

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

**Puntos críticos de la funcional área
de una curva compleja cerrada sobre
una variedad de métricas Kähler**

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Luis Abel Castorena Martínez

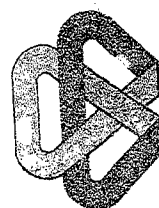
DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Xavier Gómez-Mont A.

Junio del año 2000

Guanajuato, Gto. México

A
*mi país, México:
Por su gran
diversidad cultural*



CIMAT
BIBLIOTECA

AGRADECIMIENTOS

A lo largo de este trabajo ha habido muchas personas que me han mostrado el interés, apoyo y confianza para que yo pudiera terminar esta tesis. A todos ellos gracias. Quiero aprovechar estas líneas para agradecer además a aquellas personas que estuvieron cercanas a mi y que me han depositado toda su confianza a lo largo de este trabajo. Quiero agradecer de manera muy especial:

A mis padres Luis y Juana y a mi abuelita Luisa por su apoyo y cariño que siempre es incondicional en cualquier momento de mi vida. A toda mi familia les estoy agradecido por seguir de cerca mis pasos y por mostrarme su preocupación por mí. A mi abuelito Wenceslao por cuidarme siempre desde el lugar donde el se encuentra.

Al Dr. Xavier Gómez-Mont por la confianza que él depositó en mí y por el apoyo brindado durante todo este tiempo. Sin duda él me ha ayudado para madurar en el ámbito académico. Además su gran sentido del humor y sensibilidad me ha servido para ver la investigación en matemáticas de una manera responsable y relajada. Me siento satisfecho con este trabajo y sin duda el influjo para que esta tesis estuviera escrita de la mejor manera posible.

Al Dr. Alberto Verjovsky por su apoyo, confianza y valiosos comentarios sobre este trabajo. El Dr. Verjovsky desde el inicio de mis estudios doctorales me motivó con buenas ideas y ánimos para concluir de manera satisfactoria este trabajo.

Al Dr. Jesus Muciño por la disponibilidad que siempre ha tenido para hablar de matemáticas con un servidor. Además sus comentarios y sugerencias me han hecho ver la delicadeza que lleva escribir y exponer un trabajo de matemáticas. Esto me ha enseñado a madurar más en este aspecto.

C I M A T
BIBLIOTECA

015981

Al Dr. Luis Hernandez Lamonedá por sus enseñanzas, amistad y por brindarme su apoyo desde mis estudios de maestría. El Dr. Lamonedá es una de las personas que más confianza ha tenido en mí desde mi llegada al CIMAT.

Al Dr. Gil Bor por los buenos cursos de topología algebraica que nos brindó a sus estudiantes durante la maestría. Además sus comentarios, sugerencias e ideas sobre algunas pruebas de este trabajo han sido fundamentales para que esta tesis tenga una buena presentación y mejor contenido matemático.

Al Dr. Heberto Del Río por la matemática que me ha enseñado, por su paciencia, y por todas las ideas y comentarios que me ha brindado desde que empecé a discutir mi problema de tesis con él. El Dr. Heberto es el responsable de que yo haya conocido el maravilloso mundo de la geometría Kähler.

Durante mis estudios de doctorado en el CIMAT encontré personas las cuales me brindaron su apoyo y confianza para discutir abiertamente mi problema de tesis. Agradezco a los Dres. Sevin Recillas, Carlos Gómez-Mont, Andrei Tyurin, Alexis García y Leticia Brambila por sus valiosos comentarios y por haberme brindado un ambiente estimulante en los seminarios y eventos de geometría algebraica. Quiero expresar mi agradecimiento también al Dr. Robert Varley por sus certeros comentarios que hizo sobre mi problema de tesis durante una estancia que un servidor hizo en la Universidad de Georgia en Athens.

Agradezco a los Dres. Jorge Olivares y Maite Fernández por brindarme su tiempo, amistad, disponibilidad y por el buen ánimo que siempre me han brindado.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por haberme otorgado apoyo económico por medio de su programa de becas para realizar mis estudios de maestría y doctorado.

Al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) por todo el apoyo económico brindado durante mi estancia en este centro. Este agradecimiento lo hago extenso a todo el personal que labora en el CIMAT, en especial a Toquina, Doña Tere y a Lolita. Agradezco también al profesor Francisco Mirabal por toda su atención durante mis estudios de maestría y doctorado y por preocuparse siempre por la situación académica de los estudiantes.

Al CONCYTEG por el apoyo económico que me brindó en el último semestre de mis estudios.

Agradezco a todos los amigos que durante el doctorado me otorgaron su amistad

y apoyo en todo este tiempo en el CIMAT: Enrique Crespo, Claudia Reynoso, Ángela Ortega, Myrna Velarde, Julio Macías (el campeón), Ernesto Tapia (el loco), Marco Mendez, Patricia Jiménez, Víctor Castellanos, Enrique Saucedo (el pintor), Manuel Cruz, Armando Sánchez (el mulix). Este agradecimiento es doble y especial para Claudia Reynoso por haberme brindado su tiempo y espacio, su paciencia y amistad hacia mí, por haberme enseñado a ver muchos aspectos de la vida de una manera más agradable y serena, por su apoyo y por su buen sentido del humor.

ÍNDICE

Introducción	1
Capítulo I. Haces vectoriales y cohomología de Čech.	4
§1.1 Haces vectoriales.	4
§1.2 Cohomología de Čech.	8
Capítulo II. Variedades casi-complejas, complejas y Kähler.	11
§2.1 Variedades casi-complejas.	11
§2.2 Variedades complejas.	14
§2.3 Variedades Kähler.	17
Capítulo III. Variedades Jacobianas.	19
§3.1 La jacobiana de una superficie de Riemann compacta.	19
§3.2 El divisor <i>Theta</i> de $J(C)$.	21
§3.3 El teorema de Abel y fórmula de Poincaré.	23
Capítulo IV. Funcionales Riemannianas en el espacio de métricas Kähler.	25
§4.1 La funcional A_C sobre una variedad de métricas Kähler.	25
§4.2 Puntos críticos de la funcional A_C .	31
Capítulo V. Una métrica canónica en superficies de Riemann.	36

§5.1 La forma de Kähler $\mu^*\omega_0$.	36
Capítulo VI. Curvatura gaussiana sobre C .	38
§6.1 Curvatura y puntos de Weierstrass.	38
§6.2 Un ejemplo: $C := \{y^2 = z^6 - 1\}$.	50
§ Apéndice I.	53
§ Apéndice II.	58
§ Apéndice III.	60
Bibliografía	63

INTRODUCCION

Este trabajo de tesis está escrito suponiendo que el lector está familiarizado con el lenguaje de la geometría algebraica y diferencial compleja.

Sea M una variedad compleja cerrada (compacta y sin frontera) de tipo Kähler de dimensión compleja n con ω la forma de Kähler. Supongamos que $C \hookrightarrow M$ es una curva compleja cerrada en M . El teorema de Wirtinger afirma que

$$\text{área de } C := \tilde{A}_C(\omega) := \int_C \omega.$$

La función \tilde{A}_C define una funcional en $H^{1,1}(M, \mathbb{R})$. En $H^{1,1}(M, \mathbb{R})$ tenemos el cono de Kähler

$$\mathcal{CK} := \{[\omega] \in H^{1,1}(M, \mathbb{R}) \mid [\omega] \text{ tiene al menos un representante } \omega \text{ que es Kähler} \}$$

Se tiene que \mathcal{CK} es un cono convexo de $H^{1,1}(M, \mathbb{R})$. Este cono es un abierto en $H^{1,1}(M, \mathbb{R})$. Sobre \mathcal{CK} tenemos la siguiente función

$$V : \mathcal{CK} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

dada por

$$V([\omega]) = \frac{1}{n!} \int_M \omega^n = \text{Volumen}(M, \omega)$$

donde ω es un representante de $[\omega]$.

Es de nuestro interés estudiar los puntos críticos de $A_C := \tilde{A}_C|_{CK(1)}$, donde $CK(1) := V^{-1}(1)$. En este trabajo nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Cuántos puntos críticos y de qué tipo tiene A_C sobre $CK(1)$? Hemos probado que tal funcional tiene un único punto crítico $[\omega]$ el cual es un mínimo global si y sólo si $PD[C] = \alpha[\omega]^{n-1}$, $\alpha > 0$, donde $PD[C]$ denota el Poincaré dual de C .

Esta tesis esta desarrollado de la siguiente manera:

Los capítulos I, II, III contienen el material básico que usamos para analizar nuestro problema. En estos tres capítulos los resultados que exponemos son clásicos dentro de la geometría. El capítulo I contiene lo necesario de haces vectoriales y cohomología de Čech. El capítulo II contiene los resultados más básicos de variedades casi-complejas, complejas y variedades Kähler. En el capítulo III exponemos algunos teoremas sobre Superficies de Riemann compactas y sus Jacobianas. Estos tres capítulos los hemos extraído de los capítulos 0,1,2 del libro de Griffiths-Harris([GH]) y del capítulo 1 y 2 del libro de Besse([BE]) ambos citados en la bibliografía.

En el capítulo IV damos el planteamiento y la solución del problema principal de esta tesis. Este capítulo inicia con la prueba de los lemas 4.1.1 y 4.1.2 los cuales hacen ver cómo son las expresiones de la primera y segunda derivada de la función V . Tenemos la proposición 4.2.2 la cual nos da un criterio para saber cuándo un conjunto es estrictamente convexo. Esta proposición junto con las relaciones de Riemann-Hodge y el lema 4.1.2 prueban que $V^{-1}([1, \infty))$ es un conjunto estrictamente convexo. En el lema 4.2.5 probamos que un punto crítico de A_C sobre $CK(1)$ es un mínimo global. Todos estos resultados previos nos ayudan a probar el teorema principal de esta tesis:

Teorema 4.2.5. *Sea (M^{2n}, J) una variedad compleja cerrada de dimensión compleja n que admite métricas Kähler. Sea $C \hookrightarrow (M^{2n}, J)$ una curva compleja cerrada. Entonces tenemos que $[\omega] \in CK(1)$ es punto crítico de A_C si y sólo si*

$$PD([C]) = \alpha[\omega]^{n-1}$$

donde $\alpha > 0$. En este caso se tiene que $[\omega]$ es el único punto crítico y es el mínimo global de A_C .

De este teorema podemos formular la siguiente definición:

Definición Sea $A_C : CK(1) \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $A_C([\omega]) = \int_C \omega$. Decimos que

$[\omega] \in \mathcal{CK}(1)$ es una clase C -crítica, si existe $\alpha > 0$ tal que

$$\text{PD}([C]) = \alpha[\omega]^{n-1}.$$

En el capítulo V analizamos el caso $C \hookrightarrow J(C)$, donde C es superficie de Riemann compacta C de género $g \geq 2$. Por la fórmula de Poincaré y por el teorema 4.2.5 obtenemos el corolario 5.1.1:

Corolario 5.1.1. *Sea C una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$, y $J(C)$ su Jacobiana. Entonces $c_1(L_\Theta) = [\omega_0]$ es una clase C -crítica.*

Como $J(C)$ tiene estructura de grupo abeliano, $[\omega_0]$ tiene un único representante invariante por traslaciones que define una métrica plana sobre $J(C)$. Esta métrica induce una métrica Riemanniana sobre C por medio de la aplicación de Abel-Jacobi. A tal métrica la llamamos la métrica Theta.

En el capítulo VI estudiamos la función de curvatura gaussiana K de la métrica Theta sobre C . En este capítulo probamos resultados concernientes a los puntos críticos de la función K . En este capítulo probamos el:

Lema 6.1.1. *Sea $f : C \rightarrow C$ un automorfismo distinto de la identidad. Si f deja fijo algún punto p de C , entonces p es un punto crítico de K , es decir, $dK(p) = 0$.*

Suponiendo que el género de C es 2 probamos el siguiente teorema

Teorema 6.1.4. *Sea C una curva hiperelíptica de género 2 dada por $y^2 = f(x)$, donde $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_6)$ con todas sus raíces distintas. Entonces tenemos que los puntos de Weierstrass de C , es decir los puntos fijos de la involución, tienen índice de Morse $+2$. ■*

En este mismo caso de género 2 probamos el teorema 6.1.5, el cual afirma que los puntos de C correspondientes a $f'(x) = 0$ son mínimos locales de K de índice de Morse 0. Terminamos el capítulo VI aplicando estos resultados al ejemplo $C := \{y^2 = z^6 - 1\}$. En este ejemplo se tiene que la función K es una función de Morse.

En el apéndice I calculamos la fórmula de la función K del ejemplo $y^2 = z^6 - 1$. En el apéndice II calculamos los puntos críticos de K de este ejemplo, y en el apéndice III damos una generalización del teorema 6.1.4 para género $g > 2$.

CAPÍTULO I

HACES VECTORIALES Y COHOMOLOGÍA DE ČECH

§1.1 Haces vectoriales

En los tres primeros capítulos de este trabajo daremos la herramienta que necesitaremos para desarrollar y resolver el problema principal de este trabajo de tesis. Del material elegido solo damos los enunciados de los teoremas sin demostración. Las referencias donde se pueden encontrar dichos resultados para estos tres capítulos son el capítulo 0, 1 y 2 del libro de Griffiths-Harris([GH]), y el capítulo 1 y 2 del libro de Besse([BE]).

A lo largo de este capítulo M denotará una variedad diferenciable orientable cerrada de dimensión m .

Un teorema importante de la topología algebraica es el teorema de dualidad de Poincaré. Una prueba de este resultado se puede encontrar en ([GH], pag. 53)

El teorema de la Dualidad de Poincaré. *Sea M una variedad diferenciable compacta orientable de dimensión m . Consideremos la forma de intersección*

$$\cap : H_k(M, \mathbb{Z}) \times H_{m-k}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

dada por

$$(A_k, B_{m-k}) \rightarrow A_k \cap B_{m-k}$$

donde $A_k \cap B_{m-k}$ denota la intersección algebraica de ciclos. Entonces la forma de intersección es unimodular, es decir, cualquier función lineal $H_{m-k}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$

se expresa como intersección con alguna clase $A \in H_k(M, \mathbb{Z})$, y cualquier clase $A \in H_k(M, \mathbb{Z})$ tal que $A \cap B = 0$, para todo $B \in H_{m-k}(M, \mathbb{Z})$ es una clase de torsión

denotamos por PD ($[A_k]$) el Poincaré Dual de A_k .

Definición: Un haz vectorial complejo C^∞ sobre M consiste de una familia $\{E_x\}_{x \in M}$ de espacios vectoriales complejos parametrizados por M junto con una estructura de variedad diferenciable sobre $E := \cup_{x \in M} E_x$ y una proyección π tal que

(a).- $\pi : E \rightarrow M$, $\pi(E_x) = x$ es C^∞ , y

(b).- Para cada $x_0 \in M$ existe un abierto U de M que contiene a x_0 y un difeomorfismo $\psi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^k$ tal que

$$\psi_U|_{E_x} : E_x \rightarrow x \times \mathbb{C}^k$$

es un isomorfismo lineal para cada $x \in U$. ψ_U se llama trivialización local de E sobre U . La dimensión de la fibra E_x como espacio vectorial complejo se llama el rango de E . En el caso que el rango de E sea uno, diremos que el haz E es un haz lineal.

Si en la condición (b) resulta que el abierto U es todo M , se dice que el haz E es trivial.

Si consideramos dos trivializaciones locales

$$\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^k,$$

$$\psi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{C}^k,$$

se tiene que para cada $p \in U_i \cap U_j$,

$$\psi_i \psi_j^{-1}|_{p \times \mathbb{C}^k} : p \times \mathbb{C}^k \rightarrow p \times \mathbb{C}^k$$

es un elemento de $GL(k, \mathbb{C})$. Entonces si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de M tal que (ψ_i, U_i) cumplen con la condición de trivialización local (b), para cada $U_i \cap U_j$, existe

$$\psi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(k, \mathbb{C})$$

definida por $\psi_{ij}(p) = \psi_i \psi_j^{-1}|_{p \times \mathbb{C}^k}$. Así definidas, las transformaciones ψ_{ij} satisfacen la siguiente condición sobre $U_i \cap U_j \cap U_k$ dada por

$$(1.1) \quad \psi_{ij} \psi_{jk} = \psi_{ik}$$

Si tenemos una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de M y aplicaciones C^∞

$$\psi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(k, \mathbb{C})$$

que satisfacen la condición (1.1) podemos construir un haz vectorial complejo C^∞ $E \rightarrow M$ de la siguiente manera:

Para cada $i, j \in I$, donde $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, consideremos los productos $U_i \times \mathbb{C}^k, U_j \times \mathbb{C}^k$; la transformación ψ_{ij} nos da, para cada $p \in U_i \cap U_j$, un elemento $\psi_{ij}(p) \in GL(k, \mathbb{C})$ y por lo tanto un isomorfismo de \mathbb{C}^k en si mismo. Por medio de $\psi_{ij}(p)$, cada $v \in \mathbb{C}^k$ tiene asociado un único vector $w = \psi_{ij}(p)v$ de manera que es posible establecer una regla de identificación de los abiertos $U_i \times \mathbb{C}^k, U_j \times \mathbb{C}^k$: Si $(p, v) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^k$, identificamos el punto $(p, v) \in U_i \times \mathbb{C}^k$ con el punto $(p, \psi_{ij}(p)v)$ en $U_j \times \mathbb{C}^k$ que denotamos por $(p, v) \sim (p, \psi_{ij}(p)v)$. Denotamos por E el espacio obtenido a partir de dichas identificaciones. El espacio E como conjunto es $\bigcup_{i \in I} (U_i \times \mathbb{C}^k) / \sim$. Las inclusiones $U_i \times \mathbb{C}^k \hookrightarrow E$ le dan a E estructura de variedad diferenciable y la condición (1.1) garantiza que E es, de hecho, una variedad diferenciable con una aplicación diferenciable $\pi : E \rightarrow M$ tal que $\pi^{-1}(x) = E_x$ tiene definida una estructura de espacio vectorial complejo de dimensión k .

