.

Después de esta última observación estamos listos para atacar el caso $G = A_5$. Como hemos visto antes, tenemos cinco representaciones irreducibles, siguiendo las notaciones del ejemplo, sea

$$T_eJC = U^{n_1} \oplus V^{n_2} \oplus W^{n_3} \oplus Y^{n_4} \oplus Z^{n_5}$$

la descomposición isotípica de T_eJC , entonces se tiene que

$$(T_eJC)^{A_4} = (T_eJC)^{A_5} \oplus (V^{n_2})^{A_4} = U^{n_1} \oplus (V^{n_2})^{A_4}$$

$$(T_eJC)^{D_5} = (T_eJC)^{A_5} \oplus (W^{n_3})^{D_5} = U^{n_1} \oplus (W^{n_3})^{D_5}$$

$$(T_eJC)^{\mathbb{Z}_5} = (T_eJC)^{A_5} \oplus (Y^{n_4})^{\mathbb{Z}_5} \oplus (Z^{n_5})^{\mathbb{Z}_5} = U^{n_1} \oplus (W_{n_3})^{D_5} \oplus (Y^{n_4})^{\mathbb{Z}_5} \oplus (Z^{n_5})^{\mathbb{Z}_5}$$

donde todas son descomposiciones ortogonales en cualquier métrica hermitiana G-invariante. Así que tenemos las siguientes igualdades

$$d\pi_{A_5}^*(T_e(JC^{A_5})) = (U^{n_1})^{A_5} = U^{n_1}$$

$$d\pi_{A_4}^*(T_e(P(C^{A_4}/C^{A_5})) = (V^{n_2})^{A_4}$$

$$d\pi_{D_5}^*(T_e(P(C^{D_5}/C^{A_5})) = (W^{n_3})^{D_5}$$

$$d\pi_{\mathbb{Z}_5}^*(T_e(P(C^{\mathbb{Z}_5}/C^{D_5})) = (Y^{n_4})^{\mathbb{Z}_5} \oplus (Z^{n_5})^{\mathbb{Z}_5}$$

además, como la acción en T_eJC proviene de la acción en la jacobiana tenemos que existe una latiz G-invariante así que $n_4 = n_5$ y del teorema 3.2.8 tenemos que

$$V^{n_1} = \oplus_{i=1}^4 T_eP(C^{g_i^1 A_4 (g_i^1)^{-1}}/C^{A_5})$$

$$W^{n_2} = \oplus_{i=1}^5 T_eP(C^{g_i^2 D_5 (g_i^2)^{-1}}/C^{A_5})$$

$$(Y \oplus Z)^{n_3} = \oplus_{i=1}^3 T_eP(C^{g_i^3 \mathbb{Z}_5 (g_i^3)^{-1}}/C^{D_5})$$

para ciertos $\{g_i^j\}$.

Nuestro siguiente objetivo es calcular los valores n_i para esto empleando el lema 3.2.12 podemos calcular los géneros de las curvas $C^{\mathbb{Z}_5}, C^{D_5}$ y C^{A_4} en términos de los puntos de ramificación y de los grupos de isotropía de dichos puntos

$$\begin{aligned} g_{C^{\mathbb{Z}_5}} &= 12 g_{C^{A_5}} - 11 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 4\alpha_5 \\ g_{C^{D_5}} &= 6 g_{C^{A_5}} - 5 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_5 \\ g_{C^{A_4}} &= 5 g_{C^{A_5}} - 4 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_5 \end{aligned}$$

y de aquí podemos calcular los n_i en términos de $n_1 = g_{C^{A_5}}$

$$n_2 = 4 g_{C^{A_5}} - 4 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_5$$

$$n_3 = 5 g_{C^{A_5}} - 5 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_5$$

$$n_4 = n_5 = 6 g_{C^{A_5}} - 6 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_5$$

y podemos enunciar el siguiente

Teorema 3.2.13 *Sea C superficie de Riemann con acción de A_5, entonces la descomposición isotípica de la acción de A_5 en JC está dada por la isogenia natural A_5-invariente*

$$JC^{A_5} \times P(C^{\mathbb{Z}_5}/C^{D_5})^3 \times P(C^{A_4}/C^{A_5})^4 \times P(C^{D_5}/C^{A_5})^5 \to JC.$$

Demostración: Hemos probado que la isogenia

$$JC^{A_5} \oplus_{i=1}^4 P(C^{g_i^1 A_4 (g_i^1)^{-1}}/C^{g_i^1 A_5 (g_i^1)^{-1}})$$

$$\oplus_{i=1}^5 P(C^{g_i^2 D_5 (g_i^2)^{-1}}/C^{g_i^2 A_5 (g_i^2)^{-1}})$$

$$\oplus_{i=1}^3 P(C^{g_i^3 \mathbb{Z}_5 (g_i^3)^{-1}}/C^{g_i^3 D_5 (g_i^3)^{-1}})$$

definida por las inclusiones naturales es una descomposición isotípica de JC para ciertos $\{g_i^j\}$. Falta probar que

$$P(C^{A_4}/C^{A_5}) \simeq P(C^{g_i^1 A_4 (g_i^1)^{-1}}/C^{g_i^1 A_5 (g_i^1)^{-1}})$$

$$P(C^{D_5}/C^{A_5}) \simeq P(C^{g_i^2 D_5 (g_i^2)^{-1}}/C^{g_i^2 A_5 (g_i^2)^{-1}})$$

$$P(C^{\mathbb{Z}_5}/C^{D_5}) \simeq P(C^{g_i^3 \mathbb{Z}_5 (g_i^3)^{-1}}/C^{g_i^3 D_5 (g_i^3)^{-1}})$$

son naturalmente isomorfos.

