Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

CIMAT

Análisis de Franjas Usando Regularización con Potenciales con Condición de Reposo Adaptable

TESIS

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con orientación en

Computación y Matemáticas Industriales

PRESENTA

Carlos Alberto Galván Hernández

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Mariano José Juan Rivera Meraz

Noviembre 2000 *Guanajuato, Gto. México*

A mi esposa Marycarmen,

a mis padres

y a mi tía Enriqueta

CIMAT
BIBLIOTECA

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Mariano Rivera Meraz la paciencia que tuvo conmigo para la realización de este trabajo, así como su comentarios atinados para el buen camino en la ejecución de las diversas tareas, pues gracias a su conocimiento el avance en las mismas fue el adecuado para la terminación de este trabajo.

De manera muy especial quiero agradecer a mi hoy esposa quien durante el tiempo de mis estudios ayudó a que nuestra relación soportara los momentos difíciles que se presentaron, gracias a su paciencia y apoyo incondicional. Gracias a la alegría y paciencia que me transmitía supo motivarme e impulsarme para concluir esta meta que hoy logro.

Otro agradecimiento especial es para mis padres y mi tía Enriqueta, gracias a su apoyo y ánimos, el trabajo que este documento encierra pude efectuarlo de una manera más sencilla.

También quiero agradecer a todo el personal académico del área de cómputo del CIMAT, cuyos comentarios e ideas me permitieron ampliar el conocimiento en los diferentes temas abordados en la tesis. Así como mis compañeros de estudios Félix Calderón y Edgar Arce, cuyas pláticas permitieron ampliar el conocimiento de los temas en los cursos.

Quiero hacer mención del apoyo incondicional de que fui objeto por el Centro Nacional de Metrología, en especial al Dr. Ignacio Hernández, director del área de Metrología Mecánica y al Dr. Miguel Viliesid jefe de la división de Metrología Dimensional cuyo respaldo permitió que mi superación en el ámbito profesional fuera una realidad. Así como al CONACYT por el apoyo económico recibido.

Finalmente quiero hacer mención de mi gratitud para todo el personal del CIMAT, investigadores, personal administrativo y demás trabajadores que con su amabilidad y disponibilidad para ayudar, facilitaron en gran medida las actividades escolares y no escolares, haciendo las estancia el CIMAT los mas llevadero posible.

C I M A T
BIBLIOTECA

015984

Índice General

1 Introducción **3**
1.1 Desarrollo de la tesis 3

2 Interferometría y Análisis de Interferogramas **5**
2.1 Movimiento ondulatorio 5
2.2 Diferencia de fase y notación compleja 5
2.3 La intensidad 6
2.4 Interferencia 7
2.5 Interferometría 8
2.5.1 Interferómetro Twymann-Green 8
2.5.2 Formación de interferogramas en un interferómetro Twymann-Green . 9

2.6 Análisis de interferogramas 11
2.6.1 Análisis de Fourier 11
2.6.2 Algoritmo de Carré 13
2.6.3 Regularización con Filtros de cuadratura 15

3 Regularización Preservando Bordes. **17**
3.1 Regularización Basada en Estimación Bayesiana 17
3.1.1 Estimador MAP 20
3.2 Funcional de Energía U 21
3.3 Regularización Robusta 22
3.3.1 Procesamiento de Líneas 23
3.3.2 Potenciales basados en estimadores M 25
3.3.3 Modelo de resortes con condición de reposo adaptable 28

4 Regularización en patrones de franjas **33**
4.1 Obtención de los interferogramas 33
4.2 Modelo de Resortes 34
4.2.1 Minimización de $U(a, b, f)$ 35
4.2.2 Ejemplos 36
4.3 Modelo de Resortes con Condición de Reposo Adaptable 39
4.3.1 Ejemplos 40
4.4 Estimación de la frecuencia en una Patrón de Franjas 45
4.5 Modelo de placa con rigidez adaptable 46

5 Caso de Estudio **54**
5.1 Descripción de problema 54
5.2 Algoritmo original 55
5.3 Algoritmo para encontrar la longitud del bloque 59
5.3.1 Nomenclatura 59
5.3.2 Algoritmo 60
5.4 Desventajas del algoritmo original 61

5.5 Mejora del algoritmo usando una modificación del algoritmo de Carré 62
5.6 Comparación de la Mejora de Carré con el Algoritmo Original 65
5.7 Calculo completo del modelo de franjas usando el concepto placa con rigidez adaptable 66
5.7.1 Inicialización del modelo 69
5.7.2 Cálculo completo del modelo de interferograma 70
5.7.3 Modelo de placa con rigidez fija 71
5.8 Estimación del corrimiento de franjas 72
5.9 Resultados 73
5.10 Ajuste en dos dimensiones 76

6 Conclusiones **78**

1 Introducción

La determinación de la fase óptica de un patrón de franjas es un problema importante que encuentra aplicaciones en muchas áreas, por ejemplo, en metrología óptica se han diseñado técnicas como interferometría de Moiré, moteado (speckle) y holográfica, para la medición de un amplio espectro de magnitudes físicas, entre las cuales se puede mencionar la forma de superficies, desplazamiento, tensión, vibraciones, índice de refracción y planicidad; entre muchas otras. En estas técnicas se obtiene, como resultado de los experimentos, un patrón de franjas en dos dimensiones cuya fase espacial esta en todo el patrón de franjas y esta relacionada íntimamente con la magnitud física que se quiere conocer.

Una aspecto importante dentro de los experimentos mencionados, es por tanto, el análisis de los patrones de franjas que se obtienen de los mismos. Las computadoras han simplificado en gran medida el análisis de las franjas en los interferogramas. Los métodos de análisis de franjas pueden ser divididos en dos clases:

1. Aquellos que reducen primero la imagen a una serie de líneas que corresponden a los centros de las franjas. Con ellos se pueden estimar los desplazamientos y el orden de franja con cierta presición. Estos tienen el inconveniente de tomar en cuanta solo una parte de la información de las franjas en la imagen, pues la parte relevante solo es su centro. En el caso de estudio del capítulo final de este trabajo se muestra uno de estos métodos.

2. Aquellos que procesan directamente el campo entero de franjas para obtener la diferencia del camino óptico. En estos algoritmos si se toma en cuenta la información de la imagen en su totalidad y permite una reconstrucción mas suave de la fase, pero a su vez, esto significa un aumento en la complejidad de los algoritmos. Una subdivisión de este tipo de algoritmos lo representan los algoritmos basados en las técnicas de corrimiento de fase (PSI), estos algoritmos emplean varios interferogramas del mismo experimento, solo que presentan un corrimiento (conocido o desconocido) en la frecuencia fundamental. Este tipo de métodos son los que se abordaran casi en la totalidad del trabajo.

1.1 Desarrollo de la tesis

El contenido del trabajo de tesis es como sigue. En el segundo capítulo se abordarán los temas referentes a interferometría y análisis de interferogramas. En este capítulo se pretende introducir al lector a la teoría que involucra el tema de la interferencia, método por el cual se obtienen la mayoría de los interferogramas mediante técnicas como el moteado y la holografía, así como con el uso de interferómetros particulares que utilizan de manera práctica el fenómeno de la interferencia. Además de lo anterior, en el capítulo se describen algunos de los algoritmos publicados referentes al análisis de interferogramas con portadora, dentro de estos se puede mencionar al método de Análisis de Fourier, Carré, Filtros de cuadratura, entre otros.

En el tercer capítulo, se describen técnicas de regularización robusta como una de las técnicas mas usadas en el procesamiento de imágenes. Esta técnica esta basada en la teoría de estimación bayesiana, mediante la cual se pueden realizar reconstrucciones de imágenes

obtenidas de muy diversas maneras. Dentro de estas imágenes se cuentan los interferogramas que se obtienen tanto por proyección de franjas como por procedimientos de interferometría. Se presentan, además, algunos de los operadores mas empleados con esta técnica para los casos de patrones de franjas. El tema de regularización robusta se concibe como la robustez del método para la detección de "outliers" que caen fuera del modelo propuesto y que entre otras cosas determinan los bordes de los objetos en las imágenes.

El cuarto capítulo del trabajo, presenta la idea central de la tesis, que es la introducción de los filtros de placa adaptable, los cuales eliminan algunos de los problemas de los algoritmos que se han publicado usando estimación bayesiana, siendo mas robustos a errores en la estimación inicial de los parámetros de los interferogramas a analizar, se presentan gráficas de los resultados obtenidos para su comparación con otros métodos. Se analizan desde los modelos mas simples, hasta el modelo robusto que se propone, este modelo es capaz de detectar bordes en los interferogramas, así como la detección de zonas no constantes, que incluyan cambios pequeños en la segunda derivada (curvatura) del modelo.

El quinto capítulo contiene la descripción de un caso de estudio, que generó, en un principio, la investigación que se reporta en este trabajo. Este caso de estudio se refiere al análisis de patrones de franjas que son obtenidos en un interferómetro del tipo Tywmann-Green, que es empleado para la calibración de bloques patrón por interferometría. Este instrumento se encuentra en el Centro Nacional de Metrología (CENAM). El caso de estudio inicia con el análisis del algoritmo que posee en la actualidad el instrumento. Con el fin de entender el funcionamiento del mismo, se propone una mejora usando uno de los algoritmos que existen en la literatura como es el algoritmo de Carré (algoritmo basado en el principio de corrimiento de fase), en su versión espacial, por solo contar con un interferograma. Posteriormente se presenta el problema usando los filtros que se proponen en el capítulo 4, con imágenes reales obtenidas en el experimento del interferómetro del CENAM. Se presentan ejemplos de los ajustes realizados, así como, la comparación con el algoritmo original con la propuesta de la mejora al de Carré.

Finalmente en el último capítulo del trabajo, se determinan las conclusiones generales del trabajo, así como, las del análisis del caso de estudio presentado. Se mencionan también algunos de los inconvenientes que presenta el método propuesto.

2 Interferometría y Análisis de Interferogramas

En este capítulo se pretende introducir al lector a la teoría que involucra la interferometría. Para ello, se estudiará el concepto de interferencia, como principio del funcionamiento de los interferómetros (formadores de los interferogramas). Se describirá la estructura de un interferómetro Tywmann-Green que será utilizado en el caso de estudio al final de este documento. Además, se presentará la forma como se generan los interferogramas. Finalmente se describen brevemente los algoritmos mas conocidos para el análisis de interferogramas.

2.1 Movimiento ondulatorio

La figura 1, muestra el movimiento de una onda armónica que se propaga en la dirección del eje z. Este movimiento queda expresado por la ecuación (1), esta es,

$$\psi(z,t) = U\cos\left[2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \nu t + \delta\right)\right] \tag{1}$$

El argumento de la función coseno es denominado la fase de la onda. Los otros parámetros involucrados son:

U : amplitud

λ : longitud de onda

ν : frecuencia (el número de ondas por unidad de tiempo)

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$: número de onda

δ : desfasamiento inicial de la onda

2.2 Diferencia de fase y notación compleja

Considérese la figura 1 la cual está representada por la ecuación (1). Sean z_1 y z_2 dos puntos distintos a lo largo de la dirección de propagación, entonces sus respectivas fases están representadas por $\phi_1 = kz_1 - 2\pi\nu t + \delta$ y $\phi_2 = kz_2 - 2\pi\nu t + \delta$. La diferencia de fase entre los puntos z_1 y z_2 queda dada por la ecuación (2),

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = k(z_1 - z_2) \tag{2}$$

Por tanto, se puede ver que la diferencia de fase entre dos puntos a lo largo de la dirección de propagación de una onda es igual a la diferencia de longitud de la trayectoria multiplicada por el número de onda (diferencia de camino óptico). Esto es verdadero en general para cualquier haz de luz. Cuando la luz pasa a un medio diferente al del aire (o vacío), se debe multiplicar por el índice de refracción del medio, para obtener el denominado *camino óptico*.

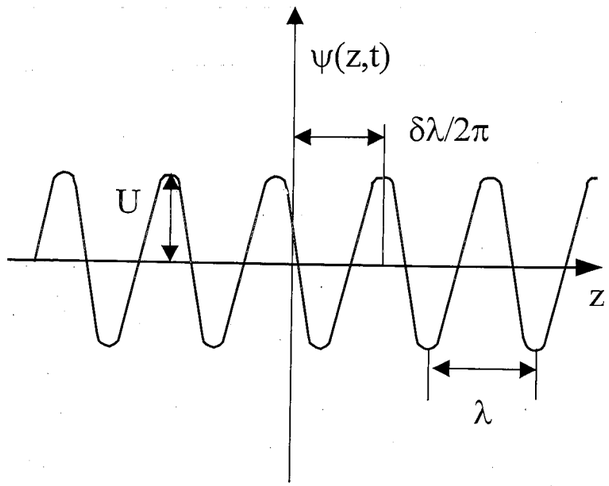


Figura 1: Moviemiento armónico de la onda

La expresión de la ecuación (1) puede ser escrita en forma compleja como lo muestra la ecuación (3) a continuación,

$$\psi(z,t) = \mathrm{Re}\left\{Ue^{i(\phi-2\pi\nu t)}\right\} \tag{3}$$

Donde $\phi = kz + \delta$ es conocida como la fase espacial

Una ventaja de la representación compleja del campo es que las partes temporal y espacial se pueden factorizar como se muestra en la ecuación (4), además se ha estandarizado la notación para omitir el símbolo de la representación de la parte real de dicha expresión.

$$\psi(z,t) = Ue^{i\phi}e^{-i2\pi\nu t} \tag{4}$$

En metrología óptica y algunos otros campos de la óptica, es de especial interés la distribución espacial del campo. Debido a que la parte temporal es conocida para cada componente de frecuencia, es posible omitir entonces el factor $e^{-i2\pi\nu t}$ y solo considerar la amplitud compleja espacial.

2.3 La intensidad

Cuando se habla del registro de la luz (como en el caso de la fotografía), se debe estar familiarizado con el hecho de que el medio de registro directo del campo de amplitud no existe. Los detectores mas comunes (como el ojo, los fotodiodos, películas fotográficas, etc.) registran la irradiancia (esto es, el efecto por unidad de área), la cual es proporcional al campo de la amplitud elevada al cuadrado, tal como lo expresa la ecuación (5).

$$I = |u|^2 = U^2 \tag{5}$$

Esta importante cantidad será referida como la *intensidad*

2.4 Interferencia

El fenómeno de interferencia ocurre cuando dos o mas ondas se superponen unas sobre otras en el espacio. Esto es, se puede asumir que dos ondas se pueden describir como lo muestran las ecuaciones en (6) expresadas como,

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1 e^{i\phi_1} \\ u_2 &= U_2 e^{i\phi_2} \end{aligned} \tag{6}$$

Si las ondas de las ecuaciones (6) se traslapan, la teoría de ondas electromagnética establece que el campo resultante simplemente llega a ser la suma de dichas ondas, lo que queda representado en la ecuación (7) como,

$$u = u_1 + u_2 \tag{7}$$

Como se estableció en la sección anterior, la cantidad que es observable es, sin embargo, la intensidad por lo cual se debe expresar la suma en términos de esta magnitud, como se observa en (8),

$$\begin{aligned} I &= |u|^2 = |u_1 + u_2|^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos(\phi_1 - \phi_2) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\phi \end{aligned} \tag{8}$$

Donde $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$. Para la simplificación de la ecuación (8) se usó:

$$e^{i\phi_2}e^{i\phi_1} = \left[e^{i(\phi_1+\phi_2)}\right]\left[\frac{e^{-i(2\phi_2)} + e^{-i(2\phi_1)}}{2}\right] = \frac{e^{i(\phi_1-\phi_2)} + e^{-i(\phi_1-\phi_2)}}{2} = \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

Como se puede observar en la ecuación (8), la intensidad resultante no es exactamente la suma de las intensidades de las dos ondas, por ello se dice que las dos ondas interfieren y el término $2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\phi$ es llamado el término de interferencia. También se puede observar que cuando $\Delta\phi = (2n+1)\pi$ para $n = 0, 1, 2....$ el $\cos\Delta\phi = -1$ y por tanto I alcanza un mínimo (antifase); mientras que cuando $\Delta\phi = 2n\pi$ para $n = 0, 1, 2....$ $\cos\Delta\phi = 1$ en donde la intensidad alcanza su máximo, en este momento, las dos ondas están fase, lo cual significa que las dos ondas interfieren constructivamente.

Con lo anterior se puede deducir que la diferencia de fase se debe a que los haces han recorrido diferentes caminos, pues la fase espacial tiene que ver con el recorrido de la onda,

esto se puede observar en la ecuación (2), que contiene la variable que indica el recorrido de la onda (z).

La ecuación (8) puede también ser representada por la ecuación (9), donde los elementos de intensidad se han conjuntado en un solo elemento A que significa la iluminación de fondo. En tanto que el término que multiplica al coseno de la diferencia de fase es conocido como el término de contraste y se simplifica colocando la expresión B, esto es,

$$I = A + B\cos\Delta\phi \tag{9}$$

2.5 Interferometría

El fenómeno de interferencia puede ser observado mediante unos instrumentos conocidos como interferómetros. Se puede demostrar que las ondas de luz interfieren solo si son emitidas por la misma fuente de luz (propiedades de coherencia)[4]. La mayoría de los interferómetros constan de los elementos mostrados en la figura 2.

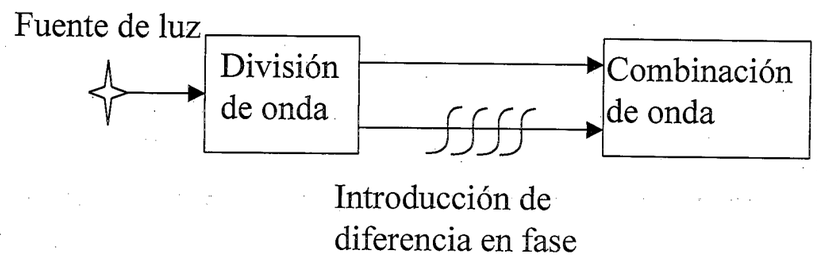


Figura 2: Elementos en un interferómetro

Dependiendo de como las luz es dividida, los interferómetros se pueden clasificar como interferómetros de división de frente de onda o divisores de amplitud de onda, aún cuando hay algunos arreglos interferométricos que caen un poco fuera de esta clasificación. En la siguiente sección se describirá el funcionamiento y configuración de un interferómetro del tipo Tywmann-Green al que se hará referencia en el caso de estudio al final de este documento. El lector puede obtener una descripción de otros arreglos en las referencias [4] y [5].

2.5.1 Interferómetro Twymann-Green

Quizá el mas conocido de los interferómetros divisores de amplitud es el interferómetro de Michelson, el cual se muestra en la figura 3. En el arreglo, la amplitud del campo de luz emergente de S es dividido por un divisor de haz (*beam splitter* BS) es cual es un espejo parcialmente reflejante. Las ondas reflejadas y transmitidas se propagan hacia los espejos M_1 y M_2 respectivamente, donde son reflejados de nueva cuenta y recombinados para formar la distribución de interferencia sobre el detector D.

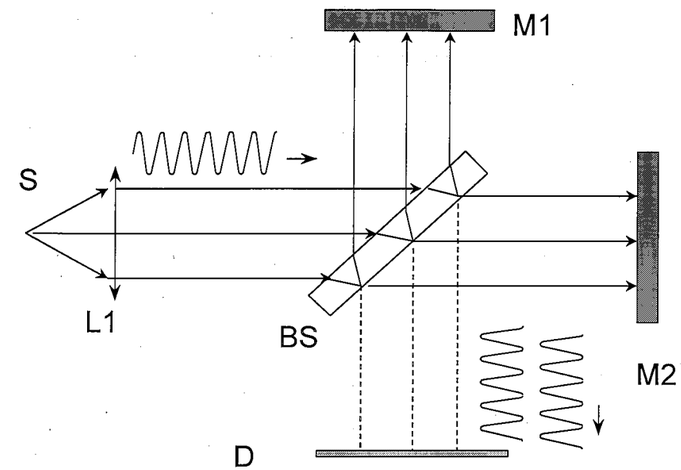


Figura 3: Interferómetro de Michelson

A partir del interferómetro de Michelson se genera una nueva configuración que es en muchos sentidos parecida. La figura 4 muestra un esquema del interferómetro de Twymann-Green, el cual fue patentado en 1916. En él, se puede observar que después de que el sistema es iluminado con una fuente de luz puntual cuasi-monocromática, la luz es colimada por medio del sistema de lentes L_1. El frente de onda es entonces dividido en amplitud mediante un divisor de haz. Después de la reflexión de la luz en ambos espejos se reflejan una vez mas sobre el divisor de haz. Se forman entonces dos patrones de interferencia, uno yendo hacia la lente L_2 y otro regresando a la fuente de iluminación. La lente L_2 permite que toda la luz de su apertura entre en el punto de observación de tal forma que pueda ser visto todo el campo. Las franjas observadas son de *igual espesor*.

Otro punto a destacar es el compensador que se ha incluido (aun cuando algunos autores se lo incluyen también al interferómetro de Michelson), pues como se puede observar los haces que pasan hacia el espejo M_2 cruzan el divisor de haz tres ocasiones, en tanto que los del espejo M_1 solo lo harían una vez en el caso de eliminar el compensador. Por ello se coloca este elemento para permitir una compensación en diferencia de camino óptico, así como por cambio en índice de refracción.

2.5.2 Formación de interferogramas en un interferómetro Twymann-Green

En esta sección se describirá la formación del interferograma en un interferómetro Twymann-Green, para ello se hará referencia a la figura 4.

De acuerdo a la figura 4, los haces sobre la superficie de los espejos, siguen la misma trayectoria, es decir no hay una diferencia de camino óptico considerando que los espejos son superficies planas perfectas y se encuentran alineados de manera correcta, es decir son perpendiculares entre si. No importa la distancia entre los espejos y el divisor de haz,

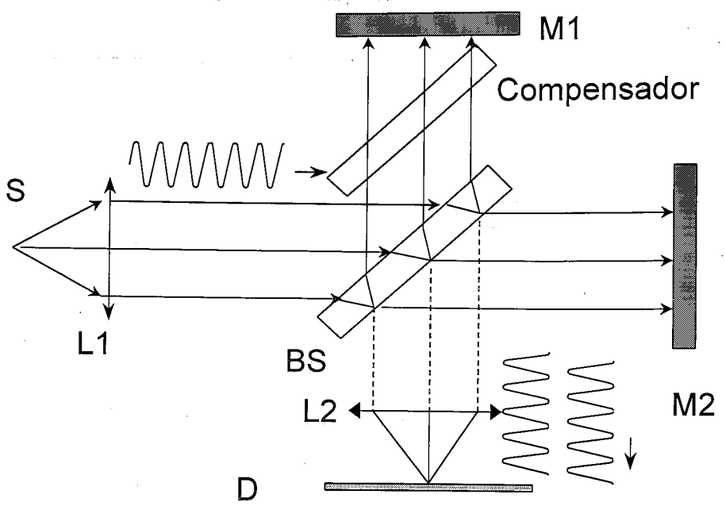


Figura 4: Interferómetro Tywmann-Green

básicamente se verá una imagen con el mismo valor en todo su área, esto es, debido a que no existe diferencia en el camino óptico de los haces, el termino de interferencia en la ecuación (8) es constante para cada punto sobre el espejo y puede estar ubicado sobre cualquier punto de la función cosenoidal. Ahora bien, si la diferencia en camino óptico entre los dos frentes de onda parciales puede ser modificada moviendo uno de los espejos, por ejemplo M_2, el cual puede ser montado sobre una plataforma movible. Un desplazamiento de magnitud x de M_2, genera una diferencia de camino óptico de $l = 2x$ y una diferencia de fase igual a $\Delta\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) 2x$. Si mientras M_2 se mueve, su desplazamiento es medido contando el número de máximos de luz registrados por el detector y usando este conteo, teniendo como referencia la unidad de tiempo se puede determinar la velocidad de movimiento de objeto.

En el caso de una deformación sobre las superficie del espejo, es posible visualizar franjas que representarán dicha deformación. Otra opción para observar franjas en un instrumento de este tipo, consiste en inclinar alguno de los espejos, generalmente el de referencia M_1. Esta inclinación permitirá la introducción de una variación en el camino óptico sobre la superficie del espejo, la cual se puede expresar como $\Delta\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) 2\varpi_0 x$, la cual representa la introducción de una frecuencia portadora sobre el interferograma generado. Mientras mas grande sea la inclinación del espejo (representado por ϖ_0) mayor será la frecuencia portadora. Con este arreglo es posible analizar altura de objetos colocado sobre la superficie del espejo M_2 tal como es el principio de funcionamiento del instrumento descrito en el caso de estudio al final de este documento. Con esto se obtienen franjas equiespaciadas que determinarán la inclinación del espejo, y la forma del objeto en cuestión.

La figura 5 muestra un interferograma que se puede obtener con un interferómetro Twymann-Green.

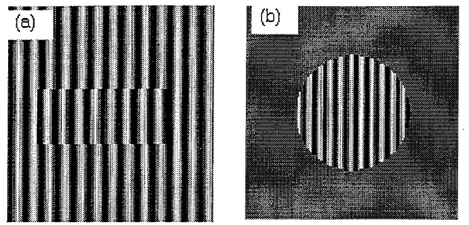


Figura 5: Ejemplo de interferogramas: (a) Objeto con caras planas sobre el espejo M_2, (b) simple inclinación de M_2

2.6 Análisis de interferogramas

La Metrología Óptica usa técnicas que por medios ópticos realizan la medición de una gran variedad de magnitudes físicas. Dichas pruebas ópticas son: la interferometría clásica, de Moiré, de speckle y holográfica. El resultado de estas pruebas es generalmente un interferograma que se puede modelar como se expresa en la ecuación (8). El trabajo que arroja resultados en las mediciones de estas pruebas es el elemento $\Delta\phi$ de la mencionada ecuación, el cual se encuentra íntimamente ligado con la magnitud física que se desea determinar. A este proceso se le denomina la recuperación de fase en patrones de franjas.

En esta sección se hace una pequeña revisión de algunas de la técnicas mas usuales empleadas en Metrología Óptica haciendo, énfasis en aquellas que se puedan emplear para encontrar las fase en patrones generados por medio de un interferómetro Twymann-Green utilizando el efecto de inclusión de portadora.