Ejemplos: 1.- Consideremos $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de M , con cartas coordenadas $\psi_i : U_i \rightarrow W_i \subset \mathbb{C}^k$ y con funciones de transición

$$\psi_{ij} : \psi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_i(U_i \cap U_j)$$

La matriz jacobiana del cambio de coordenadas $D(\psi_{ij})$ define el haz tangente de M .

2.- Si $E \rightarrow M$ y $F \rightarrow M$ son dos haces vectoriales complejos de rango m y n respectivamente, con funciones de transición $\{g_{ij}\}, \{h_{ij}\}$ respectivamente. Definimos los siguientes haces vectoriales complejos sobre M :

(i).- $E \oplus F$ es el haz con funciones de transición $j_{ij} = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^n)$.

(ii).- $E \otimes F$ es el haz con funciones de transición $j_{ij} = g_{ij} \otimes h_{ij} \in GL(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$

(iii).- E^* es el haz dado por funciones de transición $j_{ij} = (g_{ij}^t)^{-1}$.

Definición: Sea $\pi : E \rightarrow M$ un haz vectorial complejo de rango k sobre M . Una sección C^∞ σ de E es una función C^∞ $\sigma : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = id_M$, es decir, $\sigma(p) \in E_p$ para todo $p \in M$.

Si suponemos que (ψ_U, U) es una trivialización local de E en U , $\psi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^k$ podemos definir canónicamente k secciones $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ de E sobre U tales que $\sigma_j(p), p \in U$, forman una base de E_p . Si $\{e_1, \dots, e_k\}$ es la base canónica de \mathbb{C}^k , $\sigma_j(p) = \psi_U^{-1}(p, e_j)$ son las secciones buscadas. Así, toda sección $\sigma : U \rightarrow E$ se expresa como $\sigma(p) = \sum_{i=1}^k \gamma_i(p) \psi_U^{-1}(p, e_i)$, donde $\gamma_i : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función C^∞ en U y, por lo tanto, podemos identificar una sección σ en U con las funciones coordenadas $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$.

Ahora, sean $(U_i, \psi_i), (U_j, \psi_j)$ trivializaciones locales y σ una sección C^∞ en $U_i \cap U_j$ tal que

$$\sigma(p) = \sum_{i=1}^k \gamma_k(p) \psi_i^{-1}(p, e_k) \text{ en } U_i,$$

$$\sigma(p) = \sum_{i=1}^k \delta_k(p) \psi_j^{-1}(p, e_k) \text{ en } U_j,$$

entonces para todo $p \in U_i \cap U_j$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^k \gamma_k(p) \psi_i^{-1}(p, e_k) = \sum_{i=1}^k \delta_k(p) \psi_j^{-1}(p, e_k)$$

Como ψ_i es un isomorfismo, tenemos que

$$\begin{aligned} \psi_i \left(\sum_{i=1}^k \gamma_k(p) \psi_i^{-1}(p, e_k) \right) &= \psi_i \left(\sum_{i=1}^k \delta_k(p) \psi_j^{-1}(p, e_k) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \delta_k(p) \psi_i \psi_j^{-1}(p, e_k) \end{aligned}$$

por consiguiente

$$\sum_{i=1}^k \gamma_k(p) e_k = \sum_{i=1}^k \delta_k(p) \psi_i \psi_j^{-1}(p, e_k)$$

es decir, las secciones $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ en U_i , $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_k)$ en U_j son tales que $\gamma = \psi_{ij} \delta$ en $U_i \cap U_j$. Si $\pi : E \rightarrow M$ es un haz vectorial con funciones $\{\psi_{ij}\}$ en los abiertos $\{U_i \cap U_j\}_{i,j \in I}$ que satisfacen (1.1), entonces una sección de E en $U \subset M$ está determinada por una familia de funciones $\gamma_i : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^k$ tal que en $U \cap U_i \cap U_j$ se cumple $\gamma_i = \psi_{ij} \gamma_j$.

§1.2 Cohomología de Čech

Sea \mathcal{F} una gavilla sobre M ([GH], pag. 35). Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de M . Definamos

$$C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 \neq i_1 \neq \dots \neq i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k})$$

Un elemento $\xi = \{\xi_I \in \mathcal{F}(U_{i_p})\}_{\#I=k+1} \subset C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ se llama una k -cocadena de M con coeficientes en \mathcal{F} . Definimos el operador frontera

$$\delta : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

dado por

$$\delta(\xi)_{i_0, i_1, \dots, i_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \xi_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{k+1}}|_{U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}}$$

$\xi \in C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, donde \hat{i}_j significa que omitimos el índice i_j . Un cálculo hace ver que $\delta^2 = 0$. Decimos que $\xi \in C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es un cociclo si $\delta\xi = 0$. $\xi \in C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es cofrontera si $\xi = \delta\nu$, $\nu \in C^{k-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Sea $Z^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \text{Kernel } \delta \subset C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Sea $B^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \delta(C^{k-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$, entonces $B^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset Z^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Definición:

$$\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \frac{Z^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{B^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})}$$

es el k -ésimo grupo de Čech de la cubierta \mathcal{U} con coeficientes en \mathcal{F} .

A partir de los grupos $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tenemos la siguiente definición

Definición $\check{H}^k(M, \mathcal{F}) := \varinjlim \mathcal{U} H^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es el k -ésimo grupo de cohomología de Čech de M con coeficientes en \mathcal{F} . Donde $\varinjlim \mathcal{U}$ se toma sobre todas las cubiertas abiertas de M ([GH], pag. 39)

Una sucesión exacta de gavillas $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induce una sucesión exacta larga de cohomología de Čech ([GH], pag. 40). En nuestro caso como tenemos la inclusión $\mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{C}$, resulta que la sucesión

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{C} \xrightarrow{e^{2\pi i}} \mathbb{C}^*$$

es exacta, entonces tenemos una sucesión exacta larga de cohomología

$$\begin{aligned} \check{H}^0(M, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{j} \check{H}^0(M, \mathbb{C}) \xrightarrow{e^{2\pi i}} \check{H}^0(M, \mathbb{C}^*) \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^1(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j} \check{H}^1(M, \mathbb{C}) \xrightarrow{e^{2\pi i}} \\ \check{H}^1(M, \mathbb{C}^*) &\xrightarrow{\delta^*} \check{H}^2(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j} \check{H}^2(M, \mathbb{C}) \xrightarrow{e^{2\pi i}} \check{H}^2(M, \mathbb{C}^*) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

donde $\delta^* : \check{H}^k(M, \mathbb{C}^*) \rightarrow \check{H}^{k+1}(M, \mathbb{Z})$ dada por $\delta^*[\xi] = \delta(\xi)$, $\xi \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{C}^*)$ está bien definido, es decir, no depende del representante ([GH], pag. 40). Un resultado importante nos garantiza que $\check{H}^k(M, \mathbb{Z}) \simeq H_{\text{sing}}^k(M, \mathbb{Z})$ ([GH], pag 44). Como M admite particiones de la unidad C^∞ complejo valuadas se tiene que $\check{H}^k(M, \mathbb{C}) = 0$ para todo $k > 1$. Entonces de esta última sucesión exacta de cohomología tenemos que $\check{H}^1(M, \mathbb{C}^*) \simeq H^2(M, \mathbb{Z})$.

Sea L un haz lineal complejo sobre M con trivializaciones locales $\{(\psi_i, U_i)\}$ y funciones de transición $\{g_{ij} = \psi_i \psi_j^{-1}\}$ que satisfacen la condición (1.1). Para cualquier colección de funciones $f_i \in \mathbb{C}^*(U_i)$ podemos definir una nueva trivialización sobre U_i dada por

$$\psi'_i = f_i \psi_i,$$

las funciones de transición $\{g'_{ij}\}$ para L relativo a $\{\psi'_i\}$ están dadas por

$$(1.2) \quad g'_{ij} = \frac{f_i}{f_j} g_{ij}.$$

Esto hace ver que cualquier trivialización de L sobre $\{U_i\}$ se puede obtener de esta manera, por lo tanto dos colecciones de funciones de transición $\{g_{ij}\}, \{g'_{ij}\}$ definen el mismo haz lineal si y sólo si existen funciones $f_i \in \mathbb{C}^*(U_i)$ que satisfacen (1.2).

Es fácil ver que las funciones de transición $\{g_{ij} \in \mathbb{C}^*(U_i \cap U_j)\}$ para un haz lineal complejo $L \rightarrow M$ representan una 1-cocadena de Čech sobre M con coeficientes en \mathbb{C}^* . La condición (1.1) para las $\{g_{ij}\}$ es equivalente a que $\delta(\{g_{ij}\}) = 0$, es decir, $\{g_{ij}\}$ es un 1-cociclo de Čech. Por (1.2) tenemos que dos cociclos $\{g_{ij}\}, \{g'_{ij}\}$ definen el mismo haz lineal si y sólo si $\{g_{ij}(g'_{ij})^{-1}\}$ es una cofrontera, de esta manera tenemos que $\check{H}^1(M, \mathbb{C}^*)$ es el conjunto de haces lineales complejos sobre M . En este caso se tiene que $\delta^*(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ es la primera clase de Chern, $c_1(L)$, del haz lineal L .

Si σ es una sección de L transversal a la sección cero de L , $\text{codim}_{\mathbb{R}} \sigma^{-1}(0) = 2$. Un resultado de topología nos garantiza que $c_1(L) = \text{PD} [\sigma^{-1}(0)]$. Ver ([BT]).

CAPÍTULO II

VARIEDADES CASI-COMPLEJAS, COMPLEJAS Y KÄHLER

§2.1 Variedades casi-complejas

En este capítulo daremos un panorama de algunos de los resultados sobre variedades casi-complejas, complejas y Kähler. Estos resultados son fundamentales en el estudio de nuestro problema.

Aquí vamos a tomar $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Denotaremos por $\bigwedge^k(T^*M)$ al espacio de las k -formas diferenciales con valores en \mathbb{F} , y por $Z^k(M, \mathbb{F}) = \{\eta \in \bigwedge^k(T^*M) \mid d\eta = 0\} \subset \bigwedge^k(T^*M)$ el espacio de las k -formas cerradas, y $B^k(M, \mathbb{F}) = \{d\zeta \mid \zeta \in \bigwedge^{k-1}(T^*M)\} \subset Z^k(M, \mathbb{F})$ el espacio de las k -formas exactas, esto último se sigue del hecho que $d^2 = 0$. Esto nos permite definir el complejo de de Rham

$$\bigwedge^0 \xrightarrow{d} \bigwedge^1 \xrightarrow{d} \bigwedge^2 \xrightarrow{d} \bigwedge^3 \dots$$

Entonces tenemos la siguiente definición:

Definición: $H_{dR}^k(M, \mathbb{F}) := Z^k(M, \mathbb{F})/B^k(M, \mathbb{F})$ es el k -ésimo grupo de cohomología de de Rham del complejo de de Rham.

Ahora definimos estructuras casi-complejas sobre una variedad diferenciable

Definición: Una estructura casi-compleja J sobre M es un endomorfismo de TM tal que para todo $x \in M$, $J_x : T_x M \rightarrow T_x M$ satisface $J_x^2 = -I$.

El hecho que $J_x^2 = -I$ nos dice que $\dim_{\mathbb{R}} M$ es par, entonces nos permite definir la dimensión compleja de M como $\dim_{\mathbb{C}} M := \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} M$

Notemos que en cada espacio tangente $T_x M$, J_x se extiende a un operador J_x sobre $T_{x, \mathbb{C}} := T_x M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ que satisface $J_x^2 = -I$. De esta manera definimos

$T'_x M = \text{Kernel}(J_x - i)$, $T''_x M = \text{Kernel}(J_x + i)$. Esto hace ver que J induce una descomposición

$$(2.1) \quad T_{\mathbb{C}} M := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T' M \oplus T'' M$$

donde las fibras de $T' M$ son los espacios vectoriales $T'_x M$, y las fibras de $T'' M$ son los espacios vectoriales $T''_x M$. Los elementos de $T' M$ se dicen de tipo $(1,0)$ y los elementos de $T'' M$ de tipo $(0,1)$. Además es fácil ver que $T''_x M = \overline{T'_x M}$, donde la conjugación de $T'_x M$ es la conjugación inducida por J . Si X es un vector tangente real, tenemos que $X = X_1 + \overline{X}_1$, donde $X_1 = \frac{1}{2}(X - iJX)$ es de tipo $(1,0)$, y $\overline{X}_1 = \frac{1}{2}(X + iJX)$ de tipo $(0,1)$.

Mediante la proyección

$$TM \hookrightarrow T_{\mathbb{C}} M = T' M \oplus T'' M \rightarrow T' M$$

tenemos un isomorfismo \mathbb{C} -lineal de $TM \rightarrow T' M$. Y la proyección

$$TM \hookrightarrow T_{\mathbb{C}} M = T' M \oplus T'' M \rightarrow T'' M$$

nos da un isomorfismo \mathbb{C} -antilineal de $TM \rightarrow T'' M$. Notemos que (2.1) induce la descomposición

$$\bigwedge_{\mathbb{C}}^r (T^* M) = \bigoplus_{p+q=r} (\bigwedge^p (T' M)^* \otimes \bigwedge^q (T'' M)^*)$$

donde $\bigwedge_{\mathbb{R}}^r (T^* M) \otimes \mathbb{C} := \bigwedge_{\mathbb{C}}^r (T^* M)$ es el haz de r -formas complejo valuadas, y $\bigwedge^p (T' M)^*$ es el haz de p -formas \mathbb{C} -lineales, y $\bigwedge^q (T'' M)^*$ denota el haz de q -formas \mathbb{C} -lineales. Los elementos del haz $(\bigwedge^p (T' M)^* \otimes \bigwedge^q (T'' M)^*)$ que denotaremos por $\bigwedge_{\mathbb{C}}^{p,q} (T^* M)$ se llaman formas de tipo (p,q) . Denotamos por $\bigwedge_{\mathbb{R}}^{p,p}$ la imagen de la aplicación $\eta \rightarrow \eta + \overline{\eta}$, $\eta \in \bigwedge_{\mathbb{C}}^{p,p} (T^* M)$. Por otra parte J induce una aplicación, $J : \bigwedge_{\mathbb{R}}^k (T^* M) \rightarrow \bigwedge_{\mathbb{R}}^k (T^* M)$ dado por $J(\eta)(x_1, \dots, x_k) = (-1)^k \eta(Jx_1, \dots, Jx_k)$. Se tiene que $\bigwedge_{\mathbb{R}}^{1,1} (T^* M) = \{\eta \in \bigwedge_{\mathbb{R}}^2 (T^* M) | J\eta = \eta\}$.

En el resto de esta sección (M^n, J) denotará una variedad casi-compleja cerrada de dimensión compleja n .

Definición: Una métrica riemanniana g sobre (M, J) se dice que es una métrica casi-hermitiana si para todo $x \in M$ y para todo $X, Y \in T_x M$ se tiene que

$$g(J_x X, J_x Y) = g(X, Y)$$

Definición: La 2-forma $\omega := g(JX, Y)$ se llama forma de Kähler de la métrica g . ω es una 2-forma real alternante de tipo $(1, 1)$.

Como la métrica g induce una métrica $(,)$ sobre $\bigwedge^k(T_x M)$, por dualidad g induce una métrica sobre $\bigwedge^k(T_x^* M)$ para cada $x \in M$. Definimos el operador de Hodge

$$*_\omega : \bigwedge^k(T^* M) \rightarrow \bigwedge^{2n-k}(T^* M)$$

dado por

$$\eta \wedge *_\omega \zeta = (\eta, \zeta) \frac{\omega^n}{n!}$$

para todo $\eta, \zeta \in T_x^* M$ y para todo $x \in M$, donde $\frac{\omega^n}{n!}$ es la forma de volumen de la métrica g . El operador $*_\omega$ tiene las siguientes propiedades

$$*_\omega \frac{\omega^n}{n!} = 1,$$

$$*_\omega 1 = \frac{\omega^n}{n!},$$

$$*_\omega \frac{\omega^k}{k!} = \frac{\omega^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$*_\omega^2 = (-1)^{k(m-k)} \text{Id} \mid_{\bigwedge^k(T^* M)}$$

Con la forma de Kähler ω definimos el siguiente operador

$$L_\omega : \bigwedge^k(T^* M) \rightarrow \bigwedge^{k+2}(T^* M)$$

dado por

$$L_\omega(\eta) = \omega \wedge \eta$$

Como $\bigwedge^k(T^* M)$ tiene una métrica inducida por g , el operador L_ω tiene un adjunto que denotamos por Λ_ω . Decimos que $\eta \in \bigwedge^k(T^* M)$ es primitiva si $\Lambda_\omega(\eta) = 0$. Denotamos el Kernel de Λ_ω sobre las p -formas por $\bigwedge_0^p(\omega)$. Como $\omega \in \bigwedge^{1,1}(T^* M)$, tenemos que $\bigwedge^{1,1}(T^* M) = \mathbb{R}\omega \oplus \bigwedge_0^{1,1}(\omega)$, donde $\bigwedge_0^{1,1}(\omega) = \bigwedge_0^2(\omega) \cap \bigwedge^{1,1}(T^* M)$.

§2.2.- Variedades complejas

Definición: Sea (M, J) una variedad casi-compleja. Decimos que J es integrable si el tensor de Nijenhuis N_J satisface

$$4N_J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] = 0$$

para todo $X, Y \in T_x M$ y para todo $x \in M$, donde X, Y son extensiones locales de dos vectores X, Y .

Definición: Decimos que (M, J) es una variedad compleja si J es integrable.

La condición de integrabilidad es equivalente a la existencia de un atlas $\{(U_i, \psi_i)\}$ de M , donde $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ son biholomorfismos locales, y los cambios de transición

$$\psi_i \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_i(U_i \cap U_j)$$

son biholomorfos([NE]). Esto en particular nos permite tomar coordenadas complejas sobre M .

