Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Foliaciones de $\mathbb{CP}^2$ Mumford-Inestables y sus Subgrupos Uniparamétricos

Tesis

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

PRESENTA:

Claudia Estela Reynoso Alcántara

Director de Tesis:

Dr. Xavier Gómez-Mont Ávalos

Octubre de 2003 Guanajuato, Gto. México

Índice General

Agradecimientos

A las Instituciones Mexicanas CIMAT, CONACyT y CONCyTEG. Sin los medios que me porporcionaron me hubiera sido imposible realizar estudios de posgrado.

Es un buen momento para expresar algunas palabras de agradecimiento a cada uno de mis profesores por todo el esfuerzo que hacen para compartir sus conocimientos.

Agradezco de manera muy especial a Xavier por haberme propuesto un problema tan interesante y divertido, y por darme las facilidades para no interrumpir su estudio.

Asimismo, expreso mi gratitud a Laura, Lety y Pedro porque el tiempo que invirtieron en revisar la tesis aportó mejoras importantes.

I am very grateful to Professor Rick Miranda for his kindness and time during my visit to Fort Collins.

Estoy en deuda con Joaco por haber hecho el programa para computadora que se presenta en el último apéndice.

No podría omitir a mis amigos Alejandra, Abel y Ángela, a quienes admiro y quiero, entre otras cosas, por la consistencia de su incondicionalidad hacia mi, y porque, quiza sin saberlo, me han dado firmeza y ánimo para concluir.

Mi cariño y gratitud para mis hermanos Tita y Porfirio, y para mis madres Estela y Eufracia porque han sostenido la parte invisible del trabajo.

Finalmente dedico todo esto a Alexis: gracias por haber llegado a mi vida y contribuir en todos los aspectos para la finalización de esta tesis.

Introducción

En este trabajo hacemos uso de una de las Teorías de Geometría Algebraica que ha resuelto problemas de clasificación importantes en el área, la Teoría de Invariantes Geométricos (GIT), desarrollada por David Mumford en los años sesentas y merecedora de una "Medalla Fields". Usamos esta importante herramienta para obtener resultados relacionados con el comportamiento de soluciones y puntos singulares de ecuaciones diferenciales definidas en el plano proyectivo complejo.

La Teoría de Invariantes Geométricos divide una variedad proyectiva, en la que actúa un grupo reductivo, en dos subconjuntos ajenos: el conjunto de los puntos semiestables y el de los inestables. Estos últimos, cuyo conjunto es llamado Cono Nulo, tienen características indeseables para objetivos tales como obtener el espacio cociente de la acción. Mumford desarrolló un método numérico para obtener los puntos inestables haciendo uso de subgrupos uniparamétricos del grupo reductivo. Para cada punto inestable existe un conjunto de subgrupos uniparamétricos que exhiben esta inestabilidad; Kempf estudió una función real (que existe para cada punto de la variedad) cuyo dominio son los subgrupos uniparamétricos y que alcanza un valor máximo positivo si, y sólo si, el punto es inestable, este subgrupo donde la función alcanza el máximo es especial, porque, en algún sentido, es el que exhibe mejor la inestabilidad del punto. Se dirá que este subgrupo es el "PEOR" para el punto inestable.

Nosotros estudiamos la acción del grupo de biholomorfismos de $\mathbb{CP}^2$ en su espacio de foliaciones de grado d. G. Kempf conjeturó que las hojas de una foliación inestable eran tranversas a las hojas de la foliación definida por su PEOR subgrupo uniparamétrico. En este caso diremos que la foliación es de Riccati respecto a su PEOR subgrupo uniparamétrico.

En general no es verdadera la conjetura (ver ejemplo en página 22), pero el presente análisis muestra que en algunos casos específicos si se cumple.

Los resultados originales presentados en este trabajo son los siguientes:

Proposiciones 5.7, 5.8: Sea X una foliación inestable de grado 1, entonces si λ es el su PEOR subgrupo uniparamétrico para X, entonces X es $\lambda - Riccati$ y tiene monodromía afín.

Teorema 5.2: El Buen Cociente de las Foliaciones Semiestables de grado 1 respecto a la acción del grupo de biholomorfismos de $\mathbb{CP}^2$ es $\mathbb{CP}^1$.

Teorema 5.9: Sea X una foliación de $\mathbb{CP}^2$ de grado 2, entonces X es inestable para la acción de $PGL(3,\mathbb{C})$ si, y sólo si, existe $g \in SL(3,\mathbb{C})$ tal que

$$\begin{aligned} gX \in CN_1 =< & x^2\frac{\partial}{\partial x}, xz\frac{\partial}{\partial x}, z^2\frac{\partial}{\partial x}, \\ & x^2\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial y}, xz\frac{\partial}{\partial y}, yz\frac{\partial}{\partial y}, \\ & z^2\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial z}, xz\frac{\partial}{\partial z} > \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} gX \in CN_2 =< & xz\frac{\partial}{\partial x}, yz\frac{\partial}{\partial x}, z^2\frac{\partial}{\partial x}, \\ & x^2\frac{\partial}{\partial y}, xz\frac{\partial}{\partial y}, yz\frac{\partial}{\partial y}, z^2\frac{\partial}{\partial y} > . \end{aligned}$$

Teorema 5.11: Si X es foliación Mumford-Inestable de grado 2, entonces X tiene una singularidad de multiplicidad mayor o igual que 4.

Teorema 5.14: Si λ es el PEOR subgrupo uniparamétrico para la foliación genérica en CN_1, entonces $X \in CN_1$ si, y sólo si, X es Riccati respecto a λ y la multiplicidad de $p_1 = (0:1:0)$ es mayor que 1.

Proposición 6.3: Si X es una foliación invariante por la acción del subgrupo uniparamétrico λ, entonces X es $\lambda - Riccati$.

***

Ahora daremos una breve explicación de cómo está estructurado el escrito.

En los preliminares se encontrará un resumen con los resultados más importantes de la Teoría de Invariantes Geométricos, se describe de manera sencilla el método de subgrupos a 1-parámetro y se dan los ingredientes necesarios para entender la función de Kempf.

En segundo capítulo se describe el espacio de foliaciones de $\mathbb{CP}^2$ de grado d y la acción natural del grupo de biholomorfismos de $\mathbb{CP}^2$ definida en él.

En el capítulo 3 se da un algoritmo para encontrar, dada una foliación, sus subgrupos uniparamétrico que muestran inestabilidad, esto se hace asignando a cada foliación un convexo en $\mathbb{R}^2$ en el que cada punto define uno de tales subgrupos. En el segundo apéndice se presenta un programa de computadora escrito en lenguaje "$C++$" que acepta como entrada una foliación y devuelve su "PEOR" subgrupo uniparamétrico si éste existe.

En el capítulo siguiente, dedicado a las singularidades, se dan algunos resultados generales sobre el conjunto singular de una foliación y se demuestra que si una foliación X es inestable respecto a un subgrupo a 1-parámetro, entonces X y la foliación definida por el subgrupo tienen una singularidad común.

Más adelante se estudia con detalle el espacio de las foliaciones de grado 0, 1 y 2. En estos casos se dan explícitamente, el conjunto de foliaciones inestables, su PEOR subgrupo uniparamétrico y se demuestra la condición de transversalidad para las de grado 1, y para un subespacio de las de grado 2. Se demuestra que las foliaciones inestables de grado 2 tienen un punto singular de multiplicidad al menos 4.

Después se demuestra la condición de transversalidad para foliaciones invariantes por la acción de un subgrupo a 1-parámetro y se da una hoja algebraica común entre la foliación y la definida por el subgrupo.

Finalmente se dan algunas condiciones, bajo las cuales, se satisface la condición de transversalidad para un subgrupo uniparamétrico cuya foliación asociada tiene una curva de singularidades. A continuación se presenta un ejemplo de una familia de foliaciones con puntos singulares de mutiplicidad muy alta que satisfacen dicha condición.

En el primer apéndice se define la representación de monodromía resultante de la condición de transversalidad de las hojas de una foliación respecto a una fibración racional.

En el segundo apéndice explicamos un Teorema de Seidenberg de resolución de singularidades, para obtener, a partir de una foliación definida por un subgrupo a 1-parámetro, una fibración racional sobre $\mathbb{CP}^1$

****

Quisiera terminar esta introducción con una pregunta importante que surgió mientras se desarrollaba el trabajo.

En todos los casos estudiados aquí las foliaciones inestables tienen hojas algebraicas comunes con las foliaciones definidas por sus subgrupos uniparámetricos asociados. Con estos resultados y conociendo el Teorema sobre densidad de foliaciones de $\mathbb{CP}^2$ sin hojas algebraicas (ver pág. 158 de [6]) surge la pregunta sobre la existencia de alguna relación entre las foliaciones de $\mathbb{CP}^2$ Mumford-Inestables y aquellas que tienen alguna solución algebraica.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Teoría de Invariantes Geométricos

Sea G un grupo reductivo y X una variedad algebraica definida sobre $\mathbb{C}$. Supongamos que existe una acción

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto gx, \end{aligned}$$

de G sobre X.

Definición 1.1. *La acción anterior se dice* ***lineal*** *o que G* ***actua linealmente sobre*** *X si existe un homomorfismo de grupos*

$$\rho : G \to GL(n+1, \mathbb{C})$$

tal que la acción de G en X es la acción inducida por

$$\begin{aligned} G \times \mathbb{C}^{n+1} &\to \mathbb{C}^{n+1} \\ (g, (x_0, ..., x_n)) &\mapsto \rho(g)(x_0, ..., x_n), \end{aligned}$$

donde $\rho(g)(x_0, ..., x_n)$ es simplemente aplicar la transformación lineal $\rho(g)$ en el punto $(x_0, ..., x_n)$.

Sea $U \subset X$ abierto. Denotaremos por $A(U)$ el anillo de funciones regulares definidas en U y

$$A(U)^G = \{f \in A(U) : f(gx) = f(x) \quad \forall g \in G\}.$$

En el caso en que X es una variedad afín tenemos el siguiente Teorema que demuestra la existencia de la variedad afín cociente de una acción lineal.

Teorema 1.2. *(ver pag. 61 de [8]) Sea G un grupo reductivo actuando linealmente sobre una variedad afín X, entonces existe una variedad afín Y y un morfismo $\phi : X \to Y$ tal que*

1. *ϕ es $G-$invariante.*

2. *ϕ es sobre.*

3. *Si $U \subset Y$ es abierto entonces*

$$\phi^* : A(U) \to A(\phi^{-1}(U))$$

es un isomorfismo sobre $A(\phi^{-1}(U))^G$.

4. *Si W es un subconjunto invariante cerrado de X, entonces $\phi(W)$ es cerrado.*

5. *Si W_1 y W_2 son subconjuntos invariantes, cerrados, disjuntos entonces*

$$\phi(W_1) \cap \phi(W_2)$$

es vacío.

El caso proyectivo se tiene que tratar de manera diferente. Sea X una variedad proyectiva en $\mathbb{CP}^n$.

En general el cociente de una acción lineal de G sobre X no tiene estructura de variedad proyectiva. Mumford demostró que, después de eliminar ciertos puntos de la variedad, existe un "buen cociente". Esta idea la precisaremos con las siguientes definiciones y el siguiente Teorema.

Una acción lineal de G sobre X define una acción de G sobre el anillo de polinomios en $n+1$ variables complejas:

$$\begin{gathered} G \times \mathbb{C}[x_0, ..., x_n] \to \mathbb{C}[x_0, ..., x_n] \\ (g, f) \mapsto f_g \\ f_g((x_0, ..., x_n)) = f(g(x_0, ..., x_n)) \end{gathered}$$

decimos que el polinomio f es invariante por la acción si $f = f_g$ para todo $g \in G$.

Definición 1.3. *Denotamos por $O(x)$ la órbita de $x \in X$ por la acción de G. Decimos que $x \in X$ es:*

1. **semiestable** *si existe f, polinomio invariante, homogéneo, de grado mayor o igual que uno tal que $f(x) \neq 0$.*

2. **estable** *si*

$$dim \quad O(x) = dim \quad G,$$

existe f, polinomio invariante, homogéneo, de grado mayor o igual que uno tal que $f(x) \neq 0$ y las órbitas de la acción de G restringida a $X_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ son cerradas en X_f.

3. *Los puntos que no son semiestable se denominan puntos* **inestables** *y su conjunto se llama* **cono nulo** *de la acción.*

Denotaremos por X^{ss} y X^s el conjunto de puntos semiestables y estables respectivamente.

Definición 1.4. *Un* **buen cociente** *de X por G es una pareja (Y, ϕ) donde Y es una variedad y $\phi : X \to Y$ es un morfismo afín que satisface las siguientes condiciones:*

1. *ϕ es G-invariante.*

2. *ϕ es sobre.*

3. *Si U es un abierto de Y, entonces*

$$\phi^* : A(U) \to A(\phi^{-1}(U))$$

es un isomorfismo de $A(U)$ sobre $A(\phi^{-1}(U))^G$

4. *Si W es un subconjunto invariante y cerrado de X, entonces $\phi(W)$ es cerrado.*

5. *Si W_1, W_2 son subconjuntos de X, cerrados, invariantes y disjuntos, entonces*

$$\phi(W_1) \cap \phi(W_2) = \emptyset.$$

Definición 1.5. *Un* ***cociente categórico de X por*** *G es un par (Y, ϕ), donde Y es una variedad y $\phi : X \to Y$ es un morfismo tal que:*

1. *ϕ es constante en las órbitas de la acción.*

2. *para cada variedad Y_1 y morfismo $\phi_1 : X \to Y_1$ constante en órbitas, existe un único morfismo $\chi : Y \to Y_1$ tal que $\chi \circ \phi = \phi_1$.*

   Si, además, $\phi^{-1}(y)$ consiste de sólo una órbita para todo $y \in Y$ entonces (Y, ϕ) se llama **espacio de órbitas.**

El principal Teorema de la Teoría Geométrica de Invariantes, escrito en el contexto de variedades proyectivas, es el siguiente:

Teorema 1.6. *(ver pag. 38 de [5]) Sea G un grupo reductivo actuando linealmente sobre una variedad proyectiva X, entonces*

1. *Existe un buen cociente (Y, ϕ) de X^{ss} por G donde Y es proyectiva.*

2. *Existe $Y^s \subset Y$ abierto tal que $\phi^{-1}(Y^s) = X^s$ y (Y^s, ϕ) es un buen cociente y un espacio de órbitas de X^s por G.*

3. Si $x_1 \in X^{ss}$ y $x_2 \in X^{ss}$ entonces

$$\phi(x_1) = \phi(x_2) \Leftrightarrow \overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)} \cap X^{ss} \neq \emptyset.$$

4. Para $x \in X^{ss}$ tenemos lo siguiente:

$$x \in X^s \Leftrightarrow dim\, O(x) = dim\, G \quad y \quad O(x) \quad es\ cerrado\ en \quad X^{ss}.$$

Definición 1.7. *La variedad proyectiva Y del Teorema anterior es llamada* ***el cociente de Mumford*** *para la acción de G en X.*

1.2 Método de subgrupos a 1-parámetro

En general es muy difícil encontrar los polinomios invariantes por la acción inducida por la acción lineal de un grupo reductivo en una variedad proyectiva y, por tanto, encontrar los puntos semiestables y estables.

La siguiente proposición caracteriza los puntos semiestables y estables, con esta caracterización describiremos el método numérico de subgrupos a un parámetro para encontrar dichos puntos.

Proposición 1.8. *(ver Proposición 2.2 de [5]) Sea $x \in X$ y $\bar{x} \in \mathbb{C}^{n+1}$ un punto en la clase de x en el espacio proyectivo, entonces:*

1. x es semiestable si y sólo si $0 \notin \overline{O(\bar{x})}$.

2. x es estable si es semiestable, la órbita de x es cerrada en X^{ss} y

$$dim\, O(x) = dim\, G.$$

Definición 1.9. ***Un subgrupo a un parámetro de*** *G es un homomorfismo no trivial*

$$\lambda : \mathbb{C}^* \to G$$

de grupos algebraicos. Sea $m \in \mathbb{Z}$, definimos el ***m-múltiplo,*** *$m\lambda$,* ***de*** *λ como*

$$m\lambda(t) = \lambda(t^m)$$

y decimos que λ es ***indivisible*** *si no es m-múltiplo de ningún subgrupo para $m > 1$.*

Si λ es un subgrupo a 1-parámetro de G y G actua linealmente en una variedad X, entonces λ define una representación de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\to GL(n+1, \mathbb{C}) \\ t &\mapsto \lambda(t) : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1} \\ & \qquad v \mapsto \lambda(t)v, \end{aligned}$$

donde, para simplificar la notación, consideramos $\lambda(t)$ como elemento de $GL(n+1, \mathbb{C})$ (ver Definición 1.1).

Proposición 1.10. *La representación anterior es diagonalizable, es decir, existe $\{v_0, ..., v_n\}$ base de $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que:*

$$\lambda(t)v_i = t^{r_i} v_i$$

donde $r_i \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Dado que $\mathbb{C}^*$ es un grupo conmutativo, entonces $\{\lambda(t)\}_{t \in \mathbb{C}^*}$ es una familia conmutativa de endomorfismos.

Sea $t_0 \in C^*$ una raiz $m-$ésima de la unidad, entonces $\lambda(t_0)^m$ es la matriz identidad, por lo tanto $\lambda(t_0)$ es diagonalizable.

Sea $\mathbb{C}^{n+1} = ker(\lambda(t_0) - a_1 I) \bigoplus ... \bigoplus ker(\lambda(t_0) - a_{n+1} I)$ la descomposición en subespacios propios lineales invariantes que define la diagonalización de $\lambda(t_0)$.

Sea $E \in \{\lambda(t)\}_{t \in \mathbb{C}^*}$, i entero positivo menor o igual que $n+1$ y $v \in ker(\lambda(t_0) - a_i I)$, entonces

$$(\lambda(t_0) - a_i I)Ev = E\lambda(t_0)v - a_i Ev = E(a_i v) - a_i Ev = 0,$$

por lo tanto el subgrupo unidimensional $ker(\lambda(t_0) - a_i I)$ es invariante por E, entonces E es diagonalizable con la misma base que $\lambda(t_0)$.

Sea $\{v_0, ..., v_n\}$ la base que diagonaliza estos endomorfismos, puesto que $\mathbb{C}^*$ es un grupo multiplicativo, entonces

$$\lambda(t)v_i = t^{r_i} v_i$$

donde $r_i \in \mathbb{Z}$.

□

Puesto que la acción de G es lineal, entonces si $\bar{x} = \sum_{i=0}^{n} a_i v_i$, $\lambda(t)\bar{x} = \sum_{i=0}^{n} t^{r_i} a_i v_i$.

Usando esta notación haremos la siguiente definición importante.

Definición 1.11. *Sea $x \in X$ y λ un subgrupo a un parámetro de G, definimos la siguiente función:*

$$\mu(x, \lambda) := min\{r_i : a_i \neq 0\}. \tag{1.1}$$

Ahora mencionamos el siguiente Lema, cuya demostración es consecuencia inmediata de la definición de la función μ.

Lema 1.12. *(ver pag. 104 y 108 de [8]) Sea $x \in X$, $\bar{x} \in \mathbb{C}^{n+1}$ un punto en la clase de x en el espacio proyectivo, $g \in G$ y λ un subgrupo a 1-parámetro de G, entonces:*

1. $\mu(x, \lambda) < 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \lambda(t)\bar{x}$ *no existe*
2. $\mu(x, \lambda) > 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \lambda(t)\bar{x} = 0$.
3. $\mu(gx, \lambda) = \mu(x, g^{-1}\lambda g)$

Es claro que si existe un subgrupo a 1-parámetro λ tal que:

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)\bar{x} = 0,$$

entonces x es un punto inestable, esto debido a que este límite pertenece a $\overline{O(\bar{x})}$.

