Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

CIMAT

Estructuras Geométricas en Superálgebras de Lie Basadas en gl_n y Asociadas a la Representación Adjunta

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Gil Salgado González

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. O. Adolfo Sánchez Valenzuela

Agosto 10 de 2001 Guanajuato, Gto. México

Para Marisol

Agradecimientos.

A mis padres: **Eduardo** y **Socorro**.

A **Adolfo Sánchez Valenzuela**,
por su amistad, confianza y apoyo que me brindó durante el desarrollo de este trabajo.

Al **CIMAT**,
como institución por los tres años de apoyo recibidos y en especial al Prof. Francisco Mirabal, sin el cual el CIMAT y todo Posgrados sería completamente distinto.

Al **CONACyT**,
por la beca para estudios de doctorado que me otorgó durante el periodo de enero de 2000 a agosto de 2001 y por los apoyos recibidos a través del proyecto 28491E "Análisis geométrico; estructuras geométricas distinguidas II" del cual formé parte como tesista.

No se crea que hay uno solo de nosotros que conozca tan graves misterios en todo su alcance. La verdad unas pocas veces parece presentársenos clara como el día: otras veces nos la ocultan las cosas materiales y los hábitos, de modo que volvemos a caer en profunda noche ... Hay entre nosotros algunos para quienes el relámpago brilla a cada momento, teniéndolos casi constantemente envueltos en luz, de modo que la noche es para ellos como el claro día ... según estas circunstacias varían los grados de los hombre perfectos. En cuanto aquellos que no ven jamás la luz, sino que andan errantes en la noche... aquellos para quienes la verdad está del todo oculta, ésos son el vulgo, y para ellos no hay lugar en este tratado.

Maimónides

Índice.

Introducción.

Clasificar objetos matemáticos es fundamental para el entendimiento pleno de las matemáticas, por esta razón se dedica esfuerzo e ingenio constante a esta actividad. En nuestro caso, los objetos matemáticos que nos interesa aquí clasificar son superálgebras de Lie definidas por un cierto tipo de restricciones que especificaremos en breve. En general, se cuenta con dos resultados de clasificación de superálgebras de Lie debidos a Kac (ver [6] y [16]) y cabe señalar que reciéntemente se han clasificado superálgebras de Lie bajo condiciones específicas que también detallaremos en breve. El hecho es que aún estamos lejos de obtener una clasificación completa.

Los Teoremas de Kac son, una clasificación de las superálgebras de Lie simples y una clasificación de *algunas* superálgebras de Lie que satisfacen lo siguiente: la superálgebra admite una $\mathbb{Z}$-graduación, digamos $G = \bigoplus_{n\geq -1} G_n$, compatible con la $\mathbb{Z}_2$-graduación original, la representación inducida por G_0 en G_{-1} via $ad(G_0) : G_{-1} \longrightarrow G_{-1}$ es irreducible y el conjunto de elementos homogéneos (de grado $n \geq 0$) que conmutan con G_{-1} es el conjunto cero. Notemos entonces que si empezamos con una algebra de Lie $\mathfrak{h}$, y una representación irreducible $\rho : \mathfrak{h} \longrightarrow EndV$, la única posibilidad para tener las condiciones impuestas por Kac son: definir $G_0 = \mathfrak{h}$, $G_{-1} = V$, $G_i = 0$ si $i \geq 1$, además de que $\{X \in G_0 \mid [X, G_{-1}] = 0 \} = \{0\}$, y por tanto, la estructura de superálgebra obtenida es *trivial* en el siguiente sentido: el *supercorchete* de dos elementos impares deberá ser cero. Por otro lado, si $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}_2$ y tomamos su representación irreducible de dimensión 3 (que no es otra cosa que $V = \mathfrak{sl}_2$, donde $\mathfrak{gl}_2$ actúa vía $\rho = ad$), uno puede demostrar que hay, hasta isomorfismo, *dos* estructuras distintas de superálgebra de Lie en $\mathfrak{h} \oplus V$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

En [1] se considera la siguiente variación: sea V un espacio vectorial y supongamos que admite una métrica de signatura (p,q), sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p,q)$ el álgebra de Lie que preserva (infinitesimalmente) esta métrica. Sea $\mathfrak{g} \oplus V$ su suma semidirecta. Sea $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1$ la superálgebra de Lie definida por las condiciones $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{g} \oplus V$ y $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}$. La acción de $\mathfrak{h}_0$ en $\mathfrak{h}_1$ es tal que $\mathfrak{g}$ actúa vía *ad*, mientras que V actúa trivialmente. Denotemos por Γ la función bilineal, simétrica $\Gamma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus V$ definida por el corchete de Lie de dos elementos impares. Los autores de [1] se plantean el problema de clasificar estructuras de superálgebra de Lie imponiendo la restricción de que $\Gamma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \oplus V$ tenga su imagen totalmente contenida en V; de esto último, la *identidad* $\mathbb{Z}_2$*-graduada de Jacobi* para tres elementos impares se satisface trivialmente y basta entonces clasificar funciones $\Gamma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow V$ simétricas, bilineales y $\mathfrak{g} \oplus V$-equivariantes para tener clasificadas todas las posibles estructuras de superálgebra de Lie en $(\mathfrak{g} \oplus V) \oplus \mathfrak{g}$.

La filosofía de los teoremas de carácter general como los demostrados por V. Kac es la de introducir hipótesis tan amplias y generales como sea posible, pero que al mismo tiempo permitan emplear técnicas con las que el problema de clasificación pueda reducirse rápidamente al de determinar ciertos tipos de formas canónicas ya estudiadas. Por ejemplo, los teoremas de Kac sobre superálgebras de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1$, emplean hipótesis de simplicidad o semisimplicidad en el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_0$ y/o hipótesis de irreducibilidad o reducibilidad completa en la acción de ésta sobre $\mathfrak{h}_1$, o sobre algún subespacio $V \subset \mathfrak{h}_1$. Uno se convence de que casos más generales en los que $\mathfrak{h}_0$ es una suma directa de subálgebras de Lie cuyas acciones sobre diversos subespacios de $\mathfrak{h}_1$ producen una descomposición completa, pueden obtenerse como corolarios. En estos corolarios, muy bien puede suceder que algunos detalles finos o importantes para problemas más específicos, queden ocultos.

Por otro lado, la filosofía de particularizar más algunos problemas y clasificar superálgebras de Lie con las particularidades que se plantean en [1], por ejemplo, responde al interés concreto que tienen tales superálgebras en algunas aplicaciones de carácter físico o geométrico. Concretamente, en el problema abordado en [1], se tiene la gran motivación de que el álgebra de Poincaré es un ejemplo posible de los $\mathfrak{h}_0$'s planteados y que una clasificación de las superálgebras en las que $\mathfrak{h}_1$ es el álgebra de Lorentz producirá respuestas de interés para la física.

Observemos aquí que el problema planteado en [1] puede ubicarse en un contexto más general: clasificar superálgebras de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1$ para las que el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_0$ es reductiva — digamos, de la forma $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$ — y para las que se ha fijado una representación concreta en $\mathfrak{h}_1 = V$ — digamos, $\rho : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m} \to \operatorname{End} V$. Clasificar las posibles estructuras de superálgebra que se pueden definir en $\mathfrak{h}$ bajo estas condiciones, equivale a encontrar todas las posibles aplicaciones bilineales simétricas $\Gamma : V \times V \to \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$ equivariantes y que satisfacen la *identidad de Jacobi* aplicada a tres elementos impares.

El problema que nos planteamos abordar, y que se enmarca dentro del esquema general descrito en el párrafo anterior, emplea los elementos más sencillos posibles: sea $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{sl}_n$ con $\mathfrak{m} = \{0\}$, o bien $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{gl}_n = \mathfrak{sl}_n \oplus \mathfrak{z}$ en el que $\mathfrak{m}$ es unidimensional. Por simplicidad en la notación escribiremos $\mathfrak{g}$, indistintamente en los dos casos, en lugar de $\mathfrak{h}_0$. Dada una representación $\rho : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$, queremos determinar hasta isomorfismo *todas* las estructuras de superálgebra de Lie que admite $\mathfrak{g} \oplus V$. Notemos que aquí hay un subproblema que también es interesante por sí mismo, y es el siguiente: cuando $V = \mathfrak{g}$, la representación natural a estudiar es la representación adjunta, y entonces el problema planteado se traduce en considerar $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ y $\rho = ad$, ¿Cuántas estructuras distintas de superálgebra admite $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$?

Esta última pregunta es en realidad el tema central de esta tesis. El propósito de entender las estructuras de superálgebra de Lie en $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ es que en tales superálgebras se encuentran los orígenes conceptuales de la llamada *supersimetría*. Conceptualmente, la idea original requería poder transformar elementos del espacio de representación V — o como se le designa en la literatura de la física, del *sector fermiónico* — al álgebra $\mathfrak{g}$, o *sector bosónico* y todo esto debía poderse hacer de manera equivariante para la acción de $\mathfrak{g}$. Cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ y trabajamos sobre el campo de los números complejos, la superálgebra que resulta de considerar $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ queda entonces basada en el álgebra de Lorentz. Notemos que, por el lema de Schur, básicamente sólo hay una manera de transformar equivariantemente el sector fermiónico en el bosónico. Tal transformación es un ejemplo de lo que en la literatura se llama *operador de cambio de paridad.* En presencia de la acción del álgebra de Lie involucrada, tales operadores se vuelven muy rígidos. Uno de los propósitos de esta tesis es estudiar también los operadores de cambio de paridad que resultan en las superálgberas del tipo $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ que estudiamos y emplearlos de manera natural para determinar estructuras geométricas en $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$. Cabe mencionar que hay muchas instancias en la literatura existente en donde los *cambios de paridad* ocurren de manera muy poco entendible o mal justificada. En esta tesis adoptamos para tales operadores un significado concreto y consistente con las restricciones algebraicas de las estructuras estudiadas.

Los resultados más importantes de esta tesis y que hasta donde sabemos, son nuevos, con excepción del Lema 3.1.1. se encuentran en el Capítulo 3, algunos de los resultados son consecuencias sencillas de las definiciones y otros (como los Teoremas 3.2.8., 3.2.9., 3.4.3., 3.4.5.) no son triviales El Capítulo 1 es introductorio y define los conceptos de: superálgebras de Lie, morfismos, automorfismos y proporciona ejemplos de superálgebras de Lie asociadas a estructuras geométricas. En el Capítulo 2 se plantean de manera precisa los problemas que abordamos y que son básicamente los comentados en los párrafos anteriores. En el Capítulo 3 se demuestra que, hasta isomorfismo sobre el campo de los números complejos, sólo hay una estructura de superálgebra de Lie en $\mathfrak{sl}_2 \oplus V$ donde V es cualquier $\mathfrak{sl}_2$-módulo y que hay ocho distintas en $\mathfrak{gl}_2 \oplus \mathfrak{gl}_2$ sobre el campo de los números complejos (diez sobre los reales). En general, se demuestra que para $n \geq 3$ hay quince estructuras de superálgebra de Lie distintas en $\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$ y una familia uniparamétrica adicional. La clasificación se obtiene después de elegir *formas canónicas* para las familias de superálgebras de Lie que satisfacen las condiciones impuestas y que en general demostramos que dependen de cuatro parámetros complejos. La técnica que empleamos consiste en descomponer el espacio $S^2(\mathfrak{gl}_n)$ de tensores simétricos en subespacios *irreducibles* y aplicar el Lema de Schur para determinar $Hom_{\mathfrak{gl}_n}(S^2(\mathfrak{gl}_n), \mathfrak{gl}_n)$. Es claro que esto puede generalizarse a cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y la dificultad radica en conocer de manera precisa la descomposición de $S^2(\mathfrak{g})$ en irreducibles.

Se determinan también los grupos de automorfismos de cada una de estas superálgebras y se dan condiciones necesarias y suficientes para que existan estructuras geométricas invariantes en cada una de ellas. Conviene hacer notar que en la literatura existente aparece una superálgebra de Lie cuyo superespacio subyacente es precisamente $\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$ (Ver [6] y [7] donde dicha superálgebra se denota por $Q(n)$). Sin embargo, la estructura de superálgebra de Lie de $Q(n)$ es aquella para la que el corchete de Lie de dos elementos impares es el llamado anticonmutador $\{X, Y\} = XY + YX$. En nuestro caso, ésta corresponde a una de las clases de isomorfía obtenida en el Teorema 3.4.3.

Quedan una gran variedad de problemas nuevos e interesantes por perseguir y resolver después. Además de los diversos problemas de carácter algebraico que se pueden plantear a lo largo de las líneas de esta tesis para álgebras de Lie reductivas distintas de $\mathfrak{gl}_n$, se tienen una gran cantidad de problemas de naturaleza geométrica que se asoman al ver las soluciones algebraicas aquí obtenidas, como por ejemplo, los que está abordando R. Peniche en su tesis doctoral: determinar las estructuras de supergrupo de Lie que se obtienen de las diversas superálgebras de Lie que hay en $\mathfrak{gl}_2 \oplus \mathfrak{gl}_2$. Esto da lugar a ocho supergrupos de Lie no isomorfos, todos los cuales están definidos sobre el mismo grupo de Lie subyacente GL_2, y a la realización de diversas acciones exóticas de dichos supergrupos en superespacios basados en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{C}^2$.

1. Preliminares.

1.1 Espacios Vectoriales Graduados.

El lector interesado puede ver [16].

Sea $G = \mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}_2$. $\mathbb{F}$ denotará al campo de los números complejos $\mathbb{C}$ o al campo de los números reales $\mathbb{R}$. Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$.

Una *G-graduación* en V, es una familia V_g, $g \in G$ de subespacios de V tales que

$$V = \bigoplus_{g \in G} V_g$$

junto con una función

$$|\cdot| : \bigcup_{g \in G} (V_g - \{0\}) \longrightarrow G$$

tal que $|v| = g$ si y sólo si $v \in V_g$.
Diremos que V es un espacio vectorial *G-graduado*, si V admite una G-graduación. A los elementos en el dominio de la función $|\cdot|$ les llamaremos *vectores homogéneos*. En el caso $G = \mathbb{Z}_2$, diremos que V es un *superespacio vectorial*, a los elementos de V_0 (resp. V_1) les llamaremos *vectores pares* (resp. *impares*).

Todo elemento $v \in V$ admite una única descomposición del tipo

$$v = \sum_{g \in G} v_g, \quad v_g \in V_g.$$

Los elementos v_g son las *componentes homogéneas* del vector v.

Sea W otro espacio vectorial G-graduado. Una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ es *homogénea* de grado $g \in G$ si

$$T(V_h) \subset W_{g+h} \quad \text{para toda} \quad h \in G$$

Diremos que T es un *homomorfismo* entre los espacios vectoriales G-graduados V y W, si T es una transformación lineal homogénea. T será un *isomorfismo* si tanto T como su inversa T^{-1} son homomorfismos.