Ahora si $H < N$ se tiene morfismos $\bar{g}$ y $\bar{\bar{g}}$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^H & \xrightarrow{\bar{g}} & C^{gHg^{-1}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^N & \xrightarrow{\bar{\bar{g}}} & C^{gNg^{-1}} \end{array}$$

Por último, basta aplicar el funtor $J*$ para obtener los isomorfismos deseados.$\diamondsuit$

3.3 Cálculo de la dimensión de $H^1(X, \mathcal{T}_X)^G$

3.3.1 Motivación.

Por teoría general de deformaciones sabemos que el espacio de deformaciones infinitesimales de primer orden de la curva X es naturalmente isomorfo a $H^1(X, \mathcal{T}_X)$, y usando el cálculo de M. Artin para este espacio es fácil verificar que las deformaciones infinitesimales de primer orden que extienden la acción de G son exactamente $H^1(X, \mathcal{T}_X)^G$, por lo cual nos proponemos calcular la dimensión de este espacio.

Precaución: Con esto no se afirma que el 'espacio de deformaciones infinitesimales de curvas con acción de G esté definido', sin embargo la conjetura es que la dimensión esperada del tangente a un punto liso $[X]$ de la componente del locus singular de $\mathcal{M}_g$ correspondiente a la acción de un grupo G es exactamente la dimensión de $H^1(X, \mathcal{T}_X)^G$, como podremos ver más adelante este cálculo está en conformidad con lo conocido para grupos cíclicos.

En general, una deformación de una variedad suave X sobre un esquema nteado (Y, y_0) es un morfismo $\phi : \mathcal{X} \longrightarrow Y$ propio y plano junto con un rfismo $\psi : X \longrightarrow \phi^{-1}(y_0)$ de X, siendo $\phi^{-1}(y_0) := Spec(y_0) \times_Y \mathcal{X}$, y una ormación infinitesimal de X es una deformación sobre el espacio punteado 0) siendo $\mathbb{I} = Spec(k[\epsilon]/(\epsilon^2))$

Nuevamente, sea X una curva suave de género $g \geq 1$, empezaremos recordo la construcción del espacio de deformaciones infinitesimales de primer en de X.

Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta por afines de X, entonces para obtener deformación infinitesimal de primer orden, debemos dar una colección de fismos $\phi_{\alpha,\beta} : \mathcal{O}_{U_\alpha \times \mathbb{I}}|_{U_{\alpha,\beta}} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_\beta \times \mathbb{I}}|_{U_{\alpha,\beta}}$ satisfaciendo cierta condiciones. condición de que $\psi : X \longrightarrow \phi^{-1}(y_0)$ sea un isomorfismo, nos dice que aplicaciones $\phi_{\alpha,\beta}$ son la aplicación identidad módulo ϵ, por lo tanto, los fismos son de la forma

$$f \overset{\phi_{\alpha,\beta}}{\mapsto} f + D_{\alpha,\beta}(f)\epsilon$$

y de la condición de que sea morfismo de anillos se obtiene que $D_{\alpha,\beta}(f)$ es una derivación de $\mathcal{O}_{U_{\alpha,\beta}}$, por último, de la condición de cociclo $\phi_{\alpha,\gamma} = \phi_{\alpha,\beta} \circ \phi_{\beta,\gamma}$ se obtiene una condición de cociclo aditivo $D_{\alpha,\gamma} = D_{\alpha,\beta} + D_{\beta,\gamma}$ es decir, dada una deformación infinitesimal de primer orden se le asocia un elemento de $H^1(X, \mathcal{T}_X)$. Ahora, supongamos que X admite una acción del grupo G, e impongamos la condición de que dicha acción se extienda a la deformación infinitesimal de primer orden, entonces debemos tener el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{U_\alpha \times \mathbb{I}}|_{U_{\alpha,\beta}} & \xrightarrow{\phi_{\alpha,\beta}} & \mathcal{O}_{U_\beta \times \mathbb{I}}|_{U_{\alpha,\beta}} \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ \mathcal{O}_{U_\alpha \times \mathbb{I}}|_{U_{\alpha,\beta}} & \xrightarrow{\phi_{\alpha,\beta}} & \mathcal{O}_{U_\beta \times \mathbb{I}}|_{U_{\alpha,\beta}} \end{array}$$

de aquí se sigue que $D_{\alpha,\beta}(gf) = gD_{\alpha,\beta}(f)$, esto es equivalente a que $D_{\alpha,\beta}$ sea G-invariente bajo la acción natural de G en $\mathcal{T}_X$, por lo tanto, las deformaciones infinitesimales de primer orden que extienden la acción del grupo G, es exactamente el subespacio vectorial de $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ formado por los G-invarientes bajo la acción natural de G.

