Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

CIMAT

Soluciones axiomáticas en juegos cooperativos: casos clásicos y aportaciones

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:

Francisco Sánchez Sánchez

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Vladimir Boltyanski

Mayo de 2000 Guanajuato, Gto. México

A LA MEMORIA DE MIS PADRES

A SUSY

A LA MEMORIA DE PEDRO URIBE

Soluciones axiomáticas en juegos cooperativos: casos clásicos y aportaciones

por

Francisco Sánchez Sánchez

Se agradece sinceramente el apoyo del CONACyT con la Cátedra Patrimonial Nivel II, 970038.

Sometido para satisfacer parcialmente los requerimientos para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

en el

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C.

Mayo 2000

Firma del autor .....
Francisco Sánchez Sánchez
Mayo 26, 2000

Certificado por .....
Dr. Vladimir Boltyanski
Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Director de Tesis

Certificado por .....
Dr. Luis Hernández Lamoneda
Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Sinodal de Tesis

Certificado por .....
Dr. Miguel Angel Moreles
Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Sinodal de Tesis

Certificado por .....
Dr. Leobardo Plata
Facultad de Economía, ITAM.
Sinodal de Tesis

Certificado por .....
Dr. Martín Puchet Anyul
Facultad de Economía, UNAM.
Sinodal de Tesis

Soluciones axiomáticas en juegos cooperativos: casos clásicos y aportaciones

por

Francisco Sánchez Sánchez

Resumen

La técnica que usualmente se utiliza en juegos cooperativos para determinar soluciones es la axiomatización y a dichas soluciones se les conoce como valores. Esta tesis inicia con la presentación de tres de los principales valores en juegos cooperativos: el valor de Shapley, el de Banzhaf y el de Shapley ponderado. Se continua con la presentación de tres aportaciones que se han hecho utilizando esta técnica.

La primera aportación es presentar la axiomatización de diversos valores lineales bajo un mismo esquema, ya que en la literatura de Teoría de Juegos se encuentra cada uno en un contexto particular. En la segunda se demuestra que todo valor que satisface el axioma de contribuciones balanceadas implícitamente es un valor de Shapley. Además se introducen ponderaciones a los jugadores para obtener el resultado correspondiente para el caso no simétrico. Este último resultado permite establecer la equivalencia entre el axioma de contribuciones balanceadas y una generalización del Valor de Shapley Ponderado, la cual a su vez sugiere una forma natural de definir el valor ponderado asociado a cualquier valor que satisfaga el axioma de contribuciones balanceadas, como es el caso del Valor de Banzhaf. Por último, para un vector de bienes α y v un juego que proporcione los costos de producción de cualquier subconjunto de coordenadas de α, se asigna un vector único de precios $P(v,\alpha)$ a cada pareja (v,α) en forma axiomática

Director de Tesis: Dr. Vladimir Boltyanski
Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Sinodal de Tesis: Dr. Luis Hernández Lamoneda
Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Sinodal de Tesis: Dr. Miguel Angel Moreles
Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Sinodal de Tesis: Dr. Leobardo Plata
Facultad de Economía, ITAM.

Sinodal de Tesis: Dr. Martín Puchet Anyul
Facultad de Economía, UNAM.

Indice

Capítulo 1

Introducción

El problema principal que se aborda en juegos cooperativos es la distribución de ganancias conjuntas o el reparto de costos comúnes. La única teoría que actualmente da una respuesta categórica a estos problemas es la de valores en juegos cooperativos. En ella se agrupan problemas (G), se definen soluciones concebibles (R) y se pide que una solución, un operador $\varphi : G \to R$, satisfaga un conjunto de axiomas que la determinen unívocamente.

El avance que se obtiene con esto es sustancial, se aceptan o se eliminan soluciones para toda una clase de problemas con sólo aceptar o no "simples" supuestos generales. Nótese además que se evita la discusión sobre las características que deba tener la solución de un problema específico.

Como ejemplos de esta técnica, L. S. Shapley axiomatiza en 1953 el valor que lleva su nombre; Lehrer en 1988 axiomatiza el índice de Banzhaf; Kalai y Samet el Valor de Shapley Ponderado en 1987 y en 1981, Dubey, Neyman y Weber caracterizan todos los semivalores sin eficiencia. Esta técnica ha sido particularmente efectiva al resolver problemas de distribución de beneficios conjuntos y en la distribución de costos comunes.

