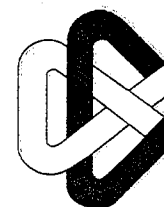


CIMAT
BIBLIOTECA



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

**Medidas de Patterson-Sullivan
en las Ecuaciones de Riccati**

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Elifalet López González

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Xavier Gómez-Mont Avalos

Mayo de 2004

Guanajuato, Gto. México

C I M A T
BIBLIOTECA

018337

A los Esenios.

Índice.

Resumen.	1
Agradecimientos.	2
Introducción.	3
1. Preliminares.	16
1.1 El espacio hiperbólico y grupos discretos.	16
1.2 Medidas y espacios de Medidas.	20
1.3 Medidas de Patterson-Sullivan.	21
1.4 Deformaciones de grupos Fuchsianos.	26
1.5 Representaciones y haces planos.	32
1.6 Ecuaciones de Riccati.	33
1.7 El flujo geodésico en las ecuaciones de Riccati.	35
2. Medidas de Patterson-Sullivan en las Ecuaciones de Riccati.	43
2.1 Sistemas de coordenadas.	43
2.2 La medida de ángulo sobre $T_x^1 S$	45
2.3 Desintegración de $\tilde{q}_* \mu^+$	46
2.4 Identificación de las medidas $\{\mu_x : x \in S\}$	48
2.5 Medidas de Patterson-Sullivan en las ecuaciones de Riccati.	52
3. Deformación de la estructura holomorfa de la superficie en la base S.	53
3.1 La representación casi-canónica.	53
3.2 Deformación de la estructura holomorfa de S	57

4. Aproximación de la medida de ángulo en $T_y^1 S$.	60
4.1 Introducción.	60
4.2 Hojas de flujo geodésico y atractor transversal.	61
4.3 Medidas asociadas a la intersección de hojas y fibras.	65
4.4 Aproximación de λ_x mediante $\lambda_{x,s}$.	68
5. Interpretación geométrica de $\mu_{\rho,x}$.	70
5.1 Hojas de flujo geodésico y atractor transversal.	70
5.2 Aproximación de la medida μ_x en $M_{\rho,w}$.	74
5.3 Representaciones de monodromía ping-pong y Schottky.	75
5.4 Aproximación de μ_x en M_ρ cuando ρ es Schottky.	81
5.5 Interpretación geométrica de μ_x .	87
5.6 Interpretación geométrica de μ_x^+ .	88
Bibliografía.	90

Resumen.

Consideremos una superficie de Riemann hiperbólica S de área finita y una representación $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PGL(n, \mathbb{C})$. Mediante la suspensión, obtenemos una variedad M_ρ que es un haz fibrado sobre S con fibra $\mathbb{C}P^{n-1}$ y obtenemos una foliación \mathcal{F}_ρ de M_ρ transversal a las fibras. Cuando restringimos la proyección de haces a las hojas de la foliación \mathcal{F}_ρ , estas son espacios cubrientes de S . La foliación \mathcal{F}_ρ se llama *foliación de Riccati*. El objetivo de este trabajo es estudiar una familia de medidas de probabilidad $\{\mu_x : x \in S\}$ asociada a una desintegración de una medida μ , esta se induce mediante la proyección canónica $\tilde{q} : T^1 \mathcal{F}_\rho \rightarrow M_\rho$ del haz tangente unitario a una foliación de Riccati \mathcal{F}_ρ de la única medida SRB μ^+ con soporte en el conjunto atractor para el flujo geodésico en las hojas hiperbólicas de la foliación \mathcal{F}_ρ . Consideramos una clase importante de foliaciones de Riccati construidas mediante suspensión de representaciones $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PGL(2, \mathbb{C})$, primero aquellas foliaciones cuya representación de monodromía es la que proviene del cubriente universal de la superficie en la base S y deformaciones casi-conformes de estas, después consideramos foliaciones construidas por representaciones en grupos Schottky. De la teoría de medidas de Patterson-Sullivan derivamos una técnica geométrica para aproximar en la convergencia débil a las medidas de la familia $\{\mu_x : x \in S\}$. De manera muy similar también aproximamos a las medidas de la familia $\{\mu_x^+ : x \in S\}$ que corresponden a una desintegración de μ^+ y que se proyectan a la familia $\{\mu_x : x \in S\}$ mediante $\tilde{q} : T^1 \mathcal{F}_\rho \rightarrow M_\rho$. Estas técnicas exhiben la dependencia de estas medidas sobre la métrica hiperbólica de la superficie en la base S .

Agradecimientos.

Agradezco con todo mi Amor a *Briseida*, mi maravillosa esposa, por entregarse a la tarea de dar a luz un maravilloso bebé mientras yo estaba concluyendo este trabajo.

Agradezco de todo corazón a mi padre y a mi madre que siempre me han apoyado y han sido un ejemplo para mi.

Agradezco a la Escuela de Ciencias Fisico-Matemáticas de la UAS y a todos sus profesores por darme la formación de licenciatura.

Agradezco al CIMAT por haberme dado la oportunidad de realizar mi tesis de licenciatura y mis estudios de maestría y doctorado. Agradezco la M. en C. Helga Fetter porque fue mi asesora en mi tesis de Licenciatura y agradezco a todos mis profesores del CIMAT por contribuir a mi formación académica. En especial agradezco a mi asesor Dr. Xavier Gómez-Mont por aceptarme como su estudiante de doctorado y también agradezco al Prof. Christian Bonatti por sus muy importantes sugerencias sobre mi tesis doctoral.

Agradezco también a CONACyT por haberme apoyado con becas durante mis estudios de maestría y doctorado (número de registro 129149).

Agradezco también a mis sinodales: Dr. Alberto Verjovsky, Dr. Gonzalo Contreras, Dr. Jesús Muciño, Dr. Raúl Quiroga, Dr. Ricardo Vila.

Por último, agradezco también a todos mis amigos por su determinante apoyo.

Introducción.

La teoría de medidas sobre el conjunto límite de grupos discretos a sido fundamental, para establecer la relación entre el exponente crítico de la serie de Poincaré asociada a un grupo discreto geoméricamente finitos Γ de isometrías hiperbólicas y la dimensión de Hausdorff del conjunto límite, para estimaciones de la función orbital contante, y en otros temas relacionados con grupos discretos de isometrías del espacio hiperbólico n -dimensional (Ref. [15]). Así, la noción de medida sobre el conjunto límite ha sido una herramienta muy poderosa en los sistemas dinámicos y la teoría de grupos discretos. Gran parte de esta teoría ha sido aportada por el matemático norteamericano Dennis Sullivan (Ref. [17] y [18]) quien ha generalizado las ideas de S. J. Patterson.

Los matemáticos Christian Bonatti, Xavier Gómez-Mont, Marcelo Viana y Ricardo Vila han hecho avances en el estudio de las ecuaciones de Riccati. Esta ecuación es muy importante porque se relaciona con las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables que modelan un gran número de situaciones de la física y la ingeniería. Los resultados que han obtenido se centran en el tema de propiedades de crecimiento exponencial de valores propios de los productos deterministas de matrices. En la situación general hay un valor propio dominante (Ref. [2], Teoremas 4 y 5). Este hecho implica la existencia de una condición inicial favorita, que apunta en la dirección de esta valor propio dominante. Esto permite encontrar "un atractor" en estas ecuaciones, que están atrayendo a todas las soluciones (Ref. [3], Teorema 1). Este atractor no es un atractor en el sentido ingenuo de la palabra, sino es un atractor muy sutil en la dinámica de la ecuación.

Mi trabajo consiste en el análisis detallado de este atractor para una clase importante de ecuaciones de Ricatti. Primero estudiando aquellas ecuaciones cuya representación de monodromía es la que proviene del cubriente universal de la superficie de Riemann (hiperbólica de área finita) en la base de la ecuación. Posteriormente estudio las deformaciones de esta representación, dando origen a las representaciones casi-Fuchsianas, después estudio aquellas ecuaciones cuya representación de monodromía esta dada por un grupo Schottky. Los puntos importantes de este trabajo son:

- (1) "Desintegrar" la medida soportada en el atractor y variar la estructura holomorfa en la base de la ecuación para ver cómo varían

estas medidas.

- (2) Comparar la familia de medidas que se obtienen al desintegrar con las medidas de Patterson-Sullivan.

La medida soportada en el atractor se proyecta a una medida que describe efectivamente el comportamiento estadístico de las hojas hiperbólicas de una foliación de Riccati (Ref. [1], Teoremas 1 y 2).

Cuando la representación de monodromía es la que proviene del cubriente universal de la superficie de Riemann (hiperbólica compacta) en la base de la ecuación, la proyección a la foliación de Riccati, de la medida soportada en el atractor es una medida armónica y la desintegración que consideramos de esta medida, coincide con una familia de medidas que construyó Lucy Garnett (Ref. [8], pág. 298) y probó que proviene de esta medida armónica.

Las *ecuaciones de Riccati* son la proyectivización de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias sobre una superficie de Riemann hiperbólica S de tipo finito (es decir, compacta menos un número finito de puntos cuyo cubriente universal es el plano de Poincaré). Estas localmente tienen la forma

$$\frac{dw}{dz} = A(z)w, \quad w \in \mathbb{C}^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

con A función holomorfa. Estas ecuaciones se pueden definir de manera equivalente dando las representaciones,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S, z_0) & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & GL(n, \mathbb{C}) \\ & \searrow \rho & \downarrow \text{proy} \\ & & PGL(n, \mathbb{C}) \end{array}$$

mediante la suspensión obtenemos haces fibrados planos con fibra \mathbb{C}^n y $\mathbb{C}P^{n-1}$ respectivamente sobre S

$$E_{\tilde{\rho}} \rightarrow S, \quad y \quad M_{\rho} \xrightarrow{p} S$$

y foliaciones (transversales a las fibraciones respectivas) $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ en $E_{\tilde{\rho}}$ y \mathcal{F}_{ρ} en M_{ρ} (Ref. [11], pág. 10) cuyas holonomías coinciden con $\tilde{\rho}$ y ρ respectivamente. Cuando restringimos las proyecciones de estos haces a las hojas de

las foliaciones $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ y \mathcal{F}_{ρ} , estas son espacios cubrientes de S . La foliación \mathcal{F}_{ρ} se llama *foliación de Riccati*.

Mediante la aplicación cubriente $\pi : \mathbb{H}^+ \rightarrow S$ introducimos a la superficie de Riemann hiperbólica S de área finita la métrica de Poincaré ξ , y al haz tangente unitario T^1S a la superficie S la medida de Liouville λ normalizadas para tener área y volumen 1 respectivamente. Introducimos sobre las hojas \mathcal{L} de la foliación \mathcal{F}_{ρ} la métrica de Poincaré de S mediante la aplicación cubriente $p : \mathcal{L} \rightarrow S$.

Denotamos por $q : T^1S \rightarrow S$ al haz tangente unitario a la superficie S . Sean $T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ y $T^1\mathcal{F}_{\rho}$ las variedades formadas por aquellos vectores tangentes a $E_{\tilde{\rho}}$ y M_{ρ} los cuales son tangentes a $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ y \mathcal{F}_{ρ} y tienen longitud unitaria con respecto a las métricas de Poincaré de las foliaciones. El espacio tangente unitario $T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ a la foliación $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ en $E_{\tilde{\rho}}$ se identifica de manera canónica con $q^*E_{\tilde{\rho}}$. Con esta identificación definimos un haz vectorial $T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}} \rightarrow T^1S$ que denotamos por E , este es isomorfo al haz vectorial $q^*E_{\tilde{\rho}} \rightarrow T^1S$. De la misma forma el haz tangente unitario $\tilde{q} : T^1\mathcal{F}_{\rho} \rightarrow E_{\rho}$ a la foliación \mathcal{F}_{ρ} en E_{ρ} define un haz proyectivo $\tilde{p} : T^1\mathcal{F}_{\rho} \rightarrow T^1S$ el cual es isomorfo de manera canónica con la proyectivización $\text{Proy}(E) \rightarrow T^1S$ del haz vectorial E sobre T^1S . Las derivadas de las proyecciones $E_{\tilde{\rho}}, M_{\rho} \rightarrow S$ inducen los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}} & \longrightarrow & E_{\tilde{\rho}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^1S & \xrightarrow{q} & S, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^1\mathcal{F}_{\rho} & \xrightarrow{\tilde{q}} & M_{\rho} \\ \downarrow \tilde{p} & & \downarrow p \\ T^1S & \xrightarrow{q} & S. \end{array}$$

Para cada $x \in \mathbb{D}$, sea $\sigma_x : T_x^1\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{S}^1$ la función que asigna a vector unitario v el punto extremo positivo de la geodésica que pasa por v . Esto nos permite definir una función $\sigma : T^1\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$ que asigna al vector $v \in T_x^1\mathbb{D}$ el punto $(x, \sigma_x(v))$. Consideramos la medida de ángulo Euclidiano θ_x sobre $T_x^1\mathbb{D}$ (normalizada para obtener una medida de probabilidad), es decir, en el sistema de coordenadas dado por la función σ_x la medida θ_x es la medida $\tilde{\theta}_x$ sobre \mathbb{S}^1 generada por la métrica

$$g_x(v, w) = |\arccos(v \cdot w)|.$$

Consideremos también la medida de volumen sobre $T^1\mathbb{D}$ cuyo elemento de volumen es $dV = dHd\theta_x$ donde dH es el elemento de área hiperbólica

$$dH := \frac{4dx_1dx_2}{(1-|x|^2)^2}$$

sobre \mathbb{D} , esto es, en el sistema de coordenadas dado por $\sigma : T^1\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$ tenemos que dV se ve como $d\tilde{V} = dHd\tilde{\theta}_x$. La medida V sobre $T^1\mathbb{D}$ es invariante bajo $PSL(2, \mathbb{R})$, esto nos permite tener una medida λ en el cociente $T^1S = T^1\mathbb{D}/\Gamma$ donde $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ es el grupo de transformaciones de cubierta asociado a $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S$, entonces la medida λ se induce por $\pi_* : T^1\mathbb{D} \rightarrow T^1S$ de la medida V sobre $T^1\mathbb{D}$. La medida λ sobre T^1S se llama *medida de Liouville*.

Consideremos una métrica Hermitiana continua $|\cdot|_x$ con respecto a x , definida sobre la fibra $E_{\tilde{\rho}, x}$ para cada $x \in S$, inducimos la métrica Hermitiana de Fubini-Study \langle, \rangle_x , sobre la fibra $M_{\rho, x} = \text{Proy}(E_{\tilde{\rho}, x})$ para cada $x \in S$. Los haces $q^*E_{\tilde{\rho}} \simeq T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ y $q^*E_{\rho} \simeq T^1\mathcal{F}_{\rho}$ sobre T^1S se equipan de una manera natural con las métricas Hermitiana y de Fubini-Study, respectivamente. Damos al haz tangente unitario $q : T^1S \rightarrow S$ la métrica producto, de la métrica hiperbólica en la base por la métrica de ángulo en las fibras. A la variedad M_{ρ} le asignamos la métrica producto, de la métrica hiperbólica en la base por la métrica de Fubini-Study en las fibras. Para cada $x \in S$, equipamos a la fibra $(p \circ \tilde{q})^{-1}\{x\} \subset T^1\mathcal{F}_{\rho}$ con la métrica producto de la métrica de ángulo por la métrica de Fubini-Study.

Introducimos sobre el haz tangente unitario $q : T^1S \rightarrow S$ el *flujo geodésico* $\phi : T^1S \times \mathbb{R} \rightarrow T^1S$, con el cual cada vector $v \in T^1S$ determina una geodésica

$$\gamma_v = \{\phi(v, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Introducimos sobre $T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ y sobre $T^1\mathcal{F}_{\rho}$ los *flujos geodésicos foliados* $\tilde{\Phi}$ y Φ , obteniendo el flujo a lo largo de las geodésicas

$$\{\tilde{\Phi}(z_0, t) : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad \{\Phi(w_0, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

determinadas por $z_0 \in E_v$ y $w_0 \in \text{Proy}(E)_v$, en las hojas \mathcal{L}_{z_0} y \mathcal{L}_{w_0} de las foliaciones $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ y \mathcal{F}_{ρ} respectivamente, dando lugar a los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Phi} : T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}} & \quad & \Phi : T^1\mathcal{F}_{\rho} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & T^1\mathcal{F}_{\rho} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \phi : T^1S \times \mathbb{R} & \longrightarrow & T^1S & & \phi : T^1S \times \mathbb{R} & \longrightarrow & T^1S \end{array}$$

que conmutan. La función

$$t \mapsto |\tilde{\Phi}(z_0, t)|_{\phi(v, t)}$$

describe el tipo de crecimiento de la solución de (1) sobre la geodésica γ_v con condición inicial $w_0 \in E_v$ y la función

$$t \mapsto \frac{|\tilde{\Phi}(z_1, t)|_{\phi(v, t)}}{|\tilde{\Phi}(z_2, t)|_{\phi(v, t)}}$$

describe el crecimiento relativo de la solución de (1) sobre γ_v con condición inicial $z_1 \in E_v$ con respecto a la solución de (1) sobre γ_v con condición inicial $z_2 \in E_v$.

Decimos que las ecuaciones de Riccati tienen una *sección de mayor expansión* σ^+ si para casi todo punto v en T^1S respecto a la medida de Liouville λ podemos definir una descomposición medible $E_v = F_v \oplus G_v$ en espacios lineales, la cual es invariante por el flujo geodésico foliado $\tilde{\Phi}$ con F_v de dimensión 1 y con la propiedad de que la aplicación $t \mapsto \tilde{\Phi}(z_1, t)$ con condición inicial $z_1 \in F_v$ crece más rápidamente que la aplicación $t \mapsto \tilde{\Phi}(z_2, t)$ para cada $w_2 \in G_v$. Esto es, para casi todo $v \in T^1S$ respecto a λ , para cada conjunto compacto $K \subset T^1S$ y para cada sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de tiempos tales que $\phi(v, t_n) \in K$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{\Phi}(z_1, t)|_{\phi(v, t)}}{|\tilde{\Phi}(z_2, t)|_{\phi(v, t)}} = \infty,$$

para todo vector distinto de cero $z_1 \in F_v$ y $z_2 \in G_v$. Así, la sección de mayor expansión se define como $\sigma^+ := \text{Proy}(F) : T^1S \rightarrow T^1\mathcal{F}_{\rho}$. De manera similar, definimos una *sección de mayor contracción* requiriendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{\Phi}(z_1, t)|_{\phi(v, t)}}{|\tilde{\Phi}(z_2, t)|_{\phi(v, t)}} = 0,$$

para todo vector distinto de cero $z_1 \in F_v$ y $z_2 \in G_v$.

Suponiendo que existen secciones de mayor expansión y de mayor contracción $\sigma^{\pm} : A \subset T^1S \rightarrow T^1\mathcal{F}_{\rho}$, sean μ^{\pm} las medidas sobre $T^1\mathcal{F}_{\rho}$ inducidas por σ^{\pm} de la medida de Liouville λ sobre T^1S , en fórmula $\mu^{\pm} = \sigma_*^{\pm} \lambda$

y sea μ la medida sobre M_ρ inducida por $\tilde{q} : T^1\mathcal{F}_\rho \rightarrow M_\rho$, en fórmula $\mu = \tilde{q}_*\mu^+$. La medida μ^+ es una medida ergódica invariante por el flujo geodésico foliado Φ sobre $T^1\mathcal{F}_\rho$ la cual es una medida SRB para el flujo geodésico foliado Φ de las ecuaciones de Riccati, cuya cuenca tiene medida de Lebesgue total en $T^1\mathcal{F}_\rho$, de manera similar μ^- (Ref. [3], Teorema 1).

Sean

$$f : B \rightarrow B, \quad A : B \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

aplicaciones medibles. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in B$ denotamos

$$A^n(x) = A(f^{n-1}(x)) \cdots A(f(x))A(x) \quad y \quad A^{-n}(x) = [A^n(f^{-n}(x))]^{-1}.$$

Decimos que la familia $\{A^n\}$ forma un cociclo multiplicativo sobre f .

Para cada $v \in T^1S$ y $t \in \mathbb{R}$, el flujo $\tilde{\Phi}_t := \tilde{\Phi}(\cdot, t)$ induce un isomorfismo lineal

$$\tilde{A}(v, t) := \tilde{\Phi}(v, t)|_{E_{\tilde{\rho}, v}} : E_{\tilde{\rho}, v} \rightarrow E_{\tilde{\rho}, \phi(v, t)}$$

entre las \mathbb{C}^{n-1} fibras. Bajo una trivialización medible de los haces, escogiendo de manera medible bases ortonormales de las fibras, el flujo geodésico foliado puede verse como un cociclo multiplicativo sobre los flujos geodésicos en T^1S :

$$\tilde{A} : T^1S \times \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{C}), \quad \tilde{A}(v, t_1+t_2) = \tilde{A}(\phi(v, t_1), t_2)\tilde{A}(v, t_1), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

En [3] se usa el Teorema Ergódico de Oseledec (Ref. [9], pág. 665) para flujos cuando la variedad base es no-compacta. Sea φ un flujo completo sobre la variedad B , $\pi : E \rightarrow B$ un haz vectorial sobre B y $\tilde{\Phi}$ el flujo sobre E que induce un cociclo multiplicativo sobre φ .

Decimos que los exponentes de Liapunov de $\tilde{\Phi}$ están bien definidos en un punto $v \in B$ si hay una métrica Hermitiana o Euclidiana continua sobre el haz vectorial E , una sección $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ y una división $\tilde{\Phi}$ -invariante $E(v) = F_1(v) \oplus \cdots \oplus F_k(v)$ tal que, para cada vector no-cero $w \in F_i(v)$, cada conjunto compacto $K \subset B$ y cada sucesión de $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} t_n = \pm\infty$ y $\phi(v, t_n) \in K$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t_n} \log(|\tilde{\Phi}(w, t_n)|) = \pm\lambda_i.$$

La existencia y los valores de los exponentes de Liapunov no dependen de la métrica Hermitiana continua sobre el haz vectorial E .

Si S es una superficie de Riemann hiperbólica de área finita y $\tilde{\rho} : \pi_1(S, z_0) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ es una representación tal que el cociclo multiplicativo medible sobre el flujo geodésico en T^1S satisface la condición de integrabilidad

$$\int_{T^1S} \log^+ \|\tilde{A}_{\pm 1}\| d\lambda < \infty,$$

que establece que la cantidad de expansión de $\tilde{A}_{\pm 1}$ es Liouville integrable, donde $\|\cdot\|$ es el operador norma y $\tilde{A}_t := \tilde{A}(\cdot, t)$, entonces las siguientes equivalencias se cumplen: existe una sección de mayor expansión $\sigma^+ : \mathcal{A} \subset T^1S \rightarrow T^1\mathcal{F}_\rho$ donde \mathcal{A} tiene medida de Liouville total si y sólo si el mayor exponente de Liapunov es positivo y simple si y sólo si el menor exponente de Liapunov es negativo y simple si y sólo si existe una sección de mayor contracción $\sigma^- : \mathcal{A} \subset T^1S \rightarrow T^1\mathcal{F}_\rho$ donde \mathcal{A} tiene medida de Liouville total (Ref. [3], Teorema 3).

Si la superficie S es compacta ($g \geq 2$) y la imagen de la representación $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(n, \mathbb{C})$ no deja una medida de probabilidad, entonces el cociclo multiplicativo definido por el flujo geodésico foliado posee exponentes de Liapunov no-nulos para la medida de Liouville. Cuando $n = 2$ esta condición se satisface para un conjunto abierto denso en el espacio de representaciones, esto implica que para un conjunto abierto denso en el espacio de representaciones $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ existen secciones de mayor expansión y de mayor contracción (Ref. [2], Teoremas 4 y 5).

Para las representaciones de monodromía Ping-pong o Schottky en $SL(2, \mathbb{C})$ y la representación canónica obtenida de la representación

$$\rho_{can} : \pi_1(S, z_0) \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) \subset SL(2, \mathbb{C})$$

sobre el cubriente universal de la superficie, existen secciones de mayor expansión y de mayor contracción continuas, aunque en el caso en que la imagen de la representación (inyectiva) sea un grupo Schottky no se satisface la condición de integrabilidad, ya que consideran una superficie no-compacta (Ref. [3]).

Consideramos las desintegraciones:

- (1) de la medida μ sobre M_ρ ; en la medida de área hiperbólica ξ en la base S y para cada $x \in S$ una medida μ_x en la fibra $\mathbb{C}P_x^1$ del haz $p: M_\rho \rightarrow S$.
- (2) y de la medida μ^+ sobre $T^1\mathcal{F}_\rho$; en la medida de área hiperbólica ξ en la base S y para cada $x \in S$ una medida μ_x en la fibra $(p \circ \tilde{q})^{-1}(x)$ del haz $p \circ \tilde{q}: \text{Proy}(E) \rightarrow S$.

De esta manera obtenemos la familia de medidas $\{\mu_x: x \in S\}$ asociada a μ y la familia de medidas $\{\mu_x^+: x \in S\}$ asociada a μ^+ . Queremos entender la relación de la familia de medidas $\{\mu_x: x \in S\}$ con las medidas de Patterson-Sullivan (Ref. [15]) y como depende esta de la estructura holomorfa h en S en los casos en los que la representación sea:

- ρ_{can} , denota a la representación de monodromía que proviene del cubriente universal de la superficie S en la base y la llamamos *representación canónica*,
- $w_*\rho_{can}$, deformaciones casi-conformes de la representación canónica ρ_{can} y las llamamos *representaciones casi-canónicas* y
- $\rho(\pi_1(S, x)) \subset PSL(2, \mathbb{C})$ es un grupo Schottky y S no-compacta.

Para cada $x \in \mathbb{D}$ Patterson (Ref.[16]) construye una familia de medidas con soporte en el conjunto límite de un grupo Fuchsiano finitamente generado del segundo tipo. Sullivan (Ref. [17]) sigue el trabajo de Patterson y define estas familias de medidas sobre el conjunto límite para subgrupos discretos de transformaciones de Moebius preservando la bola unitaria con centro en cero $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$.

En el Teorema 1 damos la relación de la familia de medidas $\{\mu_x: x \in S\}$ (en el caso de $\rho = \rho_{can}$) obtenidas al hacer la desintegración de $\tilde{q}_*\mu^+$ con las medidas de Patterson-Sullivan.

Teorema 1. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica de área finita y $\rho: \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la representación canónica ρ_{can} . La medida $\vartheta = \tilde{q}_*\mu^+$ en M_ρ se desintegra de la siguiente manera:*

- (1) $p_*(\vartheta) = \xi$, la medida de área hiperbólica sobre S .
- (2) La desintegración de ϑ sobre $x \in S$ es una medida μ_x con soporte en $\mathbb{R}P_x^1$.
- (3) La familia

$$\{\mu_x: x \in S\}$$

es la familia de medidas de Patterson-Sullivan asociada a $\rho(\pi_1(S, z_0))$.

Dadas una aplicación casi-conforme $w: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ y una representación $\rho: \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ del grupo fundamental de una superficie de Riemann S en un grupo Kleiniano $\rho(\pi_1(S, z_0)) \subset PSL(2, \mathbb{C})$, diremos que w es compatible con ρ si $w_*\rho(\pi_1(S, z_0))$ es también un grupo Kleiniano en $PSL(2, \mathbb{C})$ (Ref. [14], Capítulo 1), es este caso diremos que la representación $w_*\rho$ es una *deformación casi-conforme de la representación ρ* . Si w es compatible con $\rho_{can}: \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ diremos que la representación $\rho_w = w_*\rho_{can}$ es una *representación casi-canónica*.

Usamos la notación M_ρ o $M_\rho(S)$ para el haz sobre la superficie de Riemann S construida mediante la suspensión de la representación $\rho: \pi_1(S_{Top}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$, usaremos una notación análoga para las foliaciones, sub-haces, medidas y proyecciones canónicas de los haces cuando sea necesario, también denotamos por μ_{can} y μ_w a las medidas $(\tilde{q}_{can})_*\sigma_{can}^+$ y $(\tilde{q}_w)_*\mu_w^+$ sobre $M_{can}(S)$ y $M_w(S)$ respectivamente.

Dos medidas λ, μ sobre un espacio de medida E se dicen *singulares* y se denota $\lambda \perp \mu$ si existen dos conjuntos medibles E_1, E_2 disjuntos cuya unión es E tales que $\lambda(E_1) = \lambda(E)$ y $\mu(E_2) = \mu(E)$.