El siguiente Teorema (cuya demostración no es inmediata) es el recíproco de la afirmación anterior.

Teorema 1.13. *(ver Teorema 2.1 de [5]) Si $0 \in \overline{O(\bar{x})}$ entonces existe un subgrupo a un parámetro:*

$$\lambda : \mathbb{C}^* \to G$$

tal que $\lim_{t\to 0} \lambda(t)\bar{x} = 0$.

Con estos resultados previos podemos enunciar el siguiente Teorema, el cual nos dice lo poderoso que es el método de subgrupos a 1-parámetro para encontrar los puntos semiestables y estables de una acción lineal.

Teorema 1.14. *(ver Teorema 4.9 de [8])*
Sea G un grupo reductivo actuando linealmente en una variedad proyectiva X, entonces $x \in X$ es:

1. *semiestable si, y sólo si, $\mu(x, \lambda) \leq 0$ para todo λ, subgrupo a un parámetro de G.*
2. *estable si, y sólo si, $\mu(x, \lambda) < 0$ para todo λ, subgrupo a un parámetro de G.*
3. *inestable si, y sólo si, existe un subgrupo a 1-parámetro λ de G tal que $\mu(x, \lambda) > 0$.*

1.3 Un Teorema de Kempf

Los ingredientes necesarios para poder enunciar el Teorema de Kempf son:

1. El conjunto de subgrupos a un parámetro de G, que denotaremos por $\Gamma(G)$
2. Una noción de longitud en este conjunto. Esta será una función real no-negativa

$$\| \ \| : \Gamma(G) \to \mathbb{R}$$

tal que:

a) Para todo $\lambda \in \Gamma(G)$ y $g \in G$, $\|g\lambda g^{-1}\| = \|\lambda\|$.

b) Si T es un toro maximal de G, existe una forma bilineal, entero-valuada, definida positiva $(,)$ en $\Gamma(T)$ tal que $(\lambda, \lambda) = \|\lambda\|^2$ para todo $\lambda \in \Gamma(T)$.

3. El concepto de **subgrupo parabólico** $P(\lambda)$ de G asociado a $\lambda \in \Gamma(G)$:

$$P(\lambda) := \{g \in G : \lim_{t\to 0} \lambda(t)g\lambda^{-1}(t) \quad \text{existe en G}\}.$$

Ahora podemos enunciar el siguiente Teorema debibo a G. Kempf.

Teorema 1.15. *(ver Teorema 3.4 de [7]) Sea G un grupo reductivo actuando linealmente sobre una variedad proyectiva X, fijemos $x \in X$ y una función longitud en $\Gamma(G)$, entonces la aplicación*

$$f_x : \Gamma(G) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$f_x(\lambda) = \frac{\mu(x, \lambda)}{\|\lambda\|} \tag{1.2}$$

tiene las siguientes propiedades:

(i) Alcanza un valor máximo B_x que se encuentra en el conjunto $|X, x| = \{\lambda \in \Gamma(G) : \exists \lim_{t\to 0} \lambda(t)x\}$, si este conjunto es no vacío.

(ii) B_x existe y es positivo si y sólo si $0 \in \overline{O(\bar{x})}$.

Si la condición (ii) se verifica, el conjunto Λ_x de subgrupos a 1-parámetro indivisibles λ, tales que $f_x(\lambda) = B_x$ satisface las siguientes propiedades:

(1) Λ_x *es no vacío.*

(2) Existe un subgrupo parabólico P_x *tal que* $P(\lambda) = P_x$ *para todo* $\lambda \in \Lambda_x$.

(3) Todo toro algebraico maximal de P_x *contiene un único miembro de* Λ_x.

(4) Λ_x *es un espacio homogéneo principal bajo conjugación por el radical unipotente de* P_x.

Definición 1.16. *Llamaremos a* f_x *la* ***función de Kempf asociada a*** x.

Observación. Si f_x alcanza su valor máximo en λ_1 y λ_2 entonces existe $g \in P_x$ tal que

$$g\lambda_1 g^{-1} = \lambda_2.$$

Pues, por la parte (4) del Teorema anterior, si R es el radical unipotente de P_x, entonces la acción

$$\begin{aligned} R \times \Lambda_x &\to \Lambda_x \\ (g, \lambda) &\mapsto g\lambda g^{-1} \end{aligned}$$

es transitiva.

Capítulo 2

El Espacio de Foliaciones de $\mathbb{CP}^2$ y la Acción de $PGL(3, \mathbb{C})$

Una foliación por curvas de $\mathbb{CP}^2$ de grado d es un morfismo no cero de haces

$$X : \mathscr{O}_{\mathbb{CP}^2}(1-d) \to \mathscr{T}\mathbb{CP}^2,$$

donde $\mathscr{T}\mathbb{CP}^2$ es el haz tangente de $\mathbb{CP}^2$. Consideramos $d \geq 0$ pues si $d < 0$ entonces X es el morfismo cero. Dos morfismos X_1, X_2 definen la misma foliación si $X_1 = kX_2$ para algún $k \in \mathbb{C}^*$.

Entonces el espacio de foliaciones de $\mathbb{CP}^2$ de grado d es

$$\mathscr{F}_d := Proj H^0(\mathbb{CP}^2, \mathscr{T}\mathbb{CP}^2(d-1))$$

donde $\mathscr{T}\mathbb{CP}^2(d-1) = \mathscr{O}_{\mathbb{CP}^2}(d-1) \otimes \mathscr{T}\mathbb{CP}^2$.

Consideremos la sucesión exacta de Euler (ver [4] pag. 182):

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{CP}^2}(d-1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{CP}^2}(d)^3 \to \mathscr{T}\mathbb{CP}^2(d-1) \to 0,$$

ésta induce la siguiente sucesión larga de cohomología:

$$0 \to H^0(\mathbb{CP}^2, \mathscr{O}_{\mathbb{CP}^2}(d-1)) \to H^0(\mathbb{CP}^2, \mathscr{O}_{\mathbb{CP}^2}(d)^3) \to H^0(\mathbb{CP}^2, \mathscr{T}\mathbb{CP}^2(d-1)) \to 0 \qquad (2.1)$$

pues $H^i(\mathbb{CP}^2, \mathscr{O}_{\mathbb{CP}^2}(d-1)) = 0$ para $i \geq 1$.

El espacio vectorial $H^0(\mathbb{CP}^2, \mathscr{O}_{\mathbb{CP}^2}(d))$ es el espacio de polinomios homogéneos de grado d en tres variables y tiene dimensión

$$\frac{(d+2)(d+1)}{2}.$$

A partir de la sucesión (2.1) y de la observación anterior concluimos que

$$\begin{aligned}\dim\mathscr{F}_d &= \dim H^0(\mathbb{CP}^2, \mathscr{T}\mathbb{CP}^2(d-1)) - 1\\ &= \dim H^0(\mathbb{CP}^2, \mathscr{O}_{\mathbb{CP}^2}(d)^3) - \dim H^0(\mathbb{CP}^2, \mathscr{O}^2_{\mathbb{CP}}(d-1)) - 1\\ &= 3\frac{(d+2)(d+1)}{2} - \frac{(d+1)d}{2} - 1\\ &= d^2+4d+2\end{aligned}$$

y obtenemos la siguiente

Proposición 2.1. *Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto*

$$Proj\{X : \mathscr{O}(1-d) \to \mathscr{T}\mathbb{CP}^2\}$$

con $d \geq 0$, y los campos vectoriales polinomiales homogéneos

$$X = P(z_0,z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial z_0} + Q(z_0,z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + R(z_0,z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial z_2} = \begin{pmatrix} P(z_0,z_1,z_2)\\ Q(z_0,z_1,z_2)\\ R(z_0,z_1,z_2)\end{pmatrix}$$

en $\mathbb{CP}^2$ de grado d, módulo la suma de $h\cdot R$, donde h es un polinomio homogéneo de grado $d-1$ y $R = \sum_{i=0}^{2} z_i\frac{\partial}{\partial z_i}$ es el campo radial en $\mathbb{CP}^2$.

Daremos ahora tres definiciones relacionadas con foliaciones que se estarán mencionando a lo largo del trabajo.

Definición 2.2. *Un conjunto analítico $\mathcal{L} \subset \mathbb{CP}^2$ es una hoja para la foliación*

$$X : \mathscr{O}_{\mathbb{CP}^2}(1-d) \to \mathscr{T}\mathbb{CP}^2,$$

si el morfismo X restringido a $\mathcal{L}$ tiene imagen en $\mathscr{T}\mathcal{L}$.

Definición 2.3. *Sea $F(z_0,z_1,z_2)$ un polinomio homogéneo, entonces la curva C en $\mathbb{CP}^2$ definida por F es una solución algebraica para*

$$X = \begin{pmatrix} P(z_0,z_1,z_2)\\ Q(z_0,z_1,z_2)\\ R(z_0,z_1,z_2)\end{pmatrix}$$

si y sólo si existe un polinomio H tal que

$$P(z_0,z_1,z_2)\frac{\partial F}{\partial z_0} + Q(z_0,z_1,z_2)\frac{\partial F}{\partial z_1} + R(z_0,z_1,z_2)\frac{\partial F}{\partial z_2} = HF.$$

Definición 2.4. *Un punto $p = (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{CP}^2$ es un* ***punto singular*** *para la foliación*

$$X = \begin{pmatrix} P(z_0,z_1,z_2)\\ Q(z_0,z_1,z_2)\\ R(z_0,z_1,z_2)\end{pmatrix}$$

si existe $k \in \mathbb{C}$ tal que

$$X(p) = \begin{pmatrix} P(a_0,a_1,a_2)\\ Q(a_0,a_1,a_2)\\ R(a_0,a_1,a_2)\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}.$$

El conjunto de puntos singulares de la foliación X lo denotaremos por $Sing(X)$.

En la variedad proyectiva $\mathscr{F}_d$ existe una acción natural por el grupo de biholomorfismos de $\mathbb{CP}^2$, definida del siguiente modo:

$$PGL(3,\mathbb{C}) \times \mathscr{F}_d \to \mathscr{F}_d$$

$$(g,X) \mapsto gX = DgX \circ (g^{-1}). \tag{2.2}$$

Los grupos $SL(3,\mathbb{C})$ y $PGL(3,\mathbb{C})$ son isógenos (existe un morfismo sobre y con kernel finito entre ellos), así que, para nuestros fines, se puede trabajar con cualquiera de ellos.

Ahora describimos sus subgrupos a 1-parámetro de $SL(3,\mathbb{C})$ para encontrar los puntos inestables de esta acción particular.

2.1 Los subgrupos a 1-parámetro de $SL(3,\mathbb{C})$

Proposición 2.5. *Sea*

$$\lambda : \mathbb{C}^* \to SL(3,\mathbb{C})$$

un subgrupo a un parámetro de $SL(3,\mathbb{C})$, entonces existen $g \in SL(3,\mathbb{C})$ y enteros n_i tales que $n_0+n_1+n_2 = 0$ y

$$\lambda(t) = g\begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0\\ 0 & t^{n_1} & 0\\ 0 & 0 & t^{n_2}\end{pmatrix}g^{-1}. \tag{2.3}$$

Demostración. Un subgrupo a un parámetro de $SL(3,\mathbb{C})$ define una representación de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^4$, así que la prueba de esta proposición es análoga a la prueba de la proposición (1.10). □

Con este resultado y usando (1.14) y (1.12) tenemos la siguiente:

Proposición 2.6. *Un punto $X \in \mathscr{F}_d$ es inestable para la acción descrita en (2.2) si, y sólo si,*

$$\mu(gX, \lambda) > 0$$

para algún $g \in SL(3,\mathbb{C})$ y algún subgrupo a 1-parámetro λ diagonal.

Ahora necesitamos fijar una función longitud en $\Gamma(SL(3,\mathbb{C})$ para aplicar el Teorema (1.15).

En la siguiente proposición definimos dicha función longitud y demostramos que, efectivamente, satisface las propiedades requeridas en la sección 1.3.

Proposición 2.7. *Si*

$$\lambda(t) = g \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} g^{-1}$$

es un subgrupo a 1-parámetro de $SL(3,\mathbb{C})$, entonces definimos la función real no-negativa

$$\| \ \| : \Gamma(SL(3,\mathbb{C})) \to \mathbb{R}$$

por

$$\|\lambda(t)\| = \left\| g \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} g^{-1} \right\| = \sqrt{n_0^2 + n_1^2 + n_2^2}.$$

La función $\| \ \|$ satisface lo siguiente:

a) para todo $\lambda \in \Gamma(G)$ y $g \in G$, $\|g\lambda g^{-1}\| = \|\lambda\|$,

b) si T es un toro maximal de G, existe una forma bilineal, entero-valuada, definida positiva $(,)$ en $\Gamma(T)$ tal que $(\lambda, \lambda) = \|\lambda\|^2$ para todo $\lambda \in \Gamma(T)$.

Demostración. La parte $a)$ de la proposición es evidente. Es consecuencia de la definición de $\| \ \|$.

Ahora demostramos la parte $b)$ de la proposición.

Sea T un toro maximal de $SL(3,\mathbb{C})$. Todo toro maximal de $SL(3,\mathbb{C})$ es isomorfo al subgrupo formado por las matrices diagonales, entonces existe $h \in SL(3,\mathbb{C})$ tal que

$$\Gamma(T) = \left\{ \lambda(t) = h \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} h^{-1} : n_i \in \mathbb{Z}, n_0 + n_1 + n_2 = 0 \right\},$$

podemos considerar a $\Gamma(T)$ como un $\mathbb{Z}-$módulo con el producto de matrices y la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \Gamma(T) &\to \Gamma(T) \\ (m, \lambda(t)) &\mapsto m\lambda(t) = \lambda(t^m). \end{aligned}$$

Definimos la siguiente forma

$$\begin{gathered} (\ ,\ ) : \Gamma(T) \times \Gamma(T) \to \mathbb{Z} \\ \left(h \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} h^{-1}, h \begin{pmatrix} t^{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{m_2} \end{pmatrix} h^{-1} \right) \mapsto n_0 m_0 + n_1 m_1 + n_2 m_2, \end{gathered}$$

es claro que esta forma es bilineal, entero-valuada, definida positiva y

$$(\lambda(t), \lambda(t)) = \|\lambda\|^2.$$

Por lo tanto $\| \ \|$ define una función de longitud en $\Gamma(SL(3,\mathbb{C}))$. □

Para terminar este capítulo mostraremos una base del cono afín del espacio de foliaciones (i.e $H^0(\mathbb{CP}^2, \mathscr{T}\mathbb{CP}^2(d-1))$) que satisface la proposición 1.10.

Sea

$$\lambda(t) = g \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} g^{-1}$$

un subgrupo a 1-parámetro de $SL(3,\mathbb{C})$.

Los campos monomiales

$$z_0^i z_1^j z_2^k \frac{\partial}{\partial z_l}$$

donde $0 \leq i,j,k \leq d$ y $0 \leq l \leq 2$ generan el espacio $H^0(\mathbb{CP}^2, \mathscr{T}\mathbb{CP}^2(d-1))$ y satisfacen:

$$\begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} z_0^i z_1^j z_2^k \frac{\partial}{\partial z_l} = t^{n_l - n_0 i - n_1 j - n_2 k} z_0^i z_1^j z_2^k \frac{\partial}{\partial z_l}.$$

Entonces el campo

$$g(z_0^i z_1^j z_2^k \frac{\partial}{\partial z_l})$$

satisface

$$\begin{aligned} g\begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} g^{-1} g(z_0^i z_1^j z_2^k \frac{\partial}{\partial z_l}) &= \\ g(t^{n_l - n_0 i - n_1 j - n_2 k} z_0^i z_1^j z_2^k \frac{\partial}{\partial z_l}) &= \\ t^{n_l - n_0 i - n_1 j - n_2 k} g(z_0^i z_1^j z_2^k \frac{\partial}{\partial z_l}). & \end{aligned}$$

Por lo tanto el conjunto de generadores

$$\{g(z_0^i z_1^j z_2^k \frac{\partial}{\partial z_l})\}_{0 \leq i,j,k \leq d \quad 0 \leq l \leq 2},$$

módulo el campo radial forman la base deseada.

Definición 2.8. *El entero $n_l - n_0 i - n_1 j - n_2 k$ es* ***el peso*** *de*

$$g(z_0^i z_1^j z_2^k \frac{\partial}{\partial z_l}),$$

respecto a la acción de λ. Una foliación X es ***inestable respecto a λ o "λ-inestable"*** *si los pesos de X respecto a la acción de λ son mayores que cero.*

Capítulo 3

Convexo asociado a una foliación

Lema 3.1. *Sea*

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{C}^* &\to SL(3,\mathbb{C}) \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

un subgrupo a 1-parámetro de $SL(3,\mathbb{C})$, entonces el subgrupo parábolico $P(\lambda)$ (ver sección 1.3) es:

1. *el subgrupo de matrices triángulares superiores de $SL(3,\mathbb{C})$ si $n_0 > n_1 > n_2$.*
2. *el subgrupo*

$$\left\{ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \in SL(3,\mathbb{C}) : g_{31} = g_{32} = 0 \right\}$$

si $n_0 = n_1 > n_2$.

Demostración. Recordemos que

$$P(\lambda) = \{g \in SL(3,\mathbb{C}) : \lim_{t \to 0} \lambda(t) g \lambda^{-1}(t) \quad \text{existe en SL(3,}\mathbb{C}\text{)}\}.$$

Sea

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

un elemento de $SL(3,\mathbb{C})$, entonces

$$\lambda(t)g\lambda^{-1}(t) = \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{-n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-n_2} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} g_{11} & t^{n_0-n_1}g_{12} & t^{n_0-n_2}g_{13} \\ t^{n_1-n_0}g_{21} & g_{22} & t^{n_1-n_2}g_{23} \\ t^{n_2-n_0}g_{31} & t^{n_2-n_1}g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Si $n_0 > n_1 > n_2$, entonces $n_1 - n_0 < 0$, $n_2 - n_0 < 0$ y $n_2 - n_1 < 0$.
Si $n_0 = n_1 > n_2$, entonces $n_2 - n_0 < 0$ y $n_2 - n_1 < 0$.
Por lo tanto el límite

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)g\lambda^{-1}(t)$$

existe si, y sólo si, $g_{21} = g_{31} = g_{32} = 0$ o si, y sólo si, $g_{31} = g_{32} = 0$, respectivamente. □

Proposición 3.2. *Si X es un punto inestable para la acción (2.2) entonces existe $g \in SL(3,\mathbb{C})$ tal que la función de Kempf f_{gX} alcanza su máximo en un subgrupo diagonal único.*

Demostración. Sea X un punto inestable para la acción (2.2). Entonces existen un subgrupo a 1-parámetro diagonal

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix},$$

donde $n_0 \geq n_1 \geq n_2$ y $g \in SL(3,\mathbb{C})$ tal que f_X alcanza su valor máximo en $g\lambda g^{-1}$.

Como la norma de un subgrupo a 1-parámetro es invariante por conjugación y por la parte (3) del Lema (1.12) tenemos:

$$f_X(g\lambda g^{-1}) = \frac{\mu(X, g\lambda g^{-1})}{\|g\lambda g^{-1}\|} = \frac{\mu(gX,\lambda)}{\|\lambda\|} = f_{gX}(\lambda).$$

Sea $\alpha \in \Gamma(SL(3,\mathbb{C}))$, entonces

$$f_{gX}(\alpha) = f_X(g\alpha g^{-1}) \leq f_X(g\lambda g^{-1}) = f_{gX}(\lambda),$$

por lo tanto f_{gX} alcanza el máximo en λ.