Usualmente, los *homomorfismos* son las transformaciones lineales homogéneas de *grado cero*, sin embargo, a nosotros nos interesa hablar de *isomorfismos impares.*

Ejemplo:
Si V y W son espacios vectoriales G-graduados, entonces $V \times W$ también es un espacio vectorial G-graduado y su G-graduación está dada por

$$(V \times W)_g = \bigoplus_{m+n=g} (V_m \times W_n).$$

Más aún, la G-graduación de $V \times W$ induce una única G-graduación en $V \otimes W$ de tal forma que hace al siguiente diagrama categórico

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r] \arrow[d] & U \\ V \otimes W \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Al revés también es cierto. Dada la G-graduación de $V \otimes W$ se induce una G-graduación en $V \times W$ tal que el diagrama anterior es categórico.
$\square$

De hecho, si V y W son espacios vectoriales G-graduados, cualquier espacio vectorial que se obtenga de *manera natural* a partir de V y W, admitirá una G-graduación.

Sea A una álgebra sobre $\mathbb{F}$. Diremos que el álgebra A está *G-graduada* si A como espacio vectorial está G-graduado, i.e., $A = \oplus_{g \in G} A_g$, y además se satisface que

$$A_g A_h \subset A_{g+h} \quad \text{para todos} \quad g, h \in G.$$

Un *homomorfismo* entre las álgebras G-graduadas A y B es un homomorfismo entre los espacios vectoriales G-graduados subyacentes que además es un homomorfismo entre las álgebras A y B. Notar entonces que todo homomorfismo es homogéneo par.

Un *isomorfismo* entre las álgebras G-graduadas A y B es un homomorfismo tal que su inversa también es un homomorfismo.

Sea A una álgebra G-graduada asociativa y V un A-módulo izquierdo. El A-módulo V está G-graduado si V como espacio vectorial está G-graduado y además se satisface que

$$A_g V_h \subset V_{g+h} \quad \text{para todos} \quad g, h \in G.$$

Estas nociones para álgebras asociativas tienen también contrapartes en álgebras no asociativas (e.g., álgebras tipo Lie, Jordan, etc.).

Diremos que $\mathfrak{g}$ es una *superálgebra* si $\mathfrak{g}$ es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada

Una *superálgebra de Lie* es una superálgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, tal que si denotamos su producto por $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, entonces satisface:
1) $[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$ para todos elementos x, $y \in \mathfrak{g}$ homogéneos.
2) *Identidad $\mathbb{Z}_2$-graduada de Jacobi*
$(-1)^{|x||z|}[[x, y], z] + (-1)^{|z||y|}[[z, x], y] + (-1)^{|y||x|}[[y, z], x] = 0$,
para todos x, y, $z \in \mathfrak{g}$ homogéneos.

Ejemplo:
Sea V un superespacio vectorial. Entonces la $\mathbb{Z}_2$-graduación de V, induce una $\mathbb{Z}_2$-graduación en $EndV$ de la siguiente forma:

$$EndV = (EndV)_0 \oplus (EndV)_1$$

donde $(EndV)_0 = \{T : V \to V \mid T(V_\mu) \subset V_\mu\}$ y $(EndV)_1 = \{T : V \to V \mid T(V_\mu) \subset V_{\mu+1}\}$. La descomposición de $T \in EndV$ en sus componentes homogéneas $T = T_0 + T_1$ $(T_\mu \in (EndV)_\mu)$ es tal que

$$T_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

con $a \in End(V_0)$, $d \in End(V_1)$, $b \in Hom(V_1, V_0)$ y $c \in Hom(V_0, V_1)$.

En lo sucesivo haremos un uso sistemático de esta manera de escribir los endomorfismos de un superespacio vectorial.

Notar ahora que $EndV$ es una superálgebra asociativa y que V resulta ser un $EndV$-módulo izquierdo $\mathbb{Z}_2$-graduado. Más aún, si definimos $[T, S] = T \circ S - (-1)^{|T||S|} S \circ T$ para $S, T \in EndV$ homogéneos, y extendemos linealmente, tenemos que $(EndV, [\cdot, \cdot])$ es una superálgebra de Lie. $\square$

1.2 Cambios de Paridad.

Sea V un superespacio vectorial. Supongamos que $P : V \longrightarrow V$ es un isomorfismo tal que $P^2 = \pm I_V$. Si $P^2 = -I_V$, P es una *estructura compleja* en V. Si P es una transformación lineal homogénea impar y $P^2 = I_V$, entonces diremos que P es un *operador de cambio de paridad* (OCP). Notar que si V admite un operador de cambio de paridad P, entonces $dimV_0 = dimV_1$

Notemos que todo operador de cambio de paridad P, se puede escribir como

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}$$

de esto, se sigue que $P^2 = I_V$ si y sólo si $p \circ q = I_{V_0}$ y $q \circ p = I_{V_1}$.

En otras palabras, hay una biyección entre el conjunto de operadores de cambio de paridad $G_{OCP} = \{P : V \to V \mid |P| = 1 \text{ y } P^2 = I_V\}$ y $GL(V_0, V_1) = \{q : V_0 \to V_1 \mid q \text{ invertible}\}$. También existe una biyección entre el conjunto de operadores de cambio de paridad y el conjunto de *estructuras complejas de grado impar* dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & p \\ -q & 0 \end{pmatrix}.$$

Convención: Al campo $\mathbb{F}$ siempre lo pensaremos con la $\mathbb{Z}_2$-graduación trivial, i.e., $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}$ y $\mathbb{F}_1 = 0$.

1.3 ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS.

Una forma bilineal $\mathcal{G} : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$, es *supersimétrica* (resp. *superantisimétrica*) si satisface que

$$\mathcal{G}(u,v) = (-1)^{|u||v|}\mathcal{G}(v,u), \qquad \Big(\text{resp.} \quad \mathcal{G}(u,v) = -(-1)^{|u||v|}\mathcal{G}(v,u) \ \Big),$$

para todos los vectores homogéneos u, y v en V.
De manera análoga, una forma sesquilineal $\mathcal{G} : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$, es *supersimétrica* (resp. *superantisimétrica*) si satisface que

$$\mathcal{G}(u,v) = (-1)^{|u||v|}\overline{\mathcal{G}(v,u)}, \qquad \Big(\text{resp.} \quad \mathcal{G}(u,v) = -(-1)^{|u||v|}\overline{\mathcal{G}(v,u)} \ \Big),$$

además convenimos en que nuestras formas sesquilineales son $\mathbb{C}$ antilineales en el primer argumento y $\mathbb{C}$ lineales en el segundo.

Dado que $V \times V$ admite una $\mathbb{Z}_2$-graduación inducida por la $\mathbb{Z}_2$-graduación de V, concluimos que $Bil(V) = \{\mathcal{G} : V \times V \longrightarrow \mathbb{F} \mid \mathcal{G} \text{ es bilineal}\}$ hereda de manera natural una $\mathbb{Z}_2$-graduación.

Se sigue entonces que si la forma bilineal es *par* (resp. *impar*) entonces $\mathcal{G}(u,v) = 0$ para todos $|u| = |v| + 1$ (resp. $|u| = |v|$). La forma $\mathcal{G}$ es *no-degenerada* si $\mathcal{G}(u,v) = 0$ para toda $u \in V$, implica que $v = 0$.

Una *estructura* $\mathbb{Z}_2$*-ortogonal* (resp. $\mathbb{Z}_2$*-simpléctica*) en V es una forma bilineal supersimétrica (resp. superantisimétrica) no degenerada. Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, una *estructura* $\mathbb{Z}_2$*-hermitiana* es una forma sesquilineal supersimétrica no degenerada.

Una *estructura geométrica* en V es una estructura $\mathbb{Z}_2$-ortogonal, simpléctica o hermitiana en V.

Notas:

(0) A partir de ahora $\mathcal{B}$ siempre denotará una estructura $\mathbb{Z}_2$-ortogonal o $\mathbb{Z}_2$-simpléctica, mientras que $\mathcal{H}$ será una estructura $\mathbb{Z}_2$-hermitiana.

(1) Supongamos que V admite un operador de cambio de paridad P y $\mathcal{B}$ es una forma bilineal par en V, definimos

$$\mathcal{B}'(u,v) = \mathcal{B}(P(v), P(u)).$$

Se sigue entonces que, si $\mathcal{B}$ es una estructura $\mathbb{Z}_2$-ortogonal ($\mathbb{Z}_2$-simpléctica) entonces $\mathcal{B}'$ es una estructura $\mathbb{Z}_2$-simpléctica ($\mathbb{Z}_2$-ortogonal) en V. En otras palabras, un operador de cambio de paridad establece una biyección entre las estructuras $\mathbb{Z}_2$-ortogonales y las estructuras $\mathbb{Z}_2$-simplécticas en un superespacio vectorial.

(2) Si P es un operador de cambio de paridad en V, podemos definir $\mathcal{H}'(u,v) = \mathcal{H}(P(v), P(u))$. Supongamos que $|\mathcal{H}| = 0$. Si $\mathcal{H}$ es supersimétrica (resp. superantisimétrica) entonces $\mathcal{H}'$ es superantisimétrica (resp. supersimétrica). En este caso — ver la nota (3) más adelante — la signatura de H_0 tendría que ser igual a la signatura de H_1 y ambas iguales $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ (siendo $n = 2k$ la dimensión común de V_0 y de V_1) para que tenga sentido realizar la aplicación $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}'$. Por otro lado, si $|\mathcal{H}| = 1$, y $\mathcal{H}$ es una estructura $\mathbb{Z}_2$-hermitiana, entonces $\mathcal{H}'$ también es una estructura $\mathbb{Z}_2$-hermitiana con la misma simetría.

(3) Si $|\mathcal{B}| = 0$ y $\mathcal{B}$ es $\mathbb{Z}_2$-ortogonal (resp. $\mathbb{Z}_2$-simpléctica) entonces

$$\mathcal{B}\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}\right) = B_0(u_0, v_0) + B_1(u_1, v_1)$$

donde $B_i : V_i \times V_i \longrightarrow \mathbb{F}$, B_0 es una estructura ortogonal (resp. simpléctica) en V_0 y B_1 es una estructura simpléctica (resp. ortogonal) en V_1. Por otra parte, si $|\mathcal{B}| = 1$ entonces

$$\mathcal{B}\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}\right) = \Phi(u_0, v_1) + \Omega(u_1, v_0)$$

siendo $\Phi : V_0 \times V_1 \longrightarrow \mathbb{F}$ y $\Omega : V_1 \times V_0 \longrightarrow \mathbb{F}$, formas bilineales no degeneradas.

(4) Si $|\mathcal{H}| = 0$ entonces

$$\mathcal{H}\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}\right) = H_0(u_0, v_0) + iH_1(u_1, v_1)$$

siendo $H_i : V_i \times V_i \longrightarrow \mathbb{C}$, una estructura hermitiana en V_i, mientras que si $|\mathcal{H}| = 1$

$$\mathcal{H}\left(\begin{pmatrix} u_o \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}\right) = \Psi(u_0, v_1) + \Theta(u_1, v_0)$$

siendo $\Psi : V_0 \times V_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\Theta : V_1 \times V_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ dos formas sesquilineales no degeneradas.

(5) Si $\mathcal{B}$ es no degenerada y $|\mathcal{B}| = 1$ entonces V_0 es isomorfo a ${V_1}^*$ ya que tanto $\Phi : V_0 \times V_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ como $\Omega : V_1 \times V_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ son no degeneradas y se pueden definir los isomorfismos $\Phi^\flat : V_0 \longrightarrow {V_1}^*$ mediante $\Phi^\flat(v_0)(u_1) = \Phi(v_0, u_1)$ y $\Phi^\sharp : {V_1}^* \longrightarrow V_0$ se define por medio de la ecuación $\Phi(\Phi^\sharp(\lambda), v_1) = \lambda(v_1)$.
$\Omega^\flat : V_1 \longrightarrow {V_0}^*$ y $\Omega^\sharp : {V_0}^* \longrightarrow V_1$ se definen de manera análoga y es fácil verificar que satisfacen

$$(\Phi^\flat)^* = \Omega^\sharp \qquad \text{y} \qquad (\Phi^\flat)^{-1} = \Phi^\sharp.$$

(6) Tenemos entonces que $\mathcal{B}$ es supersimétrica (resp. superantisimétrica) si y sólo si

$$\Phi(u_0, v_1) = \Omega(v_1, u_0) \quad \text{para todos} \quad u_0 \in V_0, v_1 \in V_1$$
$$(\text{resp.} \quad \Phi(u_0, v_1) = -\Omega(v_1, u_0) \quad).$$

(7) Si $\mathcal{H}$ es no degenerada e impar, $\mathcal{H}$ es supersimétrica (resp. superantisimétrica) si y sólo si

$$\Psi(u_0, v_1) = \overline{\Theta(v_1, u_0)} \quad \text{para todos} \quad u_0 \in V_0, v_1 \in V_1$$
$$(\text{resp.} \quad \Psi(u_0, v_1) = -\overline{\Theta(v_1, u_0)} \quad).$$

De lo anterior obtenemos

1.3.1 Proposición. *Las siguientes correspondencias son biyecciones*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B} \textit{ ortogonal} \\ |\mathcal{B}| = 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} B_0 \textit{ estructura ortogonal en } V_0 \\ B_1 \textit{ estructura simpléctica en } V_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \mathcal{B} \textit{ ortogonal} \\ |\mathcal{B}| = 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \Phi : V_0 \times V_1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \textit{bilineal y no degenerada} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \mathcal{B} \textit{ simpléctica} \\ |\mathcal{B}| = 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} B_0 \textit{ estructura simpléctica en} V_0 \\ B_1 \textit{ estructura ortogonal en } V_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \mathcal{B} \textit{ simpléctica} \\ |\mathcal{B}| = 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \Phi : V_0 \times V_1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \textit{bilineal y no degenerada} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \mathcal{H} \textit{ hermitiana} \\ |\mathcal{H}| = 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} H_0 \textit{ estructura hermitiana en } V_0 \\ H_1 \textit{ estructura hermitiana en } V_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \mathcal{H} \textit{ hermitiana} \\ |\mathcal{H}| = 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \Psi : V_0 \times V_1 \longrightarrow \mathbb{C} \\ \textit{sesquilineal y no degenerada} \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathcal{G}$ una estructura geométrica en V. Sea $F \in EndV$ homogéneo. Definimos su adjunta respecto a $\mathcal{G}$, $F^{\mathcal{G}} \in EndV$ mediante

$$\mathcal{G}(F^{\mathcal{G}}u, v) = (-1)^{|F||u|}\mathcal{G}(u, Fv).$$

Extendemos la operación $F \longmapsto F^{\mathcal{G}}$ en homogéneos de tal forma que $(F_0 + F_1)^{\mathcal{G}} = F_0^{\mathcal{G}} + F_1^{\mathcal{G}}$. Decimos ahora que $F \in End(V)$ es *superautoadjunto* (resp. *superantiautoadjunto*) si

$$F = F^{\mathcal{G}} \quad (\text{resp. } F = -F^{\mathcal{G}}).$$

En términos de una base graduada fija de V se obtiene

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} {B_0}^{\flat} & 0 \\ 0 & {B_1}^{\flat} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^* & -C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {B_0}^{\flat} & 0 \\ 0 & {B_1}^{\flat} \end{pmatrix}, \ |\mathcal{B}| = 0 ,$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{\flat} \\ \Phi^{\flat} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ -B^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{\flat} \\ \Phi^{\flat} & 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathcal{B}| = 1 ,$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} {H_0}^{\flat} & 0 \\ 0 & i{H_1}^{\flat} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^* & -C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {H_0}^{\flat} & 0 \\ 0 & i{H_1}^{\flat} \end{pmatrix}, \ |\mathcal{H}| = 0,$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta^{\flat} \\ \Psi^{\flat} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ -B^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Theta^{\flat} \\ \Psi^{\flat} & 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathcal{H}| = 1.$$

Donde A^* denota el mapeo dual a A.