La idea principal es la obtención de la función de fase $\Delta\phi$ de la ecuación (8), sin embargo el registro que se hace de la intensidad del interferograma hace que esta función se encuentre codificada junto con la función de iluminación A y la función de contraste B tal como se muestra en la ecuación (9). Aunado a este problema se presenta otro: debido a la periodicidad de la función coseno la cual tiene como argumento la fase, ocasiona que se tenga una ambigüedad en la determinación de fase. A este problema se le denomina como fase envuelta pues en la mayoría de los casos se obtiene la fase modulo 2π. Otro problema adicional, es que el signo de la fase no puede ser extraído con una sola medición de la intensidad sin un conocimiento previo de la forma de la fase, este problema se debe a las características de simetría de la función coseno ($\cos\phi = \cos -\phi$). Estos dos problemas no serán abordados en el contenido de este trabajo, pero el lector se puede referir a [5] para mayor detalle.

2.6.1 Análisis de Fourier

El método de Análisis de Fourier cae dentro de las segunda clasificación de métodos de análisis de interferogramas que se hizo en la introducción, es decir, analizar toda la información de las franjas no solo los centros. Este método fue propuesto por Takeda and Mutoh en 1982 [20] usando solamente un renglón de la imagen del interferograma. Este método es aplicable para patrones de franjas con portadora, como los obtenidos en un interferómetro Twymann-Green.

Para describir el método se debe tomar en cuenta la ecuación (9), pero expresada como una función de (x, y) pues se hará referencia a una imagen bidimensional. Lo anterior se puede expresar como se muestra en la ecuación (10), esto es,

$$h(x,y) = a(x,y) + b(x,y)\cos(\varpi_0 x + \phi(x,y)) \tag{10}$$

Para claridad, se asume que la inclinación que introduce la portadora en el patrón de franjas esta dirigida sobre el eje x. La ecuación (10) puede ser expresada como

$$h(x,y) = a(x,y) + c(x,y)\exp(i\varpi_0 x) + c^*(x,y)\exp(-i\varpi_0 x) \tag{11}$$

donde

$$c(x,y) = b(x,y)\frac{\exp[i\phi(x,y)]}{2} \tag{12}$$

y c^* es el complejo conjugado de c

Si se aplica la transformada de Fourier $\left(\hat{\mathcal{F}}\{\cdot\}\right)$ a la expresión anterior, se obtendría la siguiente expresión

$$H(f_x, f_y) = A(f_x, f_y) + C(f_x - \varpi_0, f_y) + C^*(f_x, +\varpi_0, f_y) \tag{13}$$

Donde $A(f_x, f_y) = \hat{\mathcal{F}}\{a(x,y)\}, C(f_x, f_y) = \hat{\mathcal{F}}\{c(x,y)\}$.

Si se gráfica una señal como la expresada en la ecuación (13), expresada como su magnitud, se podría observar algo como lo mostrado en la figura 6, es decir una imagen con tres lóbulos en el espectro de Fourier, elementos que se ven en la misma ecuación y la separación de los lóbulos depende de la frecuencia portadora ϖ_0. El método de Takeda consiste en aislar uno de los lóbulos de alta frecuencia ya que estos contienen la información de fase. Habiendo aislado uno de los lóbulos mediante el uso de un filtro de cuadratura $(H(f_x - \varpi_0))$, por ejemplo $C(f_x - \varpi_0, f_y)$, se obtiene una señal filtrada.

Se puede entonces aplicar la transformada inversa de Fourier a la señal filtrada con lo cual se obtiene una señal compleja g_f representada por la ecuación (14). En esta ecuación se puede observar que sigue apareciendo el término de fase que se esta buscando $\phi(x,y)$, con la consiguiente portadora. Si se conoce con precisión el término de portadora (ϖ_0), esta se puede eliminar simplemente multiplicando la señal por la exponencial compleja $\exp[i\varpi_0 x]$

$$g_f(x,y) = \frac{1}{2}b(x,y)\exp[i(\phi(x,y) - \varpi_0 x)] \tag{14}$$

Finalmente, la fase módulo 2π (fase envuelta) del patrón de franjas puede ser estimada usando la función arco tangente sobre la señal compleja que se obtiene

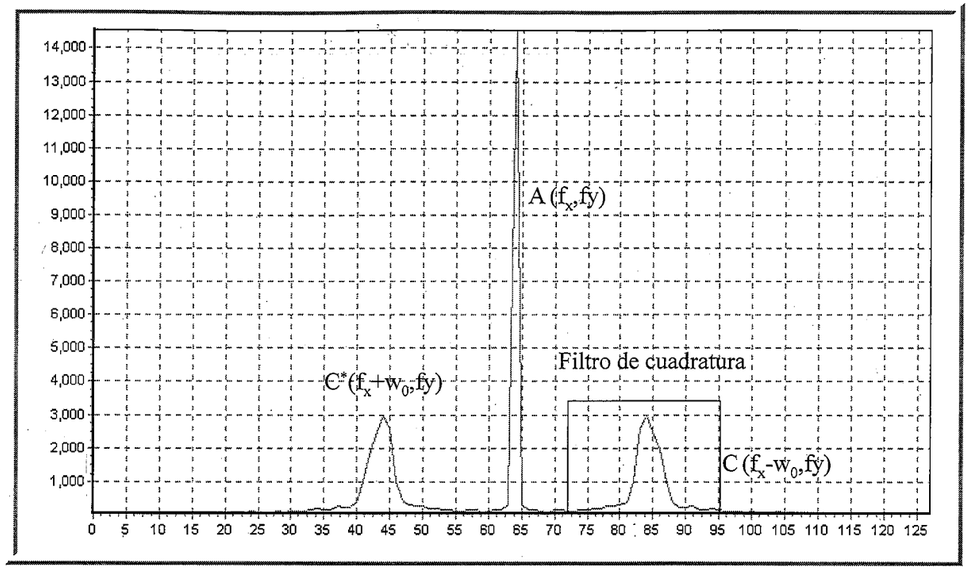


Figura 6: La transformada de Fourier de un patrón de franjas con portadora

$$\phi(x,y) = \tan^{-1}\frac{\operatorname{Im} g_f(x,y)}{\operatorname{Re} g_f(x,y)} \tag{15}$$

Este análisis de Fourier registra buenos resultados cuando es seleccionada adecuadamente la ventana H para hacer el filtrado. Por eso mismo la dificultad de este es estimar esa ventana, así como su forma, pues se puede utilizar una simple ventana rectangular o una ventana con forma de una distribución gaussiana (en forma de campana).

2.6.2 Algoritmo de Carré

El algoritmo de Carré es un algoritmo que resuelve problemas para encontrar el mapa de fase usando la técnica de corrimiento de fase o PSI por sus siglas en inglés (Phase Shifting Interferometry). Mediante esta técnica se hace el registro, generalmente electrónico, de una serie de interferogramas mientras la fase de referencia del interferómetro va cambiando[15] [5]. La fase del frente de onda es codificada en las variaciones de intensidad del patrón de los interferogramas registrados y la fase es recuperada por un cálculo punto a punto.

El concepto relativamente sencillo que hay detrás de la PSI es que se introduce un corrimiento de fase que varía con el tiempo entre el frente de onda de referencia y el frente de onda en prueba. Esto se puede expresar en la siguiente ecuación

$$I(x,y,t) = A(x,y) + B(x,y)\cos[\phi(x,y) + \delta(t)] \tag{16}$$

Donde $\delta(t)$ representa la variación en fase con respecto al tiempo que se ha mencionado. La expresión de la ecuación (16) puede verse en el tiempo como si las franjas en los diversos interferogramas se fueran desplazando a través del campo.

Cuando se tienen varios interferogramas del mismo objeto o experimento, es posible hacer el cálculo directo y puntual de cada uno de los elementos de la ecuación de patrón de franjas expresada en (16). Lo cual se logra al tener, por ejemplo, cuatro interferogramas. Como resultado se tendrá un sistema lineal de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, el cual se puede resolver directamente. Algunos métodos de PSI usan únicamente tres interferogramas y que mediante pasos algebraicos es posible obtener expresiones para cada una de las variables del sistema.

Estos métodos suponen que se conoce el desplazamiento $\delta(t)$, el algoritmo de Carré no lo hace, por el contrario supone únicamente que los desplazamientos entre los interferogramas es constante. Así pues, supone un desplazamiento lineal de 2α, entre cada uno de los interferogramas, de tal manera que los valores de referencia en la fase están dadas por $\delta_i = -3\alpha, -\alpha, \alpha, 3\alpha$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Estos valores son escogidos con el fin de hacer más simples los cálculos de las expresiones. Así, las cuatro ecuaciones que representan los interferogramas quedan representados como sigue:

$$I_1(x,y) = A(x,y) + B(x,y)\cos[\phi(x,y) - 3\alpha] \tag{17}$$
$$I_2(x,y) = A(x,y) + B(x,y)\cos[\phi(x,y) - \alpha] \tag{18}$$
$$I_3(x,y) = A(x,y) + B(x,y)\cos[\phi(x,y) + \alpha] \tag{19}$$
$$I_4(x,y) = A(x,y) + B(x,y)\cos[\phi(x,y) + 3\alpha] \tag{20}$$

Esta serie de cuatro ecuaciones contiene cuatro incógnitas lo cual es factible de resolver. La solución para el corrimiento de fase de referencia puede hacerse expandiendo estas cuatro ecuaciones y aplicando la identidad trigonométrica para el seno y el coseno de 3α, con lo cual se llega a la expresión

$$\alpha(x,y) = \tan^{-1}\left[\frac{3(I_2 - I_3) - (I_1 - I_4)}{(I_4 - I_1) + (I_2 - I_3)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

La solución para el frente de onda en cada posición de la medición esta dada por

$$\phi(x,y) = \tan^{-1}\left\{\tan[\alpha(x,y)]\frac{(I_1 - I_4) + (I_2 - I_3)}{(I_2 + I_3) - (I_1 + I_4)}\right\} \tag{22}$$

Si se combinan las ecuaciones (21) y (22), se llega a una ecuación directa para el cálculo de $\phi(x,y)$ como se expresa en la siguiente,

$$\phi(x,y) = \tan^{-1}\left\{\frac{\{[3(I_2 - I_3) - (I_1 - I_4)][(I_1 - I_4) + (I_2 - I_3)]\}^{\frac{1}{2}}}{(I_2 + I_3) - (I_1 + I_4)}\right\} \tag{23}$$

La expresión anterior presenta un problema, al hacer la programación en la computadora. Algunos de los lenguages de programación realizan el cálculo del arcotangente de un valor

solo en el intervalo de $-\pi$ a π, con lo cual la determinación en el intervalo de 0 a 2π, no es del todo directa. Por ello se han implementado otras funciones que requieren los elementos del numerador y denominador (esto es el coseno y seno de dicha función) para determinar el signo del ángulo resultante por la función del arcotangente. La conversión del resultado del arcotangente en el algoritmo de Carré al frente de onda módulo 2π, no es tan directo como lo puede ser alguno de los otros algoritmos de PSI. En otros algoritmos los términos del seno y el coseno del frente de onda de la fase $\phi(x,y)$ son proporcionales al numerador y al denominador del arcotangente y mediante estos valores se puede corregir el ajuste considerando el valor en cada uno de los cuadrantes para el seno y coseno. En el algoritmo de Carré, la raíz cuadrada en el numerador genera un valor absoluto del seno de $\phi(x,y)$, no directamente el seno. Por tanto se deben construir algunas expresiones que sean proporcionales al seno y coseno de $\phi(x,y)$ con el fin de realizar el ajuste de manera correcta, así el conjunto de expresiones se puede deducir que son[5]:

$$\begin{aligned} \sin[\phi(x,y)] &\propto (I_2 - I_3) \\ \cos[\phi(x,y)] &\propto (I_2 + I_3) - (I_1 + I_4) \end{aligned} \tag{24}$$

Con estas proporcionalidades se puede entonces estimar el verdadero valor de la fase en módulo 2π de la fase. Para mayor detalle del ajuste de acuerdo a los signos el lector se debe referir a [5]

2.6.3 Regularización con Filtros de cuadratura

Los filtros de cuadratura (QF's) son filtros pasabanda complejos cuya parte real e imaginaria son las transformadas de Hilbert respectivamente. Los QF's lineales se pueden diseñar en el dominio de las frecuencias eliminando con un filtro pasabandas todos los componentes que corresponden a las frecuencias negativas (algo similar al aplicado en el método de Fourier). Uno de los diseños mas populares corresponde a los filtros de Gabor, el cual corresponde a una ventana Gaussiana en el dominio de las frecuencias en tanto que en el dominio espacial corresponde al producto de una exponencial compleja con una ventana Gaussiana (veáse [1] y [3]). Estos filtros pueden ser expresados como en la siguiente ecuación, para el dominio de las frecuencias

$$H(\varpi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma}\exp\left[\frac{(\varpi - \varpi_0)^2}{4\sigma^2}\right] \tag{25}$$

y para el dominio espacial se tiene una expresión como la siguiente (en una dimensión)

$$h(x) = \exp\left(-\sigma^2 x^2\right)[\cos(\varpi_0 x) + i\sin(\varpi_0 x)] \tag{26}$$

Mediante estos filtros se puede hacer una recuperación de fase similar a como se resuelve el problema con el método de Fourier. Considere el modelo de franjas expresado en (9), pero expresadas en términos de exponenciales complejas, como lo muestra la siguiente ecuación,

$$g(x,y) = a(x,y) + \frac{b(x,y)}{2}\{\exp[i(\phi(x,y)+\varpi_0 x)] + \exp[-i(\phi(x,y)+\varpi_0 x)]\} \tag{27}$$

Si a la ecuación anterior se le aplica el filtro de cuadratura, esto es, se realiza la convolución en el dominio espacial, se llega a la siguiente expresión

$$g_f(x,y) = g(x,y) * h(x,y) \approx \frac{b(x,y)}{2}\exp[\phi(x,y)+\varpi_0 x] \tag{28}$$

Lo anterior representa una señal compleja como la que se obtiene con el método de Fourier, así que solo resta eliminar la portadora para la recuperación de la fase envuelta.

Un nuevo filtro de cuadratura denominado "*Robust Quadrature Filter*" fue propuesto por Marroquín, Figueroa y Servín [2]. Este tipo de filtros se basa en la Teoría de Estimación Bayesiana con Campos Aleatorios Markovianos complejos como modelos *a priori*. La técnica consiste básicamente en minimizar una funcional de costo o de energía que contiene un término de datos el cual permite que dichos datos se parezcan a lo que estima y contiene además, un término denominado de regularización que puede restringir a que la estimación sea suave. En este caso, si se toma una función de energía de primer orden (también conocido como modelo de membrana), la forma de la función de energía queda expresada como lo muestra la ecuación siguiente, cabe destacar que por simplicidad se presenta el caso en una dimensión.

$$U(f) = \frac{1}{2}\sum_{x\in S}|f(x)-2g(x)|^2 + \frac{\lambda}{2}\sum_{x=2}^{N}|f(x)-f(x-1)\exp(i\varpi_0)|^2 \tag{29}$$

donde $f(x)$ es la señal que se desea estimar, la cual por supuesto, es compleja, $g(x)$ representa las observaciones, la región S es donde se realiza la primer sumatoria y corresponde a los sitios que son válidos en la señal, mientras que ϖ_0 representa el valor de la frecuencia portadora. La minimización de la función $U(f)$ corresponde a resolver el sistema lineal de ecuaciones que se obtiene al derivar la expresión de $U(f)$ con respecto a f y esta expresión (que representa el gradiente), igualada a cero. Una de la ecuaciones del sistema (que no considera efectos de borde) se representa en la siguiente ecuación

$$f(x) - 2g(x) - \lambda[f(x-1)\exp(i\varpi_0) - 2f(x) + f(x+1)\exp(-i\varpi_0)] = 0 \tag{30}$$

Los métodos de solución para este tipo de sistemas, son en su mayoría iterativos pero bastante eficientes, ya que como se puede observar los sistemas constituyen matrices bandeadas, así pues se puede emplear métodos con descenso de gradiente simple, Gauss-Seidel (que arroja muy buenos resultados) o gradiente conjugado [14].

3 Regularización Preservando Bordes.

Muchos problemas de Procesamiento de Imágenes y Visión Computacional son considerados mal planteados (*"ill possed"*, Hadamard, 1923), en el sentido que es imposible encontrar una solución única. Un ejemplo de problema mal planteado consiste en reconstruir una imagen $\hat{f}$ a partir de una imagen observada g que contiene ruido, se dice que es un problema mal planteado, véase la ecuación (31). Considere en este modelo, a η como ruido aditivo y a F se le considera un operador no lineal el cual se asume conocido, pero que (en general) no es invertible.

$$g(i) = F\left(\hat{f}(i)\right) + \eta(i) \tag{31}$$

La información que contiene este modelo, no es suficiente para hacer la reconstrucción exacta del campo $\hat{f}$, por ello algunos autores han propuesto el uso de técnicas de regularización, las cuales, mediante la introducción de restricciones adicionales que codifican un conocimiento *a priori* del campo, hacen posible la reducción del número de soluciones posibles al modelo, permitiendo acotar la estimación en un intervalo mucho mas pequeño. En particular, es común en problemas de reconstrucción, introducir el hecho de coherencia espacial, el cual expresa el conocimiento *a priori* acerca de las superficies en la escena.

3.1 Regularización Basada en Estimación Bayesiana

Si se supone que η tiene una distribución de probabilidad P_η y este ruido se considera blanco (esto es, si el ruido es una variable aleatoria que es independiente de la posición en la imagen) se puede construir el campo de distribuciones condicionales independientes $(P_{g|f})$. En otras palabras, $P_{g|f}$ representa el campo de verosimilitudes. Suponiendo que f es un campo que toma valores reales, se puede asumir, en la mayoría de los casos, que el ruido es aditivo y Gaussiano (con media 0 y variancia σ^2), de tal forma que el campo de verosimilitudes para cada sitio r queda entonces expresado como lo muestra la ecuación (32), donde Z representa una constante de normalización tal que pueda construir una distribución de probabilidad [17]. Los sitios r, representan una posición en el campo, si se trata de una imagen entonces $r = (x,y)$.

$$P_{g_r|f_r} = \frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{(f_r-g_r)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{32}$$

En caso de que el esquema de ruido no sea considerado Gaussiano, la función de la distribución de probabilidad se puede encontrar como el negativo de la log-verosimilitud de la distribución, esto con la finalidad de que la distribución quede expresada como una distribución de Gibbs.

La verosimilitud de la imagen observada g esta dada según la ecuación (33), esto debido al hecho de la independencia que se asumió en cada uno de los sitios del modelo.

$$P_{g|f} = \prod_{r \in L} P_{g_r|f_r} \tag{33}$$

Bajo este esquema se pretende encontrar la distribución condicional *a posteriori*, esto es la probabilidad condicional de $P_{f|g}$, lo cual implica, en otras palabras, obtener f dado que se conoce el valor de las observaciones g, para lo cual se puede usar la regla de Bayes que relaciona las dos probabilidades condicionales (*a priori* y *a posteriori*). Para mostrar la regla de Bayes se puede usar la secuencia de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} P_{f|g} &= \frac{P(f,g)}{P_f} \\ P_{g|f} &= \frac{P(g,f)}{Pg} \\ P(f,g) &= P(g,f) \\ P_{g|f}P_g &= P_{f|g}P_f \\ P_{f|g} &= \frac{P_{g|f}P_f}{P_g} \end{aligned} \tag{34}$$

En la regla de Bayes, aparece la distribución *a priori* P_f. Esta P_f permite al usuario introducir el conocimiento *a priori* que tenga sobre la imagen, el cual es necesario para lograr una buena estimación del campo f como se mencionó al inicio de este capítulo

La técnica de Estimación Bayesiana usa la descripción de la regla de Bayes para la solución de los problemas mal planteados en procesamiento de imágenes, la cual se basa en el uso de modelos de campos aleatorios Markovianos (CAM). Bajo este esquema, se modela el campo $\hat{f}$ que se trata de reconstruir como un campo aleatorio sobre los lugares de una retícula (lattice) regular L (el cual usualmente coincide con la lattice de pixeles). Se asume que este campo es Markoviano en el sentido de que las dependencias probabilísticas están restringidas a la vecindad de cada posición. Las restricciones que se desean imponer a la solución son expresadas por medio de distribuciones *a priori*, las cuales (debido a que el campo es Markoviano), toman la forma de una distribución de Gibbs como se observa en la ecuación (35):

$$P_f(f) = \frac{1}{Z_f} \exp\left(-\beta \sum_C V_C(f)\right) \tag{35}$$

La funciones $V_C(f)$, son conocidas como funciones de potencial que penalizan cualquier desviación del campo f con respecto al conocimiento *a priori*. Por otro lado, la suma es tomada sobre todas las pandillas ("cliques") C del sistema de vecindades definido sobre L. Una pandilla esta definida como el conjunto de nodos o sitios tales que todos los sitios que pertenecen a la pandilla C son vecinos entre sí. Para ello se tiene entonces que establecer el concepto de vecindad.

Por ejemplo, si se toma una vecindad de primer orden, la cual consiste de los lugares que están a la distancia unitaria de un sitio dado, las pandillas correspondientes serán los pares de vecinos mas cercanos de cada uno de los sitios, para describir esto se sugiere la siguiente notación si $r = (x, y)$ denota el sitio en la retícula de pixeles de la imagen a tratar (en dos dimensiones), $\langle r, s \rangle$ denotará los pares de vecinos mas cercanos. Y la notación N_r denotará el concepto de vecindad, para el caso de vecindad de primer orden se tiene entonces

$$N_r = \{(x-1, y), (x+1, y), (x, y-1), (x, y+1)\}.$$

Cada función de potencial V_c depende solo de los valores del campo en los lugares que pertenecen a la pandilla correspondiente.

Otros parámetros en la ecuación (35) son el parámetro β el cual es un valor real positivo en tanto que Z_f es una constante de normalización.

Para determinar la forma de las funciones de potencial V_C, se debe considerar la forma que debiera tener el campo reconstruido $\hat{f}$, el cual en la mayoría de los casos se considera suave y que puede tomar valores reales, un modelo muy usado en estas funciones es el cuadrado de las aproximaciones de las diferencias finitas como si fueran las derivadas parciales espaciales del modelo. Este modelo aplicado a la vecindad de primer orden (conocido como modelo de membrana) queda expresado como se ve en la ecuación (36)

$$V_{r,s}(f) = (f_r - f_s)^2 \tag{36}$$

En el esquema anterior r, s representan el par de vecinos mas cercanos de los sitios. En este caso el parámetro β, controlará la suavidad del campo reconstruido: mientras mas grande sea el valor, mas suave se pedirá que sea el campo.

Conjuntando los modelos anteriores en la regla de Bayes se obtiene la expresión:

$$P_{f|g} = \frac{P_{g|f}P_f}{P_g} = \frac{1}{Z_P} \exp(-U(g, f)) \tag{37}$$

donde Z_P es una constante de normalización y la función $U(g, f)$, que es conocida como de energía, está dada por la distribución de Gibbs mostrada por:

$$U(g, f) = \beta \sum_C V_C(f) + \sum_r (F(f_r) - g(r))^2 \tag{38}$$

Note en la ecuación (38) que la segunda sumatoria corresponde a la verosimilitud del modelo $P_{g|f}$, la cual aprovechando las propiedades de independencia entre los sitios y por ser una distribución expresada de manera exponencial, se obtiene que los productos de todos los sitios r se convierte en una sumatoria para todos los sitios r del modelo. Por otro lado, este término en la literatura también es conocido con el nombre de término de datos, y es aquí donde se debe establecer a que modelo corresponden los datos.

La primera sumatoria en la ecuación (38), es considerada el término de regularización, este término, permite que el modelo que se estima se parezca al modelo que se supone es el verdadero, por ello también, el parámetro β es considerado el parámetro de regularización.

Para completar el esquema de estimación Bayesiana aplicada al campo de procesamiento de imágenes, se debe considerar una función de costo que me indique que tan buena o mala es mi estimación del campo, en base a las observaciones, para lo cual existen varias propuestas. A continuación se analizarán algunas.

Uno de los primeros casos que se pueden considerar es la función de costo que se muestra en la ecuación (39), en donde se penaliza el cuadrado de las diferencia entre el valor real del campo f y el valor estimado $\hat{f}$, lo cual parece ser una buena estimación a primera vista.

$$C\left(f,\hat{f}\right) = \left(f-\hat{f}\right)^2 \tag{39}$$

La función de costo anterior nos lleva a un resultado poco satisfactorio como se muestra en la secuencia de ecuaciones (40), donde se desarrolla la estimación del valor esperado de la función de costo el cual se quiere minimizar.

$$\begin{aligned}
Q\left(\hat{f}\right) &= E\left[C\left(f,\hat{f}\right)\right] \qquad (40)\\
Q\left(\hat{f}\right) &= E\left[\left(f-\hat{f}\right)^2\right]\\
Q\left(\hat{f}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(f-\hat{f}\right)^2\right]P_{f|g}df\\
Q\left(\hat{f}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^2 P_{f|g}df - 2\hat{f}\int_{-\infty}^{\infty} fP_{f|g}df + \int_{-\infty}^{\infty} f^2 P_{f|g}df\\
Q\left(\hat{f}\right) &= \hat{f}^2 - 2\hat{f}\bar{f} + K\\
\frac{\delta Q}{\delta\hat{f}} &= 2\hat{f} - 2\bar{f} \quad \text{haciendo } \frac{\delta Q}{\delta\hat{f}} = 0\\
\hat{f}^* &= \bar{f}
\end{aligned}$$

La conclusión a la que se llega con el estimador propuesto es que se debe obtener la media del campo f, el cual no es una buena estimación para varios de los criterios usados en procesamiento de imágenes.