La condición de integrabilidad es también equivalente al siguiente hecho: si $\eta \in \bigwedge_{\mathbb{C}}^{p,q}(T^*M)$, entonces $d\eta \in \bigwedge_{\mathbb{C}}^{p+1,q}(T^*M) \oplus \bigwedge_{\mathbb{C}}^{p,q+1}(T^*M)$. Entonces tenemos que $d = \partial + \bar{\partial}$, donde

$$\begin{aligned} \bar{\partial} : \bigwedge_{\mathbb{C}}^{p,q}(T^*M) &\rightarrow \bigwedge_{\mathbb{C}}^{p,q+1}(T^*M), \\ \partial : \bigwedge_{\mathbb{C}}^{p,q}(T^*M) &\rightarrow \bigwedge_{\mathbb{C}}^{p+1,q}(T^*M) \end{aligned}$$

son proyecciones([CH], pag. 18). Los operadores $\partial, \bar{\partial}$ satisfacen $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$, $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$. En coordenadas complejas $z = (z_1, \dots, z_n)$ de M , tenemos que $\eta \in \bigwedge_{\mathbb{C}}^{p,q}(T^*M)$ se expresa como

$$\eta = \sum_{\#A=p, \#B=q} \eta_{AB}(z) dz_A \wedge d\bar{z}_B,$$

donde $\eta_{AB}(z)$ son funciones complejo-valuadas. En notación multiíndice $dz_A := dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$ y $d\bar{z}_B = d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_q}$. En este caso tenemos que

$$\bar{\partial}\eta(z) = \sum_{A,B,j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \eta_{AB}(z) d\bar{z}_j \wedge dz_A \wedge d\bar{z}_B,$$

$$\partial\eta(z) = \sum_{A,B,i} \frac{\partial}{\partial z_i} \eta_{AB}(z) dz_i \wedge dz_A \wedge d\bar{z}_B$$

Definición: Decimos que una forma θ de tipo $(q, 0)$ es holomorfa si $\bar{\partial}\theta = 0$. En forma equivalente se tiene que θ es holomorfa si y sólo si en coordenadas holomorfas $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\omega(z) = \sum_{\#A=q} \theta_A(z) dz_A$, donde $\omega(z)_A$ es holomorfa.

Sea $Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(M, \mathbb{C}) = \{\eta \in \wedge_{\mathbb{C}}^{p,q}(T^*M), \text{ tal que } \bar{\partial}\eta = 0\}$. Como $\bar{\partial}^2 = 0$, tenemos el complejo de Dolbeault dado por

$$\rightarrow \dots \wedge^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \wedge^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \wedge^{p,2} \xrightarrow{\bar{\partial}} \wedge^{p,3} \dots$$

Sea $B_{\bar{\partial}}^{p,q}(M, \mathbb{C}) = \{\bar{\partial}\zeta, \text{ tal que } \zeta \in \wedge_{\mathbb{C}}^{p,q-1}(T^*M)\} \subset Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$.

Definición: Definimos los grupos de Cohomología de Dolbeault como

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M, \mathbb{C}) := \frac{Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)}{B_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)}.$$

Ahora vamos a definir haces vectoriales holomorfos sobre (M, J)

Definición: Un haz vectorial holomorfo $\pi : E \rightarrow M$ de rango k es un haz vectorial complejo de rango k junto con una estructura de variedad compleja sobre E , tal que las trivializaciones locales $\psi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^k$ son biholomorfismos como variedades complejas. A estas trivializaciones las llamamos trivializaciones holomorfas. Si $\{\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^k\}$ son trivializaciones holomorfas, entonces las funciones de transición para E respecto a $\{\psi_i\}$ son aplicaciones holomorfas, e inversamente, dadas aplicaciones holomorfas $\{g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(k, \mathbb{C})\}$ que satisfacen la condición de cociclo, podemos contruir un haz vectorial holomorfo $E \rightarrow M$ con funciones de transición $\{g_{ij}\}$. En forma análoga al caso C^∞ podemos definir una sección holomorfa σ de E sobre un abierto $U \subset M$.

La estructura compleja de M nos permite definir las gavillas $\mathbb{Z}, \mathcal{O}, \mathcal{O}^*$ sobre M . Del hecho que la sucesión

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi i}} \mathcal{O}^*$$

es exacta tenemos una sucesión exacta larga de cohomología

$$\begin{aligned} \check{H}^0(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^0(M, \mathcal{O}) \rightarrow \check{H}^0(M, \mathcal{O}^*) \rightarrow \check{H}^1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^1(M, \mathcal{O}) \rightarrow \\ \check{H}^1(M, \mathcal{O}^*) \rightarrow \check{H}^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^2(M, \mathcal{O}) \rightarrow \check{H}^2(M, \mathcal{O}^*) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Como M es compleja, M no admite particiones de la unidad holomorfas, no tenemos que $\check{H}^2(M, \mathcal{O}) = 0 = \check{H}^1(M, \mathcal{O})$, por lo tanto $\check{H}^1(M, \mathcal{O}^*) \not\cong H^2(M, \mathbb{Z})$. $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ es el conjunto de haces lineales holomorfos sobre M . Además se tiene $\delta^*(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ es la primera clase de Chern de L .

En forma análoga al caso C^∞ existe una relación entre haces lineales holomorfos y subvariedades complejas de M de codimensión compleja uno.

Definición: Sea $V \subset M$ un subconjunto cerrado. Decimos que V es una subvariedad analítica de M si para cualquier punto $p \in V$ existe una vecindad U_p y un número finito de funciones holomorfas $\{f_1, \dots, f_r\}$ sobre U tal que $V \cap U = \{q \in U \mid f_1(q) = \dots = f_r(q) = 0\}$. Cuando $r = 1$ se dice que V es una hipersuperficie. Sea $p \in V$, p es un punto suave si existe una vecindad de p tal que el jacobiano de $f = (f_1, \dots, f_r)$ tiene rango r . Sea $V^* = V - \{\text{puntos singulares de } V\}$. Se tiene que V es irreducible si y sólo si V^* es conexo ([GH], pag. 21).

Sea V una hipersuperficie en M , por lo anterior existe una cubierta abierta $\{U_i\}$ de M y funciones $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tal que $V \cap U_i = f_i^{-1}(0)$. Entonces para $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $f_{ij} := \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ definen un haz lineal holomorfo sobre M , que denotamos por $L(V)$. Las funciones $\{f_i\}$ determinan una sección de $L(V) \rightarrow M$ cuyo conjunto de ceros es precisamente V .

Un divisor D en M es una combinación lineal finita $D = \sum_{i=1}^r n_i V_i$, donde $n_i \in \mathbb{Z}$ y V_i es una hipersuperficie irreducible de M . Por lo anteriormente expuesto a partir de D obtenemos un haz lineal $L(D) := \otimes_{i=1}^r L(V_i)^{n_i}$, donde $L(V_i)^{n_i} = \otimes_{i=1}^{n_i} L(V_i)$ si $n_i > 0$, y $L(V_i)^{n_i} = \otimes_{i=1}^{-n_i} L(V_i)^*$ si $n_i < 0$. Además resulta que $c_1(L(D)) = \text{PD}(D)$ ([GH], pag 141).

Antes de concluir esta sección queremos hacer notar que en general en una variedad

compleja (M, J) no necesariamente tenemos que la descomposición $\bigwedge_{\mathbb{R}}^{1,1}(T^*M) = \mathbb{R}\omega \oplus \bigwedge_0^{1,1}(\omega)$ desciende a cohomología. Para que tal descomposición descienda a cohomología debemos tener que $\bar{\partial}\omega = 0$. En este caso se cumple además que $\partial\omega = 0$ ya que ω es real. Es decir, debemos tener que $d\omega = 0$. Tales variedades las vamos a considerar en la siguiente sección

§2.3.- Variedades Kähler

En esta sección analizaremos un tipo especial de variedades complejas con estructura geométrica muy rica: Las variedades Kähler

Definición. Sea (M, J, g) una variedad compleja con métrica hermitiana g . Decimos que la métrica Hermitiana g es Kähler si y sólo si la forma de Kähler ω es d -cerrada, es decir, $d\omega = 0$. En este caso decimos que (M, J, g) es una variedad Kähler.

Cuando tenemos una variedad Kähler (M, J, g) el teorema de Wirtinger nos dice que podemos calcular el volumen de una subvariedad compleja N de M en la métrica inducida de M . La prueba del teorema de Wirtinger se pueden encontrar en ([LA, pag. 38])

Teorema de Wirtinger. Sea (M, J, g) una variedad Kähler y $\phi : N \rightarrow M$ una subvariedad compacta compleja de M de dimensión real $2k$. Entonces el volumen de N en la métrica inducida es menor o igual al volumen de cualquier otra $2k$ -subvariedad \tilde{N} la cual es homologa a N en M , y $\text{Vol}(N) = \frac{1}{k!} \int_N \omega^k$.

La prueba del siguiente corolario se puede encontrar en ([LA, pag 39.])

Corolario. Sea (M, J, g) una variedad Kähler y $\phi : N \rightarrow M$ una subvariedad compacta compleja de M de dimensión real $2k$ con $\partial N = \emptyset$. Entonces si $[N]$ representa el ciclo fundamental de M y ϕ_* es la aplicación natural sobre homología, tenemos que $\phi_*([N]) \neq 0$ en $H_{2k}(M, \mathbb{Z})$. Además $H^{2k}(M, \mathbb{R}) \neq 0$ para $k = 0, 1, \dots, m$.

Otro teorema importante de variedades Kähler es el siguiente

Teorema de descomposición de Hodge.

$$H_{dR}^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M, \mathbb{C})$$

Ver ([GH], pag. 116).

Sobre $H_{dR}^k(M, \mathbb{R})$ tenemos un producto interior

$$\langle, \rangle_\omega: H_{dR}^k(M, \mathbb{R}) \times H_{dR}^k(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

dado por

$$\langle \eta, \zeta \rangle_\omega = \int_M \eta \wedge *_\omega \zeta$$

Respecto a este producto interior tenemos que la descomposición de Hodge es ortogonal.

Consideremos el espacio $H^{1,1}(M, \mathbb{R}) = \{[\eta] \in H_{\bar{\partial}}^{1,1}(M, \mathbb{C}) \text{ tal que } \eta = \bar{\eta}\}$. Del hecho que M es una variedad Kähler se tiene que los operadores L_ω, Λ_ω descenden a cohomología ya que $d\omega = 0$. En este caso tenemos que $H^{1,1}(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[\omega] \oplus H_0^{1,1}(\omega)$, donde $H_0^{1,1}(\omega)$ son las clases de cohomología de formas primitivas respecto de ω .

Por último tenemos la forma bilineal

$$Q_\omega: H^{1,1}(M, \mathbb{R}) \times H^{1,1}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$Q_\omega(\eta_1, \eta_2) = \int_M \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \omega^{n-2}$$

Las Relaciones bilineales de Riemann-Hodge afirman que Q_ω es definida negativa sobre $H_0^{1,1}(\omega)$ ([GH], pag. 123).

CAPÍTULO III

VARIEDADES JACOBIANAS

§3.1 La Jacobiana de una superficie de Riemann compacta.

En este capítulo mencionaremos algunos hechos conocidos sobre superficies de Riemann compactas y sus Jacobianas. A lo largo de este capítulo C denotará una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$, a menos que se indique lo contrario.

Dada C vamos a contruir un toro complejo de la siguiente manera: elegimos una base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$ de $H_1(C, \mathbb{Z})$ y una base $\{\theta_1, \dots, \theta_g\}$ de $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C)$. La matriz de periodos de C respecto a estas bases es:

$$\begin{pmatrix} \int_{\alpha_1} \theta_1 & \cdots & \int_{\alpha_g} \theta_1 & \int_{\beta_1} \theta_1 & \cdots & \int_{\beta_g} \theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_{\alpha_1} \theta_g & \cdots & \int_{\alpha_g} \theta_g & \int_{\beta_1} \theta_g & \cdots & \int_{\beta_g} \theta_g \end{pmatrix}$$

Para $1 \leq k \leq g$ consideremos los siguientes vectores de \mathbb{C}^g

$$e_k = (\int_{\alpha_k} \theta_1, \dots, \int_{\alpha_k} \theta_g), e_{g+k} = (\int_{\beta_k} \theta_1, \dots, \int_{\beta_k} \theta_g)$$

Si $\sum_{k=1}^{2g} a_k e_k = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{\alpha_i} a_i \int \theta_j = 0, \sum_{\beta_i} a_i \int \theta_j = 0, \forall j = 1, \dots, g$$

esto implica que

$$\sum_{\alpha_i} a_i \int \bar{\theta}_j = 0, \sum_{\beta_i} a_i \int \bar{\theta}_j = 0, \forall j = 1, \dots, g$$

como $\{\theta_j, \overline{\theta_j}\}$ generan $H_{DR}^1(C, \mathbb{C}) = H_{\overline{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C}) \oplus H_{\overline{\partial}}^{0,1}(C, \mathbb{C})$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^g a_i [\alpha_i] + \sum_{i=1}^g a_{i+g} [\beta_i] = 0$$

Por lo tanto tenemos que $a_i = 0$ para todo i ya que $\{\alpha_i, \beta_i\}$ es una base de $H_1(C, \mathbb{Z})$ y $H_1(C, \mathbb{R}) = H_1(C, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$. Esto hace ver que el conjunto

$$\Lambda = \{m_1 e_1 + m_2 e_2 + \cdots + m_{2g} e_{2g} | m_k \in \mathbb{Z}\}$$

es una retícula de rango $2g$ en \mathbb{C}^g , y se tiene que $J(C) := \mathbb{C}^g / \Lambda$ es una variedad compleja compacta de dimensión compleja g , llamada la variedad Jacobiana de C . Además $J(C)$ tiene estructura de grupo abeliano.

Sean $A_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$, $A_2 = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_g, \beta'_1, \dots, \beta'_g\}$ dos bases de $H_1(C, \mathbb{Z})$ y $B = \{\theta_1, \dots, \theta_g\}$ una base de $H_{\overline{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})$. Sean Λ_1 la retícula construida a partir de las bases A_1, B y Λ_2 la retícula obtenida con las bases A_2, B . Como

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \sum_{j=1}^g n_{kj} \alpha'_j + \sum_{i=1}^g n_{k(g+i)} \beta'_i, \\ \beta_k &= \sum_{j=1}^g m_{kj} \alpha'_j + \sum_{i=1}^g m_{k(g+i)} \beta'_i \end{aligned}$$

donde $n_{kj}, m_{kj} \in \mathbb{Z}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} e_k &= \sum_{j=1}^g n_{kj} \left(\int_{\alpha'_j} \theta_1, \dots, \int_{\alpha'_j} \theta_g \right) + \sum_{j=1}^g n_{k(g+i)} \left(\int_{\beta'_j} \theta_1, \dots, \int_{\beta'_j} \theta_g \right) \\ &= \sum_{j=1}^g n_{kj} e'_k + \sum_{j=1}^g n_{k(g+i)} e'_{g+i} \end{aligned}$$

Esto hace ver que $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. De forma análoga se tiene que $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$, es decir, $J(C) = \mathbb{C}^g / \Lambda_1 = \mathbb{C}^g / \Lambda_2$. Si fijamos la base de homología $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$ y consideramos dos bases $B_1 = \{\theta_1, \dots, \theta_g\}$ y $B_2 = \{\theta'_1, \dots, \theta'_g\}$ de $H_{\overline{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})$ construimos las retículas Λ_1, Λ_2 con bases B_1 y B_2 respectivamente. Sea $\theta'_j = \sum_{i=1}^g t_{ij} \theta_i$, $t_{ij} \in \mathbb{C}$, $T = (t_{ij})$ es el cambio de base entre B_1 y B_2 . Notemos que si $e_k = \left(\int_{\alpha_k} \theta_1, \dots, \int_{\alpha_k} \theta_g \right)$ es generador de Λ_1 y $\tilde{e}_k = \left(\int_{\alpha_k} \theta'_1, \dots, \int_{\alpha_k} \theta'_g \right)$ es generador de Λ_2 se tiene que

$$e'_k = \left(\sum_{i=1}^g t_{i1} \int_{\alpha_k} \theta_i, \dots, \sum_{i=1}^g t_{ig} \int_{\alpha_k} \theta_i \right) = e_k \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1g} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{g1} & t_{g2} & \dots & t_{gg} \end{pmatrix}$$

Esto hace ver que $T(\Lambda_1) = \Lambda_2$. Entonces T induce un biholomorfismo entre \mathbb{C}^g/Λ_1 y \mathbb{C}^g/Λ_2 . Esto hace ver que la definición de $J(C)$ no depende de elección de bases de $H_1(C, \mathbb{Z})$ y $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})$. Además vemos que C determina la estructura compleja de la Jacobiana.

§3.2 El divisor Theta de $J(C)$

Es facil ver que C admite una base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$ de $H_1(C, \mathbb{Z})$ con las siguientes propiedades:

$$\alpha_i \cap \beta_j = \delta_{ij}, \beta_j \cap \alpha_i = -\delta_{ji}, \alpha_i \cap \alpha_j = \beta_i \cap \beta_j = 0$$

A dicha base se le llama una base simpléctica. Notemos que la matriz $(\int \theta_j)$ es invertible. Entonces podemos elegir una base canónica $B = \{\theta_1, \dots, \theta_g\}$ de $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})$ tal que:

1.- La matriz de periodos de C respecto a esta elección de bases es de la forma (I, Z) , donde $Z = Z^t$, y $\text{Im} Z$ es definida positiva.

2.- $\text{Im} Z_{ij} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \int_C \theta_i \wedge \bar{\theta}_j$, donde $Z = (Z_{ij})$.