El siguiente resultado nos indica la relación entre los operadores de cambio de paridad y las propiedades de ser superautoadjunto y superantiautoadjunto.

1.3.2 Proposición. *Sea $\mathcal{B}$ una estructura $\mathbb{Z}_2$-ortogonal o $\mathbb{Z}_2$-simpléctica. Entonces existen operadores de cambio de paridad superautoadjuntos pero no puede haber operadores de cambio de paridad superantiautoadjuntos.*

Demostración.
Notar que $\begin{cases} B_1^{\flat} \circ q = p^* \circ B_0^{\flat} \\ B_0^{\flat} \circ p = -q^* \circ B_1^{\flat} \end{cases}$ es equivalente a $q = B_1^{\sharp} \circ p^* \circ B_0^{\flat}$, mientras que
$\begin{cases} \Phi^{\flat} \circ p = p^* \circ \Omega^{\flat} \\ \Omega^{\flat} \circ q = -q^* \circ \Phi^{\flat} \end{cases}$ es equivalente a $\begin{cases} \Phi^{\flat} = p^* \circ \Omega^{\flat} \circ q \\ \Phi^{\flat} = -p^* \circ \Omega^{\flat} \circ q \end{cases}$.
La primera equivalencia demuestra la existencia de operadores de cambio de paridad superautoadjuntos. Como $p = q^{-1}$, la segunda equivalencia demuestra que no pueden existir los operadores de cambio de paridad superantiautoadjuntos. ■

Dada una estructura geométrica $\mathcal{G}$ en V, se define

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{G}} = \{F \in End(V) \mid F = F_0 + F_1 \ \text{y} \ \mathcal{G}(F_\mu u, v) + (-1)^{\mu|u|}\mathcal{G}(u, F_\mu v) = 0\}.$$

Es claro que $\mathfrak{g}_{\mathcal{G}}$ admite una $\mathbb{Z}_2$-graduación inducida por la $\mathbb{Z}_2$-graduación de $End(V)$, (i.e., es un *sub-superespacio vectorial* de $End(V)$), dada por

$$(\mathfrak{g}_{\mathcal{G}})_0 = \{F \in (EndV)_0 \mid \mathcal{G}(Fu,v) + \mathcal{G}(u,Fv) = 0\}$$
$$(\mathfrak{g}_{\mathcal{G}})_1 = \{F \in (EndV)_1 \mid \mathcal{G}(Fu,v) + (-1)^{|u|}\mathcal{G}(u,Fv) = 0\}$$

y que $\mathfrak{g}_{\mathcal{G}} = (\mathfrak{g}_{\mathcal{G}})_0 \oplus (\mathfrak{g}_{\mathcal{G}})_1$.

1.3.3 Proposición. $\mathfrak{g}_{\mathcal{G}}$ *es una sub-superálgebra de Lie de* $(EndV, [\cdot,\cdot])$. *Más aún, si* $|\mathcal{G}| = 0$, *(i.e.,* $\mathcal{G} = \mathcal{B} = B_0 \oplus B_1$ *o* $\mathcal{G} = \mathcal{H} = H_0 \oplus iH_1$*), entonces*

$$\mathfrak{osp}_{\mathcal{B}}(V_0|V_1) := \mathfrak{g} \simeq \Big(\mathfrak{o}_{B_0}(V_0) \oplus \mathfrak{o}_{B_1}(V_1)\Big) \oplus Hom_{\mathbb{F}}(V_0,V_1),$$
$$\Big(resp.,\ \mathfrak{u}_{\mathcal{H}}(V_0|V_1) := \mathfrak{g}_{\mathcal{H}} \simeq \Big(\mathfrak{u}_{H_0}(V_0) \oplus \mathfrak{u}_{H_1}(V_1)\Big) \oplus Hom_{\mathbb{C}}(V_0,V_1)\Big).$$

De hecho, si $g = B_0$, *y* $\omega = B_1$. *Entonces,*

$$\mathfrak{osp}_{\mathcal{B}} = \mathfrak{osp}_{g\oplus\omega} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ *B & D \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} g^\flat \circ A + A^* \circ g^\flat = 0 \\ \omega^\flat \circ D + D^* \circ \omega^\flat = 0 \\ *B = -\omega^\sharp \circ B^* \circ g^\flat \end{array} \right\}$$
$$\left(resp.,\ \mathfrak{u}_{H_0\oplus iH_1} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ *B & D \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} {H_0}^\flat \circ A + A^* \circ {H_0}^\flat = 0; \\ {H_1}^\flat \circ D + D^* \circ {H_1}^\flat = 0; \\ *B = -i\overline{H_1}^\sharp \circ B^* \circ \overline{H_0}^\flat, \end{array} \right\}\right).$$

Nota: La estructura del corchete de Lie graduado es

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B \\ *B & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & A\circ B \\ -(*B)\circ A & 0 \end{pmatrix}$$
$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B \\ *B & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -B\circ D \\ D\circ(*B) & 0 \end{pmatrix}.$$

El corchete graduado de dos elementos impares está dado por

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ *B_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ *B_2 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} B_1 \circ (*B_2) + B_2 \circ (*B_1) & 0 \\ 0 & (*B_1) \circ B_2 + (*B_2) \circ B_1 \end{pmatrix}.$$

Las superálgebras de Lie $\mathfrak{osp}_{\mathcal{B}}(V_0|V_1)$ se conocen como *ortosimplécticas* y las superálgebras de Lie $\mathfrak{u}_{\mathcal{H}}(V_0|V_1)$ se conocen como *superunitarias.*

1.3.4 Proposición. *Si $\mathcal{B}$ es una estructura $\mathbb{Z}_2$-ortogonal impar. Entonces, la superálgebra de Lie que la preserva está dada por*

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & *A \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} (\Phi^\flat)^* \circ C + C^* \circ \Phi^\flat = 0 \\ \Phi^\flat \circ B - B^* \circ (\Phi^\flat)^* = 0 \\ *A = -\Phi^\sharp \circ A^* \circ (\Phi^\flat)^* \end{array} \right\}$$

$$\simeq \mathfrak{gl}(V_0) \oplus \{Sym_\Phi(V_0 \otimes V_1^*) \oplus Skew_\Phi(V_0^* \otimes V_1)\}.$$

donde $Sym_\Phi(V_0 \otimes V_1^*)$ (resp. $Skew_\Phi(V_0^* \otimes V_1)$) denota el conjunto de transformaciones lineales $V_1 \longrightarrow V_0$ (resp. $V_0 \longrightarrow V_1$) simétricos con respecto a $\Phi^\flat$ (resp. $\Phi^\sharp$).

Demostración.

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \Phi(Au_0, v_1) + \Phi(u_0, Dv_1) = 0 \\ \Phi(u_0, Cv_0) + \Phi(v_0, Cu_0) = 0 \\ \Phi(Bu_1, v_1) - \Phi(Bv_1, u_1) = 0 \end{array} \right\}$$

Reescribiendo estas ecuaciones se obtiene el resultado. ■

Nota: La estructura del corchete de Lie graduado está dado por:

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & *A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & A \circ B - B \circ (*A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & *A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (*A) \circ C - C \circ A & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} B \circ C & 0 \\ 0 & C \circ B \end{pmatrix}.$$

1.3.5 Proposición. *Sea $\mathcal{H}$ una estructura $\mathbb{Z}_2$-hermitiana impar. Entonces, la superálgebra de Lie que la preserva está dada por:*

$$\mathfrak{u}(V_0 \mid V_1) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & *A \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} *A = -\Psi^{\sharp} \circ A^* \circ (\Psi^{\flat})^* \\ (\Psi^{\flat})^* \circ C + C^* \circ \overline{\Psi}^{\flat} = 0 \\ \Psi^{\flat} \circ B - B^* \circ (\overline{\Psi}^{\flat})^* = 0 \end{array} \right\}$$

$$\simeq \mathfrak{gl}(V_0) \oplus \{Herm(V_0 \otimes V_1^*) \oplus Skew - Herm(V_0^* \otimes V_1)\}.$$

Demostración.

$$\mathfrak{u}(V_0 \mid V_1) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \Psi(Au_0, v_1) + \overline{\Psi(u_0, Dv_1)} = 0 \\ \Psi(u_0, Cv_0) + \overline{\Psi(v_0, Cu_0)} = 0 \\ \Psi(Bu_1, v_1) - \overline{\Psi(Bv_1, u_1)} = 0 \end{array} \right\}.$$

Reescribiendo estas ecuaciones se obtiene la proposición. ■

Ejemplos:

1) Sea $V = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, para $k = 0, 1$, definimos

$$J_k = \begin{pmatrix} \frac{i+(-1)^k i}{2} & \frac{i+(-1)^{k+1} i}{2} \\ \frac{i+(-1)^{k+1} i}{2} & \frac{i+(-1)^k i}{2} \end{pmatrix}.$$

Es claro entonces que J_k es una estructura compleja homogénea de grado k, mientras que $P = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ es un operador de cambio de paridad.

Además, podemos definir

$$\mathcal{H}\left(\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}\right) = \overline{z}_0 w_0 + i\overline{z_1} w_1$$

para obtener una estructura $\mathbb{Z}_2$-hermitiana par en V, mientras que

$$\mathcal{H}\left(\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}\right) = \overline{z}_0 w_1 + w_0 \overline{z_1}$$

es una estructura $\mathbb{Z}_2$-hermitiana impar.

2) Sea $V = V_0 \oplus V_1$ y supongamos que $V_1 = V_0$. Podemos entonces definir una superálgebra de Lie en terminos de $EndV$.
Sea

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in EndV \right\} \simeq EndV_0 \oplus EndV_0$$

bajo las identificaciones obvias

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \longleftrightarrow A \in EndV_0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow B \in EndV_0.$$

Definimos

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \right]_{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} [A,C] & 0 \\ 0 & [A,C] \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} 0 & [A,B] \\ [A,B] & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} BD + DB & 0 \\ 0 & BD + DB \end{pmatrix}$$

donde $[A, B] = AB - BA$. Se sigue entonces que $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ es una superálgebra de Lie.
V. Kac denota esta superálgebra por $Q(n)$ (Ver 2.1.4 en [6]).

Nota: Uno podría sospechar que esta superálgebra tiene algo que ver con la Proposición 1.1.4. cuando Φ tiene por matriz a la identidad. Veamos en detalle la superálgebra que resulta de poner $\Phi^\flat = \mathbb{I}$ y aclaremos el punto.

3) Sea $V = V_0 \oplus V_1$, y supongamos que $V_1 = V_0$. Sea $\Phi^\flat = \mathbb{I}$ y denotemos por $\mathcal{B}$ la estructura $\mathbb{Z}_2$-ortogonal impar asociada a Φ. Obtenemos entonces

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{B}} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

donde

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in \mathfrak{gl}(V_0) \right\} \simeq \mathfrak{gl}(V_0)$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} B^* = B \\ C^* = -C \end{matrix} \right\} \simeq S^2(V_0) \oplus A^2(V_0) \simeq \mathfrak{gl}(V_0)\,.$$

En este caso la acción de $\mathfrak{g}_0$ en $\mathfrak{g}_1$ está dada por

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & AB + BA^* \\ -A^*C - CA & 0 \end{pmatrix}.$$

Notar que en este ejemplo, $S^2(V_0) \ni B \longmapsto (AB + BA^*) \in S^2(V_0)$ proviene de $B \longmapsto gBg^*$ mientras que $A^2(V_0) \ni C \longmapsto -(A^*C + CA) \in A^2(V_0)$ proviene de $C \longmapsto (g^*)^{-1}Cg^{-1}$, por lo que esta superálgebra no puede ser isomorfa a la del ejemplo anterior. □

1.4 Estructuras geométricas y operadores de cambio de paridad.

Supongamos ahora que $P \in \mathfrak{g}_1$, que $\mathcal{B}$ es una estructura $\mathbb{Z}_2$-ortogonal (resp. $\mathbb{Z}_2$-simpléctica) y que $|\mathcal{B}| = 1$. Podemos entonces inducir mapeos

$$\mathcal{B}_0 : V_0 \times V_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\mathcal{B}_1 : V_1 \times V_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definidos por

$$\mathcal{B}_0(u_0, v_0) := \mathcal{B}(Pu_0, v_0)$$
$$\mathcal{B}_1(u_1, v_1) := \mathcal{B}(Pu_1, v_1)$$

1.4.1 Proposición. *Si $\mathcal{B}$ es $\mathbb{Z}_2$-ortogonal (resp. $\mathbb{Z}_2$-simpléctica), $|\mathcal{B}| = 1$ y $P \in \mathfrak{g}_1$ invertible, entonces:*

(1) *$\mathcal{B}_0$ es una estructura simpléctica (resp. estructura ortogonal) en V_0.*

(2) *$\mathcal{B}_1$ es estructura ortogonal (resp. estructura simpléctica) en V_1.*

A continuación vamos a suponer que $P_\pm : V \longrightarrow V$, es un isomorfismo impar que satisface la ecuación

$$\mathcal{B}(P_\pm u, v) \pm \mathcal{B}(u, P_\pm v) = 0 .$$

Esto es, P_+ es antiautoadjunto y P_- es autoadjunto con respecto a $\mathcal{B}$ en el sentido usual (no graduado). Entonces se inducen mapeos:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0^\pm &: V_0 \times V_0 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{B}_1^\pm &: V_1 \times V_1 \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

definidos por:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0^\pm(u_0, v_0) &:= \mathcal{B}(P_\pm u_0, v_0) \\ \mathcal{B}_1^\pm(u_1, v_1) &:= \mathcal{B}(P_\pm u_1, v_1) \end{aligned}$$

1.4.2 Proposición. *Si $\mathcal{B}$ es $\mathbb{Z}_2$-ortogonal (resp. $\mathbb{Z}_2$-simpléctica) y $|\mathcal{B}| = 1$ entonces:*

(1) *$\mathcal{B}_0^+$ y $\mathcal{B}_1^+$ son estructuras simplécticas (resp. estructuras ortogonales) en V_0 y V_1, respectivamente.*

(2) *$\mathcal{B}_0^-$ y $\mathcal{B}_1^-$ son métricas (resp. estructuras simplécticas) en V_0 y V_1, respectivamente.*

Más aún, si $P_\pm$ es un operador de cambio de paridad, entonces $(P_+)^*\mathcal{B}_0^+ = -\mathcal{B}_1^+$ y $(P_-)^*\mathcal{B}_0^- = \mathcal{B}_1^-$.