En la demostración del siguiente teorema utilizamos el Teorema 1.21: Si el homeomorfismo frontera (aplicación Casi-Simétrica $w|_{\mathbb{R}P^1}$) asociado a una aplicación casi-conforme $w: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ compatible con algún grupo Fuchsiano co-compacto y con $w(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^1$ es absolutamente continuo en $\mathbb{R}P^1$, entonces w es una transformación de Moebius. Probamos:

Teorema 2. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica de área finita y sea $\rho_w: \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ una representación casi-canónica. Entonces la medida μ_w en $M_{\rho_w}(S)$ se desintegra de la siguiente manera:*

- (1) $p_*(\mu_w) = \xi$, la medida de área hiperbólica sobre S .
- (2) La desintegración de μ_w sobre $x \in S_{can}$ es la medida $\mu_{w,x} = w_*\mu_{can,x}$ con soporte en el conjunto límite $w(\mathbb{R}P_x^1) \subset M_{w,x}$ que es un casi-círculo.
- (3) Si S es compacta, w es una aplicación casi-conforme que no es una transformación de Moebius y $\rho_w(\pi_1(S, z_0)) \subset PSL(2, \mathbb{R})$, entonces las medidas $\mu_{w,x}|_{\mathbb{R}P_x^1}$ y la medida de Lebesgue son singulares sobre $\mathbb{R}P_x^1$.

También $\mu_{can,x}$ y $\mu_{w,x}$ denotan las desintegraciones de μ_{can} y μ_w respectivamente en la fibra $\mathbb{C}P_x^1$ para $x \in S$.

Diremos que el grupo Fuchsiano $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ es de *tipo finito* (ó de *área finita*) si alguna región de Dirichlet tiene área finita con respecto a la métrica hiperbólica en \mathbb{H}^+ .

Corolario 3. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica compacta y sea $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ una representación con $S \sim_{Top} \mathbb{H}^+ / \rho(\pi_1(S))$, entonces existe una única estructura holomorfa en S_{Top} que hace de S_{Top} una superficie de Riemann S_* tal que $\tilde{q}_* \mu_\rho^+$ en $M_\rho^{\mathbb{R}}(S_*)$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue de $M_\rho^{\mathbb{R}}(S_*)$.*

De la teoría de medidas sobre el conjunto límite y de los resultados obtenidos al hacer la desintegración de $\tilde{q}_* \mu_{can}^+$ probamos que medidas con soporte en la intersección de $\{\phi_t(T_x^1 S) : t > 0\}$ y $T_x^1 S$ con pesos en cada punto que dependen de la métrica hiperbólica sobre S , aproximan a la medida de ángulo sobre $T_x^1 S$.

Denotamos por G al grupo de transformaciones de cubierta asociada a $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S$, por lo tanto G es un grupo Fuchsiano. Sean $x \in S$, $u \in \pi^{-1}\{x\}$ y $Q : \mathbb{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow T^1 \mathbb{D}$ el encaje definido por la función que asigna a $x \in \mathbb{D} \setminus \{x_0\}$ el vector unitario que dirige a la geodésica en \mathbb{D} que va de x_0 a x . Definimos $\psi : \mathbb{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow T^1 S$ por $\psi := \pi_* \circ Q$ como en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & T^1 \mathbb{D} \\ & \nearrow Q & \downarrow \pi_* \\ \mathbb{D} \setminus \{x_0\} & \xrightarrow{\psi} & T^1 S \end{array}$$

Para $s > 1$, sea $\eta_{u,s}$ la medida en \mathbb{D} con soporte en la órbita $Gu = \pi^{-1}\{x\}$ de u bajo G definida por

$$\eta_{u,s} := \frac{1}{g_s(u,u)} \sum_{g \in G} e^{-s(u,gu)} \delta_{gu},$$

donde (u, gu) denota a la distancia hiperbólica de u a gu y

$$g_s(u,u) = \sum_{g \in G} e^{-s(u,gu)}.$$

12

Sea $\lambda_{x,s}$ la medida en $T_x^1 S$ con soporte en $\psi(Gu) \subset T_x^1 S$ definida por

$$\lambda_{x,s} := \psi_* \eta_{u,s}.$$

Sea λ_x la medida de ángulo sobre $T_x^1 S$ normalizada para ser una medida de probabilidad, es decir, $d\lambda(x, \theta) = d\xi(x) d\lambda_x(\theta)$ donde λ es la medida de Liouville sobre $T^1 S$. En el siguiente teorema veremos que el conjunto de direcciones $\psi(\pi^{-1}(x)) \subset T_x^1 S$ con pesos $e^{-s(u,gu)}$ en los puntos $\psi(gu)$ respectivos, se van distribuyendo bien cuando $s \rightarrow 1^+$ con respecto a la medida de ángulo en la fibra sobre $x \in S$ del haz tangente unitario $T^1 S \rightarrow S$. Esto nos da una manera de inducir la medida de ángulo en $T_x^1 S$, la cual nos servirá para dar la desintegración de $\tilde{q}_* \mu^+$ en términos de la métrica hiperbólica de la superficie base S .

Teorema 4. *Sean S una superficie de Riemann hiperbólica de área finita, $x \in S$ y $\{s_n\}$ una sucesión de números reales positivos $s_n \rightarrow 1^+$, entonces la sucesión de medidas $\{\lambda_{x,s_n}\}$ sobre $T_x^1 S$ converge a la medida de ángulo*

$$\lambda_{x,s_n} \rightarrow \lambda_x$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Para cada $\alpha \in \pi_1(S, x)$ sea $H_\alpha : M_{\rho,x} \rightarrow M_{\rho,x}$ la holonomía de la foliación \mathcal{F}_ρ asociada a α . Sea $\tilde{x} \in M_{\rho,x}$ y para cada $s > 1$, definimos la medida $\mu_{\tilde{x},s}$

$$\mu_{\tilde{x},s} = \frac{1}{g_s(\tilde{x}, \tilde{x})} \sum_{\alpha \in \pi_1(S,x)} e^{-s(\tilde{x}, \alpha \tilde{x})} \delta_{H_\alpha(\tilde{x})}$$

en donde $(\tilde{x}, \alpha \tilde{x})$ denota la distancia hiperbólica en la hoja $\mathcal{L}_{\tilde{x}}$ del punto \tilde{x} al punto $\alpha \tilde{x}$, $\alpha \tilde{x}$ denota a la imagen de \tilde{x} de la aplicación de monodromía asociada a α en la hoja $\mathcal{L}_{\tilde{x}}$ y

$$g_s(\tilde{x}, \tilde{x}) = \sum_{\alpha \in \pi_1(S,x)} e^{-s(\tilde{x}, \alpha \tilde{x})}.$$

Para las representaciones $\rho : \pi_1(S, x) \rightarrow PGL(2, \mathbb{C})$ siguientes:

- (1) la representación canónica ρ_{can} ,
- (2) la representación casi-canónica $w_* \rho_{can}$,
- (3) y ρ tal que $\rho(\pi_1(S, x))$ es grupo Schottky, en este caso la superficie S es no compacta,

existen secciones de mayor expansión y de mayor contracción continuas $\sigma^\pm : \mathcal{A} \rightarrow T^1\mathcal{F}_\rho$ donde $\mathcal{A} \subset T^1S$ tiene medida de Liouville total (Ref. [3], pág. 4).

En el siguiente teorema presentamos los resultados principales de este trabajo.

Teorema 5. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica de área finita y sea $\rho : \pi_1(S, x) \rightarrow PGL(2, \mathbb{C})$ una representación inyectiva. En los casos:*

- (1) ρ_{can} , la representación canónica
- (2) $w_*\rho_{can}$, la representación casi-canónica, y
- (3) $\rho(\pi_1(S, x))$ es un grupo Schottky y S no-compacta

existe un conjunto abierto $\mathcal{P} \subset M_\rho$ de medida de Lebesgue positiva cuya intersección con cada fibra $M_{\rho, x}$ es un conjunto abierto de medida de Lebesgue positiva en $M_{\rho, x}$ y para cada punto $\tilde{x} \in \mathcal{P} \cap M_{\rho, x}$ y para toda sucesión $\{s_n\}$ de números reales $s_n \rightarrow 1^+$ tenemos que la sucesión de medidas con soporte en $\mathcal{L}_{\tilde{x}} \cap M_{\rho, x}$ converge

$$\mu_{\tilde{x}, s_n} \rightarrow \mu_x.$$

Además, si para cualquier punto $y \in \mathcal{L}_{\tilde{x}}$ tomamos la hoja de flujo positivo

$$H := \{\Phi(z, t) : z \in (\tilde{q})^{-1}(y) \quad y \quad t > 0\},$$

y levantamos la sucesión de medidas $\{\mu_{\tilde{x}, s_n}\}$ que converge a μ_x mediante $\tilde{q}|_H : H \rightarrow \mathcal{L}_{\tilde{x}}$ a una sucesión de medidas $\{\mu_{\tilde{x}, s_n}^+\}$ sobre la hoja de flujo H , entonces la sucesión de medidas $\{\mu_{\tilde{x}, s_n}^+\}$ converge

$$\mu_{\tilde{x}, s_n}^+ \rightarrow \mu_x^+.$$

Esta afirmación es válida para cada $x \in S$.

Interpretando el Teorema 5, estos nos dicen que en los casos:

- (1) $\rho = \rho_{can}$ la representación canónica,
- (2) $\rho = w_*\rho_{can}$ la representación casi-canónica y
- (3) ρ es la representación en un grupo Schottky

las medidas $\{\mu_x : x \in S\}$ obtenidas al hacer la desintegración de $\mu = \tilde{q}_*\mu^+$ se pueden aproximar mediante medidas de probabilidad con soporte en los puntos contenidos en la intersección de una hoja isométrica al plano de Poincaré $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_\rho$ y las fibras $\mathbb{C}P_x^1$. Más precisamente, existe un conjunto abierto no-vacío $\mathcal{P} \subset M_\rho$ cuya intersección con cada fibra $M_{\rho, x}$ es un conjunto abierto no-vacío en la fibra $M_{\rho, x}$, y tal que para cualquier hoja \mathcal{L} de la foliación \mathcal{F}_ρ con $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} \cap M_{\rho, x} \neq \emptyset$ y para cualquier sucesión $\{s_n\}$ de números reales $s_n \rightarrow 1^+$, la familia de medidas

$$\{\mu_{\tilde{x}, s_n} := \frac{1}{g_{s_n}(\tilde{x}, \tilde{x})} \sum_{x' \in K} e^{-s_n(\tilde{x}, x')} \delta_{x'}\}$$

(donde $\tilde{x} \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P} \cap \mathbb{C}P_x^1$, $K = \mathcal{L} \cap \mathbb{C}P_x^1$ y (\tilde{x}, x') denota la distancia hiperbólica en la hoja $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\tilde{x}}$) converge débilmente a la desintegración μ_x de $\mu = \tilde{q}_*\mu^+$ sobre la fibra $M_{\rho, x}$. Así, el Teorema 5 nos da una técnica geométrica para aproximar las medidas $\{\mu_x : x \in S\}$.

Además para cualquier punto $y \in \mathcal{L}_{\tilde{x}}$ tomamos la hoja de flujo positivo

$$H := \{\Phi(z, t) : z \in (\tilde{q})^{-1}(y) \quad y \quad t > 0\},$$

entonces los puntos de intersección de la hoja H y la fibra $(p \circ \tilde{q})^{-1}\{x\}$ del haz $p \circ \tilde{q} : \text{Proy}(E) \rightarrow S$ están muy cerca del conjunto atractor transversal $\sigma^+(T_x^1S \cap \mathcal{A})$. Esto nos permite levantar la sucesión de medidas $\{\mu_{\tilde{x}, s_n}\}$ que converge a μ_x mediante $\tilde{q}|_H : H \rightarrow \mathcal{L}_{\tilde{x}}$ a una sucesión de medidas $\{\mu_{\tilde{x}, s_n}^+\}$ sobre $T^1\mathcal{F}_\rho$ con soporte en los puntos de intersección de la hoja de flujo H y la fibra $(p \circ \tilde{q})^{-1}\{x\}$ y esta sucesión converge

$$\mu_{\tilde{x}, s_n}^+ \rightarrow \mu_x^+.$$

Por lo tanto el Teorema 5 también nos da una técnica geométrica para aproximar las medidas $\{\mu_x^+ : x \in S\}$.

1. Preliminares.

En este capítulo presentamos la teoría que nos permite introducirnos a este trabajo.

1.1 EL ESPACIO HIPERBÓLICO Y SUS SUBGRUPOS DISCRETOS.

1.1.1 El espacio hiperbólico.

El disco unitario centrado en cero \mathbb{D} del plano complejo \mathbb{C} es un modelo para el espacio hiperbólico 2-dimensional, admite la métrica h determinada por el diferencial

$$dh = \frac{2|dx|}{1 - |x|^2}.$$

Las geodésicas para la métrica h son arcos de círculos ortogonales a la circulo unitario $S^1 = \partial\mathbb{D}$. Los ángulos son ángulos Euclidianos. El disco \mathbb{D} equipado con la métrica hiperbólica h se llama *plano de Poincaré*.

Denotamos por dH al elemento de área hiperbólica

$$dH := \frac{4dx_1dx_2}{(1 - |x|^2)^2}$$

sobre \mathbb{D} .

Un modelo alternativo de espacio hiperbólico 2-dimensional es el semiplano superior \mathbb{H}^+ de \mathbb{C}

$$\mathbb{H}^+ := \{x = (x_1, x_2) : x_2 > 0\}$$

con la métrica h determinada por el diferencial

$$dh = \frac{|dx|}{x_2}.$$

Las geodésicas para la métrica h son arcos de círculos ortogonales al círculo real en \mathbb{C} .

1.1.2 Superficies de Riemann y grupos discretos.

Una *superficie de Riemann* es una variedad compleja conexa de dimensión compleja 1. El *espacio proyectivo complejo* $\mathbb{C}P^1$ se define como la variedad compleja $\mathbb{C}^2 - \{0\}/\mathbb{C}^*$, por lo tanto $\mathbb{C}P^1$ tiene dimensión compleja 1 (análogamente el *espacio proyectivo complejo* $\mathbb{C}P^n$ se define como la variedad compleja $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\mathbb{C}^*$).

A través de este trabajo nos referimos: a la *esfera de Riemann* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ como $\widehat{\mathbb{C}}$, al *semiplano superior* $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ como \mathbb{H}^+ , al *semiplano inferior* $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z < 0\}$ como \mathbb{H}^- , al *disco unitario* $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ como Δ , al *eje real* como \mathbb{R} y al *eje real extendido* como $\widehat{\mathbb{R}}$.

El espacio proyectivo $\mathbb{C}P^1$ es biholomorfo a la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, esto justifica que en este trabajo consideremos indistintas a estas dos superficies de Riemann. Al eje real extendido $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\mathbb{C}P^1$ lo llamaremos también el *espacio proyectivo real* y lo denotaremos también por $\mathbb{R}P^1$.

Si sobre una superficie de Riemann X existe un conjunto abierto V el cual es equivalente de manera conforme a $\Delta - \{0\}$, decimos que X tiene un *pinchadura en V* . Diremos que una superficie de Riemann S es de *tipo conforme finito* (g, n) si S es biholomorfo a $\widehat{S} - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, donde \widehat{S} es una superficie de Riemann compacta de género g y los puntos x_i son n puntos distintos sobre esta. Así S es una superficie de género g con n pinchaduras.

Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sea $k = 1$ y para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sea $k = 2$. Denotamos por $PSL(2, \mathbb{K})$ al grupo de Lie de dimensión $3k$ $SL(2, \mathbb{K})/\pm I$, es decir, $PSL(2, \mathbb{K})$ es el grupo de transformaciones de Moebius con coeficientes en \mathbb{K}

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{K})$$

(esto es, $ad - bc = 1$). El grupo $PSL(2, \mathbb{R}) \subset PSL(2, \mathbb{C})$ preserva los semiplanos superior \mathbb{H}^+ e inferior \mathbb{H}^- y el eje real extendido $\widehat{\mathbb{R}}$, además $PSL(2, \mathbb{R})$ es el grupo de isometrías de espacio hiperbólico \mathbb{H}^+ .

Un grupo de homeomorfismos de un espacio topológico X actúa propia y discontinuamente en $x \in X$ si existe una vecindad U_x de x que contiene a lo más un número finito de puntos de la órbita de x .

Un grupo discreto $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{C})$ es un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ y que además es un subespacio topológico discreto con la topología inducida de $PSL(2, \mathbb{C})$. Para un subgrupo discreto $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{C})$ el conjunto

$$\Omega(\Gamma) = \{z \in \mathbb{C}P^1 : \Gamma \text{ actúa propia y discontinuamente en } z\}$$

se llama *región de discontinuidad* de Γ . Al complemento

$$\Lambda(\Gamma) = \mathbb{C}P^1 - \Omega(\Gamma)$$

se le llama *el conjunto límite* de Γ .

Si $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$ diremos que Γ es un *grupo Kleiniano*. Un grupo Kleiniano Γ se llama *grupo Fuchsiano* si su conjunto límite está sobre un círculo C de la línea proyectiva $\mathbb{C}P^1$ y Γ preserva cada uno de los discos separados por C . Denotamos por $M(\mathbb{D})$ al subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ que preserva a \mathbb{D} . El grupo $M(\mathbb{D})$ es el grupo de isometrías del plano de Poincaré, entonces para cada grupo discreto $\Gamma \subset M(\mathbb{D})$ el conjunto límite $\Lambda(\Gamma) \subset \partial\mathbb{D}$, por lo tanto Γ es Fuchsiano. Análogamente cada subgrupo discreto $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo Fuchsiano.

Si $a \in \mathbb{D}$ y $\Gamma \subset M(\mathbb{D})$ es un grupo Fuchsiano tomamos

$$D_a = \text{interior}\{x \in \mathbb{D} : h(x, a) \leq h(x, \gamma(a)), \gamma \in \Gamma\}.$$

La región D_a es convexa en el sentido hiperbólico (pues es la intersección de semiplanos hiperbólicos). Si a es un elemento el cual se queda fijo únicamente bajo la identidad de Γ entonces D_a se llama *región de Dirichlet centrada en a* . La frontera de D_a es una colección contable de segmentos geodésicos los cuales ocurren en pares Γ -equivalentes. Además las transformaciones que identifican estos segmentos forman un conjunto de generadores para Γ .

Diremos que Γ es *geoméricamente finito* si alguna región de Dirichlet tiene un número finito de lados. Diremos que el grupo discreto $\Gamma \subset M(\mathbb{D})$ es de *tipo finito* ó (*de área finita*) si una región de Dirichlet D tiene área finita con respecto al elemento de área hiperbólica dH . Por ejemplo, los grupos Fuchsianos $\Gamma \subset M(\partial\mathbb{D})$ del primer tipo ($\Lambda(\Gamma) = \partial\mathbb{D}$). Un grupo Fuchsiano Γ se llama *elemental* si Γ tiene una órbita finita en uno de los discos cerrados invariantes por este grupo. Un *grupo Schottky* de rango n es un grupo finitamente generado $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{C})$ teniendo $2n$ círculos disjuntos $C_1, C'_1, \dots, C_n, C'_n$ acotando un dominio $D \subset \mathbb{C}P^1$, y un sistema de generadores f_1, f_2, \dots, f_n tales $g_i(C_i) = C'_i$ y $g_i(D) \cap D = \emptyset$ (Ref. [3] pág. 20). El conjunto límite de este grupo es un conjunto de Cantor (si $n \geq 2$). El conjunto límite $\Delta(\Gamma)$ está dado por

$$\Delta(\Gamma) = \mathbb{C}P^1 - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(D).$$

Sea S una superficie de Riemann y $p : \tilde{S} \rightarrow S$ un cubriente universal topológica, entonces hay una única manera de hacer de \tilde{S} una superficie de Riemann tal que p sea holomorfa, esta estructura holomorfa se induce localmente mediante p y se llama *estructura inducida*.

Teorema 1.1. (Poincaré-Klein-Koebe). *Cada superficie de Riemann simplemente conexa es biholomorfa a exactamente una de las siguientes tres:*

- (1) $\widehat{\mathbb{C}}$,
- (2) \mathbb{C} ó \mathbb{H}^+
- (3) Δ .

Prueba. Una prueba se encuentra en [6], páginas 188-191. \square

Por el Teorema de uniformización de superficies (Teorema 1.1) podemos suponer que el cubriente universal $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ de una superficie de Riemann S es $\widehat{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} ó \mathbb{H}^+ y que la proyección cubriente π es holomorfa. El caso que a nosotros nos interesa es cuando S es de tipo hiperbólico finito, es decir, nos interesan superficies cuyo cubriente universal holomorfo sea el plano de Poincaré y estas sean de tipo conforme finito (g, n) , es decir, de género g con n pinchaduras. Tales superficies se llaman *superficies tipo conforme hiperbólico* y son todas las superficies de tipo conforme finito excepto los casos: $(g, n) = (0, 0)$, en este caso S se dice que tiene *tipo conforme esférico*, y $(g, n) = (0, 1)$, o $(g, n) = (1, 0)$, en estos casos S se dice es *tipo conforme Euclidiano*.

Para cada superficie de tipo conforme hiperbólico tenemos que cada transformación de cubierta γ es un homeomorfismo holomorfo $\gamma : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{H}^+$, por lo tanto $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ y como las transformaciones de cubierta actúan propia y discontinuamente tenemos que este grupo es discreto y por lo tanto Fuchsiano, este grupo Fuchsiano se llama *grupo uniformizante de S* .

1.2 MEDIDAS Y ESPACIOS DE MEDIDAS.

1.2.1 Espacio de medidas.

Sea M una variedad diferenciable. Diremos que un conjunto $E \subset M$ tiene *medida de Lebesgue cero* si sobre cada carta coordenada $\varphi : V \subset M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto $\varphi(V \cap E)$ tiene medida cero con respecto a la medida definida por $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ donde (x_1, x_2, \dots, x_n) son coordenadas sobre U . Todas las medidas de este trabajo son medidas definidas en la σ -álgebra de Borel completa $\mathcal{B}(M)$, que es la σ -álgebra generada por la σ -álgebra de Borel de M $\mathcal{B}(M)$ y los conjuntos $E \subset M$ de medida de Lebesgue cero. La *clase de medidas de Lebesgue* es el conjunto de medidas cuya restricción a cada carta U tiene derivada de Radon-Nikodym C^∞ y estrictamente positiva con respecto a $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Equipamos al espacio de todas las medidas con signo sobre M con la topología de la convergencia débil; diremos que una sucesión $\{\mu_n\}$ converge débilmente a μ y escribimos $\mu_n \rightarrow \mu$ si para toda función continua con soporte compacto $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_M f d\mu_n \rightarrow \int_M f d\mu.$$

Sean $f : E_1 \rightarrow E_2$ una función continua. Para cada medida ϑ sobre E_1 definimos una nueva medida $f_*\vartheta$ por $f_*\vartheta(H) = \vartheta(f^{-1}(H))$. Si f es un homeomorfismo, para cada medida μ sobre E_2 definimos una nueva medida $f^*\mu$ por $f^*\mu(H) = \mu(f(H))$. El siguiente lema será útil para inducir medidas mediante funciones continuas.

Lema 1.2. Sea $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ una función continua del espacio métrico compacto E_1 en el espacio métrico E_2 y $\{\mu_n\}_n$ una sucesión de medidas de probabilidad en E_1 con $\mu_n \rightarrow \mu$ débilmente, entonces $\phi_*\mu_n \rightarrow \phi_*\mu$ débilmente en E_2 .

Prueba. La prueba consiste en verificar para toda función continua $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ que

$$\int_{T_2} f d\phi_*\mu_n = \int_{T_1} f \circ \phi d\mu_n,$$

también

$$\int_{T_1} f \circ \phi d\mu_n \rightarrow \int_{T_1} f \circ \phi d\mu(x)$$

y

$$\int_{T_1} f \circ \phi d\mu = \int_{T_2} f d\phi_*\mu.$$

Por lo tanto $\phi_*\mu_n \rightarrow \phi_*\mu$. \square

1.3 MEDIDAS DE PATTERSON-SULLIVAN.

En esta sección presentamos un resumen de la teoría de medidas de Patterson-Sullivan, seguimos los capítulos 3 y 4 de Peter J. Nicholls [15], en donde se siguen los trabajos de Patterson [16] y Sullivan [17], [18]. En [15] se presenta la construcción de estas medidas para subgrupos discretos de isometrías hiperbólicas en el espacio hiperbólico n -dimensional. A nosotros nos interesan los resultados para grupos Fuchsianos del primer tipo y por brevedad presentamos esta teoría solo para este tipo de grupos.

1.3.1 Construcción de una medida Órbital.

Una *densidad conforme de dimensión δ* sobre una variedad V es una función la cual asigna medida positiva finita $\mu(\rho)$ a cada elemento ρ en una colección no vacía de métricas Riemannianas sobre V . Se supone que si ρ y ρ' son conformemente la misma, esto es, $\rho = \varphi\rho'$ donde φ es una función

positiva, entonces $\mu = \mu(\rho)$ y $\mu' = \mu(\rho')$ pertenecen a la misma clase de medidas (absolutamente continuas) y la derivada de Radon-Nikodym $\frac{\mu}{\mu'}$ es φ^δ (Ref. [17], pág. 421).

Para cada x en la bola unitaria centrada en cero $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$ Patterson [16] y Sullivan [17] construyeron una medida μ_x considerando desde x la órbita bajo Γ de algún punto $y \in \mathbb{B}$, donde Γ es un subgrupo discreto de las transformaciones de Moebius $M(\mathbb{B})$ que preserva la bola unitaria con centro en cero $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$.

Sullivan estaba interesado en ver desde x la órbita de y cerca de infinito. La interpretación de Sullivan fue la siguiente: un objeto unitario en el punto γy aparece visto desde x de tamaño $e^{-(x, \gamma y)}$ donde $(x, \gamma y)$ denota a la distancia hiperbólica. Así en dimensión δ Sullivan quería asociar el factor escalar $e^{-\delta(x, \gamma y)}$ al punto γy . Para hacer la construcción de la densidad en ∞ ($\mathbb{S}^1 = \partial \mathbb{D}$) para grupos Fuchsianos del primer tipo $\Gamma \subset M(\mathbb{D})$, procedemos de la siguiente manera:

Para $x, y \in \mathbb{D}$ y $r > 0$, la función orbital contante $N(r, x, y)$ se define por

$$N(r, x, y) = \text{card}\{\gamma \in \Gamma : (x, \gamma y) < r\}.$$

La cantidad

$$\delta_{x,y} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log N(r, x, y)$$

es finita, de hecho, por el Teorema 1.5.1 de [15] tenemos que $\delta_{x,y} \leq 1$. Consideremos la serie de Poincaré

$$g_s(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s(x, \gamma y)},$$

de la suma parcial

$$\sum_{\gamma \in \Gamma: (x, \gamma y) < R} e^{-s(x, \gamma y)} = N(R, x, y)e^{-sR} + s \int_0^R N(t, x, y)e^{-st} dt$$

(la cual se verifica viendo que la función $N(t, x, y)$, como función de t , es una función escalón), vemos que la serie converge si $s > \delta_{x,y}$ y diverge si $s < \delta_{x,y}$. La desigualdad del triángulo nos da

$$(x, \gamma y) \leq (x, y) + (y, \gamma y), \quad (x, \gamma y) \leq (y, \gamma y) - (x, y)$$

de donde obtenemos

$$e^{-s(x,y)} g_s(y, y) \leq g_s(x, y) \leq e^{s(x,y)} g_s(y, y)$$

y se sigue que $\delta_{x,y}$ depende sólo de Γ y no de x o y . Denotamos a $\delta_{x,y}$ por $\delta(\Gamma)$ o por δ .

Diremos que Γ es de tipo convergente si la serie de Poincaré converge en el valor crítico $\delta(\Gamma)$ y de tipo divergente en el otro caso. El número $\delta(\Gamma)$ se llama exponente de convergencia de la serie de Poincaré.

Si la serie de Poincaré asociada a un grupo discreto Γ de transformaciones de Moebius es de tipo convergente, por un Lema debido a Patterson (Ref. [15], Lema 3.1.1) podemos modificar un poco la serie para obtener una serie divergente; esto es, existe una función $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua, no decreciente, y la serie

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s(x, \gamma y)h(e^{x, \gamma y})}$$

converge para $s > \delta(\Gamma)$ y diverge para $s \leq \delta(\Gamma)$. Los grupos Fuchsianos $\Gamma \subset M(\mathbb{D})$ del primer tipo son grupos de tipo divergente con exponente de convergencia 1 (Ref. [15]) por lo que no utilizaremos el Lema de Patterson y estaremos suponiendo que $\delta(\Gamma) = 1$.