3.3.2 El Cálculo

Obsérvese que $dimH^1(X, \mathcal{T}_X)^G = dimH^0(X, \omega_X^2)^G = dimH^0(Y, \pi_* \omega_X^2)^G$ pero calcular esto último es equivalente a calcular los grupos de cohomología de

la componente isotípica de $\pi_*\omega_X^2$ correspondiente a la representación trivial, además como $dimH^1(Y, \pi_*\omega_X^2) = 0$, sólo debemos calcular cual es el grado de dicha componente, para esto consideremos la sucesión exacta

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(R) \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0$$

tensorizando ésta por $\pi^*\omega_Y$ y aplicando el teorema de Riemann-Hurwitz obtenemos la sucesión exacta

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow \pi^*\omega_Y \longrightarrow \omega_X \longrightarrow \Omega_{X/Y} \otimes \pi^*\omega_Y \longrightarrow 0$$

obsérvese que $\Omega_{X/Y} \otimes \pi^*\omega_Y \simeq \Omega_{X/Y}$ como módulo, sin embargo debemos tener cuidado con la acción de G en $\pi_*(\Omega_{X/Y} \otimes \pi^*\omega_Y) \simeq \pi_*\Omega_{X/Y}$, pues ésta puede diferir, pero en el caso de que se tensorize por la imagen inversa de una gavilla de Y entonces la acción de grupo no se altera, esto es consecuencia del siguiente

Lema 3.3.1 *Sea $\pi : X \longrightarrow Y$ un morfismo Galois de curvas, $\mathcal{F}$ una gavilla localmente libre de rango 1 de Y , entonces $\pi_*(\Omega_{X/Y} \otimes \pi^*\mathcal{F}) \simeq \pi_*\Omega_{X/Y}$ son isomorfos como $\mathcal{O}_Y(G)$-módulos.*

Demostración: $\pi_*(\Omega_{X/Y} \otimes \pi^*\mathcal{F}) \simeq \pi_*(\Omega_{X/Y}) \otimes \mathcal{F}$, pero $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_Y(G)$-módulo trivial, es decir la representación de G en cada fibra es la trivial. Por lo tanto se tiene lo deseado. $\diamondsuit$

Ahora, tensorizando (2) por ω_X obtenemos la sucesión exacta

$$(3) \qquad 0 \longrightarrow \pi^*\omega_Y \otimes \omega_X \longrightarrow \omega_X^2 \longrightarrow \Omega_{X/Y} \otimes \pi^*\omega_X \longrightarrow 0$$

pero por el teorema de Riemann-Hurwitz se tiene que $\pi^*\omega_Y \otimes \omega_X \simeq \pi^*\omega_Y^2 \otimes \mathcal{O}_X(R)$ donde R es el divisor de ramificación de π, así que, tomando la imagen directa de esta última se tiene

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow \omega_Y^2 \otimes (\pi_*\mathcal{O}_X)^\vee \longrightarrow \pi_*\omega_X^2 \longrightarrow \pi_*(\Omega_{X/Y} \otimes \pi^*\omega_X) \longrightarrow 0$$

obsérvese que en esta última sucesión los morfismos son G-invariantes, por lo tanto para calcular el grado de la parte de tipo V_0 de $\pi_*\omega_X^2$ debemos calcular la parte de tipo V_0 de $\omega_Y^2 \otimes (\pi_*\mathcal{O}_X)^\vee$ y de $\pi_*(\Omega_{X/Y} \otimes \pi^*\omega_X)$, la primera es fácil, por la descomposición obtenida en el teorema 2.1.1 y la sucesión exacta

$$0 \to (\pi_*\mathcal{O}_X)_y \to (\pi_*\mathcal{O}_X)_y^\vee \to (\pi_*\Omega_{X/Y})_y \to 0$$

se tiene que la parte de tipo V_0 de $\omega_Y^2 \otimes (\pi_*\mathcal{O}_X)^\vee$ es ω_Y^2. Por último, debemos calcular cual es la parte correspondiente para $\pi_*(\Omega_{X/Y} \otimes \pi^*\omega_X)$, esto lo podemos hacer fibra por fibra, ya que es un módulo con soporte en puntos.

Proposición 3.3.2 *La parte de tipo V_0 de $\pi_*(\Omega_{X/Y} \otimes \pi^*\omega_X)$ tiene grado la cardinalidad de $supp(\pi_*\Omega_{X/Y})$*

Demostración: Sea $x \in X$ con grupo de isotropía $< g >$ no trivial, por el teorema 26 sabemos que la representación de $< g >$ en $(\Omega_{X/Y})_x$, está dada por la representación regular de este grupo menos la representación trivial del mismo, ahora $< g >$ también actúa en $\omega_{X,x}$, veamos que esta representación nunca es la trivial, por teoría general se tiene que $\omega_X \otimes k(x) \simeq m_x/m_x^2$ y como X es liso m_x está generado por un solo elemento t, sin embargo en la demostración del teorema 26 vimos que $< g >$ actúa en este elemento por multiplicación de una raíz n-ésima primitiva de unidad, donde n es el orden de $< g >$, por lo tanto la representación en m_x/m_x^2 no es la trivial y en consecuencia tampoco lo es en $\omega_{X,x}$.