1 y 2 se conocen como **Relaciones bilineales de Riemann**. Al tomar coordenadas complejas z_1, \dots, z_g de \mathbb{C}^g , las relaciones bilineales de Riemann hacen ver que $\omega_0 := \sum_{i,j=1}^g a_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ es una forma de Kähler sobre $J(C)$ ya que $(a_{ij}) = (\text{Im } Z)^{-1}$ es definida positiva. Por lo tanto $J(C)$ es una variedad Kähler.

A partir de la matriz de periodos $Z = (Z_{ij})$, de C , podemos definir la siguiente función $\theta : \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\theta(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi \sqrt{-1} \langle k, Zk \rangle + 2\pi \sqrt{-1} \langle k, z \rangle}$$

donde \langle, \rangle es el producto interior usual de \mathbb{C}^g . Sea $z = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g$, y $\{e_k, e_{k+g}\}, 1 \leq k \leq g$ los generadores de la retícula Λ inducida por A y B , entonces resulta que:

$$\theta(z + e_k) = \theta(z)$$

$$\theta(z + e_{k+g}) = e^{-2\pi\sqrt{-1}z_k - \pi\sqrt{-1}Z_{kk}} \cdot \theta(z)$$

$$\theta(z) = \theta(-z)$$

Sea $z = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g$, definamos

$$f_{e_k}(z) = 1, f_{e_{g+k}}(z) = e^{-2\pi\sqrt{-1}z_k - \pi\sqrt{-1}Z_{kk}}, 1 \leq k, r \leq g$$

Notemos que para $1 \leq k \leq g$, se tiene que

$$f_{e_k}(z)f_{e_{g+r}}(z) = f_{e_r}(z)f_{e_{g+k}}(z)$$

y

$$\begin{aligned} f_{e_{g+r}}(z + e_{g+k})f_{e_{g+k}}(z) &= e^{-2\pi\sqrt{-1}(z_r + Z_{kr}) - \pi\sqrt{-1}Z_{rr}} \cdot e^{-2\pi\sqrt{-1}z_k - \pi\sqrt{-1}Z_{kk}} \\ &= e^{-2\pi\sqrt{-1}(z_k + Z_{rk}) - \pi\sqrt{-1}Z_{kk}} \cdot e^{-2\pi\sqrt{-1}z_r - \pi\sqrt{-1}Z_{rr}} \\ &= f_{e_{g+k}}(z + e_{g+r})f_{e_{g+r}}(z) \end{aligned}$$

Por linealidad tenemos que para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda, z \in \mathbb{C}^g$ se cumple que

$$(3.1) \quad f_{\lambda_1}(z + \lambda_2)f_{\lambda_2}(z) = f_{\lambda_2}(z + \lambda_1)f_{\lambda_1}(z) = f_{\lambda_1 + \lambda_2}(z)$$

Esto define una acción de Λ sobre $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^g$

$$\Lambda \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^g) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^g)$$

dada por

$$(\lambda, (\alpha, z) \rightarrow (f_\lambda(z)\alpha, z + \lambda)$$

Resulta que las relaciones en (3.1) definen un haz lineal sobre $J(C)$ dado por $L_\Theta := (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^g)/\Lambda$ ([GH], pag 308), donde $\pi : L_\Theta \rightarrow J(C)$ viene dada por $\pi([f_\lambda(z)\alpha, z + \lambda]) = [z]$. La función θ de Riemann define una sección holomorfa de L_Θ . Dicha sección define un divisor Θ sobre $J(C)$ llamado el divisor Theta de Riemann ([GH], pag 308). Además se tiene el siguiente resultado cuya prueba se puede encontrar en ([GH], pag 310).

Lema. $c_1(L_\Theta) = [\omega_0]$.

§3.3 El teorema de Abel y fórmula de Poincaré

Construcción de la aplicación de Abel-Jacobi: Sea $p_0 \in C$ un punto fijo. Definimos la siguiente aplicación

$$\mu_{p_0} : C \rightarrow J(C)$$

dada por

$$\mu_{p_0}(p) = \left(\int_{p_0}^p \theta_1, \dots, \int_{p_0}^p \theta_g \right)$$

donde $\int_{p_0}^p \theta_j$ significa integrar θ_j sobre una trayectoria de p_0 a p . Esta aplicación está bien definida, es decir, no depende de la trayectoria que une p con p_0 . Se tiene además que μ_{p_0} es una aplicación holomorfa. La aplicación μ_{p_0} se llama aplicación de Abel-Jacobi. El siguiente resultado es interesante pues es central en el estudio de la relación geométrica entre C y $J(C)$. Una prueba de este resultado se encuentra en ([GH], pag 235).

Teorema. Sea $J(C)$ la jacobiana de C , fijemos un punto $p_0 \in C$. Se tiene que la aplicación μ_{p_0} es un encaje holomorfo.

Definimos el k -ésimo producto simétrico $C^{(k)}$ de C de la siguiente manera: consideramos el producto cartesiano $C^k = \underbrace{C \times C \cdots \times C}_{k \text{ veces}}$ y la acción del grupo simétrico

de k letras Sim_k sobre C^k

$$Sim_k \times C^k \rightarrow C^k$$

dada por

$$(\sigma, (p_1, \dots, p_k)) \rightarrow (p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(k)})$$

Se tiene que $C^{(k)} := C^k / Sim_k$ es una variedad compleja de dimensión compleja k ([GH], pag 236). Definamos la siguiente aplicación:

$$\mu^{(k)} : C^{(k)} \rightarrow J(C)$$

dada por

$$\mu^{(k)}(p_1 + \dots + p_k) := \left(\sum_j \int_{p_0}^{p_j} \omega_1, \dots, \sum_j \int_{p_0}^{p_j} \omega_g \right)$$

$\mathcal{W}_k := \mu^{(k)}(C^{(k)}) \subset J(C)$ es una subvariedad compleja de dimensión compleja k , y además $\mu^{(k)}$ es genéricamente inyectiva ([GH], pag 338). A continuación enunciamos un teorema que será de importancia para nosotros ya que relaciona el divisor Θ de $J(C)$ con las variedades \mathcal{W}_k . Una prueba de este teorema se puede encontrar en ([GH], pag 350.)

Teorema(fórmula de Poincaré)

$$\text{PD} ([\mathcal{W}_k]) = \frac{1}{(g-k)!} [\omega_0]^{g-k}$$

De este teorema se tiene el siguiente corolario

Corolario

$$\text{PD} ([C]) = \frac{1}{(g-1)!} [\omega_0]^{g-1}$$

Demostración. Como μ es un encaje si $g > 0$ se tiene que $C \simeq \mu(C) = \mathcal{W}_1$. Aplicamos la fórmula de Poincare para el caso $k = 1$, y el resultado se obtiene. ■

CAPÍTULO IV

FUNCIONALES RIEMANNIANAS EN EL ESPACIO DE MÉTRICAS KÄHLER

§4.1. La funcional A_C sobre una variedad de métricas Kähler

Sea M^{2n} una variedad compleja cerrada de dimensión compleja n que admite métricas Kähler. Sea

$$\mathcal{K} = \{\omega \in \text{Kernel } d|_{\Lambda^2(T^*M)} | \omega \text{ es una forma de Kähler sobre } M\}$$

Notemos que si $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{K}$, entonces para todo $t \in (0, 1)$, se tiene que $t\omega_1 + (1-t)\omega_2 \in \mathcal{K}$, y para todo $\lambda > 0$, y $\omega \in \mathcal{K}$, se tiene que $\lambda\omega \in \mathcal{K}$. Esto hace ver que $\mathcal{K} \subset \text{Kernel } d|_{\Lambda^2(T^*M)}$ es un cono convexo. Definamos el cono de Kähler como

$$CK = \{[\omega] \in H^{1,1}(M, \mathbb{R}) | [\omega] \text{ tiene al menos un representante } \omega \text{ Kähler}\}$$

Por lo anterior es fácil ver que CK es un cono convexo de $H^{1,1}(M, \mathbb{R})$. Este cono es un abierto en $H^{1,1}(M, \mathbb{R})$. Sobre $H^{1,1}(M, \mathbb{R})$ tenemos la siguiente funcional

$$\tilde{V} : H^{1,1}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\tilde{V}([\omega]) = \frac{1}{n!} \int_M \omega^n$$

donde ω es un representante de $[\omega]$. Por el teorema de Stokes se tiene que \tilde{V} esta bien definida. Además notemos que para $t \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{V}(t[\omega]) = t^n \tilde{V}([\omega])$$

por lo que si escojemos una base de $H^{1,1}(M, \mathbb{R})$, \tilde{V} se expresa como un polinomio homogéneo de grado n en $b^{1,1} := \dim_{\mathbb{R}} H^{1,1}(M, \mathbb{R})$ variables. Esto muestra que \tilde{V} es diferenciable.

Lema 4.1.1. Sea $[\omega] \in H^{1,1}(M, \mathbb{R})$ y $[\eta] \in T_{[\omega]} H^{1,1}(M, \mathbb{R}) = H^{1,1}(M, \mathbb{R})$, entonces

$$(4.1) \quad d\tilde{V}_{[\omega]}([\eta]) = \frac{1}{(n-1)!} \int_M \omega^{n-1} \wedge \eta$$

donde el valor de la integral no depende de los representantes de $[\omega]$ y $[\eta]$.

Demostración. Sean ω un representante de $[\omega]$ y η un representante de $[\eta]$. Como $\omega, \eta \in \wedge^2(T^*M)$, $\omega \wedge \eta = \eta \wedge \omega$, entonces $\forall t \in \mathbb{R}$

$$(\omega + t\eta)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \omega^{n-j} \wedge (t^j \eta^j)$$

donde $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$. De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned}
d\tilde{V}_\omega(\eta) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\tilde{V}(\omega + t\eta) - \tilde{V}(\omega)) \\
&= \frac{1}{n!} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_M ((\omega + t\eta)^n - \omega^n) \right) \\
&= \frac{1}{n!} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(nt \int_M (\omega^{n-1} \wedge \eta) + \binom{n}{2} t^2 \int_M (\eta^2 \wedge \omega^{n-2}) + \dots \right) \\
&= \frac{n}{n!} \int_M \omega^{n-1} \wedge \eta = \frac{1}{(n-1)!} \int_M \omega^{n-1} \wedge \eta
\end{aligned}$$

Sea $\eta_1 \in [\eta]$, entonces $\eta - \eta_1 = d\eta_2$, para alguna 1-forma η_2 . Por el teorema de Stokes tenemos que

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_M (\omega^{n-1} \wedge (\eta - \eta_1)) = \frac{1}{(n-1)!} \int_M d(\omega^{n-1} \wedge \eta_2) = 0,$$

por lo tanto $d\tilde{V}_\omega(\eta) = d\tilde{V}_\omega(\eta_1)$. Si ahora tomamos $\omega_1 \in [\omega]$, existe una 1-forma ζ tal que $\omega_1 = \omega + d\zeta$, entonces tenemos que

$$\omega_1^{n-1} = \omega^{n-1} + \sum_{j=2}^{n-1} \binom{n-1}{j} d(\zeta \wedge (d\zeta)^{j-2} \wedge \omega^{n-j})$$

de nuevo por el teorema de Stokes tenemos que

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_M \omega_1^{n-1} \wedge \eta = \frac{1}{(n-1)!} \int_M \omega^{n-1} \wedge \eta$$

por lo que $d\tilde{V}_\omega(\eta) = d\tilde{V}_{\omega_1}(\eta)$. ■

Lema 4.1.2. Sea $[\omega] \in H^{1,1}(M, \mathbb{R})$ y sean $[\eta], [\zeta] \in T_{[\omega]}H^{1,1}(M, \mathbb{R}) = H^{1,1}(M, \mathbb{R})$, entonces

$$(4.2) \quad \text{Hess } \tilde{\mathbf{V}}_{[\omega]}([\eta], [\zeta]) = \frac{1}{(n-2)!} \int_M \omega^{n-2} \wedge \eta \wedge \zeta$$

donde el valor de la integral no depende de los representantes.

Demostración. Por el lema 4.1.1 vamos a hacer el cálculo para representantes ω, η, ζ de $[\omega], [\eta], [\zeta]$ respectivamente. Por definición

$$\text{Hess } \tilde{\mathbf{V}}_{[\omega]} : H^{1,1}(M, \mathbb{R}) \times H^{1,1}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

esta dado por

$$\begin{aligned} \text{Hess } \tilde{\mathbf{V}}_{[\omega]}([\eta], [\zeta]) &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (d\tilde{\mathbf{V}}_{\omega+t\eta}(\zeta) - d\tilde{\mathbf{V}}_{\omega}(\zeta)) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_M (\omega + t\eta)^{n-1} \wedge \zeta - \int_M \omega^{n-1} \wedge \zeta \right), \text{ por lema 4.1.1} \\ &= \frac{(n-1)}{(n-1)!} \int_M \eta \wedge \zeta \wedge \omega^{n-2} \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \int_M \eta \wedge \zeta \wedge \omega^{n-2} \end{aligned}$$

■

Al restringir $\tilde{\mathbf{V}}$ a \mathcal{CK} , por el teorema de Wirtinger obtenemos la función volumen

$$\mathbf{V} := \tilde{\mathbf{V}}|_{\mathcal{CK}} : \mathcal{CK} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

es decir,

$$\mathbf{V}([\omega]) = \frac{1}{n!} \int_M \omega^n = \text{Volumen de}(M, \omega)$$

donde Volumen (M, ω) denota el volumen de M en la métrica inducida por ω

Si $C \hookrightarrow (M, J)$ es una curva compleja cerrada podemos definir la siguiente funcional

$$\tilde{A}_C : \mathcal{CK} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

dada por

$$\tilde{A}_C([\omega]) = \text{área}(C, \omega)$$

Por el teorema de Wirtinger tenemos que

$$\tilde{A}_C([\omega]) = \int_C \omega$$

donde la integral no depende del representante. Como $\tilde{A}_C([\omega]) > 0$, tenemos que $0 \neq [C] \in H_2(M, \mathbb{Z})$. \tilde{A}_C define una funcional sobre $H^{1,1}(M, \mathbb{R})$.

Observación: Si $C_1 \in [C]$, por el teorema de Wirtinger

$$\tilde{A}_C(\omega) \leq \text{área}(C_1, \omega)$$

y la igualdad se da si y sólo si C_1 es subvariedad compleja. Observemos también que para $\lambda > 0$,

$$\tilde{A}_C(\lambda \omega) = \lambda \tilde{A}_C(\omega)$$

por lo que \tilde{A}_C no tiene puntos críticos en \mathcal{CK} . Es natural considerar a \tilde{A}_C sobre métricas Kähler de volumen fijo en M , por ejemplo, podemos considerar

$$A_C := \tilde{A}_C|_{\mathcal{CK}(1)} : \mathcal{CK}(1) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

donde $\mathcal{CK}(1) = V^{-1}(1)$. Una pregunta natural es la siguiente: ¿Cuándo existen puntos críticos de A_C ? Si existen puntos críticos, ¿de qué tipo y cuántos son los puntos críticos de A_C sobre $\mathcal{CK}(1)$?

Lema 4.1.3. Si $\omega, \omega_1 \in [\omega]$ son dos representantes entonces $H_0^{1,1}(\omega) = H_0^{1,1}(\omega_1)$

Demostración. Del lema 4.1.1 se tiene que

$$(4.3) \quad dV_{[\omega]}([\eta]) = \frac{1}{(n-1)!} \int_M \omega^{n-1} \wedge \eta = \int_M *_{\omega} \omega \wedge \eta = \langle \omega, \eta \rangle_{\omega}$$

Si $dV_{[\omega]}([\eta]) = 0$, entonces tenemos que para $\omega, \omega_1 \in [\omega]$,

$$\langle \omega, \eta \rangle_{\omega} = \langle \omega_1, \eta \rangle_{\omega_1} = 0,$$

es decir, $H_0^{1,1}(\omega) = H_0^{1,1}(\omega_1)$. ■

Por lo tanto el lema anterior nos permite definir $H_0^{1,1}([\omega]) := H_0^{1,1}(\omega)$, el cual está bien definido. ■

Este lema hace ver que, respecto a la clase $[\omega] \in \mathcal{CK}$, tenemos la siguiente descomposición ortogonal

$$H^{1,1}(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[\omega] \oplus H_0^{1,1}([\omega])$$

Proposición 4.1.4. $\mathcal{CK}(1)$ es una hipersuperficie suave de \mathcal{CK} si $b^{1,1} = \dim_{\mathbb{R}} H^{1,1}(M, \mathbb{R}) > 1$. Se tiene además que $T_{[\omega]} \mathcal{CK}(1) = H_0^{1,1}([\omega])$.

Demostración. Notemos que del lema 4.1.1 se deduce que $dV_{[\omega]}([\omega]) \neq 0$. Entonces $\mathcal{CK}(1)$ es una hipersuperficie suave. De la definición de $\mathcal{CK}(1)$ tenemos que para $[\omega] \in \mathcal{CK}(1)$,

$$T_{[\omega]}(\mathcal{CK}(1)) = \text{Kernel } dV_{[\omega]}$$

Por el lema anterior tenemos que $T_{[\omega]}(\mathcal{CK}(1)) = H_0^{1,1}([\omega])$. ■

§4.2. Puntos críticos de la funcional A_C

Iniciamos esta sección con la siguiente definición de convexidad estricta:

Definición: Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo tal que el interior de \mathcal{D} es distinto del vacío, es decir, $\text{int } \mathcal{D} \neq \emptyset$. Decimos que \mathcal{D} es estrictamente convexo si para todo $x, y \in \mathcal{D}$ se tiene que $tx + (1 - t)y \in \text{int } \mathcal{D}$ para todo $t \in (0, 1)$.

Lema 4.2.1. Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto estrictamente convexo. Sea $\tilde{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal. Consideremos la restricción $T := \tilde{T}|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $w_0 \in \mathcal{D}$ es un mínimo local estricto de T , entonces w_0 es el mínimo global de T , es decir, $T(w_0) < T(y)$ para todo $y \in \mathcal{D} - \{w_0\}$.