3.1.1 Estimador MAP

Otra opción a considerar como función de costo consiste en considerar un costo unitario si la estimación no es la correcta y un costo nulo solamente en el caso de la obtención correcta. Esta función puede representarse como lo muestra la ecuación (41), donde la

función $\delta\left(f-\hat{f}\right)$ representa una delta de Dirac, esto es, vale uno donde su parámetro sea cero y cero en cualquier otro caso. El lector puede referirse a [17] para mas detalles

$$C\left(f,\hat{f}\right) = 1-\delta\left(f-\hat{f}\right) \tag{41}$$

Con esta función se puede obtener la secuencia de ecuaciones representada a continuación, donde E representa el valor esperado de la función de costo C. Debe recordase que se desea minimizar el valor esperado de la función de costo, por eso se sigue el procedimiento para encontrar el mínimo de la expresión en los párrafos siguientes.

$$\begin{aligned}
Q\left(\hat{f}\right) &= E\left[C\left(f,\hat{f}\right)\right] \qquad (42a)\\
Q\left(\hat{f}\right) &= E\left[1-\delta\left(f-\hat{f}\right)\right] \qquad (42b)\\
Q\left(\hat{f}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[1-\delta\left(f-\hat{f}\right)\right]P_{f|g}df \qquad (42c)\\
Q\left(\hat{f}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}P_{f|g}df - \int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\hat{f}\right)P_{f|g}df \qquad (42d)\\
Q\left(\hat{f}\right) &= 1-P_{f|g}\left(\hat{f}\right) \qquad (42e)
\end{aligned}$$

La expresión (42e) de la secuencia anterior, representa la función de costo a considerar, se debe buscar minimizar esta función de costo para determinar la mejor estimación respecto a dicha función, para ello, se puede deducir que el mínimo de la función esta dado para aquel valor donde la $P_{f|g}\left(\hat{f}\right)$ sea máxima, el cual se conoce como el estimador de Máximo A Posteriori (MAP), esto es, maximizar la distribución *a posteriori*. El estimador MAP es uno de los mas ampliamente usados gracias a los resultados favorables que muestra su aplicación.

$$\hat{f}^* = \max_{\hat{f}} P_{f|g}\left(\hat{f}\right) \quad \text{estimador MAP} \tag{43}$$

Retomando la ecuación (37) que contiene la ecuación de la distribución de probabilidad. En ella se ve que la función de energía $U(g,f)$, necesita ser mínima para que la probabilidad sea máxima, esto se puede ver por el signo negativo que tiene la expresión de la exponencial, pues a menor valor en la $U(g,f)$, mayor valor reflejará la función exponencial negativa. Así el problema del estimador MAP, se resuelve minimizando la función $U(g,f)$ por algún método de optimización.

3.2 Funcional de Energía U

La solución regularizada (usando el estimador MAP de $\hat{f}$) es calculada mediante la minimización de la funcional de energía U:

$$\hat{f} = \arg\min_{f} U(f)$$

La cual puede ser vista como

$$U(f) = D(f) + \lambda R(f)$$

Dentro de la cual, el término de datos $D(f)$ establece que la reconstrucción de $\hat{f}$ debe ser consistente con los datos observados g. El término de regularización $R(f)$ impone una penalización por la violación del conocimiento *a priori* que se introduce, además de que la contribución relativa de cada término a la energía global esta pesada por el parámetro λ. En el marco de la teoría de la estimación bayesiana para la regularización, se estableció que el término $D(f)$ es escogido como el negativo de log verosimilitud.

Una expresión muy utilizada para funcional, al tratarse el tema de estimación bayesiana, expresada en términos de datos y de regularización, queda como se muestra en la ecuación (44). Esto en el caso de un sistema de vecindad de primer orden.

$$U(f) = \sum_{r} (F(f_r) - g(r))^2 + \lambda \sum_{\langle r,s \rangle} (f_r - f_s)^2 \tag{44}$$

Esta funcional es cuadrática con respecto a f y tiene un solo mínimo el cual es calculado resolviendo el sistema que resulta de hacer,

$$\frac{\delta U(f)}{\delta f_r} = 0$$

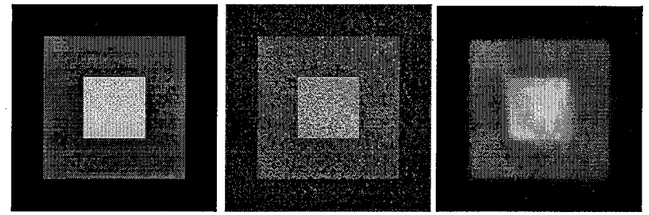
que en el caso de que f sea lineal se tiene un sistema lineal que puede ser resuelto usando algoritmos eficientes como el de gradiente conjugado (GC) [14]. Por otro lado es posible escribir potenciales de regularización que permitan considerar regiones suaves a pedazos, ello tiene el inconveniente de que la funcional resultante $U(f)$, tendrá que ser minimizada usando algoritmos tipo Montercarlo (como recocido simulado) que son extremadamente lentos[8].

3.3 Regularización Robusta

Uno de los principales inconvenientes en el esquema de regularización es el suavizamiento de bordes, así como la poca robustez del método ante la presencia de "outliers" en las observaciones. En el contexto de restauración de imágenes los "outliers" son localizados en aquellos sitios donde la condición de conocimiento *a priori* del modelo asumido no se satisface totalmente. De manera particular, en el caso en que el término de regularización, con el cual se asume una suavidad global a lo largo del campo, los "outliers" representan puntos donde se pueden predecir la presencia de bordes. Como consecuencia de esto, la función de potencial (44), genera un sobresuavizamiento en los bordes reales de la imagen. Para contrarrestar este efecto, se han propuesto lo que se ha dado a llamar procesamiento de líneas o el empleo de estimadores M, con los cuales se pretende hacer la detección de las zonas donde se rompe algunas de las características del modelo propuesto.

3.3.1 Procesamiento de Líneas

Para ejemplificar el problema de suavizamiento de bordes considerese la imagen de la figura 7, en la cual existen tres superficies diferentes, cuya profundidad marca su separación, la segunda muestra la misma imagen contaminada con ruido gaussiano así como un algunos "outliers". Si se realiza el suavizamiento de la imagen usando el modelo clásico (44), se observa como las regiones planas son suavizadas pero al mismo tiempo los bordes de las regiones sufren también el efecto de suavizado propiciando que la localización de las fronteras de las regiones sea imprecisa.



a b c

Figura 7: Ejemplo de reconstrucción de imagen (a) Superficie Original, (b) Superficie con ruido, (c) Recuperación

Si se agrega un procesamiento espacial de líneas, esto permite la recuperación de las superficies suaves a pedazos. Para hacer este proceso, se define una retícula dual tal que tiene sitios entre cada par de vecinos $\langle r, s \rangle$. En esta retícula dual se define el campo auxiliar l. La función original (44) se modifica por efectos de introducir el nuevo campo l en:

$$U(f, g, l) = \sum_{r \in L} (f_r - g_r) + \lambda \sum_{\langle r,s \rangle \in N_r} \left[(f_r - f_s)^2 l_{rs} + \Psi(l_{rs}) \right]$$

donde la variable $l_{rs} \in 1$ y toma valores entre $0 \leq l_{rs} \leq C$ para algún valor positivo de C típicamente para $C = 1$. El procesamiento de líneas indica entonces la presencia ($l_{rs} \longrightarrow 0$) o ausencia ($l_{rs} \longrightarrow C$) de discontinuidades entre los sitios r y s. Para describir la función $\Psi(l_{rs})$, puede pensarse como una penalización por la introducción de una discontinuidad entre los sitios r y s. La función de penalización típicamente va de 1, cuando l_{rs} tiende a cero y $\Psi(l_{rs}) \longrightarrow 0$, cuando no existe la discontinuidad ($l_{rs} \longrightarrow 1$). Por lo tanto, cuando no esta presente una discontinuidad, el término de regularización en la funcional de energía tiene la forma original, pero cuando se introduce la discontinuidad, el término de suavidad es dominado por $\Psi(l_{rs})$ en lugar del error espacial. Una ejemplo de función de penalización puede ser la función que se muestra en la figura 8, donde $\Psi(z) = \frac{1}{\mu}(\sqrt{z} - 1)^2$ teniendo a π como constante de penalización.

Al minimizar las nueva función objetivo con respecto a f y a l se obtiene una superficie suave a pedazos. La figura 9 muestra los resultados obtenidos con la misma imagen mostrada en la figura 7, pero ahora con la nueva función de energía.

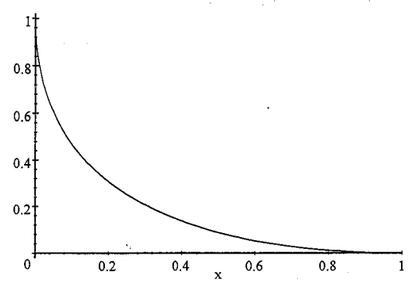


Figura 8: Ejemplo de función de penalización para procesamiento de lineas

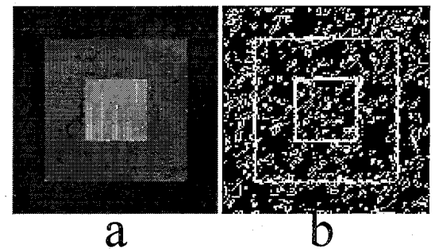


Figura 9: Reconstrucción de superficie con procesamiento espacial de lineas. (a) reconstrucción (b) discontinuidades espaciales

La figura 9 muestra como el nuevo modelo preserva discontinuidades entre las diversas capas de la imagen, pero además los resultados muestran como el proceso simple de líneas permite la introducción de discontinuidades espaciales espúreas. La función completa de energía quedará expresada como se muestra a continuación:

$$U(f,g,l) = \sum_{r\in L}(f_r - g_r) + \lambda \sum_{\langle r,s\rangle \in N_r}\left[(f_r - f_s)^2 l_{rs} + \left(\sqrt{l_{rs}} - 1\right)^2\right] \tag{45}$$

Nótese, que si se hace $\psi(z) = \frac{1}{\mu}(z-1)^2$ la funcional (45), corresponde a la propuesta por Ambrosio y Tortorelli.

A continuación se describe el algoritmo utilizado para la solución del problema. La inicialización de los valores de f corresponden a los valores observados esto es $f^0 = g$, en tanto que la lattice dual l contiene como valores uno, pues se considera que no existen bordes dentro del esquema.

Algoritmo 1 *Minimización de $U(f,l)$*

La minimización de la funcional es efectuada en un procedimiento de dos pasos: dada una estimación inicial de f, se repiten los pasos siguientes hasta que se logre la convergencia

1. Minimización de $U(f,l)$ con respeto a f, manteniendo los valores de l fijos

   (a) Para la minimización en este paso se obtiene la derivada parcial de $U(f,l)$ con respecto a f, e igualándola a cero, con ello se obtiene la aproximación por medio del método de Guass-Seidel. La expresión a calcular para cada posición queda expresada como

$$f(x,y) = \frac{\left[\begin{array}{c} g(x,y) \\ +\lambda\left[\begin{array}{c} f(x-1,y)\, l_{xy-1} + f(x+1,y)\, l_{xy+1} \\ +f(x,y-1)\, l_{x-1y} + f(x,y+1)\, l_{x+1y} \end{array}\right] \end{array}\right]}{1+\lambda\left[l_{xy-1} + l_{xy+1} + l_{x-1y} + l_{x+1y}\right]}$$

2. Minimización de $U(f,l)$ con respecto a l, manteniendo a f fija.

   (a) En ese paso se obtiene una fórmula cerrada para la solución del óptimo de l, quedando la expresión de la siguiente manera:

$$l_{rs} = \left(\frac{1}{1+(f(r)-f(s))^2}\right)^2$$

3.3.2 Potenciales basados en estimadores M

Otra forma de contrarestar el efecto de sobresuavizamiento de los bordes es mediante el empleo de estimadores M [13], los cuales corresponden al uso de funciones de potencial no convexas que crecen a una tasa mas lenta que la función cuadrática que se propone en el procesamiento de líneas.

Cuando se trabaja en el problema de ajuste de modelo, la meta es encontrar los valores de los parámetros $\mathbf{a}$, que minimicen el valor de los errores residuales $(g_r - \mathbf{f}(s;\mathbf{a}))$

$$\min_a \sum_{r\in L} \rho\left(g_r - \mathbf{f}(s;\mathbf{a}), \sigma_r\right) \tag{46}$$

donde σ_r es un parámetro de escala, el cual puede estar o no presente, mientras que ρ es la función que contiene la norma del error. Cuando se considera que los errores en las observaciones están normalmente distribuidos, la función ρ óptima es la cuadrática:

$$\rho\left(g_r - \mathbf{f}(s;\mathbf{a}), \sigma_r\right) = \frac{(g_r - \mathbf{f}(s;\mathbf{a}))^2}{2\sigma_r^2}$$

Lo anterior genera el problema conocido como de mínimos cuadrados. Al minimizar la expresión (46) resulta un estimador robusto o estimador M que corresponde al estimador de

Máxima Verosimilitud. La selección de diferentes funciones ρ genera diferentes estimadores M y la robustez de un estimador en particular estriba en su poca sensibilidad a los "outliers" o desviaciones del modelo estadístico, el cual fue asumido en la etapa de diseño de modelación. Para analizar el comportamiento de una función ρ, se puede hacer referencia a funciones de influencia de acuerdo a Hampel [7]. Las funciones de influencia caracterizan el sesgo que una medición en particular tiene sobre la solución y es proporcional a la derivada, ψ, de la función ρ. Por ejemplo, considerando la función cuadrática ρ:

$$\rho(x) = x^2, \psi(x) = 2x$$

Si se hace una estimación de mínimos cuadrados, la influencia de los "outliers" incrementa linealmente y no esta restringida, esto se puede observar en las figuras 10 y 11, donde se muestra tanto al gráfica de la función ρ como de la función ψ.

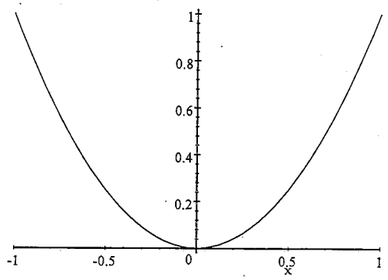


Figura 10: Función ρ cuadrática

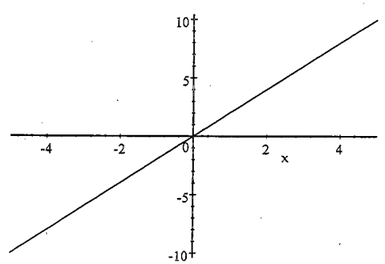


Figura 11: Función de influencia ψ de una función cuadrática

Para incrementar su robustez, un estimador debe ceder mas cuando se presenten mediciones consideradas "outliers". Esto es, debe incrementarse mas lentamente que como lo

hace x^2. Ante esta situación, se han propuesto diversas funciones ρ con el fin de satisfacer en mayor medida esta condición. Un resumen de estas funciones se pueden encontrar en [6]. Una cierta clase de estimadores que tienen una función de influencia que tiende a cero, es $\psi(x) = 0, |x| \geq r$ para algún valor positivo de r. Un ejemplo de esta función es una cuadrática truncada, la cual es ampliamente usada en visión computacional. La función ρ y la ψ se pueden observar en las figuras 12 y 13 respectivamente.

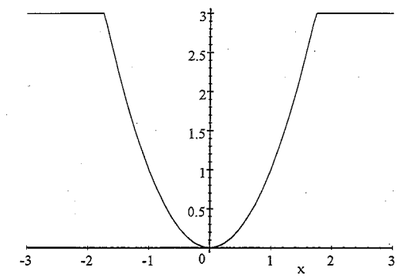


Figura 12: Función Cuadrática truncada

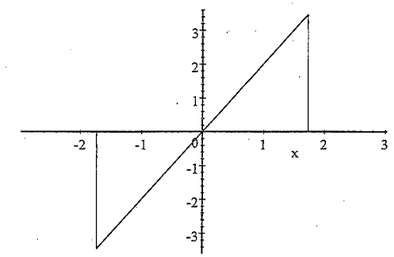


Figura 13: Función de influencia ψ de la cuadrática truncada

La solución de un modelo de regularización robusta a saltos grandes de gradiente para $\hat{f}$, se calcula mediante la minimización de la funcional de energía U_M:

$$U_M(f) = \sum_{r \in L} (f_r - g_r) + \lambda \sum_{\langle r,s \rangle \in N_r} \rho(f_r - f_s) \tag{47}$$

donde ρ es, por tanto, un estimador. Recientemente M. Black y Rangarajan demostraron que el uso de potenciales basados en estimadores estadísticos robustos es equivalente al uso explícito de procesamiento analógico de líneas para detección de "outliers" [6], que se mostraron en la sección 3.3.1.

3.3.3 Modelo de resortes con condición de reposo adaptable

Existen otros modelos que permiten resolver el problema de sobresuavizamiento de bordes, uno de estos modelos es el propuesto por Rivera y Marroquín en donde proponen el uso de potenciales α^2 [10].

Los potenciales robustos α^2 estan definidos como el minimizador en la siguiente ecuación

$$t^* = \min_t A^2(t)$$

Donde el elemento A^2 corresponde a la sumatoria de las funciones de potencial que puede ser expresada como

$$\alpha^2(t) = |t - \xi(t)|^2$$

esta propuesta se basa en la idea de usar funciones de potencial con condición de reposo no cero, en otras palabras, con condición adaptable. En este caso se pide que la función ξ sea tal que reúna las siguientes características:

1. $\xi\prime(t)$ existe
2. $\xi(t) = -\xi(-t)$
3. $\xi(0) = 0$
4. $|\alpha^2(t)| < |t^2|$ para aquellos valores de t donde se desea que sea robusto

Una de las funciones que reune las características mencionadas se puede observar en la figura 14, en tanto que las correspondientes α y α^2 se muestran en las figuras 15 y 16 respectivamente. En estas figuras, se puede observar como los potenciales de α^2 tienen una región penalizada cuadráticamente (para $t < |0.5|$) y fuera de esta región se tiene una zona de rechazo de "outliers".

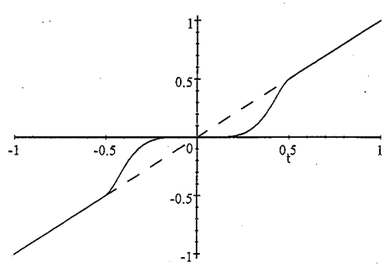


Figura 14: Función $\xi(t)$ característica

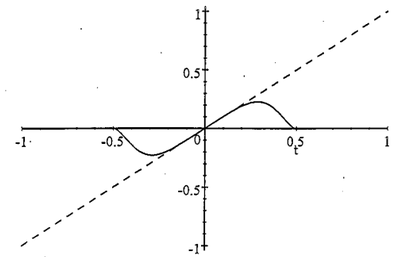


Figura 15: Función $\alpha(t)$ para la $\xi(t)$ de la figura 14

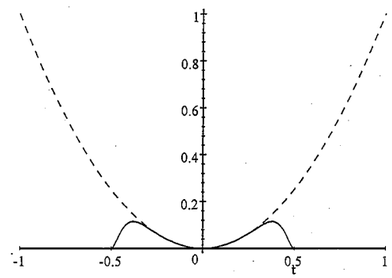


Figura 16: Función $\alpha^2(t)$ para la función $\xi(t)$ dada en 14

El uso de potenciales α^2 en el término de regularización, en lugar de un término cuadrático, produce en la ecuación funcional (44), una funcional con potencial cuadrático no lineal. Por tanto el mínimo de $\sum_t \alpha^2(t)$ con respecto a t, que como se dijo, corresponde al estimador α^2 y se resuelve calculando:

$$\sum_t \frac{\delta\alpha^2(t)}{\delta t_k} = 0$$

esto es:

$$\sum_t \alpha(t) \frac{\delta\alpha(t)}{\delta t_k} = 0$$

Con este nuevo modelo de funcionales, se obtiene un beneficio extra, esto es, si la función $\xi(t)$ se expresa como el producto de una función diferenciable, a la que se le puede llamar $\psi(t)$ y una variable auxiliar ϕ_t cuyo valor absoluto se restringe a tomar valores pequeños, se

puede observar que la nueva función de potencial α^2 puede ser expresada como se muestra a continuación

$$\alpha^2(t,\phi) = |t - \phi_t \psi(t)|^2 + \mu |\phi_t|^2$$

donde μ es un parámetro con valor positivo y el producto de $\phi_t \psi(t)$ debe ser pensado como la función original $\xi(t)$ y por tanto se deben satisfacer las cuatro condiciones mencionadas anteriormente. El significado de la variable extra que se ha introducido depende de la función $\psi(t)$ que se seleccione. Si por ejemplo se hace uso de la misma función mostrada en la figura 14, en este caso para un valor pequeño del parámetro μ y si $|t| < 0.5$, entonces el valor de ϕ_t será igual a cero, esto debido al efecto del término de penalización. Por otro lado, si $|t| > 0.5$ entonces el valor de ϕ_t será cercano a uno. Con este esquema entonces, se puede deducir que ϕ_t representa un detector de "outlier" controlado por la función $\psi(t)$.

Bajo este esquema y un modelo de vecindad de primer orden la función de potencial que se puede proponer es entonces de la forma como se muestra a continuación:

$$\alpha^2(f_r - f_s, \phi_{r,s}) = |f_r - f_s - \phi_{r,s}\psi(f_r - f_s)|^2 + \mu |\phi_{r,s}|^2$$

La condición de reposo señalada debe estar restringida, de tal forma que sea cercana a cero en regiones uniformes, y cercana al tamaño del brinco $(f_r - f_s)$ en las regiones donde aparezcan bordes en el campo f. De esto se puede deducir la funcional de energía completa que se propone minimizar y que se conoce como un sistema de resortes con condición de reposo adaptable (*Adaptive Rest Condition Springs ARC-S*) es:

$$U_{ARC}(f,\phi) = \sum_{r\in L}(f_r - g_r)^2 + \lambda \sum_{\langle r,s\rangle \in L} |f_r - f_s - \phi_{r,s}\psi(f_r - f_s)|^2 + \mu |\phi_{r,s}|^2$$

Para determinar la forma de ψ, se debe recordar que debe ser una función diferenciable, cercana a cero si su argumento $(f_r - f_s)$ es menor a una umbral θ predefinido y cercano a su mismo argumento $(f_r - f_s)$ en cualquier otro caso. Una función que presenta estas características y la cual proponen los autores, en primera instancia, es la siguiente, cuya gráfica se puede observar en la figura 14:

$$\psi(t) = \begin{cases} t\left[1 - \left(1 - \left(\frac{t}{\theta}\right)^{2n}\right)^2\right] & \text{si } t < \theta \\ t & \text{otro caso} \end{cases}$$

El algoritmo de minimización de esta ecuación vuelve a ser parecido al algoritmo de la sección de procesamiento de líneas,

Algoritmo 2 *Minimización de* $U_{ARC}(f,\phi)$

La minimización de la funcional es efectuada en un procedimiento de dos pasos: dada una estimación inicial de f, se repiten los pasos siguientes hasta que se logre la convergencia.

1. Minimización de $U(f,g,l)$ con respeto a f manteniendo los valores de ϕ fijos

   (a) En este paso se puede emplear algún método como descenso de gradiente o la modificación del método de Gauss-Newton que se describe en el siguiente capítulo. En ambos casos es necesario obtener la derivada de la funcional con respecto a f_r,

$$\frac{\delta U_{ARC}(f,\phi)}{\delta f_r} = (f_r - g_r) + \left[\begin{array}{c} \lambda \sum_{\langle r,s\rangle \in L}\left(f_r - f_s - \phi_{r,s}\hat{\psi}(f_r - f_s)\right) \\ \left(1 - \phi_{r,s}\frac{\delta\hat{\psi}(f_r - f_s)}{\delta f_r}\right) \end{array}\right]$$

2. Minimización de $U(f,g,l)$ con respecto a ϕ manteniendo a f fija.

   (a) En este paso se obtiene una fórmula cerrada para la solución del óptimo de ϕ después de derivar la expresión con respecto a ϕ e igualar a cero, quedando la expresión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\delta U_{ARC}(f,\phi)}{\delta \phi_{r,s}} &= \left(f_r - f_s - \phi_{r,s}\hat{\psi}(f_r - f_s)\right)\left(-\hat{\psi}(f_r - f_s)\right) + \mu|\phi_{r,s}| = 0 \\ \phi_{r,s} &= \frac{\hat{\psi}(f_r - f_s)}{\mu + \hat{\psi}^2(f_r - f_s)}(f_r - f_s) \end{aligned}$$

Este método ha probado tener una mejor respuesta para la detección de "outliers" según reportan los autores. Además, el uso de métodos basados en descenso de gradiente garantizan que el extremo calculado sea un mínimo (local) y no un máximo, como puede suceder, si se usara un algoritmo como Guass-Seidel. Para ilustrar esto escogemos la función ψ como la simple diferencia. La funcional quedará expresada como se muestra a continuación:

$$U_{ARC}(f,\phi) = \sum_{r\in L}(f_r - g_r)^2 + \lambda \sum_{\langle r,s\rangle \in L} |f_r - f_s - \phi_{r,s}(f_r - f_s)|^2 + \mu |\phi_{r,s}|^2$$

Con este arreglo la derivación para el cálculo de f_r queda también una forma cerrada. En este caso especial ($\psi(z) = z$), se nota que U es cuadrática en f dada ψ y, cuadrática en ψ dada f, por ello a pesar de lo dicho anteriormente, se puede emplear el método de Gauss-Seidel para el cálculo tanto de f_r como de $\phi_{r,s}$. A continuación se presentan las fórmulas cerradas para cada caso. Se considera una imagen en dos dimensiones por lo que $r = (x,y)$:

$$\frac{\delta U_{ARC}(f,\phi)}{\delta f_r} = f_r - g_r + \lambda \sum_{\langle r,s\rangle \in N_r}\left[f_r - f_s - \phi_{r,s}(f_r - f_s)\right]\left[1 - \phi_{r,s}\right] = 0$$

$$f_r - g_r + \lambda \sum_{\langle r,s\rangle \in N_r}\left[(f_r - f_s)\left(1 - \phi_{r,s}\right)^2\right] = 0$$

$$f_r = \frac{\left[g_r + \lambda \sum_{\langle r,s\rangle \in N_r} f_s \left(1-\phi_{r,s}\right)^2\right]}{1+\lambda\left[\sum_{\langle r,s\rangle \in N_r} \left(1-\phi_{r,s}\right)^2\right]}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta U_{ARC}(f,\phi)}{\delta \phi_{r,s}} &= \sum_{\langle r,s\rangle \in L} \left[f_r - f_s - \phi_{r,s}\left(f_r - f_s\right)\right]\left[-\left(f_r - f_s\right)\right] + \mu\phi_{r,s} \\ \phi_{rs} &= \frac{\left(f_r - f_s\right)^2}{\left(f_r - f_s\right)^2 + \mu}\end{aligned}$$

donde N_r es la vecindad de r, esto debido a que los pixeles en los límites de la imagen solo poseen algunos vecinos y no los cuatro considerados normalmente. Haciendo uso de la minimización de esta nueva funcional de energía, se obtienen los resultados con la imagen similar empleada en el ejercicio de procesamiento de líneas de la figura 9. La figura 17 contiene los resultados.

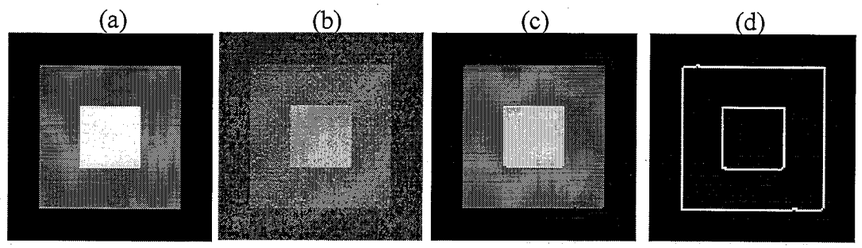


Figura 17: . a) Imagen Original. b) Imagen contaminada con ruido. c) Imagen restaurada. d) Outlier de la imagen

La solución obtenida es de mejor calidad a la mostrada en la figura 9, sobre todo en la zona de bordes, u "outliers" donde se obtiene una mejor definición entre los niveles de la imagen.