De esta manera la representación de $< g >$ en $(\Omega_{X/Y} \otimes \omega_X)_x \simeq (\Omega_{X/Y})_x \otimes \omega_{X,x}$ contiene a la representación trivial de $< g >$ exactamente una vez, por lo tanto al inducirla a G se obtiene la representación de G en $\pi_*(\Omega_{X/Y} \otimes \pi^*\omega_X)_{\pi(x)}$ y por teoría general de representaciones de grupos finitos se tiene que la representación trivial de G aparece exactamente una vez en $\pi_*(\Omega_{X/Y} \otimes \pi^*\omega_X)_{\pi(x)}$ de esta manera se tiene que el grado de la parte G invariante de $\pi_*(\Omega_{X/Y} \otimes \pi^*\omega_X)$ es exactamente la cardinalidad del soporte de $\pi_*\Omega_{X/Y}$ con lo cual se obtiene lo deseado.$\diamondsuit$

Ahora podemos enunciar el teorema principal de esta sección

Teorema 3.3.3 *Sea $\pi : X \longrightarrow Y$ un cubriente Galois de curvas, con grupo de Galois G, entonces $dimH^1(X, \mathcal{T}_X)^G = 3g_Y - 3 + card(Supp\pi_*\Omega_{X/Y})$*

Observación: En el artículo [3] se calcula la dimensión de las componentes del locus singular de $\mathcal{M}_g$ correspondientes a curvas con acción de un grupo cíclico, obteniendo que la dimensión es $3g_Y - 3 + card(Supp\pi_*\Omega_{X/Y})$.

Apéndice A

Representaciones

En este primer apéndice se pretende demostrar algunos de los teoremas básicos de la teoría de representaciones que son usados a lo largo de la tesis, sin embargo este modesto resumen está muy lejos de ser completo, para una exposición más extensa recomendamos ver [2], [4], [5]. y [6]. Por último debo decir que parte de estas notas han sido tomadas del capítulo 3 de [2].

Módulos semisimples.

Definición 4 *Un A-módulo se llama semisimple si M es suma directa de sumandos simples de M. Diremos que un anillo con 1 es semisimple si como módulo izquierdo lo es.*

Proposición A.0.4 *Los anillos semisimples son suma directa de un número finito de ideales mínimos izquierdos. En particular son artinianos y noetherianos.*

Proposición A.0.5 *Un anillo A es semisimple si y sólo si todo A-módulo es semisimple.*

Demostración: Si todo A-módulo es semisimple A en particular lo es. Supongamos ahora que A es un anillo semisimple. Ya que la suma directa y el cociente de módulos semisimple es semisimple, basta observar que cualquier módulo M es cociente de un A-módulo libre.$\diamond$

Proposición A.0.6 *Si A es un anillo semisimple, todo A-módulo simple M es isomorfo a un ideal izquierdo mínimo de A.*

Corolario A.0.7 *Todo módulo M sobre un anillo semisimple A es isomorfo a una suma directa de ideales izquierdos de A. En particular, si M es finitamente generado, es suma directa de un número finito de tales ideales.*

Proposición A.0.8 *Si A es un anillo semisimple y M un A-módulo de tipo finito tal que:*

$$M = A_1 \oplus \ldots\ldots \oplus A_r,$$

con A_i ideal izquierdo mínimo de A y si N es un A-submódulo simple de M, entonces N es isomorfo a alguno de los A_i

Anillos simples.

Definición 5 *Un anillo artiniano se llama simple si no tiene ideales bilaterales propios.*

Proposición A.0.9 *Todo anillo simple es semisimple.*

Para los propósitos de nuestra teoría la siguiente proposición es fundamental

Lema A.0.10 *Si*

$$A = A_1 \oplus \ldots. \oplus A_r$$

es una descomposición del anillo A en suma directa de ideales izquierdos y

$$1 = e_1 + \ldots\ldots + e_r,\ e_i \in A_i$$

entonces

$$e_i^2 = e_i,\ e_i e_j = 0,\ (i \neq j)\ y\ A_i = Ae_i$$

Demostración: Veremos primero que $e_1e_2 = 0$. En efecto

$$e_1(e_2 + ... + e_r) = e_1(1 - e_1) = (1 - e_1)e_1 \in A_1 \cap (A_2 + ... + A_n) = 0,$$

de donde

$$e_ie_i = -e_i(e_i + ... + e_i) \in (A_2 + ... + A_n) = 0$$

y de ahí se obtiene lo deseado. Entonces se tiene que

$$1 = (e_1 + ...e_r)^2 = e_1^2 + ...e_r^2,$$

de donde $e_i = e_i^2$. Finalmente si $a \in A_i$,

$$a = a1 = ae_1 + ... + ae_i + ...ae_r$$

y por la unicidad de la descomposición se tiene que $a = ae_i$. $\diamondsuit$

Corolario A.0.11 *En un anillo semisimple todo ideal izquierdo es principal y posee un generador idempotente.*