Demostración. Sea $w_0 \in \mathcal{D}$ un mínimo local estricto de T . Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $y \in B(w_0, \epsilon) \cap \mathcal{D} - \{w_0\}$, $T(w_0) < T(y)$. Sea $w_1 \in \mathcal{D}$, $w_1 \neq w_0$. De la convexidad de \mathcal{D} tenemos que para todo $t \in (0, 1)$, $tw_1 + (1 - t)w_0 \in \mathcal{D}$. Entonces existe un $t_0 \in (0, \epsilon)$ tal que $t_0w_1 + (1 - t_0)w_0 \in B(w_0, \epsilon)$, así que $T(w_0) < T(t_0w_1 + (1 - t_0)w_0)$. Esto implica que $T(w_0) < T(w_1)$, así que w_0 es mínimo global de T . Sea $w \in \mathcal{D}$, $w \neq w_0$, otro mínimo global de T , es decir, $T(w_1) = T(w_0)$, entonces para todo $t \in (0, 1)$, $tw + (1 - t)w_0$ es un mínimo global de T , pero esto es imposible ya que \mathcal{D} es estrictamente convexo y por lo tanto $tw + (1 - t)w_0 \in \text{int } \mathcal{D}$, $t \in (0, 1)$. Esto prueba que w_0 es el único mínimo de T . ■

Proposición 4.2.2. Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y convexo. Sea $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 que cumple las siguientes condiciones

- (a) para cada $x \in \mathcal{D}$, $df(x) \neq 0$,
- (b) $(\text{Hess } f)_x|_{\text{Kernel } df(x)}$ es definido negativo para todo $x \in \mathcal{D}$.

Entonces el conjunto $\mathcal{D}_1 = \{x \in \mathcal{D} | f(x) \geq 1\}$ es estrictamente convexo.

Demostración. Sean $x, y \in \mathcal{D}_1$, y consideremos la recta $r(t) = tx + (1 - t)y$, $t \in [0, 1]$. Sea $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $F(t) = f(r(t))$. F es una función

de clase C^2 en todo $[0, 1]$. Tenemos los siguientes casos:

1.- $F'(t) > 0$ en todo $(0, 1]$. Entonces para todo $t \in (0, 1]$, $F(t) > F(0) \geq 1$, es decir, $r((0, 1]) \in \text{int } \mathcal{D}_1$.

2.- $F'(t) < 0$ en todo $[0, 1)$. Entonces para todo $t \in [0, 1)$, $F(t) > F(1) \geq 1$, es decir, $r([0, 1)) \in \text{int } \mathcal{D}_1$.

3.- Existe un $t_0 \in [0, 1]$ tal que $F'(t_0) = 0$. Entonces $x - y \in \text{Kernel } df(r(t_0))$. Por hipótesis tenemos que

$$F''(t_0) = D^2 f(r(t_0))(x - y, x - y) < 0,$$

es decir, t_0 es un máximo local. En este caso se tiene que t_0 es el único máximo local de F y por lo tanto el único máximo global. Para ver esto supongamos que $t_1 \in [0, 1]$ es otro máximo local. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $t_1 > t_0$. Por continuidad de F' tenemos que existe $t_2 \in (t_0, t_1)$ donde t_2 es un mínimo local, es decir, $F'(t_2) = 0$, y $F''(t_2) \geq 0$. Pero esto contradice el hecho que los puntos críticos de F son máximos locales, entonces t_0 es el único punto crítico de F el cual es un máximo global. Esto implica que para todo $t \in [0, t_0)$, $F'(t) > 0$, es decir, F es creciente en $[0, t_0)$; y para todo $t \in (t_0, 1]$, $F'(t) < 0$, entonces F es decreciente en $(t_0, 1]$. Esto hace ver que $F(t) > 1$ para todo $t \in (0, 1)$, es decir, $r((0, 1)) \in \text{int } \mathcal{D}_1$.

Estos tres casos hacen ver que \mathcal{D}_1 es estrictamente convexo. ■

Corolario 4.2.4. *El conjunto $V^{-1}([1, \infty)) := \{\omega \in CK | V(\omega) \geq 1\}$ es un conjunto estrictamente convexo.*

Demostración. Por el lema 4.1.1 tenemos que $dV_\omega \neq 0$ para todo $\omega \in CK$. Entonces V cumple la condición (a) de la proposición 4.2.2. El lema 4.1.2 junto con la formula (4.3) y las relaciones bilineales de Riemann-Hodge hacen ver que V cumple la condición (b) de la proposición 4.2.2. Esto prueba el corolario. ■

Lema 4.2.5. *Si $[\omega] \in CK(1)$ es un punto crítico de A_C , entonces $[\omega]$ es el mínimo global de A_C sobre $V^{-1}([1, \infty))$.*

Demostración. . Supongamos que $[\omega] \in \mathcal{CK}(1)$ es un punto crítico de \mathbf{A}_C . Esto implica que existe un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $(\lambda_0, [\omega])$ es un punto crítico de la función de Lagrange

$$L : \mathbb{R} \times \mathcal{CK} \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$L(\lambda, \omega) = \tilde{\mathbf{A}}_C(\omega) - \lambda \mathbf{V}(\omega).$$

Es fácil ver que $\lambda_0 > 0$. Tenemos que el Hessiano de $\tilde{\mathbf{A}}_C$ es cero. Por el lema 4.1.2 $\text{Hess } \mathbf{V}_\omega|_{H_0^{1,1}([\omega])}$ es definido negativo, entonces

$$\text{Hess } L(\lambda_0, [\omega])|_{H_0^{1,1}([\omega])} = -\lambda_0 \text{Hess } \mathbf{V}_\omega|_{H_0^{1,1}([\omega])}$$

es definido positivo. Esto implica que $[\omega]$ es un mínimo local estricto de \mathbf{A}_C sobre $\mathcal{CK}(1)$ ([SP], pag. 635). Así que existe un abierto U de $[\omega]$ en $\mathcal{CK}(1)$ tal que $\mathbf{A}_C([\omega]) < \mathbf{A}_C([\tilde{\omega}])$ para todo $\tilde{\omega} \in U - \{\omega\}$. Notemos que $W = \{t[\tilde{\omega}] | t \geq 1, [\tilde{\omega}] \in U\}$ es un abierto en $\mathbf{V}^{-1}([1, \infty))$. Por linealidad tenemos que $\mathbf{A}_C([\omega]) < t\mathbf{A}_C([\tilde{\omega}])$ para todo $t[\tilde{\omega}] \in W$. Entonces $[\omega]$ es un mínimo local sobre $\mathbf{V}^{-1}([1, \infty))$. Por el lema 4.2.1 tenemos que $[\omega]$ es el mínimo global de \mathbf{A}_C sobre $\mathbf{V}^{-1}([1, \infty))$. En particular vemos que $[\omega]$ es el mínimo global de \mathbf{A}_C sobre $\mathcal{CK}(1)$. ■

Tenemos la herramienta suficiente para probar el

Teorema 4.2.5. *Sea (M^{2n}, J) una variedad compleja cerrada de dimensión compleja n que admite métricas Kähler. Sea $C \hookrightarrow (M^{2n}, J)$ una curva compleja cerrada. Entonces tenemos que $[\omega] \in \mathcal{CK}(1)$ es punto crítico de \mathbf{A}_C si y sólo si*

$$PD([C]) = \alpha[\omega]^{n-1}$$

donde $\alpha > 0$. En este caso se tiene que $[\omega]$ es el único punto crítico y es el mínimo global de \mathbf{A}_C .

Demostración. Utilizando multiplicadores de Lagrange es fácil ver que $[\omega]$ es punto crítico de \mathbf{A}_C si y sólo si $d\mathbf{V}_{[\omega]} \wedge (d\tilde{\mathbf{A}}_C)_{[\omega]} = 0$, es decir, $[\omega]$ es

punto crítico si y sólo si para todo $[\eta], [\zeta] \in T_{[\omega]}CK = H^{1,1}(M, \mathbb{R})$ se tiene que

$$(4.4) \quad dV_{[\omega]}([\eta])d(\tilde{A}_C)_{[\omega]}([\zeta]) = dV_{[\omega]}([\zeta])d(\tilde{A}_C)_{[\omega]}([\eta])$$

De la linealidad de \tilde{A}_C resulta que $d(\tilde{A}_C)_{[\omega]}([\eta]) = \tilde{A}_C([\eta])$. Además por el lema 4.1.1, es suficiente hacer el cálculo en (4.4) para representantes $\omega \in [\omega], \eta \in [\eta], \zeta \in [\zeta]$. De esta manera tenemos que $[\omega]$ es punto crítico si y sólo si $\forall [\eta], [\zeta] \in T_{\omega}CK$ se tiene que

$$(4.5) \quad dV_{\omega}(\eta)d(\tilde{A}_C)_{\omega}(\zeta) = dV_{\omega}(\zeta)d(\tilde{A}_C)_{\omega}(\eta)$$

Como $dV \wedge d\tilde{A}_C = -d\tilde{A}_C \wedge dV$, consideremos el caso $\eta \neq \mathbb{R} \cdot \zeta$. En particular podemos tomar $\zeta = \omega$ y $[\eta] \in H_0^{1,1}([\omega])$, es decir, $\langle \omega, \eta \rangle_{\omega} = 0$. Por (4.5) esto implica que

$$0 = \int_C \eta = \int_M \eta \wedge *_\omega(*_\omega(PD[C])) = \langle \eta, *_\omega(PD[C]) \rangle_{\omega}.$$

Como $[\eta] \in H_0^{1,1}([\omega])$, existe $r_1 \in \mathbb{R}$ tal que $*_{\omega}PD([C]) = r_1[\omega]$. Del hecho que C es compleja existe un número real positivo r_2 tal que

$$(4.6) \quad PD[C] = r_2 \frac{[\omega]^{n-1}}{(n-1)!}$$

tomamos $\alpha = \frac{r_2}{(n-1)!}$. Por el lema 4.2.5 obtenemos el resultado. ■

Con las mismas hipótesis del teorema 4.2.5 tenemos otra manera de probar la unicidad de punto crítico:

Sea $[\omega]$ punto crítico y supongamos que existe otro punto crítico $[\omega_1] \neq [\omega]$, entonces tenemos que para todo $[\eta], [\zeta] \in T_{[\omega_1]}CK$ se cumple que

$$dV_{[\omega_1]}([\eta])d(\tilde{A}_C)_{[\omega_1]}([\zeta]) = dV_{[\omega_1]}([\zeta])d(\tilde{A}_C)_{[\omega_1]}([\eta])$$

tomando $\zeta = \omega_1$ y $\eta \in H_0^{1,1}(\omega_1)$, se cumple que $\langle \eta, \omega_1 \rangle_{\omega_1} = 0$

$$0 = \int_C \eta = \int_M \eta \wedge *_\omega(*_\omega(\text{PD}[C])) = \langle \eta, *_\omega(\text{PD}[C]) \rangle_\omega$$

entonces tenemos que $\langle \eta, \omega \rangle_\omega = \langle \eta, \omega_1 \rangle_{\omega_1} = 0$. Esto implica que $\omega = c\omega_1$. Como $[\omega], [\omega_1] \in \mathcal{CK}(1)$, se tiene que $[\omega_1] = [\omega]$. Esto prueba la unicidad.

Definición: Sea $A_C : \mathcal{CK}(1) \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $A_C([\omega]) = \int_C \omega$. Decimos que $[\omega] \in \mathcal{CK}(1)$ es una clase C -crítica, si existe $\alpha > 0$ tal que

$$\text{PD}([C]) = \alpha[\omega]^{n-1}.$$

CAPÍTULO V

UNA MÉTRICA CANÓNICA SOBRE SUPERFICIES DE RIEMANN

§5.1. La forma de Kähler $\mu^*\omega_0$

Sea C una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$ y sea $M = J(C)$ la jacobiana de C . Tenemos una acción

$$\tau : J(C) \times J(C) \rightarrow J(C)$$

dada por

$$\tau(x, y) = x + y$$

esta acción la cual es holomorfa esta bien definida, es decir, no dependen de los representantes de las clases de x, y . Definimos las traslaciones

$$\tau_x = \tau(x, \cdot) : J(C) \rightarrow J(C),$$

dada por

$$\tau_x(y) = \tau(x, y).$$

Sea η una 1-forma con valores reales. Decimos que η es invariante por traslaciones en $J(C)$, si $\tau_x^*\eta = \eta$ para todo $x \in J(C)$. Vamos a ver que cada clase de cohomología de de Rham sobre $J(C)$ tiene un único representante invariante. Para ello procedemos como sigue:

Primero notemos que como Λ actúa propia y discontinuamente, tenemos que $\pi_1(J(C)) = \Lambda$. Como $H_1(J(C), \mathbb{Z})$ es la abelianización de $\pi_1(J(C))$ y $\pi_1(J(C))$ es abeliano, se tiene que $H_1(J(C), \mathbb{Z}) = \Lambda$. Elegimos una base $\{e_1, \dots, e_{2g}\}$ de $H_1(J(C), \mathbb{Z}) = \Lambda = \mu_*(H_1(C, \mathbb{Z}))$ tal que $\{e_1, \dots, e_{2g}\}$ genera a \mathbb{C}^g como

\mathbb{R} -espacio vectorial. Consideramos coordenadas reales $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{2g}$ sobre \mathbb{C}^g duales a $\{e_1, \dots, e_{2g}\}$, es decir, $\tilde{x}_j(e_i) = \delta_{ij}$. Notemos que $d\tilde{x}_1, \dots, d\tilde{x}_{2g}$ son 1-formas invariantes sobre \mathbb{C}^g , en particular son invariantes por elementos de Λ , entonces cada $d\tilde{x}_i$ desciende a $J(C)$ definiendo una forma invariante sobre $J(C)$ que denotamos por dx_i . Como $\int_{e_i} dx_j = \delta_{ij}$, tenemos que $H^1(J(C), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\{dx_1, \dots, dx_{2g}\}$. Del hecho que $J(C) \simeq_{e_i} (S^1)^{2g}$ topologicamente, se tiene que $H^k(J(C), \mathbb{Z})$ y $H_k(J(C), \mathbb{Z})$ son grupos abelianos libres de rango finito. Por el teorema de los coeficientes universales tenemos que $H_{dR}(J(C), \mathbb{R}) = H^1(J(C), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$, esto implica que $\dim_{\mathbb{R}} H_{dR}^1(J(C)) = 2g$, esto hace ver que las clases de cohomología $\{[dx_i]\}$ generan $H_{dR}^1(J(C), \mathbb{R})$, por lo que cada clase de cohomología de $H_{dR}^1(J(C), \mathbb{R})$ tiene un único representante invariante. Por el teorema de Kunneth tenemos que

$$H_{dR}^k(J(C), \mathbb{R}) \simeq \bigwedge^k H_{dR}^1(J(C), \mathbb{R})$$

(Ver [GD]). Por lo anterior se tiene que cada clase de cohomología en $H_{dR}^k(J(C), \mathbb{R})$ tiene un único representante invariante.

Corolario 5.1.1. *Sea C una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$, y $J(C)$ su Jacobiana. Entonces $c_1(L_{\Theta}) = [\omega_0]$ es una clase C -crítica.*

Demostración. Por la fórmula de Poincaré tenemos que

$$PD[C] = \frac{[\omega_0]^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Aplicando el teorema 4.2.5 obtenemos el resultado. ■

En este caso tenemos que ω_0 es un representante canónico de $[\omega_0]$. De esta manera vemos que C tiene una métrica canónica la cual es la métrica inducida por $\mu^*\omega_0$. Por construcción esta métrica tiene una relación muy estrecha con C . En el siguiente capítulo haremos un análisis de la curvatura gaussiana de esta métrica sobre C .

CAPÍTULO VI

CURVATURA GAUSSIANA SOBRE C

§6.1 Curvatura y puntos de Weierstrass

En este capítulo haremos un análisis de la curvatura gaussiana de la métrica que induce $\mu^*\omega_0$ sobre una superficie de Riemann compacta C . A esta métrica la llamaremos la métrica Theta. En este capítulo probamos que si un automorfismo conforme $f : C \rightarrow C$, $f \neq I$ fija algún punto p , entonces p es un punto crítico de la función de curvatura K de la métrica Theta. En el caso que C es una curva hiperelíptica de género g , C esta dada por la ecuación $y^2 = f(x)$, donde f es un polinomio complejo con $2g + 2$ raíces distintas. El caso donde el género de C es ≥ 2 , probamos que los puntos de C que corresponde a $f = 0$ son máximos locales de K de índice de Morse $+2$. Cuando $g = 2$, probamos que los puntos de C que corresponden a los puntos donde $f' = 0$ son mínimos locales de K de índice de Morse 0 . Esto hace ver que en el caso hiperelíptico en género 2 tenemos puntos críticos de K , los cuales estan canónicamente definidos sobre la superficie.