4 Regularización en patrones de franjas

En el capítulo anterior se explica como aplicar la técnica de estimación Bayesiana para la regularización de imágenes. En este capítulo se revisarán diversos modelos para la regularización de patrones de franjas, con lo cual se pretende calcular el elemento de fase en los diferentes sitios de la imagen, esto es, la recuperación del elemento $\phi(x,y)$ de un patrón de franjas cuyo modelo esta dado por:

$$h(x,y) = a(x,y) + b(x,y)\cos\left(\varpi_0 x + \phi(x,y)\right)$$

donde, como se explicó en el capítulo dos, el elemento a corresponde al elemento de iluminación de fondo, el elemento b corresponde al constraste de las franjas y ϖ_0 representa la frecuencia portadora dentro del patrón de franjas

4.1 Obtención de los interferogramas

Los interferogramas como ya se ha mencionado, representan una imagen en dos dimensiones de magnitud física a analizar, en particular la forma de un objeto, lo cual se ve como una secuencia de franjas. La obtención de las imágenes se puede hacer mediante la toma de un fotografía de la imagen con las franjas, para su posterior análisis.

El procedimiento anterior tiene el problema de pérdida de precisión en la ubicación de los puntos, pues no se puede percibir sin ayuda de alguna rejilla o algún otro instrumento, la posición relativa de un punto con respecto a otro de manera fija y con buena precisión.

Una de las formas que mas se usan en la actualidad para la obtención de la imagen de patrón de franjas es mediante el uso de una cámara CCD, la cual digitaliza la imagen en niveles de gris que varían en el intervalo de enteros entre 0-255, indicando un color blanco para el 255 y el negro por el valor de 0. En tanto que existen variaciones de tonos de gris restante para cada valor del intervalo. Mediante el uso de este tipo de cámaras, se logra la digitalización de la señal. Con ello se obtiene una representación en pixeles de la imagen con un solo valor, esto es la discretización de la señal, con lo cual se puede localizar el mismo punto las veces que sea necesario para el experimento.

Para lograr una mejor semejanza de la señal obtenida con una cámara CCD con el modelo de la ecuación (9), ya que esta ecuación representa una función con valores en el intervalo -1 a 1 (sin tomar en cuenta los elementos de iluminación a y b), se hace uso de un procedimiento de remapeo entre los niveles para la señal obtenida de la CCD que se encuentra entre 0 y 255. Para lo cual se hace uso de la ecuación (48), con la cual se puede hacer este ajuste entre los valores deseados. En esta ecuación f_r representa la señal original, $f_{\min}$ valor mínimo que se encuentra en toda la señal, $f_{\max}$ el valor máximo en la señal, en tanto $g_{\max}$y $g_{\min}$ representan los valores máximo y mínimo que se desea obtener en la señal después de la transformación (en el caso específico son 1 y -1 respectivamente).

$$g_r = \left(f_r - f_{\min}\right) * \frac{g_{\max} - g_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} + g_{\min} \tag{48}$$

Por simplicidad, en el resto de este capítulo se tratarán problemas de patrones de franjas en una sola dimensión, por esto, el problema que se resolverá será entonces expresado por:

$$h(x) = a(x) + b(x)\cos(\varpi_0 x + \phi(x)). \tag{49}$$

4.2 Modelo de Resortes

Tomando el modelo de la ecuación (49) para utilizarlo en regularización, y empleando un sistema de vecindad de primer orden, se puede construir el modelo de resortes para un patrón de franjas con portadora. En las siguientes ecuaciones, se considerará que el modelo de franjas es solo en la dirección horizontal, por ello se elimina la parte de frecuencia en el eje vertical.

Para este caso el término de datos en la ecuación de energía esta representado por la ecuación (50), donde la sumatoria es tomada sobre todos los sitios (pixeles) r de la región L que se esta manejando de la imagen observada.

$$U(a,b,f)_{Datos} = \sum_{r\in L}(a_r + b_r\cos(w_0 r + f_r) - g_r)^2 \tag{50}$$

donde se asume que los valores de a y b son desconocidos.

Por otra parte el término de regularización puede ser representado como en la ecuación (51), donde la sumatoria es tomada sobre todos los pares de vecinos mas cercanos de los sitios, los cuales se denotan como $\langle r,s\rangle$. Para este caso, donde se considera la vecindad de primer orden, se debe notar que cada punto $r = (x)$ en el interior de L (esto es , fuera de los bordes de la imagen), posee dos vecinos que caen dentro de la categoría de los mas cercanos, entre los cuales se mencionan los puntos $(x-1)$, $(x+1)$. En tanto que los pixeles o puntos que pertenezcan a los bordes solo pueden tener un vecino como máximo dentro de la región L.

$$U(a,b,f)_{regularización} = \lambda\sum_{\langle r,s\rangle}(f_r - f_s)^2 + \gamma\sum_{\langle r,s\rangle}(a_r - a_s)^2 + \beta\sum_{\langle r,s\rangle}(b_r - b_s)^2 \tag{51}$$

El parámetro λ, en el elemento de regularización es el parámetro que controla la cantidad de suavizamiento a la que será sometido el modelo para los valores de la fase f. En tanto las constante γ y β controlan el nivel de suavidad para los valores de a y b respectivamente. De esta forma la ecuación que modela en forma global este modelo de resortes para patrones de franjas queda expresada en la siguiente ecuación:

$$U(a,b,f) = \left[\begin{array}{c} \sum_r (a_r + b_r\cos(w_0 r + f_r) - g_r)^2 + \lambda\sum_{\langle r,s\rangle}(f_r - f_s)^2 \\ +\gamma\sum_{\langle r,s\rangle}(a_r - a_s)^2 + \beta\sum_{\langle r,s\rangle}(b_r - b_s)^2 \end{array}\right] \tag{52}$$

La solución para la fase del modelo anterior se encuentra minimizando la función $U(a,b,f)$ en cuyo mínimo la solución estará representada por los valores de f_r en cada sitio.

Debe notarse que estos modelos, no solo en el de resortes, si no en los demás que serán presentados en el trabajo, es necesario encontrar valores para cada una de las variables f_r, que equivalen, en número, al número de pixeles en la imagen que se esta tratando.

La derivada parcial de la función $U(g,f)$ es necesaria en la mayoría de los algoritmos de minimización, por tanto, es importante determinarla para emplear el algoritmo de optimización mas adecuado. La siguiente expresión contiene la derivada parcial con respecto a f_r.

$$\frac{1}{2}\frac{\delta U(g,f)}{\delta f_r} = \left[\begin{array}{c} (-b_r\sin(w_0 r + f_r))(a_r + b_r\cos(w_0 r + f_r) - g_r) \\ +\lambda\sum_{\langle r,s\rangle}(f_r - f_s) \end{array}\right] \tag{53}$$

La expresión de la ecuación anterior, contiene un elemento de sumatoria que debe hacerse sobre los pares de vecinos mas cercanos a la posición que se trate. En la ecuación (54), se desarrolla la sumatoria para el caso de una dimensión, que se esta tratando. Esto sucederá siempre y cuando el pixel se encuentre fuera de los bordes de la imagen, en caso contrario solo contendrá uno de los vecinos.

$$\frac{1}{2}\frac{\delta U(g,f)}{\delta f_r} = \left[\begin{array}{c} (-b_r\sin(w_0 r + f_r))(a_r + b_r\cos(w_0 r + f_r) - g_r) \\ +\lambda[(f_r - f_{r-1}) + (f_r - f_{r+1})] \end{array}\right] \tag{54}$$

Ahora bien, si la imagen se va tomar en dos dimensiones, entonces los vecinos mas cercanos serán cuatro para sitios no localizados en los bordes, pudiendo ser dos o tres en caso de localizarse en los bordes de la imagen. La ecuación siguiente muestra el desarrollo de la sumatoria de la vecindad para el sitio $r = (x,y)$.

$$\frac{1}{2}\frac{\delta U(g,f)}{\delta f_r} = \left[\begin{array}{c} (-b_r\sin(w_0 x + f_{x,y}))(a_r + b_r\cos(w_0 x + f_{x,y}) - g_{x,y}) \\ +\lambda[(f_{x,y} - f_{x-1,y}) + (f_r - f_{x+1,y}) + (f_{x,y} - f_{x,y-1}) + (f_r - f_{x,y+1})] \end{array}\right]$$

Además de las derivadas de la función $\frac{\delta U(g,f)}{\delta f_r}$, también es necesario determinar la otras derivadas con respecto a las demás variables. En este caso las derivadas $\frac{\delta U(g,f)}{\delta a_r}$ y $\frac{\delta U(g,f)}{\delta b_r}$.

Para lograr la minimización de las funciones, se puede emplear algún método que use el descenso de gradiente, pero estos métodos sugieren que se tenga una muy "buena" condición inicial para lograr una rápida convergencia, además, que la mayoría de los métodos solo garantizan al arribo a un mínimo local de la función.

4.2.1 Minimización de $U(a,b,f)$

Para la minimización de la función $U(a,b,f)$ se puede usar cualquier método de optimización para funciones no lineales que se conozca. En la mayoría de los métodos se debe emplear las derivadas parciales del modelo con respecto a las variables de interés, que en el caso de patrones de franjas se trata del elemento f_r, es decir el valor de fase en cada punto del interferograma.

Con lo anterior se puede seguir un esquema fácil de solución de los modelos. Primero, por cálculo se sabe que cuando la derivadas de una función o el gradiente en el caso de funciones multivariadas, vale cero si se encuentra en un mínimo o un máximo de la función, así, el primer paso es considerar las derivadas parciales igualadas a cero. Por lo tanto, la derivada del modelo de resortes tratada en la sección anterior para una señal unidimensional igualada a cero, quedaría de manera como se expresan en la siguiente ecuación:

$$(-b_r \sin(w_0 r + f_r))(a_r + b_r \cos(w_0 r + f_r) - g_r) + \lambda[(f_r - f_{r-1}) + (f_r - f_{r+1})] = 0. \quad (55)$$

La ecuación anterior, muestra una f_r variable no lineal y por tanto difícil despejar, en este caso se sugiere emplear el método de descenso de gradiente con el fin de resolver la ecuación. El método de descenso de gradiente, es un método iterativo que permite ir mejorando la solución, moviéndose en la dirección del vector gradiente de una función un paso determinado, e iterar hasta que la solución haya convergido. La ecuación que representa la actualización de la solución esta expresada en la ecuación (56), donde α representa el paso de actualización cada vez que se calcula el gradiente expresado por ∇U, este paso puede variar de modelo a modelo, pero por lo general, es un paso de alrededor de 0.0001 a 0.001.

$$f^{t+1} = f^t - \alpha \nabla U \quad (56)$$

En algunos modelos la expresión de la variable a buscar es lineal con respecto a la misma expresión del gradiente, por ello puede hacerse uso del método de Gauss-Seidel, el cual es también un método iterativo, que aprovecha la linearidad de la variable en cuestión. Lo anterior permite despejar la variable en cuestión (f_r para nuestro caso), y hacer la actualización directamente sobre la variable despejada. Este método es posible emplearlo, por ejemplo, en la expresión resultante de aplicar el modelo de filtros de cuadratura que se presenta en las secciones anteriores.

En el caso del método de descenso de gradiente, es un método lento por varias razones. El paso se considera fijo y en ocasiones puede llevar a una oscilación sobre la solución. Por otro lado, es posible demostrar que las direcciones de descenso, en base al gradiente, son direcciones perpendiculares entre sí lo cual en algunas funciones reduce en gran medida la tasa de convergencia del método. Existen otros métodos que eliminan estos problemas, pero se basan en cálculos de segundas derivadas de las funciones (como los métodos de Newton y cuasi-newtonianos), pero a su vez, son mas complejos tanto para su comprensión como para su implantación. Entre los métodos mas usados se encuentran el de máximo descenso, que hace uso de la dirección del gradiente para el descenso en la función, pero que optimiza el paso dado en cada iteración, lo cual permite un mas rápido descenso. Por otro lado, se encuentra el método de gradiente conjugado mediante el cual se elimina el descenso en direcciones perpendiculares, lo cual mejora el desempeño en comparación al método de descenso simple. En el siguiente capítulo se describe el método de máximo descenso.

4.2.2 Ejemplos

A continuación se presentarán algunos ejemplos de recuperación de fase, usando el modelo de resortes. El algoritmo empleado para la solución del modelo en estos ejemplos se describe a continuación:

Algoritmo 3 *Minimización de* $U(a, b, f)$

1. Al inicio se debe partir de una solución inicial previamente lograda por algún método, en caso de carecer de ella, se puede usar una estimación para la fase igual a cero y un valor de uno para las estimaciones de a y b.

2. Repetir hasta llegar a la convergencia

   (a) Se hace una primera estimación de los valores de a usando $\frac{\delta U(g,f)}{\delta a_r} = 0$. Dado que el valor de a_r es lineal, se puede hacer la aproximación usando el método de Gauss-Seidel (este proceso por ser iterativo se debe de repetir varias veces). Se debe tener cuidado con el uso del método de Gauss-Seidel pues puede conducir a un máximo en lugar de un mínimo:

$$\frac{\delta U(a,b,f)}{\delta a_r} = \begin{bmatrix} (a_r + b_r \cos(\varpi_1 (r + f_r)) - g_{1r}) \\ +\gamma[(a_r - a_{r-1}) + (a_r - a_{r+1})] \end{bmatrix} = 0$$

$$a_r = \frac{\begin{bmatrix} -\gamma[-a_{r-1} - a_{r+1}] \\ -b_r \cos(\varpi_1 (r + f_r)) + g_{1r} \end{bmatrix}}{1 + \gamma N_{<r,s>}}$$

N es la cardinalidad de la vecindad de r

   (b) Ahora, se estima b para cada sitio, de manera muy similar al que se realizó para la actualización de a en el párrafo anterior:

$$\frac{\delta U}{\delta b_r} = \begin{bmatrix} (a_r + b_r \cos(\varpi_1 (r + f_r)) - g_{1r}) \cos(\varpi_1 (r + f_r)) \\ +\beta[(b_r - b_{r-1}) + (b_r - b_{r+1})] \end{bmatrix} = 0$$

$$b_r = \frac{[-\beta(-b_{r-1} - b_{r+1}) + (g_{1r} - a_r)\cos(\varpi_1 (r + f_r))]}{\cos^2(\varpi_1 (r + f_r)) + \beta N_{<r,s>}}$$

donde N es la cardinalidad de la vecindad de r

   (c) Ahora corresponde la estimación del campo f. El modelo impone la restricción de tener expresado a f_r de manera no lineal, por ello se debe emplear un algoritmo de minimización no lineal, en los ejemplos mostrados se hace uso del método de descenso de gradiente simple el cual emplea $\frac{\delta U(g,f)}{\delta f_r}$, que cual se expresa a continuación (así como el modelo de actualización)

$$\frac{\delta U}{\delta f_r} = \begin{bmatrix} (a_r + b_r \cos(\varpi_1 (r + f_r)) - g_{1r})(-\sin(\varpi_1 (r + f_r)))\varpi_1 b_r \\ +\lambda[(f_r - f_{r-1}) + (f_r - f_{r+1})] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_r^{t+1} &= f_r^t - h\frac{\delta U}{\delta f_r} \\ h &= \text{tamaño de paso, generalmente } 0.001 \end{aligned}$$

En la figura 18 se puede observar una curva que representa los valores de f que se han introducido en el modelo de franjas, se ha considerado además que los valores de a y b son constante a lo largo del interferograma con valores de $a = 1$ y $b = 0.7$:

Con los valores de la figura 18 se construye el modelo de franjas, considerando un valor para $\varpi_0 = 23 * 2 * \pi/256$. Estas franjas se muestran en la figura 19.

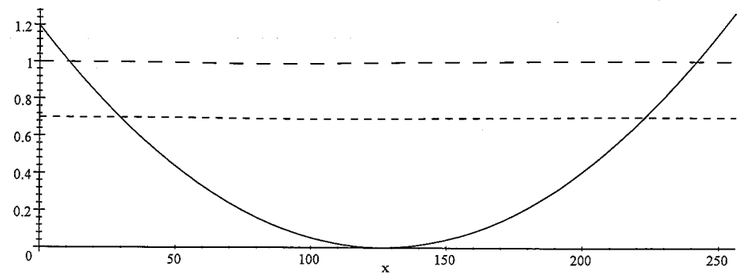


Figura 18: Fase cuadrática (línea continua), Valor de a (linea - - -) y Valor de b (linea punteda)

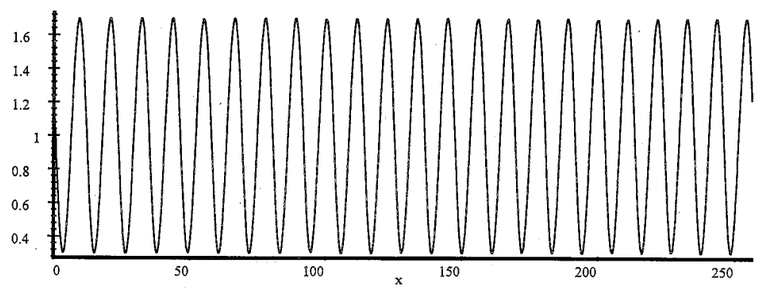


Figura 19: Franjas obtenidas con los datos de fase cuadrática y valores constantes para a y b

Se probó el algoritmo de minimización con los valores anteriores, y se agregó un poco de ruido gaussiano al modelo (el ruido que se agrego tiene $\sigma = 0.05$). Usando valores para $\lambda = 300, \gamma = 500$ y $\beta = 500$ se obtuvieron los resultados mostrados en la figura 20. Como se puede observar los resultados coinciden satisfactoriamente con los datos originales.

Pero este modelo presenta algunos problemas cuando se tienen interferogramas que presentan objetos con saltos de fase considerables. Este problema es el explicado en el capítulo anterior y se le denominó como tratamiento de outliers. Por ejemplo considérese los datos de la figura 21 donde la fase esta constituida por planos, pero entre ellos existe un salto considerable. Además, los elementos de iluminación también cambian (a y b), esto por que puede constituir un objeto construido con diferentes materiales.

Si a este modelo se le agrega ruido gaussiano y se procesa con el modelo de resortes, con los mismos valores para las constantes de regularización que el ejemplo anterior, se obtienen los resultados mostrados en la figura 22. Estos no son del todo satisfactorios para los valores de fase.

Este problema se resolverá con otro modelo descrito en la siguiente sección.

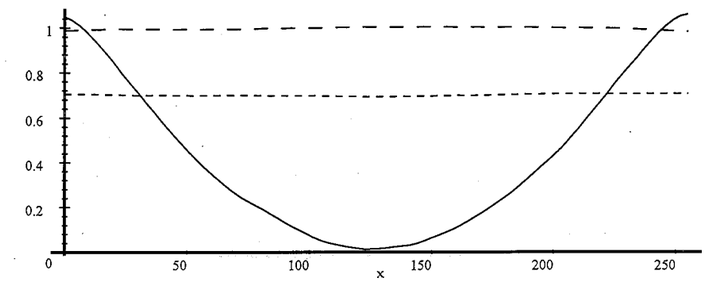


Figura 20: Resultados obtenidos con el modelo de membrana para los datos de fase cuadrática

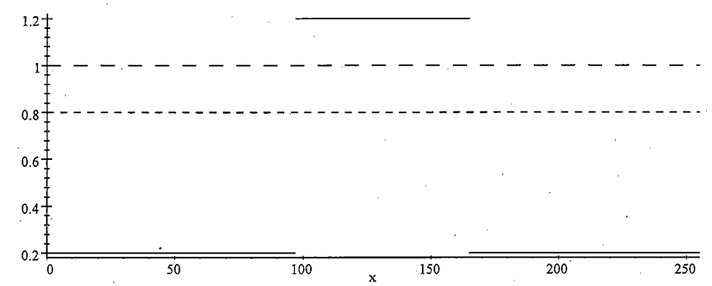


Figura 21: Fase con tres planos (línea continua), Valor de a constante (linea - - -) y Valor de b constante (linea punteda)

4.3 Modelo de Resortes con Condición de Reposo Adaptable

Como se explicó en al capítulo anterior, algunas imágenes contienen escenas donde el modelo de conocimiento *a priori* que supone suavidad no se satisface completamente. Esto se puede observar en la figura 21, donde la fase del modelo tiene un salto abrupto en la parte central de la imagen. Al aplicar el suavizamiento con el modelo de resortes, se provoca el ya mencionado sobresuavizamiento de los bordes, en este caso donde el brinco de fase es abrupto.

Para resolver el problema cuando se trata de suavizamiento de imágenes, se incluye una función que permita hacer el rechazo de "outliers" que no cumplan fielmente con el modelo. La siguiente ecuación fue empleada para la detección de bordes en el suavizamiento de imágenes, mediante el uso de potenciales α^2 propuestas por Rivera y Marroquín [10]:

$$U_{ARC}(f,\phi) = \sum_{r\in L}(f_r - g_r)^2 + \lambda \sum_{\langle r,s\rangle \in L} \left|f_r - f_s - \phi_{r,s}\psi(f_r - f_s)\right|^2 + \mu\left|\phi_{r,s}\right|^2$$

Empleando la ecuación anterior, pero intercambiando el modelo de datos por el modelo de franjas, se puede construir la siguiente ecuación:

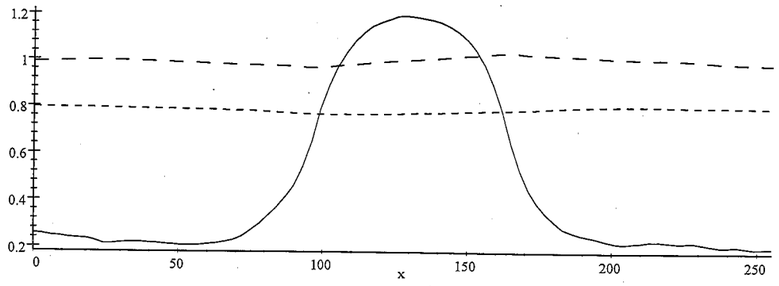


Figura 22: Resultados de Fase con tres planos empleando el modelo de resortes

$$U_{ARC}(a,b,\phi) = \left[\begin{array}{c} \sum_{r} (a_r + b_r \cos(w_0 r + f_r) - g_r)^2 \\ +\lambda \sum_{\langle r,s\rangle \in L} \left| f_r - f_s - \phi_{r,s}\psi(f_r - f_s)\right|^2 + \mu \left|\phi_{r,s}\right|^2 \\ +\gamma \sum_{\langle r,s\rangle} (a_r - a_s)^2 + \beta \sum_{\langle r,s\rangle} (b_r - b_s)^2 \end{array} \right]$$

Este modelo, en teoría, permite identificar los saltos ("outliers") de la fase en el modelo de franjas, es decir, lugares donde la condición de cambio con suavidad falla.

En la siguiente sección se mostrarán los resultados obtenidos aplicando este modelo.

4.3.1 Ejemplos

A continuación se presentarán algunos ejemplos de recuperación de fase, usando el modelo de resortes. El algoritmo empleado para la solución del modelo en estos ejemplos se describe a continuación.

La función ψ empleada en estos ejemplos, es simple, pues regresa como resultados el mismo parámetro que se ha introducido.$\psi(t) = t$. Con esta suposición, la función $U(a,b,f)$ quedaría entonces expresada de la siguiente manera:

$$U_{ARC}(a,b,f,\phi) = \left[\begin{array}{c} \sum_{r} (a_r + b_r \cos(w_0 r + f_r) - g_r)^2 \\ +\lambda \sum_{\langle r,s\rangle \in L} (f_r - f_s)^2 (1 - \phi_{r,s})^2 + \mu \left|\phi_{r,s}\right|^2 \\ +\gamma \sum_{\langle r,s\rangle} (a_r - a_s)^2 + \beta \sum_{\langle r,s\rangle} (b_r - b_s)^2 \end{array} \right]$$

Algoritmo 4 *Minimización de* $U(a,b,,f,\phi)$

1. Al principio se debe partir de una solución inicial previamente lograda por algún método, en caso de carecer de ella, se puede usar una estimación para la fase igual a cero y un valor de uno para las estimaciones de a y b.

2. Repetir hasta llegar a la convergencia

   (a) Se hace una primera estimación de los valores de a usando $\frac{\delta U(g,f)}{\delta a_r} = 0$, dado que el valor de a_r es lineal, se puede hacer la aproximación usando el método de Gauss-Seidel (este proceso por ser iterativo se debe de repetir varias veces):

$$\frac{\delta U(a,b,f,\phi)}{\delta a_r} = \left[\begin{array}{c} (a_r + b_r \cos(\varpi_1 (r + f_r)) - g_{1r}) \\ +\gamma \left[(a_r - a_{r-1}) + (a_r - a_{r+1})\right] \end{array} \right] = 0$$

$$a_r = \frac{\left[\begin{array}{c} -\gamma \left[-\sum_{s \in N_r} a_s \right] \\ -b_r \cos(\varpi_1 (r + f_r)) + g_{1r} \end{array} \right]}{1 + 2\gamma}$$

   debe notarse, que la expresión anterior considera que es un pixel fuera de los bordes la señal, en caso contrario se debe modificar el valor de 2 en el denominador, por el número de vecinos que tenga el pixel, para el caso de una dimensión, el valor es de 1 en los bordes.