Nota :

En el caso superantisimétrico, la ecuación $(P_+)^*\mathcal{B}_0^+ = -\mathcal{B}_1^+$ implica que la signatura de $\mathcal{B}_0$ (y por tanto la de $\mathcal{B}_1$) tendría que ser de la forma (n, n) para que tuviera sentido definir la acción de $(P_+)^*$.

Tambien podemos inducir estructuras geométricas en $V_0 \oplus V_1$ a partir de funciones bilineales en $V_0 \times V_1$

1.4.3 Proposición. *Sea $\Phi : V_0 \times V_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcion bilineal no degenerada. Definimos*

$$\mathcal{B}_\pm\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}\right) = \Phi(u_0, v_1) \pm \Phi(v_0, u_1) .$$

Entonces $\mathcal{B}_+$ es una estructura $\mathbb{Z}_2$-ortogonal impar y $\mathcal{B}_-$ es una estructura $\mathbb{Z}_2$-simpléctica impar.

2. El problema de clasificación de las superálgebras de Lie en $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ y el problema de determinar sus posibles estructuras geométricas invariantes.

2.1 Estructuras geométricas *ad* invariantes.

Sea $\mathcal{B}$ una estructura geométrica definida en la superálgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, donde $\mathfrak{g}_0 = Span\{x_i\}$, $\mathfrak{g}_1 = Span\{y_i = P(x_i)\} = \mathfrak{g}_0$ y $P : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ operador de cambio de paridad.

Diremos que $\mathcal{B}$ es *ad invariante* si

$$\mathcal{B}([x, y], z) = \mathcal{B}(x, [y, z])$$

para todos x, y, $z \in \mathfrak{g}$.

Suponemos además que $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_0$ y que $\mathfrak{g}_0$ actua en $\mathfrak{g}_1$ via *ad*. En lo que sigue $C_j := ad(x_j)|_{\mathfrak{g}_\mu}$ con $\mu = 0, 1$, y $\Gamma_j := ad(y_j)$.

Las ecuaciones que describen a una estructura geométrica *ad* invariante estan dadas por los siguientes casos

$$\begin{cases} \mathcal{B}(x_i, [x_j, x_l]) = \mathcal{B}([x_i, x_j], x_l) \\ \mathcal{B}(x_i, [x_j, y_l]) = \mathcal{B}([x_i, x_j], y_l) \\ \mathcal{B}(x_i, [y_j, y_l]) = \mathcal{B}([x_i, y_j], y_l) \\ \mathcal{B}(y_i, [y_j, y_l]) = \mathcal{B}([y_i, y_j], y_l) \end{cases} \quad \text{o equiv.} \quad \begin{cases} B_0^\flat \circ C_j = -C_j^* \circ B_0^\flat \\ \Phi^\flat \circ C_j = -C_j^* \circ \Phi^\flat \\ B_0^\flat \circ \Gamma_j = -C_j^* \circ B_1^\flat \\ \Omega^\flat \circ \Gamma_j = \Gamma_j^* \circ \Phi^\flat \end{cases}.$$

2.1.1 Notas:

(1) Sea $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ una estructura $\mathbb{Z}_2$-ortogonal o $\mathbb{Z}_2$-simpléctica. Entonces, $\mathcal{B}$ es *ad* invariante si y sólo si $C_j^T = -B_0 C_j B_0^{-1}$ y $C_j^T = -B_0 \Gamma_j B_1^{-1}$

(2) Sea $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \Phi \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$ estructura $\mathbb{Z}_2$-ortogonal. Entonces, $\mathcal{B}$ es *ad* invariante si y sólo si $C_j^T = -\Phi C_j \Phi^{-1}$ y $\Gamma_j^T = \Phi \Gamma_j \Phi^{-1}$.

(3) Sea $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \Phi \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$ estructura $\mathbb{Z}_2$-simpléctica. Entonces, $\mathcal{B}$ es *ad* invariante si y sólo si $C_j^T = -\Phi C_j \Phi^{-1}$ y $\Gamma_j^T = -\Phi \Gamma_j \Phi^{-1}$.

2.2 Planteamiento del problema.

Recordemos de la sección 1.1 que una *superálgebra de Lie* es un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-graduado $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, el cuál admite una función par (llamada el *supercorchete*) $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ bilineal, que satisface:
0) $[\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b] \subset \mathfrak{g}_{a+b}$.
1) $[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$ para todos elementos x, $y \in \mathfrak{g}$ homogéneos.
2) *Identidad $\mathbb{Z}_2$-graduada de Jacobi*
$(-1)^{|x||z|}[[x, y], z] + (-1)^{|z||y|}[[z, x], y] + (-1)^{|y||x|}[[y, z], x] = 0$
Para todos x, y, $z \in \mathfrak{g}$ homogéneos.

Es obvio entonces que $\mathfrak{g}_0$ es una álgebra de Lie.

La propiedad (0) de la definición junto con la identidad $\mathbb{Z}_2$-graduada de Jacobi aplicada a dos elementos pares y un impar es equivalente a: $\mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo.

Llamémosle $\rho : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow End\mathfrak{g}_1$, a la función definida por $x \longmapsto \rho(x) = [x, \cdot] : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_1$, si además, llamamos Γ a la restricción del supercorchete a $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ obtenemos una función $\Gamma : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_0$ que es bilineal y simétrica.

La ρ equivariancia de Γ (que no es otra cosa que la identidad $\mathbb{Z}_2$-graduada de Jacobi aplicada a un elemento par y dos elementos impares) se reescribe como

$$\rho(x)(\Gamma(y, z)) = \Gamma(\rho(x)y, z) + \Gamma(y, \rho(x)z).$$

Γ además debe satisfacer

$$\rho(\Gamma(x, y))(z) + \rho(\Gamma(z, x))(y) + \rho(\Gamma(y, z))(x) = 0 \qquad (2.1)$$

para todos x, y y $z \in \mathfrak{g}_1$ (*Identidad de Jacobi* con tres elementos impares).

Sea $\{x_i\}$ una base de $\mathfrak{g}_0$ y sea $\{y_j\}$ una base de $V := \mathfrak{g}_1$, entonces Γ es ρ equivariante si y sólo si

$$\sum_l \Gamma^l_{jk} c^r_{il} = \sum_l (\rho^l_{ij} \Gamma^r_{lk} + \rho^l_{ik} \Gamma^r_{jl}) \tag{2.2}$$

donde ρ^l_{ik} y c^l_{ik} estan definidos por $ad(x_i)x_k = \sum_l c^l_{ik} x_l$ y $\rho(x_i)y_k = \sum_l \rho^l_{ik} y_l$.

Mientras que la ecuación (2.1) es equivalente a

$$\sum_r \Gamma^r_{jk} \rho^l_{ir} + \sum_r \Gamma^r_{ij} \rho^l_{kr} + \sum_r \Gamma^r_{ik} \rho^l_{jr} = 0. \tag{2.3}$$

Fijemos entonces una álgebra de Lie, digamos $\mathfrak{g}_0$, y sea $\rho : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow EndV$, una representación de $\mathfrak{g}_0$ en V. De lo expuesto anteriormente, es claro que clasificar estructuras de superálgebra de Lie en $\mathfrak{g}_0 \oplus V$ es equivalente a determinar todas las funciones $\Gamma : V \times V \longrightarrow \mathfrak{g}_0$ bilineales, simétricas que sean ρ equivariantes y tales que satisfagan la ecuación (2.1) modulo que induzcan superálgebras isomorfas.

Claramente $\Gamma \equiv 0$ resuelve *trivialmente* el problema de imponer una estructura de superálgebra de Lie en $\mathfrak{g}_0 \oplus V$.

Más aún, si $\Gamma \equiv 0$ entonces $\mathfrak{g}_0 \oplus V$ *es* una álgebra de Lie.

Nos falta aún resolver el problema de cuándo dos funciones Γ y Γ' inducen superálgebras de Lie isomorfas. Para esto debemos introducir una noción de equivalencia en el conjunto de todas las funciones bilineales, simétricas, ρ equivariantes y que satisfagan la ecuación (2.1).

Supongamos que Γ y Γ' son dos funciones bilineales, simétricas, ρ y ρ' equivariantes y tales que satisfacen la ecuación (2.1), denotaremos por $\mathfrak{g}_\Gamma$ y $\mathfrak{g}_{\Gamma'}$ a las respectivas superálgebras de Lie. $\Phi : \mathfrak{g}_\Gamma \longrightarrow \mathfrak{g}_{\Gamma'}$ es un isomorfismo si y sólo si, existen funciones $T : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, isomorfismo $\mathfrak{g}$ invariante y $S : V \longrightarrow V$ isomorfismo lineal, tal que los siguientes diagramas conmutan

$$
\begin{array}{ccc}
V\times V & \xrightarrow{\Gamma} & \mathfrak{g} \\
{\scriptstyle S\times S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\
V\times V & \xrightarrow{\Gamma'} & \mathfrak{g}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g}\times V & \xrightarrow{\rho} & V \\
{\scriptstyle T\times S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S} \\
\mathfrak{g}\times V & \xrightarrow{\rho'} & V
\end{array}
\tag{2.4}
$$

Notar que, ρ no tiene por que ser una representación irreducible de $\mathfrak{g}$.

Es claro que debemos definir Γ *equivalente* a Γ' si y sólo si, existen T y S como antes y tal que los diagramas de (2.4) conmutan. Obtenemos entonces:

2.2.1 Lema (Básico). Γ *es equivalente a* Γ' *si y sólo si las superálgebras inducidas son isomorfas.*

Un subcaso interesante de este problema, es el siguiente, consideremos $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, y fijemos $V = \mathfrak{g}$ y $\rho = ad$, ¿Cuántas estructuras de superálgebra de Lie admite $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$?

En este caso, el siguiente lema, simplifica el problema:

2.2.2 Lema. *Si* $\Gamma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *es bilineal, simétrica y ad equivariante entonces también satisface la ecuación* (2.1).

Demostración.
De lo anterior, obtenemos que $\rho_{ij}^k = c_{ij}^k$, sustituyendo en el lado izquierdo de la ecuación (2.3) según (2.2) y usando que $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$ se obtiene el resultado. ■

En resumen: clasificar las posibles estructuras de superálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ es equivalente a determinar cuantas funciones Γ no equivalentes hay que sean bilineales, simétricas y *ad* equivariantes.

3. Solución del problema y aplicaciones.

En todo el capítulo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ a menos que explícitamente se diga lo contrario y la herramienta básica es:

Lema (de Schur). *Sean $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow EndV$ y $\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow EndW$ representaciones (lineales complejas) irreducibles de $\mathfrak{g}$ y $Hom_{\mathfrak{g}}(V, W) = \{T : V \longrightarrow W \mid T \circ \rho(x) = \rho'(x) \circ T, \quad x \in \mathfrak{g}\}$. Entonces $Hom_{\mathfrak{g}}(V, W) \simeq \mathbb{C}$ si V y W son representaciones equivalentes y $Hom_{\mathfrak{g}}(V, W) \simeq \{0\}$ si no lo son.*

3.1 Caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

Sea $\mathfrak{sl}_2 = \langle H, E, F \rangle$, donde $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\langle H, E, F \rangle$ denota al subespacio vectorial de $Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$ generado por H, E y F.

Sean como antes, $\rho : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow EndV$ una representación irreducible de dimensión finita, y sea $\Gamma : V \times V \longrightarrow \mathfrak{sl}_2$ una función bilineal. Queremos saber cuántas funciones Γ bilineales, simétricas y ρ equivariantes no equivalentes admite $V \times V$. Para esto, debemos descomponer la representación inducida por $\mathfrak{sl}_2$ en $S^2(V)$ en factores irreducibles, ya que el Lema de Schur nos garantiza que la dimensión del espacio generado por tales Γ es igual al número de sumandos isomorfos a $\mathfrak{sl}_2$ que aparezcan en dicha descomposición.

3.1.1 Lema. *([13] pág. 300, tabla 5) Sea $n + 1 = dimV$. Entonces $S^2(V) = \bigoplus_{j\geq 0} V_{2n-4j+1}$ donde V_r es la representación irreducible de $\mathfrak{sl}_2$ de dimensión r.*

3.1.2 Corolario. *V admite una función Γ, bilineal, simétrica, ρ equivariante no nula si y sólo si $dimV = 2r$.*

3.1.3 Lema. *Sea $\rho : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow EndV$ una representación irreducible de dimensión par. Si $\Gamma : V \times V \longrightarrow \mathfrak{sl}_2$ es bilineal y satisface la ecuación* (2.1) *entonces $\Gamma \equiv 0$.*

Demostración.
Empezamos con el caso Γ simétrica. De lo expuesto antes, basta considerar el caso en el que $dimV = 2r$, $r \geq 2$. Sea $\{y_i\}$ una base para V, y sea $\Gamma(y_i, y_j) = h_{ij}H + e_{ij}E + f_{ij}F$. Notar entonces que por ser par la dimensión de V, $det\rho(H) \neq 0$, i.e., 0 no es valor propio de $\rho(H)$.
La ecuación (2.1) para $x = y = z = y_i$ se reescribe como

$$\begin{aligned} 3\rho(\Gamma(y_i, y_i))(y_i) &= 3h_{ii}\rho(H)(y_i) + 3e_{ii}\rho(E)(y_i) + 3f_{ii}\rho(F)(y_i) \\ &= 3(2k - 2i - 1)h_{ii}y_i + 3(2k - i + 2)ie_{ii}y_{i+1} + 3f_{ii}y_{i-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, ..., 2k$. Obtenemos entonces que $\Gamma(y_i, y_i) = 0$ si $2 \leq i \leq 2k - 1$. Esto claramente implica que $\Gamma(y_i, y_j) = 0$ si $i < j \leq 2k - 1$. Los casos faltantes $\Gamma(y_1, y_1)$, $\Gamma(y_{2k}, y_{2k})$ y $\Gamma(y_i, y_{2k})$ se siguen fácilmente. El caso Γ antisimétrico es más fácil. ■

3.1.4 Teorema. *Sea $\rho : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow EndV$ una representación irreducible. Entonces $\mathfrak{sl}_2 \oplus V$ admite una única estructura de superálgebra de Lie.*

Si la representación ρ no es irreducible, sea $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, donde V_i es irreducible para cada $i = 1, \ldots, k$, entonces:

3.1.5 Corolario. *$\mathfrak{sl}_2 \oplus V$ admite una única estructura de superálgebra de Lie.*

Se puede observar en la demostración de estos resultados que $\Gamma \equiv 0$, de esto se sigue que también $\mathfrak{g} \oplus V$ es un álgebra de Lie.