Sea T el toro maximal de $P_{gX} = P(\lambda)$ que consta de matrices diagonales, entonces para todo $t \in \mathbb{C}^*$

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} \in T.$$

Por lo tanto, por la parte (3) del Teorema (1.15), este subgrupo diagonal donde f_{gX} alcanza el máximo, es único. □

El objetivo de esta sección es asociarle a cada foliación X una región en el plano cuyos puntos corresponden a los subgrupos a 1-parámetro diagonales respecto a los cuales X es inestable y encontrar entre ellos el que maximiza la función de Kempf.

Sea X una foliación de $\mathbb{CP}^2$ de grado d y

$$\Gamma((\mathbb{C}^*)^3)$$

el conjunto de subgrupos a 1-parámetro diagonales de $SL(3,\mathbb{C})$. Este conjunto tiene estructura de $\mathbb{Z}-$módulo con la multiplicación de matrices y la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \Gamma((\mathbb{C}^*)^3) &\to \Gamma((\mathbb{C}^*)^3) \\ (m, \lambda(t)) &\mapsto m\lambda(t) = \lambda(t^m). \end{aligned}$$

Tenemos, entonces, el siguiente isomorfismo de $\mathbb{Z}-$módulos

$$\begin{aligned} \Gamma((\mathbb{C}^*)^3) &\to \mathbb{Z}^2 \\ \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-n_0-n_1} \end{pmatrix} &\mapsto (n_0, n_1). \end{aligned}$$

Consideraremos $\Gamma((\mathbb{C}^*)^3)$ como el espacio vectorial real $V = \mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ dotado con la norma

$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2}, \tag{3.1}$$

esta norma es la definida en (2.7) para los subgrupos a 1-parámetro de $SL(3,\mathbb{C})$.

A cada uno de los elementos de $\mathscr{F}_d$ podemos asociarle un convexo de $\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera:

Recordemos que una foliación X se escribe como una combinación lineal finita de campos monomiales de grado d. Los campos monomiales podemos escribirlos de la siguiente forma

$$z_0^{i+1}z_1^jz_2^k\frac{\partial}{\partial z_0}$$
$$z_0^iz_1^{j+1}z_2^k\frac{\partial}{\partial z_1}$$
$$z_0^iz_1^jz_2^{k+1}\frac{\partial}{\partial z_2},$$

donde $i+j+k=d-1$. Entonces

$$\begin{pmatrix} t^{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-x_1-x_2} \end{pmatrix} z_0^{i+1}z_1^jz_2^k\frac{\partial}{\partial z_0} = t^{(k-i)x_1+(k-j)x_2}z_0^{i+1}z_1^jz_2^k\frac{\partial}{\partial z_0}$$

$$\begin{pmatrix} t^{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-x_1-x_2} \end{pmatrix} z_0^iz_1^{j+1}z_2^k\frac{\partial}{\partial z_1} = t^{(k-i)x_1+(k-j)x_2}z_0^iz_1^{j+1}z_2^k\frac{\partial}{\partial z_1}$$

$$\begin{pmatrix} t^{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-x_1-x_2} \end{pmatrix} z_0^iz_1^jz_2^{k+1}\frac{\partial}{\partial z_2} = t^{(k-i)x_1+(k-j)x_2}z_0^iz_1^jz_2^{k+1}\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Por lo tanto, para cada uno de los campos monomiales distintos de cero de X, tenemos definida la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \alpha_{ijk} : V &\to \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) &\mapsto (k-i)x_1+(k-j)x_2, \end{aligned}$$

cuya imagen es el peso correspondiente del campo monomial por la acción del subgrupo diagonal correspondiente a (x_1,x_2). Esta aplicación lineal sólo depende de los enteros i,j,k.

Cada una de estas funciones define el semiplano

$$C_{ijk} = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : \alpha_{ijk}(x_1,x_2)\geq 1\},$$

entonces

$$C_{ijk}\cap\mathbb{Z}^2$$

es el conjunto formado por los subgrupos a un parámetro diagonales de $SL(3,\mathbb{C})$ respecto a los cuales el campo monomial definido por los enteros i,j,k tiene peso positivo.

Finalmente, el convexo C_X asociado a X es es la intersección de los semiplanos definidos por los campos monomiales distintos de cero de X, es decir,

$$C_X\cap\mathbb{Z}^2$$

es el conjunto formado por los subgrupos a un parámetro diagonales de $SL(3,\mathbb{C})$ respecto a los cuales todos los campos monomiales distintos de cero de X tienen peso positivo.

Mencionamos las siguientes cuatro propiedades de C_X, las tres primeras son consecuencia directa de la definición de C_X y la tercera es una nueva caracterización de foliación inestable.

1. Si $C_X\neq\emptyset$ entonces $C_X\cap\mathbb{Z}^2\neq\emptyset$.
2. Para todo $X\in\mathscr{F}_d$, $(0,0)$ no pertenece a C_X.
3. Si $a\in\mathbb{C}^*$ entonces $C_X=C_{aX}$.
4. La foliación X es inestable respecto a $SL(3,\mathbb{C})$ si, y sólo si, existe $g\in SL(3,\mathbb{C})$ tal que $C_{gX}\neq\emptyset$.

Demostración. Sabemos que X es inestable si, y sólo si, existen $g\in SL(3,\mathbb{C})$ y

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix},$$

donde $n_0\geq n_1\geq n_2$, tal que

$$\mu(X,g^{-1}\lambda g)>0.$$

Por la parte (3) del Lema 1.12 tenemos que $\mu(X,g^{-1}\lambda g)=\mu(gX,\lambda)$. Y $\mu(gX,\lambda)>0$ se satisface si, y sólo si, $\lambda\in C_{gX}$. □

Sea $min\{\alpha_{ijk}(x_1,x_2)\}$ el mínimo valor tomado en (x_1,x_2) por las funciones lineales definidas por los campos monomiales distintos de cero de X, entonces la función de Kempf asociada a X (ver Teorema 1.15), restringida a los subgrupos a un parámetro diagonales de $SL(3,\mathbb{C})$, es

$$\begin{aligned} f_X : \Gamma((\mathbb{C}^*)^3) &\to \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) &\mapsto \frac{min\{\alpha_{ijk}(x_1,x_2)\}}{\|(x_1,x_2)\|}. \end{aligned}$$

Teorema 3.3. *El máximo de la función*

$$\begin{aligned} f_X : \mathbb{C}_X &\to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto \frac{min\{\alpha_{ijk}(x_1, x_2)\}}{\|(x_1, x_2)\|} \end{aligned}$$

se alcanza en el punto de C_X más cercano a $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ respecto a la norma definida en (3.1).

Demostración. C_X es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^2$ que no contiene a 0. Por lo tanto el punto más cercano a 0, con la norma definida en (3.1), en esta región es único y se encuentra en la frontera de C_X. Llamemos a este punto v_0.

Sea $v \in V$ y $min\{\alpha_{ijk}(v)\} = m > 0$, entonces $min\{\alpha_{ijk}(m^{-1}v)\} = 1$ así que $m^{-1}v \in C_X$. Como f_X es invariante en los rayos, tenemos:

$$f_X(v) = f_X(m^{-1}v) = \frac{1}{\|m^{-1}v\|} \leq \frac{1}{\|v_0\|} = f_X(v_0).$$

Por lo tanto el máximo se alcanza en v_0. □

Lema 3.4. *Sea X una foliación de $\mathbb{CP}^2$ y C_X su convexo asociado.*
El punto más cercano en C_X a $(0,0)$ con la norma de $\mathbb{R}^2$ definida en (3.1) satisface una de las siguientes condiciones:

1. *es un vértice del convexo*
2. *es el punto más cercano a $(0,0)$ sobre una de las rectas que forman la frontera del convexo.*

Demostración. Sabemos que el punto más cercano a $(0,0)$ en C_X se encuentra en la frontera de este convexo, así que nos restringiremos a dicha frontera para encontrar el punto que minimiza la función $\| \ \|$.

La función $\| \ \|$ restringida a una recta tiene un único valor mínimo que corresponde al punto sobre la recta más cercano a $(0,0)$.

Si el segmento de recta que forma parte de la frontera de C_X no contiene el punto de esta recta más cercano a $(0,0)$, entonces la función norma restringida a este segmento es creciente o decreciente, en este caso el mínimo de la función restringida se alcanza en un vértice del convexo.

La conclusión es que los candidatos para alcanzar la mínima norma son los vértices de C_X o los puntos en las rectas más cercanos a 0 que se encuentren en la región. □

El punto de norma mínima sobre la recta $(k-i)x_1 + (k-j)x_2 = 1$ es

$$\left(\frac{-3i+d-1}{(i-j)^2+(j-k)^2+(k-i)^2}, \frac{-3j+d-1}{(i-j)^2+(j-k)^2+(k-i)^2}\right).$$

El vértice de C_X definido por la intersección de las rectas

$$\begin{aligned} (k_1 - i_1)x_1 + (k_2 - j_2)x_2 &= 1 \\ (k_2 - i_2)x_1 + (k_2 - j_2)x_2 &= 1 \end{aligned}$$

es

$$\left(\frac{k_2 - k_1 + j_1 - j_2}{(k_1-i_1)(k_2-j_2)-(k_1-j_1)(k_2-i_2)}, \frac{i_2 - i_1 + k_1 - k_2}{(k_1-i_1)(k_2-j_2)-(k_1-j_1)(k_2-i_2)}\right).$$

Por lo tanto existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $rv_0 \in C_X \cap \mathbb{Z}^2$. Entonces rv_0 maximiza la función de Kempf asociada X restringida a los subgrupos a 1-parámetro diagonales de $SL(3,\mathbb{C})$.

Definición 3.5. *El subgrupo a un parámetro diagonal, indivisible que maximiza la función f_X se dice* ***el peor subgrupo a 1-parámetro diagonal de*** *X.*

En el apéndice podemos encontrar un programa de computadora escrito en lenguaje C que proporciona, dada una foliación, su peor subgrupo a 1-parámetro diagonal.

3.1 Foliaciones λ – Riccati

Sea

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{C}^* &\to SL(3,\mathbb{C}) \\ t &\mapsto g \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} g^{-1} \end{aligned}$$

un subgrupo a un parámetro y $(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{CP}^2$. Entonces

$$\left\{\lambda(t)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C}^*\right\}$$

es una solución algebraica que pasa por el punto $(a_0 : a_1 : a_2)$ de la foliación de grado uno

$$X_\lambda = g\begin{pmatrix} n_0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{pmatrix} g^{-1}\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

A la foliación X_λ la llamaremos la foliación asociada al subgrupo a un parámetro λ.

Dada una foliación de este tipo, por el Teorema de Resolución de Seidenberg (ver apéndice A), existe una fibración racional en $\widetilde{\mathbb{CP}^2}$ ($= \mathbb{CP}^2$ con un número finito de puntos explotados) cuyas fibras son las hojas de X_λ separadas mediante las explosiones.

Definición 3.6. *Sea X una foliación de grado d y λ un subgrupo a 1-parámetro de $SL(3,\mathbb{C})$. Sea*

$$F : \widetilde{\mathbb{CP}^2} \to \mathbb{CP}^1$$

la fibración racional definida por el Teorema de Resolución de Seidenberg para X_λ. Denotemos por $\widetilde{X}$ la foliación X levantada a $\widetilde{\mathbb{CP}^2}$.

*Diremos que X es λ-**Riccati** si las fibras de F, excepto un número finito, son transversales a las hojas de la foliación $\widetilde{X}$ y, además, las fibras no transversales son hojas de $\widetilde{X}$.*

Como mencionamos en la introducción, G. Kempf conjeturó que si λ es el PEOR subgrupo a 1-parámetro de una foliación inestable X, entonces X es $\lambda -$ Riccati. Aquí mostramos un ejemplo donde esto no se satisface.

Sea

$$X = \begin{pmatrix} z_0^2 z_1^2 z_2 \\ z_0 z_1^4 + z_2^5 \\ z_0 z_2^4 + z_1^4 z_2 \end{pmatrix}$$

esta foliación es inestable de grado 5 y su PEOR subgrupo uniparamétrico es

$$\lambda = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix},$$

el punto $p_0 = (1:0:0)$ es dicríto para X_λ y singular para X. Después de hacer una explosión en p_0 en la carta afín U_0 bajo el cambio

$$z_1 = w_1$$
$$z_2 = w_1 w_2$$

tenemos que

$$\tilde{X}_0 = \begin{pmatrix} -w_1^2 w_2^5 + w_1(w_2 - 1) \\ w_1(w_2^6 - w_2) + w_2 - w_2^4 \end{pmatrix} \quad \tilde{X}_{\lambda 0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

así que los puntos de tangencia entre estos campos son aquellos que satisfacen la ecuación

$$w_1(w_2^6 - w_2) + w_2 - w_2^4 = 0$$

en estos puntos las hojas no son transversales, por lo tanto X no es $\lambda -$ Riccati.

Capítulo 4

Singularidades

Definición 4.1. *Sea $p \in \mathbb{CP}^2$ una singularidad aislada de X (ver definición 2.4). Una* ***separatriz*** *de X por p es una curva holomorfa irreducible C (posiblemente singular) que pasa por p y es invariante por X. Una singularidad es* ***dicrítica*** *si pasan por ella una infinidad de separatrices.*

Definición 4.2. *Sea X una foliación y $p \in Sing(X)$. Sea*

$$\begin{pmatrix} F(z_1, z_2) \\ G(z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

un generador local de X alrededor de $p = (0,0)$. Definimos la ***multiplicidad de*** *p como*

$$m(p) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_p}{< F, G >},$$

donde $\mathscr{O}_p$ es el álgebra local de X en p y $< F, G >$ es el ideal generado por F y G como elementos de $\mathscr{O}_p$.

Proposición 4.3. *(ver [1] pag. 28) Sea X una foliación de $\mathbb{CP}^2$ de grado d con singularidades aisladas, entonces*

$$\sum_{p \in Sing(X)} m(p) = d^2 + d + 1.$$

Mencionamos ahora un Teorema demostrado por G. Kempf y X. Gómez-Mont que relaciona las foliaciones con singularidades de multiplicidad uno y foliaciones estables.

Teorema 4.4. *(ver [2]) Sea X una foliación de $\mathbb{CP}^2$ de grado d con singularidades aisladas. Si $m(p) = 1$ para todo $p \in Sing(X)$, entonces X es estable para la acción*

$$PGL(3, \mathbb{C}) \times \mathscr{F}_d \to \mathscr{F}_d$$

$$(g, X) \mapsto gX = DgX \circ (g^{-1}). \tag{4.1}$$

Definición 4.5. *Sea X una foliación de $\mathbb{CP}^2$ con singularidades aisladas y sea $p \in Sing(X)$. Sea*

$$\begin{pmatrix} F(z_1, z_2) \\ G(z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

un generador local de X alrededor de $p = (0,0)$. Definimos la ***multiplicidad algebraica de*** *p como el orden de anulamiento de $(0,0)$ en el generador local, es decir, el mínimo grado de los términos distintos de cero de F y G.*

El siguiente Lema establece la relación entre los puntos singulares de una foliación inestable y la definida por un subgrupo a 1-parámetro respecto al cual es inestable.

Sean

$$p_0 = (1:0:0)$$
$$p_1 = (0:1:0)$$
$$p_2 = (0:0:1).$$

Lema 4.6. *Sea*

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix}$$

un subgrupo a 1-parámetro y

$$X = \begin{pmatrix} P(z_0, z_1, z_2) \\ Q(z_0, z_1, z_2) \\ R(z_0, z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

una foliación $\lambda -$ inestable de grado d, mayor o igual que 1.

Si $n_i \geq n_j$ para $j \neq i$ entonces el punto p_i es dicrítico para la foliación asociada a λ y este punto es singular para X.

Demostración. Demostraremos el caso en que $n_0 > n_1 > n_2$, los demas casos en que los exponentes son distintos se demuestran de manera análoga. El caso en que dos son iguales lo trataremos después.

Una ecuación para la primera integral de la foliación asociada a λ,

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} n_0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

es

$$F(z_0 : z_1 : z_2) = z_0^{n_2 - n_1} z_1^{n_0 - n_2} z_2^{n_1 - n_0}.$$

Por hipótesis $n_2 - n_1 < 0$, $n_0 - n_2 > 0$ y $n_1 - n_0 < 0$, entonces las soluciones algebraicas de X_λ son de la forma

$$k_0 z_1^{n_0 - n_2} - k_1 z_0^{n_1 - n_2} z_2^{n_0 - n_1} = 0$$

con $k_i \in \mathbb{C}$.

Así que las soluciones pasan por el punto $p_0 = (1:0:0)$, por lo tanto p_0 es dicrítico para X_λ.

Supongamos que p_0 no es punto singular de X. Entonces el coeficiente de

$$z_0 \frac{\partial}{\partial z_1}$$

o el coeficiente de

$$z_0 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

en la expresión de X es distinto de cero.

La acción de λ en estos campos monomiales es

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} z_0 \frac{\partial}{\partial z_1} = t^{n_1 - n_0 d} z_0 \frac{\partial}{\partial z_1}$$

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} z_0 \frac{\partial}{\partial z_2} = t^{n_2 - n_0 d} z_0 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Como $n_0 > n_1 > n_2$ y $n_0 + n_1 + n_2 = 0$, entonces $n_0 > 0$ y, por lo tanto,

$$n_0 d \geq n_0 > n_1.$$

Entonces $n_1 - n_0 d < 0$. Este es el peso correspondiente a $z_0 \frac{\partial}{\partial z_1}$ respecto a λ.

Análogamente

$$n_0 d \geq n_0 > n_2.$$

Esta última desigualdad implica que $n_2 - n_0 d < 0$ y este es el peso correspondiente a $z_0 \frac{\partial}{\partial z_2}$ respecto a λ.

En cualquiera de los dos casos se contradice el hecho de que X es $\lambda - inestable$. Por lo tanto p_0 es singular para X.

Con esto hemos probado el Lema para el caso en que los exponentes del subgrupo a un parámetro son distintos.

Ahora veremos el caso en que tenemos dos exponentes iguales.

Supongamos $n_1 = n_2$, entonces

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{-2n_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_1} \end{pmatrix}.$$

Trabajaremos con su subgrupo indivisible equivalente

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{2} & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Las soluciones irreducibles de X_λ son

$$k_1 z_1 - k_2 z_2 = 0,$$

donde $k_i \in \mathbb{C}$. Entonces todas las soluciones pasan por p_0.

La demostración de que es punto singular de X se hace de manera análoga al caso en que los exponentes de λ son distintos.

□

Capítulo 5

Análisis de inestabilidad de foliaciones

5.1 Foliaciones de grado O

La dimensión de $\mathscr{F}_0$ es 2. Estas foliaciones son aquellas que tienen un punto singular y sus hojas son las rectas que pasan por este punto, entonces este espacio se identifica con $\mathbb{CP}^2$.

La acción de un subgrupo a 1-parámetro

$$g \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} g^{-1}$$

en una foliación de grado 0 es simplemente aplicar la transformación que define en el punto que corresponde a la foliación.

Teorema 5.1. *Toda foliación X de grado 0 es inestable respecto a la acción (2.2). Si λ es el PEOR subgrupo a 1-parámetro para una foliación X, entonces todas las hojas de X y X_λ coinciden.*

Demostración. Para todo punto $(a : b : c) \in \mathbb{CP}^2$ existe $g \in SL(3, \mathbb{C})$ tal que:

$$g \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Todas las foliaciones de este tipo son inestable; basta tomar un subgrupo a 1-parámetro con el segundo exponente positivo para exhibir inestabilidad. Por lo tanto todas las foliaciones de grado 0 son inestables.

El PEOR subgrupo a 1-parámetro de

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

la foliación X_λ tiene una singularidad dicrítica en p_1 y una curva de singularidades en $y = 0$; y sus hojas son las curvas $k_1x - k_2z = 0$ con $k_i \in \mathbb{C}$, es decir, todas las rectas que pasan por p_1.