El modelo clásico para juegos cooperativos inicia con un conjunto finito de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$ y se considera una función

$$v : 2^N \to \mathbb{R}^N$$

tal que $v(\emptyset) = 0$, donde $v(S)$ representa la ganancia conjunta que consiguen los jugadores que

están en S, si juegan unidos (forman una coalición). Esta es la ganancia conjunta que debe ser repartida entre los jugadores en S y es con base en estas ganancias, variando S, que deben quedar determinadas las participaciones de los jugadores. Así, un juego es una pareja (N, v), a la que se le desea asignar un vector en $\mathbb{R}^N$ donde la i-ésima coordenada represente la ganancia asignada al jugador i en ese juego. Ahora, se define G como el conjunto de juegos con N fija y una solución como un operador

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^N$$

se prosigue estableciendo axiomas que se crea, φ deba satisfacer. Un valor es una solución que ha sido determinado unívocamente por un conjunto de axiomas.

El artículo de Shapley de 1953 ha impulsado una gran cantidad de nuevas investigaciones. Algunos de los trabajos recientes se han enfocado a la reformulación axiomática del Valor de Shapley porque consideran insatisfactorio uno o varios de sus axiomas; posiblemente el más atacado ha sido el axioma de aditividad. Otros se han ocupado del espacio de juegos. Como la interrelación de las soluciones de los juegos en G (a través de los axiomas) es la que determina el valor, al agrandar G no necesariamente existe valor en el espacio extendido, ni al reducirlo se preserva necesariamente la unicidad. Así, en aplicaciones donde el espacio de juegos "natural" no es G, se pierde un argumento para utilizar el Valor de Shapley. Myerson (1977) generaliza el Valor de Shapley y obtiene una solución que sólo depende del juego y sus subjuegos.

Entre las generalizaciones que se han dado, resalta por su importancia teórica la hecha por Aumann y Shapley en 1974, demostrando la existencia y la unicidad del valor para diferentes espacios de juegos con un continuo de jugadores. El libro de Aumann y Shapley por sí solo ha dado pie a una rama sumamente fértil de trabajos en Teoría de Juegos y en Economía teórica.

Por último, conviene mencionar la clase de trabajos que retoman la metodología de Shapley. Cuando se desea aplicar algún valor a un problema de otra disciplina, se vuelve necesaria la reinterpretación del significado de los axiomas y de los conceptos de Teoría de Juegos involucrados al lenguaje de la disciplina correspondiente. Esto ha motivado a diferentes autores, como el caso de Samet y Tauman (1982) o de Dubey (1982), a formular desde un inicio, el concepto de *valor* en la otra disciplina. Así, se reemplaza a G por el espacio de problemas que resulta

de variar los parámetros y/o la información que define al problema. Se define un espacio S de soluciones, y se establece un conjunto de axiomas en el lenguaje de la disciplina, que determinen en forma única al operador:

$$\varphi : G \to S.$$

En la sección 2 se presentan los conceptos básicos, definiciones y la axiomatización a la manera tradicional de tres valores: Valores de Shapley, Banzhaf y Shapley Ponderado. En la sección 3 se propone un enfoque común para axiomatizar valores lineales, el cual se utiliza en particular para generar los resultados mencionados en la sección 2. Se considera un espacio de juegos que forma un espacio vectorial, se utilizan axiomas complementarios para determinar el valor en una base del espacio vectorial y se aprovecha el hecho de que la linealidad determina el valor en todo el espacio. La importancia de tener bases comúnes radica en poder comparar los supuestos que determinan los valores al elegir alguno de ellos en aplicaciones particulares. Es importante mencionar que, en el enfoque tradicional, generalmente no se pide la linealidad como axioma, pero casi siempre se obtiene como propiedad.