Demostración: Como todo ideal de A es sumando directo, el resultado se sigue del lema anterior.$\diamondsuit$

Sean ahora I, I' dos ideales izquierdos de un anillo semisimple A. De acuerdo con el corolario anterior podemos escribir

$$I = Ae,\ e^2 = e$$

Consideremos la aplicación

$$G : eI' \longrightarrow Hom_A(I, I')$$

definida por la multiplicación a la derecha con elementos de eI', es decir

$$G(ea')(a) = aea',\ a' \in I', a \in I.$$

$G(ea')$ es un homomorfismo de A-módulos. Con esta notación tenemos el siguiente resultado

Proposición A.0.12 *La aplicación G es biyectiva y el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} IxeI' & \longrightarrow & I' \\ {\scriptstyle 1xG}\downarrow & \nearrow & \\ IxHom_A(I, I') & & \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración: Que el diagrama sea conmutativo se sigue de las definiciones. Sean $ea', ea'' \in eI'$ $(a', a'' \in I')$ y supongamos que $G(ea') = G(ea'')$. Entonces para toda $a \in I$, $aea' = aea''$; en particular, si $e = a$ se tiene que $ea' = ea''$. Por tanto, G es inyectiva. Sea ahora $f : I \longrightarrow I'$ un A-homomorfismo y $f(e) = a'$, $a' \in I'$. Entonces

$$f(ae) = af(e) = aa' = aea',$$

y por tanto, G es suprayectiva.$\diamondsuit$

De la proposición anterior se tiene que II' es un ideal generado por $f(I)$ cuando f recorre $Hom_A(I, I')$.

Corolario A.0.13 *Si los ideales I e I' son, además, mínimos, entonces II' si y sólo si I es isomorfo a I' como A-módulos.*

Sea A un anillo semisimple y

$$A = I_{1,1} \oplus ... \oplus I_{1,s_1} \oplus ... \oplus I_{t,1} \oplus ... \oplus I_{t,s_t}$$

una descomposición de A como suma directa de ideales izquierdos mínimos tal que

$$I_{i,j} \simeq I_{i,k}\ ;\ I_{i,j} \not\simeq I_{h,k}\ (i \neq j)$$

(isomórfismo como A-módulo). Sean

$$A_1 = I_{1,1} \oplus ... \oplus I_{1,s_1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_t = I_{t,1} \oplus ... \oplus I_{t,s_t}$$

Teorema A.0.14 *Si A es un anillo semisimple y $A_1, ..., A_t$ son los ideales izquierdos de A, arriba definidos se tiene:*

i) Cada A_i es un ideal bilateral de A.

ii) Cada A_i es un anillo simple.

iii) $A = A_1 x ... x A_t$ (producto directo de anillos).

Demostración: i) Para probar que A_i es bilateral basta ver que $A_i I_{j,k} \subset A_i$ para todo $I_{j,k}$ de la descomposición. Pero según el corolario anterior se tiene entonces

$$A_i I_{i,k} \subset A_i, \quad A_i I_{j,k} = 0 \, (i \neq j).$$

ii) Observemos primero que cada A_i es un anillo con elemento unitario. En efecto, sea $1 = e_1 + ...e_t \, e_i \in A_i$. De acuerdo con en el lema 18, $A_i = Ae_i$, y también, por ser ideal derecho $A_i = e_i A$, de donde $A_i = e_i A e_i$ y e_i es pues, el elemento unitario de A_i.

Ahora, ya que $A_i A_j \subset A_i \cap A_j = 0$ por ser ideales bilaterales se tiene que $A_i A_j = 0$ si $i \neq j$. Por lo tanto, si I es un ideal izquierdo del anillo A_i entonces

$$AI = (A_1 \oplus ... \oplus A_t)I = A_i I \subset I,$$

es decir, I es un ideal izquierdo de A. Por tanto, el conjunto de ideales izquierdos del anillo A_i coincide con el conjunto de ideales izquierdos de A contenidos en A_i. Esto implica, en particular, que los anillos A_i son artinianos.