Entonces todas las hojas de X y X_λ coinciden. □

5.2 Foliaciones de grado 1

Un elemento de $\mathscr{F}_1$ es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)\frac{\partial}{\partial x} + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)\frac{\partial}{\partial y} + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)\frac{\partial}{\partial z} \\ + k(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}) \\ = (A + kI)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde A es la matriz determinada por las entradas (a_{ij}) y $k \in \mathbb{C}$. Identificaremos la foliación X con la matriz cuadrada A.

En este caso la acción (2.2) del grupo $SL(3,\mathbb{C})$ sobre $\mathscr{F}_1$ es la acción sobre las matrices cuadradas de tamaño 3 módulo la suma de un múltiplo de la matriz identidad.

$$\begin{aligned} SL(3,\mathbb{C}) \times \mathscr{F}_1 &\to \mathscr{F}_1 \\ (g, A + kI) &\mapsto g(A + kI)g^{-1} = gAg^{-1} + kI. \end{aligned}$$

Hemos visto ya que una foliación de grado uno, vista como una matriz, es única módulo un múltiplo distinto de cero y módulo la suma de un múltiplo de la matriz identidad, y como la acción de grupo en este caso es conjugación entonces nuestro estudio se reducirá a estudiar los distintos bloques de Jordan de una matriz de tamaño 3.

Observación: La dimensión del grupo $SL(3,\mathbb{C})$ visto como variedad algebraica es 8 y $\dim\mathscr{F}_1 = 7$, entonces podemos concluir que, en este caso, no habrá puntos estables, pues ninguna órbita puede tener la misma dimensión que el grupo.

Teorema 5.2. *Sea*

$$\begin{aligned} SL(3,\mathbb{C}) \times \mathscr{F}_1 &\to \mathscr{F}_1 \\ (g, X) &\mapsto gXg^{-1} \end{aligned}$$

la acción de $SL(3,\mathbb{C})$ en las foliaciones de $\mathbb{CP}^2$ de grado 1, entonces el cono nulo de esta acción consta de aquellas foliaciones cuyas matrices correspondiente tienen tres valores propios iguales, es decir

$$X = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

es inestable si, y sólo si, existe $g \in SL(3,\mathbb{C})$ y $k \in \mathbb{C}$ tal que $gA + kI$ corresponde a alguna de las siguientes matrices.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El cociente de Mumford (ver definición 1.7) para esta acción es $\mathbb{CP}^1$.

Demostración. Primero mostraremos los puntos inestables haciendo uso del método descrito de los subgrupos a 1-parámetro.

Si consideramos el subgrupo a 1-parámetro

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, A_1) &= min\{n_0 - n_1, n_1 - n_2\} \\ \mu(\lambda, A_2) &= n_0 - n_1 \end{aligned}$$

Basta tomar enteros n_i tales que $n_0 \geq n_1 \geq n_2$ para que las funciones anteriores sean mayores que cero, por lo tanto, A_1 y A_2 son puntos inestables.

Supongamos que la matriz $A = (a_{ij})$ es inestable, entonces existen

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix}$$

subgrupo a 1-parámetro diagonal tal que $n_0 \geq n_1 \geq n_2$ y $g \in SL(3, \mathbb{C})$ tal que:

$$\lim_{t \to 0} g\lambda(t)g^{-1}Ag\lambda^{-1}(t)g^{-1} = 0.$$

La acción de λ sobre cualquier matriz $A \in \mathscr{F}_1 = \mathbb{CP}^7$ es:

$$\lambda(t)(a_{ij}) = (t^{n_i - n_j} a_{ij})$$

entonces, para que se satisfaga el límite anterior, A debe ser conjugada a una matriz triangular superior con ceros en la diagonal.

Por lo tanto A tiene valores propios cero. Entonces el cono nulo de la acción lo forman las foliaciones cuyas matrices correspondientes tienen tres valores propios iguales.

Con los siguientes Lemas se concluye que el cociente de Mumford para la acción en las foliaciones de grado 1 es $\mathbb{CP}^1$.

Lema 5.3. *Sea*

$$\begin{aligned} SL(3, \mathbb{C}) \times ProjM_{3,3}(\mathbb{C}) &\to ProjM_{3,3}(\mathbb{C}) \\ (g, A) &\mapsto gAg^{-1} \end{aligned}$$

la acción por conjugación de $SL(3, \mathbb{C})$ sobre el espacio proyectivo de las matrices cuadradas de tamaño 3 con coeficientes complejos.

Entonces el cociente de Mumford de esta acción es el espacio proyectivo ponderado $\mathbb{P}(1, 2, 3)$.

Demostración. Empezaremos recordando la definición del espacio proyectivo ponderado

$$\mathbb{CP}(k_0, ..., k_n),$$

donde k_i es un natural. Este espacio es el cociente de la siguiente acción:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} &\to \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \\ (l, (z_0, ..., z_n)) &\mapsto (l^{k_0} z_0, ..., l^{k_i} z_i, ..., l^{k_n} z_n). \end{aligned}$$

Para el caso donde la acción del grupo $SL(3, \mathbb{C})$ en el espacio proyectivo de las matrices $ProjM_{3,3}(\mathbb{C})$ es la conjugación los puntos inestables corresponden a las matrices con tres

valores propios iguales a cero. La prueba es análoga a la que se hizo para demostrar la primera parte del Teorema 5.2.

Si

$$det(tI - A) = t^3 + a_0 t^2 + a_1 t + a_2,$$

entonces la aplicación del buen cociente está dada por:

$$\begin{aligned} Pol : ProjM_{3,3}(\mathbb{C})^{ss} &\to \mathbb{CP}(1, 2, 3) \\ A &\mapsto (a_0, a_1, a_2). \end{aligned}$$

La aparición del proyectivo ponderado es consecuencia del siguiente hecho

$$Pol(A) = (a_0, a_1, a_2) \Longrightarrow Pol(lA) = (la_0, l^2 a_1, l^3 a_2).$$

□

Lema 5.4. *El espacio $\mathscr{F}_1$ de foliaciones de $\mathbb{CP}^2$ de grado 1 es isomorfo a la hipersuperficie de $ProjM_{3,3}(\mathbb{C})$ definida por*

$$ProjM_{3,3}(\mathbb{C})_0 = \{A \in ProjM_{3,3}(\mathbb{C}) : trazaA = 0\}.$$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} ProjM_{3,3}(\mathbb{C})_0 &\to \mathscr{F}_1 \\ A &\mapsto [A], \end{aligned}$$

la aplicación que manda A a su clase $[A]$, donde esta clase de equivalencia es la definida por la suma de un múltiplo de la matriz identidad.

Lo único que debemos notar para tener claro el isomorfismo es que en $[A]$ existe uno y sólo un elemento con traza igual a 0, a saber $A_{tr0} = A - \frac{\text{traza}A}{3} I$. □

Lema 5.5. *El cociente de Mumford para la acción*

$$\begin{aligned} SL(3, \mathbb{C}) \times \mathscr{F}_1 &\to \mathscr{F}_1 \\ (g, A) &\mapsto gAg^{-1} \end{aligned}$$

es $\mathbb{CP}(2, 3)$.

Demostración. El conjunto $ProjM_{3,3}(\mathbb{C})_0 \subset ProjM_{3,3}(\mathbb{C})$ es invariante por la acción de conjugación de $SL(3,\mathbb{C})$ y si restringimos esta acción a esta hipersuperficie entonces

$$ProjM_{3,3}(\mathbb{C})_0^{ss} = ProjM_{3,3}(\mathbb{C})_0 \cap ProjM_{3,3}(\mathbb{C})^{ss},$$

así que tenemos lo siguiente

$$\begin{array}{ccc} ProjM_{3,3}(\mathbb{C})_0^{ss} & \hookrightarrow & ProjM_{3,3}(\mathbb{C})^{ss} \\ Pol \downarrow & & \downarrow Pol \\ \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{CP}(1,2,3) : z_0 = 0\} & \hookrightarrow & \mathbb{CP}(1,2,3), \end{array}$$

recordemos que Pol es la aplicación que manda una matriz a los coeficientes de su polinomio característico y el primero de estos es precisamente la traza de la matriz, así que la aplicación Pol de la izquierda del diagrama anterior está bien definida y hace conmutar el digrama.

Por lo tanto $\{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{CP}(1,2,3) : z_0 = 0\}$ es el cociente de Mumford para la acción por conjugación de $SL(3,\mathbb{C})$ en $ProjM_{3,3}(\mathbb{C})_0$.

La aplicación

$$\begin{aligned} \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{CP}(1,2,3) : z_0 = 0\} &\to \mathbb{CP}(2,3) \\ (0 : a_1 : a_2) &\mapsto (a_1 : a_2) \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Así que $\mathbb{CP}(2,3)$ es el cociente de Mumford para la acción de $SL(3,\mathbb{C})$ en $\mathscr{F}_1$. □

Lema 5.6. *El espacio proyectivo ponderado $\mathbb{CP}(2,3)$ es isomorfo a $\mathbb{CP}^1$.*

Demostración. Definiremos el isomorfismo en la carta coordenada $U_0 = \{(x,y) : y \neq 0\} \subset \mathbb{CP}(2,3)$ luego lo extenderemos:

$$\begin{aligned} \phi_0 : U_0 &\to \mathbb{A}^1 \\ (x : y) &\mapsto \frac{x^3}{y^2} \end{aligned}$$

esta aplicación está bien definida pues

$$\phi_0(k^2x : k^3y) = \frac{k^6x^3}{k^6y^2}.$$

Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces $z^{\frac{1}{3}} = c\delta_i$, donde δ_i es una raiz cúbica de la unidad. En el espacio proyectivo ponderado tenemos:

$$(c\delta_i : 1) = (c\delta_i^3, \delta_i^3) = (c, 1)$$

para $i = 0, 1, 2$, por lo tanto el conjunto $\phi_0^{-1}(z)$ tiene uno y sólo un elemento, a saber $(z^{\frac{1}{3}}, 1)$.

Esto demuestra que ϕ_0 es un isomorfismo, el cual se extenderá a infinito para el punto $(x : 0)$ y con esto tendremos el isomorfismo de $\mathbb{CP}(2,3)$ a $\mathbb{CP}^1$.

□

La conclusión final es que el cociente de Mumford para la acción en las foliaciones de grado 1 es $\mathbb{CP}^1$.

□

Ahora deseamos analizar la relación entre una foliación inestable y la definida por el subgrupo que maximiza la función del Teorema de Kempf.

Recordemos que un punto $X \in \mathscr{F}_1$ es inestable bajo la acción de $SL(3,\mathbb{C})$ si y sólo si $\mu(gX, \lambda) > 0$ para algún $g \in SL(3,\mathbb{C})$ y para algún λ (1-PS) de la forma:

$$\begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix}.$$

La matriz correspondiente a un punto inestable de $\mathscr{F}_1$ tiene todos sus valores propios 0, por lo tanto es conjugada a alguna de las siguientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 5.7. *El subgrupo a 1-parámetro que maximiza la funcion f_{Y_1}, donde*

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

es

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

La foliación Y_1 es $\lambda -$ Riccati y la representación de monodromía correspodiente es afín.

Demostración. En este caso tenemos las funciones lineales

$$\alpha_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \qquad \alpha_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

El punto de norma mínima de la recta $\alpha_1(x_1, x_2) - 1$ es $(1/2, -1/2)$.

El punto más cercano a $(0, 0)$ sobre la recta $\alpha_2(x_1, x_2) - 1$ es $(0, 1/2)$.

Veamos si estos puntos se encuentran en el convexo C_{Y_1} asociado a Y_1 (ver pag. 19)

$$\begin{aligned} \alpha_1(0, 1/2) - 1 &= -3/2 \\ \alpha_2(1/2, -1/2) - 1 &= -3/2 \end{aligned}$$

los punto más cercanos sobre las rectas no se encuentran en la región, por lo tanto el punto más cercano en la región es el punto $(1, 0)$, este punto es la intersección de las rectas.

Como conclusión tenemos que

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

es el "peor subgrupo a 1-parámetro" para la foliación inestable Y_1.

La foliación inestable

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene un único punto singular de multiplicidad 3 en $p_0 = (1 : 0 : 0)$.

Consideramos el subgrupo a 1-parámetro

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

como el flujo de la foliación

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -z \end{pmatrix},$$

y sus puntos singulares son

$$\begin{aligned} p_0 &= (1 : 0 : 0) \\ p_1 &= (0 : 1 : 0) \\ p_2 &= (0 : 0 : 1). \end{aligned}$$

Esta ecuación tiene como primera integral

$$\begin{aligned} F : \mathbb{CP}^2 &\to \mathbb{CP}^1 \\ (x : y : z) &\mapsto \frac{xz}{y^2}. \end{aligned}$$

Así que las soluciones algebraicas irreducibles de esta ecuación son de la forma $k_1 xz - k_2 y^2 = 0$ con $k_i \in \mathbb{C}$.

Estas soluciones pasan todas por el punto singular p_0 que es el punto singular de Y_1.

Haremos una explosión en este punto para ver la tranversalidad de las soluciones de X_λ con las de Y_1.

Trabajaremos en la carta afín U_0 de $\mathbb{CP}^2$. En esta carta tenemos

$$X_{\lambda_0} = \begin{pmatrix} y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$Y_{10} = \begin{pmatrix} z - y^2 \\ -yz \end{pmatrix}$$

Sean W_{λ_0} y W_{10} las formas correspondientes de las foliaciones en coordenadas afines definidas anteriormente.

Ahora seguimos el proceso de explosiones necesarias para separar las hojas de X_λ e inmediatamente después el mismo proceso para levantar la foliación Y_1:

$$\begin{aligned} W_{\lambda_0} &= 2zdy - ydz \\ &\downarrow y = w_1 \quad z = w_1 w_2 \\ w_2 dw_1 &- w_1 dw_2 \\ &\downarrow w_1 = u \quad w_2 = uv \\ \widetilde{W}_{\lambda_0} &= -u^2 dv \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_{10} &= yzdy + (z - y^2)dz \\
&\downarrow y = w_1 \quad z = w_1 w_2 \\
&w_2^2 dw_1 + (w_1 w_2 - w_1^2)dw_2 \\
&\downarrow w_1 = u \quad w_2 = uv \\
\widetilde{W}_{10} &= (2v^2 - v)dv + (uv - u)dv
\end{aligned}
$$

Así que

$$\widetilde{X}_{\lambda_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{Y}_{10} = \begin{pmatrix} u - uv \\ 2v^2 - v \end{pmatrix}$$

Por lo tanto en esta carta afín las hojas son transversales.

Puesto que $u = 0$ es hoja para la foliación $\widetilde{Y}_{10}$, entonces su monodromía correspondiente tiene un punto fijo en esta hoja, así que es afín (ver apéndice B).

En el infinito, es decir, en $x = 0$ pasa lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\{x = 0\} - \{p_1, p_2\} \subset \mathbb{CP}^2 \quad & \text{es hoja de} \quad X_\lambda \\
& \text{y} \\
\{x = 0\} \subset \mathbb{CP}^2 \quad & \text{no es hoja de} \quad Y_1 \\
& \text{y no contiene puntos singulares de esta foliación}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto Y_1 es $\lambda -$ Riccati.

Proposición 5.8. *El subgrupo a 1-parámetro que maximiza la funcion f_{Y_2}, donde*

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

es

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La foliación Y_2 es $\chi -$ Riccati y tiene monodromía afín.

Demostración. Para definir el convexo asociado a Y_2 tenemos una sola función lineal que corresponde al único campo monomial distinto de cero, a saber

$$
\begin{aligned}
\alpha : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\
\alpha(x_1, x_2) &\mapsto x_1 - x_2.
\end{aligned}
$$

Así que el máximo de la función de Kempf se alcanza en el punto más cercano a $(0,0)$ en la recta $x_1 - x_2 - 1$ con la norma $g(x_1, x_2) = \|(x_1, x_2)\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$. Este punto es $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$

Entonces el subgrupo donde se alcanza el máximo de la función de Kempf f_{Y_2} es

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos la foliación

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Esta foliación se obtiene al incorporarle el conjunto singular $y = 0$ a aquella con un único punto singular en $(1:0:0)$ y que consta de todas las rectas que pasan por él.
Hemos probado que el peor subgrupo a 1-parámetro para esta foliación inestable es

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la foliación correspondiente es

$$X_\chi = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones de ésta están dadas por las curvas $k_1 xy - k_2 z^2 = 0$ donde $k_i \in \mathbb{C}$, así que esta foliación tiene a $(1:0:0)$ y $(0:1:0)$ como singularidades dicríticas (una infinidad de soluciones pasan por estos puntos).

Trabajaremos en la carta afín U_0 de $\mathbb{CP}^2$. En esta carta tenemos:

$$X_{\chi_0} = \begin{pmatrix} -2y \\ -z \end{pmatrix}$$

ahora consideraremos la foliación Y_2 sin el conjunto singular $y = 0$:

$$Y_{20} = \begin{pmatrix} -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Sean W_{χ_0} y W_{20} las formas correspondientes de las foliaciones en coordenadas afines definidas anteriormente.

Ahora seguimos el proceso de explosiones necesarias para separar las hojas de X_χ e inmediatamente después el mismo proceso para levantar la foliación Y_2:

$$\begin{aligned} W_{\chi_0} &= zdy - 2ydz \\ &\downarrow y = w_1 w_2 \quad z = w_2 \\ & w_2 dw_1 - w_1 dw_2 \\ &\downarrow w_1 = uv \quad w_2 = v \\ \widetilde{W}_{\chi_0} &= du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{20} &= zdy - ydz \\ &\downarrow y = w_1 w_2 \quad z = w_2 \\ & dw_1 \\ &\downarrow w_1 = uv \quad w_2 = v \\ \widetilde{W}_{20} &= udv + vdu \end{aligned}$$

Así que

$$\widetilde{X}_{\alpha_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{Y}_{20} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$$

Por lo tanto en esta carta afín las hojas son transversales.

Puesto que $v = 0$ es hoja para la foliación $\widetilde{Y}_{20}$, entonces su monodromía correspondiente tiene un punto fijo en esta hoja, así que es afín (ver apéndice B).

En el infinito, es decir, en $x = 0$ pasa lo siguiente:

$$\begin{aligned} \{x = 0\} - \{p_1, p_2\} \subset \mathbb{CP}^2 &\quad \text{es hoja de} \quad X_\chi \\ &\quad \text{y} \\ \{x = 0\} \subset \mathbb{CP}^2 &\quad \text{no es hoja de} \quad Y_2 \\ &\quad \text{sólo contiene el punto singular } p_2 \text{ de } Y_2 \end{aligned}$$

la curva $\{y = 0\}$, que pasa por los puntos p_0 y p_2 es hoja común para las foliaciones

Por lo tanto Y_1 es $\chi -$ Riccati □

5.3 Foliaciones de grado 2

Teorema 5.9. *Una foliación X de grado 2 es inestable para la acción definida en (2.2) si y sólo si existe $g \in SL(3, \mathbb{C})$ tal que gX pertenece a alguno de los siguientes espacios:*

1. $CN_1 =< x^2\frac{\partial}{\partial x}, xz\frac{\partial}{\partial x}, z^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial y}, xz\frac{\partial}{\partial y}, yz\frac{\partial}{\partial y}, z^2\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial z}, xz\frac{\partial}{\partial z} >$
2. $CN_2 =< xz\frac{\partial}{\partial x}, yz\frac{\partial}{\partial x}, z^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial y}, xz\frac{\partial}{\partial y}, yz\frac{\partial}{\partial y}, z^2\frac{\partial}{\partial y} >$.