Construimos la medida

$$\mu_{x,y,s} = \frac{1}{g_s(y, y)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s(x, \gamma y)} \delta_{\gamma y}$$

para $x, y \in \mathbb{D}$, $s > 1$ y $\delta_{\gamma y}$ denota el punto masa de Dirac con peso uno en γy . Así, para un conjunto de Borel E en $\bar{\mathbb{D}}$ tomamos

$$\mu_{x,y,s}(E) = \frac{1}{g_s(y, y)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s(x, \gamma y)} 1_E(\gamma y)$$

donde 1_E denota la función característica del conjunto E . Con la dependencia implícita de y denotamos a la medida $\mu_{x,y,s}$ por $\mu_{x,s}$, es decir, la medida $\mu_{x,s}$ depende de la órbita de y y esta órbita será la misma en esta construcción.

Veamos el comportamiento de $\mu_{x,s}$ cuando s se aproxima a 1^+ .

Lema 1.3. Para $x \in \mathbb{D}$ la familia de medidas $\{\mu_{x,s} : 1 < s < 2\}$ esta débilmente acotada. En efecto $\mu_x(\overline{\mathbb{D}})$ esta acotada independientemente de s en este rango.

Así, para $x \in \mathbb{D}$ podemos aplicar el Teorema de Helly para deducir que si una sucesión de valores de s se aproxima a 1^+ , entonces las medidas $\mu_{x,s}$ convergen débilmente a una medida μ_x sobre $\overline{\mathbb{D}}$. Para $x \in \mathbb{D}$, sea M_x la familia de todas las medidas μ_x sobre $\overline{\mathbb{D}}$ con la propiedad de que para alguna sucesión monótona $\{s_n\}$ decreciente a 1^+ , $\mu_{x,s_n} \rightarrow \mu_x$ débilmente.

Proposición 1.4. La medida μ_x esta concentrada sobre el conjunto límite de Γ .

El punto $\xi \in \Lambda(\Gamma)$ se dice *punto límite cónico* para Γ si para cada $a \in \mathbb{D}$ existe una sucesión $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ sobre la cual la sucesión $\frac{|\xi - \gamma_n(a)|}{1 - |\gamma_n(a)|}$ esta acotada. Denotaremos por C al conjunto límite cónico asociado a Γ . El Teorema 2.4.1 de [15] nos da una caracterización del conjunto límite cónico C : el punto $\xi \in \partial\mathbb{D}$ es un punto límite cónico para Γ si, y sólo si hay una geodésica σ con extremo en ξ tal que para cada punto $a \in \mathbb{D}$ hay una infinidad de Γ -imágenes de σ con una distancia hiperbólica acotada de a .

Sea d_0 la métrica definida sobre $S^1 = \partial\mathbb{D}$ por la fórmula

$$d_0(\xi, \eta) = |\arccos \xi \cdot \eta|$$

y para $x \in \mathbb{D}$ tomamos una transformación de Moebius $V \in M(\mathbb{D})$ con $V(x) = 0$ y definimos la métrica d_x sobre S^1 por

$$d_x(\xi, \eta) = d_0(V(\xi), V(\eta)).$$

Sea $\tilde{\theta}_x$ la medida de ángulo sobre S^1 normalizada para que sea una medida de probabilidad, esto es, $\tilde{\theta}_x$ es la medida generada por la métrica d_x .

Utilizaremos la siguiente proposición para ver que la medida de ángulo $\tilde{\theta}_x$ sobre $\partial\mathbb{D}$ le asigna medida positiva al conjunto límite cónico para grupos que uniformizan superficies de Riemann hiperbólicas de tipo finito.

Proposición 1.5. El conjunto límite cónico de un grupo uniformizante de una superficie de Riemann hiperbólica de área finita tiene medida de Lebesgue positiva.

Prueba. Por el Teorema de Hopf-Birkhoff (Ref. [9], pág. 217 y 136) tenemos que la geodésica genérica de S está estadísticamente distribuida en T^1S de acuerdo a la medida de Liouville. Proyectando estas geodésicas genéricas a S vemos que dado un punto $a \in S$ y una vecindad V_a de a en S , entonces la geodésica pasa por esta vecindad V_a una infinidad de veces. Esto implica que un levantamiento de esta geodésica al cubriente universal tiene extremo en un punto límite cónico. Por lo tanto, casi todo punto en $\partial\mathbb{D}$ con respecto a la medida de Lebesgue es un punto límite cónico. \square

La métrica d_x (definida sobre $\partial\mathbb{D}$ para cada $x \in \mathbb{D}$) se deriva del tensor de métrica Riemanniana $G_x(\xi) = P(x, \xi)^2 I$ definido sobre $S^1 = \partial\mathbb{D}$, donde $P(x, \xi)$ es el kernel de Poisson $P(x, \xi) = \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^2}$ e I es la matriz identidad en que nos define un producto interior en $T_\xi S^1$ por $u^T I v$ para $u, v \in T_\xi S^1$. Para cada $x, x' \in \mathbb{D}$ se tiene

$$G'_x(\xi) = \left[\frac{P(x', \xi)}{P(x, \xi)} \right]^2 G_x(\xi),$$

y por lo tanto las métricas d_x y $d_{x'}$ son conformemente equivalentes.

Una densidad conforme Γ -invariante de dimensión α (donde $\Gamma \subset M(\mathbb{D})$ es un subgrupo discreto) es una aplicación σ de la colección de métricas $\{G_x : x \in \mathbb{D}\}$ asociadas al tensor de métrica Riemanniana $G_x(\xi) = P(x, \xi)^2 I$ definida sobre $\partial\mathbb{D}$, en la colección de medidas positivas finitas sobre $\partial\mathbb{D}$ tal que, si $\sigma_x = \sigma(G_x)$,

- (1) σ_x tiene soporte sobre el conjunto límite de Γ .
- (2) para $x, x' \in \mathbb{D}$, $\sigma_x, \sigma_{x'}$ son absolutamente continuas una respecto de la otra y las derivadas de Radon-Nikodym satisfacen

$$\left(\frac{d\sigma_{x'}}{d\sigma_x} \right) (\xi) = \left(\frac{P(x', \xi)}{P(x, \xi)} \right)^\alpha.$$

- (3) $\gamma^* \sigma_x = \sigma_{\gamma^{-1}(x)}$ para $\gamma \in \Gamma$.

La familia de medidas de Patterson-Sullivan define una densidad conforme Γ -invariante de dimensión $\delta(\Gamma)$ (Ver [15]). Sea Γ un grupo discreto actuando en \mathbb{D} y supongamos que para algún $\alpha > 0$ existe una densidad

conforme Γ -invariante de dimensión α . Denotamos a esta por σ . Decimos que Γ es ergódico sobre $\partial\mathbb{D}$ con respecto a la clase de medidas definida por σ si para cada conjunto de Borel $A \in \partial\mathbb{D}$ invariante bajo Γ entonces para un $x \in \mathbb{D}$ se cumple uno de los siguientes: $\sigma_x(A) = 0$ ó $\sigma_x(\partial\mathbb{D} - A) = 0$. Presentamos el Teorema 4.2.1 de [3].

Teorema 1.6. *Sea Γ un grupo discreto actuando en \mathbb{D} y, para $\alpha > 0$ supongamos que σ es una densidad conforme Γ -invariante de dimensión α . La colección de todas las densidades conformes Γ -invariantes de dimensión α es igual al conjunto de múltiplos constantes distintos de cero de σ si, y sólo si Γ es ergódico sobre $\partial\mathbb{D}$ con respecto a la clase de medidas definida por σ .*

El siguiente teorema (Ver el Teorema 4.4.4 de [15]) se usa junto con el Teorema 1.6 para determinar la unicidad de densidades conformes.

Teorema 1.7. *Sea Γ un grupo discreto no-elemental actuando en \mathbb{D} y σ una densidad conforme Γ -invariante de dimensión α . Si A es un subconjunto Γ -invariante del conjunto límite cónico C entonces*

- (1) $\sigma_x(A) = 0$ ó
- (2) $\sigma_x(A) = \sigma_x(\partial\mathbb{D})$.

1.4 DEFORMACIONES DE GRUPOS FUCHSIANOS.

1.4.1 Aplicaciones casi-conformes.

Sea $w : G \rightarrow G'$ un homeomorfismo (que preserva orientación) entre dominios G, G' contenidos en $\mathbb{C}P^1$. Suponemos que w es diferenciable en un punto interior z , es decir, que la parte real y la parte imaginaria de w son diferenciables en z .

El punto $z \in G$ se llama *regular* si w es diferenciable en z y el Jacobiano $J(z) \neq 0$. Supongamos que w es regular en todo punto de G y que las

derivadas parciales w_x y w_y son continuas en G . Entonces las derivadas direccionales $\partial_\alpha w$ de w en las direcciones $\alpha \in S^1$

$$\partial_\alpha w = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{w(z + re^{i\alpha}) - w(z)}{re^{i\alpha}} = e^{-i\alpha} (w_x(z) \cos \alpha + w_y(z) \sin \alpha)$$

existen en cada punto $z \in G$.

Se dice que f es absolutamente continuo en líneas de G si se satisface la siguiente condición: en cada rectángulo $R = \{x + iy \mid a < x < b, c < y < d\}$, $\bar{R} \subset G$, f es absolutamente continuo como función de x para casi todo segmento $I_y = \{x + iy \mid a < x < b\}$, y como función de y sobre casi todo segmento $I_x = \{x + iy \mid c < y < d\}$.

Sea w un homeomorfismo de un dominio G en G' que satisface las siguientes condiciones:

- (1) w es absolutamente continuo en líneas de G .
- (2) La condición de dilatación

$$\max_\alpha |\partial_\alpha w(z)| \leq k(\min_\alpha |\partial_\alpha w(z)|)$$

se satisfacen para casi todo punto de G .

El homeomorfismo w se llama *aplicación k -casi-conforme de G* (definición analítica). Observemos que en la definición anterior necesariamente $k \geq 1$. Para ver la definición geométrica de casi-conformidad consultar [12], pág. 16.

Diremos que un homeomorfismo $w : S \rightarrow S'$ entre las superficies de Riemann hiperbólicas de área finita S y S' es *casi-conforme* si este, en sistemas de coordenadas dados por los cubrientes universales, es un homeomorfismo casi-conforme entre polígonos fundamentales asociados a los respectivos grupos de transformaciones de cubierta.

Para S y S' superficies de Riemann compactas de género 2 y 3 respectivamente, no existe una aplicación casi-conforme entre ellas, ya que no son homeomorfas. Si S y S' son superficies de Riemann compactas de género 2, entonces estas son casi-conformemente equivalentes, más adelante, en el Teorema 1.9 probaremos esto.

Sean G y G' dominios de $\mathbb{C}P^1$ y usando las derivadas complejas $w_z, w_{\bar{z}}$

$$w_z(z) = \frac{1}{2}(w_x(z) - iw_y(z)), \quad w_{\bar{z}}(z) = \frac{1}{2}(w_x(z) + iw_y(z))$$

tenemos que, (Ref. [12], pág. 49) la derivada de w en la dirección α puede escribirse en la forma

$$\partial_\alpha w(z_0) = w_z(z_0) + w_{\bar{z}}(z_0)e^{-2i\alpha},$$

el Jacobiano puede escribirse como

$$J(z_0) = |w_z(z_0)|^2 - |w_{\bar{z}}(z_0)|^2$$

y

$$\max_\alpha |\partial_\alpha w(z_0)| = |w_z(z_0)| + |w_{\bar{z}}(z_0)|, \quad \min_\alpha |\partial_\alpha w(z_0)| = |w_z(z_0)| - |w_{\bar{z}}(z_0)|.$$

La ecuación

$$\max_\alpha |\partial_\alpha w(z)| \leq k(\min_\alpha |\partial_\alpha w(z)|)$$

puede escribirse en la forma

$$|w_{\bar{z}}(z)| \leq \frac{k-1}{k+1} |w_z(z)|.$$

Si z es un punto regular, entonces $w_z(z) \neq 0$. El cociente

$$\chi(z) = \frac{w_{\bar{z}}(z)}{w_z(z)}$$

existe en cada punto regular $z \neq \infty$ donde $w_z(z) \neq \infty$; por el Teorema 1.4 [12], pág. 182, esta función está bien definida en casi todo punto de G . La función χ se llama *dilatación compleja* w . La ecuación diferencial

$$w_{\bar{z}}(z) = \chi(z)w_z(z)$$

se llama ecuación de Beltrami.

1.4.2 Deformación casi-conforme de grupos Fuchsianos.

Dada una aplicación casi-conforme $w : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ y dado un grupo Kleiniano $G \subset PSL(2, \mathbb{C})$, nos gustaría saber cuando el grupo de homeomorfismos wGw^{-1} está contenido en $PSL(2, \mathbb{C})$. Si esto pasa diremos que w es compatible con G . En [14], pág. 48 se da la siguiente caracterización de esta compatibilidad:

Lema 1.8. Una aplicación casi-conforme $w : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ con dilatación compleja μ es compatible con $G \subset PSL(2, \mathbb{C})$ si y sólo si

$$(\chi \circ g) \frac{\bar{g}'}{g'} = \chi,$$

para casi todo punto en $\mathbb{C}P^1$ con respecto a la medida de Lebesgue y para cada g in G .

Prueba. La prueba se encuentra en [14], pág. 48. \square

Ahora veremos que dos superficies de Riemann hiperbólicas de área finita S, S' y del mismo tipo topológico son casi-conformemente equivalentes, es decir, existe una aplicación casi-conforme $w : S \rightarrow S'$. Primero veamos esto en el caso compacto (género $g \geq 2$).

Proposición 1.9. Sean S, S' superficies de Riemann hiperbólicas compactas de género $g \geq 2$, entonces existe una aplicación casi-conforme $w : S \rightarrow S'$.

Prueba. Sean $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset PSL(2, \mathbb{R})$ grupos Fuchsianos tales que $S = \mathbb{H}^+ / \Gamma_1$ y $S' = \mathbb{H}^+ / \Gamma_2$. Tomamos polígonos fundamentales R_1, R_2 para las acciones de Γ_1, Γ_2 en \mathbb{D} respectivamente, estas regiones fundamentales son polígonos hiperbólicos convexos con $4g$ lados. Dados dos segmentos geodésicos l_1, l_2 en \mathbb{H}^+ de longitud finita, escogemos parametrizaciones por longitud de arco, digamos $\alpha_i : [0, a_i] \rightarrow l_i$ para $i = 1, 2$, luego definimos $\phi_0 : l_1 \rightarrow l_2$ por $\phi_0 = \alpha_2 \circ h \circ \alpha_1^{-1} : l_1 \rightarrow l_2$, donde $h : [0, a_1] \rightarrow [0, a_2]$ es la aplicación lineal $h(t) = \frac{a_2 t}{a_1}$. De esta forma definimos un homeomorfismo $\phi : \partial R_1 \rightarrow \partial R_2$ que identifique lados y vértices del polígono R_1 con lados y vértices respectivamente del polígono R_2 . El homeomorfismo

$\phi : \partial R_1 \rightarrow \partial R_2$ determina un isomorfismo $\alpha : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ que satisface la fórmula

$$w(\gamma z) = \alpha(\gamma)w(z)$$

para cada $z \in \partial R_1$. Sean $p_1 \in R_1$ y $p_2 \in R_2$ puntos interiores, identificando estos puntos interiores con los vértices de los polígonos respectivos obtenemos $4g$ triángulos en cada polígono. Sea T_1 un triángulo del polígono R_1 y sea T_2 un triángulo del polígono R_2 tal que $\phi(T_1 \cap \partial R_1) \subset T_2 \cap \partial R_2$. Para $i = 1, 2$, sean l_i los segmentos geodésicos $l_i = T_i \cap \partial R_i$. Utilizando el homeomorfismo ϕ definiremos un homeomorfismo $\phi_{1,2}$ entre los triángulos T_1 y T_2 el cual es casi-conforme en los interiores de los triángulos. Para cada $s \in l_1$, sean r_s el segmento geodésico de p_1 a s , $t_{\phi(s)}$ el segmento geodésico de p_2 a $\phi(s)$ y $\phi_s : r_s \rightarrow t_{\phi(s)}$ una aplicación entre segmentos geodésicos definida de la misma forma que ϕ_0 . Esto define un homeomorfismo $\phi_{1,2} : T_1 \rightarrow T_2$ como queríamos, por construcción este homeomorfismo es C^∞ en los interiores de los triángulos, por lo tanto es casi-conforme. De esta manera podemos definir un homeomorfismo casi-conforme $w_0 : R_1 \rightarrow R_2$. Sea $w : S \rightarrow S'$ un homeomorfismo casi-conforme tal que el siguiente diagrama es un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{w_0} & R_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ S & \xrightarrow{w} & S' \end{array}$$

donde $\pi_i : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{H}^+/\Gamma_i$ denota la proyección, para $i = 1, 2$.

Esta prueba esta basada en Ref. [10] pág. 33-34 \square

En el caso en que las superficies S, S' no sean compactas tenemos:

Proposición 1.10. Sean S, S' superficies de Riemann hiperbólicas no-compactas de área finita y del mismo tipo topológico, entonces existe una aplicación casi-conforme $w : S \rightarrow S'$.

Prueba. La prueba es muy similar a la prueba de la Proposición 1.9, solo hay que definir ϕ entre polígonos de Dirichlet de tal forma que se cumpla la fórmula

$$w(\gamma z) = \alpha(\gamma)w(z)$$

para cada $z \in \partial R_1$, para algún isomorfismo $\alpha : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ asociado a ϕ \square

Si $w : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ es una aplicación casi-conforme compatible con un grupo Kleiniano $G \subset PSL(2, \mathbb{C})$, el grupo Kleiniano $G_w = w \circ G \circ w^{-1}$ se llama *deformación casi-conforme de G* . Una deformación casi-conforme de un grupo Fuchsiano G se llama *grupo casi-Fuchsiano*.

1.4.3 Homeomorfismo Frontera.

Dadas dos superficies de Riemann S, S' de género g y del mismo tipo topológico que admiten una métrica hiperbólica de área finita, por las Proposiciones 1.9 y 1.10 existe una aplicación casi-conforme $w : S \rightarrow S'$. Sean $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset PSL(2, \mathbb{R})$ grupos Fuchsianos tales que $S = \mathbb{D}/\Gamma_1$ y $S' = \mathbb{D}/\Gamma_2$ y $\alpha : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ un isomorfismo de grupos. Sean R_1 un región de Dirichlet para Γ_1 y $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\} \subset \Gamma_1$ un conjunto de generadores para Γ_1 que identifiquen caras del polígono fundamental R_1 . Sean $\{\beta_1, \dots, \beta_k\} \subset \Gamma_2$ el conjunto de generadores donde $\beta_i = \alpha(\gamma_i)$ para $i \in \{1, \dots, k\}$. Sea R_2 una región de Dirichlet para este conjunto de generadores. La aplicación casi-conforme $w : S \rightarrow S'$ se puede levantar a una aplicación casi-conforme $\tilde{w} : R_1 \rightarrow R_2$. Luego mediante la ecuación

$$\tilde{w}(\gamma z) = \alpha(\gamma)\tilde{w}(z)$$

la extendemos a \mathbb{H}^+ . Mediante reflexiones extendemos \tilde{w} a una aplicación $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$.

Sea $h : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ la restricción de w a $\mathbb{R}P^1$, entonces h es un homeomorfismo llamado *homeomorfismo frontera*.

El homeomorfismo frontera $h : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ no depende de la extensión $\tilde{w} : R_1 \rightarrow R_2$ dada de $\phi : \partial R_1 \rightarrow \partial R_2$:

Proposición 1.11. El homeomorfismo frontera $h : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ sólo depende de isomorfismo $\alpha : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$.

Prueba. Sea $z \in \mathbb{C}P^1$ y $w : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ una aplicación casi-conforme compatible con Γ_1 y que satisfaga la ecuación (1.5). Sea $\xi \in \mathbb{R}P^1$ y sea $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de Γ_1 tal que $\gamma_n(z) \rightarrow \xi$, entonces $(\gamma_n(z')) \rightarrow \xi$ para cualquier $z' \in \mathbb{C}P^1$, $\alpha(\gamma_n)(wz) \rightarrow \eta$ no depende del valor $w(z) \in \mathbb{C}P^1$, por lo tanto $h(\xi) = \eta$. \square

Cuando las superficies de Riemann S y S' son compactas tenemos:

Teorema 1.12. *El homeomorfismo frontera h es una transformación de Moebius si este es absolutamente continuo.*

Prueba. Una prueba dada por Bowen se encuentra en [11]. \square

1.5 REPRESENTACIONES Y HACES PLANOS.

1.5.1 Suspensión de una representación.

Sean F y B variedades diferenciables de dimensión q y p respectivamente y sea $\tilde{B} \rightarrow B$ el espacio cubriente universal de B . Supongamos dada una representación $\rho : \pi_1(B) \rightarrow \text{Diff}(F)$ y que cada elemento $\gamma \in \Gamma := \pi_1(B)$ actúa sobre $\tilde{B} \times F$ as $(\gamma, \rho(\gamma))$, esta acción es libre y propiamente discontinua. El cociente $M = \tilde{B} \times_{\pi_1(B)} F$ donde

$$\tilde{B} \times_{\pi_1(B)} F = \tilde{B} \times F / \Gamma,$$

es una variedad de dimensión $p+q$ y M es un haz fibrado sobre S con fibra F . Mas aún, la foliación horizontal $\tilde{B} \times \{\text{punto}\}$ sobre $\tilde{B} \times F$ desciende a una foliación horizontal \mathcal{F} de codimensión q sobre M y para cada hoja $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$, la proyección de haces $\pi : M \rightarrow B$ cuando la restringimos a L es un espacio cubriente de B .

La construcción anterior se llama *suspensión de la representación ρ* y los haces fibrados construidos por suspensión se llaman *haces con grupo de estructura discreto*.

1.5.2 Haces planos.

Haces con grupos discretos de estructura están íntimamente relacionados con la noción de conexión plana. Supongamos $\pi : M \rightarrow B$ es un haz

fibrado diferenciable con fibra F . Por una *conexión generalizada* sobre M entendemos un campo C^∞ de planos tangentes τ sobre M tal que $\pi_* : \tau_x \rightarrow T_{\pi(x)}B$ es un isomorfismo para toda $x \in M$. Tal conexión generalizada se dice que es *plana* si τ es integrable, es decir, si τ es el haz tangente $\tau(\mathcal{F})$ a una foliación \mathcal{F} que es transversal a las fibra de M (y de dimensión = $\dim B$).

Haces con conexiones planas se llaman *haces planos*. Obviamente el haz $M \rightarrow B$ construido mediante la suspensión es un haz plano.

1.6 ECUACIONES DE RICCATI.

1.6.1 Ecuaciones diferenciales lineales ordinarias.

La ecuación diferencial lineal ordinaria clásica es

$$(1.1) \quad \frac{dw}{dz} = A(z)w, \quad z \in \mathbb{C}, \quad w \in \mathbb{C}^n$$

donde $A(z)$ es una matriz de funciones racionales (Ref. [5]). Una propiedad fundamental de esta ecuación es que podemos encontrar localmente en z una base de soluciones linealmente independientes de (1.1) la cual acepta continuación analítica al espacio cubriente universal de $S := \overline{\mathbb{C}} - \text{Polos}(A)$ como función vectorial holomorfa w satisfaciendo la relación de monodromía:

$$w(T_\gamma(z)) = \tilde{\rho}(\gamma)(w(z)), \quad \gamma \in \pi_1(S, z_0)$$

donde T_γ es la transformación de cubierta correspondiente a cada lazo cerrado γ y

$$(1.2) \quad \tilde{\rho} : \pi_1(S, z_0) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

es la representación de monodromía de la ecuación. El automorfismo lineal $\tilde{\rho}(\gamma) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ contiene la información de como las condiciones iniciales

se transforman en condiciones finales resolviendo (1.1) a lo largo del lazo cerrado γ basado en z_0 .

Otra construcción clásica de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias es la suspensión. Suponemos dada una superficie de Riemann hiperbólica S (de área finito) y una representación (1.2) construimos de este dato un haz vectorial $E_{\tilde{\rho}}$ sobre S y una ecuación de tipo (1.1). Sea $\pi : \mathbb{H}^+ \rightarrow S$ el cubriente universal de S , las transformaciones de cubierta dan lugar a la representación canónica

$$(1.3) \quad \rho_{can} : \pi_1(S, z_0) \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) \subset PSL(2, \mathbb{C})$$

del grupo fundamental de S . Consideremos el haz trivial $\tilde{E} = \mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}^n$ sobre el semiplano superior \mathbb{H}^+ y la acción de $\pi_1(S, z_0)$ sobre \tilde{E} ,

$$(z, w) \mapsto (\rho_{can}(\gamma)z, \tilde{\rho}(\gamma)w), \quad \gamma \in \pi_1(S, z_0).$$

El cociente de \tilde{E} por esta acción da lugar a un haz vectorial $E_{\tilde{\rho}}$ sobre S . Sobre E podemos considerar la ecuación dada por $\tilde{A} = 0$ (i.e. $\frac{dw}{dz} = 0$). Sus soluciones son las funciones constantes. Como en esta ecuación \tilde{A} es invariante bajo la acción en (1.3) esta desciende a una ecuación diferencial lineal ordinaria sobre $E_{\tilde{\rho}}$ la cual es holomorfa sobre S . La construcción da directamente que la transformación de monodromía de esta ecuación es la representación dada $\tilde{\rho}$. Las gráficas de las soluciones locales de (1.1) forman una foliación holomorfa $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ en $E_{\tilde{\rho}}$.

1.6.2 Las ecuaciones de Riccati.

Pueden obtenerse por definición ecuaciones de Riccati de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias como (1.1) o (1.2) proyectivizando las variables lineales del haz vectorial $E_{\tilde{\rho}}$ sobre la superficie de Riemann S . Denotando $\zeta_j := \frac{w_j}{w_1}$ con $j = 2, 3, \dots, n$, la ecuación de Riccati asociada a (1.1) en coordenadas afines toma la forma de polinomio cuadrático en $\zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n$ coeficientes racionales en z :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\zeta_2}{dz} \\ \dots \\ \frac{d\zeta_n}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{22}-a_{11} & a_{23} & \dots \\ a_{32} & a_{33}-a_{11} & \dots \\ \dots & \dots & a_{nn}-a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ \dots \\ \zeta_n \end{pmatrix} - (a_{12}\zeta_2 + \dots + a_{1n}\zeta_n) \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ \dots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

donde $A = (a_{ij}(z))$ es la matriz de funciones racionales en (1.1). De manera similar dando una representación

$$\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PGL(n, \mathbb{C}),$$

su suspensión nos da una variedad $M_\rho = \text{Proy}(E_{\tilde{\rho}})$ la cual es un haz sobre S con fibra $\mathbb{C}P^{n-1}$ con una conexión plana. El conjunto de secciones planas forman una foliación \mathcal{F}_ρ de M_ρ la cual es la proyectivización de la foliación $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ en $E_{\tilde{\rho}}$. Las foliaciones así construidas, serán llamadas *foliaciones de Riccati*.

1.7 EL FLUJO GEODÉSICO EN LAS ECUACIONES DE RICCATI.

En esta sección introducimos el flujo geodésico foliado; seguimos el trabajo [3].

1.7.1 Introducción.

Sean $\tilde{\rho}$ y ρ representaciones del grupo fundamental de la superficie de Riemann hiperbólica S de área finita tales que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S, z_0) & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & GL(n, \mathbb{C}) \\ & \searrow \rho & \downarrow \text{proy} \\ & & PGL(n, \mathbb{C}) \end{array}$$

conmuta.

Mediante la aplicación cubriente $\pi : \mathbb{H}^+ \rightarrow S$ introducimos a la superficie de Riemann hiperbólica S de área finita la métrica de Poincaré ξ , y al haz tangente unitario T^1S a la superficie S la medida de Liouville λ normalizadas para tener área y volumen 1 respectivamente. Introducimos sobre las hojas \mathcal{L} de la foliación \mathcal{F}_ρ la métrica de Poincaré de S mediante la aplicación cubriente $p : \mathcal{L} \rightarrow S$.