Sea ahora I un ideal izquierdo propio de A_i. Ya que A_i es semisimple como A-módulo e I es un A-submódulo de A_i, por lo antes dicho,

$$A_i = I \oplus I'$$

con I' un ideal izquierdo propio de A_i. Sean I_0, I'_0 ideales izquierdos propios de A contenidos en I e I' respectivamente. Ya que todos los ideales izquierdos de A_i son isomorfos, segun el corolario 22 $I_0 I'_0 = I'_0 \not\subset I$, por lo cual I no es un ideal bilateral de A_i y por lo tanto A_i resulta un anillo simple.

iii) Por construcción, $A = A_1 \oplus ... \oplus A_t$, suma directa de A-módulos. Basta probar que esta descomposición es un producto directo de anillos, $A = A_1 \times ... \times A_t$ basta ver que si $a = a_i + ... + a_t, b = b_1 + ... + b_t \, a_i, b_i \in A_i$ entonces $ab = a_i b_1 + ... + a_t b_t$, pero esto es consecuencia de que si $i \neq j$, $A_i A_j = 0$. $\diamondsuit$

Corolario A.0.15 *Un anillo es simple si y sólo si A tiene una descomposición en suma directa de ideales izquierdos mínimos en la cual todos ellos son isomorfos entre sí (como A-módulos).*

Definición 6 *Un álgebra es central simple sobre un campo k si A es un álgebra simple y k es su centro.*

Teorema A.0.16 *Sea A una k-álgebra central simple y sea K una extensión arbitraria de k. Entonces $A \otimes_k K$ es una K-álgebra central simple.*

Demostración: Ver [4] página 68 $\diamondsuit$

Ahora, cuando G es un grupo finito en la descomposición regular

$$k(G) = A_0 \oplus ... \oplus A_r$$

se tiene por el teorema A.0.14 que cada A_i es un anillo simple y como k es algebraicamente cerrado el centro de A_i es k, además si K es una extensión de k entonces

$$K(G) = k(G) \otimes_k K = A_0 \otimes_k K \oplus ... \oplus A_r \otimes_k K$$

obteniendo el siguiente

Teorema A.0.17 *Sea k un campo algebraicamente cerrado, G un grupo finito tal que característica de k no divida al orden de G y K una extensión de k, entonces toda representación irreducible de G sobre K es de la forma $V \otimes_k K$ donde V es un representación irreducible de G sobre k.*

Apéndice B

La Aplicación Traza

En este apéndice se demuestra que la sucesión de la métrica de la traza es exacta. Estas notas fueron tomadas de un curso teoría de curvas y singularidades impartido en la Universidad de Salamanca España.

Supongamos que $A \to B$ es un morfismo finito y B es libre sobre A. Todo elemento $b \in B$ define un endomorfismo de B como A-módulo, por la multiplicación $x \mapsto bx$ y por tanto, podemos asignar a b el polinomio característico de dicho endomorfismo, $\Sigma a_i x^i$ donde $a_i \in A$.

Si hacemos un cambio de la base A, según el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B \otimes_A C \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\rho} & C \end{array}$$

Los coeficientes del polinomio característico de $b \otimes 1$, operando en $B \otimes_A C$, son $\rho(a_i)$, ya que, si ϵ_i es una base de B, $\epsilon_i \otimes 1$ lo es de $B \otimes_A C$.

Por lo tanto, si definimos una métrica en T_A en B mediante la fórmula $< b, b' >= Tr(bb')$, tendremos , por lo anterior, un diagrama

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A C & \xrightarrow{T_C} & B^* \otimes_A C \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & \xrightarrow{T_A} & B^* \end{array}$$

donde $B^* = Hom_A(B, A)$. Por las observaciones anteriores tenemos que es estable por cambio de base.

Si $A \longrightarrow B$ es finito y plano, sabemos que existe una cubierta $\{U_i = Spec(A_i)\}$ de $Spec(A)$ por abiertos afines donde $B_{|U_i}$ es libre. Y por las observaciones anteriores, tenemos definida una métrica T_i para cada A_i, y dicha métrica es invariante bajo cambio de base, así que en $B_{|U_i \cap U_j}$ las métricas T_i, T_j coinciden. De aquí que se tenga una métrica definida en B, a la cual llamaremos la métrica de la traza . Obsérvese que esto implica que la métrica de la traza está bien definida en la categoría de esquemas i.e. si $\pi : X \to Y$ es un morfismo finito tal que $\pi_* \mathcal{O}_X$ es localmente libre entonces se tiene definido la aplicación $Tr : \pi_* \mathcal{O}_X \to (\pi_* \mathcal{O}_X)^*$ donde $(\pi_* \mathcal{O}_X)^* = \mathcal{H}om(\pi_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$.

Definición 7 *Si $A \xrightarrow{\pi} B$ es un morfismo finito y plano, llamaremos diferente de π al módulo $dif(\pi)$ definido por la siguiente sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{T_A} B^* \longrightarrow dif(\pi) \longrightarrow 0$$

Definición 8 *Si $A \xrightarrow{\pi} B$ es un morfismo finito y plano, llamaremos discriminate de π al módulo $Dic(\pi)$ definido por la siguiente sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \overset{r}{\Lambda} B \xrightarrow{T_A} \overset{r}{\Lambda} B^* \longrightarrow Dic(\pi) \longrightarrow 0$$

Teorema B.0.18 *El diferente y el discriminante son cero en un punto $x \in Spec(A)$ si y sólo si las diferenciales relativas se anulan en dicho punto.*

Demostración: Podemos suponer que A es local. por el lema de Nakayama y por estabilidad por el cambio de base $A \longrightarrow K$ (donde K es el campo de cocientes de A), podemos suponer que A es un campo. Pero en este caso el resultado es bien conocido.$\diamondsuit$

Sea A un anillo de Dedekin, Σ una extensión finita y separable del campo de cocientes K de A y B la cerradura entera de A en Σ. Nótese que B es un A-módulo finitamente generado. El B-módulo $B^* = Hom_A(B, A)$ se identifica, vía la métrica de la traza de la K-álgebra Σ con el B-módulo formado por la funciones $f \in \Sigma$ tales que $Tr(fB) \subset A$.