En la sección 4 se obtienen algunos resultados interesantes al dar una interpretación diferente al juego. Supóngase que cada vez que se forma una coalición S, se utiliza el Valor de Banzhaf para distribuir su ganancia $v(S)$, entonces los jugadores deben suponer que ya no están jugando v, sino R^{φ}, donde $R^{\varphi}(S) = \sum_{i \in S} \varphi_i(v_S)$, ($v_S$ denota el subjuego que corresponde a la coalición S). Sorpresivamente, el Valor de Shapley $Sh(N, R^{\varphi})$ de este nuevo juego es igual al valor Banzhaf del juego original v. La sección 4 de la tesis, establece un resultado similar para todos los valores que satisfacen el axioma de contribuciones balanceadas. En la sección 5 se introducen pesos a los jugadores para obtener el resultado correspondiente para el caso no simétrico. Este último resultado permite establecer la equivalencia entre el axioma de contribuciones balanceadas y una generalización del Valor de Shapley Ponderado, la cual a su vez sugiere una forma natural de definir el valor ponderado asociado a cualquier valor que satisfaga el axioma de contribuciones balanceadas, como es el caso del Valor de Banzhaf.

En la última sección de la tesis se realiza una aplicación de esta técnica, al asignar un mecanismo de precios a un grupo de bienes que se ha producido en forma conjunta, estableciendo desde el inicio la teoría y los axiomas en un lenguaje económico. Considere un vector de bienes α cuyas coordenadas comparten costos de producción y supóngase dado un juego v, el cual

proporciona los costos de producción de cualquier subconjunto de coordenadas de α; el tercer objetivo de la tesis es asignar a cada pareja (v, α) un vector único de precios $P(v, \alpha)$ en forma axiomática. También se establecen algunas propiedades de $P(v, \alpha)$.

Antes de concluir esta introducción, cabe mencionar que las soluciones obtenidas con procedimientos axiomáticos son una alternativa en Economía para las obtenidas como equilibrios de libre mercado; sobre todo en situaciones naturales de oligopolio, como puede ser en los sectores eléctrico, transporte y comunicaciones, donde no se puede hablar de competencia perfecta.

La tesis concluye con un apéndice que contiene los programas en Maple para calcular el Valor de Shapley, el de Banzhaf, el de Shapley Ponderado y el vector de precios que se axiomatiza en la última se sección. Estos programas permiten el cálculo numérico y simbólico de cada uno de ellos.

Capítulo 2

Juegos cooperativos vía valores

En esta sección se presentan tres de los principales valores que aparecen en la literatura de Juegos Cooperativos. Cada uno establece una solución axiomática para cada juego cooperativo. En lo sucesivo $\mathbb{R}$ denota el conjunto de números reales y 2^N el conjunto potencia de N. Además, la cardinalidad de los conjuntos se denotará con la letra minúscula correspondiente, por ejemplo, $s = \mid S \mid$, $t = \mid T \mid$.

Definición 1 *Por un* juego en forma de función característica *(y en los sucesivo simplemente un* juego*) se entenderá una pareja (N, v), donde $N = \{1, \ldots, n\}$ es un conjunto finito de jugadores y v es una función $v : 2^N \to \mathbb{R}$ tal que $v(\emptyset) = 0$.*

A los subconjuntos S de N se les llama *coaliciones* y son subconjunto de jugadores que potencialmente pueden jugar unidos. Si los jugadores que forman S juegan unidos tienen una valía $v(S)$. Como ejemplo, las cantidades $v(S)$ pueden ser ganancias conjuntas, costos comúnes o simplemente 1 o 0 dependiendo de si la coalición S logra o no mayoría en una votación. De cualquier forma a $v(S)$, siempre lo consideraremos como un número real. A este tipo de juegos se les conoce como juegos en forma en forma de función característica con pagos laterales o transferibles.

Se supone que cada uno de los jugadores conoce la función v. Además, ellos negocian libremente para formar coaliciones. Si la coalición S se forma tiene una valía $v(S)$. Una coalición se considera formada no sólo cuando los jugadores que la constituyen han decidido jugar unidos, sino que también han acordado la forma de repartir la ganancia conjunta.

Claramente, los jugadores que pertenecen a coaliciones valiosas son valiosos en el juego, pero el problema es cuantificar esta valía. Se desea asignar a cada juego (N, v) un vector $x \in \mathbb{R}^n$ donde x_i sea o represente la valía "justa" del jugador i en el juego. Por esta razón, a cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$ se le llama vector de pago. Algunos conceptos de solución se limitan a asignar un conjunto de vectores de pago al juego. A grandes rasgos, este es el problema central que se aborda en este tipo de juegos.