Sea C una superficie de Riemann compacta, $J(C)$ la jacobiana de C . Sean $p_0, p_1 \in C$, $p_0 \neq p_1$. Consideremos las aplicaciones $\mu_{p_0} : C \rightarrow J(C)$, $\mu_{p_1} : C \rightarrow J(C)$. Sea $\tau_{\mu_{p_1}(p_0)}$ la traslación por $\mu_{p_1}(p_0)$ en $J(C)$. Entonces tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\mu_{p_0}} & J(C) \\ & \searrow \mu_{p_1} & \uparrow \tau_{\mu_{p_1}(p_0)} \\ & & J(C) \end{array}$$

es decir, $\mu_{p_1} = \tau_{\mu_{p_1}(p_0)} \mu_{p_0}$. Como ω_0 es invariante por traslaciones tenemos que $\mu_{p_1}^* \omega_0 = \mu_{p_0}^* \tau_{\mu_{p_1}(p_0)}^* \omega_0 = \mu_{p_0}^* \omega_0$. Esto hace ver que la métrica Theta no depende del

punto base de la aplicación de Abel-Jacobi. En coordenadas complejas z_1, \dots, z_g de \mathbb{C}^g , $\omega_0 = \sum_{i,j=1}^g a_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j$, donde $(\text{Im}Z)^{-1} = (a_{ij})$. En cada espacio tangente $T_p C \simeq T'_p C$ de C , la métrica Theta, que denotaremos por \langle, \rangle_Θ , tiene la siguiente expresión para $u, v \in T_p C$:

$$\langle u, v \rangle_\Theta = \left(\sum_{i,j=1}^g a_{ij} f_i(p) \overline{f_j(p)} \right) u \bar{v},$$

donde en una coordenada local z alrededor de p , $\omega_j(z) = f_j(z) dz$. En esta coordenada vemos que la métrica Theta es conforme a la euclidiana con factor de conformalidad

$$\rho^2(z) = \sum_{i,j=1}^g a_{ij} f_i(z) \overline{f_j(z)}.$$

Sea K la curvatura gaussiana de la métrica Theta. Para calcular K en una carta local z , tenemos que ([LW], pag. 313):

$$K(z) = \frac{-1}{8} \frac{\partial \bar{\partial} \log \rho^2(z)}{\rho^2(z)}.$$

Para estudiar la naturaleza de K primero vamos a dar unas definiciones básicas de teoría de Morse. Recordemos que si M una variedad diferenciable de dimensión m y $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 con un punto crítico x , entonces podemos tomar un sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_m) alrededor de x y definir en estas coordenadas la matriz de segundas derivadas parciales de F , $(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j})$. $(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j})$ determina una forma bilineal sobre $T_x M$ que no depende del sistema de coordenadas. Esta forma bilineal se llama el Hessiano de F en x .

Definición: Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^2 . Sea x un punto crítico de F . Definimos el índice de Morse de F en el punto x como la dimensión mayor del subespacio de $T_x M$ donde $\text{Hess}_x F$ es definido negativo.

La prueba del siguiente teorema se puede encontrar en ([GD], pag.192)

Teorema A. Sea M una variedad compacta de dimensión m y $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 . Sea I_q el numero de puntos criticos de F de indice q , y $\chi(M)$ la característica de Euler de M , entonces $\chi(M) = \sum_{q=0}^m (-1)^q I_q$.

Nosotros vamos a analizar la función K por medio de sus puntos críticos en superficies de Riemann hiperelípticas.

Una superficie de Riemann hiperelíptica C de género g viene dada como la completación suave de la ecuación $y^2 = f(x)$, donde f es un polinomio complejo con $2g + 2$ raíces distintas. Explícitamente, sea

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = f(x) = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - a_i)\}$$

donde los a_1, \dots, a_{2g+2} son distintos. Notemos C_1 es una variedad afín suave. Como

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - a_i) = x^{2g+2} \prod_{i=1}^{2g+2} \left(1 - \frac{a_i}{x}\right),$$

tomando

$$\tilde{x} = \frac{1}{x}, \tilde{y} = \frac{y}{x^{g+1}},$$

tenemos

$$\tilde{C} := \{\tilde{y}^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (1 - a_i \tilde{x})\}$$

Tenemos que $U_1 = \{x \in C_1 \mid x \neq 0\}$ es un abierto de C_1 , y $V_1 = \{\tilde{x} \in \tilde{C} \mid \tilde{x} \neq 0\}$ es un abierto de \tilde{C} . El isomorfismo

$$\phi : U_1 \rightarrow V_1,$$

dado por

$$\phi(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y}),$$

nos da una regla de pegado entre U_1 y V_1 . Notemos que cuando $\tilde{x} = 0$, entonces $\tilde{y} = \pm 1$. Esto hace ver que C_1 tiene dos puntos infinito dados por $(\tilde{x} = 0, \tilde{y} = \pm 1)$. De esta manera obtenemos una superficie de Riemann compacta $C = C_1 \cup_{\phi} C_2$, junto con una aplicación holomorfa

$$\pi : C \rightarrow \mathbb{CP}^1,$$

dada por $\pi(x, y) = x$ sobre C_1 , y $\pi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}$ sobre C_2 . π se ramifica en $2g + 2$ puntos, los puntos de Weierstrass. Además C admite una involución dada por

$$(x, y) \rightarrow (x, -y),$$

donde los puntos fijos de este automorfismo son los puntos de Weierstrass. Esta involución induce el cubriente doble $\pi : C \rightarrow \mathbb{CP}^1 = C / \langle \text{involución} \rangle$, $\pi(x, y) = x$, ramificado en los puntos de Weierstrass. Una base de $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})$, esta dada por ([GH], pag 255)

$$\left\{ \frac{dx}{y}, \frac{xdx}{y}, \dots, \frac{x^{g-1}dx}{y} \right\}$$

En el caso hiperelíptico se tiene que $K \leq 0$ ([L2]). La siguiente proposición nos dice en que puntos se anula K ([L2]).

Proposición B. *Sea C una superficie de Riemann compacta equipada con su métrica Theta. La función de curvatura K se anula en un punto $p \in C$ si y solo si C es hiperelíptica y el punto p es uno de los puntos de Weierstrass.*

Una manera de analizar K , es por medio del estudio de sus puntos críticos. Un resultado que tenemos en esta dirección es el siguiente:

Lema 6.1.1. *Sea $f : C \rightarrow C$ un automorfismo distinto de la identidad. Si f deja fijo algún punto p de C , entonces p es un punto crítico de K , es decir, $dK(p) = 0$.*

Demostración. Notemos que $j : H_1(C, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})^*$ mediante la aplicación $j(\gamma) = \int_{\gamma} \in H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})^*$, donde $\int : H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C) \rightarrow \mathbb{C}$ es dado por $\int(\omega) := \int_{\gamma} \omega$. Entonces tenemos una manera intrínseca de definir la Jacobiana de \tilde{C} , esto es ,

$$J(C) = \frac{H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C)^*}{H_1(C, \mathbb{Z})}.$$

([LB], pag. 322). Sea $f : C \rightarrow C$ un automorfismo conforme distinto de la identidad. Por funtorialidad f induce las siguientes aplicaciones

$$f^* : H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C}) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C),$$

$$(f^*)^* : H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})^* \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})^*, \text{ (el adjunto de } f^*)$$

$$f_* : H_1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(C, \mathbb{Z}).$$

Se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H_1(C, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_*} & H_1(C, \mathbb{Z}) \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})^* & \xrightarrow{(f^*)^*} & H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})^* \end{array}$$

Esto induce la aplicación

$$\begin{array}{ccc} H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})^* & \xrightarrow{(f^*)^*} & H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})^* \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ J(C) & \xrightarrow{\bar{f}^*} & J(C) \end{array}$$

Sea

$$(\cdot, \cdot)_1 : H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C}) \times H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

dado por

$$(\theta_1, \theta_2)_1 = i \int_C \theta_1 \wedge \bar{\theta}_2$$

Se tiene que $(\cdot, \cdot)_1$ es un producto hermitiano. Por las relaciones bilineales de Riemann existe una base $\{\theta_i\}_{i=1, \dots, g}$ de $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C)$ tal que $\text{Im } Z_{ij} = \frac{1}{2}(\theta_i, \theta_j)_1$, donde $\text{Im } Z$ es la parte imaginaria de la matriz de periodos de C . Por dualidad $(\cdot, \cdot)_1$ define un producto interior $(\cdot, \cdot)_2$ sobre $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})^*$ tal que en la base $\{\theta_i^*\}$ dual a $\{\theta_i\}$, $(\theta_i^*, \theta_j^*)_2 = a_{ij}$, donde $(a_{ij}) = (\text{Im } Z)^{-1}$. Notemos que $(\cdot, \cdot)_2$ define por traslaciones en $J(C)$ la métrica hermitiana sobre $J(C)$ definida por ω_0 .

Sea $\theta \in H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})$. En una carta local z de C tenemos que $\theta = u(z)dz$, entonces notemos que $f^*(d\bar{z}) = \overline{f'(z)}d\bar{z} = \overline{f^*(dz)}$, entonces se tiene que

$$f^*\bar{\theta}(z) = \bar{\theta}(f(z)) = \overline{u(f(z))f'(z)}d\bar{z} = \overline{f^*\theta(z)}.$$

Esta igualdad nos hace ver

$$\begin{aligned} f^*(\theta_1, \theta_2)_1 &= \int_C f^*\theta_1 \wedge \overline{f^*\theta_2} = \int_C f^*(\theta_1 \wedge \bar{\theta}_2) = \int_{f_*(C)} (\theta_1 \wedge \bar{\theta}_2) = \int_C (\theta_1 \wedge \bar{\theta}_2) = \\ &(\theta_1, \theta_2)_1 \end{aligned}$$

Por dualidad $(f^*)^*(\cdot, \cdot)_2 = (\cdot, \cdot)_2$. Además se tiene que el siguiente diagrama conmuta ([LB], pag. 336)

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & C \\ \mu_p \downarrow & & \mu_{f(p)} \downarrow \\ J(C) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & J(C) \end{array}$$

entonces $\mu_p^*((f^*)^*(\cdot, \cdot)_2) = \mu_p^*(\cdot, \cdot)_2 = f^*(\mu_{f(p)}^*(\cdot, \cdot)_2)$. Esto hace ver que f es una isometría respecto de la métrica Theta, por lo tanto f deja invariante a la función de curvatura K , es decir, $K(x) = K(f(x))$ para todo $x \in C$. Por la regla de la cadena tenemos que $dK(x) = dK(f(x))f'(x)$. Como f es una isometría distinta de la identidad tenemos que $f'(p) \neq I$. Entonces si p es punto fijo de f , tenemos que $dK(p) = dK(p)f'(p)$. Esto implica que $dK(p) = 0$. Esto concluye la prueba. ■

La proposición B afirma que en el caso hiperelíptico los puntos de Weierstrass son máximos globales de K , pero apriori no sabemos si son máximos locales o no. Para analizar la naturaleza de los puntos de Weierstrass vamos a considerar primero una superficie de Riemann compacta hiperelíptica C de género 2 dada por

$$\{(x, y) | y^2 = f(x) = (x - a)(x - a_2) \cdots (x - a_6)\},$$

donde a_1, a_2, \dots, a_6 son todas distintas. Consideramos la base de diferenciales holomorfas

$$\left\{ \frac{dx}{y}, \frac{x dx}{y} \right\}.$$

Consideremos el punto de Weierstrass $p = (a, 0)$. Como los ceros de f son simples, tenemos que $f'(a) \neq 0$. Así que por el teorema de la función implícita en una vecindad pequeña U de a podemos considerar a x como una coordenada local alrededor de a . Sea $g(x) = \prod_{i=2}^6 (x - a_i)$, entonces

$$\frac{y^2}{g(x)} = x - a = \left(\frac{y}{\sqrt{g(x)}} \right)^2$$

Sea $z = \frac{y}{\sqrt{g(x)}}$. Tenemos el siguiente lema:

Lema 6.1.2. $z = \frac{y}{\sqrt{g(x)}}$ es una coordenada local alrededor del punto a , y en esta coordenada la base de diferenciales holomorfas $\{\frac{dx}{y}, \frac{x dx}{y}\}$ de $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})$ se transforma en $\{\alpha(z)dz, \alpha(z)z^2 dz\}$, donde $\alpha(z)$ es una función holomorfa con $\alpha(0) \neq 0$.

Demostración. Como $\frac{dx}{y} \neq 0$ en \mathbb{C} , se tiene que $dy = \frac{f'(x)dx}{2y} \neq 0$ en una vecindad de a . Como $g(a) \neq 0$ y $y(a) = 0$, resulta que

$$dz(a) = \frac{(\sqrt{g(x)}dy(a) - (y(a)d\sqrt{g(x)})(a))}{g(x)} \neq 0$$

por el teorema de la función inversa existe una vecindad V de a , donde z es coordenada local.

Además

$$\frac{dx}{y} = \frac{2dy}{f'(x)} = (2\frac{dy}{dz}dz)\frac{1}{f'(x)} = \alpha(z)dz$$

donde

$$\alpha(z) = \frac{2y'(x(z))}{f'(x(z))}$$

es una función holomorfa tal que $\alpha(0) \neq 0$. Entonces nuestra base de diferenciales $\frac{dx}{y}, \frac{x dx}{y}$ en la carta local z se transforma como

$$\frac{dx}{y} \rightarrow \omega_1 = \alpha(z)dz, \frac{x dx}{y} \rightarrow \omega_2 = \alpha(z)z^2 dz$$

■

Otro lema en esta dirección es el siguiente:

Lema 6.1.3. Sea C una superficie de Riemann dada por la ecuación $y^2 = f(x)$, donde $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_6)$ tiene todas sus raíces distintas. Consideremos la aplicación de Abel-Jacobi $\mu : C \rightarrow J(C)$ y sea $h = (h_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 2$, una matriz hermitiana definida positiva que define una métrica hermitiana en $T_0 J(C)$. Consideremos la coordenada local $z = \frac{y}{\sqrt{g(x)}}$, donde $g(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_6)$. Entonces en esta coordenada z tenemos que la función K viene dada por

$$K(z) = \frac{-(\det h)}{2} \frac{z \bar{z}}{\gamma(z)}$$

donde $\gamma(z) := |\alpha(z)|^2 \cdot \beta(z)^3$ es una función C^∞ tal que $\gamma(0) \neq 0$

Demostración. Sea V un abierto coordinado de z . Fijemos un punto p_0 sobre V y consideremos la aplicación de Abel-Jacobi $\mu : V \rightarrow J(C)$, dada por

$$\mu(z) = \left(\int_{p_0}^z \frac{dx}{y}, \int_{p_0}^z \frac{(x-a)dx}{y} \right)$$

entonces

$$\mu'(z) = \left(\frac{1}{y(z)}, \frac{(x(z)-a)}{y(z)} \right) = (\alpha(z), \alpha(z)z^2)$$

Consideremos la restricción de h a C , μ^*h , entonces para $u, v \in T_z C$ tenemos

$$\mu^*h(u, v) = [\alpha(z)\overline{\alpha(z)}\beta(z)]u\bar{v}$$

donde

$$\begin{aligned} \rho^2(z) &= \alpha(z)\overline{\alpha(z)}\beta(z), \\ \beta(z) &= h_{11} + h_{12}\bar{z}^2 + h_{21}z^2 + h_{22}z^2\bar{z}^2. \end{aligned}$$

Notemos que $\beta(0) > 0$. Tenemos que

$$K(z) = \frac{-1}{8} \frac{\partial \bar{\partial} \log(\rho^2(z))}{\rho^2(z)} = \frac{-\partial \bar{\partial} \log \beta(z)}{8\rho^2(z)}.$$

Como $\alpha(z)$ es holomorfa se tiene que $\partial \bar{\partial} \log(\alpha(z)\overline{\alpha(z)}) = 0$. Entonces

$$K(z) = \frac{-1}{8} \frac{\beta(z) \cdot \frac{\partial^2 \beta(z)}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\bar{\partial} \beta(z)}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \beta(z)}{\partial z}}{|\alpha(z)|^2 \beta(z)^3}$$

Un cálculo fácil hace ver que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta(z)}{\partial z} &= 2h_{21}z + 2h_{22}z\bar{z}^2, \\ \frac{\partial \beta(z)}{\partial \bar{z}} &= 2h_{12}\bar{z} + 2h_{22}\bar{z}z^2, \\ \frac{\partial^2 \beta(z)}{\partial z \partial \bar{z}} &= 4h_{22}\bar{z}z \end{aligned}$$

con estas expresiones podemos ver que

$$K(z) = \frac{-(\det h)}{2} \frac{z\bar{z}}{\gamma(z)}$$

donde $\gamma(z) := |\alpha(z)|^2 \cdot \beta(z)^3$ es una función C^∞ tal que $\gamma(0) \neq 0$. ■

Teorema 6.1.4. Sea C una curva hipereĺĺptica de género 2 dada por $y^2 = f(x)$, donde $f(x) = (x - a)(x - a_2) \cdots (x - a_6)$ con todas sus raices disitntas. Entonces tenemos que los puntos de Weierstrass de C , es decir los puntos fijos de la involución, tienen índice de Morse +2.

Demostración. Consideremos el punto de Weierstrass $p = (a, 0)$. Por el lema 6.1.2 $z = \frac{y}{\sqrt{g(x)}}$ es coordenada local alrededor de a , donde $g(x) = (x - a_2) \cdots (x - a_6)$. Por el lema 6.1.3, en esta coordenada se tiene que $K(z) = \frac{-(\det h)}{2} \frac{z\bar{z}}{\gamma(z)}$. Sea $r = -\frac{1}{2} \det h$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial z} &= \frac{r \cdot \gamma(z)\bar{z} - rz\bar{z} \frac{\partial \gamma}{\partial z}}{(\gamma(z))^2} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} &= \frac{(r \frac{\partial \gamma}{\partial z} \bar{z} - \bar{z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} - z\bar{z} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2})\gamma(z)^2 - \frac{\partial \gamma^2}{\partial z} (r\gamma(z)\bar{z} - rz\bar{z} \frac{\partial \gamma}{\partial z})}{\gamma(z)^4} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{z} \partial z} &= \frac{r[\gamma(z)^2(\gamma(z) + \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{z}} \bar{z} - z \frac{\partial \gamma}{\partial z} - z\bar{z} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial \bar{z}}) - \frac{\partial \gamma(z)^2}{\partial \bar{z}} (\bar{z}\gamma(z) - z\bar{z} \frac{\partial \gamma}{\partial z})]}{\gamma(z)^4} \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} \Big|_{z=0} &= 0 = \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{z}^2} \Big|_{z=0} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial z \partial \bar{z}} \Big|_{z=0} &= \frac{r}{\gamma(0)} = \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{z} \partial z} \Big|_{z=0} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial z \partial \bar{z}} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{z} \partial z} & \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{z}^2} \end{pmatrix} \Big|_{z=0} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

donde $c := \frac{r}{\gamma(0)} < 0$. Para calcular el Hessiano de K con respecto a variables reales x, y , recordemos que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

donde $z = x + iy$. Sea

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

al expresar $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$, $\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}$ en terminos de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial z \partial \bar{z}} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{z} \partial z} & \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{z}^2} \end{pmatrix} \Big|_{z=0} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(a-d-2ib) & \frac{1}{4}(a+d) \\ \frac{1}{4}(a+d) & \frac{1}{4}(a-d+2ib) \end{pmatrix}$$

resolviendo las ecuaciones $\frac{1}{4}(a-d-2ib) = 0$, $\frac{1}{4}(a+d) = c$, $\frac{1}{4}(a-d+2ib) = 0$, obtenemos

$$\text{Hess}(K)(0) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Esto nos prueba que el punto $p = (a, 0)$ es un punto crítico no degenerado de índice Morse +2. ■

En el apéndice III damos una generalización del teorema 6.1.4 para genero $g > 2$.