Denotamos por $q : T^1S \rightarrow S$ al haz tangente unitario a la superficie S . Sean $T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ y $T^1\mathcal{F}_{\rho}$ las variedades formadas por aquellos vectores tangentes a $E_{\tilde{\rho}}$ y M_{ρ} los cuales son tangentes a $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ y \mathcal{F}_{ρ} y tienen longitud unitaria con respecto a las métricas de Poincaré de las foliaciones. El espacio tangente unitario $T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ a la foliación $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ en $E_{\tilde{\rho}}$ se identifica de manera canónica con $q^*E_{\tilde{\rho}}$. Con esta identificación definimos un haz vectorial $T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}} \rightarrow T^1S$ que denotamos por E , este es isomorfo al haz vectorial $q^*E_{\tilde{\rho}} \rightarrow T^1S$. De la misma forma el haz tangente unitario $\tilde{q} : T^1\mathcal{F}_{\rho} \rightarrow E_{\rho}$ a la foliación \mathcal{F}_{ρ} en E_{ρ} define un haz proyectivo $\tilde{p} : T^1\mathcal{F}_{\rho} \rightarrow T^1S$ el cual es isomorfo de manera canónica con la proyectivización $\text{Proy}(E) \rightarrow T^1S$ del haz vectorial E sobre T^1S . Las derivadas de las proyecciones $E_{\tilde{\rho}}, M_{\rho} \rightarrow S$ inducen los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}} & \longrightarrow & E_{\tilde{\rho}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^1S & \xrightarrow{q} & S \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^1\mathcal{F}_{\rho} & \xrightarrow{\tilde{q}} & M_{\rho} \\ \downarrow \tilde{p} & & \downarrow p \\ T^1S & \xrightarrow{q} & S \end{array}$$

Consideremos una métrica Hermitiana continua $|\cdot|_x$, definida sobre la fibra $E_{\tilde{\rho},x}$ para cada $x \in S$, inducimos la métrica Hermitiana de Fubini-Study $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$, sobre la fibra $M_{\rho,x} = \text{Proy}(E_{\tilde{\rho},x})$ para cada $x \in S$. Los haces $q^*E_{\tilde{\rho}} \simeq T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ y $q^*E_{\rho} \simeq T^1\mathcal{F}_{\rho}$ sobre T^1S se equipan de una manera natural con las métricas Hermitiana o de Fubini-Study, respectivamente. Damos al haz tangente unitario $q : T^1S \rightarrow S$ la métrica producto, de la métrica hiperbólica en la base por la métrica de ángulo en las fibras. A la variedad M_{ρ} le asignamos la métrica producto, de la métrica hiperbólica en la base por la métrica de Fubini-Study en las fibras. Para cada $x \in S$, equipamos a la fibra $(p \circ \tilde{q})^{-1}\{x\} \subset T^1\mathcal{F}_{\rho}$ con la métrica producto de la métrica de ángulo por la métrica de Fubini-Study.

1.7.2 El flujo geodésico foliado.

Introducimos sobre el haz tangente unitario $q : T^1S \rightarrow S$ el *flujo geodésico* $\phi : T^1S \times \mathbb{R} \rightarrow T^1S$, con el cual cada vector $v \in T^1S$ determina una geodésica

$$\gamma_v = \{\phi(v, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Introducimos sobre E y sobre $\text{Proy}(E)$ los *flujos geodésicos foliados* $\tilde{\Phi}$ y Φ , obteniendo el flujo a lo largo de las geodésicas

$$\{\tilde{\Phi}(z_0, t) : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad \{\Phi(w_0, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

determinadas por $z_0 \in E_v$ y $w_0 \in \text{Proy}(E)_v$, en las hojas \mathcal{L}_{z_0} y \mathcal{L}_{w_0} de las foliaciones $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ y \mathcal{F}_{ρ} respectivamente, dando lugar a los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Phi} : T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & T^1\mathcal{F}_{\tilde{\rho}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \phi : T^1S \times \mathbb{R} & \longrightarrow & T^1S \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Phi : T^1\mathcal{F}_{\rho} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & T^1\mathcal{F}_{\rho} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \phi : T^1S \times \mathbb{R} & \longrightarrow & T^1S \end{array}$$

1.7.3 Medidas SRB para las Ecuaciones de Riccati.

Sea X un campo vectorial completo en la variedad M , y denotamos por ϕ_t a su flujo. Una medida de probabilidad μ sobre M es *invariante por X* si para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $\phi_{t*}(\mu) = \mu$. La *cuenca* $B(\mu)$ de una medida de probabilidad X -invariante, μ , es el conjunto de puntos $x \in M$ tal que el promedio de tiempo positivo a lo largo de su órbita de cada función continua $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto coincide con la integral de la función por μ . En fórmula

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\phi_t(x)) dt = \int_M h d\mu.$$

Una medida de probabilidad X -invariante en M es una *medida SRB* si su cuenca tiene medida de Lebesgue distinta de cero en M .

Los Teoremas 1.13 y 1.14 nos dan ejemplos de medidas *SRB* con cuencas de atracción que tienen medida de Lebesgue total.

A continuación construiremos medidas *SRB* para el flujo geodésico foliado, cuya cuenca de atracción tiene medida de Lebesgue total:

La función

$$t \mapsto |\tilde{\Phi}(z_0, t)|_{\phi(v, t)}$$

describe el tipo de crecimiento de la solución de (1) sobre la geodésica γ_v con condición inicial $w_0 \in E_v$ y la función

$$t \mapsto \frac{|\tilde{\Phi}(z_1, t)|_{\phi(v, t)}}{|\tilde{\Phi}(z_2, t)|_{\phi(v, t)}}$$

describe el crecimiento relativo de la solución de (1) sobre γ_v con condición inicial $z_1 \in E_v$ con respecto a la solución de (1) sobre γ_v con condición inicial $z_2 \in E_v$.

Suponemos que el haz vectorial $E := T^1\mathcal{F}_\rho \rightarrow T^1S$ admite una descomposición medible $E_v = F_v \oplus G_v$, definida para v en un subconjunto \mathcal{A} de T^1S , y que se verifican las siguientes hipótesis:

- (1) \mathcal{A} tiene medida de Lebesgue total en T^1S ;
- (2) \mathcal{A} es invariante por el flujo geodésico ϕ ;
- (3) la descomposición es invariante por el flujo geodésico $\tilde{\Phi}$: para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $v \in \mathcal{A}$,

$$F_{\phi(v, t)} = \tilde{\Phi}(F_v, t) \quad y \quad G_{\phi(v, t)} = \tilde{\Phi}(G_v, t);$$

- (4) $\dim(F_v) = 1$;
- (5) para cada $v \in \mathcal{A}$, para cada conjunto compacto $K \subset T^1S$ y para cada sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de tiempos tales que $\phi(v, t_n) \in K$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{\Phi}(z_1, t_n)|_{\phi(v, t_n)}}{|\tilde{\Phi}(z_2, t_n)|_{\phi(v, t_n)}} = \infty,$$

para todo vector distinto de cero $z_1 \in F_v$ y $z_2 \in G_v$.

Denotamos por $\sigma^+ := \mathcal{A} \subset T^1S \rightarrow T^1\mathcal{F}_\rho$ a la sección medible definida por tomar a $\sigma^+(v)$ como el punto de $\text{Proy}(E_v)$ que corresponde a la línea F_v . Una sección que satisface las hipótesis anteriores se llama *sección de mayor expansión*.

De manera similar, definimos una *sección σ^- de mayor contracción* requiriendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{\Phi}(z_1, t_n)|_{\phi(v, t_n)}}{|\tilde{\Phi}(z_2, t_n)|_{\phi(v, t_n)}} = 0,$$

para todo vector distinto de cero $z_1 \in F_v$ y $z_2 \in G_v$.

El inciso 3 del Teorema 3.4 nos da un ejemplo haces $E \simeq T^1\mathcal{F}_\rho \rightarrow T^1S$ el cual admite una descomposición medible la cual es C^0 , pero no es C^1 , por lo tanto esta descomposición medible no es C^∞ . Este hecho se deriva de que la función

$$\tilde{q} \circ \sigma^+|_{T^1S} : T^1S \rightarrow \mathbb{R}P_x^1 \subset \mathbb{C}P_x^1$$

no es absolutamente continua.

Suponiendo que existen secciones de *mayor expansión* y de *mayor contracción* $\sigma^\pm : \mathcal{A} \subset T^1S \rightarrow T^1\mathcal{F}_\rho$, sean μ^\pm las medidas sobre $T^1\mathcal{F}_\rho$ inducidas por σ^\pm de la medida de Liouville λ sobre T^1S , en fórmula $\mu^\pm = \sigma_*^\pm \lambda$ y sea μ la medida sobre M_ρ inducida por $\tilde{q} : T^1\mathcal{F}_\rho \rightarrow M_\rho$, en fórmula $\mu = \tilde{q}_* \mu^+$. En [3] se prueba que μ^+ es una medida ergódica invariante por el flujo geodésico foliado Φ sobre $T^1\mathcal{F}_\rho$ la cual es una medida SRB para el flujo geodésico foliado Φ de las ecuaciones de Riccati, cuya cuenca tiene medida de Lebesgue total en $T^1\mathcal{F}_\rho$ (de manera similar μ^-).

Sean

$$f : B \rightarrow B, \quad A : B \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

aplicaciones medibles. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in B$ denotamos

$$A^n(x) = A(f^{n-1}(x)) \cdots A(f(x))A(x) \quad y \quad A^{-n}(x) = [A^n(f^{-n}(x))]^{-1}.$$

Decimos que *la familia $\{A^n\}$ forma un cociclo multiplicativo sobre f* .

Un punto $x \in B$ tiene *exponentes de Liapunov para el cociclo multiplicativo $\{A^n\}$ sobre f* si existe $0 < k \leq n$ y para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ hay $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y un espacio F_i de \mathbb{R}^n tal que

- (1) $\mathbb{R}^n = \bigoplus_i F_i$
- (2) Para cada i y cada vector no-cero $v \in F_i$ uno tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(|A^n(v)|) = \pm \lambda_i.$$

Teorema ergódico multiplicativo de Oseledec ([9], pág. 665): Sea $f : B \rightarrow B$ una transformación medible invertible, μ una medida de probabilidad f -invariante y A un cociclo multiplicativo medible sobre f .

Supongamos que las funciones $\log^+ \|A\|$ y $\log^+ \|A^{-1}\|$ pertenecen a $\mathcal{L}^1(\mu)$. El conjunto de punto para los cuales los exponentes de Liapunov de A están bien definidos y tiene μ -medida 1. Si μ es ergódica los exponentes de Liapunov son independientes del punto en un conjunto de μ -medida total.

Los exponentes de Liapunov y los espacios de Liapunov dados en el Teorema de Oseledec dependen de manera medible de $x \in B$ en un conjunto de μ -medida total (ver [9] páginas 665). Cuando la medida μ en el Teorema de Oseledec es ergódica, podemos hablar de *los exponentes de Liapunov de la medida μ* .

Para cada $v \in T^1S$ y $t \in \mathbb{R}$, el flujo $\tilde{\Phi}_t := \tilde{\Phi}(\cdot, t)$ induce un isomorfismo lineal

$$\tilde{A}(v, t) := \tilde{\Phi}(v, t)|_{E_{\tilde{\rho}, v}} : E_{\tilde{\rho}, v} \rightarrow E_{\tilde{\rho}, \phi(v, t)}$$

entre las \mathbb{C}^{n-1} fibras. Bajo una trivialización medible de los haces, escogiendo de manera medible bases ortonormales de las fibras, el flujo geodésico foliado puede verse como un cociclo multiplicativo sobre los flujos geodésicos en T^1S :

$$\tilde{A} : T^1S \times \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{C}), \quad \tilde{A}(v, t_1 + t_2) = \tilde{A}(\phi(v, t_1), t_2) \tilde{A}(v, t_1), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

En [3] se usa el Teorema Ergódico de Oseledec (ver [9], pág. 665) para flujos cuando la variedad base es no-compacta. Sea φ un flujo completo sobre la variedad B , $\pi : E \rightarrow B$ un haz vectorial sobre B y $\tilde{\Phi}$ el flujo sobre E que induce un cociclo multiplicativo sobre φ .

Decimos que *los exponentes de Liapunov de $\tilde{\Phi}$ están bien definidos en un punto $v \in B$* si hay una métrica Hermitiana o Euclidiana continua sobre el haz vectorial E , una sucesión $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ y una división $\tilde{\Phi}$ -invariante $E(v) = F_1(v) \oplus \cdots \oplus F_k(v)$ tal que, para cada vector no-cero $w \in F_i(v)$, cada conjunto compacto $K \subset B$ y cada sucesión de $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} t_n = \pm\infty$ y $\phi(v, t_n) \in K$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t_n} \log(|\tilde{\Phi}(w, t_n)|) = \pm\lambda_i.$$

Con la notación anterior los exponentes de Liapunov de $v \in B$ para el flujo $\tilde{\Phi}$ están bien definidos si y sólo si estos están bien definidos para el ciclo

multiplicativo $\{\tilde{A}_1^n\}$ sobre φ_1 definido por los difeomorfismos $\tilde{\Phi}_1$. Más aun, los exponentes de Liapunov y los espacios de Liapunov son iguales para los flujos y los difeomorfismos (ver Lema 4.3 pág. 11 de [3]).

La existencia y los valores de los exponentes de Liapunov no dependen de la métrica Hermitiana continua sobre el haz vectorial E .

Sea μ una probabilidad φ -invariante sobre B . Decimos que *el flujo $\tilde{\Phi}$ es μ -integrable* si hay una norma continua $\|\cdot\|$ sobre el haz vectorial E tal que las funciones $\log^+ \|\tilde{A}_1\|$ y $\log^+ \|\tilde{A}_{-1}\|$ pertenecen a $\mathcal{L}^1(\mu)$, donde $\|\cdot\|$ es el operador norma sobre los espacios vectoriales normados.

Usando el Teorema Ergódico de Oseledec, en [3] se prueba que si S es una superficie de Riemann hiperbólica finita y $\tilde{\rho} : \pi_1(S, z_0) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ es una representación tal que el cociclo multiplicativo medible sobre el flujo geodésico en T^1S satisface la condición de integrabilidad

$$\int_{T^1S} \log^+ \|\tilde{A}_{\pm 1}\| d\lambda < \infty,$$

que establece que la cantidad de expansión de $\tilde{A}_{\pm 1}$ es Liouville integrable, donde $\|\cdot\|$ es el operador norma y $\tilde{A}_t := \tilde{A}(\cdot, t)$, entonces las siguientes equivalencias se cumplen: existe una sección de mayor expansión $\sigma^+ : \mathcal{A} \subset T^1S \rightarrow T^1\mathcal{F}_\rho$ (donde \mathcal{A} tiene medida Le Liouville total) si y sólo si el mayor exponente de Liapunov es positivo y simple si y sólo si el menor exponente de Liapunov es negativo y simple si y sólo existe una sección de mayor contracción $\sigma^- : \mathcal{A} \subset T^1S \rightarrow T^1\mathcal{F}_\rho$ (donde \mathcal{A} tiene medida Le Liouville total).

Si la superficie S es compacta ($g \geq 2$) y la imagen de la representación $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(n, \mathbb{C})$ no deja una medida de probabilidad, entonces el cociclo multiplicativo definido por el flujo geodésico foliado posee exponentes de Liapunov no-nulos para la medida de Liouville. Cuando $n = 2$ esta condición se satisface para un conjunto abierto denso en el espacio de representaciones, esto implica que para un conjunto denso en el espacio de representaciones $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(n, \mathbb{C})$ existen secciones de mayor expansión y de mayor contracción.

En [3] se desarrollan dos tipos de ejemplos: Las representaciones de monodromía ping-pong o Schottky en $SL(2, \mathbb{C})$ y la representación canónica

obtenida de la representación

$$\rho_{can} : \pi_1(S, z_0) \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) \subset SL(2, \mathbb{C})$$

sobre el cubriente universal de la superficie.

Teorema 1.13. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica no-compacta y $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$ una representación inyectiva sobre un grupo Schottky, entonces hay secciones s^+ y s^- de mayor expansión y contracción definidas y continuas sobre un subconjunto de T^1S de medida de Liouville total y con valores en $T^1\mathcal{F}_\rho$.*

Prueba. Presentamos la prueba en la sección 3 del capítulo 5. \square

En el caso de la representación canónica ρ_{can} tenemos:

Teorema 1.14. *Para cada superficie de Riemann hiperbólica finita S el flujo geodésico foliado asociado a la representación canónica admite secciones σ^+ y σ^- de mayor expansión y contracción respectivamente definidas y C^∞ sobre todo T^1S . Más aún, para casi todo punto de $\text{Proy}(E)$ con respecto a la medida de Lebesgue, el flujo geodésico que empieza en este punto tiene a μ^+ como su estadística positiva y μ^- como su estadística negativa (esto es, μ^+ es la única medida SRB y su cuenca de atracción tiene medida de Lebesgue total, y de manera similar μ^- para su estadística negativa). Si S es además compacta entonces $\sigma^+(T^1S)$ es un atractor hiperbólico y $\sigma^-(T^1S)$ es un repulsor hiperbólico con cuencas de atracción $T^1\mathcal{F}_{\rho_{can}}$ y $\sigma^\mp(T^1S)$.*

Prueba. Teorema 6 de [3]. \square

2. Medidas de Patterson-Sullivan en las Ecuaciones de Riccati.

En este capítulo desintegramos la medida $\tilde{q}_*\mu^+$ en una medida ξ en la superficie base S y para cada $x \in S$ una medida μ_x en la fibra $\mathbb{C}P_x^1$ del haz M_ρ en el caso en el que la representación de Monodromía es la que proviene del cubriente universal de la superficie en la base (esto es, $\rho = \rho_{can}$), compararemos la familia de medidas $\{\mu_x : x \in S\}$ obtenidas al hacer la desintegración, con las medidas de Patterson-Sullivan. Todo el análisis de este capítulo, salvo la sección 2.1, es solo para el caso de la representación canónica.

2.1 SISTEMAS DE COORDENADAS.

Sea S una superficie de Riemann hiperbólica de área finita y $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ una representación. Trabajaremos con las proyecciones canónicas $\tilde{p} : T^1\mathcal{F}_\rho \rightarrow T^1S$, $p : M_\rho \rightarrow S$, $\tilde{q} : T^1\mathcal{F}_\rho \rightarrow M_\rho$, $q : T^1S \rightarrow S$, que hacen que el siguiente diagrama

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccc} T^1\mathcal{F}_\rho & \xrightarrow{\tilde{q}} & M_\rho \\ \sigma^\pm \updownarrow \tilde{p} & & \downarrow p \\ T^1S & \xrightarrow{q} & S \end{array}$$

conmute, donde $\sigma^\pm : T^1S \rightarrow T^1\mathcal{F}_\rho$ son las secciones de mayor expansión y de mayor contracción definidas en el capítulo 1, también pueden encontrarse en (Ref. [3]).

Introduciremos cartas locales en el haz tangente unitario $T^1S \rightarrow S$, en el haz $M_\rho \rightarrow S$ y en el haz tangente unitario a la foliación \mathcal{F}_ρ . Estaremos trabajando en estas cartas locales en este capítulo y los siguientes.

Sea $\rho_{can} : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la representación canónica y sea Γ el grupo Fuchsiano $\Gamma := \rho_{can}(\pi_1(S, z_0)) \subset PSL(2, \mathbb{R})$, por lo tanto Γ actúa

en $\mathbb{C}P^1$. Sean $\pi^\pm : \mathbb{H}^\pm \rightarrow S$ los cubrientes de S cuyos grupos de transformaciones de cubierta ambos son Γ .

Trabajaremos con el cubriente $\pi^+ : \mathbb{H}^+ \rightarrow S$ dado arriba, aunque podemos trabajar de manera análoga con el cubriente $\pi^- : \mathbb{H}^- \rightarrow S$. Sea $R_0 \subset \mathbb{H}^+$ una región fundamental para la acción de Γ en \mathbb{H}^+ .

Mediante inversas locales de las proyecciones de espacios cubrientes

$$\Pi : \mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow M_\rho \quad \text{y} \quad \pi_*^+ : T^1\mathbb{H}^+ \rightarrow T^1S$$

obtenemos las cartas

$$\{\phi_\gamma : W \rightarrow R_\gamma \times \mathbb{C}P^1 \mid \gamma \in \Gamma\} \quad \text{y} \quad \{h_\gamma : U \rightarrow R_\gamma \times \mathbb{S}^1 \mid \gamma \in \Gamma\}$$

donde

$$W := p^{-1}(\pi(R_0)), \quad U = q^{-1}(\pi(R_0)) \quad \text{y} \quad R_\gamma = \gamma(R_0).$$

Sea T el conjunto $T := T^1\mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1$. Consideremos el cociente de T por la acción del grupo fundamental asociada a ρ ($v, z \mapsto (\rho_{can}[\gamma]_*(v), \rho[\gamma](z))$). El cociente de T por esta acción es un haz proyectivo $T_\rho \rightarrow T^1S$ con fibra $\mathbb{C}P^1$ con la cual es isomorfo de manera canónica al haz $\text{Proy}(E_\rho) \rightarrow T^1S$, sean $\phi : T_\rho \rightarrow \text{Proy}(E_\rho)$ el isomorfismo canónico y $\pi_\rho : T \rightarrow T_\rho$ la proyección cociente. Denotamos por $\tilde{P}_\rho : T \rightarrow \text{Proy}(E_\rho)$ a la aplicación definida por $\tilde{P}_\rho := \phi \circ \pi_\rho$, entonces $\tilde{P}_\rho : T \rightarrow \text{Proy}(E_\rho)$ es un espacio cubriente. Las inversas locales de esta proyección nos dan las siguientes cartas coordinadas asociadas a la región fundamental R_0 ,

$$\{\Phi_\gamma : Z \rightarrow T^1R_\gamma \times \mathbb{C}P^1 \subset T \mid \gamma \in \Gamma\}$$

donde

$$Z := (p \circ \tilde{q})^{-1}(\pi^+(R_0)).$$

En los sistemas de coordenadas definidos, el diagrama (2.1) se ve de la siguiente manera:

$$(2.2) \quad \begin{array}{ccc} T^1R_\gamma \times \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{\pi_1} & R_\gamma \times \mathbb{C}P^1 \\ \tilde{\sigma}^\pm \updownarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_3 \\ T^1R_\gamma & \xrightarrow{\pi_4} & R_\gamma \end{array}$$

donde las π_i 's son las proyecciones canónicas.

2.2 LA MEDIDA DE ÁNGULO SOBRE T_x^1S .

Para cada $x \in \mathbb{D}$, sea $\sigma_x : T_x^1\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{S}^1$ la función que asigna a vector unitario v el punto extremo positivo de la geodésica que pasa por v . Sea d_0 la métrica definida sobre $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}$ por la fórmula

$$d_0(\xi, \eta) = |\arccos \xi \cdot \eta|$$

y para $x \in \mathbb{D}$ tomamos una transformación de Moebius $V \in M(\mathbb{D})$ con $V(x) = 0$ y definimos la métrica d_x sobre \mathbb{S}^1 por

$$d_x(\xi, \eta) = d_0(V(\xi), V(\eta)).$$

Para cada $x \in \mathbb{D}$, sea g_x la métrica de ángulo Euclidiano sobre la fibra $T_x^1\mathbb{D}$ del haz tangente unitario $T^1\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, esto es,

$$\sigma_{x*}g_x(v, w) = d_x(\sigma_x(v), \sigma_x(w)),$$

esta métrica es invariante bajo $PSL(2, \mathbb{R})$, es decir, para cada $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ se tiene $\gamma_*g_x = g_{\gamma x}$. Las medidas de área hiperbólica H en \mathbb{D} y de ángulo θ_x en $T_x^1\mathbb{D}$ asociada a g_x y normalizada para dar una medida de probabilidad son invariantes por el grupo de transformaciones de Moebius que preservan orientación $M(\mathbb{D})$, por lo tanto el elemento de volumen sobre $T^1\mathbb{D}$ dado por el diferencial

$$dV = dHd\theta_x$$

también es invariante por $PSL(2, \mathbb{R})$. Dado un grupo Fuchsiano $\Gamma \subset M(\mathbb{D})$ tal que \mathbb{D}/Γ sea una superficie S , mediante las proyecciones $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S$ y $\pi_* : T^1\mathbb{D} \rightarrow T^1S$ podemos inducir las medidas: ξ sobre S de la medida de área hiperbólica H sobre \mathbb{D} y llamaremos a esta medida *medida de área hiperbólica sobre S* , de ángulo λ_x sobre T_x^1S de la medida θ_x sobre $T_x^1\mathbb{D}$ y llamaremos a esta medida *medida de ángulo sobre T_x^1S* , y λ sobre T^1S de la medida de volumen V asociada al elemento de volumen dV sobre $T^1\mathbb{D}$ y llamaremos a esta medida *medida de Liouville sobre T^1S* .

Para cada $x \in S$ denotamos por μ_x^\pm a las medidas de probabilidad en $T^1\mathcal{F}_\rho$ definidas por

$$\mu_x^\pm := \sigma_*^\pm \lambda_x,$$

respectivamente y μ_x denotará a la medida de probabilidad en M_ρ definida por

$$\mu_x := (\tilde{q} \circ \sigma^+)_* \lambda_x.$$

En la siguiente sección probaremos utilizando el Teorema de Fubini que la medida μ_x corresponde a la desintegración de la medida $\tilde{q}_* \mu^+$ en la fibra $M_{\rho,x}$. En las secciones 2.4 y 2.5 identificaremos esta familia de medidas y veremos que corresponden a las medidas de Patterson-Sullivan, esto nos permitirá aproximar estas medidas mediante medidas soportadas en los puntos de intersección de una hoja isomorfa al plano de Poincaré y una fibra; como lo veremos en el capítulo 4 y después lo generalizaremos en el capítulo 5 a representaciones casi-canónicas y representaciones en un grupo Schottky cuando la base S sea no-compacta.

2.3 DESINTEGRACIÓN DE $\tilde{q}_* \mu^+$.

Desintegraremos las medidas μ^\pm sobre $\text{Proy}(E)$ utilizando el Teorema de Fubini.

Proposición 2.1. *Sea S una superficie de Riemann de tipo finito y sea $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la representación canónica $\rho = \rho_{can}$. Entonces las medidas μ^\pm en $\text{Proy}(E)$ se desintegran.*

- (1) $q \circ \tilde{p}_*(\mu^\pm) = \xi$, que es la medida de área hiperbólica sobre S .
- (2) La desintegración de μ^\pm sobre $x \in S$ es la medida μ_x^\pm con soporte en $(\tilde{p})^{-1}(T_x^1 S)$ respectivamente $\sigma^\pm(T_x^1 S) \subset (\tilde{p})^{-1}\{T_x^1 S\}$ respectivamente.

Prueba. Queremos probar para toda función continua con soporte compacto $f : \text{Proy}(E) \rightarrow \mathbb{R}$, que la asignación $x \mapsto \int_{T_x^1 S \times CP^1} f d\mu_x^\pm$ es integrable con respecto a ξ y que se verifica la ecuación

$$\int_{T^1 \mathcal{F}_\rho} f d\mu^\pm = \int_S \left(\int_{T_x^1 S \times CP^1} f d\mu_x^\pm \right) d\xi$$

donde $d\xi$ representa al elemento de área hiperbólica en S .

Sea $H \subset T^1 \mathcal{F}_\rho$ el soporte de f , entonces existe un conjunto compacto

$K \subset S$ tal que $H \subset (q \circ \tilde{p})^{-1} K$, identificamos $(q \circ \tilde{p})^{-1} K$ con $K \times F$ donde $F = S^1 \times CP^1$, por lo tanto tenemos que probar la siguiente igualdad

$$\int_{K \times F} f d\mu^\pm = \int_K \left(\int_{\{x\} \times F} f d\mu_x^\pm \right) d\xi.$$

Pero

$$\int_{K \times F} f d\mu^\pm = \int_{K \times S^1} f \circ \sigma^\pm d\lambda.$$

y

$$\int_{\{x\} \times F} f d\mu_x^\pm = \int_{\{x\} \times S^1} f \circ \sigma^\pm d\lambda_x.$$

Por lo tanto, sólo necesitamos verificar que la asignación

$$x \mapsto \int_{\{x\} \times S^1} f \circ \sigma^\pm d\lambda_x$$

sea integrable con respecto a $d\xi$ y

$$\int_{K \times S^1} f \circ \sigma^\pm d\lambda = \int_K \left(\int_{\{x\} \times S^1} f \circ \sigma^\pm d\lambda_x \right) d\xi,$$

pero esto es consecuencia inmediata del Teorema de Fubini (Ref. [7]). \square

Recordemos que para cada $x \in S$, la medida μ_x sobre M_ρ es la medida $\mu_x = \tilde{q}_* \mu_x^+$.