Teorema B.0.19 *Con la hipótesis anteriores, si B es de la forma $B = A[\xi] = A[x]/(p(x))$ donde $p(x)$ es primo y mónico, entonces B^* es un A-módulo libre de base*

$$\frac{1}{p'(\xi)}, \frac{\xi}{p'(\xi)}, \ldots, \frac{\xi^{n-1}}{p'(\xi)}$$

donde $p'(x)$ es la derivada de $p(x)$ (respecto de x) y n el grado de $p(x)$.

Demostración: Claramente los elementos $\frac{\xi^i}{p'(\xi)}$ están en B^*. Para ver que forman base es suficiente encontrar elementos $b_0, b_1, ..., b_{n-1}$ de B tales que

$$Tr(\frac{\xi^i b_j}{p'(\xi)}) = \delta_{i,j}$$

Esto equivale a probar que la matriz $(a_{i,j}) = Tr(\frac{\xi^i \xi^j}{p'(\xi)})$ es invertible en el grupo lineal en n^2 variables sobre A, es decir, que su determinante es unidad en A.

Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n$ todos los conjugados de ξ en una extensión conveniente de K. Entonces debemos calcular las sumas $\sum_{s=1}^{n} \frac{\alpha_s^i}{p'(\alpha_s)}$.

Identificando los coeficientes de los desarrollos en serie de potencias de $\frac{1}{x}$ de los dos miembros de la igualdad

$$\frac{1}{p'(x)} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{p'(\alpha_s)} \frac{1}{(x - \alpha_s)}$$

se obtiene:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\alpha_s^i}{p'(\alpha_s)} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq i < n-1 \\ 1 & \text{si } i = n-1. \end{cases}$$

En particular

$$Tr(\frac{\xi^i}{p'(\xi)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq i < n-1 \\ 1 & \text{si } i = n-1. \end{cases}$$

luego $|\ (a_{i,j})\ | = \pm 1$, con lo cual se concluye.$\diamond$

Teorema B.0.20 *Con la hipótesis iniciales, si A y B son locales y A es una k-álgebra de tipo finito sobre un campo algebraicamente cerrado k, B es de la forma $B = A[\xi]$.*

Demostración: Sea ξ un parámetro de uniformización de B y $\bar{\xi}$ su imagen en $B \otimes_A k$, (k se entiende como A-módulo por ser isomorfo al campo de residuos de A). Como, para algún n, $m_B^n = m_A B$, se tendrá $B \otimes_A k = k[\xi] = k[x]/(\bar{p}(x))$ para algún cierto polinomio $\bar{p}(x) \in k[x]$.

Sea $p(x) \in A[x]$ un polinomio mónico, nulo sobre ξ, y cuya reducción módulo el ideal máximal de A sea $\bar{p}(x)$. Si n es su grado, $1, \xi, ..., \xi^{n-1}$ forman una base de B sobre A por Nakayama. En consecuencia $B = A[\xi]$.$\diamond$

Consideremos ahora la sucesión exacta deducida de la métrica de la traza

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{T_A} B^* \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Como Σ/K es separable, localizando en el punto genérico se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B^* & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \cap & & \cap & & & & \\ & & \Sigma & \xrightarrow{\sim} & \Sigma^* & = & Hom_K(\Sigma, K) & & \end{array}$$

luego C es un A-módulo de torsión y como es finito (por ser lo B^*) está soportado en un número finito de puntos de $Spec(A)$. Por otra parte el módulo $\Omega_{B/A}$ de diferenciales relativas está también soportado en un número finito de puntos, pues es finito y su fibra en el punto genérico vale $\Omega_{\Sigma/k} = 0$ por separabilidad.

Teorema B.0.21 *Supóngase, además, que A es local y una k-álgebra de tipo finito sobre un campo algebraicamente cerrado entonces el diferente $C = B^*/B$ es un B-módulo isomorfo a $\Omega_{B/A}$.*

Demostración:

Caso 1) B es de la forma $B = A[\xi] = A[x]/(p(x))$.

En este caso, $\Omega_{B/A} = B/p'(\xi)B$ como B-módulos. Por otra parte, según el primer teorema, B^* es un A-módulo libre de base

$$\frac{1}{p'(\xi)}, \frac{\xi}{p'(\xi)}, ..., \frac{\xi^{n-1}}{p'(\xi)}$$

($n = grado\, p(x)$), luego se tiene un diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B^* & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & p'(\xi) \downarrow & \sim & \sim & \downarrow p'(\xi) & & & \\ 0 & \longrightarrow & p'(\xi)B & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B^*/p'(\xi)B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de donde se concluye.