Hemos visto que los puntos de Weierstrass tienen índice de Morse +2. Una pregunta natural es la siguiente: ¿Los puntos donde $f' = 0$ son puntos críticos de K ? Si son puntos críticos, ¿que tipo de puntos críticos son?. Para analizar dichos puntos consideramos el caso de genero dos. Sea C una curva hiperelíptica de género 2 dada por la ecuación $y^2 = f(x)$, donde $f(x)$ es un polinomio complejo de grado seis en la variable x con todas sus raíces distintas. Consideramos la base

$$\frac{dx}{y}, \frac{xdx}{y}$$

de $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C, \mathbb{C})$. Tomamos una base de homología simpléctica de C , $\{\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2\}$ y una base $\{\omega_1, \omega_2\}$ de $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C)$ normalizada respecto a la base de homología que elegimos. Como $\{\omega_1, \omega_2\}$ es una combinación lineal de la base $\{\frac{dx}{y}, \frac{xdx}{y}\}$, si la matriz de periodos de C respecto de la base $\frac{dx}{y}, \frac{xdx}{y}$ es de la forma

$$\Omega = \begin{pmatrix} \int_{\lambda_1} \frac{dx}{y} & \int_{\lambda_2} \frac{dx}{y} & \int_{\mu_1} \frac{dx}{y} & \int_{\mu_2} \frac{dx}{y} \\ \int_{\lambda_1} \frac{x dx}{y} & \int_{\lambda_2} \frac{x dx}{y} & \int_{\mu_1} \frac{x dx}{y} & \int_{\mu_2} \frac{x dx}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{pmatrix}$$

las relaciones bilineales de Riemann nos dicen que $a := \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$, por lo que podemos encontrar nuestra base normalizada por medio del siguiente cambio de base:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{y} \\ \frac{x dx}{y} \end{pmatrix}$$

Denotemos por $P := (p_{ij})$ este último cambio de base y por (a_{ij}) la inversa de la parte imaginaria de la matriz de periodos de C , $\text{Im } Z^{-1}$, respecto a la base simpléctica y diferenciales normalizadas. Notemos que

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \omega_i \overline{\omega_j} = \left(\frac{dx}{y}, \frac{x dx}{y} \right) P^t \cdot (\text{Im } Z)^{-1} \cdot \overline{P} \begin{pmatrix} \overline{\left(\frac{dx}{y} \right)} \\ \overline{\left(\frac{x dx}{y} \right)} \end{pmatrix}$$

donde

$$B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = P^t \cdot (\text{Im } Z)^{-1} \cdot \overline{P}$$

define el factor de conformalidad de la métrica Theta en la base $\left\{ \frac{dx}{y}, \frac{x dx}{y} \right\}$, y $b_{12} = \overline{b_{21}}$. Nos vamos a referir a la matriz B como la matriz de conformalidad. Con esta notación tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.1.5. *Sea C una superficie de Riemann compacta hiperéptica dada por la ecuación $y^2 = f(x)$, donde f es un polinomio complejo de grado seis en la variable x con todas sus raíces distintas. Sea x_0 tal que $f(x_0) \neq 0$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$. Supongamos que en la matriz de conformalidad B tenemos que $\text{Re } b_{12} = 0$, entonces x_0 es un punto crítico no degenerado de K de índice Morse 0, el cual es un mínimo local.*

Demostración. Sea x_0 tal que $f(x_0) \neq 0$, y $f'(x_0) = 0$. En una vecindad del punto x_0 tenemos nuestra base de diferenciales de la forma $\frac{dx}{y}, \frac{(x-x_0)dx}{y}$. Tomando $t = x - x_0$, nuestra base de diferenciales alrededor de x_0 se transforma en $\frac{dt}{y}, \frac{t dt}{y}$. En este caso la expresión del factor de conformalidad alrededor de x_0 de la métrica Theta es:

$$\rho^2(t) = \left(\frac{1}{y}, \frac{t}{y}\right) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \left(\overline{\begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ \frac{t}{y} \end{pmatrix}}\right) = \frac{g(t)}{|y^2|}$$

donde $g(t) = b_{11} + b_{21}t + b_{12}\bar{t} + b_{22}|t|^2$. Tenemos que

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{-1}{8} \partial \bar{\partial} \log\left(\frac{g(t)}{|y^2|}\right) \cdot \frac{|y^2|}{g(t)} \\ &= \frac{-\det B}{8} \frac{|f(x)|}{g(t)^3} \end{aligned}$$

De aqui podemos ver que

$$dK(x) = \frac{\det B}{8} \frac{-(g(t))^3 d|f(x)| + 3g^2|f|dg(t)}{(g(t))^6}$$

Como

$$\frac{dg}{dt} = b_{12} + b_{21} + b_{22} \frac{d}{dt}|t|^2$$

vemos que $g'(0) = 0$ si y solo si $b_{12} + b_{21} = \operatorname{Re} b_{12} = 0$. Cuando $t = 0, x = x_0$, entonces

$$dK(x_0) = \frac{\det B}{8} \frac{(-g^3(0)d|f|_{x_0} + 3g^2(0)|f(x_0)|dg(0))}{(g(0))^6}$$

Como $f'(x_0) = 0$. Resulta que

$$dK(x_0) = 0 \text{ si y solo si } \operatorname{Re} b_{12} = 0$$

Pero por hipótesis $\operatorname{Re} b_{12} = 0$, entonces x_0 es un punto crítico de K y además $g'(0) = 0$. tomando $x = u + iv$, tenemos que $x_0 = u_0 + iv_0$ es punto crítico de K , entonces

$$\frac{\partial K}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial K}{\partial v}(u_0, v_0) = 0.$$

Usando nuestra hipótesis $f''(x_0) = 0$, podemos ver mediante un cálculo sencillo que

$$s := \frac{\partial^2 K}{\partial u^2}(u_0, v_0) = \frac{(3b_{22}\det B)|f(x_0)|}{4g(0)^4} = \frac{\partial^2 K}{\partial v^2}(u_0, v_0) > 0,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial u \partial v}(u_0, v_0) = 0.$$

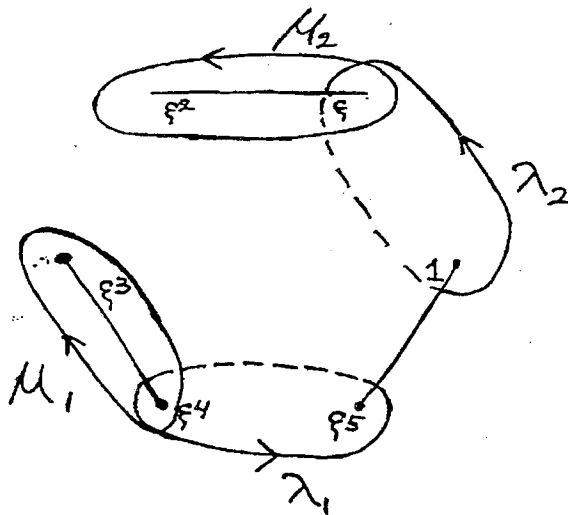
Entonces

$$\text{Hess } K(x_0) = \text{Hess } K(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Esto implica que x_0 es un punto crítico no degenerado de índice de Morse 0, el cual es un mínimo local. ■

§6.2 Un ejemplo: $C = \{y^2 = z^6 - 1\}$

Consideremos la superficie de Riemann compacta C dada por la ecuación $y^2 = z^6 - 1$ con sus dos puntos al infinito. Sea $\varphi : C \rightarrow C$ el automorfismo de orden seis dado por $\varphi(z, y) = (\zeta z, y)$, donde $\zeta = e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ es la raíz sexta de la unidad. Consideremos una base simpléctica de C , $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ como se muestra en la siguiente figura.



Sea $\frac{dz}{y}, \frac{zdz}{y}$ una base $H_{\partial}^{1,0}(C, \mathbb{C})$. Tenemos la matriz de periodos

$$\begin{pmatrix} \int_{\lambda_1} \frac{dz}{y} & \int_{\lambda_2} \frac{dz}{y} & \int_{\mu_1} \frac{dz}{y} & \int_{\mu_2} \frac{dz}{y} \\ \int_{\lambda_1} \frac{zdz}{y} & \int_{\lambda_2} \frac{zdz}{y} & \int_{\mu_1} \frac{zdz}{y} & \int_{\mu_2} \frac{zdz}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{pmatrix}$$

Sea $\{\omega_1, \omega_2\}$ la base de $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(C)$ normalizada respecto a $\{\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2\}$ la cual esta dada por:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dz}{y} \\ \frac{zdz}{y} \end{pmatrix}$$

donde $a = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$. La parte imaginaria de la matriz de periodos de C respecto a esta normalización es [SCH]

$$\text{Im } Z = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$(\text{Im } Z)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Fijando un punto p_0 sobre C consideramos la aplicación de Abel-Jacobi $\mu: C \rightarrow J(C)$, $\mu(z) = (\int_{p_0}^z \omega_1, \int_{p_0}^z \omega_2)$, entonces alrededor de nuestra coordenada local z tenemos que

$$\mu'(z) = (f_1(z), f_2(z)) = \left(\frac{\alpha_{22}}{ay} - \frac{\alpha_{12}z}{ay}, \frac{\alpha_{11}z}{ay} - \frac{\alpha_{21}}{ay} \right)$$

de esta manera si $u, v \in T_z C$ tenemos que

$$\langle u, v \rangle_{\Theta} = (\mu'(z)u)(\text{Im } Z)^{-1}(\overline{\mu'(z)v})$$

tenemos la siguiente expresión para K

Fórmula. La función curvatura K de la métrica Theta de C , desciende a \mathbb{CP}^1 , cuya expresión viene dada por :

$$\kappa(z) = \frac{-\delta|z^6 - 1|}{(|z|^2 + 1)^3},$$

donde $\delta = \frac{\sqrt{3}|A|^2}{2}$ y $A = \int_1^{\zeta} \frac{dz}{y}$.

Demostración. Ver apéndice I.

Como $\pi : C \rightarrow \mathbb{CP}^1$ es cubriente doble, esto nos permite hacer el análisis sobre \mathbb{CP}^1 . Notemos que $d\kappa^2 = 2\kappa \cdot d\kappa$, por lo que excepto en los puntos de Weierstrass (los cuales ya sabemos que tienen índice de Morse +2), $d\kappa^2$ y $d\kappa$ tienen los mismos puntos críticos. Como el cero satisface las hipótesis del teorema 6.1.5 (Ver apéndice I), tenemos q_1, q_2 tienen índice de Morse 0, donde $\{q_1, q_2\} = \pi^{-1}(0)$. Del hecho que $\kappa(z) = \kappa(\frac{1}{z})$, vemos que ∞ es punto crítico de κ , y como el cero tiene índice de Morse 0, entonces tenemos que el punto al infinito tiene índice de Morse 0, entonces los puntos que están sobre el ∞ en C tienen índice Morse 0. En el apéndice II se prueba que el resto de los puntos críticos de κ corresponden a las raíces de $z^6 + 1$ y estos son puntos silla de índice de Morse +1.

Lema 6.2.1. *Sea C la superficie de Riemann dada la ecuación $y^2 = z^6 - 1$, y K la curvatura gaussiana de la métrica Theta. Tenemos que K es una función de Morse con 6 puntos máximos (los puntos de Weierstrass), 4 puntos mínimos, correspondientes a los puntos que están sobre el 0 y el ∞ y 12 puntos sillar que corresponden a los puntos que están sobre las raíces de $z^6 + 1$. ■*

Los puntos silla de κ definen una curva hiperelíptica dada por $C' = \{y^2 = z^6 + 1\}$. Una base simpléctica de homología de esta curva se construye de manera análoga a nuestro ejemplo anterior, esto es, haciendo disecciones sobre los puntos $\beta_j = \zeta^{j-1}\beta_1$, donde $\beta_1 = e^{\frac{i\pi}{6}}$ y $\zeta = e^{\frac{i\pi}{3}}$. Igualmente encontramos una base normalizada de diferenciales holomorfas $\{\omega_1, \omega_2\}$. Esto nos da la misma matriz de periodos de nuestro ejemplo anterior, y un cálculo rutinario hace ver que la función curvatura en este ejemplo es:

$$\tilde{\kappa}(z) = \frac{-\sqrt{3}|A|^2}{2} \cdot \frac{|z^6 + 1|}{(|z|^2 + 1)^3}$$

donde $A = \int_1^{\beta_1} \frac{dz}{y}$. Vemos pues en este caso que los puntos silla de κ son los puntos máximos de $\tilde{\kappa}$.

APÉNDICE I

En este apéndice probaremos la siguiente fórmula:

Fórmula. *La función curvatura K de la métrica Theta de la curva C dada por la ecuación $y^2 = z^6 - 1$ desciende a \mathbb{CP}^1 , cuya expresión es*

$$\kappa(z) = \frac{-\delta|z^6 - 1|}{2(|z|^2 + 1)^3}$$

donde $\delta = \frac{\sqrt{3}|A|^2}{2}$ y $A = \int_1^\zeta \frac{dz}{y}$.

Demostración. Como κ viene dada por

$$\kappa(z) = \frac{-1}{8} \frac{\partial \bar{\partial} \log \rho^2(z)}{\rho^2(z)}$$

Un cálculo muestra que la matriz de conoformalidad B viene dada por

$$B = \begin{pmatrix} r_4 + r_8 & r_2 + r_7 \\ r_3 + r_6 & r_1 + r_5 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}(|\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{11}|^2), \\ r_2 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_{22}\bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{11}\alpha_{21}), \\ r_3 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_{12}\bar{\alpha}_{22} + \bar{\alpha}_{21}\alpha_{11}), \\ r_4 &= \frac{2}{\sqrt{3}}(|\alpha_{21}|^2 + |\alpha_{22}|^2), \\ r_5 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_{11}\bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{11}\alpha_{12}), \\ r_6 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_{11}\bar{\alpha}_{22} + \bar{\alpha}_{21}\alpha_{12}), \\ r_7 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_{21}\bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{11}\alpha_{22}), \\ r_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_{22}\bar{\alpha}_{21} + \bar{\alpha}_{22}\alpha_{21}). \end{aligned}$$

calcularemos los escalares $r_3 + r_6, r_2 + r_7, r_4 + r_8, r_1 + r_5$.

Denotamos por $A = \int_1^\zeta \frac{dz}{y}$ y $B = \int_1^\zeta \frac{zdz}{y}$. Tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \frac{2}{\zeta^2} \int_1^\zeta \frac{dz}{y}, \\
 \alpha_{12} &= 2 \int_1^\zeta \frac{dz}{y}, \\
 \alpha_{21} &= -\frac{2}{\zeta} \int_1^\zeta \frac{zdz}{y}, \\
 \alpha_{22} &= 2 \int_1^\zeta \frac{zdz}{y}.
 \end{aligned}
 \tag{**}$$

podemos ver que

$$\begin{aligned}
 r_3 + r_6 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_{12}\overline{\alpha_{22}} + \overline{\alpha_{21}}\alpha_{11}) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_{11}\overline{\alpha_{22}} + \overline{\alpha_{21}}\alpha_{12}) \\
 &= \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(4 - \frac{4}{\zeta}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{4}{\zeta^2} - \frac{4}{\zeta}\right)\right)A\overline{B} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

por lo tanto $b_{12} = 0 = b_{21}$. Esto en particular prueba que el cero es un mínimo local de índice +1. Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
 b_{11} = r_4 + r_8 &= \frac{2}{\sqrt{3}}(|\alpha_{21}|^2 + |\alpha_{22}|^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_{22}\overline{\alpha_{21}} + \overline{\alpha_{22}}\alpha_{21}) \\
 &= \frac{16}{\sqrt{3}}|B|^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}|B|^2\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\overline{\zeta}}\right) \\
 &= 4\sqrt{3}|B|^2
 \end{aligned}$$

Calculando que $r_1 + r_5$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 b_{22} = r_1 + r_5 &= \frac{2}{\sqrt{3}}(|\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{11}|^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_{11}\overline{\alpha_{12}} + \overline{\alpha_{11}}\alpha_{12}) \\
 &= 4\sqrt{3}|A|^2
 \end{aligned}$$

como $a = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$ de (**) obtenemos que $|a|^2 = 16 \cdot 3|A|^2|B|^2$, entonces de la matriz de conformalidad obtenemos

$$\begin{aligned}\rho^2(z) &= \frac{\frac{12}{\sqrt{3}}|A|^2(|z|^2 + \frac{|B|^2}{|A|^2})}{16 \cdot 3|A|^2|B|^2|z^6 - 1|} \\ &= \frac{(|z|^2 + \frac{|B|^2}{|A|^2})}{4\sqrt{3}|B|^2|z^6 - 1|}\end{aligned}$$