Proposición 2.2. *Sea S una superficie de Riemann de tipo finito y sea $\rho_{can} : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la representación canónica $\rho = \rho_{can}$. Entonces la medida $\mu = \tilde{q}_* \mu^+$ en M_ρ se desintegra.*

- (1) $p_*(\mu) = d\xi$, donde $d\xi$ es la medida de área sobre S .
- (2) La desintegración de μ sobre $x \in S$ es la medida μ_x con soporte en $\tilde{q} \circ \sigma^+(T_x^1 S)$.

Prueba. Sea $f : M_\rho \rightarrow \mathbb{R}$, una función continua de soporte compacto. Queremos probar que la asignación $x \mapsto \int_{M_{\rho,x}} f d\mu_x$ es integrable con respecto a $d\xi$ y se verifique la ecuación

$$\int_{M_\rho} f d\mu = \int_S \left(\int_{M_{\rho,x}} f d\mu_x \right) d\xi,$$

donde $d\xi$ es el elemento de área hiperbólica en S .

Existe un compacto $K \subset S$ tal que $\text{supp}(f) \subset K \times \mathbb{C}P^1 \subset M_\rho$, por lo tanto necesitamos verificar que se cumple la ecuación

$$\int_{K \times \mathbb{C}P^1} f d\mu = \int_K \left(\int_{M_{\rho,x}} f d\mu_x \right) d\xi.$$

Sea C el compacto $\sigma^+((q \circ \tilde{p})^{-1}(K))$. Entonces

$$\int_{K \times \mathbb{C}P^1} f d\mu = \int_C \tilde{q} \circ f d\mu^+ = \int_{T^1 S} \sigma^+ \circ \tilde{q} \circ f d\lambda$$

y por el Teorema de Fubini (Ref. [7]) tenemos la asignación $x \mapsto \int_{M_{\rho,x}} f d\mu_x$ es integrable con respecto a $d\xi$ y se verifica la ecuación

$$\int_{K \times S^1} \sigma^+ \circ \tilde{q} \circ f d\lambda = \int_K \left(\int_{T^1 S} \sigma^+ \circ \tilde{q} \circ f d\lambda_x \right) d\xi.$$

Y tenemos

$$\int_{M_{\rho,x}} f d\mu_x = \int_{(\tilde{q})^{-1}(M_\rho)} \tilde{q} \circ f d\mu^+ = \int_{T^1 S} \sigma^+ \circ \tilde{q} \circ f d\lambda_x.$$

entonces

$$\int_{K \times \mathbb{C}P^1} f d\mu = \int_K \left(\int_{\mathbb{C}P^1} f d\mu_x \right) d\xi.$$

Esto implica lo que queríamos demostrar.

Con esto probamos que la medida $d\mu$ en M_ρ se desintegra y que $p_* d\mu = d\xi$, también hemos probado que la desintegración de μ sobre $x \in S$ es μ_x . \square

2.4 IDENTIFICACIÓN DE LAS MEDIDAS $\{\mu_x : x \in S\}$.

Sea $\sigma : T^1 \mathbb{D} \rightarrow S^1 = \partial \mathbb{D}$ la función que asigna a $v \in T^1 \mathbb{D}$ en punto extremo positivo en $\partial \mathbb{D}$ de la geodésica en \mathbb{D} dirigida por v . Sea d_x la métrica en $S^1 = \partial \mathbb{D}$ definida por $d_x = \sigma_* g_x$. La métrica d_x proviene del tensor de métrica Riemanniana $G_x(\xi) = P(x, \xi)^2 I$ definida sobre S^1 .

Para cada vector unitario $u \in T_p^1 \mathbb{D}$, sea γ_u la geodésica en $i(\mathbb{D})$ que pasa por el punto p , con vector tangente u y que tiene su extremo positivo $\tilde{\sigma}^+(u)$ y negativo $\tilde{\sigma}^-(u)$ en $i(\partial \mathbb{D})$ donde $i : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ es la inclusión. Esto define dos secciones C^∞ , $\tilde{\sigma}^\pm : T^1 \mathbb{D} \rightarrow T^1 \mathbb{D} \times \mathbb{C}P^1$ respectivamente (Ref. [3]). Mediante una transformación de Moebius $\gamma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}^+$ definimos dos secciones C^∞ $\tilde{\sigma}^\pm : T^1 \mathbb{H}^+ \rightarrow T^1 \mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1$ tal que el diagrama

$$(2.3) \quad \begin{array}{ccccccc} T^1 \mathbb{D} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}^\pm} & T^1 \mathbb{D} \times \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{D} \times \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{C}P^1 \\ \downarrow \gamma_* & & \downarrow (\gamma_*, \gamma) & & \downarrow (\gamma, \gamma) & & \downarrow \gamma \\ T^1 \mathbb{H}^+ & \xrightarrow{\tilde{\sigma}^\pm} & T^1 \mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{C}P^1 \end{array}$$

conmute, donde las π 's y las τ 's son proyecciones canónicas. Para cada $x \in \mathbb{D}$ definimos las medidas: $\hat{\mu}_x$ sobre $\mathbb{D} \times \mathbb{C}P^1$ por $\hat{\mu}_x := (\pi \circ \tilde{\sigma}^+)_* \theta_x$ y m_x sobre $S^1 \subset \mathbb{C}P^1$ por $m_x := \tau_* \hat{\mu}_x$. Para cada $y \in \mathbb{H}^+$ definimos la medida $\tilde{\mu}_y$ sobre $\mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1$ por $\tilde{\mu}_y := (\pi \circ \tilde{\sigma}^+ \circ \gamma_*)_* \theta_x$.

Observemos que:

$$\hat{\mu}_x = (\pi \circ \tilde{\sigma}^+)_* \theta_x \quad \text{y} \quad \tilde{\mu}_y = (\pi \circ \tilde{\sigma}^+ \circ \gamma_*)_* \theta_x.$$

Por el Lema 7.3 de [3] tenemos que $\tilde{\sigma}^\pm : T^1 \mathbb{H}^+ \rightarrow T^1 \mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1$ descienden a secciones $\sigma^\mp : T^1 S \rightarrow T^1 \mathcal{F}_\rho$ respectivamente para $\rho = \rho_{can}$ y en [3] prueban que σ^+ es una sección de mayor expansión y σ^- es una sección de mayor contracción.

Denotamos por S_x^1 al conjunto $\{x\} \times S^1 \subset \mathbb{D} \times \mathbb{C}P^1$. Las medidas $\{\hat{\mu}_x : x \in \mathbb{D}\}$ tienen soporte en S_x^1 , $\hat{\mu}_0$ es la medida de ángulo y para cada $\gamma \in M(\mathbb{D})$ se tiene $\gamma^* \hat{\mu} = \hat{\mu}_{\gamma^{-1}(x)}$.

Si $x \in \mathbb{D}$, $\gamma \in M(\mathbb{D})$ y $\xi \in \partial \mathbb{D}$ definimos

$$|\gamma'_x(\xi)| = \lim_{\eta \rightarrow \xi} \frac{d_x(\gamma(\xi), \gamma(\eta))}{d_x(\xi, \eta)}.$$

Las medidas $m_{\gamma x}$ y m_x sobre S^1 se derivan de las métricas $d_{\gamma x}$ y d_x sobre S^1 respectivamente, tomando una sucesión de intervalos abiertos $\{I_n \subset S^1 : n \in \mathbb{N}\}$ con $\text{diam}(I_n) \rightarrow 0$ con respecto a la métrica d_0 y que contengan a

ξ vemos que las derivadas de Radon-Nikodym de $m_{\gamma x}$ y m_x están dadas por la siguiente fórmula:

$$\frac{dm_{\gamma x}}{dm_x}(\xi) = |\gamma'_x(\xi)|$$

para $\xi \in \mathbb{S}^1$.

Proposición 2.3. Sean $x, x' \in \mathbb{D}$, entonces

$$\frac{dm_{x'}}{dm_x}(\xi) = \frac{P(x', \xi)}{P(x, \xi)}$$

Prueba. La prueba de este resultado se sigue del Lema 3.4.2., pág. 55 de [15]. \square

Los siguientes dos teoremas junto con el Teorema 1.7 nos permitirán relacionar las medidas de Patterson-Sullivan con las medidas $\{\mu_x : x \in S\}$. Recordemos que un Grupo Fuchsiano del primer tipo $\Gamma \subset M(\mathbb{D})$ es un grupo Fuchsiano con $\Lambda(\Gamma) = \partial\mathbb{D}$, recordemos también que estos son grupos de tipo divergente y que el exponente de convergencia asociado a la serie de Poincaré $\delta(\Gamma)$ es 1 (Ref. [15]). Ahora veremos que las medidas de ángulo m_x definen una densidad conforme Γ -invariante de dimensión 1 para un grupo Fuchsiano $\Gamma \subset M(\mathbb{D})$ del primer tipo.

El siguiente teorema es muy importante en este trabajo ya que lo utilizamos para introducir las medidas de Patterson-Sullivan en las foliaciones de Riccati. Veremos en este que la familia de medidas de ángulo es la única densidad conforme Γ -invariante de dimensión 1 para grupos uniformizantes de superficies de Riemann de tipo finito.

Teorema 2.4. Sean S una superficie de Riemann hiperbólica de área finita y Γ un grupo uniformizante de S , entonces la familia de medidas

$$\{m_x : x \in \mathbb{D}\}$$

es la única densidad conforme Γ -invariante de dimensión 1.

Prueba. El grupo uniformizante de una superficie de Riemann de área finita es un grupo discreto geoméricamente finito, del Teorema 9.3.6 de [15] tenemos que la dimensión de Hausdorff del conjunto límite es igual al

exponente crítico de la serie de Poincaré, esto es, $\delta(\Gamma) = 1$. Esta familia de medidas tiene soporte en el conjunto límite. Por la Proposición 2.3 estas medidas son absolutamente continuas una de la otra y la derivada de Radon-Nikodym esta dada por

$$\frac{m_x}{m_{x'}}(\xi) = \frac{P(x, \xi)}{P(x', \xi)}$$

y la Γ -invarianza se cumple. Por lo tanto esta familia define una densidad conforme Γ -invariante de dimensión 1. Por la Proposición 1.5 tenemos que el conjunto límite cónico tiene medida de ángulo positiva y por el Teorema 1.7 tenemos que esta acción es ergódica sobre el conjunto límite cónico, por lo tanto este conjunto tiene medida total con respecto a la medida de ángulo. Luego por el Teorema 1.6 tenemos que la familia de medidas

$$\{m_x : x \in \mathbb{D}\}$$

es la única densidad conforme Γ -invariante de dimensión 1. \square

Mediante el siguiente teorema identificamos completamente la familia de medidas $\{\mu_x : x \in S\}$ cuando $\rho = \rho_{can}$.

Teorema 2.5. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica de área finita y $\rho : (\pi_1(S, z_0)) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la representación canónica. Las medidas

$$\{\mu_x : x \in S\}$$

son las medidas

$$\{\tilde{\mu}_x : x \in R_0\}$$

en el sistema de coordenadas $R_0 \times \mathbb{C}P^1$.

Prueba. Inmediata de la definiciones de $\sigma^+ : T^1S \rightarrow \text{Proy}(E)$ y de las medidas $\tilde{\mu}_x$. \square

El haz M_ρ sobre S tiene un sub-haz $M_\rho^{\mathbb{R}}$ con fibra $\mathbb{R}P^1$. Para cada $x \in S$ denotamos por $\mathbb{R}P_x^1 \subset \mathbb{C}P_x^1$ la fibra del haz $M_\rho^{\mathbb{R}}$ sobre $x \in S$.

Corolario 2.6. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica de área finita y $\rho : (\pi_1(S, z_0)) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la representación canónica. Las medidas

$$\{\mu_x : x \in S\}$$

restringidas a su soporte $\mathbb{R}P_x^1$ son absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue.

En el capítulo 3 veremos que el Corolario 2.6 está muy lejos de cumplirse para deformaciones casi-conformes no triviales de la representación canónica.

2.5 MEDIDAS DE PATTERSON-SULLIVAN EN LAS ECUACIONES DE RICCATI.

En esta sección daremos las relaciones entre las medidas $\{\mu_x : x \in S\}$ y las medidas de Patterson-Sullivan en el caso $\rho = \rho_{can}$.

Teorema 2.7. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica de tipo finito y sea $\rho_{can} : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la representación canónica. Entonces la familia de medidas

$$\{\mu_x : x \in S\}$$

es la familia de medidas de Patterson-Sullivan.

Prueba. Sea $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S$ un cubriente universal y $\Gamma \subset M(\mathbb{D})$ el grupo de transformaciones de cubierta. Por lo tanto Γ es un grupo Fuchsiano del primer tipo. El exponente de convergencia asociado a la serie de Poincaré de un grupo Fuchsiano del primer tipo es 1 (Ref. [15]). Por los Teoremas 2.4 y 2.5 la familia de medidas $\{m_x : x \in \mathbb{D}\}$ define una densidad conforme Γ -invariante de dimensión 1 y esta es única, donde Γ es un grupo Fuchsiano que uniformiza a la superficie S . Las medidas de Patterson-Sullivan asociadas a Γ definen una densidad conforme (Ref. [15]). Por el Teorema 2.5 la familia de medidas $\{\mu_x : x \in S\}$ en el sistema de coordenadas $R_0 \times \mathbb{C}P^1$ se ve como $\{\tilde{\mu}_x : x \in R_0\}$ y $\{\tau_*\tilde{\mu}_x : x \in R_0\}$ coincide con las medidas $\{\gamma_*m_x : x \in R_0\}$, por lo tanto las medidas $\{\mu_x : x \in S\}$ se construyen de la misma manera que las medidas de Patterson-Sullivan. \square

3 Deformación de la estructura holomorfa de la superficie en la base S .

En este capítulo probamos que dada una representación inyectiva $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ con S compacta y $S \sim_{Top} \mathbb{H}^+ / \rho(\pi_1(S, z_0))$ existe una única estructura holomorfa h sobre la superficie en la base S_{Top} tal que la familia de medidas $\{\mu_{\rho, x} : x \in S\}$ obtenidas al hacer la desintegración de μ_ρ sobre $M_\rho^{\mathbb{R}}(S_h)$ es una familia de medidas que es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

3.1 LA REPRESENTACIÓN CASI-CANÓNICA.

Sea $w : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ una aplicación casi-conforme y sea $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ una representación del grupo fundamental de una superficie de Riemann hiperbólica de área finita S . Diremos que w es compatible con ρ si $w_*(\rho(\pi_1(S, z_0))) \subset PSL(2, \mathbb{C})$ (Ref. [14]) donde $w_*\gamma : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ está dada por $w_*\gamma(z) = w \circ \gamma \circ w^{-1}(z)$ para cada $\gamma \in PSL(2, \mathbb{C})$. Sea $w_*\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ la representación que hace que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S, z_0) & \xrightarrow{w_*\rho} & PSL(2, \mathbb{C}) \\ & \searrow \rho & \uparrow w_* \\ & & PSL(2, \mathbb{C}) \end{array}$$

conmute. Si w es compatible con ρ_{can} diremos que la representación $\rho_w := w_*\rho_{can}$ es una representación casi-canónica.

Sea T el conjunto $T := T^1\mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1$ y sean $w : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ una aplicación casi-conforme compatible con ρ_{can} y $\rho_w = w_*\rho_{can}$. Consideremos el cociente de T por la acción del grupo fundamental asociada a ρ_w $(v, z) \mapsto (\rho_{can}[\gamma]_*(v), \rho_w[\gamma](z))$. El cociente de T por esta acción es un haz proyectivo $T_w \rightarrow T^1S$ con fibra $\mathbb{C}P^1$ con la cual es isomorfo de manera canónica al haz $\text{Proy}(E_w) \rightarrow T^1S$, sean $\phi : T_w \rightarrow \text{Proy}(E_w)$ el isomorfismo canónico y $\pi_w : T_w \rightarrow T^1S$ la proyección cociente. Denotamos por

$\tilde{P}_w : T \rightarrow \text{Proy}(E_w)$ a la aplicación definida por $\tilde{P}_w := \phi \circ \pi_w$. El homeomorfismo $\Psi_w : T \rightarrow T$ definido por $(v, z) \mapsto (v, w(z))$ e identifica clases de equivalencia definidas por las acciones del grupo fundamental asociadas ρ_{can} y ρ_w respectivamente y desciende a los homeomorfismos H y W absolutamente continuos, como lo indicamos en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{\tilde{P}_{can}} & \text{Proy}(E_{can}) & \xrightarrow{\tilde{q}_{can}} & M_{can} \\ \Psi_w \downarrow & & H \downarrow & & W \downarrow \\ T & \xrightarrow{\tilde{P}_w} & \text{Proy}(E_w) & \xrightarrow{\tilde{q}_w} & M_w. \end{array}$$

Luego, mediante los isomorfismos canónicos entre los haces $T^1\mathcal{F}_w \rightarrow T^1S$ y $\text{Proy}(E_w) \rightarrow T^1S$ obtenemos el diagrama conmutativo:

$$(3.0) \quad \begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{P_{can}} & T^1\mathcal{F}_{\rho_{can}} & \xrightarrow{\tilde{q}_{can}} & M_{can} \\ \Psi_w \downarrow & & \tilde{W} \downarrow & & W \downarrow \\ T & \xrightarrow{P_w} & T^1\mathcal{F}_{\rho_w} & \xrightarrow{\tilde{q}_w} & M_w, \end{array}$$

donde \tilde{W} es un homeomorfismo que es absolutamente continuo.

Al homeomorfismo $W : M_{can} \rightarrow M_w$ le llamaremos *homeomorfismo casi-conforme foliado asociado a w* y al homeomorfismo $\tilde{W} : T^1\mathcal{F}_{\rho_{can}} \rightarrow T^1\mathcal{F}_{\rho_w}$ lo llamaremos *el levantamiento del homeomorfismo casi-conforme foliado $W : M_{can} \rightarrow M_w$* .

Lema 3.1. *El homeomorfismo casi-conforme foliado $W : M_{can} \rightarrow M_w$ asociado a w y su levantamiento $\tilde{W} : T^1\mathcal{F}_{\rho_{can}} \rightarrow T^1\mathcal{F}_{\rho_w}$ identifican isométricamente hojas de las foliaciones \mathcal{F}_{can} y $T^1\mathcal{F}_{can}$ con hojas de las foliaciones \mathcal{F}_w y $T^1\mathcal{F}_w$ respectivamente.*

Prueba. Se sigue inmediatamente de la definición de Ψ_w , \tilde{W} y W . \square

Sean Φ_{can} y Φ_w los flujos geodésicos en las hojas de las foliaciones $T^1\mathcal{F}_{can}$ y $T^1\mathcal{F}_w$ respectivamente.

De la definición de \tilde{W} y W tenemos que el diagrama

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccccc} T^1\mathcal{F}_{\rho_{can}} & \xrightarrow{\tilde{q}_{can}} & M_{can} & & \\ & \searrow \tilde{p}_{can} & & & \\ & & T^1S & \xrightarrow{q} & S \\ \tilde{W} \downarrow & & \tilde{p}_w \nearrow & & p_{can} \nearrow \\ T^1\mathcal{F}_{\rho_w} & \xrightarrow{\tilde{q}_w} & M_w & & \\ & & & & \downarrow W \\ & & & & M_w \end{array}$$

conmuta.

Proposición 3.2. *El levantamiento \tilde{W} del homeomorfismo casi-conforme foliado W asociado a w conjugua los flujos geodésicos foliados en $T^1\mathcal{F}_{\rho_{can}}$ y $T^1\mathcal{F}_{\rho_w}$, es decir,*

$$\Phi_w = \tilde{W} \circ \Phi_{can} \circ \tilde{W}^{-1}.$$

Prueba. Inmediata del Lema 3.1. \square

Por la Proposición 3.2 tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^1\mathcal{F}_{\rho_{can}} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\Phi_{can}} & T^1\mathcal{F}_{\rho_{can}} \\ \tilde{W} \times Id \downarrow & & \downarrow \tilde{W} \\ T^1\mathcal{F}_{\rho_w} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\Phi_w} & T^1\mathcal{F}_{\rho_w} \end{array}$$

conmuta. Como consecuencia inmediata de esto, tenemos que para la representación casi-canónica ρ_w existen secciones de mayor expansión y de mayor contracción continuas $\sigma_w^\pm : T^1S \rightarrow T^1\mathcal{F}_{\rho_w}$.

Utilizaremos el siguiente lema para demostrar que $\tilde{\mu}_w = W_* \tilde{\mu}_{can}^-$ donde W es el homeomorfismo casi-conforme foliado asociado a w .

Lema 3.3. *El levantamiento \tilde{W} del homeomorfismo casi-conforme foliado W envía σ_{can}^\pm a σ_w^\pm , es decir, $\sigma_w^\pm = \tilde{W} \circ \sigma_{can}^\pm$.*

Prueba. El homeomorfismo \tilde{W} envía puntos límite en puntos límite, por lo tanto envía el atractor para el flujo Φ_{can} en el atractor para el flujo Φ_w . \square

Por el lema 3.3 tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^1\mathcal{F}_{\rho_{can}} & \xrightarrow{\widetilde{W}} & T^1\mathcal{F}_{\rho_w} \\ & \searrow \sigma_{can}^\pm & \nearrow \sigma_w^\pm \\ & T^1S & \end{array}$$

conmuta.

Dos medidas λ, μ sobre un espacio de medida E se dicen *singulares* y se denota $\lambda \perp \mu$ si existen dos conjuntos medibles E_1, E_2 disjuntos cuya unión es E tales que $\lambda(E_1) = \lambda(E)$ y $\mu(E_2) = \mu(E)$.

Usaremos las notaciones μ_{can} y μ_w para las medidas $(\widetilde{q}_{can})_*\sigma_{can}^\pm$ y $(\widetilde{q}_w)_*\mu_w^\pm$ sobre $M_{can}(S)$ y $M_w(S)$ respectivamente.

Teorema 3.4. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica de área finita y sea $\rho_w : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ una representación casi-canónica. Entonces la medida μ_w en $M_{\rho_w}(S)$ se desintegra de la siguiente manera:*

- (1) $p_*(\mu_w) = \xi$, la medida de área hiperbólica sobre S .
- (2) La desintegración de μ_w sobre $x \in S_{can}$ es la medida $\mu_{w,x} = w_*\mu_{can,x}$ con soporte en el conjunto límite $w(\mathbb{RP}_x^1) \subset M_{w,x}$.
- (3) Si S es compacta, w es una aplicación casi-conforme que no es una transformación de Moebius y $\rho_w(\pi_1(S, z_0)) \subset PSL(2, \mathbb{R})$, entonces las medidas $\mu_{can,x}|_{\mathbb{RP}_x^1}$ y $\mu_{w,x}|_{\mathbb{RP}_x^1}$ son singulares sobre \mathbb{RP}_x^1 . Por lo tanto, las medidas $\mu_{w,x}|_{\mathbb{RP}_x^1}$ y la medida de Lebesgue son singulares sobre \mathbb{RP}_x^1 .

Prueba. El diagrama (3.1) conmuta, entonces $\widetilde{W} \circ q_w = q_{can} \circ W$. Luego

$$(\widetilde{W} \circ q_w)_*\mu_{can}^+ = (q_{can} \circ W)_*\mu_{can}^+,$$

de los Lemas 3.3 y 1.2 tenemos $\widetilde{W}_*\mu_{can}^+ = \mu_w$, así $(q_w)_*\mu_w^+ = W_*\mu_{can}$. Esto es,

$$\mu_w = W_*\mu_{can}.$$

Sea $f : M_w \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua de soporte compacto, entonces $W^{-1} \circ f : M_w \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua de soporte compacto y de la Proposición 2.2 tenemos

$$\int_{M_w} W^{-1} \circ f d\mu_{can} = \int_S \left(\int_{M_{w,x}} W^{-1} \circ f d\mu_{w,x} \right) d\xi,$$

entonces

$$\int_{M_{can}} f dW_*\mu_{can} = \int_S \left(\int_{M_{w,x}} f dW_*\mu_{can,x} \right) d\xi.$$

Esto es $\mu_{w,x} = W_*\mu_{can,x}$.

Para probar la singularidad de las medidas sólo es necesario probar que si w no es una transformación de Moebius y $h = w|_{\mathbb{RP}^1} : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ entonces $h_*\theta \perp \theta$. Por el Teorema 1.12 tenemos que h no es absolutamente continua, entonces existe un conjunto $B \subset \mathbb{RP}^1$ con $\theta(B) > 0$ y $\theta(w(B)) = 0$. Sea Γ el grupo uniformizante de S , por el Corolario 2.6 tenemos que $\mu_{can,x}$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Por el Teorema 2.4 tenemos que existe una única densidad conforme Γ -invariante de dimensión 1 y por los Teoremas 2.5 y 2.7 tenemos que las medidas $\{\mu_x : x \in S\}$ en sistemas de coordenadas definen una densidad conforme Γ -invariante de dimensión 1. Por el Teorema 1.7 tenemos que la acción de Γ es ergódica con respecto a la medida $\mu_{can,x}$, por lo tanto las medidas $\{\mu_x : x \in S\}$ corresponden a esta densidad. Sea $A = \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(B)$, entonces A es un conjunto Γ -invariante y como $\mu_{can,x}(A) > 0$ por ergodicidad tenemos que $\mu_{can,x}(A) = 1$. La medida $h_*\theta$ tiene soporte en el conjunto $w(A)$, pero este conjunto tienen medida de Lebesgue $\theta(w(A)) = 0$ ya que $w(A) = \cup_{\gamma \in \Gamma} w_*(\gamma)(w(B))$ donde $w_*(\gamma) \subset PSL(2, \mathbb{R})$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Tomamos $E_1 = A$ y $E_2 = \mathbb{RP}^1 \setminus A$, entonces tenemos que $h_*\theta \perp \theta$. \square

También $\mu_{can,x}$ y $\mu_{w,x}$ denotan las desintegraciones de μ_w y μ_{can} respectivamente en la fibra \mathbb{CP}_x^1 para $x \in S$, llamaremos a $\mu_{can,x}$ y $\mu_{w,x}$ las medidas asociadas a ρ_{can} y ρ_w respectivamente.

3.2 DEFORMACIÓN DE LA ESTRUCTURA HOLOMORFA DE S .

En esta sección fijaremos una representación $\rho : \pi_1(S) \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) \subset SL(2, \mathbb{C})$ y estudiaremos la desintegración de las medidas $\widetilde{q}_*\mu_w^+$ al tener diferentes estructuras holomorfas en la superficie topológica base S_{Top} , veremos que existe una única estructura holomorfa en S_{Top} tal que la medida $\mu_{\rho,x}$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $M_{\rho,x}^{\mathbb{R}}$.

Enfatizamos que dada una representación $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \subset PSL(2, \mathbb{C})$ con $S \sim_{Top} \mathbb{D}/\rho(\pi_1(S))$ las medidas obtenidas al hacer la desintegración dependen de la estructura holomorfa de la superficie base S_{Top} . Cuando sea necesario denotaremos por $M_\rho(S)$ al haz sobre S construido mediante la suspensión de la representación ρ , análogamente para las foliaciones y los sub-haces asociados.

Dada una superficie de Riemann S denotamos por S_{Top} a la clase de equivalencia topológica de S .

Teorema 3.5. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica compacta y sea $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \subset PSL(2, \mathbb{C})$ una representación con $S \sim_{Top} \mathbb{H}^+/\rho(\pi_1(S))$, entonces existe una única estructura holomorfa en S_{Top} que hace de S_{Top} una superficie de Riemann S_* tal que $q_*\mu_\rho^+$ en $M_\rho^{\mathbb{R}}(S_*)$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.*

Prueba. Sean $\Gamma = \rho(\pi_1(S))$ y S_* la superficie de Riemann \mathbb{D}/Γ . Sea S' una superficie de Riemann con grupo uniformizante Γ' y $S' \sim_{Top} S_*$. Por la Proposición 1.9 existe una aplicación casi-conforme

$$w : S \rightarrow S'$$

y ésta aplicación la podemos levantar a los cubrientes mediante la fórmula

$$w(\gamma z) = \alpha(\gamma)w(z)$$

para $\gamma \in \Gamma$, donde $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ es el isomorfismo que envía a los generadores de Γ asociados a una región fundamental R en los generadores de Γ' asociados a la región fundamental imagen $R' = w(R)$. Luego mediante la inclusión y reflexiones la podemos extender a una aplicación $w : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$.