Notar ahora que la representación irreducible de dimensión 3 para $\mathfrak{sl}_2$ es justamente ad, por lo que:

3.1.6 Corolario. *$\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ admite una única estructura de superálgebra de Lie.*

Estos últimos resultados no son del todo triviales, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie con centro $\mathfrak{z}$ no trivial, entonces podemos inducir una estructura de superálgebra de Lie de manera trivial en $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}/\mathfrak{z}) \oplus \mathfrak{z}$ definiendo $\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}/\mathfrak{z})$ y $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{z}$, además, en este caso $\rho : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow End\mathfrak{z}$ está definido por $\rho \equiv 0$, y de hecho $\Gamma \equiv 0$.

3.2 Caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2$.

Sea $\mathfrak{gl}_2 = \mathbb{C}I \oplus \mathfrak{sl}_2$, donde $\mathbb{C}I$ denota todos los multiplos de la matriz identidad de 2×2.

Sea $\rho : \mathfrak{gl}_2 \longrightarrow EndV$ una representación irreducible. En esta subsección $\rho' = \rho|_{\mathfrak{sl}_2}$, esto es, $\rho' : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow EndV$. Es claro entonces que ρ' es una representación irreducible de $\mathfrak{sl}_2$. Más aún, dada una representación irreducible ρ' de $\mathfrak{sl}_2$ se puede extender (no de manera única) a una representación irreducible ρ de $\mathfrak{gl}_2$. (Ver [5] pág. 127, Prop. 9.17).

De esto, obtenemos que $\rho(I) = cI$ donde I denota a la matriz identidad.

3.2.1 Lema. *Sea $c \neq 0$. Si $\Gamma : V \times V \longrightarrow \mathfrak{gl}_2$ es ρ equivariante entonces $\Gamma \equiv 0$.*

Como $\Gamma \equiv 0$ satisface trivialmente ser simétrica, bilineal y la identidad impar de Jacobi, obtenemos entonces:

3.2.2 Corolario. *Sea $\rho : \mathfrak{gl}_2 \longrightarrow EndV$ una representación irreducible de $\mathfrak{gl}_2$, tal que $c \neq 0$. Entonces $\mathfrak{gl}_2 \oplus V$ admite una única estructura de superálgebra de Lie.*

Las representaciones irreducibles de $\mathfrak{gl}_2$ que podrían resultar interesantes son aquellas en las que $\rho(I) = 0$.

Dada una representación irreducible ρ' de $\mathfrak{sl}_2$ denotaremos por ρ_0 a la única extensión a $\mathfrak{gl}_2$ tal que $\rho_0(I) = 0$. Notar entonces que ρ_0 es irreducible si y sólo si $dimV \neq 4$, ya que si $dimV = 4$ entonces $\rho_0 = ad$.

Sean $\pi_1 : \mathfrak{gl}_2 \longrightarrow \mathbb{C}I$, $\pi_2 : \mathfrak{gl}_2 \longrightarrow \mathfrak{sl}_2$ las proyecciones correspondientes. Entonces toda función $\Gamma : V \times V \longrightarrow \mathfrak{gl}_2$ simétrica y bilineal induce dos nuevas funciones, $\Gamma_1 = \pi_1 \circ \Gamma$ y $\Gamma_2 = \pi_2 \circ \Gamma$ las cuáles resultan ser nuevamente simétricas y bilineales.

3.2.3 Lema. *Si Γ es ρ_0 equivariante entonces Γ_1 y Γ_2 son ρ_0 equivariantes.*

Notar ahora, que si Γ es ρ_0 equivariante, entonces tambien es ρ' equivariante, por lo que

3.2.4 Corolario. *Si Γ es ρ_0 equivariante, entonces $\Gamma_2 \equiv 0$.*

Esto reduce el problema a encontrar funciones $\Gamma : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}I$, bilineales, simétricas y ρ_0 equivariantes.

3.2.5 Lema. *Sea $\Gamma : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ bilineal y simétrica. Γ es ρ_0 equivariante si y sólo si es ρ' equivariante.*

Necesitamos entonces descomponer $S^2(V)$. Sea $dimV = n+1$, entonces $S^2(V) = \bigoplus_{j\geq 0} V_{2n-4j+1}$ donde V_k es la representación irreducible de $\mathfrak{sl}_2$ de dimensión k. Obtenemos entonces

3.2.6 Corolario. *Sea $2k + \alpha = dimV \neq 4$, $(\alpha = 0, 1)$. Entonces $V \times V$ admite $2 - \alpha$ funciones Γ que son ρ_0 equivariantes. Más aún, Γ satisface trivialmente la ecuación (2.1).*

Obtenemos entonces el siguiente resultado:

3.2.7 Teorema. *Sea $\rho_0 : \mathfrak{gl}_2 \longrightarrow EndV$ una representación irreducible. Sea $2k + \alpha = dimV \neq 4$. $(\alpha = 0, 1)$. Entonces $\mathfrak{gl}_2 \oplus V$ admite $2 - \alpha$ estructuras de superálgebra de Lie.*

Notemos entonces que el caso, $dimV = 4$ resulta interesante, ya que $\rho_0 = ad$ es una representación reducible. De hecho,

$$V \simeq \mathfrak{gl}_2 \simeq \mathbb{C}I \oplus \mathfrak{sl}_2 = V_1 \oplus V_3.$$

Recordar entonces que

$$\begin{aligned} S^2(V_1 \oplus V_3) &= \big(S^0(V_1) \otimes S^2(V_3)\big) \oplus \big(S^1(V_1) \otimes S^1(V_3)\big) \oplus \big(S^2(V_1) \otimes S^0(V_3)\big) \\ &= (V_5 \oplus V_1) \oplus V_3 \oplus V_1. \end{aligned}$$

De esto, las funciones $\Gamma : \mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2 \longrightarrow \mathfrak{gl}_2$ que son bilineales, simétricas y *ad* equivariantes, producen una familia de funciones a tres parámetros independientes. Veamos esto:
Sean $\mathfrak{gl}_2 = \langle I, H, E, F \rangle$ y $\mathfrak{gl}_2^* = \langle I^*, H^*, E^*, F^* \rangle$. Como

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}_2 \otimes \mathfrak{gl}_2^* &\simeq \mathfrak{gl}_2 \otimes \mathfrak{gl}_2 \\ &\simeq S^2(\mathfrak{gl}_2) \oplus \Lambda^2(\mathfrak{gl}_2). \end{aligned}$$

Una base para $S^2(\mathfrak{gl}_2)$ está dada por $\{X \otimes X,\ X \otimes Y + Y \otimes X,\ X \neq Y\ \}$, como $\rho_0(I) = 0$, $\rho_0(H) = 2(E \otimes E^* - F \otimes F^*)$, $\rho_0(E) = -2E \otimes H^* + H \otimes F^*$ y $\rho_0(F) = 2F \otimes H^* - H \otimes E^*$, no es difícil verificar que la descomposición de $S^2(\mathfrak{gl}_2)$ en términos de subespacios irreducibles está dada por

$$\begin{aligned} V_1 &\simeq \langle I \otimes I \rangle \\ V_1 &\simeq \langle \frac{1}{2} H \otimes H + E \otimes F + F \otimes E \rangle \\ V_3 &\simeq \langle I \otimes H + H \otimes I,\quad I \otimes E + E \otimes I,\quad I \otimes F + F \otimes I \rangle \\ V_5 &\simeq \langle E \otimes E,\quad F \otimes F,\quad H \otimes H - (E \otimes F + F \otimes E),\quad H \otimes E + E \otimes H, \\ &\quad H \otimes F + F \otimes H \rangle \end{aligned}$$

De esto, usando el Lema de Schur, obtenemos que Γ está definida por

$$\begin{array}{llll} \Gamma(I,I) = \lambda I & & & \\ \Gamma(I,H) = \mu H & \Gamma(H,H) = 2\nu I & & \\ \Gamma(I,E) = \mu E & \Gamma(H,E) = 0 & \Gamma(E,E) = 0 & \\ \Gamma(I,F) = \mu F & \Gamma(H,F) = 0 & \Gamma(E,F) = \nu I & \Gamma(F,F) = 0 \end{array}$$

Usando el Lema Básico y el Lema de Schur, podemos ahora calcular exactamente cuántas estructuras de superálgebra de Lie admite $\mathfrak{gl}_2 \oplus \mathfrak{gl}_2$.

Denotaremos por Γ' la correspondiente función, en donde la terna de paramétros es λ', μ' y ν'. Γ es equivalente a Γ' si y sólo si existen funciones lineales $T, S : \mathfrak{gl}_2 \longrightarrow \mathfrak{gl}_2$ que satisfacen las ecuaciones de (2.4).

Si denotamos por C_i a la matriz asociada a $ad(x_i)$ y por Γ_i a la matriz asociada a $\Gamma(x_i, \cdot)$, entonces las ecuaciones de (2.4) son equivalentes a

$$TC_jT^{-1} = \sum_{i=1}^{4} t_{ij}C_i \quad SC_jS^{-1} = \sum_{i=1}^{4} t_{ij}C_i \quad T\Gamma_jS^{-1} = \sum_{i=1}^{4} s_{ij}\Gamma'_i. \quad (3.1)$$

Usando que $C_0 = 0$ y que C_1, C_2 y C_3 son linealmente independientes, obtenemos que $t_{i1} = 0$ para $i = 2,3,4$. De esto, la estructura de T se puede escribir en bloques como

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \vec{t} \\ 0 & t \end{pmatrix} \quad t \in Aut(\mathfrak{sl}_2), \quad \vec{t} = (t_{12}, t_{13}, t_{14}) \in (\mathfrak{sl}_2)^*.$$

Si escribimos $ad_{\mathfrak{sl}}(x_i) : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \mathfrak{sl}_2$ para denotar la restricción a $\mathfrak{sl}_2$ de la acción de x_i, $i = 2,3,4$. Entonces:

$$TC_jT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{t}ad_{\mathfrak{sl}}(x_i)t^{-1} \\ 0 & tad_{\mathfrak{sl}}(x_i)t^{-1} \end{pmatrix} \quad j = 2,3,4$$

mientras que

$$\sum_{i=2}^{4} t_{ij}C_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=2}^{4} t_{ij}ad_{\mathfrak{sl}}(x_i) \end{pmatrix}.$$

Se sigue entonces que $\vec{t}ad_{\mathfrak{sl}}(x_i)t^{-1} = 0$, y entonces $\vec{t}ad_{\mathfrak{sl}}(x_i) = 0$ para $j = 2,3,4$, de donde $\vec{t} = 0$ y entonces

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \quad t \in Aut(\mathfrak{sl}_2).$$

Escribamos ahora S en forma de bloques de manera análoga a lo hecho con T.

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \vec{s} \\ \bar{s} & s \end{pmatrix} \quad s \in GL(\mathfrak{sl}_2) \quad \vec{s} = (s_{12}, s_{13}, s_{14}) \in (\mathfrak{sl}_2)^* \quad \bar{s} = \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2.$$

Como S es invertible, podemos reescribir la segunda ecuación de (3.1) como $SC_j = (\sum_i t_{ij}C_i)S$, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{s}ad_{\mathfrak{sl}}(x_j) \\ 0 & \bar{s}ad_{\mathfrak{sl}}(x_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sum_i t_{ij}ad_{\mathfrak{sl}}(x_i)\bar{s} & \sum_i t_{ij}ad_{\mathfrak{sl}}(x_i)s \end{pmatrix}.$$

Concluimos entonces que

$$\vec{s}ad_{\mathfrak{sl}}(x_j) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_i t_{ij}ad_{\mathfrak{sl}}(x_i)\bar{s} = 0.$$

La solución a la primera ecuación es $\vec{s} = 0$. Por otro lado, los coeficientes t_{ij} que aparecen en la segunda ecuación son entradas de $t \in Aut(\mathfrak{sl}_2)$, multiplicando ambos lados por ${t^{-1}}_{ij}$ y sumando sobre j, podemos concluir que $ad_{\mathfrak{sl}}(x_i)\bar{s} = 0$ para $i = 2, 3, 4$ por lo que $\bar{s} = 0$. Por lo tanto

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

con s invertible y satisfaciendo

$$sad_{\mathfrak{sl}}(x_j)s^{-1} = \sum_{i=2}^{4} t_{ij}ad_{\mathfrak{sl}}(x_i).$$

Notar ahora que las dos primeras ecuaciones de (3.1) implican que $TC_jT^{-1} = SC_jS^{-1}$ o equivalentemente $S^{-1}TC_j = C_jS^{-1}T$ para $j = 2, 3, 4$. Si M es una matriz que conmuta con C_j para $j = 2, 3, 4$, es fácil verificar que

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\mathbb{I}_{3\times 3} \end{pmatrix}.$$

De esto

$$t_{11} = as_{11} \quad \text{y} \quad t = bs, \quad ab \neq 0.$$

Falta entonces entender la condición

$$tad_{\mathfrak{sl}}(x_j)t^{-1} = \sum_i t_{ij}ad_{\mathfrak{sl}}(x_i)$$

bajo la hipótesis $t \in Aut(\mathfrak{sl}_2)$. Un cálculo sencillo muestra que $t \in Aut(\mathfrak{sl}_2)$ si y sólo si

$$det(t)t^{-1} = K^{-1}t^T K, \qquad K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si tomamos determinante de ambos lados, se concluye que $det(t) = 1$ y

$$t \in Aut(\mathfrak{sl}_2) \iff t \in SO_K(\mathfrak{sl}_2)$$

donde K es la métrica de Cartan-Killing en $\mathfrak{sl}_2$.