Demostración. Sea $X \in CN_1$. Al hacer actuar el subgrupo a un parámetro

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

en X, obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda(t)X &= \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0x^2 + a_2xz + a_5z^2 \\ b_0x^2 + b_1xy + b_2xz + b_4yz + b_5z^2 \\ c_0x^2 + c_2xz \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ta_0x^2 + ta_2xz + ta_5z^2 \\ t^4b_0x^2 + tb_1xy + t^4b_2xz + tb_4yz + t^4b_5z^2 \\ tc_0x^2 + tc_2xz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vemos que los pesos de X son positivos respecto a λ. Por lo tanto X es inestable.

Sea $X \in CN_2$. Al hacer actuar el subgrupo a un parámetro

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t^4 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-5} \end{pmatrix}$$

en X, obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda(t)X &= \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t^4 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2xz + a_4yz + a_5z^2 \\ b_0x^2 + b_2xz + b_4yz + b_5z^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^5a_2xz + t^2a_4yz + ta_5z^2 \\ t^2b_0x^2 + t^8b_2xz + t^5b_4yz + t^{14}b_5z^2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vemos que los pesos de X son positivos respecto a λ. Por lo tanto X es inestable.

Supongamos que X es una foliación inestable de grado 2. Sea λ un subgrupo a un parámetro con respecto al cual todos los pesos de X son positivos. Podemos elegir coordenadas de $\mathbb{CP}^2$ tal que la acción de λ en X es diagonal. Es decir:

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix}.$$

Si $n_2 \neq 0$ entonces consideramos el subgrupo

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{\frac{n_0}{-n_2}} & 0 & 0 \\ 0 & t^{\frac{n_1}{-n_2}} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^r & 0 & 0 \\ 0 & t^{1-r} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Denotaremos por CN_A el conjunto de campos monomiales de grado 2 con peso positivo respecto a la acción de

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^r & 0 & 0 \\ 0 & t^{1-r} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

para todo $r \in A$. Entonces:

$$CN_{(\infty,-2)} = \{x^2\frac{\partial}{\partial x}, xz\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial y}, xz\frac{\partial}{\partial y}, yz\frac{\partial}{\partial y}, z^2\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial z}, xz\frac{\partial}{\partial z}\}$$

$$CN_{\{0\}} = \{xz\frac{\partial}{\partial x}, z^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial y}, xz\frac{\partial}{\partial y}, yz\frac{\partial}{\partial y}, z^2\frac{\partial}{\partial y}\}$$

$$CN_{[-\frac{1}{2},0)} = CN_{\{0\}} \cup \{x^2\frac{\partial}{\partial x}, xy\frac{\partial}{\partial y}, xz\frac{\partial}{\partial y}\}$$

$$CN_{[-2,-\frac{1}{2})} = CN_{(\infty,-2)} \cup \{z^2\frac{\partial}{\partial x}\} = CN_{[-\frac{1}{2},0)} \cup \{x^2\frac{\partial}{\partial z}\}$$

$$CN_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]} = \{xz\frac{\partial}{\partial x}, yz\frac{\partial}{\partial x}, z^2\frac{\partial}{\partial x}, xz\frac{\partial}{\partial y}, yz\frac{\partial}{\partial y}, z^2\frac{\partial}{\partial y}\}$$

$$CN_{(0,\frac{1}{3})} = CN_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]} \cup \{x^2\frac{\partial}{\partial y}\}$$

Esto considera todos los casos para r, salvo conjugación, pues:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^r & 0 & 0 \\ 0 & t^{1-r} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{1-r} & 0 & 0 \\ 0 & t^r & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

además:

$$r \in (-\infty, \frac{2}{3}] \Leftrightarrow 1 - r \in [\frac{1}{3}, \infty)$$
$$r \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \Leftrightarrow 1 - r \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}].$$

Si $n_2 = 0$, entonces consideramos el subgrupo:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el conjunto de campos monomiales que tienen pesos positivos bajo la acción de α es:

$$\{x^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial y}, xz\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial z}, xz\frac{\partial}{\partial z}\} \subset CN_{[-2,-\frac{1}{2})}.$$

Así que los conjuntos $CN_{[-2,-\frac{1}{2})}$ y $CN_{(0,\frac{1}{3})}$ generan los espacios de foliaciones inestables, salvo conjugación, pues contienen a los demás. Estos son los espacios CN_1 y CN_2 respectivamente.

Por lo tanto, si X es inestable existe $g \in SL(3,\mathbb{C})$ tal que $gX \in CN_1$ o $gX \in CN_2$. □

Corolario 5.10. *Si X es una foliación inestable de grado 2 entonces X tiene una solución algebraica.*

Demostración. Si X una foliación inestable de grado 2, entonces existe $g \in SL(3,\mathbb{C})$ tal que $gX \in CN_1$ o $gX \in CN_2$.

Por lo tanto es suficente probar la afirmación para una foliación en CN_1 o en CN_2 ya que si F define una solución algebraica para X entonces $F \circ g^{-1}$ define una solución algebraica para gX.

Sea $X \in CN_1$, entonces

$$X = \begin{pmatrix} a_0x^2 + a_2xz + a_5z^2 \\ b_0x^2 + b_1xy + b_2xz + b_4yz + b_5z^2 \\ c_0x^2 + c_2xz \end{pmatrix},$$

si k es raiz de

$$c_0 + (c_2 - a_0)w - a_2w^2 - a_5w^3,$$

entonces $F(x,z) = z - kx = 0$ define una solución algebraica de X.

Sea $X \in CN_2$, entonces

$$X = \begin{pmatrix} a_2xz + a_4yz + a_5z^2 \\ b_0x^2 + b_2xz + b_4yz + b_5z^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto la curva $z = 0$ define una solución algebraica para X. □

Teorema 5.11. *Si X es una foliación de grado 2 inestable, entonces X tiene una singularidad de multiplicidad mayor o igual que cuatro.*

Demostración. Sea X una foliación inestable. Dado que la multiplicidad de una singularidad es invariante ante cambio de coordenadas es suficiente considerar
$X \in CN_1$ o $X \in CN_2$.
Sea $X \in CN_1$

$$X = \begin{pmatrix} a_0x^2 + a_2xz + a_5z^2 \\ b_0x^2 + b_1xy + b_2xz + b_4yz + b_5z^2 \\ c_0x^2 + c_2xz \end{pmatrix}$$

donde $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$.
El punto $p_1 = (0:1:0)$ es singular para esta foliación y en la carta afín U_1 la foliación X es

$$X_1 = \begin{pmatrix} (a_0 - b_1)x^2 + (a_2 - b_4)xz + a_5z^2 - b_0x^3 - b_2x^2z - b_5xz^2 \\ c_0x^2 + (c_2 - b_1)xz - b_4z^2 - b_0x^2z - b_2xz^2 - b_5z^3 \end{pmatrix}$$

Observación 1: la multiplicidad algebraica de p_1 es mayor o igual que 2 pues es la menor potencia que podría aparecer en las variables.

Puesto que no existe parte lineal en los polinomios que definen la foliación en la carta afín, entonces la multiplicidad $m(p_1)$ del punto singular es mayor o igual que 4.

Sea $X \in CN_2$

$$X = \begin{pmatrix} a_2xz + a_4yz + a_5z^2 \\ b_0x^2 + b_2xz + b_4yz + b_5z^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ y $a_4 \neq 0$.

El punto $p_1 = (0:1:0)$ es singular para esta foliación y en la carta afín U_1 la foliación X es:

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_4z + (a_2 - b_4)xz + a_5z^2 - b_0x^3 - b_2x^2z - b_5xz^2 \\ -b_4z^2 - b_0x^2z - b_2xz^2 - b_5z^3 \end{pmatrix}.$$

Observación 2: la multiplicidad algebraica de p_1 es mayor o igual que 2 si, y sólo si, $a_4 = 0$.

Sean

$$F(x,z) = a_4z + (a_2 - b_4)xz + a_5z^2 - b_0x^3 - b_2x^2z - b_5xz^2$$
$$G(x,z) = -b_4z^2 - b_0x^2z - b_2xz^2 - b_5z^3.$$

Como la parte lineal de F es distinta de cero, por el Teorema de la función inversa existe

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x^i$$

tal que

$$F(x, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x^i) = 0$$

y esto implica que:

$$a_4\beta_1 x = 0$$
$$(a_4\beta_2 + (a_2 - b_4)\beta_1 + \beta_1^2 a_5)x^2 = 0$$

así que $\beta_1 = \beta_2 = 0$.
Sustituyendo en G obtenemos:

$$G(x, \sum_{i=3}^{\infty} \beta_i x^i) = -b_0\beta_3x^5 - b_4\beta_3^2x^6 - b_2\beta_3^2x^7 - \ldots$$

Por lo tanto $m(p_1) \geq 5$. □

La parte inversa del Teorema anterior no se cumple necesariamente, ahora mostramos un ejemplo de una foliación semiestable con una singularidad de multiplicidad 5.

Proposición 5.12. *La foliación*

$$X = \begin{pmatrix} x^2 + yz \\ -z^2 \\ x^2 + zy \end{pmatrix}$$

es semiestable para la acción de $SL(3,\mathbb{C})$ y tiene una singularidad en $p_1 = (0:1:0)$ de multiplicidad 5.

Demostración. Primero demostramos que el punto p_1 es singular de multiplicidad 5. En la carta afín U_1 tenemos:

$$X_1 = \begin{pmatrix} z + x^2 + xz^2 \\ z + x^2 + z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x,z) \\ G(x,z) \end{pmatrix}$$

la parte lineal de F es distinta de cero, entonces, por el Teorema de función inversa, existe:

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x^i$$

tal que $F(x, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x^i) = 0$.

Sustituyendo en F esta expresión concluimos

$$\begin{aligned} \beta_1 x &= 0 \\ (\beta_2 + 1)x^2 &= 0 \\ (\beta_3 + \beta_1^2)x^3 &= 0 \\ (\beta_4 + 2\beta_1\beta_2)x^4 &= 0 \\ (\beta_5 + \beta_2^2)x^5 &= 0 \end{aligned}$$

así que $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ y $\beta_2 = \beta_5 = -1$, entonces:

$$G(x, -x^2 - x^5 + ...) = -x^5 + (-x^2 - x^5 + ...)^3 + ...$$

Por lo tanto $m(p_1) = 5$.

Supongamos que X es una foliación inestable, entonces existe $g \in SL(3, \mathbb{C})$ tal que $gX \in CN_1$ o $gX \in CN_2$. Puesto que el punto singular p_1 tiene multiplicidad 5 en X y toda foliación en CN_1 y CN_2 tiene un punto singular en p_1 de multiplicidad mayor o igual que cuatro, entonces podemos suponer que g deja invariante este punto, es decir:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} \\ g_{21} & 1 & g_{23} \\ g_{31} & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

con $g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31} = 1$ y matriz inversa:

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} g_{33} & 0 & -g_{13} \\ -m_{12} & 1 & -m_{32} \\ -g_{31} & 0 & g_{11} \end{pmatrix}$$

donde $m_{12} = g_{21}g_{33} - g_{31}g_{23}$ y $m_{32} = g_{11}g_{23} - g_{21}g_{13}$.

Supongamos que $gX \in CN_1$, entonces

$$\begin{aligned} gX &= \begin{pmatrix} g_{33} & 0 & -g_{13} \\ -m_{12} & 1 & -m_{32} \\ -g_{31} & 0 & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (g_{11}x + g_{13}z)^2 + (y + g_{21}x + g_{23}z)(g_{31}x + g_{33}z) \\ -(g_{31}x + g_{33}z)^2 \\ (g_{11}x + g_{13}z)^2 + (y + g_{21}x + g_{23}z)(g_{31}x + g_{33}z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_{33} & 0 & -g_{13} \\ -m_{12} & 1 & -m_{32} \\ -g_{31} & 0 & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{31}xy + g_{33}yz + ... \\ ... \\ g_{31}xy + g_{33}yz + ... \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_{31}(g_{33} - g_{13})xy + g_{33}(g_{33} - g_{13})yz + ... \\ ... \\ g_{31}(g_{11} - g_{31})xy + g_{33}(g_{11} - g_{33})yz + ... \end{pmatrix} \end{aligned}$$

las foliaciones en CN_1 no pueden tener los campos monomiales

$$xy\frac{\partial}{\partial x}$$
$$yz\frac{\partial}{\partial x}$$
$$xy\frac{\partial}{\partial z}$$
$$yz\frac{\partial}{\partial z}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} g_{31}(g_{33} - g_{13}) &= 0 \\ g_{33}(g_{33} - g_{13}) &= 0 \\ g_{31}(g_{11} - g_{31}) &= 0 \\ g_{33}(g_{11} - g_{33}) &= 0 \end{aligned}$$

esto implica una de las siguientes posibilidades:

$$g_{33} = g_{31} = 0$$

$$\begin{aligned} g_{33} &= g_{13} \\ g_{11} &= g_{31} \\ g_{31} &\neq 0 \end{aligned}$$

$$g_{33} = g_{13}$$
$$g_{11} = g_{31}$$
$$g_{33} \neq 0$$

cualquiera de estas condiciones contradice el hecho de que g sea invertible.

Supongamos que $gX \in CN_2$, entonces

$$\begin{aligned} gX &= \begin{pmatrix} g_{33} & 0 & -g_{13} \\ -m_{12} & 1 & -m_{32} \\ -g_{31} & 0 & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (g_{11}x + g_{13}z)^2 + (y + g_{21}x + g_{23}z)(g_{31}x + g_{33}z) \\ -(g_{31}x + g_{33}z)^2 \\ (g_{11}x + g_{13}z)^2 + (y + g_{21}x + g_{23}z)(g_{31}x + g_{33}z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_{33} & 0 & -g_{13} \\ -m_{12} & 1 & -m_{32} \\ -g_{31} & 0 & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{31}xy + g_{33}yz + (g_{11}^2 - g_{21}g_{31})x^2 + \dots \\ -g_{31}^2x^2 + \dots \\ g_{31}xy + g_{33}yz + (g_{11}^2 + g_{21}g_{31})x^2 + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_{31}(g_{33} - g_{13})xy + (g_{11}^2 + g_{21}g_{31})(g_{33} - g_{13})x^2 + \dots \\ \dots \\ g_{31}(g_{11} - g_{31})xy + g_{33}(g_{11} - g_{33})yz + (g_{11}^2 + g_{21}g_{31})(g_{11} - g_{31})x^2 \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

las foliaciones en CN_2 no pueden tener los campos monomiales

$$xy\frac{\partial}{\partial x}$$
$$x^2\frac{\partial}{\partial x}$$
$$xy\frac{\partial}{\partial z}$$
$$yz\frac{\partial}{\partial z}$$
$$x^2\frac{\partial}{\partial z}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} g_{31}(g_{33} - g_{13}) &= 0 \\ (g_{11}^2 + g_{21}g_{31})(g_{33} - g_{13}) &= 0 \\ g_{31}(g_{11} - g_{31}) &= 0 \\ g_{33}(g_{11} - g_{33}) &= 0 \\ (g_{11}^2 + g_{21}g_{31})(g_{11} - g_{31}) &= 0 \end{aligned}$$

esto implica una de las siguientes posibilidades:

$$g_{33} = g_{13}$$
$$g_{11} = g_{31}$$

$$g_{33} \neq g_{13}$$
$$g_{31} = g_{11} = 0$$

$$g_{11} \neq g_{31}$$
$$g_{31} = g_{11} = g_{33} = 0$$

cualquiera de estas condiciones contradice el hecho de que g sea invertible.

Por lo tanto la foliación X es semiestable. □

Proposición 5.13. *Con la notación del Teorema 5.9, tenemos lo siguiente.*
Si λ es el PEOR subgrupo a 1-parámetro para la foliación genérica X en CN_1, entonces X es λ – Riccati y tiene monodromía afín.

Demostración. Sea $X \in CN_1$, entonces

$$X = \begin{pmatrix} a_0x^2 + a_2xz + a_5z^2 \\ b_0x^2 + b_1xy + b_2xz + b_4yz + b_5z^2 \\ c_0x^2 + c_2xz \end{pmatrix}$$

donde $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$.

El PEOR subgrupo a 1-parámetro de esta foliación general es:

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

la foliación X_λ correspodientes es

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} -x \\ 2y \\ -z \end{pmatrix},$$

el punto $p_1 = (0:1:0)$ es dicrítico para esta foliación. La foliación en la carta afín U_1 es

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} -3x \\ -3z \end{pmatrix},$$

haciendo una explosión en $(0,0)$ bajo el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= w_1 \\ z &= w_1 w_2 \end{aligned}$$

obtenemos

$$\widetilde{X}_\lambda = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La foliación X en la carta afín U_1 es

$$X_1 = \begin{pmatrix} (a_0 - b_1)x^2 + (a_2 - b_4)xz + a_5 z^2 - b_0 x^3 - b_2 x^2 z - b_5 x z^2 \\ c_0 x^2 + (c_2 - b_1)xz - b_4 z^2 - b_0 x^2 z - b_2 x z^2 - b_5 z^3 \end{pmatrix}$$

hacemos la explosión en $(0,0)$ bajo el mismo cambio de coordenadas y obtenemos

$$\widetilde{X}_1 = \begin{pmatrix} w_1^2(-b_0 - b_2 w_2 - b_5 w_2^2) + w_1((a_0 - b_1) + (a_2 - b_4)w_2 + a_5 w_2^2) \\ c_0 + (c_2 - a_0)w_2 - a_2 w_2^2 - a_5 w_2^3 \end{pmatrix}$$

entonces las hojas de $\widetilde{X}_\lambda$ y de $\widetilde{X}_1$ son tangentes sólo en las hojas comunes $w_2 - k = 0$, donde k es una raiz del polinomio

$$c_0 + (c_2 - a_0)w_2 - a_2 w_2^2 - a_5 w_2^3.$$

Por lo tanto X es λ–*Riccati*. Puesto que $w_1 = 0$ es hoja para $\widetilde{X}_1$, entonces la monodromía correspondiente es afín.

□

Teorema 5.14. *Sea X una foliación de $\mathbb{CP}^2$ de grado 2 con singularidades aisladas. Consideremos el subgrupo a 1-parámetro*

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Entonces $X \in CN_1$ si, y sólo si, X es $\lambda - Riccati$ y $1 < m(p_1)$.

Demostración. Si $X \in CN_1$, entonces, por la proposición anterior es $\lambda - Riccati$ y por el Teorema 5.11, $m(p_1) \geq 4$.

Sea

$$X = \begin{pmatrix} a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 xz + a_3 y^2 + a_4 yz + a_5 z^2 \\ b_0 x^2 + b_1 xy + b_2 xz + b_3 y^2 + b_4 yz + b_5 z^2 \\ c_0 x^2 + c_1 xy + c_2 xz + c_3 y^2 + c_4 yz + c_5 z^2 \end{pmatrix}$$

una foliación de grado 2 con singularidades aisladas, $\lambda - Riccati$ y tal que $m(p_1) > 1$.
La primera condición sobre los coeficientes de X es que $a_3 = c_3 = 0$, esto debido a que p_1 es punto singular para la foliación.