La representación $w_*\rho$ es la representación canónica de S' . El homeomorfismo casi-conforme foliado

$$W : M_{can}(S') \rightarrow M_\rho(S')$$

asociado a la aplicación casi-conforme w^{-1} satisface, por el Lema 3.5 que

$$W_*\mu_{can} = \mu_\rho,$$

por el Corolario 2.6 tenemos que la medida μ_{can} sobre $M_{can}^{\mathbb{R}}(S')$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Por lo tanto, la medida μ_ρ sobre $M_\rho^{\mathbb{R}}(S_w)$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue cuando el homeomorfismo

$$W|_{M_{can}^{\mathbb{R}}(S')} : M_{can}^{\mathbb{R}}(S') \rightarrow M_\rho^{\mathbb{R}}(S')$$

sea absolutamente continuo. Es fácil probar utilizando el Teorema 1.12 que w es una transformación de Moebius si $W|_{M_{can}^{\mathbb{R}}(S')}$ es absolutamente continuo. Entonces si la medida μ_ρ sobre $M_\rho^{\mathbb{R}}(S')$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue tenemos que w es una transformación de Moebius, en este caso S_* y S' son biholomorfas, con lo que probamos el teorema. \square

Corolario 3.6. *Sean S, S' dos superficies de Riemann hiperbólicas compactas, del mismo género $g \geq 2$, las cuales no son biholomorfas y sea $\rho : \pi_1(S, x_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la representación canónica en S , entonces las medidas $\mu_{\rho, x_0}(S)|_{\mathbb{R}P_{x_0}^1}$ y $\mu_{\rho, w(x_0)}(S')|_{\mathbb{R}P_{w(x_0)}^1}$ no son absolutamente continuas cuando $w : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ es una aplicación casi-conforme compatible con ρ , la cual no es una transformación de Moebius y $w_*(\rho(\pi_1(S, x_0))) \subset PSL(2, \mathbb{R})$, más aun,*

$$\mu_{\rho, x_0}(S)|_{\mathbb{R}P_{x_0}^1} \perp \mu_{\rho, w(x_0)}(S')|_{\mathbb{R}P_{w(x_0)}^1}.$$

4 Aproximación de la medida de ángulo en $T_x^1 S$.

En este capítulo veremos que para una superficie de Riemann hiperbólica S de área finita, la medida de ángulo sobre la fibra $T_x^1 S$ del haz tangente unitario $T^1 S \rightarrow S$ se aproxima bien por distribuciones geométricas de direcciones. Para esto utilizaremos resultados de la teoría de medidas de Patterson-Sullivan y los resultados obtenidos al hacer la desintegración de la medida $\tilde{q}_* \mu_{can}^+$. Por lo tanto, en este capítulo suponemos que $\rho = \rho_{can}$.

4.1 INTRODUCCIÓN.

Sea S una superficie de Riemann hiperbólica de área finita y sea $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S$ un cubriente universal de S . Denotamos por G al grupo de transformaciones de cubierta asociadas a π , entonces G es un subgrupo discreto de isometrías hiperbólicas, más aún, G es un grupo Fuchsiano.

Sean $x \in S$, $u \in \pi^{-1}\{x\}$ y $x_0 \in \mathbb{D}$ fijo. Sea $Q : \mathbb{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow T^1 \mathbb{D}$ el encaje definido por la función que asigna a $x \in \mathbb{D} \setminus \{x_0\}$ el vector unitario en $T_x^1 \mathbb{D}$ que dirige a la geodésica en \mathbb{D} que va de x_0 a x , definimos $\psi : \mathbb{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow T^1 S$ por $\psi := \pi_* \circ Q$ como se indica en el siguiente diagrama

(4.1)

$$\begin{array}{ccc} & & T^1 \mathbb{D} \\ & \nearrow Q & \downarrow \pi_* \\ \mathbb{D} \setminus \{x_0\} & \xrightarrow{\psi} & T^1 S \end{array}$$

Como G es un grupo geoméricamente finito tenemos que el exponente de convergencia $\delta(G)$ asociado a la serie de Poincaré de G es 1 y G es un grupo de tipo divergente (Ref. [15]). Para $s > 1$, sea $\eta_{u,s}$ la medida en \mathbb{D} con soporte en la órbita $Gu = \pi^{-1}\{x\}$ de u bajo G definida por

$$\eta_{u,s} := \frac{1}{g_s(u,u)} \sum_{g \in G} e^{-s(u,gu)} \delta_{gu},$$

60

donde (u, gu) denota a la distancia hiperbólica en \mathbb{D} y es la serie de Poincaré

$$g_s(u,u) = \sum_{g \in G} e^{-s(u,gu)}.$$

Sea $\lambda_{x,s}$ la medida en $T_x^1 S$ con soporte en $\psi(Gu) \subset T_x^1 S$ definida por

$$\lambda_{x,s} := \psi_* \eta_{u,s}.$$

Sea λ_x la medida de ángulo en $T_x^1 S$ normalizada para ser una medida de probabilidad. El objetivo de este capítulo es probar para cada $x \in S$ que

$$\lambda_{x,s} \rightarrow \lambda_x \quad \text{cuando} \quad s \rightarrow 1^+.$$

4.2 HOJAS DE FLUJO GEODÉSICO Y ATRACTOR TRANSVERSAL.

Trabajaremos con las proyecciones, sistemas coordenados y medidas definidas en la sección 2.1 del capítulo 2. Supondremos que $\beta : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{D}$ es una transformación de Möbius tal que $\pi^+ = \pi \circ \beta$ donde $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S$ es el cubriente de S dado en la sección anterior y $\pi^+ : \mathbb{H}^+ \rightarrow S$ es el cubriente universal de S dado en el capítulo 2.

Sean $y_0 = \beta^{-1}(x_0)$ y $w = \beta^{-1}(u)$ en \mathbb{H}^+ , podemos suponer que la región fundamental R_0 (del capítulo 2) contiene a w . Sea $i^+ : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{C}P^1$ la inclusión de \mathbb{H}^+ en la línea proyectiva $\mathbb{C}P^1$ y tomamos $\tilde{x} := \Pi(w, i^+(w))$ donde $\Pi : \mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow M_\rho$ es la proyección. Sea $\mathcal{L}_{\tilde{x}}$ la hoja de la foliación \mathcal{F}_ρ de M_ρ que contiene a \tilde{x} , entonces $\mathcal{L}_{\tilde{x}}$ es isomorfa a \mathbb{H}^+ . Denotamos por $e : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathcal{L}_{\tilde{x}}$ al isomorfismo definido por $e(z) = \Pi(z, i^+(w))$, entonces $e(w) = \tilde{x}$. Sea \mathcal{L}_z la hoja $(\tilde{q})^{-1}(\mathcal{L}_{\tilde{x}})$ de la foliación en $T^1 \mathcal{F}_\rho$ obtenida de \mathcal{F}_ρ al hacer imágenes inversas bajo \tilde{q} .

Sea $R : \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\} \rightarrow T^1 \mathcal{F}_\rho$ el encaje radial en la hoja \mathcal{L}_z que asigna al punto $y \in \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\}$ el vector unitario en $\mathcal{L}_z (= T^1 \mathcal{L}_{\tilde{x}})$ sobre $e(y)$ que dirige a la geodésica en $\mathcal{L}_{\tilde{x}}$ de $e(y_0)$ a $e(y)$. Por lo tanto el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & T^1 \mathcal{F}_\rho \\ & \nearrow R & \downarrow \tilde{p} \\ \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\} & \xrightarrow{\psi \circ \beta} & T^1 S \end{array}$$

61

conmuta.

Para cada vector unitario $u \in T_p^1 \mathbb{H}^+$, sea γ_u la geodésica en $\mathbb{H}^+ \subset \mathbb{C}P^1$ (con la métrica hiperbólica) que pasa por el punto p , con vector tangente u y que tiene sus extremo en $\tilde{\sigma}^\pm(u)$ en $\mathbb{R}P^1$. Esto define dos secciones C^∞ $\tilde{\sigma}^\pm : T^1 \mathbb{H}^+ \rightarrow T^1 \mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1$ las cuales descienden a dos secciones de mayor contracción y expansión respectivamente $\sigma^\mp : T^1 S \rightarrow T^1 \mathcal{F}_\rho$ cuando $\rho = \rho_{can}$ (Ref. [3]).

Denotamos por $\varphi^\pm : \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\} \rightarrow T^1 \mathcal{F}_\rho$ a las funciones definidas por $\varphi^\pm := \sigma^\pm \circ \psi \circ \beta$ respectivamente (ψ definido en la sección 4.1). Para ilustrar lo anterior presentamos el diagrama conmutativo:

$$(4.2) \quad \begin{array}{ccc} T^1 \mathcal{F}_\rho & \xrightarrow{\tilde{q}} & M_\rho \\ \uparrow \sigma^\pm & \swarrow \varphi^\pm & \nearrow I \\ \tilde{p} & \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\} & \mathbb{H}^+ \\ \downarrow \tilde{p} & \searrow \psi \circ \beta & \downarrow \pi^+ \\ T^1 S & \xrightarrow{q} & S \end{array}$$

donde $i : \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\} \rightarrow \mathbb{H}^+$ es la inclusión y I es la función e seguida de la inclusión de $\mathcal{L}_{\tilde{x}}$ en M_ρ .

A continuación probamos una proposición fundamental en este trabajo, ya que esta nos permite dar interpretaciones geométricas de las medidas μ_x^+ y μ_x .

Proposición 4.1. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica de área finita y $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la representación canónica. Entonces dado $\epsilon > 0$ tenemos que*

$$d_{T^1 \mathcal{F}_\rho}(R(\gamma w), \varphi^+(\gamma w)) < \epsilon$$

excepto a lo más para un número finito $\gamma \in \Gamma$.

Prueba. Para cada $v \in T^1 \mathbb{H}^+$ sea $i_v : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{C}P^1_v$ el encaje de \mathbb{H}^+ en la recta proyectiva $\mathbb{C}P^1_v = \{v\} \times \mathbb{C}P^1$.

Sea $r : \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\} \rightarrow T^1 \mathbb{H}^+$ el encaje radial desde y_0 , es decir, $r = \beta_* \circ Q \circ \beta$ donde $Q : \mathbb{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow T^1 \mathbb{D}$ es el encaje radial desde x_0 definido en la sección 4.1. Sea $\tilde{R} : \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\} \rightarrow T$ ($T = T^1 \mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1$ como en el capítulo 2) la función definida por $\tilde{R}(z) = (r(z), w)$, entonces para cada $z \in \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\}$ tenemos que $P \circ \tilde{R}(z) = R(z)$ donde $P : T \rightarrow T^1 \mathcal{F}_\rho$ es la proyección definida en el capítulo 2. Sea $\tilde{\psi} : \Gamma(R_0) \setminus \{y_0\} \rightarrow T^1 R_0$ la función $\tilde{\psi} := h_0 \circ \psi \circ \beta$ y sean $\tilde{\varphi}^\pm : \Gamma(R_0) \setminus \{y_0\} \rightarrow T^1 R_0 \times \mathbb{C}P^1$ las funciones definidas por $\tilde{\varphi}^\pm := \Phi_0 \circ \varphi^\pm$, entonces $\varphi^\pm = P \circ \tilde{\varphi}^\pm$.

El diagrama (4.2) en sistemas de coordenadas nos queda de la siguiente manera:

$$(4.3) \quad \begin{array}{ccc} T^1 \mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1 \\ \uparrow \tilde{\sigma}^\pm & \swarrow \tilde{\varphi}^\pm & \nearrow \phi_0 \circ I \\ \pi_2 & \Gamma(R_0) \setminus \{y_0\} & \Gamma(R_0) \\ \downarrow \tilde{\sigma}^\pm & \searrow \tilde{\psi} & \downarrow \pi_3 \\ T^1 \mathbb{H}^+ & \xrightarrow{\pi_4} & \mathbb{H}^+ \end{array}$$

donde $\Gamma(R_0) = \cup_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma \subset \mathbb{H}^+$ y las π 's son las proyecciones canónicas.

Sea $\tilde{\sigma} : \overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{y_0\} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ la extensión continua de la función que envía a z al punto en $\mathbb{R}P^1$, extremo de la geodésica hiperbólica en \mathbb{H}^+ que pasa por y_0 y z . Sea $\sigma : \overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ definida de la misma manera que $\tilde{\sigma}$ pero con w en lugar de y_0 .

Queremos probar que en el sistema de coordenadas $T^1 R_0 \times \mathbb{C}P^1$ el punto $R(\gamma y_0)$ es un punto en el segmento geodésico en $\mathbb{H}^+_v \subset \mathbb{C}P^1_v$ de $i_v(w)$ a $\tilde{\sigma}^+(v)$ donde $v = (\gamma^{-1})_* \circ r(\gamma w)$, y utilizando esto veremos que los puntos $R(\gamma y_0)$ y $\varphi^+(\gamma w)$ están cercanos para casi todo $\gamma \in \Gamma$, es decir,

$$d_{T^1 \mathcal{F}_\rho}(R(\gamma y_0), \varphi^+(\gamma w))$$

es pequeño salvo a lo más para un número finito de elementos $\gamma \in \Gamma$. Luego veremos que los puntos $R(\gamma w)$ y $R(\gamma y_0)$ también están cercanos para casi todo $\gamma \in \Gamma$, es decir,

$$d_{T^1 \mathcal{F}_\rho}(R(\gamma w), R(\gamma y_0))$$

también es pequeño salvo a lo más para un número finito de elementos $\gamma \in \Gamma$, con esto concluiremos la prueba.

Sea E_x la fibra $(p \circ \tilde{q})^{-1}\{x\} \subset T^1\mathcal{F}_\rho$ y sea $F_w = \Phi_0(E_x) \subset T$. Considerado a Z como subespacio métrico de $T^1\mathcal{F}_\rho$ tenemos que si inducimos sobre F_w la métrica de Z mediante

$$\Phi_0 : Z \rightarrow R_0 \times \mathbb{C}P^1 \times S^1$$

entonces F_w tiene la métrica producto de la métrica de Fubini-Study \langle, \rangle_x sobre $\mathbb{C}P^1_x$ y la métrica de ángulo θ_w sobre $S^1_w \subset T^1\mathbb{H}^+$.

De la métrica de Fubini-Study \langle, \rangle_x sobre $\mathbb{C}P^1_x$, mediante la inclusión $i : \overline{\mathbb{H}^+} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ inducimos una métrica m en $\overline{\mathbb{H}^+}$ con la cual $\overline{\mathbb{H}^+}$ es un espacio métrico compacto. Sea $s : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ la función

$$s(r) = \max\{m(y, \sigma(y)) : y \in \overline{\mathbb{H}^+} \setminus D_r(y_0)\},$$

entonces s es continua, positiva con $\lim_{r \rightarrow \infty} s(r) = 0$.

Sea $\epsilon > 0$, escogemos $r > 0$ tal que $s(r) < \frac{\epsilon}{2}$ y $m(\gamma y_0, \gamma w) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma y_0 \in \overline{\mathbb{H}^+} \setminus D_r(y_0)$.

Sean $v_1 = r(\gamma w)$ y $v_2 = (\gamma^{-1})_*v_1$. El punto γw esta en el segmento geodésico de y_0 a $\tilde{\sigma}(\gamma w)$ en \mathbb{H}^+ , entonces $(i_{v_1})_*v_1$ es el vector en $T\mathbb{C}P^1_{v_1}$ que es el vector unitario en $T^1\mathbb{H}^+_{v_1}$ que dirige a la geodésica en $\mathbb{H}^+_{v_1}$ de $i_{v_1}(y_0)$ a $\tilde{\sigma}^+(v_1)$, por lo tanto el punto $i_{v_1}(\gamma w)$ esta en el segmento geodésico de $i_{v_1}(y_0)$ a $\tilde{\sigma}^+(v_1)$ en $T^1\mathbb{H}^+_{v_1}$. Por el Lema 7.3 de [3] tenemos que las secciones $\tilde{\sigma}^\pm$ son invariantes bajo $PSL(2, \mathbb{R})$, entonces el punto $i_{v_2}(\gamma^{-1}y_0)$ esta en el segmento geodésico en $\mathbb{H}^+_{v_2}$ de $i_{v_2}(w)$ a $\tilde{\sigma}^+(v_2) = \tilde{\varphi}^+(\gamma w)$. Entonces tenemos que en F_w se verifican las igualdades:

$$i_{v_2}(\sigma(\gamma^{-1}y_0)) = \tilde{\sigma}^+(v_2) = \tilde{\varphi}^+(\gamma w)$$

y

$$\begin{aligned} i_{v_2}(\gamma^{-1}w) &= (v_2, \gamma^{-1}w) = \Phi_0 \circ P((\gamma^{-1})_*v_1, \gamma^{-1}w) = \Phi_0 \circ P(v_1, w) \\ &= \Phi_0 \circ P(r(\gamma w), w) = \Phi_0 \circ P \circ \tilde{R}(\gamma w) \\ &= \Phi_0 \circ R(\gamma w). \end{aligned}$$

Entonces si $\gamma^{-1}w \in \mathbb{H}^+ \setminus D_r(y_0)$ tenemos que

$$\begin{aligned} d_{F_w}(\Phi_0 \circ R(\gamma w), \tilde{\varphi}^+(\gamma w)) &\leq d_{F_w}(i_{v_2}(\gamma^{-1}w), i_{v_2}(\gamma^{-1}y_0)) \\ &\quad + d_{F_w}(i_{v_2}(\gamma^{-1}y_0), \tilde{\varphi}^+(\gamma^{-1}w)) \\ &\leq m(\gamma^{-1}w, \gamma^{-1}y_0) + m(\gamma^{-1}y_0, \sigma(\gamma^{-1}y_0)) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + s(r) \leq \epsilon, \end{aligned}$$

ya que $m = i_{v_2}^*d_{F_w}$. Como $P|_{F_w} : F_w \rightarrow F_x$ es una isometría (donde $P : T \rightarrow T^1\mathcal{F}_\rho$ es la proyección) y $P \circ \tilde{\varphi}^+(\gamma w) = \varphi^+(\gamma w)$ para todo $y \in \Gamma\{R_0\} \setminus \{y_0\}$ tenemos

$$d_{T^1\mathcal{F}_\rho}(R(\gamma w), \varphi^+(\gamma w)) = d_{F_w}(\Phi_0 \circ R(\gamma w), \tilde{\varphi}^+(\gamma w)) < \epsilon$$

para todo $\{\gamma \in \Gamma : \gamma^{-1}w \in \mathbb{H}^+ \setminus D_r(y_0)\}$, y el complemento en Γ de este conjunto claramente es finito. \square

Observemos que la Proposición 4.1 dice que en el caso $\rho = \rho_{can}$ dado $\epsilon > 0$ existe a lo más un número finito de elementos $\gamma \in \Gamma$ tales que

$$d_{T^1\mathcal{F}_\rho}(R(\gamma w), \varphi^+(\gamma w)) \geq \epsilon$$

y como el levantamiento de un homeomorfismo casi-conforme foliado asociado a una aplicación $w : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ conjuga los flujos (capítulo 3) tenemos que esta proposición también es válida para deformaciones de la representación canónica. El caso de una representación en un grupo Schottky lo damos en el capítulo 5.

4.3 MEDIDAS ASOCIADAS A LA INTERSECCIÓN DE HOJAS Y FIBRAS.

Sea $H_x : M_{\rho,x} \rightarrow M_{\rho,x}$ el grupo de holonomía de \mathcal{F}_ρ . Como

$$\Gamma := \rho_{can}(\pi_1(S, x)) \subset PSL(2, \mathbb{R})$$

es un grupo de tipo finito tenemos que el exponente de convergencia $\delta(\Gamma)$ asociado a la serie de Poincaré de Γ es 1 y Γ es un grupo de tipo divergente.

Denotamos por \hat{x} al punto $\phi_0(\tilde{x})$ en $\mathbb{C}P_w^1 = \{w\} \times \mathbb{C}P^1$. Para $s > 1$ definimos las medidas

$$\theta_{\hat{x},s} = \frac{1}{g_s(\tilde{x}, \tilde{x})} \sum_{\alpha \in H_x} e^{-s(\tilde{x}, \alpha\tilde{x})} \delta_{\phi_0(\alpha\tilde{x})}$$

y

$$\mu_{\hat{x},s} := \frac{1}{g_s(\tilde{x}, \tilde{x})} \sum_{\alpha \in H_x} e^{-s(\tilde{x}, \alpha\tilde{x})} \delta_{\sigma \circ \phi_0(\alpha\tilde{x})}$$

en donde

$$g_s(\tilde{x}, \tilde{x}) := \sum_{\alpha \in H_x} e^{-s(\tilde{x}, \alpha\tilde{x})},$$

$(\tilde{x}, \alpha\tilde{x})$ denota a la distancia hiperbólica en la hoja $\mathcal{L}_{\tilde{x}}$ del punto \tilde{x} al punto $\alpha\tilde{x}$.

Notemos que $\theta_{\hat{x},s}$ es una medida con soporte en la órbita de \hat{x} bajo el grupo $(\phi_0)_* H_x$ ($\approx \Gamma$ actuando en $\{w\} \times \mathbb{C}P^1$), y que las medidas $\Pi_* \theta_{\hat{x},s}$, $\Pi_* \mu_{\hat{x},s}$ en M_ρ no depende de la región fundamental R_0 escogida.

Definimos las medidas:

- (1) $\eta_{w,s} = \beta^* \eta_{u,s}$ en \mathbb{H}^+ con soporte en la órbita de k bajo Γ , donde $\eta_{u,s}$ es la medida de la teoría de medidas de Patterson-Sullivan definida en la sección 4.1,
- (2) $\lambda_{x,s} := \psi_* \eta_{u,s}$ en $T^1 S$ con soporte $T_x^1 S$,
- (3) $\mu_{x,s}^- := \varphi_* \eta_{u,s}$ en $T^1 \mathcal{F}_\rho$ con soporte $\sigma^-(T_x^1 S)$,
- (4) $\mu_{x,s}^+ := \varphi_* \eta_{u,s}$ en $T^1 \mathcal{F}_\rho$ con soporte $\sigma^+(T_x^1 S)$,
- (5) $\vartheta_{x,s} := R_* \eta_{u,s}$ en $T^1 \mathcal{F}_\rho$ con soporte $R(\mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\}) \cap (\tilde{p})^{-1}(T_x^1 S) \subset \mathcal{L}_z$,
- (6) $\mu_{x,s} := \tilde{q}_* \mu_{x,s}^+$ en M_ρ cuyo soporte es el conjunto $\mathbb{R}P_x^1$ y
- (7) $\theta_{x,s} := \tilde{q}_* \vartheta_{x,s}$ en M_ρ cuyo soporte es $\mathcal{L}_{\tilde{x}} \cap M_{\rho,x}$.

Notemos que:

$$\begin{aligned} \mu_{x,s}^\pm &= (\sigma^\pm \circ \psi)_* \eta_{u,s} = \sigma_*^\pm \psi_* \eta_{u,s} \\ &= \sigma_*^\pm \lambda_{x,s}, \end{aligned}$$

como mencionamos en el capítulo 2

$$\mu_{x,s} = \tilde{q}_* \mu_{x,s}^-$$

y también notemos que $\theta_{x,s} = \Pi_* \theta_{\hat{x},s}$, $\mu_{x,s} = \Pi_* \mu_{\hat{x},s}$.

Probaremos un Lema con el cual podemos aproximar la medida μ_x mediante medidas (de Patterson-Sullivan modificadas) con soporte en la fibra $\mathbb{R}P_x^1$ del sub-haz $M_\rho^{\mathbb{R}P^1}$.

Lema 4.2. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica de área finita y $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la representación canónica. Sea $\{s_n\}$ una sucesión de números reales $s_n \rightarrow 1^+$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\hat{x},s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{\hat{x},s_n}$$

en la convergencia débil.

Prueba. Utilizaremos notación usada en la prueba de la Proposición 4.1. Si $\pi_2 : \mathbb{D} \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ denota la proyección canónica entonces tenemos $(\pi_2)_* \theta_{\hat{x},s_n} = i_* \eta_{u,s_n}$ y $(\pi_2)_* \mu_{\hat{x},s_n} = i_* \sigma_* \eta_{u,s_n}$, donde $i : \overline{\mathbb{H}^+} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ es la inclusión. Entonces es suficiente probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{u,s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_* \eta_{u,s_n}.$$

Sea $f : \overline{\mathbb{H}^+} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con soporte compacto y sean $\epsilon, \delta > 0$ tales que si $x, y \in \overline{\mathbb{H}^+}$ y $m(x, y) < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Sea $r > 0$ tal que si $s(r) < \delta$ y sea $s > 1$ un número real tal que

$$\int_{D_r(y_0)} M_f d\eta_{u,s} < \epsilon$$

donde $M_f = \max_{x \in \overline{\mathbb{H}^+}} |f(x)|$. Entonces

$$\int_{D_r(y_0)} |f| d\eta_{u,s} < \epsilon$$

y si $A_r := \sigma(D_r(y_0) \cap \Gamma w)$ también tenemos

$$\int_{A_r} |f| d(\sigma_* \eta_{u,s}) < \epsilon.$$

Así

$$\left| \int |f| d\eta_{u,s} - \int |f| d(\sigma_* \eta_{u,s}) \right| \leq \left| \int_{D_r(y_0)} f d\eta_{u,s} \right| + \left| \int_{A_r} f d(\sigma_* \eta_{u,s}) \right| + \left| \int_{D_r(y_0)} f d\eta_{u,s} - \int_{A_r} f d(\sigma_* \eta_{u,s}) \right|,$$

pero este último sumando es menor que ϵ , ya que para $\gamma w \in \mathbb{H}^+ \setminus D_r(y_0)$ te tiene $m(\gamma w, \sigma(\gamma w)) < \delta$ (pues $s(r) < \delta$), esto implica por continuidad uniforme de f que $|f(\gamma w) - f(\sigma(\gamma w))| < \epsilon$. Por lo tanto tenemos

$$\left| \int |f| d\eta_{u,s} - \int |f| d(\sigma_* \eta_{u,s}) \right| < \epsilon.$$

□

4.4 APROXIMACIÓN DE λ_x MEDIANTE $\lambda_{x,s}$.

A continuación presentamos un resultado que nos permite hacer la desintegración de $\tilde{q}_* \mu^+$ en términos de la métrica de la superficie base S y es el objetivo principal de este capítulo.

Teorema 4.3. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica de área finita y $\{s_n\}$ una sucesión de números reales $s_n \rightarrow 1^+$, entonces $\lambda_{x,s_n} \rightarrow \lambda_x$ débilmente cuando $n \rightarrow \infty$.*

Prueba. Por las Proposición 2.2 y 2.3, y por el Teorema 2.4 tenemos que $\theta_{\hat{x},s_n} \rightarrow \mu_{\hat{x}}$ débilmente cuando $n \rightarrow \infty$ y $\mu_{\hat{x}} = \phi_{0*} \mu_x$ donde μ_x es la desintegración de $\tilde{q}_* \mu^+$ sobre $x \in S$. También probaremos en el Lema 4.2 que

$$\mu_{\hat{x},s_n} - \theta_{\hat{x},s_n} \rightarrow 0$$

débilmente cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces $\mu_{\hat{x},s_n} \rightarrow \mu_{\hat{x}}$ débilmente cuando $n \rightarrow \infty$ y $\Pi_* \mu_{\hat{x},s_n} \rightarrow \mu_x$, esto es $\mu_{x,s_n} \rightarrow \mu_x$.

Sea $\hat{q} : \sigma^+(T_x^1 S) \rightarrow \mathbb{R}P_x^1$ el homeomorfismo definido por $\hat{q} = \tilde{q}|_{\sigma^+(T_x^1 S)}$, entonces por el Lema 3.4 tenemos que

$$(\hat{q})_*^{-1} \mu_{x,s_n} \rightarrow (\hat{q})_*^{-1} \mu_x$$

débilmente cuando $n \rightarrow \infty$, esto es,

$$\mu_{x,s_n}^+ \rightarrow \mu_x^+.$$

Luego, también por el Lema 3.4 tenemos que

$$\tilde{p}_* \mu_{x,s_n}^+ \rightarrow \tilde{p}_* \mu_x^+,$$

esto es,

$$\lambda_{x,s_n} \rightarrow \lambda_x$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Que es lo que queríamos probar. □

Observemos que las medidas $\lambda_{x,s}$ dependen de $x_0 \in \mathbb{D}$, ya que la función $\psi : \mathbb{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow T^1 S$ depende de x_0 .