   (b) Ahora, se estima b para cada sitio, de manera muy similar a como se realizó la actualización de a en el párrafo anterior:

$$\frac{\delta U}{\delta b_r} = \left[\begin{array}{c} (a_r + b_r \cos(\varpi_1 (r + f_r)) - g_{1r}) \cos(\varpi_1 (r + f_r)) \\ +\beta \left[(b_r - b_{r-1}) + (b_r - b_{r+1})\right] \end{array} \right] = 0$$

$$b_r = \frac{\left[\begin{array}{c} -\beta \left(-\sum_{s \in N_r} b_s \right) + \\ (g_{1r} - a_r) \cos(\varpi_1 (r + f_r)) \end{array} \right]}{\cos^2(\varpi_1 (r + f_r)) + 2\beta}$$

   debe hacerse la misma consideración en los bordes de la imagen como en el caso de a_r

   (c) Ahora corresponde la estimación del campo f. El modelo impone la restricción de tener expresado a f_r de manera no lineal, por ello se debe emplear un algoritmo de minimización no lineal. En los ejemplos mostrados se hace uso del método de descenso de gradiente simple, el cual emplea $\frac{\delta U(g,f)}{\delta f_r}$ y se expresa a continuación (así como el modelo de actualización),

$$\frac{\delta U}{\delta f_r} = \left[\begin{array}{c} (a_r + b_r \cos(\varpi_1 (r + f_r)) - g_{1r}) (-\sin(\varpi_1 (r + f_r))) \varpi_1 b_r \\ +\lambda \left[(f_r - f_{r-1})(1 - \phi_r)^2 + (f_r - f_{r+1})(1 - \phi_{r+1})^2 \right] \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} f_r^{t+1} &= f_r^t - h \frac{\delta U}{\delta f_r} \\ h &= \text{tamaño de paso, generalmente } 0.001 \end{aligned}$$

en esta expresión, el lector debe notar que en los casos para los extremos de la imagen, esto es ($r = 0$ o $r = N - 1$), los términos correspondienes no existen para los pixeles anterior y posterior, algo muy similar a lo notado en los cálculos para a y b.

(d) El siguiente paso consiste en estimar los correspondientes valores para la función ϕ_r. Para esto se considera $\frac{\delta U(g,f)}{\delta \phi_r} = 0$, que como representa una función lineal para las variables ϕ, se hace la actualización de ellas por medio de un solo paso.

$$\frac{\delta U}{\delta \phi_r} = -\left(f_r - f_s\right)^2 \left(1 - \phi_r\right) + \mu \left|\phi_r\right|^2 = 0$$

$$\phi_r = \frac{\left(f_r - f_s\right)^2}{\mu + \left(f_r - f_s\right)^2}$$

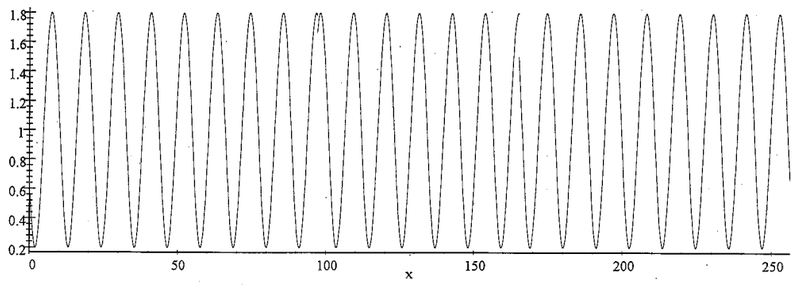


Figura 23: Franjas con fase en diferentes planos

Si se aplica este modelo a los valores expresados en la figura 21 para el modelo de onda se puede observar las franjas que en la figura. Las franjas que se observan en la figura 23, no contienen ruido. Como prueba del modelo para su resistencia al ruido, se ha agregado ruido gaussiano a las franjas, con un valor de $\sigma = 0.1$. Después de ejecutar el modelo los resultados obtenidos para la fase en diferentes planos se pueden observar en la figura 24 .

Los resultados observados con este nuevo modelo, satisfacen mas adecuadamente los datos originales que lo generaron. Además se puede observar (como se hizo con el suavizamiento de imágenes) que los "outliers" detectados representan los bordes de algún objeto en la imagen. Para la obtención de los resultados de la figura 24 se usaron los siguientes valores para las constantes de regularización $\lambda = 300$, $\gamma = 500$ y $\beta = 500$. En tanto que para la constante que controla el nivel de rechazo o aceptación de outlier el valor empleado fue $\mu = \frac{1}{3000}$. El aumento en el valor del parámetro λ posee algo del conocimiento *a priori* que se tenía del modelo de datos, pues como se consideraban planos en la fase, la suavidad del campo estimado debía ser bastante grande de ahí el aumento para una mejor estimación

Ahora bien, si los datos incluyeran cambios también en las propiedades de reflactancia de los objetos en la imagen, esto haría que los valores de a y b no fueran constantes a lo

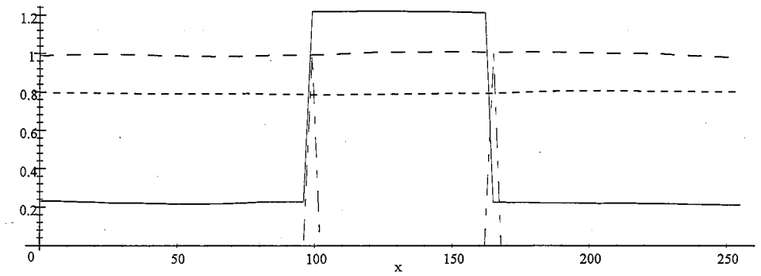


Figura 24: Resultados de los datos con fase en distintos planos usando el modelo de resorte adaptable.

largo del interferograma, esto debido quizá a que son objetos de diferentes materiales que se encuentran en la escena. Un ejemplo de esta nueva configuración de los datos para el modelo de franjas esta representado en la figura 25 .

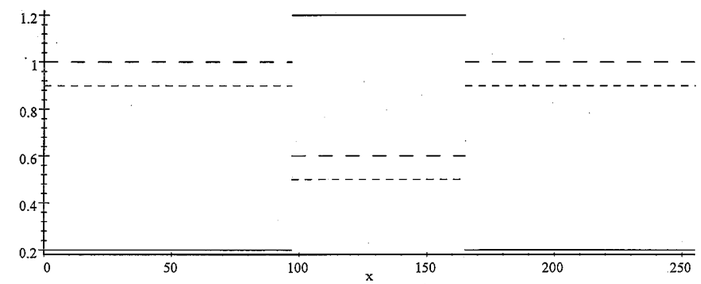


Figura 25: Fase con tres planos (línea continua), Valor de a tambien en plano (linea - - -) y Valor de b semejante pero con diferente escala (linea punteada)

Si se aplica el modelo de resorte adaptable se obtienen los resultados mostrados en la figura 26. Como se puede observar la estimación de la fase es la adecuada, pero los valores de a y de b sufren los problemas que tiene la fase en el modelo de resortes simple. Además, la detección de los "outliers" también se ve influenciada, pues son detectadas en posiciones desplazadas respecto a las originales.

Con esta nueva consideración hay que introducir ciertos cambios en el modelo de energía del modelo de resortes adaptable mostrado inicialmente. La función de energía entonces puede ser expresada por la siguiente ecuación:

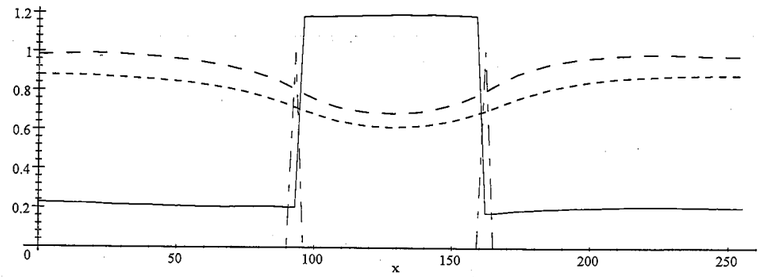


Figura 26: Resultados de los datos con fase, a y b en distintos planos, empleando el modelo de resortes adaptables solo en el término de fase

$$U_{ARC}(a,b,f,\phi) = \left[\begin{array}{c} \sum_r (a_r + b_r \cos(w_0 r + f_r) - g_r)^2 \\ +\lambda \sum_{\langle r,s\rangle \in L} (f_r - f_s)^2 (1-\phi_{r,s})^2 + \mu |\phi_{r,s}|^2 \\ +\gamma \sum_{\langle r,s\rangle} (a_r - a_s)^2 (1-\phi_{r,s})^2 + \beta \sum_{\langle r,s\rangle} (b_r - b_s)^2 (1-\phi_{r,s})^2 \end{array} \right]$$

Con las modificaciones, el algoritmo de minimización queda igual: sólo hay que cambiar las nuevas expresiones de la derivadas para las variables afectadas, como lo son a, b y ϕ, las cuales son expresadas entonces de la siguiente manera:

$$\frac{\delta U(a,b,f,\phi)}{\delta a_r} = \left[\begin{array}{c} (a_r + b_r \cos(\varpi_1 (r+f_r)) - g_{1r}) \\ +\gamma \left[(a_r - a_{r-1})(1-\phi_r)^2 + (a_r - a_{r+1})(1-\phi_{r+1})^2 \right] \end{array} \right] = 0$$

$$\frac{\delta U(a,b,f,\phi)}{\delta b_r} = \left[\begin{array}{c} (a_r + b_r \cos(\varpi_1 (r+f_r)) - g_{1r}) \cos(\varpi_1 (r+f_r)) \\ +\beta \left[(b_r - b_{r-1})(1-\phi_r)^2 + (b_r - b_{r+1})(1-\phi_{r+1})^2 \right] \end{array} \right] = 0$$

$$\frac{\delta U(a,b,f,\phi)}{\delta \phi_r} = -(f_r - f_s)^2 (1-\phi_r) - (a_r - a_s)^2 (1-\phi_r) - (b_r - b_s)^2 (1-\phi_r) + \mu |\phi_r|^2 = 0$$

Los resultados que se obtienen con esta nueva modificación son de mejor calidad, como se puede observar en la figura 27. Aqui se muestran los valores de todas las variables involucradas f, a, b, y detectores de "outlier" ϕ, bajo el modelo de datos de la figura 25. Los valores de los parámetros de regularización son muy semejantes a los empleados en el experimento anterior solo se cambió el parámetro para el rechazo de "outlier", $\lambda = 300$, $\gamma = 500$, $\beta = 500$ y $\mu = \frac{1}{1000}$. La variación en el parámetro de "outlier" se puede explicar por la aportación de información de las variables a y b, como contribución a la detección de estos puntos.

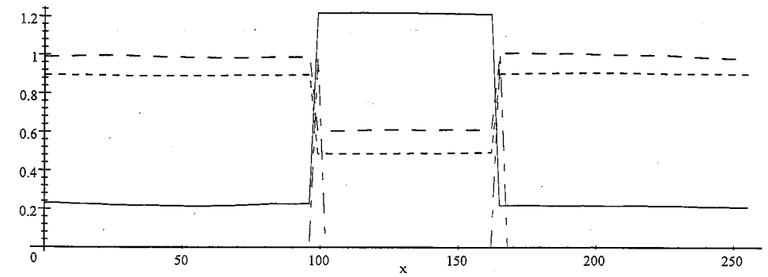


Figura 27: Resultados de los datos con fase, a y b en distintos planos, empleando el modelo de resortes adaptables en todas las variables de regularización

4.4 Estimación de la frecuencia en una Patrón de Franjas

En los patrones de franjas que se mostraron en las secciones anteriores, se estableció que se conocía de antemano la frecuencia portadora (ϖ_0 en el modelo). Este valor es desconocido en la mayoría de los casos, donde no se genera de manera sintética el interferograma a analizar, y esto representa una cálculo adicional en el proceso.

Es de primordial importancia la estimación adecuada del parámetro ϖ_0 en los modelos que se están tratando, pues de ello depende eliminar completamente la frecuencia portadora para la detección adecuada de la fase del modelo.

La figura 28 contiene el resultado de un patrón de franjas que se ha procesado con el modelo de resortes simple. En ella se puede observar un desfasamiento lineal con respecto a la original (línea punteada). Esta línea corresponde a un desfasamiento lineal, equivalente al error cometido en la estimación de la frecuencia.

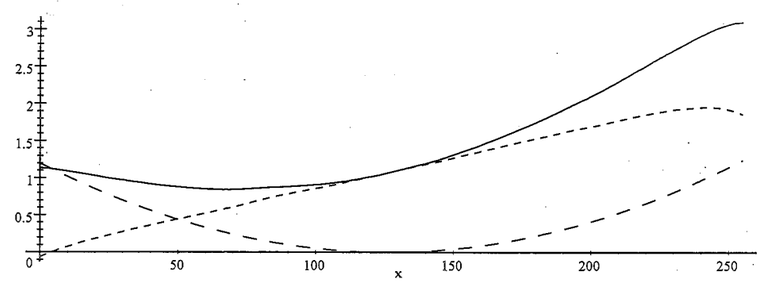


Figura 28: Resultados de los datos con fase cuadrática, pero con error en la frecuencia portadora (línea continua fase original, línea punteda fase estimada). Se muestra también la diferencia entre la fase real y la estimada

Una de las formas mas frecuentes para la estimación de la frecuencia portadora en el

modelo se hace mediante el empleo de la transformada discreta de Fourier (TDF). Este método se empleó en el cálculo del interferograma que se analizó en la figura 28. En el modelo de datos se empleó una frecuencia $2*23.34*\pi/nr$ donde nr es el tamaño de la señal (256 para este caso). El resultado obtenido con el método de la TDF, por ser discreto es de $2*23*\pi/nr$, lo cual genera un error en la estimación de la fase como se ve en la misma figura, la cual es una función lineal, cuya pendiente es la diferencia de la pendiente calculada con la original. Por esto, es necesario emplear otro método para el cálculo de la frecuencia de una manera mas precisa.

Se encontró un método que permite encontrar el valor de la frecuencia con mejor precisión. Este algoritmo aparece en la referencia [9] y consiste básicamente en la siguiente idea. La fórmula para el cálculo de la TDF es la siguiente:

$$\begin{aligned} X(r,s) &= \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x(m,n)\exp\left(\frac{-i2\pi(rm+sn)}{N}\right) \\ r,s &= 0,1,.....N-1, \end{aligned}$$

Al ejecutar la fórmula anterior se obtiene la posición del valor máximo para la magnitud de la señal compleja, esta posición se obtiene en valor entero. Por lo general, el pico máximo cae entre los puntos muestreados. Sin embargo, el ancho del pico esta restringido a ser varias veces el ancho del intervalo de muestreo. Con esto, se puede entonces extender el cálculo de la TDF, no solo a valores enteros, sino a valores reales, usando únicamente las lecturas de la señal discreta. Así pues, a la fórmula expresada anteriormente, se le puede quitar la restricción de valores enteros para r y s. Con esta idea entonces, se procede a realizar una búsqueda de un máximo en la magnitud de la función de TDF, alrededor de la posición obtenida como máximo con la fórmula original de la TDF. Se puede emplear el método de Newton-Raphson como sugiere el autor de [9] o algún otro método, como bisección simple, considerando que en la región mencionada se trata de una función unimodal.

Mediante el empleo de esta técnica, se lograron mejores resultados en la estimación de la frecuencia portadora, por ejemplo, para el modelo de señal cuadrática con portadora igual a $2*23.34*\pi/nr$ del caso anterior, con el empleo de esta técnica se logra obtener un valor de $2*23.357*\pi/nr$, lo cual representa un mejor cálculo, aún cuando no se logra estimar del todo la frecuencia exacta. La figura 29 muestra los resultados con esta nueva frecuencia y los datos de la figura 28 así como la diferencia entre los valores reales y los estimados, donde se nota la reducción en el error de la fase estimada de una manera considerable.

4.5 Modelo de placa con rigidez adaptable

Existen modelos para los cuales el modelo de resortes con condición de reposo adaptable no da buenos resultados. Uno de estos casos es por ejemplo, cuando la fase consiste de diferentes planos, pero además los planos tienen cierta pendiente incluida en su forma, como la fase que se puede ver en la figura 30.

Al aplicar el modelo de resortes adaptables, la estimación de la fase tiende a llenar secciones constantes entre los bordes de la señal (o mejor dicho "outliers"), esto por el hecho de que la función de penalización de "outliers" no le permite cambios grandes sin introducir

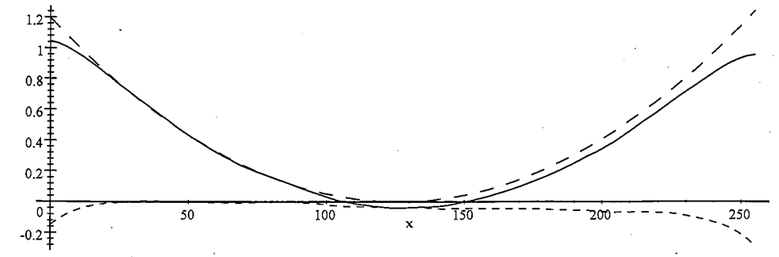


Figura 29: Resultados de los datos con fase cuadrática, emplendo el método de Huntley para estimar la portadora (línea continua fase original, línea punteda fase estimada). Se muestra también la diferencia entre la fase real y la estimada

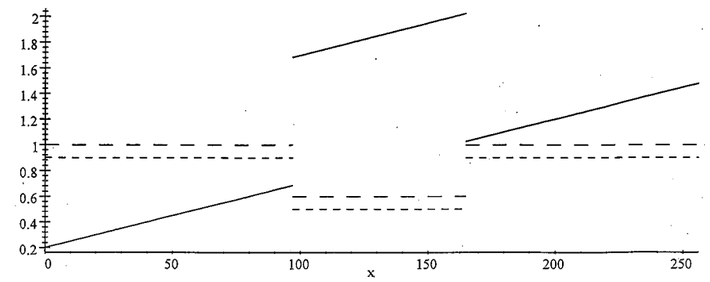


Figura 30: Fase con tres planos con pendiente (línea continua), Valor de a también en plano (linea - - -) y Valor de b semjante a pero con diferente escala (linea punteda)

un "outlier", por eso la constante trata de "aplanar" las zonas donde existe la pendiente. Esto se puede observar en los resultados de aplicar el modelo de resortes adaptables en la figura 31, para el caso de la fase en planos con pendientes. La solución que se encontró fue calculada con una frecuencia portadora conocida.

Para resolver este problema se pensó en probar la vecindad de segundo orden en el término de regularización del modelo. Una vecindad de segundo orden consiste de pandillas de tres pxeiles vecinos. Por ejemplo, para continuar con una imagen en una sola dimensión, las triadas que conforman la vecindad para el pixel r son:

$$r, r+1, r+2 \quad r-1, r, r+1 \quad r-2, r-1, r$$

El concepto de resorte entre pixeles del modelo anterior cambia ahora, por el de placa delgada que esta formada por tres pixeles consecutivos. En la figura 32 se pueden observar las tres placas a las que pertenece el pixel r

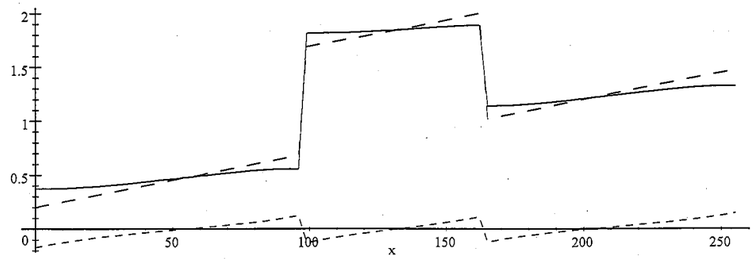


Figura 31: Resultados de los datos con fase en planos con inclinación. Se muestra también la diferencia entre la fase real y la estimada.

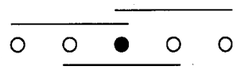


Figura 32: Placas delgadas para el pixel r

La energía de esta placa, resulta de aproximar las segundas derivadas por un término de segundas diferencias $D^2 f$:

$$\triangle^2 f_r = \triangle^+ f_r - \triangle^- f_r$$

donde:

$$\triangle^+ f_r = f_q - f_r \quad \text{y} \quad \triangle^- f_r = f_r - f_s$$

Si se aplica este nuevo modelo al modelo simple de suavizamiento de imágenes, este modelo quedará representado entonces como:

$$U(f) = \sum_r (f_r - g_r)^2 + \lambda \sum_{\langle q,r,s \rangle} (f_q - 2f_r + f_s)^2$$

Desarrollando las sumatorias para el pixel r:

$$U(f_r) = (f_r - g_r)^2 + \lambda \begin{bmatrix} (f_r - 2f_{r+1} + f_{r+2})^2 \\ + (f_{r-1} - 2f_r + f_{r+1})^2 \\ + (f_{r-2} - 2f_{r-1} + f_r)^2 \end{bmatrix}$$

Con el modelo anterior, se lograra un suavizamiento de las imágenes. Haciendo uso del concepto de funciones alfa, para la detección de "outliers" de Rivera y Marroquín, el potencial α^2 para este caso sería el siguiente:

$$\alpha^2 (f_q, f_r, f_s) = \left[\triangle^2 f_r - \xi \left(\triangle^2 f_r\right)\right]^2$$

donde, al igual que en el modelo de resortes, la función ξ debe tener las siguientes propiedades:

1. Debe ser cercano a cero para pequeños valores de $\triangle^2 f_r$.
2. Para valores grandes de $\triangle^2 f_r$ debe ser cercano a este valor
3. En el caso de $\triangle^+ f_r$ sea pequeño, en tanto que $\triangle^- f_r$ sea grande, entonces la función debe ser cercana a $\triangle^- f_r$ y, de manera similar para el otro caso, esto es, $\triangle^+ f_r$ grande y $\triangle^- f_r$ pequeño debe parecerse a $\triangle^+ f_r$. La idea es parecerse a la mayor diferencia para anular su efecto

Con esta idea, entonces, se puede construir un modelo de función alfa para el modelo de placa, generando así el concepto de modelo de placa de condición de rigidez adaptable (*Adaptive Stiffness Plate* ASP):

$$\alpha^2 (f_r, \phi_{r,s}) = \left[\triangle^2 f_r - \phi_{q,r} \psi \left(\triangle^+ f_r\right) + \phi_{r,s} \psi \left(\triangle^- f_r\right)\right]^2 + \mu \left[\phi_{r,s}\right]^2$$

Con este tipo de funciones se pueden satisfacer las condiciones señaladas anteriormente. Se debe entonces escoger ψ de tal forma que $\phi_t \psi(t)$ sea cercana a t para valores grandes de t y cercana a cero para valores pequeños. Es interesante notar que donde se localicen los bordes (esto es $\phi_{q,r}$ o $\phi_{r,s}$ cercanos a uno), el modelo de placa adaptable se comporta como una función de resorte, tal como se requiere en el punto 3 de los requisitos de la función ξ.

Al aplicar el modelo de placa adaptable a la función de suavizamiento se tendrá entonces una función de energía de la forma:

$$U(f, \phi) = \sum_r (f_r - g_r)^2 + \lambda \sum_{\langle q,r,s \rangle} \left[(f_q - 2f_r + f_s) - \phi_{q,r} \psi (f_q - f_r) + \phi_{r,s} \psi (f_r - f_s)\right]^2$$

Si se utiliza la como función $\psi(t)$ el mismo valor de su parámetro como salida (como en el caso del modelo de resortes), entonces se tendrá una ecuación de la forma:

$$\begin{aligned} U(f, \phi) &= \left[\begin{array}{c} \sum_r (f_r - g_r)^2 + \lambda \sum_{\langle q,r,s \rangle} \left[(f_q - 2f_r + f_s) - \phi_{q,r} (f_q - f_r) + \phi_{r,s} (f_r - f_s)\right]^2 \\ + \mu \left[\phi_{r,s}\right]^2 \end{array} \right] \\ U(f, \phi) &= \sum_r (f_r - g_r)^2 + \lambda \sum_{\langle q,r,s \rangle} \left[(1 - \phi_{q,r})(f_q - f_r) - (1 - \phi_{r,s})(f_r - f_s)\right]^2 + \mu \left[\phi_{r,s}\right]^2 \end{aligned}$$

Este modelo, también puede ser aplicado al modelo de franjas, de los interferogramas, para lo cual solo hay que modificar el término de datos del modelo anterior, así como agregar al término de regularización las restricciones o conocimiento *a priori* del modelo. Si utilizamos el conocimiento del último modelo de placa propuesto se tendrá el modelo de la siguiente expresión:

$$U_{ASP}(a,b,f,\phi) = \left[\begin{array}{c} \sum_r (a_r + b_r \cos(w_0 r + f_r) - g_r)^2 \\ +\lambda \sum_{\langle q,r,s\rangle \in L} \left[(f_q - f_r)(1-\phi_{q,r}) - (f_r - f_s)(1-\phi_{r,s})\right]^2 + \mu \left|\phi_{r,s}\right|^2 \\ +\gamma \sum_{\langle q,r,s\rangle} \left[(a_q - a_r)(1-\phi_{q,r}) - (a_r - a_s)(1-\phi_{r,s})\right]^2 \\ +\beta \sum_{\langle q,r,s\rangle} \left[(b_q - b_r)(1-\phi_{q,r}) - (b_r - b_s)(1-\phi_{r,s})\right]^2 \end{array}\right] \tag{57}$$

Desarrollando las sumatorias de las vecindades, ahora serán tres elementos en cada sumatoria, pues una posición en la imagen esta localizada en tres placas distintas:

$$U_{ASP}(a,b,f,\phi) = \left[\begin{array}{c} \sum_r (a_r + b_r \cos(w_0 r + f_r) - g_r)^2 \\ +\lambda \left\{\begin{array}{c} \left[(f_r - f_{r+1})(1-\phi_{r,r+1}) - (f_{r+1} - f_{r+2})(1-\phi_{r+1,r+2})\right]^2 \\ + \left[(f_{r-1} - f_r)(1-\phi_{r-1,r}) - (f_r - f_{r+1})(1-\phi_{r,r+1})\right]^2 \\ + \left[(f_{r-2} - f_{r-1})(1-\phi_{r-2,r-1}) - (f_{r-1} - f_r)(1-\phi_{r-1,r})\right]^2 \\ \mu \left|\phi_{r,r+1}\right|^2 \end{array}\right\} \\ +\gamma \left\{\begin{array}{c} \left[(a_r - a_{r+1})(1-\phi_{r,r+1}) - (a_{r+1} - a_{r+2})(1-\phi_{r+1,r+2})\right]^2 \\ + \left[(a_{r-1} - f_r)(1-\phi_{r-1,r}) - (a_r - f_{r+1})(1-\phi_{r,r+1})\right]^2 \\ + \left[(a_{r-2} - a_{r-1})(1-\phi_{r-2,r-1}) - (a_{r-1} - a_r)(1-\phi_{r-1,r})\right]^2 \end{array}\right\} \\ +\beta \left\{\begin{array}{c} \left[(b_r - b_{r+1})(1-\phi_{r,r+1}) - (b_{r+1} - b_{r+2})(1-\phi_{r+1,r+2})\right]^2 \\ + \left[(b_{r-1} - b_r)(1-\phi_{r-1,r}) - (b_r - b_{r+1})(1-\phi_{r,r+1})\right]^2 \\ + \left[(b_{r-2} - b_{r-1})(1-\phi_{r-2,r-1}) - (b_{r-1} - b_r)(1-\phi_{r-1,r})\right]^2 \end{array}\right\} \end{array}\right]$$

Algoritmo 5 *Minimización de $U_{ASP}(a,b,f,\phi)$*

1. Al inicio se debe partir de una solución previamente lograda por algún método. En caso de carecer de ella, se puede usar una estimación para la fase igual a cero y un valor de uno para las estimaciones de a y b.