Para separar las hojas de X_λ es necesario hacer una explosión en p_1, así que, levantaremos la foliación X con esta explosión y veremos la condición sobre los coeficientes de X para tener transversalidad con la fibración definida por X_λ.
En la carta afín U_1, la foliación X tiene la siguiente representación:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -b_0 x^3 - b_2 x^2 z - b_5 x z^2 + (a_0 - b_1)x^2 + (a_2 - b_4)xz + a_5 z^2 + (a_1 - b_3)x + a_4 z \\ -b_0 x^2 z - b_2 x z^2 - b_5 z^3 + c_0 x^2 + (c_2 - b_1)xz + (c_5 - b_4)z^2 + c_1 x + (c_4 - b_3)z \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Sea W_1 la correspodiente 1-forma de X_1. Hagamos el proceso de levantamiento de W_1 con la explosión en $(0,0)$.

$$\begin{aligned} W_1 = {} & (-b_0 x^2 z - b_2 x z^2 - b_5 z^3 + c_0 x^2 + (c_2 - b_1)xz + (c_5 - b_4)z^2 + c_1 x + (c_4 - b_3)z)dx \\ & - (-b_0 x^3 - b_2 x^2 z - b_5 x z^2 + (a_0 - b_1)x^2 + (a_2 - b_4)xz + a_5 z^2 + (a_1 - b_3)x + a_4 z)dz \\ & \downarrow x = w_1 \quad z = w_1 w_2 \\ \widetilde{W}_1 = {} & (b_0 w_1^3 w_2 + b_2 w_1^3 w_2^2 + b_5 w_1^3 w_2^3 - c_0 w_1^2 - (c_2 - b_1)w_1^2 w_2 - \\ & \qquad (c_5 - b_4)w_1^2 w_2^2 - c_1 w_1 - (c_4 - b_3)w_1 w_2)dw_1 \\ & + (-b_0 w_1^3 - b_2 w_1^3 w_2 - b_5 w_1^3 w_2^2 + (a_0 - b_1)w_1^2 + (a_2 - b_4)w_1^2 w_2 + \\ & \qquad a_5 w_1^2 w_2^2 + (a_1 - b_3)w_1 + a_4 w_1 w_2)(w_2 dw_1 + w_1 dw_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_1 = {} & ((a_0 - c_2)w_1 w_2 + (a_2 - c_5)w_1 w_2^2 + a_5 w_1 w_2^3 + (a_1 - c_4)w_2 + a_4 w_2^2 - c_0 w_1 - c_1)dw_1 \\ & + (w_1^3(-b_0 - b_2 w_2 - b_5 w_2^2) + w_1^2((a_0 - b_1) + (a_2 - b_4)w_2 + a_5 w_2^2) + w_1((a_1 - b_3) + a_4 w_2))dw_2, \end{aligned}$$

entonces el campo levantado correspondiente, en coordenadas afines, es

$$\widetilde{X}_1 = \begin{pmatrix} w_1^3(b_0 + b_2 w_2 + b_5 w_2^2) + w_1^2((b_1 - a_0) + (b_4 - a_2)w_2 - a_5 w_2^2) + w_1((b_3 - a_1) - a_4 w_2) \\ w_1((a_0 - c_2)w_2 + (a_2 - c_5)w_2^2 + a_5 w_2^3 - c_0) + (-c_1 + (a_1 - c_4)w_2 + a_4 w_2^2) \end{pmatrix},$$

entonces, para tener transversalidad con la fibración definida por X_λ, los coeficientes deben satisfacer alguna de las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} b_0 + b_2 w_2 + b_5 w_2^2 &= 0 \\ (a_0 - c_2) w_2 + (a_2 - c_5) w_2^2 + a_5 w_2^3 - c_0) &= 0 \end{aligned}$$

o

$$-c_1 + (a_1 - c_4) w_2 + a_4 w_2^2 = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned} b_0 = b_2 = b_5 = a_5 = c_0 &= 0 \\ a_0 &= c_2 \\ a_2 &= c_5 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} c_1 = a_4 &= 0 \\ a_1 &= c_4. \end{aligned}$$

La primera condición implica

$$X = \begin{pmatrix} a_1 xy + a_4 yz \\ b_1 xy + b_3 y^2 + b_4 yz - a_0 xy - a_2 yz \\ c_1 xy + c_4 yz \end{pmatrix},$$

la cual tiene una curva de singularidades en $\{y = 0\}$, y esto contradice la hipótesis sobre las singularidades de X. Por lo tanto se debe satisfacer la segunda condición de los coeficientes de X, entonces

$$X = \begin{pmatrix} a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 xz + a_5 z^2 \\ b_0 x^2 + b_1 xy + b_2 xz + b_3 y^2 + b_4 yz + b_5 z^2 \\ c_0 x^2 + c_2 xz + a_1 yz + c_5 z^2 \end{pmatrix}.$$

Veamos que la condición $m(p_1) > 1$ para X implica que $b_3 = a_1$.

Supongamos que $b_3 \neq a_1$, entonces (ver 5.1) las partes lineales de los polinomios que definen la foliación en la carta afín U_1 son:

$$\begin{aligned} (a_1 - b_3) x \\ (c_4 - b_3) z = (a_1 - b_3) z \end{aligned}$$

puesto que las rectan anteriores no son tangentes entonces $m(p_1) = 1$.

Entonces la foliación X debe ser de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 xz + a_5 z^2 \\ b_0 x^2 + b_1 xy + b_2 xz + a_1 y^2 + b_4 yz + b_5 z^2 \\ c_0 x^2 + c_2 xz + a_1 yz + c_5 z^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 x^2 + (a_2 - c_5) xz + a_5 z^2 \\ b_0 x^2 + b_1 xy + b_2 xz + (b_4 - c_5) yz + b_5 z^2 \\ c_0 x^2 + c_2 xz \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $X \in CN_1$.

□

Capítulo 6

Foliaciones Invariantes

Definición 6.1. *Sea*

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix}$$

un subgrupo a 1-parámetro. La foliación X es ***λ-invariante*** *si existe un entero r tal que*

$$\lambda(t)X = \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix} X = t^r X.$$

Recordemos que si i, j, k son enteros entre -1 y $d-1$, entonces (i, j, k) representa alguno de los siguientes campos monomiales

$$z_0^{i+1} z_1^j z_2^k \frac{\partial}{\partial z_0}$$
$$z_0^i z_1^{j+1} z_2^k \frac{\partial}{\partial z_1}$$
$$z_0^i z_1^j z_2^{k+1} \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Proposición 6.2. *Sea X una foliación de $\mathbb{CP}^2$ de grado d y sea*

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_2} \end{pmatrix}$$

un subgrupo a un parámetro de $SL(3, \mathbb{C})$.

Entonces X es $\lambda-$invariante con peso r si, y sólo si, para todo par de campos monomiales (i_1, j_1, k_1) y (i_2, j_2, k_2) de X los enteros n_0, n_1, n_2 satisfacen la siguiente igualdad

$$\frac{n_0}{k_2 - k_1 + j_1 - j_2} = \frac{n_1}{i_2 - i_1 + k_1 - k_2} = \frac{n_2}{j_2 - j_1 + i_2 - i_1}. \tag{6.1}$$

El subgrupo λ es el Peor para X si, y sólo si, para todo campo monomial (i, j, k) distinto de cero de X, se satisface

$$\left(\frac{-3i + d - 1}{(i-j)^2 + (j-k)^2 + (k-i)^2}, \frac{-3j + d - 1}{(i-j)^2 + (j-k)^2 + (k-i)^2}\right) \notin C_X.$$

Es decir, existe (i_1, j_1, k_1) campo monomial de X tal que

$$(k_1 - i_1)(-3i + d - 1) + (k_1 - j_1)(-3j + d - 1) < (i-j)^2 + (j-k)^2 + (k-i)^2.$$

Demostración. Una foliación X es $\lambda - invariante$ si todas las rectas que definen el convexo C_X se cortan en un mismo punto.

Sean (i_1, j_1, k_1) y (i_2, j_2, k_2) dos campos monomiales de X, entonces el vértice de C_X definido por la intersección de las rectas

$$\begin{aligned}(k_1 - i_1)x_1 + (k_2 - j_2)x_2 &= 1\\ (k_2 - i_2)x_1 + (k_2 - j_2)x_2 &= 1\end{aligned}$$

es

$$\left(\frac{k_2 - k_1 + j_1 - j_2}{(k_1 - i_1)(k_2 - j_2) - (k_1 - j_1)(k_2 - i_2)}, \frac{i_2 - i_1 + k_1 - k_2}{(k_1 - i_1)(k_2 - j_2) - (k_1 - j_1)(k_2 - i_2)}\right).$$

Por lo tanto

$$\frac{n_0}{k_2 - k_1 + j_1 - j_2} = \frac{n_1}{i_2 - i_1 + k_1 - k_2} = \frac{n_2}{j_2 - j_1 + i_2 - i_1} = (k_1 - i_1)(k_2 - j_2) - (k_1 - j_1)(k_2 - i_2).$$

Hemos mencionado que las rectas que forman el convexo C_X asociado a X se intersectan en un punto, el que corresponde al subgrupo que hace invariante la foliación, así que C_X sólo tiene este vértice. Los restantes subgrupos candidatos a alcanzar el máximo corresponden a puntos de una recta más cercanos a 0 en $\mathbb{R}^2$.

Sea (i, j, k) un campo monomial de X. Su subgrupo correspondiente al punto de norma mínima sobre la recta que define el campo monomial es

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{(-3i + d - 1)}{m}\\ m_1 &= \frac{(-3j + d - 1)}{m}\\ m_2 &= \frac{(-3k + d - 1)}{m}, \end{aligned}$$

donde $m = (i-j)^2 + (j-k)^2 + (k-i)^2$. Si $(m_0, m_1) \notin C_X$, entonces el punto de norma mínima en la frontera de C_X es el único vértice que definen los campos monomiales distintos de cero.

□

Resulta claro que toda foliación $\lambda - invariante$ con peso distinto de cero es inestable.

Ahora demostraremos que toda foliación X que es $\lambda - invariante$ satisface la condición de tranversalidad respecto a la foliación definida por λ y en $\mathbb{CP}^2$, X_λ y X tienen una solución común, esto último dice, en particular, que X tiene una solución algebraica.

Proposición 6.3. *Sea*

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{n_0} & 0 & 0\\ 0 & t^{n_1} & 0\\ 0 & 0 & t^{n_2}\end{pmatrix}$$

un subgrupo a un parámetro de $SL(3, \mathbb{C})$. Si X es una foliación $\lambda - invariante$, entonces X es $\lambda - Riccati$.

Demostración. Sea

$$X = \begin{pmatrix} P(z_0, z_1, z_2)\\ Q(z_0, z_1, z_2)\\ R(z_0, z_1, z_2)\end{pmatrix} \tag{6.2}$$

una foliación $\lambda - invariante$. Si X es una foliación $\lambda - invariante$ con pero r, entonces

$$\begin{aligned} t^{n_0}P(t^{-n_0}z_0, t^{-n_1}z_1, t^{-n_2}z_2) &= t^r P(z_0, z_1, z_2)\\ t^{n_1}Q(t^{-n_0}z_0, t^{-n_1}z_1, t^{-n_2}z_2) &= t^r Q(z_0, z_1, z_2)\\ t^{n_2}R(t^{-n_0}z_0, t^{-n_1}z_1, t^{-n_2}z_2) &= t^r R(z_0, z_1, z_2), \end{aligned}$$

y esto implica

$$\begin{aligned} t^{n_0 - n_0 d}P(z_0, t^{n_0 - n_1}z_1, t^{n_0 - n_2}z_2) &= t^r P(z_0, z_1, z_2)\\ t^{n_1 - n_0 d}Q(z_0, t^{n_0 - n_1}z_1, t^{n_0 - n_2}z_2) &= t^r Q(z_0, z_1, z_2)\\ t^{n_2 - n_0 d}R(z_0, t^{n_0 - n_1}z_1, t^{n_0 - n_2}z_2) &= t^r R(z_0, z_1, z_2), \end{aligned}$$

así que

$$P(1, t^{n_0-n_1}z_1, t^{n_0-n_2}z_2) = t^{r+n_0(d-1)}P(1, z_1, z_2)$$

$$t^{n_1-n_0}Q(1, t^{n_0-n_1}z_1, t^{n_0-n_2}z_2) = t^{r+n_0(d-1)}Q(1, z_1, z_2) \tag{6.3}$$

$$t^{n_2-n_0}R(1, t^{n_0-n_1}z_1, t^{n_0-n_2}z_2) = t^{r+n_0(d-1)}R(1, z_1, z_2).$$

Recordemos que la foliación asociada a λ es

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} n_0z_0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1z_1 & 0 \\ 0 & 0 & n_2z_2 \end{pmatrix}$$

En coordenadas afines (digamos en U_0) las foliaciones X y X_λ son, respectivamente

$$X_0 = \begin{pmatrix} Q(1, z_1, z_2) - z_1P(1, z_1, z_2) \\ R(1, z_1, z_2) - z_2P(1, z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

y

$$X_{\lambda 0} = \begin{pmatrix} (n_1 - n_0)z_1 & 0 \\ 0 & (n_2 - n_0)z_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces el subgrupo a un parámetro correspondiente a $X_{\lambda 0}$ es

$$\lambda_0(t) = \begin{pmatrix} t^{(n_1-n_0)} & 0 \\ 0 & t^{(n_2-n_0)} \end{pmatrix}.$$

Sea $r_0 = r + n_0(d-1)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_0(t)X_0 = \begin{pmatrix} t^{(n_1-n_0)} & 0 \\ 0 & t^{(n_2-n_0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q(1, z_1, z_2) - z_1P(1, z_1, z_2) \\ R(1, z_1, z_2) - z_2P(1, z_1, z_2) \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} t^{n_1-n_0}Q(1, t^{n_0-n_1}z_1, t^{n_0-n_2}z_2) - z_1P(1, z_1, z_2) \\ t^{n_2-n_0}R(1, t^{n_0-n_1}z_1, t^{n_0-n_2}z_2) - z_2P(1, z_1, z_2) \end{pmatrix} = \quad \text{por (6.3)} \\ \begin{pmatrix} t^{r+n_0(d-1)}Q(1, z_1, z_2) - z_1t^{r+n_0(d-1)}P(1, z_1, z_2) \\ t^{r+n_0(d-1)}R(1, z_1, z_2) - z_2t^{r+n_0(d-1)}P(1, z_1, z_2) \end{pmatrix} = t^{r_0}X_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto X_0 es $\lambda_0 - invariante$ con peso r_0.

Vamos a hacer una explosión en $(0,0)$ para demostrar que la foliación levantada $\widetilde{X_0}$ es $\widetilde{\lambda}_0 - invariante$.

Sean $n = n_1 - n_0$, $m = n_2 - n_0$ y sean W_0 y W_λ las 1-formas correspodientes a las foliaciones X_0 y X_λ. El proceso de explosión en estas 1-formas es:

$$\begin{aligned} W_0 = (R(1, z_1, z_2) - z_2P(1, z_1, z_2))dz_1 - (Q(1, z_1, z_2) - z_1P(1, z_1, z_2))dz_2 \\ \downarrow z_1 = w_1w_2 \quad z_2 = w_2 \\ \widetilde{W_0} = (w_1R(1, w_1w_2, w_2) - Q(1, w_1w_2, w_2))dw_2 - (w_2R(1, w_1w_2, w_2) - w_2^2P(1, w_1w_2, w_2))dw_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\lambda_0} = mz_2dz_1 - nz_1dz_2 \\ \downarrow z_1 = w_1w_2 \quad z_2 = w_2 \\ \widetilde{W}_{\lambda_0} = (m-n)w_1dw_2 + mw_2dw_1. \end{aligned}$$

Por (6.3) tenemos

$$\begin{aligned} R(1, t^{-n}w_1w_2, w_2) &= t^{r_0-m}R(1, w_1w_2, w_2) \\ t^{n-m}Q(1, t^{-n}z_1, t^{-m}z_2) &= t^{r_0-m}Q(1, w_1w_2, w_2) \\ t^{-m}P(1, t^{-n}w_1w_2, t^{-m}w_2) &= t^{r_0-m}w_2^2P(1, w_1w_2, w_2), \end{aligned}$$

entonces

$$\tilde{\lambda}_0\widetilde{X}_0 = \begin{pmatrix} t^{n-m} & 0 \\ 0 & t^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1R(1, w_1w_2, w_2) - Q(1, w_1w_2, w_2) \\ w_2R(1, w_1w_2, w_2) - w_2^2P(1, w_1w_2, w_2) \end{pmatrix} = t^{r_0-m}\widetilde{X}_0.$$

Por lo tanto $\widetilde{X}_0$ es $\widetilde{X_{\lambda 0}} - invariante$ con peso $r_0 - m$.

Después de hacer las explosiones necesarias para reducir la singularidad dicrítica de la foliación X_λ llegamos a una del siguiente tipo:

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces la acción en la foliación levantada, la cual tiene peso invariante, digamos s, es

$$\begin{pmatrix} t^n \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q'(w_1, w_2) \\ R'(w_1, w_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^nQ'(t^{-n}w_1, w_2) \\ R'(t^{-n}w_1, w_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^sQ'(w_1, w_2) \\ t^sR'(w_1, w_2) \end{pmatrix}.$$

De las ecuaciones

$$t^n Q'(t^{-n}w_1, w_2) = t^s Q'(w_1, w_2)$$
$$R'(t^{-n}w_1, w_2) = t^s R'(w_1, w_2)$$

resulta que

$$Q'(w_1, w_2) = w_1^{k-1} Q_1(w_2)$$
$$R'(w_1, w_2) = w_1^k R_1(w_2),$$

donde k es un entero positivo. Entonces la foliación levantada tiene la forma

$$\begin{pmatrix} w_1 Q_1(w_2) \\ R_1(w_2). \end{pmatrix}$$

Por lo tanto es $\lambda-$ *Riccati* y su monodromía tiene dos puntos fijos, correspodientes a las hojas $w_1 = 0$ y $w_1 = \infty$. □

Proposición 6.4. *Si X es una foliación $\lambda-$invariante entonces X y X_λ tienen una solución algebraica común.*

Demostración. En la carta afín U_0 tenemos:

$$X_0 = \begin{pmatrix} A(z_1, z_2) \\ B(z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

$$X_{\lambda_0} = \begin{pmatrix} (n_1 - n_0)z_1 \\ (n_2 - n_0)z_2 \end{pmatrix}$$

Las tangencias entre estos dos campos afines estan dadas por el determinante de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} A(z_1, z_2) & (n_1 - n_0)z_1 \\ B(z_1, z_2) & (n_2 - n_0)z_2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$F(z_1, z_2) = (n_2 - n_0)z_2 A(z_1, z_2) - (n_1 - n_0)z_1 B(z_1, z_2) = 0$$

define estas tangencias.