2.1 Valor de Shapley

En 1953 Shapley enfoca el problema de la siguiente manera: forma el conjunto G de todos los juegos superaditivos[1] con n jugadores y define un operador

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^n$$

con lo que obtiene que cualquiera que éste sea, en menor o mayor medida resuelve todos los juegos en G y el problema de resolver todos los juegos en G lo cambia a seleccionar una "buena" φ. Para ello, pide que este operador satisfaga tres axiomas: simetría, aditividad, y un tercero que engloba eficiencia y nulidad, y demuestra que existe un único operador que los satisface. A continuación se presenta una variante de su trabajo.

Es fácil ver, que tanto el conjunto de juegos con espacio de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$, como el subconjunto de juegos superaditivos sobre el mismo espacio, forman un espacio vectorial sobre el campo de los números reales si se define la suma y el producto como sigue:

a) $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$ para todo $v, w \in G$

b) $(cv)(S) = cv(S)$ para todo $v \in G$ y $c \in \mathbb{R}$.

donde G denota a cualquiera de estos conjuntos, convención que se mantendrá a lo largo del trabajo.

Definición 2 *Se dirá que φ es aditivo si y sólo si $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ para toda $v, w \in G$.*

[1] Un juego v se dice que es superaditivo si y sólo si, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ para toda S y T en N tales que $S \cap T = \phi$.

Ahora considere un juego v y suponga que los jugadores intercambian papeles. Adicionalmente, suponga que cualquier grupo de jugadores logra la misma ganancia que la que conseguían en el juego original los jugadores a los que sustituyen. El axioma de simetría pide que el vector de pago asociado a este nuevo juego, sea la permutación correspondiente del vector de pago asociado al juego original; dicho brevemente, si los jugadores intercambian papeles, entonces deben intercambiar pagos. A continuación se precisa esta idea.

En lo sucesivo se denotará por: $\Theta = \{\theta \mid \theta : N \to N, \theta \text{ biyectiva}\}$ y por

$$\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}$$

Es decir Θ contiene todos los órdenes totales que se pueden definir sobre el conjunto N, o si se quiere, a todas las permutaciones de los n jugadores. Cada θ se interpretará como un intercambio de papeles en el juego, en particular el jugador i pasará a tomar el papel del jugador $\theta(i)$. A continuación se define formalmente el significado de las frases "formar un juego intercambiando papeles" y el de "intercambiar pagos".

Para cada pareja $(\theta, v) \in \Theta \times G$ se define un nuevo juego $\theta * v$ por:

$$(\theta * v)(S) = v(\theta(S))$$

y para cada pareja $(\theta, x) \in \Theta \times \mathbb{R}^n$ se define un nuevo vector en $\mathbb{R}^n, \theta * x$ donde su i-ésima coordenada esta dada por: $(\theta * x)_i = x_{\theta(i)}$.

Estas definiciones se pueden interpretar como sigue: para $(\theta, v) \in \Theta \times G$ dado, se desea que $\theta * v$ represente el juego después de que los jugadores hayan intercambiando papeles de acuerdo a θ, como los jugadores en S suplantan a los que están en $\theta(S)$, entonces lo que debe poder conseguir S en $\theta * v$ es lo que podía conseguir $\theta(S)$ en v, es decir, $(\theta * v)(S) = v((\theta(S))$. Ahora, el pago que recibe el jugador i con $\theta * x$ es el que recibía $\theta(i)$ con x.

Definición 3 *Se dirá que φ satisface simetría si y sólo si $\varphi(\theta * v) = \theta * \varphi(v)$ para todo $(\theta, v) \in \Theta \times G$.*

Es decir, la solución φ es simétrica si y sólo si para cualquier $(\theta, v) \in \Theta \times G$, el monto que le asigna φ a cada jugador i en $\theta * v$ (éste es $\varphi_i(\theta * v)$) es el mismo que el que φ le asigna al

jugador que suplanta en v (es decir $\varphi_{\theta(i)}(v)$).

Definición 4 *Se dirá que φ es eficiente si y sólo si $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$ para todo $v \in G$.*

En otras palabras, el monto $\varphi v(N) = \sum_{i \in N} \varphi_i(v)$ que se reparte entre todos los jugadores bajo φ es exactamente el monto $v(N)$ que puede conseguir la gran coalición.