2. Repetir hasta llegar a la convergencia

   (a) Minimizar a manteniendo las demás variables como constantes. Se puede emplear descenso de gradiente simple o algún otro método, la mayoría de ellos hacen uso

de $\frac{\delta U_{ASP}(g,f)}{\delta a_r}$:

$$\frac{\delta U_{ARC}(a,b,f,\phi)}{\delta a_r} = \left[\begin{array}{c} (a_r + b_r \cos(\varpi_0 r + f_r) - g_{1r}) \\ +\left\{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} (a_r - a_{r+1})(1-\phi_{r,r+1}) \\ -(a_{r+1} - a_{r+2})(1-\phi_{r+1,r+2}) \end{array}\right] \\ \left[(1-\phi_{r,r+1})\right] \\ +\left[\begin{array}{c} (a_{r-1} - a_r)(1-\phi_{r-1,r}) \\ -(a_r - a_{r+1})(1-\phi_{r,r+1}) \end{array}\right] \\ \left[\phi_{r-1,r} + \phi_{r,r+1} - 2\right] \\ +\left[\begin{array}{c} (a_{r-2} - a_{r-1})(1-\phi_{r-2,r-1}) \\ -(a_{r-1} - a_r)(1-\phi_{r-1,r}) \end{array}\right] \\ \left[(1-\phi_{r-1,r})\right] \end{array}\right\} \end{array}\right]$$

(b) Minimizar b manteniendo las demás variables constantes, la $\frac{\delta U_{ASP}(g,f)}{\delta b_r}$ queda expresada como:

$$\frac{\delta U_{ARC}(a,b,f,\phi)}{\delta b_r} = \left[\begin{array}{c} (a_r + b_r \cos(\varpi_0 r + f_r) - g_{1r}) \cos(\varpi_0 r + f_r) \\ +\left\{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} (b_r - b_{r+1})(1-\phi_{r,r+1}) \\ -(b_{r+1} - b_{r+2})(1-\phi_{r+1,r+2}) \end{array}\right] \\ \left[(1-\phi_{r,r+1})\right] \\ +\left[\begin{array}{c} (b_{r-1} - b_r)(1-\phi_{r-1,r}) \\ -(b_r - b_{r+1})(1-\phi_{r,r+1}) \end{array}\right] \\ \left[\phi_{r-1,r} + \phi_{r,r+1} - 2\right] \\ +\left[\begin{array}{c} (b_{r-2} - b_{r-1})(1-\phi_{r-2,r-1}) \\ -(b_{r-1} - b_r)(1-\phi_{r-1,r}) \end{array}\right] \\ \left[(1-\phi_{r-1,r})\right] \end{array}\right\} \end{array}\right]$$

(c) Ahora corresponde la estimación de del campo f, para lo cual es necesario la minimización del modelo considerando las variables a, b y ϕ constantes, la $\frac{\delta U_{ASP}(g,f)}{\delta b_r}$ queda expresada como:

$$\frac{\delta U_{ARC}(a,b,f,\phi)}{\delta f_r} = \left[\begin{array}{c} (a_r + b_r \cos(\varpi_0 r + f_r) - g_{1r})\left[-\sin(\varpi_0 r + f_r)\right] \\ +\left\{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} (f_r - f_{r+1})(1-\phi_{r,r+1}) \\ -(f_{r+1} - f_{r+2})(1-\phi_{r+1,r+2}) \end{array}\right] \\ \left[(1-\phi_{r,r+1})\right] \\ +\left[\begin{array}{c} (f_{r-1} - f_r)(1-\phi_{r-1,r}) \\ -(f_r - f_{r+1})(1-\phi_{r,r+1}) \end{array}\right] \\ \left[\phi_{r-1,r} + \phi_{r,r+1} - 2\right] \\ +\left[\begin{array}{c} (f_{r-2} - f_{r-1})(1-\phi_{r-2,r-1}) \\ -(f_{r-1} - f_r)(1-\phi_{r-1,r}) \end{array}\right] \\ \left[(1-\phi_{r-1,r})\right] \end{array}\right\} \end{array}\right]$$

(d) Como siguiente paso, se deben estimar los correspondientes valores para la función ϕ_r. Para esto se considera $\frac{\delta U_{ASP}(g,f)}{\delta \phi_r} = 0$, y como representa una función lineal

para las variables de ϕ, se hace la actualización de ellas por medio de un solo paso.

$$\frac{\delta U(a,b,f,\phi)}{\delta \phi_r} = \left[\begin{array}{l} \lambda \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} (f_{r-1}-f_r)(1-\phi_{r-1,r}) \\ -(f_r-f_{r+1})(1-\phi_{r,r+1}) \end{array} \right] \\ [-(f_{r-1}-f_r)] \\ + \left[\begin{array}{c} (f_{r-2}-f_{r-1})(1-\phi_{r-2,r-1}) \\ -(f_{r-1}-f_r)(1-\phi_{r-1,r}) \end{array} \right] \\ [(f_{r-1}-f_r)] + \mu \left|\phi_{r-1,r}\right| \end{array} \right\} \\ +\gamma \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} (a_{r-1}-a_r)(1-\phi_{r-1,r}) \\ -(a_r-a_{r+1})(1-\phi_{r,r+1}) \end{array} \right] \\ [-(a_{r-1}-a_r)] \\ + \left[\begin{array}{c} (a_{r-2}-a_{r-1})(1-\phi_{r-2,r-1}) \\ -(a_{r-1}-a_r)(1-\phi_{r-1,r}) \end{array} \right] \\ [(a_{r-1}-a_r)] \end{array} \right\} \\ +\beta \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} (b_{r-1}-b_r)(1-\phi_{r-1,r}) \\ -(b_r-b_{r+1})(1-\phi_{r,r+1}) \end{array} \right] \\ [-(b_{r-1}-b_r)] \\ + \left[\begin{array}{c} (b_{r-2}-b_{r-1})(1-\phi_{r-2,r-1}) \\ -(b_{r-1}-b_r)(1-\phi_{r-1,r}) \end{array} \right] \\ [(b_{r-1}-b_r)] \end{array} \right\} \end{array} \right]$$

La figura 33 contiene los resultados de aplicar este modelo al problema de la fase en distintos planos de la figura 30, con inclinación de los mismos. Para este caso se ha considerado tanto el valor de a, como de b constantes a lo largo de la señal y se le adicionó ruido gaussiano.

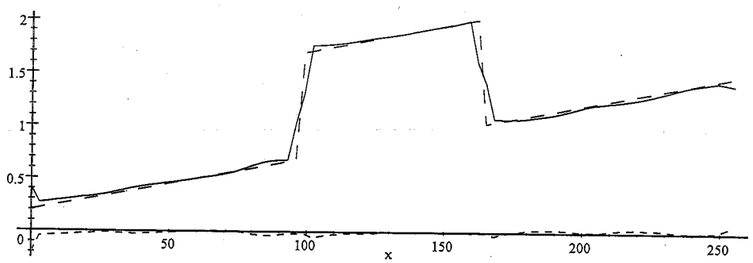


Figura 33: Resultados de los datos con fase en planos con inclinación usando el modelo de placa adaptable. Se muestra también la diferencia entre la fase real y la estimada.

Los resultados de la figura 33 muestran una gran concordancia con el modelo de la fase, tiene algunos pequeños problemas en los bordes de la señal, pero esto se observa en la mayoría de los modelos anteriores.

Este modelo de placa adaptable tiene, dentro de sus características grandes bondades para la estimación de la fase en los interferogramas que incluyen una frecuencia portadora en sus datos. Pues es robusto para la detección de zonas planas, tal como lo es el modelo de resortes, pero a su vez, permite la detección de pendientes dentro del modelo. Algo que el modelo de resortes no permite, sino que aplana las zonas o introduce falsas detecciones de "outliers" con el fin de satisfacer el modelo de manera mas adecuada.

Esta medición de pendientes, permite detectar errores en la estimación de la frecuencia portadora en imágenes reales, pues si se conoce de antemano la presencia de zonas planas, se pueden detectar mas fácilmente, además de que es mas robusto a encontrar estas pendientes que el modelo simple de resortes.

El modelo completo de franjas, que incluye la estimación de los valores iluminación (a y b), puede simplificarse a la estimación de la fase en el modelo, esto es, se puede considerar los valores de a y b como constantes y solo estimar la fase del modelo. Con esta consideración, por ejemplo, el modelo de franjas en placa adaptable expresado en la ecuación 57, puede ser reducido al modelo de la siguiente ecuación:

$$U_{ASP}(f,\phi) = \left[\begin{array}{c} \sum_r (1+\cos(w_0 r + f_r) - g_r)^2 \\ +\lambda \sum_{\langle q,r,s\rangle \in L} \left[(f_q - f_r)(1-\phi_{q,r}) - (f_r - f_s)(1-\phi_{r,s})\right]^2 + \mu \left|\phi_{r,s}\right|^2 \end{array} \right]$$

Con el modelo anterior y con fines de conservar la magnitud de los valores de las constantes de regularización, se recomienda hacer uso de la función de reescalamiento para dejar los valores de la señal entre 0 y 2 y emplear la ecuación anterior en el cálculo. Los resultados se pueden observar en la figura 34. Los resultados son satisfactorios en comparación con los de la figura 33 donde se estimó la fase, incluyendo los términos de a y b del modelo de franjas.

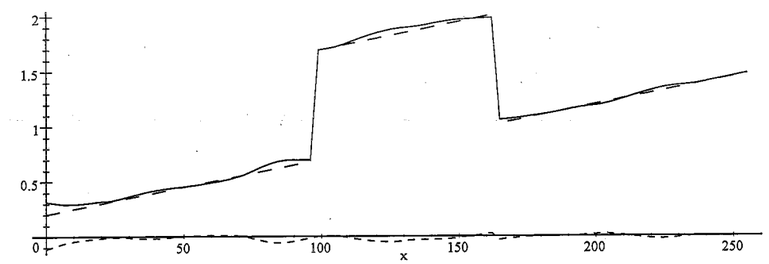


Figura 34: Resultados de los datos con fase en planos con inclinación usando el modelo de placa adaptable solo para la fase. Se muestra también la diferencia entre la fase real y la estimada

5 Caso de Estudio

En este capítulo, se describirá en detalle la aplicación del modelo propuesto en los capítulos anteriores, a un problema en especial. La recuperación de fase de patrones de franjas obtenidos por un interferómetro para la calibración de bloques patrón. Este instrumento se encuentra en el Centro Nacional de Metrología (CENAM) y se utiliza para la calibración de bloques patrón de alta exactitud.

Primero se describirá el funcionamiento del instrumento para determinar la forma en que se obtienen los interferogramas. Posteriormente se hará una descripción del algoritmo empleado por el instrumento actualmente, además se hará una propuesta para la mejora de este algoritmo, empleando la misma filosofía que el original, pero haciendo la estimación en el dominio de las frecuencias para hacer mas precisa la medición de la fase. Posteriormente se aplicara el modelo propuesto anteriormente para este problema en especial. Se mostrarán los resultados obtenidos y se confrontarán con los obtenidos del algoritmo original.

5.1 Descripción de problema

La calibración de bloques patrón de alta exactitud es una actividad de gran importancia, pues de ello depende en gran medida, que la materialización del metro patrón (láser de helio neón estabilizado al iodo) se pueda trazar hacia patrones manejables en la industria. Esta tarea es encomendada a los laboratorios primarios de metrología en los diversos paises. En el caso de México, esta tarea recae sobre el CENAM.

La realización del experimento en el CENAM, se lleva a cabo mediante el uso de un interferómetro especializado en esa tarea. Este es de tipo comercial marca TESA, modificación de un interferómetro Twymann-Green.

El proceso de calibración de bloques es el siguiente. Se cuenta con una platina en forma circular, la cual tiene un acabado tipo espejo, esto es, su planicidad es excelente. Sobre ella se hace el "pegado" de los bloques. Estos bloques de alta exactitud, también tienen una calidad de espejo en dos de sus caras. La distancia entre dichas caras representa diversas longitudes, y tienen un alto grado de exactitud en ello, se consideran plano paralelas casi perfectas. El objetivo es determinar la desviación que existe entre esas caras con respecto a la longitud nominal que indica el fabricante y esta diferencia se encuentra mediante el uso del interferómetro.

El proceso de "pegado", se lleva a cabo de manera manual por el usuario, se desliza una de las caras del bloque sobre la platina de referencia y aprovechando la cohesión del acabado de ambas superficies se realiza de manera física el pegado de las superficies entre si. Con ello se puede asegurar que ambas superficies constituyen la misma superficie y lo que hay que determinar es la distancia entre las superficie superior del bloque y la de la platina. En un interferómetro del tipo Twymann-Green, la distancia que representa el corrimiento de una franja completa es de $\frac{\lambda}{2}$, donde λ representa la longitud de onda del láser.

En el caso del interferómetro del CENAM, se cuenta con dos láseres para hacer la medición. Cada uno de ellos con distinta longitud de onda, uno es de color rojo ($\lambda \approx 633nm$) y otro de color verde ($\lambda \approx 542nm$). Con el uso de ambos láseres es posible determinar el orden de franjas de corrimiento que se esta manejando, pues los bloques patrón pueden variar desde 5mm hasta 110mm y por ende el corrimiento rebasa el intervalo de medición

para un corrimiento de una sola franja. Así que solo es posible determinar a partir, del interferograma, el corrimiento en el intervalo de una franja y mediante el empleo del algoritmo de cálculo de distancia, que se presenta en las siguientes secciones se hace la estimación de la distancia real de las caras del bloque.

El instrumento completo tiene incluidos otros instrumentos periféricos para medir la temperatura, tanto ambiente como de los elementos inmiscuidos en la medición; la humedad relativa en el ambiente; así como la presión barométrica, lo que permite el cálculo del índice de refracción de aire, para hacer la corrección en la longitud de onda de los láseres. Además, con esto se logra hacer la corrección de la longitud de los bloques a $20°C$ como lo marca la norma internacional.

Otro punto importante a considerar en las mediciones, son los diferentes materiales de que se encuentran fabricados los bloques patrón a medir. La mayoría se encuentran fabricados en acero, algunos otros en cerámica, carburo de tungsteno. Estos últimos tiene una propiedad de reflectancia menor que el acabado del acero. Por ello, la señal en la medición de este tipo de bloques, tiene también una variación en la elementos a y b de la ecuación de patrón de franjas. Para contrarrestar este problema el fabricante del interferómetro ofrece platinas del mismo material para cada tipo de bloque, pero debido a las propiedades del material, el proceso de pegado entre platina y bloque se vuelve algo mas complicado de lo normal. Por ello, es en ocasiones necesario hacer el pegado físico de los bloques de distinto material sobre platinas de acero, que es el material mas común en estos instrumentos.

Como se puede deducir de los párrafos anteriores la determinación de la longitud del bloque es muy bien cuidada, y se debe hacer con la menor incertidumbre posible. Este capítulo describe una propuesta para lograr la estimación del corrimiento de fase en el interferograma de una mejor manera, con el fin de reducir la incertidumbre.

En la siguiente sección se presentará el algoritmo para el cálculo de la fase del patrón de franjas empleado por el instrumento en la actualidad.

5.2 Algoritmo original

En esta sección se presentará la descripción del algoritmo de determinación de fase en el patrón de franjas empleado por el interferómetro del CENAM, con la finalidad de entender la manera como trabaja el instrumento, en esta parte del proceso de medición. Para detalles de las características del instrumento el lector se puede referir a la referencia [19].

El algoritmo original emplea solo una línea de la imagen de franjas para determinar la longitud del bloque y por tanto para determinar la fracción de franja que se ha corrido la fase. El usuario tiene una visión completa de las franjas que se forman sobre la platina de referencia y el bloque patrón a medir. La posición de la franja en la imagen que emplea el algoritmo para el análisis, es especificada por el usuario de manera manual. El usuario debe colocar un cursor sobre el centro del bloque, pues es como lo indica la norma relativa a la calibración de bloques patrón por interferometría. El usuario ve una imagen semejante a la representada en la figura 35. En esta figura se puede observar como se hace una división en tres zonas para las líneas horizontales de la imagen. La parte superior, que es parte de la platina de referencia, la segunda corresponde al bloque bajo medición, en tanto la tercera parte corresponde a la parte sobrante de platina. El usuario debe colocar de manera manual el arreglo en esta posición usando un instrumento que hace girar la platina. La imagen posee

256 pixeles en su altura, esto es, la línea que se va a analizar contiene 256 posiciones.

Con la indicación de la posición, se procede a la lectura de los datos de la imagen primero con el láser rojo y con esto la determinación de la fracción de franja con esta longitud de onda.

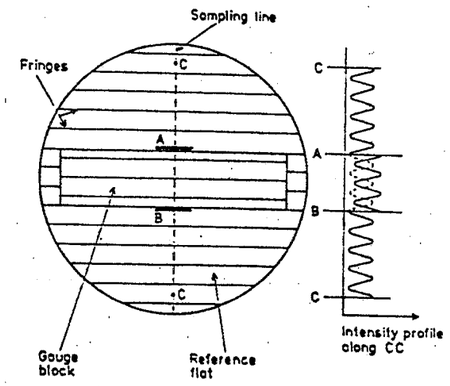


Figura 35: Secciones de la línea de franjas en el interferómetro TESA

Las primeras operaciones para el algoritmo consisten en determinar la posición de los mínimos de las franjas en relación a los números de línea de la imagen, esto para las tres secciones indicadas en figura 35.

Para cada una de la secciones se establece una separación del borde. En la primera sección no se inicia en la posición uno de la línea, sino en la posición 7. Este parámetro esta especificado en la inicialización de parámetro del programa. En tanto el final de la sección también es tomada siete posiciones anteriores a la posición marcada. Esta holgura es manejada para cada una de las secciones. La primera sección comienza, para los cálculos del algoritmo, en la posición 1 y termina en la posición 97, en tanto la segunda comienza en este punto y termina en la posición 165, el resto es para la tercera porción de la señal.

El algoritmo que determina la posición de los mínimos para cada franja consiste de dos partes principales. En la primera parte, la estimación es encontrada usando una rutina de búsqueda de pendiente para localizar la posición de la imagen, en la cual un nivel mínimo de la señal cosenoidal ocurre. Como se observa en la figura 36, se busca un cambio de pendiente de negativa a positiva. Para lo cual se hace el calculo de tres puntos consecutivos, desde la primera posición hasta la última $S_n = I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$. Con estos valores se aproxima la pendiente de la curva mediante la resta de valores consecutivos de sumas $P_n = S_n - S_{n-1}$. Con estos nuevos valores se hace una búsqueda de un cambio de pendiente y asegurándose que es un cambio de negativo a positivo. Cuando se detecte un cambio de este tipo, se coloca el valor de índice indicando que cerca de este punto existe un mínimo en la función.

La segunda etapa encuentra la posición de una manera mas precisa, realizando una interpolación con los valores de la señal. Para lo cual se emplean cinco valores, uno de los

cuales es el indicado por la posición del mínimo encontrada anteriormente. Dos mas son los anteriores a este punto y los otros dos son los posteriores al punto del mínimo como se observa en la figura 36. Las coordenadas de los puntos están dadas por las posiciones ocupadas en la señal y por el valor de la intensidad registrada para ese punto.

La interpolación es realizada sobre una forma cónica, en específico una parábola cuya ecuación queda representada por:

$$y = a(x-h)^2 \tag{58}$$

es una ecuación de una parábola corrida en su posición de x pero centrada con respecto al eje y. Con los cinco puntos en cuestión se pretenden encontrar los dos parámetros que la definen a y h. Para resolver este problema se procede a desarrollar la ecuación quedando

$$y = ax^2 + bx + c \tag{59}$$
$$b = -2ah \tag{60}$$
$$c = ah^2 \tag{61}$$

con esto se linearizan los parámetros y se puede emplear mínimos cuadrados lineales para encontrar los tres parámetros, uno de los cuales es dependiente de los otros dos. Para la solución de este problema se forma la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{b}$ con los puntos de ajuste:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \tag{62}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{63}$$

Con lo anterior se procede a resolver el sistema de mínimos cuadrados según [11], donde se hace la multiplicación por la matriz transpuesta de $\mathbf{A}$ en ambos lados de la ecuación matricial dada en (63), para obtener un sistema lineal de ecuaciones que se puede resolver por descomposición Cholesky por ser una matriz simétrica o por cualquier otro método, a una forma cuadrática usando una rutina de ajuste de mínimos cuadrados. Cada posición donde se encontró un cambio de pendiente es analizado bajo este esquema, asignándole un número que indica el orden de franja. Este procedimiento se sigue para las tres regiones de la imagen.

En la siguiente etapa del algoritmo, se determina el desplazamiento de fase de las franjas en la platina de referencia y el centro del patrón por medio de un ajuste de números de franjas en la superficie de referencia, en cualquier lado del patrón, a una forma cuadrática y determinando el número exacto de franja en el centro del bloque. Esto se lleva a cabo de la siguiente manera.

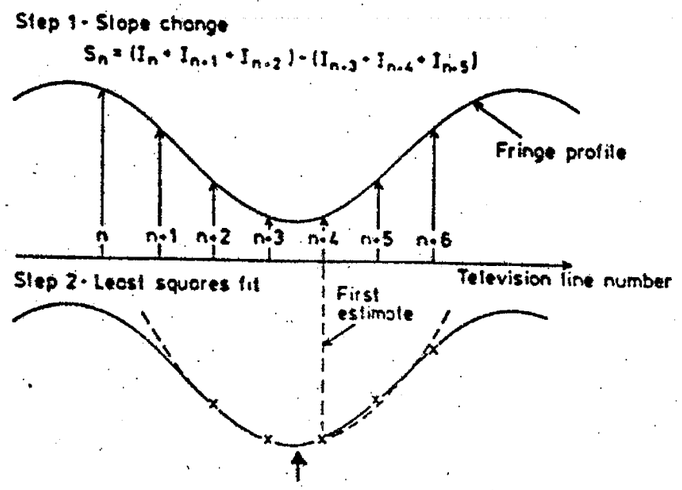


Figura 36: Ajuste de cinco puntos a una cónica

Se hace primeramente una interpolación a una línea bajo el criterio de mínimos cuadrados. Con los mínimos de la primera sección y teniendo en la otra coordenada los números de franjas. Con los coeficientes de esta aproximación se procede a predecir el número de franja de la primera posición del mínimo para la tercera sección de la imagen (que sigue siendo la platina). Para asegurar cual es el correcto número de franja se procede a hacer una búsqueda entre el número de franja anterior y el posterior, haciendo una evaluación del error cuadrático medio que se genera en cada nueva aproximación, ahora a una forma cuadrática y utilizando los datos de la primera y tercera secciones (platina). La aproximación que indique un menor error cuadrático medio es la que corresponde al número de franja de inicio en la tercera sección, el cual debe caer en un valor menor a 0.01, de lo contrario se invalidan los cálculos. Bajo este esquema, se tiene entonces una función que indica qué franjas debe ir en cada posición. Se hace luego una aproximación a una forma cuadrática, para poder absorver algunos pequeños errores en la estimación de los mismos.

Con los valores de la aproximación adecuada se procede a calcular la estimación para el número de franja de la posición central del patrón, esta posición es encontrada como el punto medio de los valores de inicio y final del bloque localizados por el usuario. Esto es, el punto medio entre las posiciones 97 y 165 que determinan la separaciones entre secciones, por ello el punto medio está dado por el valor de 131.

El siguiente paso consiste en encontrar el ajuste a una forma cuadrática, pero solo para los valores de la segunda sección (bloque patrón). Se ajusta por mínimos cuadrados y con el ajuste se procede a estimar el número de franja de la posición central del bloque (esta

consideración introduce la restricción de que el número de franjas que se deben incluir en la sección del bloque, de alrededor de 5 a 7 franjas. Menos franjas no permitirían hacer una ajuste correcto para una cuadrática y mas de 7 implicaría tener muy pocos datos por franjas, esto es, una frecuencia portadora bastante alta). Con los dos valores de estimación tanto con la platina como con la sección de patrón, se calcula la fracción de franja corrida, de la posición central del bloque mediante la resta de los número de franja encontrados.

Como se puede observar, este algoritmo hace uso únicamente de una pequeña porción de la información total de señal para encontrar la fase, por ello recae en la primera rama de la clasificación hecha en el primer capítulo de este trabajo. Una descripción o referencia a este método se encuentra en [18].

5.3 Algoritmo para encontrar la longitud del bloque

Esta sección describe el algoritmo usado en el programa del interferómetro. Este está basado en el método de fracciones exactas/exceso. Las fórmulas de Edlén se emplean para el cálculo del índice de refracción del aire [19].

A continuación se describe la nomenclatura de los símbolos empleados en el algoritmo.

5.3.1 Nomenclatura

IR_{VAC} Longitud de onda roja al vacío

IG_{VAC} Longitud de onda verde al vacío

IR_{AMB} Longitud de onda roja en condiciones ambiente

IG_{AMB} Longitud de onda verde en condiciones ambiente

L_{NOM} Longitud nominal del bloque a 20°C.