Falta entonces entender la última ecuación de (3.1). Sean

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y sean r_i el i-ésimo renglón de K. Tenemos entonces que

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \nu r_{i-1} \\ \mu\bar{e}_{i-1} & 0 \end{pmatrix} \quad i = 2, 3, 4$$

y similarmente para Γ'_i. En particular

$$\sum_{i=1}^{4} s_{i1}\Gamma'_i = \begin{pmatrix} \lambda' s_{11} & 0 \\ 0 & \mu' s_{11}\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

y

$$\sum_{i=1}^{4} s_{ij}\Gamma'_i = \begin{pmatrix} 0 & \nu' \sum_{i=2}^{4} s_{ij} r_{i-1} \\ \mu' \sum_{i=2}^{4} s_{ij}\bar{e}_{i-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Caso $j = 1$.

$$T\Gamma_1 S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda t_{11} s_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \mu t s^{-1} \end{pmatrix}$$

debe ser igual a

$$\sum_i s_{i1}\Gamma'_i = \begin{pmatrix} \lambda' s_{11} & 0 \\ 0 & \mu' s_{11}\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos

$$\lambda t_{11} = \lambda' s_{11}^2 \qquad \text{y} \qquad \mu t = \mu' s_{11} s.$$

Casos $j = 2, 3, 4$.

$$T\Gamma_j S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \nu t_{11} r_{j-1} s^{-1} \\ \mu s_{11}^{-1} t \bar{e}_{j-1} & 0 \end{pmatrix}$$

debe ser igual a

$$\sum_i s_{ij} \Gamma_i' = \begin{pmatrix} 0 & \nu' \sum_{i=2}^4 s_{ij} r_{i-1} \\ \mu' \sum_{i=2}^4 s_{ij} \bar{e}_{i-1} & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que se obtienen

$$\mu s_{11}^{-1} t \bar{e}_{j-1} = \mu' \sum_{i=2}^{4} s_{ij} \bar{e}_{i-1} \qquad \text{y} \qquad \nu t_{11} r_{j-1} s^{-1} = \nu' \sum_{i=2}^{4} s_{ij} r_{i-1}.$$

La primera de estas ecuaciones implica que $\mu t = \mu' s_{11} s$. La segunda ecuación se puede reescribir como

$$\nu t_{11} s^{-1} = \nu' K^{-1} s^T K.$$

En resumen: Una superálgebra de Lie basada en $\mathfrak{gl}_2$ esta determinada por los valores de (λ, μ, ν) (y en este caso denotaremos dicha álgebra por $\mathfrak{gl}_2(\lambda, \mu, \nu)$) y es isomorfa a la determinada por (λ', μ', ν') si y sólo si, existen constantes no nulas, t_{11}, a y b tales que

$$\lambda' = \lambda \frac{a^2}{t_{11}}, \qquad \mu' = \mu \frac{ab}{t_{11}}, \qquad \nu' = \nu t_{11} b^2 \tag{3.2}$$

De hecho:

3.2.8 Teorema. $\mathfrak{gl}_2 \oplus \mathfrak{gl}_2$ *admite ocho estructuras distintas de superálgebra de Lie.*

Demostración. Se sigue de lo anterior. ■

Denotaremos a las respectivas clases de isomorfía por

$$\begin{array}{cccc} (2,2,1) & (2,2,0) & (2,0,1) & (2,0,0) \\ (0,2,1) & (0,2,0) & (0,0,1) & (0,0,0) \end{array}$$

Cabe mencionar que elegimos los parámetros $\lambda = 2$, $\mu = 2$ y $\nu = 1$ como representantes cuando $\lambda\mu\nu \neq 0$ por que con estos valores la correspondiente función Γ queda definida como $\Gamma(X, Y) = XY + YX$.

Notar que si el campo base son los reales, entonces también se puede demostrar que Γ es una función a tres parámetros reales, digamos (λ, μ, ν), y las superálgebras de Lie $\mathfrak{gl}_2(\lambda, \mu, \nu)$ y $\mathfrak{gl}_2(\lambda', \mu', \nu')$ son isomorfas, si y sólo si se satisfacen las ecuaciones de (3.2). Y en este caso obtenemos que

3.2.9 Teorema. $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ *admite diez estructuras de superálgebra de Lie.*

Denotaremos a las respectivas clases de isomorfía por

$$\begin{array}{ccccc} (2,2,1) & (2,2,-1) & (2,2,0) & (2,0,1) & (2,0,-1) \\ (2,0,0) & (0,2,1) & (0,2,0) & (0,0,1) & (0,0,0) \end{array}$$

Sea $\Phi : \mathfrak{gl}_2(\lambda, \mu, \nu) \longrightarrow \mathfrak{gl}_2(\lambda, \mu, \nu)$ un isomorfismo par, entonces

$$\Phi = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

y además, existen $a, b \in \mathbb{F}$, $ab \neq 0$ tales que $t_{11} = as_{11}$ y $t = bs$ junto con $t \in Aut(\mathfrak{sl}_2)$.

Otra consecuencia de lo expuesto anteriormente es

3.2.10 Teorema. *Los grupos de Automorfismos para cada una de las clases de isomorfía estan dados por*

(1) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})(2,2,1))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y* $S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}t \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ *y* $a^4 = 1$.

(2) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})(0,2,1))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} b^{-3} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1}t \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ *y* $b \neq 0$.

(3) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})(2,2,0))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}t \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ *y* $a \neq 0$.

(4) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})(0,2,0))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1}t \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ *y* $ab \neq 0$.

(5) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})(2,0,1))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b^{-1}t \end{pmatrix}$ *junto con* $s \in Aut(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, $b \neq 0$ *y* $a^2b^2 = 1$.

(6) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})(0,0,1))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} b^{-2} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} a^{-1}b^{-2} & 0 \\ 0 & b^{-1}t \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, $ab \neq 0$.

(7) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})(2,0,0))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b^{-1}t \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, $ab \neq 0$.

(8) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})(0,0,0))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} as_{11} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & b^{-1}t \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, $ab \neq 0$.

Es claro que también se pueden escribir fácilmente los grupos de automorfismos de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})(\lambda, \mu, \nu)$.

3.3 Caso $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ con $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie semisimple y $\rho = ad$.

3.3.1 Teorema. *Sea $\mathfrak{g} = B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$. Entonces $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ admite una única estructura de superálgebra de Lie. Más aún, esta estructura es trivial en el sentido de que $\Gamma \equiv 0$.*

Demostración.
Basta notar que en la descomposición de $S^2(\mathfrak{g})$ (Ver [13], págs. 301-305) no aparece ningun sumando isomorfo a $\mathfrak{g}$, lo cuál se traduce en $\Gamma \equiv 0$. ■

De nueva cuenta, se puede observar que, $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie.

3.3.2 Teorema. *Sea $\mathfrak{g} = A_n$. Entonces $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ admite una única estructura de superálgebra de Lie si y sólo si $n = 1$, y admite 2 estructuras si y sólo si $n \geq 2$.*

Demostración.
De nuevo, en la descomposición de $S^2(A_n)$ aparece un sumando isomorfo a A_n si y sólo si $n \geq 2$. (Ver [13], pág. 301). ■

Podemos resumir el contenido de los dos resultados anteriores en el siguiente:

3.3.3 Corolario. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple. Entonces $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ (fijando $\rho = ad$) admite exactamente 2^α estructuras no equivalentes de superálgebra de Lie donde α es el número de sumandos isomorfos a $\mathfrak{g}$ que aparecen en la descomposición de $S^2(\mathfrak{g})$.*

3.4 Caso $\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$ con $\rho = ad$ y $n \geq 3$.

Queremos calcular cuántas estructuras de superálgebra de Lie admite $\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$.

Según lo expuesto anteriormente, debemos encontrar cuántas funciones $\Gamma : \mathfrak{gl}_n \times \mathfrak{gl}_n \longrightarrow \mathfrak{gl}_n$ simétricas, bilineales y ad equivariantes admite $\mathfrak{gl}_n \times \mathfrak{gl}_n$.

Este problema es equivalente a descomponer la representación inducida por ad en $\mathfrak{gl}_n \otimes \mathfrak{gl}_n$ en sumandos irreducibles según la acción de $\mathfrak{sl}_n$. Para lograr esto, notemos primero que $\mathfrak{gl}_n = I \oplus \mathfrak{sl}_n$, donde I representa a los múltiplos de la identidad de $n \times n$. Como queremos que Γ sea simétrica, esto lo traducimos a que Γ se deberá factorizar a través de $S^2(\mathfrak{gl}_n)$.

Es fácil verificar que

$$\begin{aligned} S^2(I \oplus \mathfrak{sl}_n) &= (S^0(I) \otimes S^2(\mathfrak{sl}_n)) \oplus (S^1(I) \otimes S^1(\mathfrak{sl}_n)) \oplus (S^2(I) \otimes S^0(\mathfrak{sl}_n)) \\ &\simeq S^2(\mathfrak{sl}_n) \oplus \mathfrak{sl}_n \oplus I \end{aligned}$$

Se sabe además (Ver [13], pág. 300) que

$$S^2(\mathfrak{sl}_n) = \begin{cases} I \oplus \mathfrak{sl}_3 \oplus V_{27} & \text{si } n = 3 \\ I \oplus \mathfrak{sl}_n \oplus V_{n_1} \oplus V_{n_2} & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

donde V_j es un espacio (irreducible) de representación para $\mathfrak{sl}_n$ de dimensión igual a j, además si $n \geq 4$ entonces $n_1 = \frac{n+3}{n-1}\binom{n}{2}\binom{n}{2}$ y $n_2 = \frac{n-3}{n-1}\binom{n}{2}\binom{n+1}{2}$.

Obtenemos entonces que si $n \geq 3$, $S^2(\mathfrak{gl}_n)$ tiene dos sumandos triviales y dos copias de $\mathfrak{sl}_n$ en su descomposición en términos de irreducibles. Como consecuencia de esta descomposición y del Lema de Schur, concluimos que

3.4.1 Proposición. *Si $n \geq 3$. Entonces toda función $\Gamma : \mathfrak{gl}_n \times \mathfrak{gl}_n \longrightarrow \mathfrak{gl}_n$ bilineal, simétrica y ad equivariante depende de cuatro parámetros.*

Denotaremos por $(\lambda, \mu, \nu, \epsilon)$ a estos cuatro parámetros.

A la correspondiente superálgebra inducida por una elección de $(\lambda, \mu, \nu, \epsilon)$ la denotaremos por $\mathfrak{gl}_n(\lambda, \mu, \nu, \epsilon)$. Sea $\mathfrak{gl}_n(\lambda', \mu', \nu', \epsilon')$ la correspondiente superálgebra asociada a la elección $(\lambda', \mu', \nu', \epsilon')$.

Nos interesa ahora determinar cuándo $\mathfrak{gl}_n(\lambda, \mu, \nu, \epsilon)$ y $\mathfrak{gl}_n(\lambda', \mu', \nu', \epsilon')$ son isomorfas.

Procediendo como antes obtenemos que

$\Phi : \mathfrak{gl}_n(\lambda, \mu, \nu, \epsilon) \longrightarrow \mathfrak{gl}_n(\lambda', \mu', \nu', \epsilon')$ deberá satisfacer las tres ecuaciones de (3.1), las primeras dos son equivalentes a:

$$\Phi = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

junto con

$$t ad_{\mathfrak{sl}}(x_j) t^{-1} = \sum_i t_{ij} ad_{\mathfrak{sl}}(x_i)$$

donde además, $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ y existen constantes a, b no nulas tales que $t_{11} = a s_{11}$ y $t = bs$. Para analizar la tercera ecuación, notar que en este caso

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & \nu r_{j-1} \\ \mu\bar{e}_{j-1} & \epsilon\Lambda_j \end{pmatrix} \quad j = 2, 3, \dots, n$$

donde r_i es el i-ésimo renglón de la forma de Cartan-Killing K en $\mathfrak{sl}_n$, $\bar{e}_i$ es la i-ésima columna de la matriz identidad $\mathbb{I}$ de $n-1 \times n-1$ y Λ_i es la matriz que se obtiene de $\Gamma_i|_{\mathfrak{sl}_n}$. Y de forma análoga para Γ'_j.

Caso $j = 1$

$$T\Gamma_1 S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda t_{11} s_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \mu t s^{-1} \end{pmatrix}$$

deberá ser igual a

$$\sum_i s_{i1} \Gamma'_i = \begin{pmatrix} \lambda' s_{11} & 0 \\ 0 & \mu' s_{11} \mathbb{I} \end{pmatrix}.$$

Casos $j = 2, \dots, n$

$$T\Gamma_j S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \nu t_{11} r_{j-1} s^{-1} \\ \mu s_{11}^{-1} t \bar{e}_{j-1} & \epsilon t \Lambda_j s^{-1} \end{pmatrix}$$

deberá ser igual a

$$\sum_i s_{ij}\Gamma'_i = \begin{pmatrix} 0 & \nu' \sum_i s_{ij} r_{i-1} \\ \mu' \sum_i s_{ij}\bar{e}_{i-1} & \epsilon' \sum_i s_{ij}\Lambda_i \end{pmatrix}.$$

En resumen: $\mathfrak{gl}_n(\lambda, \mu, \nu, \epsilon)$ es isomorfa a $\mathfrak{gl}_n(\lambda', \mu', \nu', \epsilon')$ si y sólo si existen constantes no nulas t_{11}, a y b tales que

$$\lambda' = \lambda \frac{a^2}{t_{11}} \qquad \mu' = \mu \frac{ab}{t_{11}} \qquad \nu' = \nu t_{11} b^2 \qquad \epsilon' = \epsilon b^2.$$

Notar entonces que si α es un paramétro y α' el análogo correspondiente, entonces $\alpha = 0$ si y sólo si $\alpha' = 0$.

3.4.2 Proposición. *Las clases de isomorfía de $\mathfrak{gl}_n(\lambda, \mu, \nu, \epsilon)$ están dadas por*

(1) *Todos los parámetros igual a cero: $\mathfrak{gl}_n(0,0,0,0)$.*
(2) *Exactamente un parámetro distinto a cero. Y en este caso se puede hacer que el parámetro sea igual a uno: $\mathfrak{gl}_n(1,0,0,0)$, $\mathfrak{gl}_n(0,1,0,0)$, $\mathfrak{gl}_n(0,0,1,0)$, $\mathfrak{gl}_n(0,0,0,1)$.*
(3) *Exactamente dos parámetros distintos a cero y también en este caso se pueden elegir ambos igual a uno: $\mathfrak{gl}_n(1,1,0,0)$, $\mathfrak{gl}_n(1,0,1,0)$, $\mathfrak{gl}_n(1,0,0,1)$, $\mathfrak{gl}_n(0,1,1,0)$, $\mathfrak{gl}_n(0,1,0,1)$, $\mathfrak{gl}_n(0,0,1,1)$.*
(4) *Exactamente tres parámetros distintos de cero: $\mathfrak{gl}_n(1,1,1,0)$, $\mathfrak{gl}_n(1,1,0,1)$, $\mathfrak{gl}_n(1,0,1,1)$, $\mathfrak{gl}_n(0,1,1,1)$.*
(5) *Exactamente todos los parámetros distintos de cero: $\mathfrak{gl}_n(1,1,1,b^2\epsilon)$.*

De esto concluimos:

3.4.3 Teorema. *Sea $n \geq 3$. Entonces $\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$ admite quince estructuras distintas de superálgebra de Lie y una familia a un parámetro.*

3.4.4 Corolario. *Sea $n \geq 3$. Entonces $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}) \oplus \mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$ admite:*

(1) *dos estructuras distintas de superálgebra de Lie si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$*
(2) *tres estructuras distintas de superálgebra de Lie si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$*

Notar que la parte (1) del Corolario es el Teorema 3.3.2

Además de nueva cuenta, si el campo base es $\mathbb{R}$ también se puede demostrar que Γ es una función a cuatro parámetros reales y ahora se obtiene que

3.4.5 Teorema. *Sea $n \geq 3$. Entonces $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ admite veintiseis estructuras distintas de superálgebra de Lie y dos familias a un parámetro.*

También podemos concluir

3.4.6 Teorema. *Los grupos de automorfismos están dados por:*

(1) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(\lambda, \mu, \nu, \epsilon))$ *con* $\lambda\mu\nu\epsilon \neq 0$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y* $S = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & at \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ *y* $a^2 = 1$.