5 Interpretación geométrica de $\mu_{\rho,x}^+$ y $\mu_{\rho,x}$.

En este capítulo daremos una interpretación geométrica de la familia de medidas $\{\tilde{q}_* \mu_{\rho,x}^+ : x \in S\}$. Hacemos esto para las representaciones canónica, casi-canónica y para la representación en un grupo Schottky. Obtenemos la desintegración $\tilde{q}_* \mu_{\rho}^+$ en la fibra $M_{\rho,x}$ como límite de medidas con soporte en los puntos del conjunto $M_{\rho,x} \cap \mathcal{L}_{\tilde{x}}$ que es intersección de la fibra $M_{\rho,x}$ y una hoja $\mathcal{L}_{\tilde{x}}$ de la foliación \mathcal{F}_{ρ} homeomorfa al plano de Poincaré, cada punto tiene un peso que depende de la métrica hiperbólica de la superficie base S . Las medidas sobre M_{ρ} que aproximan a la medida μ_x se levantan a medidas sobre el espacio $T^1 \mathcal{F}_{\rho}$ que aproximan a la medida μ_x^+ , estas medidas tienen soporte en los puntos de intersección de una hoja de flujo H y el conjunto $(\tilde{p})^{-1}\{T_x^1 S\}$.

5.1 HOJAS DE FLUJO GEODÉSICO Y ATRACTOR TRANSVERSAL.

Continuamos suponiendo que S es una superficie de Riemann hiperbólica de área finita y suponemos que $\rho : \pi_1(S, x) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ una representación tal que la foliación M_{ρ} tiene una hoja homeomorfa al plano de Poincaré \mathbb{D} , es decir, ρ es inyectiva. Como ejemplos de este tipo de representaciones tenemos a la representación canónica ρ_{can} y a las representaciones casi-canónicas definidas en el capítulo 3. Supondremos además que el flujo geodésico foliado asociado a la representación ρ admite secciones de mayor expansión y contracción $\sigma^{\pm} : \mathcal{A} \rightarrow T^1 \mathcal{F}_{\rho}$ donde $\mathcal{A} \subset T^1 S$ es un conjunto medible con medida de Liouville total.

Sea $x \in S$ y sea Γ el grupo Fuchsiano $\Gamma := \rho_{can}(\pi_1(S, x)) \subset PSL(2, \mathbb{R})$. Sea $\pi^+ : \mathbb{H}^+ \rightarrow S$ un cubriente universal con grupo de transformaciones de cubierta igual a Γ . Trabajaremos con las proyecciones, sistemas coordinados y medidas definidas en la sección 2.1 del capítulo 2. Aquí también supondremos que $\beta : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{D}$ es una transformación de Moebius tal que $\pi^+ = \pi \circ \beta$ donde $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S$ es el cubriente de S dado en la sección 4.1.

Sean $y_0 = \beta^{-1}(x_0)$ y $k = \beta^{-1}(u)$ en \mathbb{H}^+ , podemos suponer que la región fundamental R_0 contiene a k . Sea d un punto en el dominio $D \subset \mathbb{C}P^1$

exterior a los discos acotados por los círculos que definen al grupo Schottky Γ . Sean $i^{\pm} : \mathbb{H}^{\pm} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ las inclusiones de \mathbb{H}^{\pm} en la línea proyectiva $\mathbb{C}P^1$. Sea $l \in \mathbb{C}P^1$ el punto

$$l = \begin{cases} i^+(k), & \text{para la representación canónica } \rho = \rho_{can}, \\ w \circ i^+(k), & \text{para la representación casi-canónica } \rho = w_* \rho_{can} \\ d, & \text{para la representación en un grupo Schottky.} \end{cases}$$

Tomamos a $\tilde{x} \in M_{\rho}$ como el punto $\tilde{x} := \Pi(k, l)$, donde $\Pi : \mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow M_{\rho}$ es la proyección canónica asociada a la representación respectiva $\rho : \pi_1(S, x) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$.

Sea $\mathcal{L}_{\tilde{x}}$ la hoja de la foliación \mathcal{F}_{ρ} de M_{ρ} que contiene a \tilde{x} , entonces $\mathcal{L}_{\tilde{x}}$ es isomorfa a \mathbb{H}^+ . Sea $\mathcal{L}_z \subset \text{Proy}(E)$ la hoja de la foliación $T^1 \mathcal{F}_{\rho}$ con $\tilde{q}(\mathcal{L}_z) = \mathcal{L}_{\tilde{x}}$. Denotamos por $e : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathcal{L}_{\tilde{x}}$ al isomorfismo definido por $e(z) := \Pi(z, l)$.

Sea $R : \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\} \rightarrow T^1 \mathcal{F}_{\rho}$ el encaje radial en la hoja \mathcal{L}_z que asigna al punto $y \in \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\}$ el vector unitario en $\mathcal{L}_z (= T^1 \mathcal{L}_{\tilde{x}})$ sobre $e(y)$ que dirige a la geodésica en $\mathcal{L}_{\tilde{x}}$ de $e(y_0)$ a $e(y)$. Por lo tanto el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & T^1 \mathcal{F}_{\rho} \\ & \nearrow R & \downarrow \tilde{p} \\ \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\} & \xrightarrow{\psi \circ \beta} & T^1 S \end{array}$$

conmuta. Denotamos por $\varphi^{\pm} : \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\} \rightarrow T^1 \mathcal{F}_{\rho}$ a las funciones definidas por $\varphi^{\pm} := \sigma^{\pm} \circ \psi \circ \beta$ respectivamente (ψ definido en la sección 4.1). Podemos ver el diagrama (4.2) para mayor claridad.

Observemos que el encaje R definido arriba depende de $y_0 \in \mathbb{H}^+$ y del punto $l \in \mathbb{C}P^1$, por lo tanto podemos definir R de la misma manera para cualquier par de puntos $y_1 \in \mathbb{H}^+$ y l_1 en la región de discontinuidad $\Omega(\rho(\pi_1(S))) \subset \mathbb{C}P^1$ del grupo $\rho(\pi_1(S))$, en este caso llamamos al conjunto $R(\mathbb{H}^+ \setminus \{y_1\}) \subset T^1 \mathcal{F}_{\rho}$ hoja de flujo positivo.

Sea $r : \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\} \rightarrow T^1 \mathbb{H}^+$ el encaje radial desde y_0 , es decir, $r = \beta_* \circ Q \circ \beta$ donde $Q : \mathbb{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow T^1 \mathbb{D}$ es el encaje radial desde x_0 definido en la

sección 4.1. Sea $\tilde{R} : \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\} \rightarrow T$ la función definida por $\tilde{R}(z) := (r(z), l)$, entonces para cada $z \in \mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\}$ tenemos que $P \circ \tilde{R}(z) = R(z)$ donde $P : T \rightarrow T^1\mathcal{F}_\rho$ es la proyección definida en el capítulo 2. Sea $\tilde{\psi} : \Gamma(R_0) \setminus \{y_0\} \rightarrow T^1R_0$ la función $\tilde{\psi} := h_0 \circ \psi \circ \beta$ y sean $\tilde{\varphi}^\pm : \Gamma(R_0) \setminus \{y_0\} \rightarrow T^1R_0 \times \mathbb{C}P^1$ las funciones definidas por $\tilde{\varphi}^\pm := \Phi_0 \circ \varphi^\pm$, entonces $\varphi^\pm = P \circ \tilde{\varphi}^\pm$. Para las funciones definidas en este capítulo, el diagrama (4.2) en sistemas de coordenadas nos queda como el diagrama (4.3).

Sea $H_x : M_{\rho,x} \rightarrow M_{\rho,x}$ el grupo de holonomía de \mathcal{F}_ρ . Como

$$\Gamma = \rho_{can}(\pi_1(S, x)) \subset PSL(2, \mathbb{R})$$

es un grupo de tipo finito tenemos que el exponente de convergencia $\delta(\Gamma)$ asociado a la serie de Poincaré de Γ es 1 y Γ es un grupo de tipo divergente. Sea $\tilde{x} \in M_{\rho,x}$ y para cada $s > 1$, definimos la medida $\theta_{\tilde{x},s}$

$$\theta_{\tilde{x},s} = \frac{1}{g_s(\tilde{x}, \tilde{x})} \sum_{\alpha \in H_x} e^{-s(\tilde{x}, \alpha\tilde{x})} \delta_{\alpha\tilde{x}}$$

en donde $(\tilde{x}, \alpha\tilde{x})$ denota la distancia hiperbólica en la hoja $\mathcal{L}_{\tilde{x}}$ del punto \tilde{x} al punto $\alpha\tilde{x}$ y

$$g_s(\tilde{x}, \tilde{x}) = \sum_{\alpha \in H_x} e^{-s(\tilde{x}, \alpha\tilde{x})}.$$

Definimos las medidas:

- (1) $\eta_{k,s} = \beta^* \eta_{u,s}$ en \mathbb{H}^+ con soporte en la órbita de k bajo Γ , donde $\eta_{u,s}$ es la medida de la teoría de medidas de Patterson-Sullivan definida en la sección 4.1,
- (2) $\lambda_{x,s} := \psi_* \eta_{u,s}$ en T^1S con soporte T_x^1S ,
- (3) $\mu_{\tilde{x},s}^- := \varphi_*^- \eta_{k,s}$ en $T^1\mathcal{F}_\rho$ con soporte $\sigma^-(T_x^1S)$,
- (4) $\mu_{\tilde{x},s}^+ := \varphi_*^+ \eta_{k,s}$ en $T^1\mathcal{F}_\rho$ con soporte $\sigma^+(T_x^1S)$,
- (5) $\vartheta_{x,s} := R_* \eta_{k,s}$ en $T^1\mathcal{F}_\rho$ con soporte $R(\mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\}) \cap (\tilde{p})^{-1}(T_x^1S) \subset \mathcal{L}_z$,
- (6) $\mu_{x,s} := \tilde{q}_* \mu_{\tilde{x},s}^-$ en M_ρ cuyo soporte es el conjunto límite (circulo cuando $\rho = \rho_{can}$ o casi-circulo cuando $\rho = w_* \rho_{can}$ o conjunto de Cantor cuando ρ es Schottky) de $\mathcal{L}_{\tilde{x}} \cap M_{\rho,x}$ y
- (7) $\theta_{x,s} := \tilde{q}_* \vartheta_{x,s}$ en M_ρ cuyo soporte es $\mathcal{L}_{\tilde{x}} \cap M_{\rho,x}$.

Notemos que:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{x},s}^\pm &= (\sigma^\pm \circ \psi)_* \eta_{u,s} = \sigma_*^\pm \psi_* \eta_{u,s} \\ &= \sigma_*^\pm \lambda_{x,s}, \end{aligned}$$

y como mencionamos en el capítulo 2 tenemos que

$$\mu_{x,s} = \tilde{q}_* \mu_{\tilde{x},s}^-.$$

El objetivo de este capítulo es demostrar que existe un conjunto abierto \mathcal{P} en M_ρ cuya intersección $\mathcal{P} \cap M_{\rho,x}$ es un subconjunto abierto no-vacío de $M_{\rho,x}$ tal que para cada $\tilde{x} \in \mathcal{P} \cap M_{\rho,x}$ se tiene

$$(5.0) \quad \theta_{\tilde{x},s} \rightarrow \mu_x$$

cuando $s \rightarrow 1^+$. Primero, en la sección 5.2 consideraremos la representación canónica $\rho_{can} : \pi_1(S, x) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ y sus deformaciones $\rho_w : \pi_1(S, x) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$, y después, en la sección 2.3 consideraremos la representación $\rho : \pi_1(S, x) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ en un grupo Schottky $\rho(\pi_1(S, x))$ para S no-compacta.

Procederemos de la siguiente manera: probaremos para estas representaciones que

$$(5.1) \quad \vartheta_{\tilde{x},s} - \mu_{x,s}^+ \rightarrow 0$$

cuando $s \rightarrow 1^+$, y para ello probaremos que dado $\epsilon > 0$ existe a lo más un número finito de elementos $\gamma \in \Gamma$ tales que

$$(5.2) \quad d_{T^1\mathcal{F}_\rho}(R(\gamma k), \varphi^+(\gamma k)) > \epsilon.$$

Esto nos dice para la representación casi-canónica que los puntos de intersección de $R(\mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\})$ y $(\tilde{p})^{-1}(T_x^1S)$ están muy cercanos (salvo un número finito) a los puntos correspondientes en el conjunto atractor $\sigma^+ \circ \psi(\Gamma k) = \varphi^+(\Gamma k)$. Y para la representación en un grupo Schottky tenemos que para casi todo punto r de la intersección de $R(\mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\})$ y $(\tilde{p})^{-1}(T_x^1S)$ existe un punto z muy cercano el cual tiene atractor transversal (i.e. $b(\tilde{p}(z))$ es una palabra estirada) y este a su vez está muy cercano a su atractor transversal $\sigma^+(\tilde{p}(z))$.

Más aún, si la representación

$$\rho : \pi_1(S, x) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

es una representación casi-canónica, entonces para cada conjunto compacto $C_0 \subset R_0$ y para cada $\epsilon > 0$, tenemos para todo $z \in C_0$ que

$$d_{T^1\mathcal{F}_\rho}(R(\gamma z), \varphi^+(\gamma z)) < \epsilon$$

excepto a lo más para un número finito de elementos $\gamma \in \Gamma$.

5.2 APROXIMACIÓN DE LA MEDIDA μ_x EN $M_{\rho_{can}, w}$.

Para las representación casi-canónica $\rho_w : \pi_1(S, x) \rightarrow PGL(2, \mathbb{C})$ existen secciones de mayor expansión y mayor contracción continuas $\sigma^\pm : T^1S \rightarrow T^1\mathcal{F}_{\rho_w}$ (Proposición 3.2).

En la Proposición 4.1 hemos probado para la representación canónica que dado $\epsilon > 0$ existe a lo más un número finito de elementos $\gamma \in \Gamma$ tales que (5.2) se cumple. Por la Proposición 3.2 tenemos que el levantamiento \widetilde{W} del homeomorfismo casi-conforme foliado W asociado a una aplicación casi-conforme w conjuga los flujos Φ_{can} y Φ_w y por el Lema 3.3 tenemos que $\sigma_w^\pm = \widetilde{W}_* \sigma_{can}^\pm$. Entonces para las representaciones casi-canónicas también se tiene que dado $\epsilon > 0$ existe a lo más un número finito de elementos $\gamma \in \Gamma$ tales que (5.2) se cumple.

Teorema 5.1. *Sea $\rho : \pi_1(S, x) \rightarrow PGL(2, \mathbb{C})$ la representación casi-canónica $\rho = w_* \rho_{can}$ asociada a la aplicación casi-conforme $w : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ compatible con ρ_{can} y sea \mathcal{P} el conjunto*

$$\mathcal{P} = M_\rho \setminus \widetilde{q} \circ \sigma^+(T^1S).$$

Entonces para cada punto $\tilde{x} \in \mathcal{P}_w \cap M_{\rho, x}$ y para toda sucesión $\{s_n\}$ de números reales $s_n \rightarrow 1^+$ tenemos

$$\theta_{\tilde{x}, s_n} \rightarrow \mu_x.$$

Esta afirmación es válida para cada $x \in S$.

Prueba. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe a lo más un número finito de elementos $\gamma \in \Gamma$ tales que se cumple la desigualdad (5.2) y por lo tanto se cumple

(5.1). Por el Teorema 4.4 tenemos que $\lambda_{x, s} \rightarrow \lambda_x$ y luego por el Lema 1.2 tenemos que $\mu_{x, s}^+ \rightarrow \mu_x^+$ y $\vartheta_{x, s} - \mu_{x, s}^+ \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow 1^+$, así

$$\vartheta_{x, s} \rightarrow \mu_x^+$$

cuando $s \rightarrow 1^+$. Utilizando nuevamente el Lema 1.2 tenemos que

$$\theta_{\tilde{x}, s} \rightarrow \mu_x$$

cuando $s \rightarrow 1^+$.

Probaremos para la representación canónica que la afirmación del teorema se cumple para cada punto $\tilde{x} \in \mathcal{P} \cap M_{\rho, x}$ y la prueba para $w_* \rho_{can}$ es consecuencia directa de esto y el Lema 1.2.

Sea $\tilde{x} \in \mathcal{P} \cap M_{\rho, x}$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\tilde{x} \in \mathbb{H}_x^+ \subset M_{\rho, x}$ ya que en otro caso hacemos una construcción análoga. Queremos ver que

$$\theta_{\tilde{x}, s} - \theta_{\tilde{x}, s} \rightarrow 0$$

cuando $s \rightarrow 1^+$. Como $\tilde{x}, \tilde{x} \in \mathbb{H}_x^+ \subset M_{\rho, x}$ tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe a lo más un número finito de elementos $\alpha \in H_x$ tales que $d_{M_\rho}(\alpha \tilde{x}, \alpha \tilde{x}) > \epsilon$, además, los puntos las distancias hiperbólicas $(\tilde{x}, \rho_{can}(\gamma) \tilde{x})$ en $\mathcal{L}_{\tilde{x}}$ y $(\tilde{x}, \rho_{can}(\gamma) \tilde{x})$ en $\mathcal{L}_{\tilde{x}}$ coinciden para cada $\gamma \in \pi_1(S, x)$. Esto prueba que

$$\theta_{\tilde{x}, s} - \theta_{\tilde{x}, s} \rightarrow 0$$

cuando $s \rightarrow 1^+$ y ρ es la representación canónica. \square

5.3 REPRESENTACIONES DE MONODROMÍA PING-PONG Y SCHOTTKY.

Presentamos una parte de la sección 6 de [3].

El ping-pong es una técnica clásica usada para verificar que un grupo finitamente generado de transformaciones de algún espacio es un grupo libre. Cuando el espacio es un espacio métrico información geométrica adicional sobre el ping-pong nos permite describir casi completamente la dinámica topológica de este grupo de transformaciones. Usaremos esta técnica para describir el flujo geodésico foliado asociado a una representación inyectiva ρ de $\pi_1(S)$ a un grupo Schottky $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{C})$.

5.3.1 El ping-pong.

Sean \mathcal{E} un conjunto, $k > 1$ y para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ sea $f_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ una biyección. Diremos que el grupo $\Gamma \subset \text{Biy}(\mathcal{E})$ generado por f_1, \dots, f_k es un *ping-pong* (para este sistema de generadores) si para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ existen subconjuntos A_i, B_i de \mathcal{E} tal que las propiedades siguientes se verifican:

- La familia $\{A_i, B_i, i \in \{1, \dots, k\}\}$ es una familia de subconjuntos mutuamente disjuntos de \mathcal{E} ,
- para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ tenemos $f_i(\mathcal{E} \setminus A_i) \subset B_i$.

Denotamos por \mathbb{F}_k al grupo libre generado con k generadores $\{e_1, \dots, e_k\}$. El primer resultado sobre el ping-pong es:

Proposición 5.2. Si un grupo $\Gamma \subset \text{Biy}(\mathcal{E})$ es un grupo ping-pong para los generadores f_1, \dots, f_k entonces el morfismo $\varphi : \mathbb{F}_k \rightarrow \Gamma$ definido por $\varphi(e_i) = f_i, i \in \{1, \dots, k\}$ es un isomorfismo.

Prueba. Se encuentra en [3] pág. 19. \square

Suponemos ahora que (\mathcal{E}, d) es un espacio métrico compacto, las f_i son homeomorfismos de \mathcal{E} , cada A_i, B_i es compacto, y que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ las restricciones de f_i y f_i^{-1} a $\mathcal{E} \setminus A_i$ y $\mathcal{E} \setminus B_i$, respectivamente, son contracciones para la distancia d : diremos que $(\mathcal{E}, d, \{f_i\})$ es un *ping-pong de contracción compacta*.

Para cada $g \in \{f_i, f_i^{-1}, i \in \{1, \dots, n\}\}$ denotamos por $C(g) = B_i$, y $C'(g) = A_i$ si $g = f_i$ y $C(g) = A_i$ y $C'(g) = B_i$ si $g = f_i^{-1}$, así para cada g tenemos que $g(\mathcal{E} \setminus C'(g)) \subset C(g)$. Notemos que si $g_1 \neq g_2^{-1}$ entonces $g_2(C(g_1)) \subset C(g_2)$ así que $g_2 \circ g_1(\mathcal{E} \setminus C'(g_1)) \subset C(g_2)$.

Lema 5.3. Sea $(\mathcal{E}, d, \{f_i\})$ un ping-pong de contracción compacta. Para cada $\epsilon > 0$ existe $l \in \mathbb{N}$ tal que para cada palabra reducida $g_l \circ \dots \circ g_1, g_i \in \{f_i, f_i^{-1}, i \in \{1, \dots, n\}\}$ tenemos

$$\text{diam}(g_l \circ \dots \circ g_1(\mathcal{E} \setminus C'(g_1))) < \epsilon.$$

Prueba. La prueba se encuentra en [3] pág. 20. \square

Sea $\Sigma_0 = \{f_i, f_i^{-1}, i \in \{1, \dots, n\}\}^{\mathbb{Z}}$ el conjunto de palabras infinitas con letras iguales a $f_i^{\pm 1}$, equipada con la topología producto. Una palabra infinita $(g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ se llama *reducida* si para cada n la palabra finita $(g_i)_{-n < i < n}$ es reducida. Denotamos por $\Sigma = \{(g_i) \in \Sigma_0, (g_i) \text{ es reducida}\}$ el subespacio de palabras reducidas, $\Delta = \Sigma \times \mathcal{E}$ y $\Pi : \Delta \rightarrow \Sigma$ la proyección natural. Denotamos por σ al desplazamiento sobre Σ , esto es $\sigma(g_i) = (h_i)$ donde $h_i = g_{i+1}$, y por $\tilde{\sigma}$ a la aplicación sobre Δ definida por $\tilde{\sigma}((g_i), x) = (\sigma(g_i), g_0(x))$. Es fácil verificar que σ y $\tilde{\sigma}$ son homeomorfismos. Notemos que $\tilde{\sigma}$ es un cociclo multiplicativo sobre σ .

El cuadro topológico del ping-pong puede entenderse completamente:

Proposición 5.4. Con la notación anterior, existen dos secciones continuas $s^+ : \Sigma \rightarrow \Delta$ y $s^- : \Sigma \rightarrow \Delta$ las cuales son $\tilde{\sigma}$ -invariantes. Más aun, $s^+(\Sigma)$ es un atractor topológico para $\tilde{\sigma}$ cuya cuenca de atracción es $\Delta - s^-(\Sigma)$ y $s^-(\Sigma)$ es un repulsor topológico para $\tilde{\sigma}$ con cuenca $\Delta - s^+(\Sigma)$ y estas dos secciones son disjuntas.

Prueba. Sea $(g_i) \in \Sigma$ una palabra reducida. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos los conjuntos compactos

$$K_n^+ = g_{-1} \circ g_{-2} \circ \dots \circ g_{-n}(\mathcal{E} \setminus C'(g_{-n})) \subset C(g_{-1})$$

y

$$K_n^- = g_0^{-1} \circ g_1^{-1} \circ \dots \circ g_{n-1}^{-1}(\mathcal{E} \setminus C(g_{n-1})) \subset C'(g_0).$$

Usando el hecho de que la palabra (g_i) es reducida, uno muestra fácilmente que estas sucesiones de conjuntos compactos están decreciendo con n : $K_{n+1}^+ \subset K_n^+$ y $K_{n+1}^- \subset K_n^-$. Más aun, como $g_0 \neq g_{-1}^{-1}$ uno tiene $C(g_{-1}) \cap C'(g_0) = \emptyset$, así que $K_n^+ \cap K_n^- = \emptyset$. Finalmente, el Lema 5.3 asegura que los diámetros de K_n^+ y K_n^- van uniformemente a cero. Definimos entonces

$$s^-((g_i)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n^- \quad \text{y} \quad s^+((g_i)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n^+.$$

\square

5.3.2 Grupos Schottky.

Un grupo Schottky de rango n es un grupo finitamente generado $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ teniendo $2n$ círculos disjuntos $C_1, C'_1, \dots, C_n, C'_n$ acotando un

dominio $D \subset \mathbb{C}P^1$, y un sistema de generadores g_1, g_2, \dots, g_n tales $g_i(C'_i) = C_i$ y $g_i(D) \cap D = \emptyset$. Usando los discos A_i, B_i acotados por los círculos C_i, C'_i respectivamente y disjuntos de D , vemos que Γ es un grupo Ping-pong de $Aut(\mathbb{C}P^1)$, más aun, este es un grupo ping-pong de contracción compacta.

De aquí en adelante el grupo ping-pong es un grupo Schottky, por lo tanto es un grupo ping-pong de contracción compacta.

5.3.3 Geodésicas y palabras reducidas.

Lema 5.5. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica no compacta finita, equipada con su métrica hiperbólica natural. Hay $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ geodésicas completas mutuamente disjuntas cuyos extremos van a pinchaduras de S , tal que el complemento $S \setminus \cup_1^k \gamma_i$ es conexo y simplemente conexo, las γ_i acotan un dominio fundamental de S' es su cubriente universal \mathbb{D} y el dominio fundamental es un polígono de $2k$ lados cuyos vértices están sobre el círculo al infinito $\partial\mathbb{D}$.*

Prueba. La prueba se encuentra en [3] páginas 20 y 21. \square

Ahora fijamos un origen $x_0 \in S \setminus \cup_1^k \gamma_i$. Para cada i hay un único segmento geodésico α_i uniendo a x_0 y x_0 y cortando γ_i en exactamente un punto, con la orientación positiva, y no cortando a γ_j , para $j \neq i$.

Lema 5.6. *Los arcos geodésicos α_i forman un sistema de generadores del grupo fundamental $\pi_1(S, x_0)$. Más precisamente el grupo fundamental es el grupo libre generado por los α_i .*

Prueba. La prueba se encuentra en [3] pág. 21. \square

Ahora fijamos una orientación sobre cada γ_i y llamamos a γ_i la geodésica orientada. Dado cada vector $u \in T_{x_0}^1 S$ en un punto $x_0 \in S \setminus \cup_1^k \gamma_i$, la geodésica γ_u tiene dos posibilidades:

- (1) uno de sus extremos va a una pinchadura de S ,
- (2) o γ_u corta transversalmente una infinidad de veces (en el futuro y en el pasado) a las geodésicas γ_i .

El itinerario de la geodésica γ_u es la sucesión $b(u) = (b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ definida como sigue: b_i es α_i^\pm , $i \in \{1, \dots, k\}$ si la $(i-1)$ -ésima intersección de γ_u con $\cup \gamma_i$ pertenece a γ_i y el coeficiente es $+1$ o -1 de acuerdo a la orientación de γ_u seguida por la orientación de γ_i es una base directa o inversa del espacio tangente.

Lema 5.7. *Para cada $u \in T_{x_0}^1 S'$ el itinerario $b(u)$ es una palabra reducida (finita o infinita) en las letras α_i^\pm , donde b_0 corresponde al primer punto de intersección.*

Prueba. La prueba se encuentra en [3] pág. 21. \square

Dando la geodésica γ_u , y un tiempo $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma_u([0, t_0]) \notin \cup_1^k \gamma_i$, obtenemos un camino cerrado $\tilde{\gamma}_u(t)$ uniendo respectivamente $\gamma_u(0)$ y $\gamma_u(t)$ por un segmento geodésico en el dominio fundamental. Más aun, si $t > 0$ y si el segmento $\gamma_u([0, t])$ corta $l+1$ veces a las geodésicas γ_i 's, entonces el camino cerrado $\tilde{\gamma}_u(t)$ es homotópico a $\beta_0 \cdot \beta_1 \cdots \beta_l$ donde β_j es el camino cerrado α_i^\pm de acuerdo a las letras $b_j = \alpha_i^\pm$.

Corolario 5.8. *La geodésica γ_u define una palabra reducida (finita o infinita) en $\pi_1(S, x_0)$ para la base α_i , $i \in \{1, \dots, k\}$.*

Prueba. La prueba se encuentra en [3] pág. 21. \square

5.3.3 Gráficas de Cayley y palabras estiradas.

Sean G_e y G_f grupos libres generados por $e = \{e_1, \dots, e_k\}$ y $f = \{f_1, \dots, f_l\}$ respectivamente. Denotamos por Γ_e y Γ_f a sus gráficas de Cayley para las bases dadas. Ambas gráficas de Cayley son árboles. Sea $\rho: G_e \rightarrow G_f$ un isomorfismo de grupos. Cada palabra $(b_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, $b_j \in \{e_i^\pm, 1 \leq i \leq k\}$ define un camino infinito $\sigma(b)$ en la gráfica de Cayley Γ_e . Este camino $\sigma(b)$ es una geodésica si y solo si la palabra b es reducida.

Decimos que un camino infinito $\sigma \in \Gamma_e$ es *estirada* si este esta propiamente encajado (digamos, solo una parte acotada de esta camino pertenece a un conjunto compacto de la gráfica de Cayley). Este es *estrictamente estirada* si sus dos extremos corresponden a dos extremos distintos σ_- y σ_+ en su gráfica de Cayley. La única geodésica uniendo σ_- a σ_+ es la reducción σ^r de σ .