$L_{NOM,AMB}$ Longitud nominal del bloque en condiciones ambientales

T_G Temperatura del bloque

T_A Temperatura del aire

P Presión del aire

H Presión del vapor de agua

a Coeficiente de expansión térmica

μ Índice de refracción del aire

μ_R Índice de refracción del aire en condiciones ambientales para la longitud de onda roja

μ_G Índice de refracción del aire en condiciones ambientales para la longitud de onda verde

R^R Residuo rojo

R^G Residuo verde

5.3.2 Algoritmo

Para cada bloque patrón se deben seguir los siguientes pasos:

1. Use T_A, P y H para calcular el índice de refracción del aire de las dos longitudes de onda, usando la ecuación de Edlén

2. Calcule la longitud de onda para las condiciones ambientales

$$IR_{AMB} = \frac{IR_{VAC}}{\mu_R}$$
$$IG_{AMB} = \frac{IG_{VAC}}{\mu_G}$$

3. Calcule lo longitud nominal del bloque a condiciones ambientales

$$L_{NOM,AMB} = L_{NOM}\left[1 + (T_G - 20)\, a\right]$$

4. Encontrar el orden nominal de interferencia para la longitud de onda roja

$$INT\left(\frac{2L_{NOM,AMB}}{IR_{AMB}} + 0.5\right)$$

$INT\,(x)$ significa la parte entera de x

5. Para los ordenes de interferencia $P_R = N-3, N-2, \ldots\ldots, N+2, N+3$

   (a) Calcular una longitud estimada del bloque a partir de la fracción roja observada

$$L_{EST,AMB,R} = \frac{(P_R + F_{OBS,R})\, IR_{AMB}}{2}$$

   (b) Corregir esta longitud a $20°C$

$$L_{EST,20,R} = L_{EST,AMB,R}\left[1 - (T_G - 20)\, a\right]$$

   (c) Usar la longitud estimada en condiciones ambientales para calcular el orden de interferencia para la segunda longitud de onda

$$INT\left(2\frac{L_{EST,AMB,R}}{IG_{AMB}} - F_{OBS,G} + 0.5\right)$$

   (d) Usar este cálculo junto con la segunda fracción observada para calcular la longitud del bloque correspondiente

$$L_{EST,AMB,G} = \frac{(P_G + F_{OBS,G})\, IG_{AMB}}{2}$$

   (e) Corregir esta longitud a $20°C$

$$L_{EST,20,G} = L_{EST,AMB,G}\left[1 - (T_G - 20)\, A\right]$$

   (f) Calcular la longitud media en condiciones ambientales y a $20°C$ en la dos longitudes de onda

$$L_{EST,AMB,MEAN} = \frac{L_{EST,AMB,R} + L_{EST,AMB,G}}{2}$$

$$L_{EST,20,MEAN} = \frac{L_{EST,20,R} + L_{EST,20,G}}{2}$$

   (g) la siguiente etapa es verificar cual de los datos obtenidos son correctos para la longitud estimada del bloque por medio de la comparación entre las fracciones de franja observadas con las fracciones de franja calculadas de la longitud media. Los residuales son calculados de la diferencia entre las fracciones observadas y las calculadas, y están dadas por las ecuaciones:

$$R^R = \frac{2\left(L_{EST,AMB,R} - L_{EST,AMB,MEAN}\right)}{IR_{AMB}}$$

$$R^G = \frac{2\left(L_{EST,AMB,G} - L_{EST,AMB,MEAN}\right)}{IG_{AMB}}$$

   Si el valor absoluto de cada residual es $\leqslant 0.025$ este es considerado el posible valor para la longitud

6. Si solamente una longitud es encontrada, esta es la longitud y la diferencia entre esta y la longitud nominal a $20°C$ es calculada

$$Desviacion = L_{EST,20,MEAN} - L_{NOM}$$

5.4 Desventajas del algoritmo original

El algoritmo original para la determinación del corrimiento de fase, presenta varias limitaciones. Primero, el usuario es responsable de la localización del bloque en la zona adecuada para la diferenciación de las zonas en la imagen, y otra, quizá la mas peligrosa, lo representa la determinación de la posición central del bloque, para ello el usuario tiene que auxiliarse de una transparencia que representa el tamaño del bloque sobre el monitor, donde tiene localizado ya el centro del mismo, el cual debe colocar sobre el monitor para colocar el cursor y en base a ello detectar el centro del bloque.

Otro punto sobresaliente, lo constituye el hecho de no utilizar el total de la información para la determinación de la fase, pues, en los cálculos solo se toman en cuenta cinco puntos alrededor de los mínimos de la señal senoidal, en tanto, toda la demás información es ignorada.

Lo anterior no representa tan graves problemas para el experimento en cuestión, pues gracias a las condiciones tan controladas de ambiente que se tienen en la obtención del interferograma, así como la utilización para una tarea en específico, los interferogramas siempre son de buena calidad, sin la introducción de ruido que pudiera generar graves errores en la estimación de fase.

En las siguientes secciones se presentarán mejoras para la estimación del corrimiento de fase, los algoritmos propuestos toman en cuenta la totalidad de la información e incluso el segundo de ellos permite la localización de bloque de manera adecuada, y de ahí mismo la determinación del centro del bloque.

5.5 Mejora del algoritmo usando una modificación del algoritmo de Carré

La primera mejora al algoritmo para la determinación del corrimiento de fase esta basada en una modificación a un algoritmo ya publicado en el tema de recuperación de fase en interferogramas.

El algoritmo es el de Carré, el cual se describió en el capítulo dos de este trabajo. Este algoritmo, como se explica, hace uso de la técnica de *Phase Shifting Interferometry* (PSI). La selección del algoritmo de Carré, se basa en dos características principalmente, su facilidad de uso y la posibilidad de introducir un corrimiento en los interferogramas no conocido, aun cuando este tenga que ser constante.

En el caso del experimento que realiza el interferómetro del CENAM, no es posible la obtención de interferogramas con corrimientos de fase, sobre el mismo objeto, esto implica que la aplicación de algún algoritmo de PSI, no es posible de manera tan directa.

En los casos donde no se cuente con interferogramas que contengan un corrimiento de fase de referencia, se puede considerar lo que se ha denominado *Spatial Phase Shifting Interferometry (SPSI)* el cual es tratado en [12]. Bajo este concepto el corrimiento se toma usando pixeles consecutivos de una misma imagen (en el sentido de la frecuencia portadora), pues lo pixeles cercanos entre si poseen una variación de fase con respecto así mismos. Basándose en lo anterior y tomando en cuenta que la fase real de los objetos varía suavemente (como es el caso de los experimentos del CENAM, pues las tres secciones que se tienen en el patrón de interferencia son uniformes), se puede suponer que los pixeles cercanos tiene la fase muy parecida entre si (ya sin tomar en cuenta la portadora). Ante esta suposición se pueden tener los tres interferogramas necesarios para el algoritmo de Carré a partir de uno solo.

El planteamiento anterior, implica que para la estimación de la fase en un punto, por medio de la fórmula derivada en el algoritmo de Carré, sea necesario el empleo de tres puntos distintos en la imagen del interferograma, lo cual implica, que en cierto puntos (bordes de la imagen) no sea posible la estimación de la fase, pero para ellos se puede suponer que la fase de su vecino mas cercano con una estimación válida sea la misma para este sitio en particular.

En la ecuación (64), se muestra el ejemplo dell cálculo para la fase en el pixel (x, y), usando la aproximación de SPSI, y empleando la ecuación (22), para la fase con Carré. En este ejemplo, se supone que se tienen franjas con una frecuencia que varia en la dirección del eje x, por eso la variación de pixeles varia solo en esta coordenada.

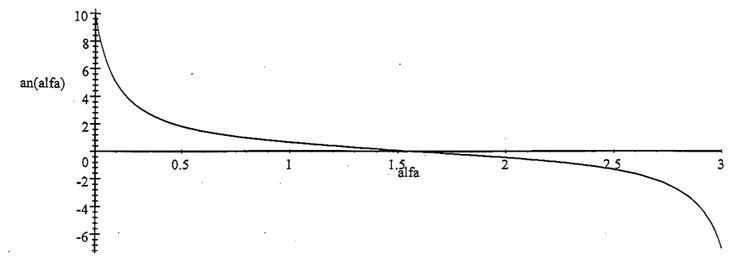


Figura 37: Se muestra la relacción de cambio entre el corrimiento de los interferogramas y la estimación de fase

$$\phi(x,y) = \tan^{-1}\left\{\frac{\left\{\begin{array}{c}[3(I(x+n,y)-I(x+2n,y))-(I(x,y)-I(x+3n,y))] \\ [(I(x,y)-I(x+3n,y))+(I(x+n,y)-I(x+2n,y))]\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}{(I(x+n,y)+I(x+2n,y))-(I(x,y)+I(x+3n,y))}\right\} \tag{64}$$

La ecuación anterior estima que el corrimiento entre los interferogramas es de n pixeles. Con esto, se puede entender que el usuario puede emplear cualquier separación entre los pixeles, de acuerdo como lo juzgue conveniente, pues el algoritmo de Carré no especifica el tamaño del corrimiento, mientras este sea constante para los diferentes interferogramas. $I(x, y)$ representa el valor de intensidad leído para dicha posición en la imagen.

Otro algoritmo que emplea un corrimiento desconocido de fase entre los interferogramas, es el algoritmo de Hariharan, pero emplea cinco mediciones diferentes. Hariharan demuestra en [16], que cuando se tienen corrimientos aproximados de $\frac{\pi}{2}$, el cálculo de la fase llega a ser menos sensible a errores de calibración en la estimación del corrimiento, y con ello la estimación de la fase [5]. Para el caso del algoritmo de Carré pasa algo similar, la figura 37 muestra la relación de cambio de la fase estimada con respecto al corrimiento de los interferogramas. Además al obtener la derivada de esta relación en la figura 38 se puede observar que precisamente esta tiende a cero conforme se acerca a un corrimiento de $\frac{\pi}{2}$ teniendo un area cercana la cual puede mantener también una relación de cambio baja.

Tomando esta base, se puede introducir este concepto al algoritmo de Carré, pues si se toman pixeles con corrimientos de 90 grados $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, se puede reducir el error de estimación. Para encontrar esta separación en los interferogramas que se generan en el interferómetro del CENAM se propone la siguiente idea.

La fase que se obtiene aplicando el método de Carré, a las franjas del CENAM, produce una fase envuelta (como la que se observa en la figura 39), por tener el elemento de portadora en la señal. En esta reconstrucción se pueden observar los saltos mayores de π, que introduce lo que se conoce como fase envuelta. Una manera de determinar la longitud de una franja es

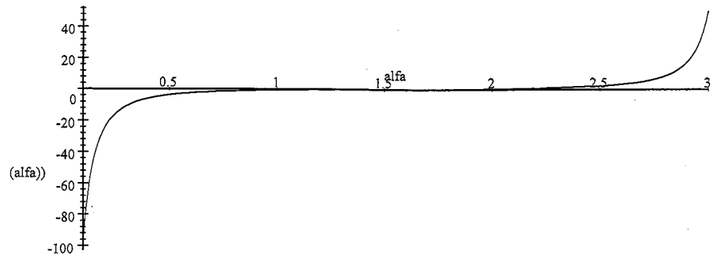


Figura 38: Se muestra la derivada, esto es la relación de cambio entre el corrimiento de los interferogramas y la estimación de fase

encontrar los saltos mayores a π en la fase estimada, y la distancia entre saltos es considerado un desfasamiento de 2π, la cuarta parte de esta distancia por tanto, es el corrimiento de π que se busca.

Otro concepto para buscar la distancia entre franjas, es encontrar la distancia entre los cruces por π de la fase encontrada por Carré, de las diversas líneas que constituyen la fase de la portadora (en la fase envuelta), lo que permitiría encontrar con mayor precisión la distancia entre franjas. Para ello, entonces, se hace una búsqueda de los saltos mayores de π en la fase calculada por Carré y con los puntos entre separación se hace un ajuste de mínimos cuadrados de una línea, con los puntos de fase y de posición. Con la estimación de la línea, es fácil encontrar el cruce por π de la fase para cada línea, el promedio de las distancias entre cruces por π de las líneas, determinará la distancia entre franjas y con ello determinar el salto óptimo en pixeles, para el corrimiento de π, en el patrón de franjas.

Cuando se tenga la estimación de la distancia entre líneas, se puede estimar la cuarta parte como un corrimiento $\frac{\pi}{2}$, y con esta distancia en pixeles, se procede a estimar nuevamente la fase usando esta distancia como separación entre los pixeles para encontrar la fase en un punto dado.

La fase mostrada en la figura 40 es una fase obtenida con un corrimiento de 3 pixeles, pues se encontró que para los datos originales el promedio de la cuarta parte de la distancia entre los cruces por π estaba localizado en dichos pixeles. Para el caso específico de los inteferogramas obtenidos con el interferómetro del CENAM, se encontró que el paso óptimo en el algoritmo de Carré es de tres pixeles, esto debido a la frecuencia portadora que contienen estas imágenes, pues el fabricante recomienda la inclusión de 5 a 7 franjas en el área del bloque, lo cual induce esta frecuencia y determina de manera indirecta la distancia entre corrimientos de $\frac{\pi}{2}$ en el modelo.

El siguiente paso en este nuevo algoritmo, es encontrar los mínimos de la función coseno que se esta observando, lo cual en cierto modo ya se ha hecho como se verá a continuación. El algoritmo de Carré produce una fase para cada pixel en el intervalo de 0 a 2π. Los mínimos de la función cosenoidal ocurren cuando la fase se encuentra exactamente en π, esto es, si de la fase obtenida logramos encontrar (como se explicó en párrafos anteriores) los cruces por

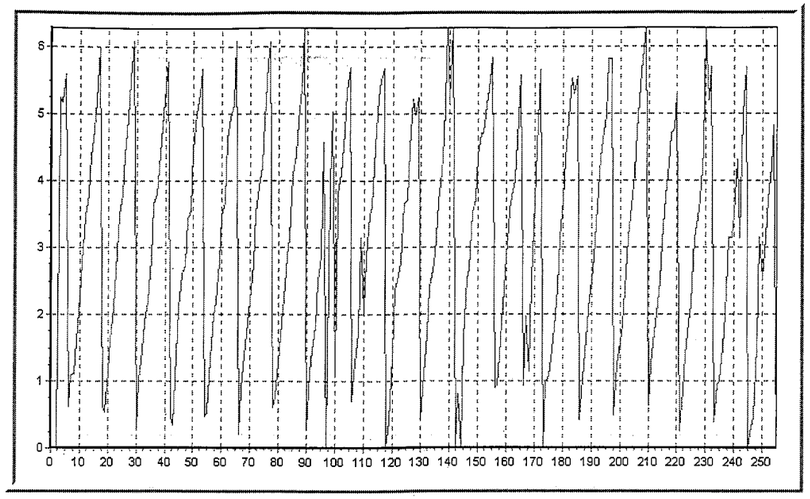


Figura 39: Fase obtenida con el algoritmo de Carré para el corrimiento de 1 pixel

π de las diversas líneas de la fase envuelta, estaremos encontrando los mínimos de la función cosenoidal que la generó.

Lo anterior constituye la propuesta de mejora del algoritmo para la determinación del corrimiento de fase, pues a partir de una nueva estimación de los mínimos, se puede continuar con el algoritmo original (cálculo de una función de las posiciones con estos mínimos con el orden de los mismos), este proceso se hace para las tres secciones en las que se había dividido los datos del interferograma.

La diferencia de fondo entre los dos métodos consiste en el dominio donde se hace la estimación de los mínimos de la función. El algoritmo original hace la estimación en el dominio espacial, esto es, toma la intensidad medida directamente por la cámara, en tanto que la modificación al algoritmo de Carré, hace la estimación de los mismos en el espacio de la fase directamente. Además, este último hace uso de mayor información de la señal original, pues para encontrar la recta toma todos los puntos que la conforman y de ahí hace la estimación del cruce por π, en tanto que el algoritmo original solo hace uso de los cinco pixeles alrededor de donde considera que se encuentra los mínimos de la función cosenoidal.

5.6 Comparación de la Mejora de Carré con el Algoritmo Original

En esta parte se presentará una comparación de los resultados obtenidos entre el algoritmo original y la modificación al método de Carré que se ha sugerido.

Con el fin de tener una estimación cuantitativa de los resultados, se realizaron pruebas con señales sintéticas, semejantes a las obtenidas con el interferómetro. Los parámetros de la frecuencia portadora, así como el corrimiento de fase en el bloque son parámetros que se pueden elegir. Por ejemplo, en la figura 41 se muestra una señal sintética con un corrimiento de 0.5 de franja en la parte del bloque (posiciones de 97 a la 165), se ha contaminado con

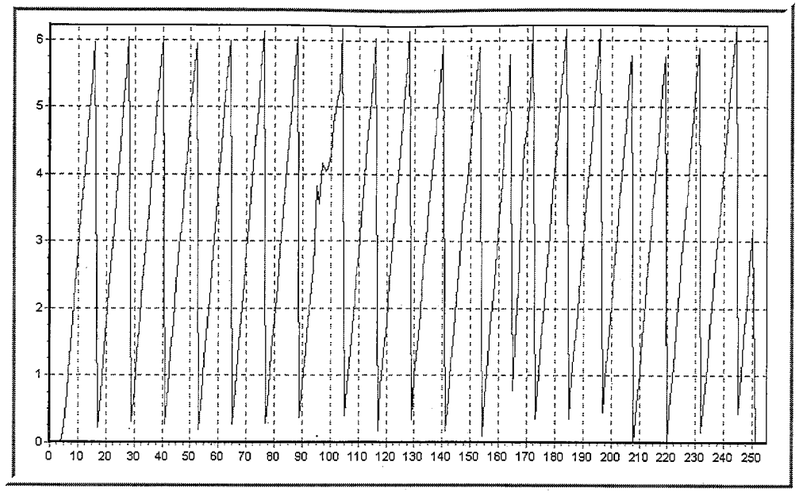


Figura 40: Fase obtenida con el método de Carre con un corrimiento de 3 pixeles

ruido gaussiano con una desviación estandar de 0.15 acotada a 3 sigmas.

Si a esta señal se le aplica el algoritmo original, se obtiene un corrimiento 0.524293625992 de franja, para el algoritmo de Carré sin la optimización en el tamaño de paso (paso=1) se obtiene 0.5050747525654442, en tanto que usando la mejora al algoritmo de Carré (con una separación de 3 pixeles) se obtiene un corrimiento de 0.5024057286263559, lo cual representa una mejora en relación a la estimación con el otro algoritmo.

El ruido que se añadió a la señal generada, es aproximadamente igual al que se obtiene de manera general en los patrones de franjas del interferómetro, pero aún en señales en donde no se considere la adición de ruido, la estimación es mas adecuada. Por ejemplo la figura 42 muestra una señal sin ruido con el mismo corrimiento que la anterior (0.5 de franja) y los valores obtenidos son 0.4994240432477763, para el algoritmo original, 0.4999999981086916 para el algoritmo sin optimización en el tamaño de paso y 0.499999999896843 para el algoritmo de Carré modificado.

Como se puede ver en los resultados obtenidos, la estimación del corrimiento con la mejora al algoritmo de Carré implica una mejor estimación de fase, al menos en una posición decimal. El tiempo empleado por ambos algoritmos es relativamente el mismo, por ello representa una buena propuesta de mejora en la estimación de fase para el instrumento.

5.7 Calculo completo del modelo de franjas usando el concepto placa con rigidez adaptable

El problema de las franjas en el interferómetro del CENAM contiene las características para las cuales se probó el modelo de placa con rigidez adaptable que se describió en el capítulo anterior. Por eso parece directa la aplicación del modelo a los patrones de franjas que se

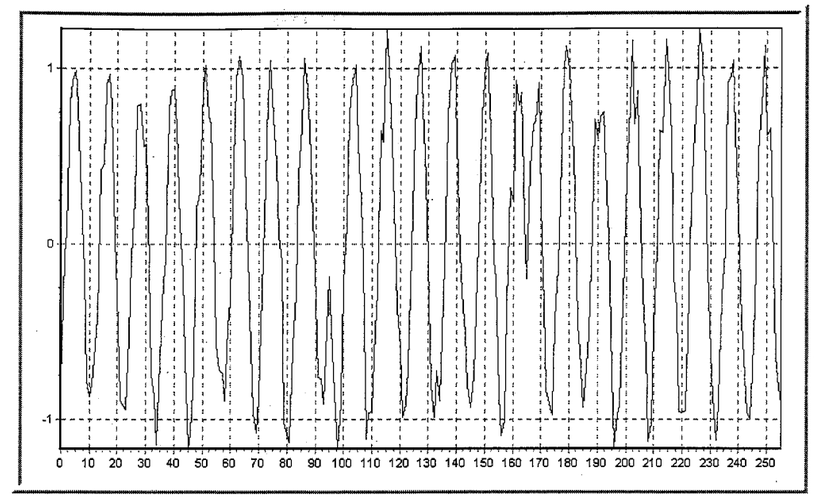


Figura 41: Señal sintética con un corrimiento de 0.5 de franja en la sección del bloque con ruido gaussiano $\sigma = 0.15$

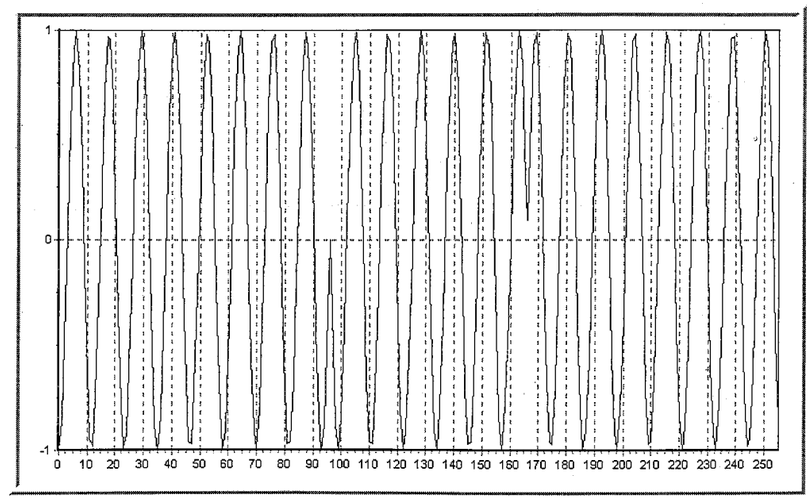


Figura 42: Señal con corrimiento en la sección de bloque de 0.5, sin ruido

obtienen en el interferómetro.

Las tres regiones que contiene el modelo de los interferogramas del TESA, tienen la característica de ser planas, por ser consideradas como superficies de referencia, esto es, en el orden las longitudes de ondas del láser, las imperfecciones debieran ser imperceptibles o al menos poco importantes. Debido a la naturaleza del fenómeno, tampoco es posible conocer de manera directa la frecuencia portadora en el modelo, lo cual implica que el modelo debe ser robusto a encontrar una pendiente en el modelo debida al residuo entre la frecuencia real y la frecuencia estimada.

Además de lo anterior, por considerar que el bloque patrón a medir puede ser de un material distinto al de la platina de referencia, entonces el cambio de los valores de iluminación en el modelo también deben ser considerados, además de que contribuyen para la detección de los "outliers" en los datos, esto es, los bordes donde el bloque bajo medición se encuentra en la señal.

Los ejemplos de franjas en estas secciones fueron obtenidas dentro del proceso de medición actual en el interferómetro, por lo tanto, las posiciones de los "outliers" prediciendo la posición del bloque deben estar alrededor de las posiciones consideradas base en el procedimiento original, esto es, alrededor de la posición 97 y 165. La figura 43 contiene un ejemplo del tipo de interferogramas obtenido directamente del interferómetro TESA.

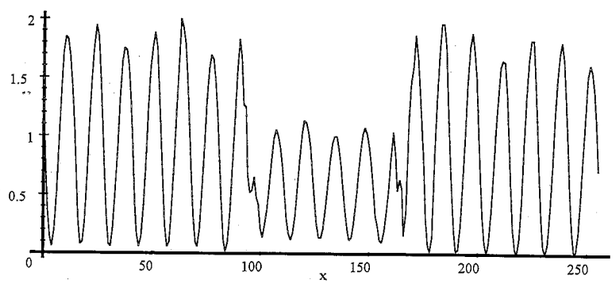


Figura 43: Ejemplo de interferograma con el laser rojo del interferómetro TESA. El bloque es de diferente material que la platina

Aplicando el algoritmo original se estima una desviación de 0.325859718415 fracciones de franja, empleando la mejora introducida en el algoritmo de Carré la desviación obtenida es 0.332829199643 fracciones de franjas, como se puede observar, en este caso las lecturas de ambos métodos es muy similar. Si se aplica el modelo de placa adaptable se obtiene una lectura de 0.332534938378 para la misma posición. Las lecturas son muy similares entre si, la única manera de comparar contra los datos reales es determinar el grado de ajuste de la estimación con lo datos reales en cada uno de los casos, este método de comparación se mostrará en la sección de resultados al final del presente capítulo.

A continuación se mostrarán los resultados obtenidos tanto para la estimación de fase, como de los elementos de iluminación (a y b) del modelo, usando el método de placa adaptable. Se detallarán las condiciones de inicialización para lograr una mas rápida estimación,

así como los valores obtenidos para cada una de las funciones estimadas. Así como el procedimiento usado para la obtención del corrimiento de fase con el modelo de placa adaptable.

Para la solución del problema, se hace uso del modelo completo de placa adaptable. Si se quiere lograr un resultado mas rápido, se realiza primeramente una búsqueda de inicialización con el modelo no completo.

5.7.1 Inicialización del modelo

El modelo de placa adaptable es un modelo no lineal, que para su solución puede tomar bastante tiempo dependiendo del método que se haya elegido. Pero cualquier método requiere una solución inicial para arrancarlo. En la solución específica del interferómetro TESA, se hace una primera aproximación, considerando los elementos de iluminación con valores constantes (se les asigna el valor de 1), ajustando desde un inicio los valores de la señal original en el intervalo de 0 a 2, empleando la fórmula de remapeo expresado en (48).

El modelo empleado para realizar la primera aproximación se expresa a continuación:

$$U_{ASP}(f) = \begin{bmatrix} \sum_r (1+\cos(w_0 r + f_r) - g_r)^2 \\ +\lambda \sum_{\langle q,r,s\rangle \in L} [f_q - 2f_r - f_s]^2 \end{bmatrix},$$

para este modelo, solo hay que hacer una estimación del campo de la fase f.El algoritmo para la solución de este modelo, es directo pues solo hay que minimizar para el campo f.

Como se puede observar, el campo de f en el modelo es no lineal, por esto también es necesario una estimación inicial del campo para utilizar algún algoritmo de minimización. Esta primera aproximación debe ser un algoritmo sencillo para encontrar la fase y la idea es encontrar el corrimiento principal del interferograma. Lo anterior es debido que la imagen del interferograma no necesariamente inicia con un valor de cero en frecuencia portadora, y este corrimiento lo tendrá presente durante todo el interferograma. Para encontrar este corrimiento se realiza una búsqueda exhaustiva de la misma, valorando el error sobre el modelo con cada corrimiento que se proponga en el intervalo de 0 a $2\pi/w_0$.

Con la idea anterior, se realiza una búsqueda del error mínimo con el corrimiento usando el modelo:

$$\min_{corr} \sum_{r\in L} [g(r) - (1+\cos(\varpi_0 r + corr))]^2$$

donde $g(r)$ representa los datos del interferograma y $corr$ el corrimiento que se busca. Ya en la práctica el corrimiento toma valores cada 0.1 entre el intervalo de 0 a $2\pi/w_0$. Así por ejemplo, para el interferograma de la figura 43, el corrimiento que se encuentra con esta idea es de 7.4. La estimación de la frecuencia portadora se hace empleando el algoritmo de Huntley descrito en la sección 4.4. El ajuste logrado se puede observar en la figura 44.