(2) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(\lambda, \mu, \nu, 0))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y* $S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & at \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ *y* $a^4 = 1$.

(3) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(0, \mu, \nu, \epsilon))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y* $S = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & at \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ *y* $a^2 = 1$.

(4) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(\lambda, 0, \nu, \epsilon))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y* $S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b^{-1}t \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ *y* $a^2 = b^2 = 1$.

(5) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(\lambda, \mu, 0, \epsilon))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y* $S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & at \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ *y* $a^2 = 1$.

(6) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(0, \mu, \nu, 0))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} b^{-2} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y* $S = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1}t \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$.

(7) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(\lambda, 0, \nu, 0))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b^{-1}t \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ *y* $a^2b^2 = 1$.

(8) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(\lambda, \mu, 0, 0))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}t \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$.

(9) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(0, 0, \nu, \epsilon))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & bt \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ *y* $b^2 = 1$.

(10) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(0, \mu, 0, \epsilon))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & bt \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ *y* $b^2 = 1$.

(11) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(\lambda, 0, 0, \epsilon))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & bt \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ *y* $b^2 = 1$.

(12) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(0, 0, 0, \epsilon))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} a^{-1}t_{11} & 0 \\ 0 & bt \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ *y* $b^2 = 1$.

(13) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(0, 0, \nu, 0))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} b^{-2} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} a^{-1}b^{-2} & 0 \\ 0 & b^{-1}t \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$.

(14) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(0, \mu, 0, 0))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$S = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1}t \end{pmatrix}$ *junto con* $t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$.

(15) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(\lambda, 0, 0, 0))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$$S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b^{-1}t \end{pmatrix} \textit{ junto con } t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})).$$

(16) $\Phi \in Aut(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})(0,0,0,0))$ *si y sólo si* $T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ *y*

$$S = \begin{pmatrix} a^{-1}t_{11} & 0 \\ 0 & b^{-1}t \end{pmatrix} \textit{ junto con } t \in Aut(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})).$$

3.5 Estructuras geométricas *ad* invariantes en $\mathfrak{gl}_n(\lambda, \mu, \nu, \epsilon)$

Convención:
En esta sección siempre que hablemos de *invariancia* nos referimos a *ad* invariancia.

Ahora, nuestro interés se centra en describir las estructuras geométricas *ad* invariantes que admite $\mathfrak{gl}_n(\lambda, \mu, \nu, \epsilon)$.

Para lograr esto, debemos tener una descripción más explícita de Γ. Esto es, queremos determinar exactamente la posición de los parámetros λ, μ, ν y ϵ.

Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_n$. Denotaremos por $\{X, Y\} = XY + YX$. Podemos definir entonces

$$\begin{aligned} \Psi : \mathfrak{gl}_n &\longrightarrow \mathfrak{gl}_n \otimes \mathfrak{gl}_n \simeq Bil(\mathfrak{gl}_n \times \mathfrak{gl}_n, \mathbb{C}) \\ X &\longmapsto \Psi(X) \end{aligned}$$

donde $\Psi(X) \in Bil(\mathfrak{gl}_n \times \mathfrak{gl}_n, \mathbb{C})$ está definida por
$\Psi(X)(Y, Z) = tr(X\{Y, Z\})$.

3.5.1 Proposición. *Ψ es simétrica y ad equivariante.*

Si denotamos por $\pi_1 : S^2(\mathfrak{gl}_n) \longrightarrow I_1$, $\pi_2 : S^2(\mathfrak{gl}_n) \longrightarrow I_2$, $\pi_3 : S^2(\mathfrak{gl}_n) \longrightarrow (\mathfrak{sl}_n)_1$ y $\pi_4 : S^2(\mathfrak{gl}_n) \longrightarrow (\mathfrak{sl}_n)_2$ a las respectivas proyecciones en los factores que aparecen en la descomposición de $S^2(\mathfrak{gl}_n)$ obtenemos la siguiente proposición

3.5.2 Proposición. *$\pi_i \circ \Psi|_I$ son isomorfismos para $i = 1, 2$, mientras que $\pi_i \circ \Psi|_{\mathfrak{sl}_n}$ también son isomorfismos para $i = 3, 4$.*

Más aún, es claro que $\pi_1(\Psi(I)) = I \otimes I$, y que $\pi_3(\Psi(X)) = I \otimes X + X \otimes I$ para todo $X \in \mathfrak{sl}_n$.

Para entender $\pi_2 \circ \Psi$ y $\pi_4 \circ \Psi$, necesitamos restringir Ψ a $\mathfrak{sl}_n$.

Sean E_{ij} las matrices tales que sólo la entrada ij es 1 y las demás son cero. Es claro que $\mathfrak{gl}_n$ está generado por estas matrices y que en términos de esta base

$$\Psi(E_{ij}) = \sum A^{ij}_{kl\ mn} E_{kl} \otimes E_{mn}.$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$\Psi(E_{ij}) = \sum_l (E_{il} \otimes E_{lj} + E_{lj} \otimes E_{il}).$$

La base usual para $\mathfrak{gl}_n$ es $I = \sum E_{ii}$, $H_i = E_{ii} - E_{i+1i+1}$ para $i = 1, \ldots, n-1$, junto con E_{ij} si $i \neq j$. Por lo que $\Psi(I) = \sum \Psi(E_{ii})$ mientras que

$$\begin{aligned}
\Psi(H_i) &= \Psi(E_{ii}) - \Psi(E_{i+1i+1}) \\
&= 2(E_{ii} \otimes E_{ii} - E_{i+1i+1} \otimes E_{i+1i+1}) \\
&\quad + \sum_{k \neq i, i+1} (E_{ik} \otimes E_{ki} + E_{ki} \otimes E_{ik}) \\
&\quad - \sum_{k \neq i, i+1} (E_{i+1,k} \otimes E_{k,i+1} + E_{k,i+1} \otimes E_{i+1,k})
\end{aligned}$$

De esto, ya podemos inferir que

$$\Gamma(I, I) = \lambda I \quad \text{mientras que} \quad \Gamma(I, X) = \mu X$$

para todo $X \in \mathfrak{sl}_n$. Para determinar en donde aparecen los parámetros ν y ϵ debemos encontrar una base para los sumandos irreducibles de $S^2(\mathfrak{sl}_n)$ y despejar a los elementos que aparecen en $\pi_2(\Psi(I))$, $\pi_4(\Psi(H_i))$ y $\pi_4(\Psi(E_{ij}))$ en terminos de esta base, hecho esto, valuar Γ es sencillo.

Notar que en general, encontrar las bases para los sumandos irreducibles que aparecen en la descomposición de $S^2(\mathfrak{sl}_n)$ es bastante laborioso, ya que primero se debe determinar un vector de peso máximo para ρ, luego se aplican a este vector todas las composiciones posibles que se pueden obtener con los operadores de la forma $\rho(E_{ij})$ (con $i > j$), con esto se obtiene un subespacio invariante, luego se toma un vector de peso máximo en el complemento ortogonal a este subespacio y se repite el proceso, como estamos trabajando con superálgebras de dimensión finita sólo es necesario repetir el proceso un número finito de veces.

Ejemplificaremos estos cálculos para $n = 3$. Los demás casos ($n > 3$) son análogos.

Ejemplo: $\mathfrak{gl}_3 \oplus \mathfrak{gl}_3$

$$\begin{aligned}
S^2(\mathfrak{gl}_3) &= (S^0(I) \otimes S^2(\mathfrak{sl}_3)) \oplus (S^1(I) \otimes S^1(\mathfrak{sl}_3)) \oplus (S^2(I) \otimes S^0(\mathfrak{sl}_3)) \\
&\simeq S^2(\mathfrak{sl}_3) \oplus (I \otimes \mathfrak{sl}_3) \oplus I \\
&\simeq (I \oplus \mathfrak{sl}_3 \oplus V_{27}) \oplus (I \otimes \mathfrak{sl}_3) \oplus I
\end{aligned}$$

En este caso, la acción, inducida por $\rho = ad$ en $\mathfrak{gl}_3 \otimes \mathfrak{gl}_3$ está dada por

$$\begin{aligned}
\rho(H_1) &= 2E_{12} \otimes E_{12}^* + E_{13} \otimes E_{13}^* - E_{23} \otimes E_{23}^* - 2E_{21} \otimes E_{21}^* \\
&\quad - E_{31} \otimes E_{31}^* + E_{32} \otimes E_{32}^* \\
\rho(H_2) &= -E_{12} \otimes E_{12}^* + E_{13} \otimes E_{13}^* + 2E_{23} \otimes E_{23}^* + E_{21} \otimes E_{21}^* \\
&\quad - E_{31} \otimes E_{31}^* - 2E_{32} \otimes E_{32}^* \\
\rho(E_{12}) &= -2E_{12} \otimes H_1^* + E_{12} \otimes H_2^* + E_{13} \otimes E_{23}^* + H_1 \otimes E_{21}^* \\
&\quad - E_{32} \otimes E_{31}^* \\
\rho(E_{13}) &= -E_{13} \otimes H_1^* - E_{13} \otimes H_2^* + E_{23} \otimes E_{21}^* + (H_1 + H_2) \otimes E_{31}^* \\
&\quad + E_{12} \otimes E_{32}^* \\
\rho(E_{23}) &= E_{23} \otimes H_1^* - 2E_{23} \otimes H_2^* - E_{13} \otimes E_{12}^* + E_{21} \otimes E_{31}^* \\
&\quad + H_2 \otimes E_{32}^*
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\rho(E_{21}) &= 2E_{21}\otimes H_1^* - E_{12}\otimes H_2^* + H_1\otimes E_{12}^* + E_{23}\otimes E_{13}^* \\
&\quad - E_{31}\otimes E_{32}^* \\
\rho(E_{31}) &= E_{31}\otimes H_1^* + E_{31}\otimes H_2^* + E_{32}\otimes E_{12}^* - (H_1+H_2)\otimes E_{13}^* \\
&\quad - E_{21}\otimes E_{23}^* \\
\rho(E_{32}) &= -E_{32}\otimes H_1^* + 2E_{32}\otimes H_2^* - E_{12}\otimes E_{13}^* - H_2\otimes E_{23}^* \\
&\quad + E_{31}\otimes E_{21}^*.
\end{aligned}
$$

Según lo anterior sabemos que

$$\pi_1(\Psi(I)) = I\otimes I$$

y

$$\pi_3(\Psi(X)) = I\otimes X + X\otimes I \qquad \text{para todo} \qquad X\in\mathfrak{sl}_n$$

mientras que

$$
\begin{aligned}
\pi_2(\Psi(I)) = \ & 2(H_1\otimes H_1 + H_2\otimes H_2) + (H_1\otimes H_2 + H_2\otimes H_1) \\
& + 3(E_{12}\otimes E_{21} + E_{21}\otimes E_{12} \\
& + E_{13}\otimes E_{31} + E_{31}\otimes E_{13} \\
& + E_{23}\otimes E_{32} + E_{32}\otimes E_{23})
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\pi_4(\Psi(H_1)) &= \frac{2}{3}(H_1\otimes H_1) + \frac{2}{3}(H_1\otimes H_2 + H_2\otimes H_1) \\
&\quad + (E_{13}\otimes E_{31} + (E_{31}\otimes E_{13}) - (E_{23}\otimes E_{32} + (E_{32}\otimes E_{23}) \\
\pi_4(\Psi(H_2)) &= -\frac{2}{3}(H_2\otimes H_2) - \frac{2}{3}(H_1\otimes H_2 + H_2\otimes H_1) \\
&\quad + (E_{12}\otimes E_{21} + (E_{21}\otimes E_{12}) - (E_{13}\otimes E_{31} + (E_{31}\otimes E_{13})
\end{aligned}
$$

mientras que

$$\begin{aligned}
\pi_4(\Psi(E_{12})) &= \frac{1}{3}(H_1 \otimes E_{12} + E_{12} \otimes H_1) + \frac{2}{3}(H_2 \otimes E_{12} + E_{12} \otimes H_2) \\
&\quad + (E_{13} \otimes E_{32} + (E_{32} \otimes E_{13}) \\
\pi_4(\Psi(E_{13})) &= \frac{1}{3}(H_1 \otimes E_{13} + E_{13} \otimes H_1) - \frac{1}{3}(H_2 \otimes E_{13} + E_{13} \otimes H_2) \\
&\quad + (E_{12} \otimes E_{23} + (E_{23} \otimes E_{12}) \\
\pi_4(\Psi(E_{23})) &= -\frac{2}{3}(H_1 \otimes E_{23} + E_{23} \otimes H_1) - \frac{1}{3}(H_2 \otimes E_{23} + E_{23} \otimes H_2) \\
&\quad + (E_{21} \otimes E_{13} + (E_{13} \otimes E_{21}) \\
\pi_4(\Psi(E_{21})) &= \frac{1}{3}(H_1 \otimes E_{21} + E_{21} \otimes H_1) + \frac{2}{3}(H_2 \otimes E_{21} + E_{21} \otimes H_2) \\
&\quad + (E_{23} \otimes E_{31} + (E_{31} \otimes E_{23}) \\
\pi_4(\Psi(E_{31})) &= \frac{1}{3}(H_1 \otimes E_{31} + E_{31} \otimes H_1) - \frac{1}{3}(H_2 \otimes E_{31} + E_{31} \otimes H_2) \\
&\quad + (E_{32} \otimes E_{21} + (E_{21} \otimes E_{32}) \\
\pi_4(\Psi(E_{32})) &= -\frac{2}{3}(H_1 \otimes E_{32} + E_{32} \otimes H_1) - \frac{1}{3}(H_2 \otimes E_{32} + E_{32} \otimes H_2) \\
&\quad + (E_{31} \otimes E_{12} + (E_{12} \otimes E_{31}).
\end{aligned}$$

Para calcular una base de V_{27}, uno observa que un vector de peso máximo es $E_{13} \otimes E_{13}$ y que actuando con los operadores $\rho(E_{21})$, $\rho(E_{31})$ y $\rho(E_{32})$ sobre este vector de peso máximo en todos los ordenes posibles se genera dicha base.