Como X es invariante, entonces, para todo campo monomial (i, j, k) de X, $r = -in_0 - jn_1 - kn_2$ y de esto resulta

$$-(n_1 - n_0)j - (n_2 - n_0)k = r + n_0(d-1) = r_0.$$

Todo campo monomial en A es de la forma

$$z_1^{j+1} z_2^k \frac{\partial}{\partial z_1},$$

entonces

$$(n_1 - n_0)z_1 \frac{\partial z_1^{j+1} z_2^k}{\partial z_1} + (n_2 - n_0)z_2 \frac{\partial z_1^{j+1} z_2^k}{\partial z_2} =$$
$$((n_1 - n_0)(j+1) + (n_2 - n_0)k) z_1^{j-1} z_2^k =$$
$$(-r_0 + n_1 - n_0) z_1^{j-1} z_2^k.$$

Por lo tanto

$$(n_1 - n_0)z_1 \frac{\partial A(z_1, z_2)}{\partial z_1} + (n_2 - n_0)z_2 \frac{\partial A(z_1, z_2)}{\partial z_2} = (-r_0 + n_1 - n_0)A.$$

Análogamente se demuestra que

$$(n_1 - n_0)z_1 \frac{\partial B(z_1, z_2)}{\partial z_1} + (n_2 - n_0)z_2 \frac{\partial B(z_1, z_2)}{\partial z_2} = (-r_0 + n_2 - n_0)B.$$

Sumando $(n_2 - n_0)A(z_1, z_2)$ a la primera ecuación y $(n_1 - n_0)B(z_1, z_2)$ a la segunda ecuación, obtenemos:

$$(n_1 - n_0)z_1 \frac{\partial A(z_1, z_2)}{\partial z_1} + (n_2 - n_0)(z_2 \frac{\partial A(z_1, z_2)}{\partial z_2} + A(z_1, z_2)) = (-r_0 + n_1 + n_2 - 2n_0)A(z_1, z_2) \tag{6.4}$$

$$(n_1 - n_0)(z_1 \frac{\partial B(z_1, z_2)}{\partial z_1} + B(z_1, z_2)) + (n_2 - n_0)z_2 \frac{\partial B(z_1, z_2)}{\partial z_2} = (-r_0 + n_2 + n_1 - 2n_0)B(z_1, z_2). \tag{6.5}$$

Y de la siguiente cadena de igualdades

$$
\begin{aligned}
&(-r_0+n_2+n_1-2n_0)((n_2-n_0)z_2A-(n_1-n_0)z_1B)=\\
&(n_2-n_0)z_2(-r_0+n_2+n_1-2n_0)A-(n_1-n_0)z_1(-r_0+n_2+n_1-2n_0)B=\\
&(n_2-n_0)z_2[(n_1-n_0)z_1\frac{\partial A}{\partial z_1}+(n_2-n_0)(z_2\frac{\partial A}{\partial z_2}+A)]\\
&-(n_1-n_0)z_1[(n_1-n_0)(z_1\frac{\partial B}{\partial z_1}+B)+(n_2-n_0)z_2\frac{\partial B}{\partial z_2}]=\\
&(n_1-n_0)z_1[(n_2-n_0)z_2\frac{\partial A}{\partial z_1}-(n_1-n_0)(z_1\frac{\partial B}{\partial z_1}+B)]+\\
&(n_2-n_0)z_2[(n_2-n_0)(z_2\frac{\partial A}{\partial z_2}+A)-(n_1-n_0)z_1\frac{\partial B}{\partial z_2}]=\\
&(n_1-n_0)z_1\frac{\partial((n_2-n_0)z_2A-(n_1-n_0)z_1B)}{\partial z_1}+(n_2-n_0)z_2\frac{\partial((n_2-n_0)z_2A-(n_1-n_0)z_1B)}{\partial z_2}=\\
&(n_1-n_0)\frac{\partial F}{\partial z_1}+(n_2-n_0)\frac{\partial F}{\partial z_2}=X_{\lambda_0}(F).
\end{aligned}
$$

concluimos que

$$X_{\lambda_0}(F)=(-r_0+n_2+n_1-2n_0)F(z_1,z_2)$$

Así que la homogenización de $F(z_1,z_2)$ en $\mathbb{CP}^2$ es solución de X_λ.

Ahora demostraremos que F es solución de X. Como consecuencia de las ecuaciones 6.4 y 6.5 tenemos

$$
\begin{aligned}
&A\frac{\partial F}{\partial z_1}+B\frac{\partial F}{\partial z_2}=\\
&A\Big((n_2-n_0)z_2\frac{\partial A}{\partial z_1}-(n_1-n_0)(z_1\frac{\partial B}{\partial z_1}+B)\Big)+B\Big((n_2-n_0)(z_2\frac{\partial A}{\partial z_2}+A)-(n_1-n_0)z_1\frac{\partial B}{\partial z_2}\Big)=\\
&(n_2-n_0)z_2A\frac{\partial A}{\partial z_1}-(n_1-n_0)z_1B\frac{\partial B}{\partial z_2}+\\
&A\Big((r_0-n_2-n_1+2n_0)B+(n_2-n_0)z_2\frac{\partial B}{\partial z_2}\Big)+B\Big((-r_0+n_2+n_1-2n_0)A-(n_1-n_0)z_1\frac{\partial A}{\partial z_1}\Big)=\\
&(n_2-n_0)z_2A\frac{\partial A}{\partial z_1}-(n_1-n_0)z_1B\frac{\partial B}{\partial z_2}+(n_2-n_0)z_2A\frac{\partial B}{\partial z_2}-(n_1-n_0)z_1B\frac{\partial A}{\partial z_1}=\\
&\frac{\partial A}{\partial z_1}F(z_1,z_2)+\frac{\partial B}{\partial z_2}F(z_1,z_2)=\\
&\Big(\frac{\partial A}{\partial z_1}+\frac{\partial B}{\partial z_2}\Big)F(z_1,z_2),
\end{aligned}
$$

así que

$$X_0(F)=\Big(\frac{\partial A}{\partial z_1}+\frac{\partial B}{\partial z_2}\Big)F(z_1,z_2).$$

Por lo tanto la homogenización de F en $\mathbb{CP}^2$ es solución de X. □

Definición 6.5. *Sea X una foliación de $\mathbb{CP}^2$ y $\lambda(t)$ un subgrupo a 1-parámetro, definimos X_{min} como*

$$X_{min}:=\lim_{t\to 0}\lambda(t)X.$$

Esta foliación es $\lambda-$invariante pues consta de los campos monomiales con peso mínimo bajo la acción de λ.

Observación: La foliación X_{min} pertenece a la cerradura de la órbita de X en $\mathscr{F}_d$.

La siguiente proposición nos dice que la obtención del PEOR subgrupo a 1-parámetro de una foliación inestable es equivalente a la obtención del PEOR subgrupo para foliaciones invariantes.

Proposición 6.6. *Sea X una foliación $\lambda-$inestable. El subgrupo a 1-parámetro λ es el PEOR para X si y sólo si λ es el PEOR para X_{min}.*

Demostración. Supongamos que λ es el PEOR subgrupo a 1-parámetro para X_{min}.

Como X_{min} consta de los monomios de menor peso respecto a λ entonces

$$f_X(\lambda)=\frac{\text{mínimo peso de }\lambda}{\|\lambda\|}=f_{X_{min}}(\lambda).$$

Sea α un subgrupo a 1-parámetro. Por hipótesis:

$$f_{X_{min}}(\alpha)\leq f_{X_{min}}(\lambda).$$

Como

$$\{p:\text{pes peso de }X_{min}\text{ respecto a }\alpha\}\subset\{p:\text{pes peso de }X\text{ respecto }\alpha\}$$

entonces

$$f_X(\alpha)\leq f_{X_{min}}(\alpha)$$

por lo tanto

$$f_X(\alpha) \leq f_X(\lambda).$$

Supongamos que λ es el peor subgrupo a 1-parámetro de X y que α es el peor para X_{min}, por la parte anterior tenemos que α es peor para X, así que α es un múltiplo de λ.

□

Capítulo 7

Subgrupo a 1-parámetro con una curva de singularidades

Consideremos el subgrupo a un parámetro

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

El subgrupo parabólico de λ es:

$$P(\lambda) = \{g = (g_{ij}) \in SL(3, \mathbb{C}) : \quad g_{21} = g_{31} = 0\}.$$

La foliación que define el subgrupo λ en $\mathbb{CP}^2$, a la que denotaremos por X_λ, tiene las siguientes caraterísticas:

i) Tiene una primera integral racional

$$F : \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^1$$
$$(z_0 : z_1 : z_2) \mapsto \frac{z_1}{z_2}.$$

Sus curvas solución son, entonces, $k_1 z_1 - k_2 z_2 = 0$ con $k_i \in \mathbb{C}$.

ii) Tiene una singularidad dicrítica en $(1, 0, 0)$.

iii) Su conjunto singular contiene la línea $z_0 = 0$.

Veremos cuál es la condición necesaria y suficiente para que la foliación

$$X = P(z_0, z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_0} + Q(z_0, z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + R(z_0, z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}$$

sea $\lambda - inestable$.

$$\lambda(t)X = \begin{pmatrix} t^{2+d}P(t^{-3}z_0, z_1, z_2) \\ t^{-1+d}Q(t^{-3}z_0, z_1, z_2) \\ t^{-1+d}R(t^{-3}z_0, z_1, z_2) \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Sean j_1 y j_2 los exponentes de z_0 en P y Q, respectivamente. Como $0 \leq j_1, j_2 \leq d$, entonces, para mostrar inestabilidad con λ, deben satisfacerse las siguientes condiciones

$$2 + d - 3j_1 > 0$$

$$-1 + d - 3j_2 > 0.$$

Y esto sucede si y sólo si

$$\frac{2+d}{3} > j_1$$

$$\frac{d-1}{3} > j_2.$$

Así que hemos probado la siguiente

Proposición 7.1. *Sea*

$$X = P(z_0, z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_0} + Q(z_0, z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + R(z_0, z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}$$

una foliación de $\mathbb{CP}^2$, entonces X es $\lambda - inestable$ si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones para cada uno de los términos de los polinomios P, Q y R:

i) $deg_{z_0}P < \frac{d+2}{3}$

ii) $deg_{z_0}Q < \frac{d-1}{3}$

iii) $deg_{z_0}R < \frac{d-1}{3}$.

Para observar el comportamiento de una foliación X, $\lambda - inestable$, respecto a las órbitas del campo que define el subgrupo λ es necesario hacer una explosión de $\mathbb{CP}^2$ en el punto

singular dicrítico $(1, 0, 0)$.

Después de la explosión en $(0, 0)$ en el abierto U_0 y con las nuevas coordenadas w_1 y w_2, donde

$$z_1 = w_1$$
$$z_2 = w_1 w_2$$

la foliación X_λ levantada es

$$\widetilde{X}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

Teorema 7.2. *Sea X una foliación de grado $2, 3$ o 4 e inestable respecto a λ, entonces para todo $g \in P(\lambda)$, gXg^{-1} es $\lambda - Riccati$. Las foliaciones X y X_λ tienen una hoja algebraica común.*

Demostración. Si X es inestable para λ entonces es de la siguiente forma

$$X = \begin{pmatrix} A_d(z_1, z_2) + z_0 A_{d-1}(z_1, z_2) \\ B_d(z_1, z_2) \\ C_d(z_1, z_2) \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

donde A_j, B_j, C_j son polinomios homogéneos de grado j en z_1 y z_2.

Ahora veremos que la forma de las foliaciones $\lambda - inestable$ es invariantes ante la acción del subgrupo parabólico de λ. Sea $g = (g_{ij}) \in P(\lambda)$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}z_0 + g_{12}z_1 + g_{13}z_2 \\ g_{22}z_1 + g_{23}z_2 \\ g_{32}z_1 + g_{33}z_2 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$g^{-1}Xg =$$
$$\begin{pmatrix} g_{11}^{-1} & g_{12}^{-1} & g_{13}^{-1} \\ 0 & g_{22}^{-1} & g_{23}^{-1} \\ 0 & g_{32}^{-1} & g_{33}^{-1} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} A_d(g_{22}z_1 + g_{23}z_2, g_{32}z_1 + g_{33}z_2) + (g_{11}z_0 + g_{12}z_1 + g_{13}z_2)A_{d-1}(g_{22}z_1 + g_{23}z_2, g_{32}z_1 + g_{33}z_2) \\ B_d(g_{22}z_1 + g_{23}z_2, g_{32}z_1 + g_{33}z_2) \\ C_d(g_{22}z_1 + g_{23}z_2, z_2) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} A'_d(z_1, z_2) + z_0 A'_{d-1}(z_1, z_2) \\ B'_d(z_1, z_2) \\ C'_d(z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

La foliación X en la carta afin U_0 se ve de la siguiente manera

$$X_0 = \begin{pmatrix} B_d(z_1,z_2) - z_1(A_d(z_1,z_2) + A_{d-1}(z_1,z_2)) \\ C_d(z_1,z_2) - z_2(A_d(z_1,z_2) + A_{d-1}(z_1,z_2)) \end{pmatrix}.$$

Haciendo una explosión en $(0,0)$ mediante las nuevas variables

$$z_1 = w_1$$
$$z_2 = w_1 w_2$$

obtenemos

$$\widetilde{X}_0 = \begin{pmatrix} -w_1^2 A_d(1,w_2) + w_1(B_d(1,w_2) - A_{d-1}(1,w_2)) \\ w_2 B_d(1,w_2) - C_d(1,w_2) \end{pmatrix},$$

la soluciones de $\widetilde{X}_\lambda$ son rectas $w_2 = k$ y como la segunda componente del campo $\widetilde{X}_0$ no depende de w_1 entonces las soluciones son transversales, excepto en un número de hojas que corresponden a las raices de $w_2 B_d(1,w_2) - C_d(1,w_2)$.

En el infinito, es decir, en $z_0 = 0$ pasa lo siguiente

$\{(0 : z_1 : z_2)\} \subset \mathbb{CP}^2$ es singular para X_λ
y
$\{(0 : z_1 : z_2)\} \subset \mathbb{CP}^2$ no es hoja de X si $A_d(z_1,z_2) \neq 0$
esta curva sólo contiene un número finito de singularidades

Por lo tanto X es $\lambda -$ Riccati.

La curva algebraica en $\mathbb{CP}^2$ definida por el polinomio

$$z_2 B_d(z_1,z_2) - z_1 C_d(z_1,z_2) = 0$$

es una hoja común para X y X_λ. □

Corolario 7.3. *Sea X una foliación de grado d con la siguiente forma*

$$X = \begin{pmatrix} A_d(z_1,z_2) + z_0 A_{d-1}(z_1,z_2) \\ B_d(z_1,z_2) \\ C_d(z_1,z_2) \end{pmatrix},$$

entonces X es $\lambda -$ inestable y para todo $g \in P(\lambda)$, gXg^{-1} es $\lambda -$ Riccati.

Demostración. Esto es consecuencia inmediate del Teorema anterior. □

Las foliación que tienen la forma (7.3) forman un subespacio vectorial de

$$H^0(\mathbb{CP}^2, \mathscr{T}\mathbb{CP}^2(d-1)),$$

este subespacio consta de foliaciones inestables, entonces su proyectivización es una subvariedad del cono nulo formado por foliaciones de grado d que son $\lambda -$ *Riccati*.

Observación: En el caso de foliaciones de grado 2 esta subvariedad corresponde a CN_1 (ver Teorema 5.9).

7.1 Una singularidad de multiplicidad máxima

Consideremos la siguiente foliación

$$X = -p(z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial z_0} + q(z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + q(z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial z}$$

donde p y q son polinomios homogéneos de grado d en las variables z_1 y z_2.

El punto $p_0 = (1 : 0 : 0)$ es singular. Veamos X en la carta afin U_0 para calcular la multiplicidad de este punto

$$X_0 = \begin{pmatrix} q(z_1,z_2) + z_1 p(z_1,z_2) \\ q(z_1,z_2) + z_2 p(z_1,z_2) \end{pmatrix}.$$

Entonces la multiplicidad m de p_0 es:

$$m = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[z_1,z_2]_{(0,0)}}{< q(z_1,z_2) + z_1 p(z_1,z_2), q(z_1,z_2) + z_2 p(z_1,z_2) >},$$

tenemos que

$$< q(z_1,z_2) + z_1 p(z_1,z_2), q(z_1,z_2) + z_2 p(z_1,z_2) > = < p(z_1 - z_2), q + z_2 p >$$

por lo tanto

$$m = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[z_1,z_2]_{(0,0)}}{< p(z_1 - z_2), q + z_2 p >} = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[z_1,z_2]_{(0,0)}}{< p, q + z_2 p >} + dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[z_1,z_2]_{(0,0)}}{< z_1 - z_2, q + z_2 p >}.$$

El primer sumando se calcula facilmente aplicando el Teorema de Bezout

$$dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[z_1\,,z_2]_{(0,0)}}{<p,q+z_2p>}=dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[z_1\,,z_2]_{(0,0)}}{<p,q>}=d^2.$$

Sólo resta calcular el segundo sumando, para ello necesitamos considerar dos casos:

1) Supongamos que z_1-z_2 no divide a q

$$dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[z_1\,,z_2]_{(0,0)}}{<z_1-z_2,q+z_2p>}=dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[z_1]_0}{<az_1^{d+1}+bz_1^d>}=dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[z_1]_0}{<z_1^d(az_1+b)>}=d$$

pues az_1+b es invertible en la localización si $b\neq 0$.

En este caso la multiplicidad de p_0 es d^2+d.

2) Supongamos que z_1-z_2 divide a q

$$dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[z_1\,,z_2]_{(0,0)}}{<z_1-z_2,q+z_2p>}=dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[z_1]_0}{<az_1^{d+1}>}=d+1$$

En este caso la multiplicidad es d^2+d+1, entonces la multiplicidad de p_0 es máxima.

En la sección anterior vimos que las foliaciones inestables para

$$\lambda(t)=\begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0\\ 0 & t^{-1} & 0\\ 0 & 0 & t^{-1}\end{pmatrix}$$

con grado mayor o igual a cinco no eran, necesariamente, $\lambda-$*Riccati*, sin embargo, para esta familia de foliaciones con un punto singular de multiplicidad mayor o igual a d^2+d tenemos la siguiente

Proposición 7.4. *Sea*

$$X=-p(z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial z_0}+q(z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial z_1}+q(z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial z}$$

una foliación de grado d. Esta foliación tiene una singularidad de multiplicidad mayor o igual a d^2+d en $p_0=(1:0:0)$ y es $\lambda-$Riccati. Las foliaciones X y X_λ tienen d soluciones comunes.

Demostración. La primera parte de la afirmación ha sido probada anteriormente. Consideremos la foliación X en la carta afín U_0

$$X_0=\begin{pmatrix} q(z_1,z_2)+z_1p(z_1,z_2)\\ q(z_1,z_2)+z_2p(z_1,z_2)\end{pmatrix}.$$

La 1-forma correspondiente se transforma mediante el cambio $z_1=w_1$ y $z_2=w_1w_2$ en:

$$\begin{gathered}(q(z_1,z_2)+z_2p(z_1,z_2))dz_1-(q(z_1,z_2)+z_1p(z_1,z_2))dz_2\\ \downarrow z_1=w_1\quad z_2=w_1w_2\\ (q(1,w_2)-q(1,w_2)w_2)dw_1+(w_1q(1,w_2)+w_1^2p(1,w_2))dw_2,\end{gathered}$$

entonces

$$\widetilde{X}_0=\begin{pmatrix} w_1^2p(1,w_2)+w_1q(1,w_2)\\ w_2q(1,w_2)-q(1,w_2)\end{pmatrix}$$

La foliación $\widetilde{X}_0$ sólo tiene tangencias con $\widetilde{X}_{\lambda_0}$ en las hojas comunes $w_2=k$, donde k es raiz de

$$w_2q(1,w_2)-q(1,w_2).$$

En el infinito, es decir, en $z_0=0$ pasa lo siguiente

$\{(0:z_1:z_2)\}\subset\mathbb{CP}^2$ es curva de singularidades de X_λ
y
$\{(0:z_1:z_2)\}\subset\mathbb{CP}^2$ no es hoja de X
no tiene singularidades de esta foliación.

Por lo tanto X es $\lambda-$ Riccati.

Sea

$$q(z_1,z_2)=\sum_{i=0}^{d}a_iz_1^{d-i}z_2^i$$

entonces

$$q(z_1,kz_1)=\sum_{i=0}^{d}a_ik^iz_1^d$$

el polinomio $\sum_{i=0}^{d} a_i k^i = 0$ en k tiene d soluciones. Entonces $F(z_1, z_2) = kz_1 - z_2 = 0$ es hoja común de X_λ y X; para X_λ lo hemos probado ya, para X tenemos

$$-p(z_1, z_2)\frac{\partial F}{\partial z_0} + q(z_1, z_2)\frac{\partial F}{\partial z_1} + q(z_1, z_2)\frac{\partial F}{\partial z_2} = q(z_1, z_2)(k-1),$$

entonces, como F divide al polinomio q, la curva que F define es hoja de X. □

Apéndice A

Resolución de singularidades de foliaciones de superficies

A.1 Singularidades reducidas

Sea S una superficie compleja y $\mathscr{F}$ una foliación de S y

$$\begin{aligned} v : \mathbb{C}^2 &\to T\mathbb{C}^2 \\ (z, w) &\mapsto F_1(z, w)\frac{\partial}{\partial z} + F_2(z, w)\frac{\partial}{\partial w} \end{aligned}$$

el campo vectorial holomorfo en $\mathbb{C}^2$ que la define a través de sus curvas integrales locales.