Dado que:

$$\log \rho^2(z) = \log(|z|^2 + \frac{|B|^2}{|A|^2}) - \log(4\sqrt{3}|B|^2) - \frac{1}{2} \log(z^6 - 1) - \frac{1}{2} \log(\bar{z}^6 - 1)$$

entonces

$$\begin{aligned}\partial \bar{\partial} \log \rho^2(z) &= \partial \bar{\partial} \log(|z|^2 + \frac{|B|^2}{|A|^2}) \\ &= \partial \left(\frac{z}{|z|^2 + \frac{|B|^2}{|A|^2}} \right) \\ &= \frac{|z|^2 + \frac{|B|^2}{|A|^2} - z\bar{z}}{(|z|^2 + \frac{|B|^2}{|A|^2})^2} \\ &= \frac{\frac{|A|^2}{|B|^2}}{(|z|^2 + \frac{|B|^2}{|A|^2})^2}\end{aligned}$$

y nuestra función curvatura toma la forma:

$$\begin{aligned}\kappa(z) &= -\frac{1}{8} \frac{\partial \bar{\partial} \log \rho^2(z)}{\rho^2(z)} \\ &= -\frac{1}{8} \frac{\frac{\frac{|A|^2}{|B|^2}}{(|z|^2 + \frac{|B|^2}{|A|^2})^2}}{\frac{|z|^2 + \frac{|B|^2}{|A|^2}}{4\sqrt{3}|B|^2|z^6 - 1|}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}|A|^2|z^6 - 1|}{2(|z|^2 + \frac{|B|^2}{|A|^2})^3}\end{aligned}$$

El automorfismo $f : C \rightarrow C, f(z, y) = (\frac{1}{z}, \frac{iy}{z^3})$ es una isometría de C , y como la involución es otra isometría de C , entonces f desciende a \mathbb{CP}^1 e induce el

automorfismo $T : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1, T(z) = \frac{1}{z}$. Esto hace ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & C \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ \mathbb{CP}^1 & \xrightarrow{T} & \mathbb{CP}^1 \end{array}$$

Tomamos en \mathbb{CP}^1 un abierto U tal que no contenga las raíces de la unidad de $z^6 - 1$ y tal que $\pi^{-1}(U) = U_1 \cup U_2$ (unión ajena) y $\pi|_{U_j} : U_j \rightarrow U$, para $j = 1, 2$ es un biholomorfismo local. Tomamos $T : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1, T(z) = \frac{1}{z}$, tenemos que el abierto $V = T(U)$ no contiene las raíces de la unidad y $\pi^{-1}(V) = V_1 \cup V_2$ (unión ajena), $\pi|_{V_j} : V_j \rightarrow V$ es un biholomorfismo local. Restringimos la métrica Teta \langle, \rangle_Θ , al abierto U_1 y como $\pi|_{U_1} : U_1 \rightarrow U$ y $\pi|_{V_1} : V_1 \rightarrow V$ son biholomorfismos locales, entonces

$$T|_U = \pi|_{V_1} \circ f \circ \pi|_{U_1}^{-1} : U \rightarrow V$$

es una isometría en la métrica $\pi_*(\langle, \rangle_\Theta)$. Como f deja invariante la función curvatura K de C , deducimos que T deja invariante la función κ , en otras palabras

$$\kappa(z) = \kappa\left(\frac{1}{z}\right)$$

entonces

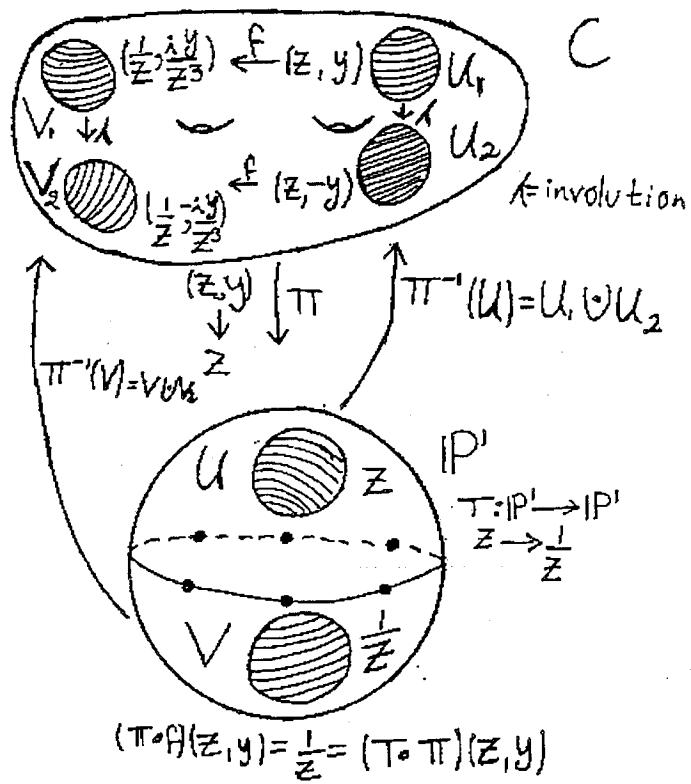
$$\kappa(z) = -\frac{\sqrt{3}|A|^2|z^6 - 1|}{2(|z|^2 + \frac{|B|^2}{|A|^2})^3} = \kappa\left(\frac{1}{z}\right)$$

y deducimos que $\frac{|B|^2}{|A|^2} = 1$, entonces tenemos que

$$\kappa(z) = -\frac{\sqrt{3}|A|^2|z^6 - 1|}{2(|z|^2 + 1)^3}$$

■

La siguiente figura muestra como desciende f a \mathbb{CP}^1 .



Apéndice II

En este apéndice calculamos el resto de los puntos críticos de la función κ del ejemplo 6.2

Para encontrar el resto de los puntos críticos usamos coordenadas polares $z = re^{i\theta}$. Tenemos que

$$\kappa^2(z) = \kappa^2(r, \theta) = (\delta)^2 \frac{r^{12} - 2r^6 \cos(6\theta) + 1}{(r^2 + 1)^6}.$$

De aquí vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{\partial \kappa^2(r, \theta)}{\partial r} &= \frac{12r^{11} - 12r^5 \cos(6\theta)}{(r^2 + 1)^6} - \frac{12r(r^{12} - 2r^6 \cos(6\theta) + 1)}{(r^2 + 1)^7} \\ \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{\partial \kappa^2(r, \theta)}{\partial \theta} &= \frac{12r^6 \sin(6\theta)}{(r^2 + 1)^6} \end{aligned}$$

Al resolver este sistema en las variables (r, θ) y pasar a números complejos tenemos que las raíces de $d\kappa^2 = 0$ son las raíces de la unidad de $z^6 - 1, 0$, y los puntos $(1, \theta)$ donde $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{6}$, $k = 0, 1, \dots, 5$. Estos últimos números corresponden a $\beta_i = \zeta^{i-1} \beta_1$, donde $\zeta = e^{\frac{i\pi}{3}}$, $\beta_1 = e^{\frac{i\pi}{6}}$, $i = 1, 2, \dots, 6$. Los puntos β_i son las raíces sextas de $z^6 + 1$. Calculando segundas derivadas parciales tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2 \kappa^2}{\partial^2 z^2} &= \frac{30z^4(\bar{z}^6 - 1)}{(|z|^2 + 1)^6} - \frac{72z^5 \bar{z}(\bar{z}^6 - 1)}{(|z|^2 + 1)^7} + \frac{42\bar{z}^2 |z^6 - 1|^2}{(|z|^2 + 1)^8} \\ &= \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2 \kappa^2}{\partial^2 \bar{z}^2} \\ \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2 \kappa^2}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{36|z|^{10}}{(|z|^2 + 1)^6} - \frac{36(z^6 - 1)\bar{z}^6}{(|z|^2 + 1)^7} - \frac{6|z^6 - 1|^2 + 36z^6(\bar{z}^6 - 1)}{(|z|^2 + 1)^7} \\ &\quad + \frac{42|z|^2 |z^6 - 1|^2}{(|z|^2 + 1)^8} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \kappa^2}{\partial z^2} |_{\beta_i} &= \frac{12\beta_i^4 + 42\bar{\beta}_i^2}{2^6} \\ \frac{\partial^2 \kappa^2}{\partial z \partial \bar{z}} |_{\beta_i} &= \frac{-6}{2^6} \end{aligned}$$

58

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \frac{\partial^2}{\partial^2 x^2} &= 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right), \\
 \frac{\partial^2}{\partial^2 y^2} &= 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right), \\
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),
 \end{aligned}$$

como $\beta_1^4 = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta_1^2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, por (*) tenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \kappa^2}{\partial x \partial y} \Big|_{\beta_1} &= \frac{60\sqrt{3}}{2^7}, \\
 \frac{\partial^2 \kappa^2}{\partial^2 x^2} \Big|_{\beta_1} &= \frac{9}{2^5}, \\
 \frac{\partial^2 \kappa^2}{\partial^2 y^2} \Big|_{\beta_1} &= \frac{-21}{2^5},
 \end{aligned}$$

esto nos hace ver que β_1 tiene índice de Morse +1. Como el índice se preserva bajo automorfismo, iterando el automorfismo $\varphi(z, y) = (\zeta z, y)$, tenemos que $(\beta_i, y) \rightarrow (\beta_{i+1}, y)$, entonces cada punto β_i tiene índice de Morse +1. ■

Apéndice III

En este apéndice damos una generalización del teorema 6.1.4 para el caso de genero $g > 2$.

El teorema 6.1.4 se puede generalizar de la siguiente manera: Si C es una superficie de Riemann compacta hiperelíptica de género g dada por $y^2 = f(x)$, donde $f(x) = (x - a) \cdot (x - a_2) \cdots (x - a_{2g+2})$ con todas sus raíces distintas, tomamos el punto de Weierstrass $p = (a, 0)$ y $g(x) = \prod_{j=2}^{2g+2} (x - a_j)$. En forma análoga al lema 6.1.2 vemos que existe un abierto V alrededor de a donde $z = (\frac{y}{\sqrt{g(x)}})$ es una coordenada local, y en esta coordenada obtenemos una base de diferenciales holomorfas

$$\{\alpha(z)dz, \alpha(z)z^2, \dots, \alpha(z)z^{2(g-1)}\}$$

donde $\alpha(z)$ es una función holomorfa con $\alpha(0) \neq 0$. Consideramos en $T_0J(C) = \mathbb{C}^g$ una métrica dada por una matriz hermitiana definida positiva $h = \{h_{ij}\}_{i,j=1,\dots,g}$, entonces en un abierto coordenado V de z tenemos que

$$\mu(z) = \left(\int_{p_0}^z \alpha(z), \int_{p_0}^z \alpha(z)z^2, \dots, \int_{p_0}^z (\alpha(z)z^{2(g-1)}) \right).$$

Si $u, v \in T_zC$, tenemos que $\mu^*h(u, v) = (\beta(z))u\bar{v}$ define una métrica hermitiana sobre T_zC , donde

$$\begin{aligned} \beta(z) = & h_{11} + h_{12}\overline{z^2} + h_{13}\overline{z^4} + \dots + h_{1g}\overline{z^{2(g-1)}} \\ & h_{21}z^2 + h_{22}z^2\overline{z^2} + h_{23}z^2\overline{z^4} + \dots + h_{2g}z^2\overline{z^{2(g-1)}} \\ & \vdots \\ & h_{g1}z^{2(g-1)} + h_{g2}z^{2(g-1)}\overline{z^2} + h_{g3}z^{2(g-1)}\overline{z^4} + \dots + h_{gg}z^{2(g-1)}\overline{z^{2(g-1)}} \end{aligned}$$

Notemos que $\beta(0) = h_{11} > 0$. De la expresión de β deducimos lo siguiente:

como $\frac{\partial \beta}{\partial z}$ y $\frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}}$ tienen términos en z y \bar{z} , resulta que

$$(6.1) \quad \frac{\partial \beta}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 = \frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}} \Big|_{z=0}$$

Además

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \Big|_{z=0} &= 2h_{12} \\ \frac{\partial^2 \beta}{\partial \bar{z}^2} \Big|_{z=0} &= 2h_{21} \end{aligned}$$

y

$$(6.3) \quad \frac{\partial^3 \beta}{\partial z^3} \Big|_{z=0} = \frac{\partial^3 \beta}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \Big|_{z=0} = \frac{\partial^3 \beta}{\partial z \partial \bar{z}^2} \Big|_{z=0} = \frac{\partial^3 \beta}{\partial \bar{z}^3} \Big|_{z=0} = 0$$

En la expresión de $\frac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial \bar{z}}$ el único término de orden uno tanto en z como en \bar{z} es $4h_{22}z\bar{z}$ los demás términos son de orden ≥ 4 en z y/o \bar{z} , entonces

$$(6.4) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial \bar{z}} \right) \Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial \bar{z}} \right) \Big|_{z=0} = \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(\frac{\partial \beta(z)}{\partial \bar{z}} \right) = 0$$

Por último se tiene que

$$(6.5) \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial \bar{z}} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial \bar{z}} \right) \Big|_{z=0} = 4h_{22}$$

Sea $r = \frac{-(h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12})}{2}$. Como

$$K(z) = \frac{-1}{8} \frac{\beta(z) \cdot \frac{\partial^2 \beta(z)}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\bar{\partial} \beta(z)}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \beta(z)}{\partial z}}{\gamma(z)}$$

donde $\gamma(z) = |\alpha(z)|^2 \beta(z)^3$ y $\gamma(0) > 0$. Es fácil ver que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} \Big|_{z=0} &= \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{z}^2} \Big|_{z=0} = 0, \text{ por (6.1), (6.3), (6.4)} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial z \partial \bar{z}} \Big|_{z=0} &= \frac{r}{\gamma(0)} < 0, \text{ por (6.2), (6.5)} \end{aligned}$$

Notemos que se obtiene el mismo hessiano que en el caso de género 2, por lo que el punto de Weierstrass $p = (a, 0)$ tiene índice de Morse +2. Al considerar una base de

homología simpléctica de C y la base normalizada $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g\}$ de diferenciales holomorfas de C , tenemos la matriz de periodos Z , $(a_{ij}) = (\text{Im} Z)^{-1}$. Tomamos alrededor del punto de Weierstrass $p = (a, 0)$ el cambio de base $\omega_j = \sum_{k=1}^g p_{kj} \eta_k$, donde $\eta_k = \alpha(z) z^{2(k-1)} dz$. De esta manera tenemos que alrededor de p

$$(\omega_1, \dots, \omega_g)(a_{ij}) \begin{pmatrix} \overline{\omega_1} \\ \overline{\omega_2} \\ \vdots \\ \overline{\omega_g} \end{pmatrix} = (\eta) P^t (\text{Im} Z)^{-1} \overline{P} \eta^t$$

donde P es la matriz de cambio de base y $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_g)$. Sea $h = P^t (\text{Im} Z)^{-1} \overline{P}$, entonces tenemos que los puntos de Weierstrass tienen índice de Morse $+2$. ■

Bibliografia

- [BE] Arthur L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer Verlag, 1987.
- [BO] Vladimir G. Boltyanski, *Optimization and convexity*, Lektion course in CIMAT. First version, 1994.
- [BT] Raoul Bott, Loring W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer Verlag, second edition, 1986.
- [CGGH] J. Carlson, M. Green, P. Griffiths and J. Harris, *Infinitesimal variations of Hodge structure(I)*, *Compositio Mathematica* 50 (1983), 109-205.
- [CH] Shiing-Shen Chern, *Complex manifolds without potential theory*, Springer Verlag, second edition, 1979.
- [FK] H. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, Springer Verlag, 1980.
- [GD] Claude Godbilon, *Éléments de Topologie Algébrique*, Herman, Paris, 1971.
- [GO] X. Gomez-Mont, *Meromorphic functions and cohomology on a Riemann surface, Lectures on Riemann surfaces*, editors Cornalba et al, World scientific, 1980.
- [GMV] M. Green, J. Murre, C. Voisin, *Algebraic Cycles and Hodge Theory*, Springer-Verlag, L.N.M 1594, 1994.
- [GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and Sons, 1994.
- [GU] R.C. Gunning, *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton University Press, 1966.
- [HJ] Lutz Habermann, Jürgen Jost, *Metrics on Riemann surfaces and the geometry of moduli spaces*, preprint.
- [LA] H. Blaine Lawson, Jr., *Lectures on minimal submanifolds, Vol I.*, Publish or Perish, Inc., 1980.
- [LB] H. Lange, C. Birkenhake, *Complex Abelian Varieties*, Springer Verlag, 1992.
- [LE] F. Leprévest, *Une caractérisation différentielle des points de Weierstrass généralisés d'une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$* , *J.Math.Pures Appl.* 76 (1997), 801-804.
- [L1] F. Lescure, *Une métrique hermitienne canonique sur les surfaces de Riemann de genre ≥ 1* , *C.R. Acad. Sc. Paris Serie A t. 281* (1975), 459-462.
- [L2] ———, *Une Caractérisation différentielle des points de Weierstrass hyperelliptiques*, *C.R. Acad. Sc. Paris Serie A t. 281* (1975), 1043-1045.
- [LW] J. Lewittes, *Differentials and metrics on Riemann Surfaces*, *Trans. of Am. Math Soc.* ? (1969), 311-318.
- [NE] A. Newlander, L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, *Ann. of Math.* 65 (1957), 391-404.
- [RH] Jhon A. Rhodes, *Sequences of metrics on compact Riemann surfaces*, *Duke mathematical Journal* 72, No.3 (1993), 725-738.
- [RO] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Second printing, 1972.
- [SCH] B. Schindler, *period matrix of hyperelliptic curves*, *manuscripta math.* 78 (1993), 369-380.
- [SP] D. Spring, *On the second derivate test for constrained local extrema*, *Am. Math. Monthly* 92 (1985), 631-643.
- [WE] Andre Weil, *Introduction à l'Étude des Variétés Kähleriennes*, Hermann and Cie, Paris, 1958.
- [WL] R.O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Springer-Verlag, 1979.

- [WN] R. Wentworth, *The Asymptotics of Arakelov-Green's function and Falting's Delta Invariants*, Commun.Math.Phys. **137** (1991), 427-459.
- [WO] S.C. Wolpert, *On obtaining a positive line bundle from the Weil-Peterson class*, Amer. J. Math **107** (1985), 1485-1507.