Caso general) Completando la sucesión

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow B^* \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

para la topología del ideal maximal m de A se obtiene

$$0 \longrightarrow \widehat{B} \longrightarrow \widehat{B}^* \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

pues son A-módulos finitos y C es completo por tener soporte en el punto cerrado de $Spec(A)$.

Por la estabilidad de la traza bajo cambios de base, si $\widehat{K}$ es el campo de cocientes del completado $\widehat{A}$ de A, la inmersión $\widehat{B} \hookrightarrow \widehat{B}^*$ es la inducida por la métrica de la traza de la $\widehat{K}$-álgebra $\Sigma \otimes_K \widehat{K}$. Sea $mB = p_1^{\alpha_1} ... p_s^{\alpha_s}$ la descomposición de mB en B. Es claro que $\widehat{B} = \prod_{i=1}^{s} \widehat{B}_{p_i}$ donde $\widehat{B}_{p_i}$ es el completado de B_{p_i} para la topología de su ideal maximal. Así, si Σ_i es el campo de cocientes de $\widehat{B}_{p_i}$ será $\Sigma \otimes_K \widehat{K} = \prod_{i=1}^{s} \Sigma_i$ y si $p_i : \Sigma \otimes_K \widehat{K} \longrightarrow K_i$ son las proyecciones, $Tr_{\Sigma \otimes_K \widehat{K}/\widehat{K}} = \sum_{i=1}^{s} Tr_{\Sigma_i/\widehat{K}} \circ p_i$.

Ello prueba que cada Σ_i es finito y separable sobre $\widehat{K}$ y que la sucesión

$$0 \longrightarrow \widehat{B} \longrightarrow \widehat{B}^* \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

rompe en sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \widehat{B}_{p_i} \longrightarrow \widehat{B}^*_{p_i} \longrightarrow C_i \longrightarrow 0$$

inducidas por las trazas respectivas.

Por otro lado $\Omega_{B/A}$ es completo (por la misma razón que C) y por la estabilidad de la toma de diferenciales frente a los cambios de base, será:

$$\Omega_{B/A} = \widehat{\Omega}_{B/A} = \Omega_{\widehat{B}/\widehat{A}} = \bigoplus_{i=1}^{s} \Omega_{\widehat{B}_{p_i}/\widehat{A}}$$

Ahora bien, como $\widehat{B}_{p_i}$ es entero sobre $\widehat{A}$, pues ambos son anillos de series formales sobre k y el parámetro ξ_i de $\widehat{B}_{p_i}$ puede ser elegido en B y por tanto entero sobre A , $\widehat{B}_{p_i}$ es el cierre entero de $\widehat{A}$ en Σ_i, ya que es íntegramente cerrado. Por el teorema anterior $\widehat{B}_{p_i} = \widehat{A}[\xi_i]$ para cada i y basta aplicar ahora el caso 1.$\diamond$

Bibliografía

[1] Artin M. *Deformations of singularities* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970

[2] Cárdenas H. & Lluis E. *Módulos semisimples y representaciones de grupos finitos,* Trillas, Serie Sociedad Matemática Mexicana, 1970.

[3] Cornalba M. *On the locus of curves with automorphisms,* Ann. Mat. Pura Appl. 149 (1987) pp 135-151.

[4] Curtis C. W. & Reiner I. *Methods of representation theory I,* Wiley, New York, 1981.

[5] Curtis C. W. & Reiner I.*Representation theory of finite groups and associative algebras* Wiley, 1962.

[6] Fulton W. & Harris J. *Representation Theory,* Springer-Verlag, New York 1991.

[7] Gómez González E. *Revestimentos cíclicos de curvas lisas. Estudio del locus singular del espacio de móduli de curvas planas,* Ph. D. Tesis, Universidad de Salamanca, España, 1997.

[8] Harstshorne R. *Algebraic Geometry,* Springer-Verlag, New York.

[9] Huybrechts D. & Lehn M. *The geometry of moduli spaces of sheaves.* Aspects of Mathematics E 31, Viehweg, 1997.

[10] Kuribayashi A. *On Analitic families of compact Riemann surfaces with non-trivial automorphism,* Nagoya Math. J. 28 (1966), 119-165.

[11] Kuribayashi I. *On automorphism groups of a curve as linear groups,* J. Math. Soc. Japan 39 (1987) 51-77.

[12] Lange H. & Birkenhake Ch. *Complex abelian varieties,* Grundleheren 302, Springer-Verlag, 1992.

[13] Lønstead K. *The singular points on the moduli spaces for smooth curves,* Math. Ann. 266, (1984), pp. 397-402.

[14] Mumford D. *Abelian Varieties,* Oxford Univerity Press, London and Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970

[15] Narasimhan M. S. & Ramanan S. *Generalised Prym varieties as fixed points,* Journal of the Indian Math. Soc. 39, (1975) pp. 1-19.

[16] Oort F. *Singularities of coarse moduli schemes,* Séminaire Dubreil, 19ème année 1975/1976 No. 16

[17] Ries, J. F. X. *Subvarieties of moduli space determined by finite groups acting on surfaces,* Trans. Am. Math. Soc. 335, (1993), pp. 385-406