Uno obtiene que

$$\begin{aligned}
V_{27} = \langle & E_{12} \otimes E_{12}, \quad E_{13} \otimes E_{13}, \quad E_{23} \otimes E_{23}, \quad E_{21} \otimes E_{21}, \quad E_{31} \otimes E_{31}, \\
& E_{32} \otimes E_{32}, \quad E_{13} \otimes E_{23} + E_{23} \otimes E_{13}, \quad E_{12} \otimes E_{13} + E_{13} \otimes E_{12}, \\
& E_{21} \otimes E_{31} + E_{31} \otimes E_{21}, \quad E_{12} \otimes E_{32} + E_{32} \otimes E_{12}, \\
& E_{23} \otimes E_{21} + E_{21} \otimes E_{23}, \quad H_2 \otimes E_{23} + E_{23} \otimes H_2, \\
& H_2 \otimes E_{39} + E_{39} \otimes H_2, \quad H_1 \otimes E_{12} + E_{12} \otimes H_1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&E_{31} \otimes E_{32} + E_{32} \otimes E_{31}, \quad H_1 \otimes E_{21} + E_{21} \otimes H_1,\\
&H_1 \otimes E_{13} + E_{13} \otimes H_1 + H_2 \otimes E_{13} + E_{13} \otimes H_2,\\
&H_1 \otimes E_{31} + E_{31} \otimes H_1 + H_2 \otimes E_{31} + E_{31} \otimes H_2,\\
&H_2 \otimes H_2 - (E_{23} \otimes E_{32} + E_{32} \otimes E_{23}),\\
&H_2 \otimes E_{13} + E_{13} \otimes H_2 + E_{12} \otimes E_{23} + E_{23} \otimes E_{12},\\
&H_2 \otimes E_{12} + E_{12} \otimes H_2 - (E_{13} \otimes E_{32} + E_{32} \otimes E_{13}),\\
&H_1 \otimes E_{23} + E_{23} \otimes H_1 + E_{13} \otimes E_{21} + E_{21} \otimes E_{13},\\
&H_1 \otimes H_1 - (E_{12} \otimes E_{21} + E_{21} \otimes E_{12}),\\
&H_2 \otimes E_{21} + E_{21} \otimes H_2 - (E_{23} \otimes E_{31} + E_{31} \otimes E_{23}),\\
&H_1 \otimes E_{32} + E_{32} \otimes H_1 + E_{12} \otimes E_{31} + E_{31} \otimes E_{12},\\
&H_1 \otimes E_{31} + E_{31} \otimes H_1 - (E_{21} \otimes E_{32} + E_{32} \otimes E_{21}),\\
&H_1 \otimes H_1 + H_2 \otimes H_2 + H_1 \otimes H_2 + H_2 \otimes H_1\\
&\qquad - (E_{13} \otimes E_{31} + E_{31} \otimes E_{13})\rangle.
\end{aligned}
$$

De todo esto, podemos concluir que, por ejemplo:

$$\Gamma(I, I) = \lambda I$$

mientras que

$$\Gamma(I, X) = \mu X \quad \text{para todo} \quad X \in \mathfrak{sl}_n.$$

Usando las bases encontradas, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
20 H_1 \otimes H_1 &= 5\pi_2(\Psi(I)) + 4\pi_4(\Psi(H_1))\\
&\quad + 8\pi_4(\Psi(H_2)) + R_{11}\\
20(H_1 \otimes H_2 + H_2 \otimes H_1) &= -5\pi_2(\Psi(I)) + 8\pi_4(\Psi(H_1))\\
&\quad - 8\pi_4(\Psi(H_2)) + R_{12}\\
20 H_2 \otimes H_2 &= 5\pi_2(\Psi(I)) - 8\pi_4(\Psi(H_1))\\
&\quad - 4\pi_4(\Psi(H_2)) + R_{22}
\end{aligned}
$$

donde R_{ij} es suma de términos tales que al valuar Γ se anulan porque no pertenecen a subespacios invariantes isomorfos a multiplos de la identidad o isomorfos a $\mathfrak{sl}_3$, o, lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned}\Gamma(H_1, H_1) &= 2\nu I + 2\epsilon(H_1 + 2H_2)\\ \Gamma(H_1, H_2) &= -\nu I + 2\epsilon(H_1 - H_2)\\ \Gamma(H_2, H_2) &= 2\nu I - 2\epsilon(2H_1 + H_2)\end{aligned}$$

los casos restantes $\Gamma(H_i, E_{jk})$ y $\Gamma(E_{ij}, E_{kl})$ se calculan de la misma forma. □

3.5.3 Teorema. $\mathfrak{gl}_n(\lambda, \mu, \nu, \epsilon)$ *no admite estructuras geométricas invariantes pares para* $n \geq 2$.

Demostración.
Por lo expuesto en el primer capítulo, la existencia de estructuras $\mathbb{Z}_2$-ortogonales o $\mathbb{Z}_2$-simplécticas invariantes pares, implicarían la existencia de una estructura simpléctica invariante en $\mathfrak{gl}_n$ y esto último no es posible.
La no existencia de estructuras $\mathbb{Z}_2$-hermitianas invariantes pares se sigue de lo anterior. ■

Nota:
En [2], clasifican las superálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ que admiten estructuras $\mathbb{Z}_2$-ortogonales pares invariantes (a las cuales llaman *superálgebras cuadráticas*, o superálgebras de *tipo riemanniano* en [9]). Notar entonces que con esta terminología podemos reescribir el resultado anterior como: $\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$ no son superálgebras cuadráticas (o lo que es lo mismo, de tipo riemanniano).

Para analizar la existencia de estructuras geométricas invariantes impares, procederemos por casos ya que la estructura de superálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$ queda determinada por la correspondiente función Γ, la cuál, esta determinada por los parámetros (λ, μ, ν) si $n = 2$ y por los parámetros $(\lambda, \mu, \nu, \epsilon)$ si $n \geq 3$.

3.6.1 Teorema. $\mathfrak{gl}_2(\lambda, \mu, \nu)$ *admite estructuras invariantes impares*

(1) $\mathbb{Z}_2$*-ortogonales si y sólo si su estructura de superálgebra de Lie está en alguna de las siguientes clases de isomorfía:* $(2,0,0)$, $(0,0,0)$, $(2,2,1)$ *y* $(0,2,1)$ *si* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, *o bien,* $(2,0,0)$, $(0,0,0)$, $(2,2,1)$, $(2,2,-1)$ *y* $(0,2,1)$ *si* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

(2) $\mathbb{Z}_2$*-simplécticas si y sólo si su estructura de superálgebra de Lie está en la clase de* $(0,0,0)$.

Demostración.
(1) Recordar que si $\mathcal{B}$ es una estructura $\mathbb{Z}_2$-ortogonal impar en $\mathfrak{gl}_2 \oplus \mathfrak{gl}_2$, entonces está completamente determinada por una función $\Phi : \mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2 \longrightarrow \mathbb{F}$ no degenerada.

$\mathcal{B}$ es invariante si y sólo si $C_j^T = -\Phi C_j \Phi^{-1}$ y $\Gamma_j^T = \Phi \Gamma_j \Phi^{-1}$ (Ver Notas 2.1.1). La primera ecuación dice que Φ es $\mathfrak{gl}_2$ invariante, por lo que un cálculo sencillo muestra que

$$\Phi = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & bK \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \qquad K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $ab \neq 0$, mientras que la segunda ecuación se traduce en $a\nu = b\mu$, de donde se sigue el resultado.

(2) Notar que en este caso $\mathcal{B}$ es invariante si y sólo si $C_j^T = -\Phi C_j \Phi^{-1}$ y $\Gamma_j^T = -\Phi \Gamma_j \Phi^{-1}$. La primera ecuación se resuelve igual que en (1) mientras que la segunda ecuación ahora dice que

$$a\lambda = 0 \qquad b\mu = 0 \qquad a\nu = 0,$$

de donde se sigue el resultado. ■

De la demostración del teorema anterior, se lee rápidamente que hay dos formas de que las estructuras geométricas invariantes en $\mathfrak{gl}_2 \oplus \mathfrak{gl}_2$ degeneren, a saber $a = 0$ o $b = 0$.

3.6.2 Corolario. *Las siguientes clases de isomorfía de* $\mathfrak{gl}_2(\lambda, \mu, \nu)$ *admiten estructuras* $\mathbb{Z}_2$*-ortogonales o* $\mathbb{Z}_2$*-simplécticas invariantes degeneradas*

(1) *para* $a = 0$*, las clases de isomorfía reales son* $(2,0,1)$*,* $(2,0,-1)$*,* $(2,0,0)$*,* $(0,0,0)$ *y* $(0,0,1)$*, las clases de isomorfía complejas son* $(2,0,1)$*,* $(2,0,0)$*,* $(0,0,0)$ *y* $(0,0,1)$*.*

(2) *para* $b = 0$*, las clases de isomorfía reales y complejas son* $(2,2,0)$*,* $(2,0,0)$*,* $(0,2,0)$ *y* $(0,0,0)$*.*

Este último resultado, sugiere que otro problema interesante es el de estudiar sub-superálgebras de Lie, en las cuales las estructuras geométricas invariantes encontradas no degeneren.

3.7 Caso $\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$ con $\rho = ad$ y $n \geq 3$.

Sea $\mathcal{B}$ una estructura geométrica, en cualquier caso, la invariancia de $\mathcal{B}$ implica que $C_j^T = -\Phi C_j \Phi^{-1}$, lo cuál nos dice que $\Phi|_{\mathfrak{sl}_n} = bK$ donde K es la forma de Cartan-Killing en $\mathfrak{sl}_n$, de esto

$$\Phi = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & bK \end{pmatrix}$$

La segunda ecuación a satisfacer es $\Gamma_j^T = \Phi \Gamma_j \Phi^{-1}$ o $\Gamma_j^T = -\Phi \Gamma_j \Phi^{-1}$ dependiendo de si queremos estructuras $\mathbb{Z}_2$-ortogonales o $\mathbb{Z}_2$-simplécticas.

3.7.1 Teorema. $\mathfrak{gl}_n(\lambda, \mu, \nu, \epsilon)$ *admite estructuras invariantes impares*

(1) $\mathbb{Z}_2$*-ortogonales si y sólo si* $\mathfrak{gl}_n(\lambda, \mu, \nu, \epsilon)$ *está en la clase de isomorfía de* $(\lambda, 0, 0, \epsilon)$ *o* $(\lambda, 1, 1, \epsilon)$*.*

(2) $\mathbb{Z}_2$*-simplécticas si y sólo si* $\mathfrak{gl}_n(\lambda, \mu, \nu, \epsilon)$ *está en la clase de isomorfía de* $(0,0,0,0)$*.*

Demostración.
Notar primero que $\Gamma|_{\mathfrak{sl}_n} : \mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_n \longrightarrow \mathfrak{sl}_n$ en realidad se reescribe como: $\Gamma|_{\mathfrak{sl}_n}(X,Y) = \epsilon(XY + YX - \frac{2}{n} tr(XY))$, y entonces la ecuación

$$bK(\Gamma_j|_{\mathfrak{sl}_n})^t = b(\Gamma_j|_{\mathfrak{sl}_n})K$$

es equivalente a

$$K(\{X_j, X_i\}, X_k) = K(X_i, \{X_j, X_k\})$$

la cuál se satisface si K es la forma de Cartan-Killing en $\mathfrak{sl}_n$, y $\{X, Y\} = XY + YX - \frac{2}{n}tr(XY)$, lo cuál a su vez se traduce en

$$b\epsilon = \pm b\epsilon.$$

Si r_i denota el i-ésimo renglón de K, y e_i la i-ésima columna de $\mathbb{I}_{n-1\times n-1}$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu I_{n-1\times n-1} \end{pmatrix} \qquad \Gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & \nu r_{j-1} \\ \mu e_j & (\Gamma_j|_{\mathfrak{sl}_n}) \end{pmatrix}.$$

(1) Después de las identificaciones mencionadas, $\Gamma_j^T = \Phi\Gamma_j\Phi^{-1}$ si y sólo si

$$\begin{cases} \lambda a = \lambda a \\ \mu b = \mu b \\ \mu b = \nu a \\ \epsilon b = \epsilon b \end{cases}.$$

(2) $\Gamma_j^T = -\Phi\Gamma_j\Phi^{-1}$ si y sólo si

$$\begin{cases} \lambda a = -\lambda a \\ \mu b = -\mu b \\ \mu b = -\nu a \\ \epsilon b = -\epsilon b \end{cases}.$$

De donde se sigue lo afirmado. ■

Además se obtiene

3.7.2 Corolario. $\mathfrak{sl}_n \oplus \mathfrak{sl}_n$ *admite estructuras* $\mathbb{Z}_2$ *ortogonales invariantes impares, y admite estructuras* $\mathbb{Z}_2$ *simplécticas invariantes impares si y sólo si* $\epsilon = 0$.

Bibliografía.

[1] Alekseevsky, D.V. and Cortés, V., *Classification of N-(Super)-Extended Poincaré Algebras and Bilinear Invariants of the Spinor Representation of* $Spin(p,q)$, Commun. Math. Phys., 183, 477-510 (1997).

[2] Benayadi, S., *Quadratic Lie Superalgebras with the Completely Reductible Action of the Even part on the Odd part*, J. Algebra, 223, 344-366 (2000).

[3] Berezin, F. A. and Retakh, V., *The structure of Lie Superalgebras with semisimple even part*, Funct. Anal. Appl., 12, No. 1 (1978), 48-50.

[4] Elduque, A., *Lie Superalgebras with semisimple even part*, J. Algebra, 138 (1996), 649-663.

[5] Fulton, W. and Harris, J., *Representation Theory, a first course.*, Springer, New York, (1991).

[6] Kac, V. G., *Lie Superalgebras*, Adv. Math, 26, 8-96 (1977) 31.

[7] Kac, V. G., *Representations of classical Lie Superalgebras*, Lecture Notes in Math., 676 (1978), 597-626.

[8] Kostant, B., *Graded Manifolds, Graded Lie Theory and Prequantization*, (Bleuler, K. and Reetz, A., eds.), Proc. Conf. on Diff. Geom. Methods in Math. Phys., Bonn 1975, vol 570, Springer Verlag, Berlin and New York, (1977), 177-306.

[9] Kostant, B., *The Weyl algebra and the structure of all Lie superalgebras of Riemannin type*, arXiv:math.RT/0106171 v1, 20 Jun 2001.

[10] Michel, L., *Applications of group thoery to quantum physics. Algebraic Aspects*, Lectures Notes in Physics, Vol. 6, 36-146.

[11] Monakhov, S. V., *Classification of finite-dimensional complex Lie Superalgebras with even part* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$., Problems in group theory and hological algebra, Yaroslav, Gos. Univ., Yaroslav (1998), 151-166 (Russian).

[12] Monterde, J., and Sánchez Valenzuela, O.A., *Existence and uniqueness of solutions to superdiferential equations*, Journal of Geometry and Physics 10, (1993), 315-344.

[13] Onishchik, A.L. and Vinberg, E.L., *Lie Groups and Algebraic Groups.*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1990.

[14] Pinczon, G., *Classification of simple Z graded Lie Superalgebra and simple Jordan Superalgebra*, Comm. Alg., 5 (1977) No. 13, 1375-1400.

[15] Serre, J. P., *Lie Algebras and Lie Groups*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (1992).

[16] Scheunert, M., *The Theory of Lie Superalgebras, an introduction*, Springer-Verlag, New York, (1979).

[17] Sternberg, S. and Wolf, J. A., *Hermitian Lie Algebras and Metaplectic Representations*, Trans. American Math. Soc., Vol. 238, 1-43 (1978).

[18] Xiadong, W., *Left-supersymmetric structures on Lie Superalgebras*, Northeast Math. J., 15 (1999) No. 2, 209-216.