Lema 5.9. Sea b una palabra infinita en las letras e_i . Sea $c := \rho(b)$ la palabra correspondiente en las letras f_i . Entonces b es estirada si y sólo si c es estirada. ρ induce un homeomorfismo de la frontera de Γ_e a la frontera de Γ_f asociando a el punto frontera b el punto frontera $\rho(b)$.

Prueba. La prueba se encuentra en [3] pág. 22. \square

Una palabra estirada a en un grupo libre define dos puntos a_- y a_+ en la frontera del grupo. Así hay una única geodésica c^r en la gráfica de Cayley del grupo, la cual corresponde a una palabra reducida en el grupo, uniendo a_+ con a_- . Usando la misma notación como en la Proposición 5.4, definimos $s^-(a) = s^-(c^r)$ y $s^+(a) = s^+(c^r)$. Denotamos por $\widehat{\Sigma}$ al conjunto de palabras infinitas estiradas cuyas letras son los generadores del grupo Schottky G . La palabra reducida que corresponde a c^r pertenece a $\widehat{\Sigma}$.

Como el grupo Schottky define un grupo ping-pong de contracción compacta, la Proposición 5.4 implica inmediatamente lo siguiente:

Lema 5.10. Sea a una palabra estirada en un grupo Schottky $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{C})$ y b la imagen de a por un desplazamiento. Entonces $s^\pm = a_0(s^\pm(a))$. Las aplicaciones $a \mapsto (a, s^\pm(a))$ definen secciones σ^- medibles de la fibración trivial $\widehat{\Sigma} \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow \widehat{\Sigma}$.

Prueba. La prueba se encuentra en [3] pág. 22. \square

Prueba del Teorema 13 del capítulo 1. Sea $\rho : \pi_1(S, x_0) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ una representación inyectiva con $G = \rho(\pi_1(S, x_0))$ un grupo Schottky. Notemos que el conjunto de vectores $u \in T^1S$ tales que la geodésica correspondiente γ_u va a una pinchadura de S tiene medida de Lebesgue cero.

Para cada vector unitario u en un punto del dominio fundamental tal que la geodésica Γ_u no tiene un extremo en una pinchadura de S , la palabra $\rho(b(u))$ es una palabra estirada del grupo de Schottky. Para cada punto x del dominio fundamental de S denotamos por H_x a la holonomía de la foliación \mathcal{F}_ρ de la fibra sobre x a la fibra sobre x_0 por un camino en el interior del dominio fundamental. Esta holonomía está bien definida porque el dominio fundamental es simplemente conexo. Así, definimos $s^\pm : T^1S \rightarrow T^1\mathcal{F}_\rho$ como $s^\pm(u) = H_x^{-1}(s^\pm(\rho b(\gamma_u)))$. Por construcción las secciones s^\pm están definidas para casi todo punto con respecto a la medida

de Liouville λ , son medibles, y son las secciones de mayor expansión y contracción. La continuidad de s^\pm se sigue de la forma topológica de construir las secciones en la Proposición 5.4 y del hecho de que la aplicación la cual asocia el punto en infinito de la gráfica de Cayley de la presentación de $\pi_1(S)$ al punto en infinito de la gráfica de Cayley del grupo Schottky es continua, por el Lema 5.9. Esto prueba el Teorema 13 del capítulo 1. \square

5.4 APROXIMACIÓN DE LA MEDIDA μ_x EN M_ρ CUANDO ρ ES SCHOTTKY.

Para las representaciones $\rho : \pi_1(S, x_0) \rightarrow PGL(2, \mathbb{C})$ tales que $\rho(\pi_1(S, x_0))$ es grupo Schottky y S es no-compacta existe una sección de mayor expansión continua $\sigma^+ : \mathcal{A} \rightarrow T^1\mathcal{F}_\rho$ donde $\mathcal{A} \subset T^1S$ tiene medida de Liouville total, más aún, para cada $x \in S$ se tiene que $\mathcal{A} \cap T_x^1S$ tiene λ_x -medida total (Ref. [3]).

Primero hacemos la desintegración de μ_ρ^+ :

Proposición 5.11. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica no-compacta de tipo finito, y sea $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ una representación inyectiva con $\rho(\pi_1(S, z_0))$ un grupo Schottky. Entonces la medida μ_ρ^+ en $T^1T^1\mathcal{F}_{\rho_{can}}$ se desintegra de la siguiente manera:

- (1) $q \circ \tilde{p}_*(\mu_\rho^+) = \xi$, que es la medida de área hiperbólica sobre S .
- (2) La desintegración de μ_ρ^+ sobre $x \in S$ es la medida $\mu_{\rho, x}^+$ con soporte en $(\tilde{p})^{-1}(T_x^1S)$.

Prueba. Análoga a la prueba del Teorema 2.1. \square

Ahora haremos la desintegración de la medida $\tilde{q}_*\mu_\rho^+$ en M_ρ cuando $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ una representación con $\rho(\pi_1(S, z_0))$ un grupo Schottky.

Proposición 5.12. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica no-compacta de tipo finito, y sea $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ una representación inyectiva con $\rho(\pi_1(S, z_0))$ un grupo Schottky. Entonces la medida μ_ρ en $M_{\rho_{can}}$ se desintegra de la siguiente manera:

- (1) $\tilde{q}_* = \xi$, que es la medida de área hiperbólica sobre S .

- (2) La desintegración de μ_ρ sobre $x \in S$ es la medida $\mu_{\rho,x}$ con soporte en $M_{\rho,x}$.

Prueba. Análoga a la prueba del Teorema 2.1. \square

Ahora describiremos la versión de la Proposición 4.1 para cuando $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ sea la representación en un grupo Schottky de una superficie no-compacta.

Proposición 5.13. Sean S una superficie de Riemann hiperbólica no compacta de tipo finito y $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ una representación inyectiva en un grupo Schottky. Para cualquier punto y en una hoja \mathcal{L} de la foliación \mathcal{F}_ρ isomorfa al plano de Poincaré tomamos la hoja de flujo positivo

$$H := \{\Phi(z, t) : z \in (\tilde{q})^{-1}(y) \text{ y } t > 0\}.$$

En la fibra $(\tilde{q} \circ p)^{-1}(x_0)$ las hojas de flujo se acercan al conjunto atractor $(\tilde{p})^{-1}(T_{x_0}^1 S)$, i.e., dado $\epsilon > 0$ existe a lo más un número finito de puntos z 's en el conjunto $H \cap (\tilde{q} \circ p)^{-1}(x)$ tales que

$$d(z, \sigma^+(T_{x_0}^1 S)) \geq \epsilon.$$

Prueba. Sea G el grupo de transformaciones de cubierta asociado al cubriente $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S$. Sea $w \in \pi^{-1}\{x\}$, entonces la órbita Gw de w bajo G coincide con $\pi^{-1}\{x\}$. Sean $g \in G$ y $u \in T_{x_0}^1 S$ una dirección tal que la geodésica γ_u pasa a través de gx_0 en tiempo positivo t_g . El segmento geodésico $[\gamma_u(0), \gamma_u(t_g)]$ define una palabra reducida finita $b_g = b_0 b_1 \dots b_k$ en $\pi_1(S, x_0)$ para la base $\{\alpha_{\pm i} : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$. Definimos la longitud l de esta palabra por $l(b_g) = k + 1$. También definimos la longitud de la palabra g por $l(g) = k + 1$. Damos una enumeración $\{g_1, g_2, \dots, g_m, \dots\}$ de G . Notemos que dado $k \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces la palabra $l(g) > k$.

Para cada $g_k \in G$ tomamos una dirección $u_k \in T_{x_0}^1 S$ tal que:

- (1) los extremos de γ_{u_k} no correspondan a pinchaduras de S , es decir, σ^+ esta definida en u_k ,
- (2) si la palabra $g_k = \rho(b_0 \dots b_m)$ donde $b_0 \dots b_m$ es una palabra reducida, entonces la palabra

$$\rho(\gamma_{u_k}) = \rho(\dots b_0 \dots b_m b_{m+1} \dots)$$

donde $\{\dots b_0 \dots b_m b_{m+1} \dots\}$ es una palabra estirada,

- (3) el ángulo entre γ_{u_k} y $\psi(g_k u)$ es menos que $\frac{1}{k}$, donde $\psi : \mathbb{D} \rightarrow T^1 S$ es la función definida en el capítulo 4.

Existe un único punto en $r_k \in R(\mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\})$ tal que $\tilde{p}(r_k) = \psi(g_k u)$, y el vector u_k se puede levantar a un vector $\tilde{u}_k \in \mathcal{L}_z = T^1 \mathcal{L}_{\tilde{x}}$ tal que

$$d_{T^1 \mathcal{F}_\rho}(r_k, \tilde{u}_k) = d_{T^1 S}(\psi(g_k u), u_k).$$

Más precisamente, sea $y = \tilde{q}(r_k)$ entonces la restricción

$$r := \tilde{p}|_{T_y^1 \mathcal{L}_{\tilde{x}}} : T_y^1 \mathcal{L}_{\tilde{x}} \rightarrow T_{x_0}^1 S$$

es un homeomorfismo, tomamos \tilde{u}_k como la preimagen de u_k bajo esta identificación.

Sean $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que si $m > N$ entonces el Lema 5.3 se cumple. Pero existe a lo más número finito de enteros positivos k tales que $l(g_k) \leq N$ y también existe a lo más un número finito de naturales k tales que $\epsilon > \frac{1}{k}$. Por lo tanto existe a lo más un número finito de naturales k tales que

$$d_{T^1 \mathcal{F}}(\sigma^+(u_k), r_k) < 2\epsilon.$$

Hemos visto que casi todo punto en el conjunto $R(\mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\}) \cap (\tilde{p})^{-1}(T_{x_0}^1 S)$ tiene un punto muy cercano en el conjunto atractor. \square

La medida $\eta_{x,s}$ definida en este capítulo por

$$\vartheta_{x,s} = R_* \eta_{k,s}$$

tiene soporte en los puntos de intersección de la hoja de flujo $R(\mathbb{H}^+ \setminus \{y_0\})$ y el conjunto $(\tilde{p})^{-1}(T_{x_0}^1 S)$ que son los puntos $\{r_1, r_2, \dots\}$, y cada punto r_k esta muy cercano a un punto \tilde{u}_k y este punto a su vez esta muy cercano a su atractor transversal $\sigma^+(u_k)$. Sea

$$f : \{r_1, r_2, \dots\} \rightarrow \{\sigma^+(u_1), \sigma^+(u_2), \dots\}$$

definida por $f(r_k) = \sigma^+(u_k)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, definimos $v_{x,s}$ y $\tilde{\lambda}_{x,s}$ sobre $T^1 \mathcal{F}_\rho$ y $T^1 S$ respectivamente por

$$v_{x,s} = f_* \eta_{x,s}$$

y

$$\tilde{\lambda}_{x,s} = \tilde{p}_* v_{x,s}.$$

Utilizaremos el siguiente lema para probar que mediante las medidas $\{\vartheta_{x,s} : s > 1\}$ podemos aproximar a la medida μ_x^+ .

Lema 5.14. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica de tipo finito no-compacta y sea $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ una representación inyectiva con $\rho(\pi_1(S, z_0))$ un grupo Schottky. Para toda sucesión de números reales positivos $\{s_n\}$, $s_n \rightarrow 1^+$ se tiene que la sucesión de medidas $\{v_{x, s_n} - \vartheta_{x, s_n}\}_n$ converge a la medida cero, esto es,

$$(v_{x, s_n} - \vartheta_{x, s_n}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty$$

y la sucesión de medidas $\{\tilde{\lambda}_{x_0, s_n}\}$ converge a la medida de ángulo sobre $T_{x_0}^1 S$

$$\tilde{\lambda}_{x_0, s_n} \rightarrow \lambda_{x_0} \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Prueba. Sea $f : T^1 \mathcal{F}_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con soporte compacto, entonces f es uniformemente continua, esto es, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y, z \in T^1 \mathcal{F}_\rho$ son dos puntos con $d_{T^1 \mathcal{F}_\rho}(y, z) < \delta$, entonces $f(x) - f(y) < \epsilon$.

Sea $\{s_n\}$ una sucesión de números reales positivos tales que $s_n \rightarrow 1^+$. Escogemos $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $m > N_1$ entonces $d_{T^1 \mathcal{F}_\rho}(\sigma^+(u_m), r_m) < \delta$ y N_2 tal que si $n > N_2$ entonces

$$\frac{1}{g_{s_n}(u, u)} \sum_{m=1}^{N_1} |f(\sigma^+(u_m)) - f(r_m)| e^{-s_n(u, g_m u)} < \epsilon.$$

Entonces para $n > N_2$ tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{T^1 \mathcal{F}_\rho} f dv_{x_0, s_n} - \int_{T^1 \mathcal{F}_\rho} f d\vartheta_{x_0, s_n} \right| &< \sum_{m=1}^{N_1} |f(\sigma^+(u_m)) - f(r_m)| \frac{e^{-s_n(u, g_m u)}}{g_{s_n}(u, u)} \\ &+ \sum_{m=N_1+1}^{\infty} |f(\sigma^+(u_m)) - f(r_m)| \frac{e^{-s_n(u, g_m u)}}{g_{s_n}(u, u)} \\ &< 2\epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión de medidas $\{v_{x_0, s_n} - \vartheta_{x_0, s_n}\}_n$ tiende a la medida cero cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces $\{\tilde{p}_* v_{x_0, s_n} - \tilde{p}_* \vartheta_{x_0, s_n}\}_n$ también tiende a la medida cero cuando $n \rightarrow \infty$. Esto implica por el Lema 1.2 que la sucesión de medidas $\{\tilde{\lambda}_{x, s_n}\}$ converge

$$\tilde{\lambda}_{x, s_n} \rightarrow \lambda_x,$$

ya que $\tilde{\lambda}_{x, s_n} = \tilde{p}_* v_{x_0, s_n}$, $\lambda_{x, s_n} = \tilde{p}_* \vartheta_{x_0, s_n}$ y λ_{x, s_n} converge a λ_x cuando $n \rightarrow \infty$. \square

Usaremos el Lema 5.14 para probar el teorema:

Teorema 5.15. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica no-compacta de área finito y sea $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ una representación inyectiva con $\rho(\pi_1(S, z_0))$ un grupo Schottky. Para toda sucesión de números reales positivos $\{s_n\}$, $s_n \rightarrow 1^+$ se tiene que la sucesión de medidas ϑ_{x, s_n} converge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_{x, s_n} \rightarrow \mu_x^+.$$

Prueba. Sea $f : T^1 \mathcal{F}_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con soporte compacto, entonces f es uniformemente continua, esto es dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y, z \in T^1 \mathcal{F}_\rho$ son dos puntos con $d_{T^1 \mathcal{F}_\rho}(y, z) < \delta$, entonces $f(x) - f(y) < \epsilon$.

Sea \sim_k la relación de equivalencia sobre $\hat{\Sigma}$ donde $a \sim_k b$ si, y solo si $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_k = b_k$. Sea $\mathcal{A}_{x_0} \subset T_{x_0}^1 S$ el conjunto $\mathcal{A}_{x_0} = \{u \in T_{x_0}^1 S : b(u) \text{ es estirada}\}$. Cada relación \sim_k determina un número finito de puntos $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n(k)}\} \subset T_{x_0}^1 S$ cuyas geodésicas γ_{θ_i} terminan en un punto cúspide para tiempo positivo, y hay una biyección entre los conjuntos

$$\{(\theta_{i-1}, \theta_i) : i \in \{0, 1, \dots, \theta_{n(k)}\}\} \quad \text{y} \quad \hat{\Sigma} / \sim_k.$$

Eligiendo k suficientemente grande, por el Lema 5.3 tenemos que los puntos del conjunto $\sigma^+(I_j \cap \mathcal{A}_{x_0})$ están δ -ceranos, entonces

$$\sum_{j=0}^{n(k)} (f(a_j) - \epsilon) \mu_{x_0}^+(I_j^+) \leq \int_{T^1 \mathcal{F}_\rho} f d\mu_{x_0}^+ \leq \sum_{j=0}^{n(k)} (f(a_j) + \epsilon) \mu_{x_0}^+(I_j^+)$$

donde $I_j = (\theta_{j-1}, \theta_j)$, $I_j^+ = \sigma^+(I_j \cap \mathcal{A}_{x_0})$ y $a_j \in I_j^+$. Con esto aproximamos a la integral de f respecto de la medida $\mu_{x_0}^+$

$$\left| \int_{T^1 \mathcal{F}_\rho} f d\mu_{x_0}^+ - \sum_{j=0}^{n(k)} f(a_j) \mu_{x_0}^+(I_j^+) \right| < \epsilon.$$

Ahora aproximamos a la integral de f respecto de la medida v_{x_0, s_n} :

$$\left| \int_{T^1 \mathcal{F}_\rho} f dv_{x_0, s_n} - \sum_{j=0}^{n(k)} f(a_j) v_{x_0, s_n}(I_j^+) \right| \leq \sum_{j=0}^{n(k)} \left| \int_{I_j^+} f dv_{x_0, s_n} - f(a_j) v_{x_0, s_n}(I_j^+) \right|,$$

pero

$$\left| \int_{I_j^+} f dv_{x_0, s_n} - f(a_j) v_{x_0, s_n}(I_j^+) \right| \leq \epsilon \cdot v_{x_0, s_n}(I_j^+)$$

ya que para todo par de puntos $z_1, z_2 \in I_j^+$ tenemos que $d_{T^1 \mathcal{F}_\rho}(z_1, z_2) < \delta$, así

$$\left| \int_{T^1 \mathcal{F}_\rho} f dv_{x_0, s_n} - \sum_{j=0}^{n(k)} f(a_j) v_{x_0, s_n}(I_j^+) \right| \leq \epsilon.$$

Para relacionar las integrales de f respecto a las medidas $\mu_{x_0}^+$ y v_{x_0, s_n} elegimos n suficientemente grande tal que

$$|f(a_j)| (\tilde{\lambda}_{x_0, s_n}(I_j) - \lambda_{x_0}(I_j)) < \frac{\epsilon}{n(k)} \quad \text{para } j = 1, \dots, n(k).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{n(k)} f(a_j) \mu_{x_0}^+(I_j^+) - \sum_{j=0}^{n(k)} f(a_j) v_{x_0, s_n}(I_j^+) \right| &\leq \sum_{j=0}^{n(k)} |f(a_j)| |\mu_{x_0}^+(I_j^+) - v_{x_0, s_n}(I_j^+)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n(k)} |f(a_j)| |\lambda_{x_0}(I_j) - \tilde{\lambda}_{x_0, s_n}(I_j)| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \left| \int_{T^1 \mathcal{F}_\rho} f d\mu_{x_0}^+ - \sum_{j=0}^{n(k)} f(a_j) v_{x_0, s_n}(I_j^+) \right| &\leq \left| \int_{T^1 \mathcal{F}_\rho} f d\mu_{x_0}^+ - \sum_{j=0}^{n(k)} f(a_j) \mu_{x_0}^+(I_j^+) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=0}^{n(k)} f(a_j) \mu_{x_0}^+(I_j^+) - \sum_{j=0}^{n(k)} f(a_j) v_{x_0, s_n}(I_j^+) \right| \\ &\leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Usando las desigualdades anteriores vemos que se verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left| \int_{T^1 \mathcal{F}_\rho} f d\mu_{x_0}^+ - \int_{T^1 \mathcal{F}_\rho} f dv_{x_0, s_n} \right| &\leq \left| \int_{T^1 \mathcal{F}_\rho} f d\mu_{x_0}^+ - \sum_{j=0}^{n(k)} f(a_j) v_{x_0, s_n}(I_j^+) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=0}^{n(k)} f(a_j) v_{x_0, s_n}(I_j^+) - \int_{T^1 \mathcal{F}_\rho} f dv_{x_0, s_n} \right| \\ &\leq 3\epsilon. \end{aligned}$$

Con esto concluimos la prueba. \square

Sea $\mathcal{P}_S = \Pi(\bar{R}_0 \times D)$ donde $D \subset \mathbb{C}P^1$ es la región dada en la definición de grupo Schottky y $\Pi: \mathbb{H}^+ \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow M_\rho$ es la proyección. Recordemos que para la representación en un grupo Schottky tomamos $\tilde{x} = \Pi(k, d)$ para algún punto $d \in D$.

Corolario 5.16. Sean S una superficie de Riemann hiperbólica no compacta de área finita y $\rho: \pi_1(S, x) \rightarrow PGL(2, \mathbb{C})$ una representación tal que $\rho(\pi_1(S, x))$ es un grupo Schottky. Entonces existe un conjunto abierto $\mathcal{P} \subset M_\rho$ de medida de Lebesgue positiva cuya intersección con cada fibra $M_{\rho, x}$ es un conjunto abierto de medida de Lebesgue positiva en $M_{\rho, x}$ y para cada punto $\tilde{x} \in \mathcal{P} \cap M_{\rho, x}$ y para toda sucesión $\{s_n\}$ de números reales $s_n \rightarrow 1^+$ tenemos

$$\theta_{\tilde{x}, s_n} \rightarrow \mu_x.$$

Esta afirmación es válida para cada $x \in S$.

Prueba. Para cualquier punto y en una hoja \mathcal{L} de la foliación \mathcal{F}_ρ isomorfa al plano de Poincaré tomamos la hoja de flujo positivo

$$H := \{\Phi(z, t) : z \in (\tilde{q})^{-1}(y) \text{ y } t > 0\}.$$

Mediante la aplicación $\tilde{q}|_H: H \rightarrow \mathcal{L}_{\tilde{x}}$ levantamos la sucesión de medidas $\{\theta_{\tilde{x}, s_n}\}$ a una sucesión de medidas μ_{x, s_n}^+ sobre $T^1 \mathcal{F}_\rho$ y por el Teorema 5.14 esta sucesión converge a μ_x^+ . Luego, usando el Lema 1.2 obtenemos

$$\theta_{\tilde{x}, s_n} \rightarrow \mu_x,$$

que es lo que queríamos probar. \square

5.5 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE μ_x .

Interpretando los Teoremas 5.1 y 5.15, estos nos dicen que en los casos:

- (1) $\rho = \rho_{can}$ la representación canónica,
- (2) $\rho = w_* \rho_{can}$ la representación casi-canónica y
- (3) ρ es la representación en un grupo Schottky.

las medidas $\{\mu_x : x \in S\}$ obtenidas al hacer la desintegración de $\mu = \tilde{q}_* \mu^- = \tilde{q}_* \mu^+$ se pueden aproximar mediante medidas de probabilidad con soporte en los puntos contenidos en la intersección de una hoja isométrica al plano de Poincaré $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_\rho$ y las fibras $\mathbb{C}P_x^1$. Más precisamente, existe un conjunto abierto no-vacío $\mathcal{P} \subset M_\rho$ cuya intersección con cada fibra $M_{\rho,x}$ es un conjunto abierto no-vacío en la fibra $M_{\rho,x}$, y tal que para cualquier hoja \mathcal{L} de la foliación \mathcal{F}_ρ con $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} \cap M_{\rho,x} \neq \emptyset$ y para cualquier sucesión $\{s_n\}$ de números reales $s_n \rightarrow 1^+$, la familia de medidas

$$\{\mu_{\tilde{x}, s_n} := \frac{1}{g_{s_n}(\tilde{x}, \tilde{x})} \sum_{x' \in K} e^{-s_n(\tilde{x}, x')} \delta_{x'}\}$$

(donde $\tilde{x} \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P} \cap \mathbb{C}P_x^1$, $K = \mathcal{L} \cap \mathbb{C}P_x^1$ y (\tilde{x}, x') denota la distancia hiperbólica en la hoja $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\tilde{x}}$) converge débilmente a la desintegración μ_x de $\mu = \tilde{q}_* \mu^- = \tilde{q}_* \mu^+$ sobre la fibra $M_{\rho,x}$. Así, los Teoremas 5.1 y 5.14 nos dan una técnica geométrica para aproximar las medidas $\{\mu_x : x \in S\}$.

5.6 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE μ_x^+ .

Ahora probaremos que la medida μ_x^+ se puede aproximar de manera similar a la medida μ_x .

Como ya mencionamos la Proposición 4.1 también es válida para las representaciones casi-canónicas. La versión de esta proposición para el caso de un grupo Schottky es un poco diferente y la damos en la Proposición 5.13. Estos resultados implican que para el caso de la representación casi-canónica, si consideramos los puntos de intersección del conjunto $(\tilde{p})^{-1}(T_x^1 S)$ y una hoja de flujo positivo (definida en la sección 5.1), estos están muy cercanos salvo un número finito a los puntos correspondientes en su conjunto atractor. Esto es, dado $\epsilon > 0$ existe a lo más un número finito de puntos x' s en el conjunto

$$(5.3) \quad (\tilde{p})^{-1}(T_x^1 S) \cap H \quad \text{donde } H \text{ es una hoja de flujo positivo}$$

tales que

$$d_{T^1 \mathcal{F}_\rho}(x, \sigma^+ \circ \tilde{p}(x)) \geq \epsilon.$$

Para cualquier punto y en una hoja \mathcal{L} de la foliación \mathcal{F}_ρ isomorfa al plano de Poincaré tomamos la hoja de flujo positivo

$$H := \{\Phi(z, t) : z \in (\tilde{q})^{-1}(y) \quad y \quad t > 0\}.$$

En la fibra $(\tilde{q} \circ p)^{-1}(x)$ las hojas de flujo se acercan al conjunto atractor $(\tilde{p})^{-1}(T_x^1 S)$.

Esto nos da una descripción más completa del flujo geodésico foliado. También esto nos da una interpretación geométrica de las medidas $\{\mu_x^+ : x \in S\}$: cada sucesión μ_{x, s_n} convergiendo a μ_x dada en el Teorema 5.1 ó Corolario 5.16 se puede levantar mediante la aplicación $\tilde{q}|_H : H \rightarrow \mathcal{L}_{\tilde{x}}$ a una sucesión de medidas $\mu_{\tilde{x}, s_n}^+$ sobre $T^1 \mathcal{F}_\rho$ convergiendo a μ_x^+ con soporte en el conjunto (5.3). De esta manera, la medida μ_x^+ se puede aproximar con una sucesión geométrica de medidas con soporte en cualquier hoja de flujo.

Bibliografía.

- [1] Ch. Bonatti et X. Gómez-Mont, *Sur le comportement statistique des feuilles de certains feuilletages holomorphes*, preprint 222, U. Bourgogne, 2000, to appear in LEns. Math.
- [2] Ch. Bonatti, X. Gómez-Mont and M. Viana, *Généricité d'exposants de Lyapunov non-nuls pour des produits déterministes de matrices*, preprint 241, U. Bourgogne, 2001.
- [3] Ch. Bonatti, X. Gómez-Mont and R. Vila-Freyer, *The Foliated geodesic Flow on Riccati Equations*, Preprint 254, U. Bourgogne, 2001.
- [4] R. BOWEN. Publ. math. I.H.E.S., *Hausdorff dimension of quasi circles*, Publ. math. I.H.E.S., 50 (1979), pp. 11-26.
- [5] Coddington, E., Levison, N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, (1955).
- [6] H. Farkas and I. Kra, *Riemann surfaces*, Springer-Verlag, Berlin and New York (1980).
- [7] G. B. Folland, *Real Analysis*, John Wiley and Sons.
- [8] L. GARNETT, *Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion*, J. Funct. Anal., 51, No. 3 (1983), 285-311.
- [9] A. Katok and B. Hasselblatt,, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Volume 54 (1995).
- [10] S. L. Krushkal', *Quasiconformal Mappings and Riemann Surfaces*, V. H. WINSTON & SONS, Washington, D.C., (1979).
- [11] LAWSON, H. BLAINE, JR. Bull. Amer. Math. Soc., *Foliations*, Amer. Math. Soc., 80, (1974) 369-418.
- [12] O. Letho K.I. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer-Verlag.
- [13] B. Maskit, *Kleinian Groups*, Springer-Verlag.
- [14] S. NAG, *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, A Wiley-Interscience Publication.
- [15] P. J. Nichols, *The Ergodic Theory of Discrete groups*, Cambridge University Press.
- [16] S. J. PATTERSON, *El conjunto límite de un Grupo Fuchsiano*, Acta. Math., 136 (1976), pp. 241-273.
- [17] D. Sullivan, "The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions", Publ. Math. I.H.E.S., 50 pp. 171-202, 1979.
- [18] D. Sullivan, "Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups", Acta Math., 153 pp. 259, 1984.