Definición A.1. *Sea $p \in S$ una singularidad aislada de $\mathscr{F}$. Una* ***separatriz*** *de $\mathscr{F}$ por p es una curva holomorfa irreducible C (posiblemente singular) que pasa por p y es invariante por $\mathscr{F}$.*

Definición A.2. *Una singularidad es* ***dicrítica*** *si pasan por ella una infinidad de separatrices.*

Definición A.3. *La singularidad p se llama* ***reducida*** *si al menos uno de los valores propios λ_1 o λ_2 de $Dv(p)$ es distinto de cero y el cociente $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$.*

Una singularidad reducida se llama ***no-degenerada*** *si λ_1 y λ_2 son distintos de cero y en caso contrario se llama* ***nodo-silla****.*

Haremos una breve descripción de las singularidades reducidas de acuerdo a su número característico λ:

1. $\lambda \notin \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ (dominio de Poincaré):
   $\mathscr{F}$ es linealizable alrededor de p (Teorema de linealización de Poincaré), es decir, en coordenadas adecuadas (z, w) centradas en p, $\mathscr{F}$ es generada por el campo vectorial

$$z\frac{\partial}{\partial z} + \lambda w\frac{\partial}{\partial w}$$

Esta ecuación es integrable, y tiene como soluciones

$$k_1 z^\lambda - k_2 w = 0,$$

donde $k_i \in \mathbb{C}$. Sin embargo las únicas soluciones holomorfas son {z=0} y {w=0}, ya que λ es un complejo puro o un real no racional.

Entonces la singularidad p sólo tiene dos separatrices.

2. $\lambda \in \mathbb{R}^-$ (dominio de Siegel):
   En esta caso la linealización no es siempre posible, sin embargo, como en el caso anterior, existen sólo dos separatrices $\{w = 0\}$ y $\{z = 0\}$.

3. $\lambda = 0$ (nodo silla):
   En este caso existe un cambio de coordenadas holomorfo tal que $\mathscr{F}$ se puede escribir como

$$[z(1 + aw^k) + wF(z, w)]\frac{\partial}{\partial z} + w^{k+1}\frac{\partial}{\partial w}$$

   donde k es un natural, $a \in \mathbb{C}$ y F es una función holomorfa que se anula en $(0, 0)$ hasta orden k. La curva $\{w = 0\}$ es una separatriz llamada "separatriz fuerte".

   Algunas veces, por ejemplo si $F(z, w) = 0$, existe una segunda separatriz $\{z = 0\}$, llamada "separatriz débil".

A.2 Blowing-up

Dada una superficie algebraica S y un punto p en ella, el "blowing-up" en p dá como resultado una nueva superficie $\tilde{S}$ que es, intuitivamente, la misma superficie S en la que el punto p ha sido sustituido por todas las direcciones tangentes posibles en él, es decir, por un $\mathbb{CP}^1$.

Entonces el "blowing-up" (explosión) es un morfismo birracional ϵ de variedades algebraicas:

$$\epsilon : \tilde{S} \to S$$

tal que ϵ restringido a $\tilde{S} - \epsilon^{-1}(p)$ es un isomorfismo de variedades algebraicas y $\epsilon^{-1}(p)$ es isomorfo a $\mathbb{CP}^1$, esta curva $\epsilon^{-1}(p)$ se llama el "divisor excepcional" de la explosión.

Sea $(0, 0) \in U$ donde U es un abierto de $\mathbb{C}^2$, entonces, localmente, la explosión en $(0, 0)$ está definida por

$$\tilde{U} = \{(z, w, Z, W) \in U \times \mathbb{CP}^1 : zW - wZ = 0\}.$$

A.3 Levantamiento de foliaciones

Sea $\mathscr{F}$ una foliación de S generada por una 1-forma w con ceros aislados.

Sea

$$\epsilon : \tilde{S} \to S$$

una explosión en un punto $p \in S$, singular para $\mathscr{F}$. Sea E el divisor excepcional de la explosión.

La 1-forma $\epsilon^*(w)$ es holomorfa con un conjunto no discreto de ceros, ya que contiene a E con algún orden. Este orden es un número natural que llamaremos $l(p)$.

Cuando este conjunto no discreto de ceros es eliminado de $\epsilon^*(w)$ obtenemos la 1-forma $\widetilde{w}$ con ceros aislados.

En dos vecindades con intersección no vacía las 1-formas son holomorfas y nuevamente difieren por una función holomorfa nunca nula, entonces globalmente definen una foliación $\widetilde{\mathscr{F}}$ en $\widetilde{S}$.

El número $l(p)$ puede calcularse facilmente. Sea $a(p)$ la multiplicidad algebraica de p en w, es decir, la mínima potencia en w con que se anula p, entonces

si E es invariante para $\widetilde{\mathscr{F}}$, $l(p) = a(p)$.

si E es no-invariante para $\widetilde{\mathscr{F}}$, $l(p) = a(p) + 1$.

Observación: si la explosión en la superficie se hace en un punto p no-singular de la foliación y ésta se levanta, entonces $l(p) = 0$ y por tanto el divisor excepcional es invariante, pues si no fuera así $l(p) = a(p) + 1 > 0$.

A.4 Teorema de resolución

Teorema A.4. *(ver [9]) Sea $p \in S$ un punto singular de $\mathscr{F}$. Existe una sucesión de explosiones $\epsilon : \widetilde{S} \to S$ sobre p tal que $\widetilde{\mathscr{F}}$ tiene sólo singularidades reducidas en $\epsilon^{-1}(p)$*

Demostración. Sean $p_1,\ldots,p_n$ las singularidades en E. Se debe usar la fórmula:

$$\sum_{j=1}^{n} m(p_j) = m(p) - l(p)^2 + l(p) + 1$$

Esto garantiza que la multiplicidad de las singularidades disminuye y por tanto en algún momento tendran parte lineal distinta de cero.

Después se dividen los casos en parte lineal (no cero) nilpotente o no nilpotente. □

Proposición A.5. *La singularidad p de $\mathscr{F}$ es dicrítica si y sólo si existe una sucesión de explosiones $\epsilon : \tilde{S} \to S$ sobre p y una componente irreducible E_0 de $E = \epsilon^{-1}(p)$ que no es invariante por $\tilde{\mathscr{F}}\epsilon^*(\mathscr{F})$.*

Demostración. Si existe tal ϵ y tal E_0 no invariante de $\tilde{\mathscr{F}}$ entonces un punto genérico de E_0 es regular, la hoja de este punto no está contenida en E_0 y su imagen bajo ϵ es una separatriz para p. Por lo tanto la singularidad en S es dicrítica.

Supongamos que p es dicrítica. Sea $\epsilon : \tilde{S} \to S$ una sucesión de explosiones sobre p y C una separatriz de este punto entonces la transformada estricta $\tilde{C}$ de C es una separatriz de $\tilde{\mathscr{F}}$ en $\tilde{p} \in E$.

Si E es invariante entonces $\tilde{p}$ es singular pues tiene al menos dos separatrices. Podemos considerar estas singularidades reducidas (por el teorema de resolución) entonces p tiene en S un número finito de separatrices.

Esto contradice el hecho de que p es dicrítica. Entonces E tiene una componente no-invariante. □

A.5 Ejemplo

Consideremos la foliación

$$X = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Los puntos singulares de esta foliación son

$$\begin{aligned} p_0 &= (1:0:0) \\ p_1 &= (0:1:0) \\ p_2 &= (0:0:1), \end{aligned}$$

y tiene como primera integral

$$\begin{aligned} F : \mathbb{CP}^2 &\to \mathbb{CP}^1 \\ (x:y:z) &\mapsto \frac{xz}{y^2}. \end{aligned}$$

Así que las soluciones algebraicas irreducibles de esta foliación están dadas por los polinomios

$$k_1 xz - k_2 y^2 = 0$$

donde $k_i \in \mathbb{C}$. Estas soluciones pasan todas por los puntos singulares p_0 y p_2.

La foliación X en la carta afín U_0 de $\mathbb{CP}^2$ tiene la siguiente forma

$$X_0 = \begin{pmatrix} y \\ 2z \end{pmatrix}$$

En este caso $\lambda \in \mathbb{Q}^+$ por lo tanto es necesario explotar en $(0,0)$.

Sea W_0 la forma correspondiente a la foliación en coordenadas afines definida anteriormente. El proceso de explosiones hasta tener una singularidad reducida en p_0 es:

$$\begin{aligned} W_0 &= 2zdy - ydz \\ &\downarrow y = w_1 \quad z = w_1 w_2 \\ w_2 dw_1 &- w_1 dw_2 \\ &\downarrow w_1 = u \quad w_2 = uv \\ \tilde{W}_{\lambda_0} &= -u^2 dv, \end{aligned}$$

así que

$$\tilde{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El divisor excepcional no es invariante y ya no hay puntos singulares en él.

Trabajaremos ahora en la carta afín U_1 de $\mathbb{CP}^2$. En esta carta tenemos la foliación X es

$$X_1 = \begin{pmatrix} -x \\ z \end{pmatrix}.$$

En este caso $\lambda \notin \mathbb{Q}^+$ así que $(0,0)$ es singularidad reducida.

Finalmente en la carta U_2 tenemos

$$X_2 = \begin{pmatrix} -2x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Entonces $\lambda \in \mathbb{Q}^+$ así que es necesario explotar en $(0,0)$. Este caso es completamente análogo al de U_0.

Apéndice B

Monodromía

Sea X una foliación en una superficie S y

$$F : S \to \mathbb{CP}^1$$

una fibración racional tal que las fibras, excepto un número finito, son transversales a las hojas de X. Y tal que las fibras no transversales $\{F^{-1}(p_1), ..., F^{-1}(p_n)\}$ son hojas de la foliación.

Definición B.1. *Si se satisface lo anterior diremos que X es una foliación de Riccati respecto a F.*

Estas condiciones definen una representación de monodromía

$$\rho : \pi(\mathbb{CP}^1 - \{p_1, ...p_n\}, p) \to Bihol(F^{-1}(p)),$$

donde $\pi(\mathbb{CP}^1 - \{p_1, ...p_n\}, p)$ es el grupo fundamental con base en el punto p y $Bihol(F^{-1}(p))$ el grupo de biholomorfismos de la fibra $F^{-1}(p)$.

Esta aplicación está definida del siguiente modo.

Sea $\alpha \in \pi(\mathbb{CP}^1 - \{p_1, ...p_n\}, p)$ y $s \in F^{-1}(p)$. Veremos cuál es la imagen de s bajo el biholomorfismo $\rho(\alpha) := \rho_\alpha$.

Si $\mathcal{L}_s$ es la hoja de X por s, entonces

$$F_{\mathcal{L}_s} : \mathcal{L}_s \to \mathbb{CP}^1 - \{p_1, ..., p_n\}$$

es una aplicación cubriente y, por tanto, el lazo α en $\mathbb{CP}^1 - \{p_1, ..., p_n\}$ puede levantarse a un único lazo $\tilde{\alpha}$ en $\mathcal{L}_s$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = s$. Tenemos, entonces, el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L}_s \arrow[d, "F_{\mathcal{L}_s}"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"'] & \mathbb{CP}^1 - \{p_1, ..., p_n\}. \end{tikzcd}$$

Entonces $\rho_\alpha(s)$ está dado por

$$\begin{aligned} \rho : \pi(\mathbb{CP}^1 - \{p_1, ...p_n\}, p) &\to Bihol(F^{-1}(p)) \\ \alpha &\mapsto \rho_\alpha : F^{-1}(p) \to F^{-1}(p) \\ & \qquad s \mapsto \tilde{\alpha}(1). \end{aligned}$$

La representación de monodromía de una foliación X describe aspectos importantes del comportamiento de X. Por ejemplo:

1. Hojas densas de X corresponden a órbitas densas de ρ
2. La hoja $\mathcal{L}_s$ de X es algebraica si, y sólo si, s es un punto periódico de ρ_α para todo $\alpha \in \pi(\mathbb{CP}^1 - \{p_1, ...p_n\}, p)$.

Apéndice C

Programa escrito en C++

El siguiente programa computacional escrito en lenguaje $C++$ cálcula el subgrupo uniparamétrico diagonal que maximiza la función de Kempf para foliaciones de $\mathbb{CP}^2$ Mumford-inestables.

```
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop

#include "principal1.h"

#pragma hdrstop
#include <condefs.h>
#include <iostream.h>
#include <fstream.h>
#include <iomanip.h>
#include <stdlib.h>
#include <string>
#include <vector>
#include <sstream>

using namespace std;

vector<float> restra, restrb, restrc;
vector<float> vertx, verty, cercax, cercay;
vector<float> denver, dencerca;

string ecuacion(float a, float b, float c) {
    ostringstream out;
    int width = 16;
    int precision = 6;
    out <<  setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint);
    out << "\t";
    if(a==1) out << setw(width) <<   "   x ";
```

```
    else if(a==-1) out << setw(width) <<   "  -x ";
    else if(a==0)  out << setw(width) <<   "   ";
    else out << setw(width-2) <<  setprecision(precision) << a << "x ";
    if(b==1) out << "+" << setw(width) <<   " y ";
    else if(b==-1) out << "-" << setw(width) << " y ";
    else if(b==0)  out << " " << setw(width) << "   ";
    else if(b<0) out << "-" << setw(width-2)
                    << setprecision(precision) << (-b) << "y ";
    else out << "+" << setw(width-2) << setprecision(precision) << b << "y ";
    out << " >= " << c << endl;
    return (out.str());
}

bool cumpleRestrs(float x, float y) {
    int lim = restra.size();
    for(int i=0; i<lim; i++)
        if( restra[i]*x + restrb[i]*y < restrc[i] )  return false;
    return true;
}

void calculaVertices() {
    int i, j, lim = restra.size();
    float  determ, x, y;
    cout << "\tVertices: " << endl;
    for(i=0; i<lim; i++)
        for(j=i+1; j<lim; j++) {
            determ = restra[i]*restrb[j] - restra[j]*restrb[i];
            if(determ==0) continue;
            x = (restrc[i]*restrb[j] - restrc[j]*restrb[i])/determ;
            y = (restra[i]*restrc[j] - restra[j]*restrc[i])/determ;
            if(cumpleRestrs(x,y)) {
                vertx.push_back(x);
                verty.push_back(y);
                denver.push_back(determ);
                cout << "\t(" << x << ", \t" << y << ")"<< endl;
            }
        }
}

void calculaCercanos() {
    int i, lim = restra.size();
    float  dent, t, x, y, a, b, c;
    if(b==0){
    cout << "\tPuntos mas cercanos sobre las rectas: " << endl;
```



```
for(i=0; i<lim; i++) {
    a = restra[i];
    c = restrc[i];
    x = 1/a;
    y = 0;
    if(cumpleRestrs(x,y)) {
            cercax.push_back(x);
            cercay.push_back(y);
            cout << "\t(" << x << ", \t" << y << ")"<< endl;
     }
    }
}
else {
cout << "\tPuntos mas cercanos sobre las rectas: " << endl;
for(i=0; i<lim; i++) {
    a = restra[i];
    b = restrb[i];
    c = restrc[i];
    dent = 2*b*(b*b + a*a - a*b);
    t = c*(b - 2*a)/dent;
    x = -t*b;
    y = (c + a*b*t)/b;
    if(cumpleRestrs(x,y)) {
            cercax.push_back(x);
            cercay.push_back(y);
            dencerca.push_back(dent*b);
            cout << "\t(" << x << ", \t" << y << ")"<< endl;
     }
    }
}
}

void calculaMinimo(float &x, float &y, float &min, float &den) {
    int i, indv=-1, indc=-1, lim1=vertx.size(), lim2=cercax.size();
    float norma, minv, minc;
    if(lim1>0) {
    minv = vertx[0]*vertx[0] + verty[0]*verty[0] + vertx[0]*verty[0];
    indv = 0;
    for(i=1; i<lim1; i++) {
        norma = vertx[i]*vertx[i] + verty[i]*verty[i] + vertx[i]*verty[i];
        if(norma<minv) {
            minv = norma;
            indv = i;
        }
```

```
    }
    }
    if(lim2==0) {
        x = vertx[indv];
        y = verty[indv];
        den = denver[indv];
        min = minv;
        return;
    }
    minc = cercax[0]*cercax[0] + cercay[0]*cercay[0] + cercax[0]*cercay[0];
    indc = 0;
    for(i=1; i<lim2; i++) {
        norma = cercax[i]*cercax[i] + cercay[i]*cercay[i] + cercax[i]*cercay[i];
        if(norma<minc) {
            minc = norma;
            indc = i;
        }
    }
    if(lim1==0) minv = minc+1;
    if(minv<minc) {
        x = vertx[indv];
        y = verty[indv];
        den = denver[indv];
        min = minv;
    }
    else {
        x = cercax[indc];
        y = cercay[indc];
        den = dencerca[indc];
        min = minc;
    }
}


//---------------------------------------------------------------------------
#pragma argsused
int main() {
    string sufijo;
    cout << "\n\tSufijo de archivo: ";
    cin >> sufijo;
    string snfile("coef" + sufijo + ".txt");
    ifstream infile(snfile.c_str(), ios::in);
    if(!infile) {
        cerr << "\n\tNo fue posible leer el archivo " << snfile << "\n";
```



```
        exit(1);
    }
    float i, j, k, entrada;
    float a, b, c=1, d;
    cout << "\n\tDatos del archivo:" << endl;
    while(infile >> i >> j >> k >> entrada) {
        d = i + j + k;
        if(entrada==1) {
            a = d + 1 - 2*i - j;
            b = d - i - 2*j;
        }
        else if(entrada==2) {
            a = d - 2*i - j;
            b = d + 1 - i - 2*j;
        }
        else {
            a = d - 1 - 2*i - j;
            b = d - 1 - i - 2*j;
        }
        restra.push_back(a);
        restrb.push_back(b);
        restrc.push_back(c);
        cout << ecuacion(a,b,c);
    }
    calculaVertices();
    calculaCercanos();
    float x, y, den, min;
    cout << "\n\tPunto con norma minima: ";
    calculaMinimo(x, y, min, den);
    cout << "(" << x << ", " << y << ")
                | norma=" << min << ", den=" << den << endl;
    cout << "\t
                (" << (den*x) << ", " << (den*y) << ") " << endl;


    return 0;
}
```

Bibliografía

[1] Marco Brunella: *Birrational Geometry of Foliations*. IMPA, 2000.

[2] Xavier Gómez-Mont, George Kempf: *Stability of Meromorphic Vector Fields in Projective Spaces*. Comment. Math. Helvetici 64 (1989) 462-473.

[3] Xavier Gómez-Mont, Laura Ortiz-Bobadilla: *Sistemas Dinámicos Holomorfos en Superficies*. SMM, 1989.

[4] Robin Hartshorne: *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1997.

[5] John Fogarty, Frances Kirwan, David Mumford: *Geometric Invariant Theory*. Springer-Verlag, 1994.

[6] Jean-Pierre Jouanolou: *Equations de Pfaff Algébriques*. Springer-Verlag, 1979.

[7] George R. Kempf: *Instability in Invariant Theory*. Annals of Mathematics 108 (1978) 299-316.

[8] Peter Newstead: *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*. Springer-Verlag, 1978.

[9] A. Seidenberg: *Reduction of singularities of the differential equation* $Ady = Bdx$. Amer. J. Math. 89 (1968) 248-269.