Una vez realizado el primer ajuste, se procede a estimar los valores de la fase usando el modelo de placa únicamente para la fase, para lo cual se hace uso del método de máximo descenso que se explicó en el capítulo anterior. Solo se hace la estimación de fase. Aplicando 500 iteraciones del método se obtiene los resultados de la figura 45.

La figura 45 muestra ya un mejor ajuste con la señal original. Se puede notar además la forma de la fase, que coincide con el conocimiento *a priori* que se tiene del interferograma.

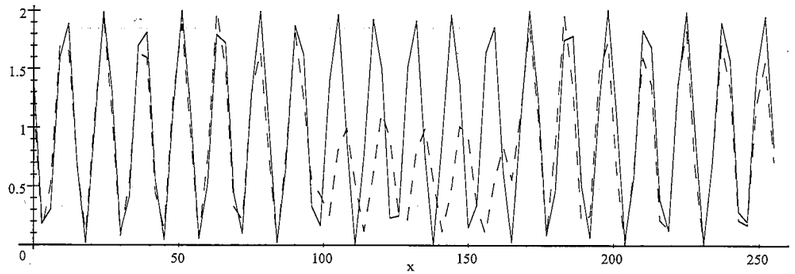


Figura 44: Primer ajuste al modelo del TESA, usando una búsqueda exaustiva para el corrimento de las franjas

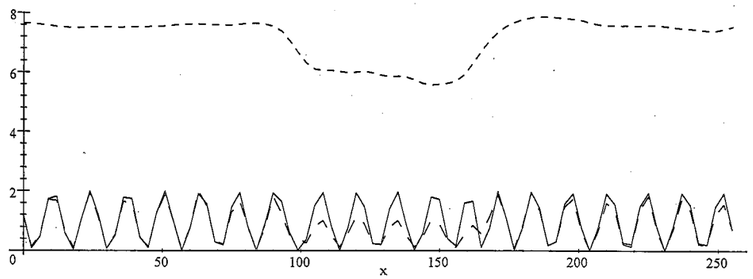


Figura 45: Ajuste empleando el modelo de placa solo al término de fase, considerando el elemento de iluminación como constante

El bloque en la parte central marcando gran diferencia en fase con la platina a los extremos. En este caso se empleó una constante $\lambda = 200$, para la regularización del campo de fase. Este parámetro parece ser no tan sensible para diversos datos del TESA, lo cual muestra una de las bondades del método.

5.7.2 Cálculo completo del modelo de interferograma

El siguiente paso consiste en hacer el cálculo del modelo completo de placa adaptable, esto es el modelo que incluye elementos de iluminación y además detección del campo de "outliers" en esos campos.

El modelo entonces es el expresado la ecuación (57) y el algoritmo empleado es el descrito en el capítulo anterior, usando como algoritmo de minimización el de máximo descenso. Para ejecutar este modelo, se debe especificar los valores de los parámetros γ y β de regularización de los campos a y b, respectivamente, así como el parámetro para el rechazo de "outliers" μ. Los valores característicos empleados son $\lambda = 500, \gamma = 700, \beta = 700$ y $\mu = 1500$. Estos

valores también son robustos para los diferentes interferogramas del TESA analizados. La figura 46 muestra el ajuste efectuado, los valores de fase y de iluminación. Se ve como la estimación de los elementos de iluminación ayuda mucho al mejor ajuste con los datos originales, la fase mantiene la misma forma que en el cálculo anterior, lo que concuerda con lo expresado en el capítulo anterior, pues si se desea solo estimar la fase, el modelo simple es una buena opción. La figura 47 contiene los valores estimados de iluminación, así como de "outliers", los cuales coinciden con los bordes teóricos del modelo.

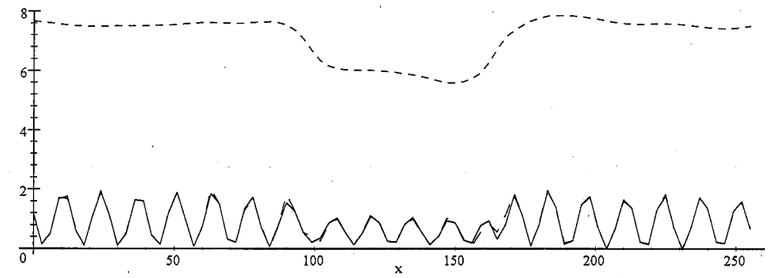


Figura 46: Ajuste empleando el modelo de placa completo, incluyedo término de iluminación, así como estimación de "outliers"

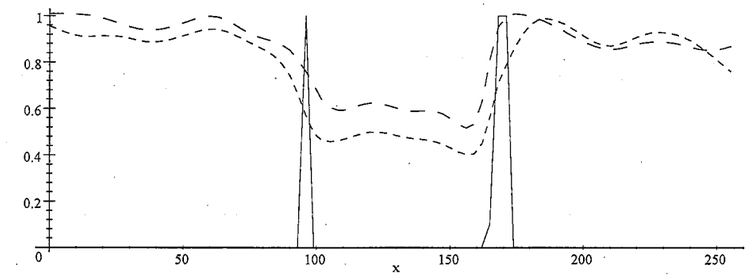


Figura 47: Resultados para los elementos de iluminación y "outliers" empleando el modelo de placa completo

Los resultados mostrados se obtuvieron con 1000 iteraciones del método de máximo descenso.

5.7.3 Modelo de placa con rigidez fija

Se puede seguir iterando para lograr un mejor ajuste del modelo. Pero en este caso específico del TESA, se han detectado en este punto las tres zonas de importancia para la medición, por

ello se puede hacer un ajuste por zonas del modelo, sin el procesamiento de bordes, puesto que estos ya han sido localizados. Para esto se hace una búsqueda de los puntos donde se detectaron "outliers" y se divide esa zona de su predecesora. A cada zona encontrada se aplica el mismo modelo de placa, pero sin el procesamiento de "outliers", quedando la expresión del modelo de la siguiente forma:

$$U_{ASP}(f,\phi) = \left[\begin{array}{c} \sum_r (a_r + b_r \cos(w_0 r + f_r) - g_r)^2 \\ +\lambda \sum_{\langle q,r,s\rangle \in L} (f_q - 2f_r - f_s)^2 \\ +\gamma \sum_{\langle q,r,s\rangle} (a_q - 2a_r - a_s)^2 \\ +\beta \sum_{\langle q,r,s\rangle} (b_q - 2b_r - b_s)^2 \end{array} \right]$$

Este modelo es mas sencillo que el modelo anterior, lo cual facilita su minimización. Se mantienen lo valores de las constantes de regularización del modelo anterior y se ejecuta este nuevo modelo durante 2000 iteraciones. Los resultados obtenidos con este nuevo modelo se pueden observar en la figuras 48 y 49.

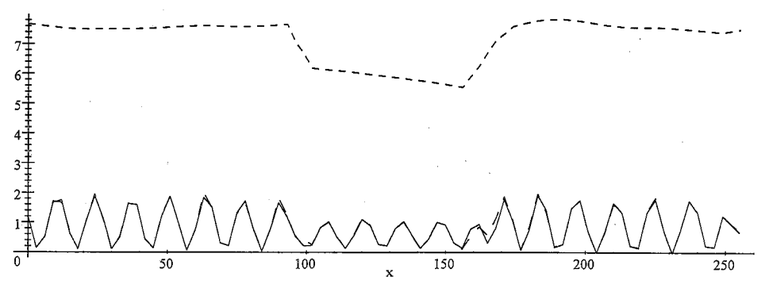


Figura 48: Resultsdos finales, después de aplicar el procesamiento de placa sin "outliers". Teniendo como inicialización los valores del modelo completo de placa

Debe notarse que en el área cercana a los "outliers" detectados, se forma una falsa estimación del modelo, pues debe recordarse que al aceptar un "outlier", se procede a ignorar la diferencia entre los valores de los pixeles en el término de regularización, lo cual hace que se ignore, en cierta manera la estimación en dichos puntos.

5.8 Estimación del corrimiento de franjas

Hasta el momento el algoritmo reporta solo la fase de cada una de las posiciones del interferograma, esto es, en el intervalo de 0 a 2π que es el valor que le corresponde a cada sitio. Pero el algoritmo que se describió en las primeras secciones de este capítulo necesita el corrimiento de franja que posee el bloque en cuestión.

Para lograr lo anterior se procede de la siguiente manera. Primero se obtiene el módulo 2π de los resultados, pues los valores de fase son periódicos fuera de este intervalo. Hecho lo

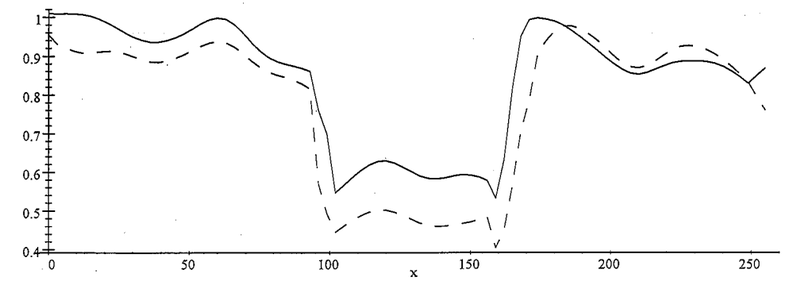


Figura 49: Resultados finales de los elementos de iluminación, después de aplicar el procesamiento de placa sin "outliers". Teniendo como inicialización los valores del modelo completo de placa

anterior se procede a determinar la fase del centro del bloque, tal como lo hace el algoritmo original, esto es, se ajusta una parábola con los valores de la fase y teniendo como ordenada la posición de dichos valores, esto para las dos secciones de platina, las cuales ahora se pueden detectar por los bordes que se encontraron con el modelo de placa adaptable.

El centro del bloque es también factible encontrarlo gracias a los mismos bordes. Para esta posición se estima la fase que posee con la cuadrática ajustada con los datos de la platina.

El corrimiento de la sección del bloque se estima de manera similar, se ajusta una cuadrática con los puntos dentro del bloque y se estima el valor de la fase en el centro del bloque. La diferencia de las estimaciones con la platina y el área del bloque representa la diferencia de fase estimada por el modelo. Solo resta convertir a fracción de franja dicha diferencia, lo cual se logra dividiendo esta cantidad entre 2π pues un corrimiento de esta magnitud corresponde a un corrimiento de una franja.

5.9 Resultados

El ajuste obtenido con el modelo de placa adaptable es bastante bueno, como se puede ver en la figura 48, la estimación del modelo de franjas completo satisface adecuadamente los datos originales. Los valores obtenidos por los tres métodos revisados en este capítulo para un caso de imágenes obtenidas en el interferómetro TESA se puede ver a continuación:

$$\begin{aligned} \text{Original} &= 0.325859718415 \\ \text{Carre modificado} &= 0.331265110142 \\ \text{ARC-P} &= 0.332534938378 \end{aligned}$$

Como se observa, los resultados son bastante similares entre si, lo que en cierta forma indica que al menos los tres métodos están calculando dentro de cierto intervalo. Se nota una menor diferencia entre los métodos propuestos en este trabajo. Desde este punto de vista es difícil decidir cual de los tres valores es el correcto. Sin embargo, las pruebas realizadas

con datos sintéticos nos permiten asumir que el resultado mas preciso es el obtenido por el método de ARC-P, seguido en precisión por el ajuste del método de Carré y finalmente el método original del interferómetro TESA.

De cualquier manera, para tener una idea mas adecuada del ajuste que se esta realizando, se necesita comparar los tres resultados con los datos originales. El problema es que los dos primeros métodos reportan resultados en diferente espacio, al del método de placa adaptable, por ello hay que encontrar un espacio similar para todos los métodos.

El espacio seleccionado es el espacio de fase, espacio del modelo de placa adaptable. Por ello es necesario llevar el espacio de las fracciones de franjas al espacio de fase.

Para lograr lo anterior es necesario multiplicar por 2π los resultados obtenidos por lo dos primeros métodos (método original del TESA, y el método de la modificación de Carré), con esto estaremos convirtiendo los corrimientos de franjas en fase directamente. Otra consideración es el hecho de que el desfasamiento o corrimiento de franjas, se estuvo basando en un corrimiento de π, pues lo valores que se toman como referencia son los mínimos de la función cosenoidal, los cuales representan un corrimiento en fase de π, por ello se debe de restar este valor a todos lo valores a lo largo del mapa de corrimientos. Después de esta transformación se tienen los resultados en un mismo espacio y es posible compararlos.

Para realizar la comparación se procede a encontrar el error cuadrático medio en cada uno de los puntos entre la estimación de cada método y los datos reales (que son ajustados entre $0-2$ para evitar el problema de escala con las señales). La figura 50 muestra el ajuste encontrado por el método original y los datos reales

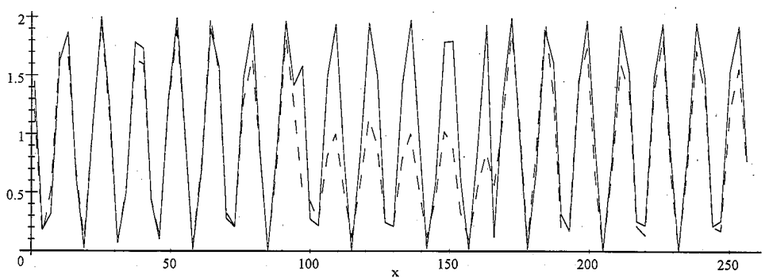


Figura 50: Comparación de ajuste con los datos reales y el algoritmo original

El error cuadrático medio encontrado entre los datos reales y el ajuste de la fase, sin tomar en cuenta los datos para iluminación es de 19.4730, este valor es alto por no contabilizar los cambios en los elementos de iluminación del modelo.

En la figura se muestra ahora el ajuste realizado por el método de Carré modificado, para los mismo datos. El error encontrado es 19.2475 que sigue siendo alto y muy parecido al ajuste por el algoritmo original.

Para la estimación con el modelo de placa se logra un menor error, el valor es de 18.9993, pero aún sigue siendo alto, al no considerar los cambios de iluminación, como se observa en la figura 52. Sin embargo, si se observa con detenimiento la figura 52, resulta que el ajuste

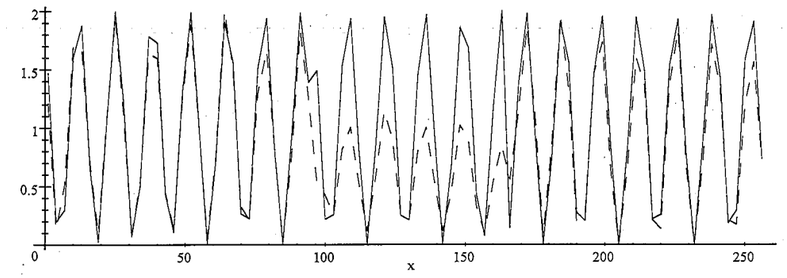


Figura 51: Comparación de ajuste con los datos reales y el algoritmo de Carré modificado

es mejor a lo largo de la señal..

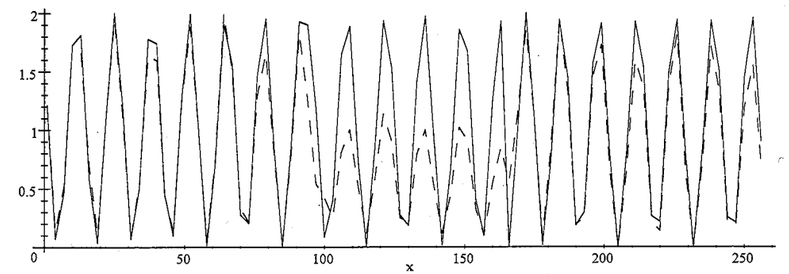


Figura 52: Comparación de ajuste con los datos reales y el modelo de placa adaptable

Gracias a que el modelo de placa adaptable, no solo permite estimar la fase del modelo, sino también los elementos de iluminación, es posible lograr el ajuste de los datos como se observa en la figura 48, que, salvo en los sitios donde se detectaron los bordes del bloque en cuestión, la aproximación es muy buena. El error obtenido con todos los elementos del modelo para este caso es de 0.3641 lo cual ya es una mejor estimación del error.

Cabe destacar, de acuerdo a lo anterior, que el modelo de placa logra un mejor ajuste, aun sin considerar los elementos de iluminación en el modelo. La estimación final del corrimiento obtenido, con los tres modelos no varía significativamente entre ellos, lo cual no conduce a una mejora tan significativa en la incertidumbre del instrumento en conjunto. Y se puede concluir que la mejora en la incertidumbre de medición se debe buscar por otro lado.

Una mejora que si es significativa en el modelo de placa adaptable, es la eliminación del usuario para la determinación del centro del bloque, pues gracias a la detección de los bordes, este se puede realizar de manera automática

5.10 Ajuste en dos dimensiones

El modelo de placa se puede extender a un espacio de dos dimensiones, donde la complejidad del modelo se dirige hacia la minimización de la función de costo. Pero se sigue manejando el modelo completo de franjas.

Además se puede procesar un interferograma para líneas inclinadas, esto es franjas que poseen una frecuencia vertical y una horizontal, así pues el modelo se puede representar de la siguiente manera:

$$U_{ASP}(f,\phi) = \left[\begin{array}{c} \sum_{r} \left(1+\cos\left(w_{0x}x + w_{0y}y + f_r\right) - g_r\right)^2 \\ +\lambda \sum_{\langle q,r,s\rangle \in \mathcal{L}} \left[\left(f_q - f_r\right)\left(1-\phi_{q,r}\right) - \left(f_r - f_s\right)\left(1-\phi_{r,s}\right)\right]^2 + \mu\left|\phi_{r,s}\right|^2 \end{array} \right]$$

donde el sitio $r = (x, y)$ representa la posición de un pixel, en tanto que la variable ϕ vive directamente sobre los pares de vecinos mas cercanos entre si, lo cual se puede representar como una retícula dual, para detectar los bordes entre pixeles verticales y entre pixeles horizontales:

En las figuras 53 y 54 se observan los resultados para un espacio de dos dimensiones en la señal. La figura 53 contiene una ejemplo de interferograma obtenido con un bloque de carburo de tungsteno sobre una platina de acero, la cual, como se puede obserbar hace cambiar drásticamente las porpiedades de reflectancia del objeto bajo medición. Por otro lado la figura 54 contiene un bloque de acero sobre platina del mismo material.

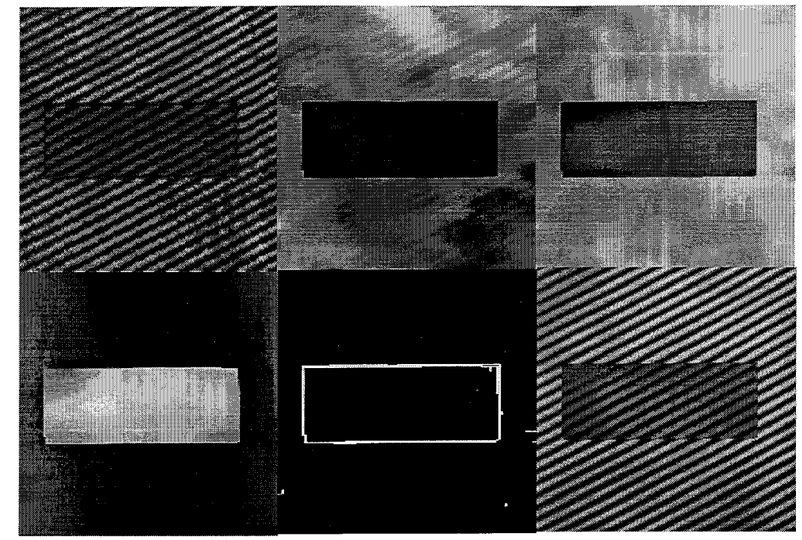


Figura 53: Resultados para un modelo de dos dimensiones: Interferograma original, valor de a, valor de b, valor de la fase, bordes de la imagen y reconstruccion del modelo a partir de las estimaciones

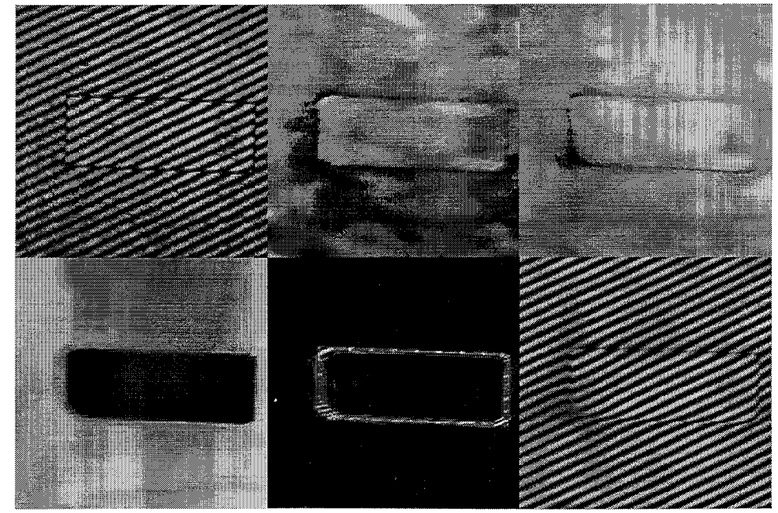


Figura 54: Resultados para un modelo de dos dimensiones: Interferograma original, valor de a, valor de b, valor de la fase, bordes de la imagen y reconstruccion del modelo a partir de las estimaciones

6 Conclusiones

Este trabajo presenta un nuevo modelo para la estimación de fase en patrones de franjas empleando la teoría de regularización . Este modelo es robusto para la detección de bordes en la imagen de franjas, aplicado principalmente a modelos con frecuencia portadora, aun cuando puede aplicarse a modelo sin portadora en los datos.

Además de la robustez para la detección de bordes en la imagen, el modelo también es robusto para la detección de zonas con pendiente constante, esto es, cambios de curvatura casi nulos, lo cual sobrepasa a los modelos anteriores en la literatura que solo detectaban zonas constantes a lo largo del modelo. Esto representa, una valiosa herramienta, sobre todo en modelos con portadora, pues si no se conoce con precisión el valor de esta frecuencia, este error se puede traducir en la aparición de una pendiente en zonas planas de la imagen original.

El modelo en cuestión permite además la estimación del campo de reflectancia de los datos, pues estima los valores a y b del modelo completo de onda, esto puede ser útil en datos donde el material de los cuerpos en el análisis puede ser diferente y por tanto variar los elementos de iluminación al momento de estimar los valores.

Se aplicó este modelo para el análisis de franjas reales, donde se comentan todos los problemas que se tienen para este caso, sobre todo el de la estimación de la frecuencia portadora, incluso se documenta un método bastante preciso para la estimación de dicha frecuencia, el cual ya había sido publicado con anterioridad.

El caso de estudio del capítulo 5, se puede concluir que el método empleado originalmente, reune las características necesarias para la precisión del instrumento en su conjunto, esto debido a las condiciones tan controladas con las que se hace la medición, pues se tienen controladas las condiciones ambientales, así como aislamiento de ruido por efectos en la iluminación, entre otras cosas. De cualquier manera, la precisión del aparato original mejoraría se se usa el algotimo de ARC-P o inclusive el que se denominó como Carré-modificado, el cual también fué introducido como constribución en este trabajo.

Referencias

[1] J.L. Marroquín, M. Rivera, S. Botello, R. Rodríguez-Vera and M. Servín, "Regularization methods for processing fringe-pattern images," Applied Optics, Vol 38, No. 5, pp 788-795, 1999

[2] J.L. Marroquín, J.E. Figueroa, M. Servín, "Robust quadrature filters ," J. Opt. Soc. Am, Vol 14, No 4, pp 779-791, 1997.

[3] J.L. Marroquín, M. Servín, R. Rodríguez-Vera, "Adaptive quadrature filters and recovery of phase from fringe pattern images," J. Opt. Soc. Am, Vol 14, No 8, pp 1742-1753, 1997.

[4] K.J. Gasvik, "Optical Metrology," John Willey and Sons, 1987.

[5] D. Malacara,"Optical Shop Testing," Second Edition, John Wiley and Sons, 1992.

[6] M.J. Black and A. Rangarajan, "Unification of line process, outlier rejection, and robust statistics with application in early vision," International Journal of Computer Vision, vol. 19, No 1., pp 57-91, 1996.

[7] F.R Hampel, E.M. Ronchetti P.J. Rousseeuw and W.A. Stahel, "Robust Statistics: The Approach Based in Influence Functions," John Willey and Sons, N.Y., 1986.

[8] D. Geman and G. Reynolds, "Constrained restoration and recovery of Discontinuities," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol 14, pp 367-383, 1992.

[9] J.M Huntley, "An image processing system for the analysis of speckle photographs", J. of Physics E: Sci. Instrum. vol 19, 1986.

[10] M. Rivera y J.L. Marroquin, "The adaptive rest-condition spring system: and edge-preserving regularization techique," en Procc. of the IEEE Int. Conf. on Image Processing, IEEE Signal Processing Society, Vancouver, BC, Canada, Sept. 2000.

[11] Gilbert Strang, "Introduction to Linear Algebra, " Wellesley-Cambridge Press, 1998.

[12] J. Schmit, K. Creath and M., Kujawinska, "Spatial and Temporal Phase-measrument techniques: A Comparison of major error soruces in one dumension ," on Porc. SPIE vol 1755, Interferometry: Techniques and Analysis, pp. 202-211, 1992.

[13] P.J. Huber, "Robust Statistical Procedures ," Philadelphia SIAM, 1996.

[14] G.H. Golub, "Matrix Computations ," The Jonhs Hopkings University Press.

[15] P. Carré, "Installation et Utilisation du Comparateur Photoelectrique et Interferentiel du Bureau International des Poids de Mesures ," Metrologia 2, vol 13, 1966.

[16] P. Hariharan, B.F. Oreb and T. Eiju "Digital Phase-Shifting Interferometry: A Simple Error Compensation Phase Calculation Algorithm ," Applied Optics, 26, 3899, 1987.

[17] J.L. Marroquín, S. Mitter and T. Poggio, "Probabilistic Solution of Ill-Possed Problems in Computational Vision ," Journal of the American Statistical Association, vol 82, No. 397, pp 76-89, 1987.

[18] G.T. Reid, "Automatic Fringe Pattern Analysis: A Review ," Optics and Lasers in Engineering vol 7, pp. 37-68 1986.

[19] D.J. Pugh and K. Jackson, "Automatic gauge calibration measurement using multiple wavelength interferometry , " Proc SPIE: vol 656, Contemporary Optical Instruments Design, Frabrication and Testing pp 244-250, Inssbruck Austria, April 1986.

[20] M. Takeda and K. Mutoh, "Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D objects shape ," Applied Optics, vol 22, No. 24, pp 3977-3982, 1983.