Definición 5 *Se dirá que i es un jugador nulo en v si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para toda $S \subseteq N$.*

Definición 6 *Se dirá que φ satisface nulidad si y sólo si $\varphi_i(v) = 0$ cuando i es un jugador nulo en v.*

Alguien que sólo juegue el papel de observador del juego, debe ser excluido de la repartición.

Teorema 1 *(Shapley, 1953). Existe un único operador $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ que satisface aditividad, eficiencia, nulidad y simetría y está dado por:*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

A este operador se le conoce como el Valor de Shapley.

Demostración.

a) Existencia: Basta demostrar que la solución propuesta satisface los cuatro axiomas anteriores. Aquí sólo se demuestra que satisface el axioma de simetría, los otros se dejan como ejercicio al lector. Hay que demostrar que si φ es la solución dada en el teorema, entonces $\varphi(\theta * v) = \theta * \varphi(v)$ para todo $(\theta, v) \in \Theta \times G$. Sean θ y v arbitrarias y supóngase además que $\theta(i) = j$; entonces,

$$(\theta * \varphi(v))_i = \varphi_{\theta(i)}(v) = \varphi_j(v) =$$

$$= \sum_{S \subseteq N \setminus \{j\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup \{j\}) - v(S)] =$$

$$= \sum_{\theta(S) \subseteq N \setminus \{j\}} \frac{\mid \theta(S) \mid!(n- \mid \theta(S) \mid -1)!}{n!}[v(\theta(S) \cup \theta\{i\}) - v(\theta(S))]$$

$$= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} [\theta * v(S \cup \{i\}) - \theta * v(S)]$$

$$= \varphi_i(\theta * v).$$

b) Unicidad: G es un espacio vectorial de dimensión $2^n - 1$. Es fácil ver que si:

$$u_R(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \subseteq S \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases}$$

entonces $\mathcal{B} = \{u_R \mid R \subseteq N, R \neq \phi\}$ es una base para G.

Así, para cualquier juego dado v, existen $\delta_R \in \mathbb{R}$ únicos tales que

$$v = \sum_{\{R \mid \emptyset \neq R \subseteq N\}} \delta_R u_R$$

Sea φ cualquier Valor de Shapley entonces, por aditividad

$$\varphi(v) = \sum_{\{R \mid \emptyset \neq R \subseteq N\}} \varphi(\delta_R u_R)$$

Así, si el Valor de Shapley para cada $\delta_R u_R$ es único, el de v también lo será y se habrá terminado la demostración.

Para demostrar la unicidad del Valor de Shapley para $\delta_R u_R$ nótese que:

a) Si $i \notin R$ entonces i es un jugador nulo en u_R.

b) $(\delta_R u_R)(N) = \delta_R$.

c) Si $i, j \in R$ y θ es tal que $\theta(i) = j$ y $\theta(R) = R$, entonces, por el axioma de simetría:

$$\varphi_i(\theta * u_R) = \varphi_{\theta(i)}(u_R) = \varphi_j(u_R)$$

y como $u_R = \theta * u_R$ por la forma particular en que se tomó θ

$$\varphi_i(\theta * u_R) = \varphi_i(u_R)$$

de donde:

$$\varphi_i(u_R) = \varphi_j(u_R)$$

Con esto, si φ satisface los últimos 3 axiomas, el único valor posible para $\delta_R u_R$ es:

$$\varphi_i(\delta_R u_R) = \begin{cases} \delta_R / \mid R \mid & \text{si } i \in R \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad \blacksquare$$

La solución $\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$ es un "compromiso razonable" para cada uno de los jugadores. Para comprender mejor su significado, considere el siguiente proceso aleatorio:

a) Se elige la cardinalidad de una coalición que no contenga al jugador i de acuerdo a una distribución uniforme sobre el conjunto $\{0, \ldots, n-1\}$.

b) Se elige aleatoriamente una coalición S con la cardinalidad dada en a), de acuerdo a una distribución uniforme sobre las $\binom{n-1}{s}$ coaliciones disponibles.

c) Se le da al jugador i la utilidad marginal que aporta a $v(N)$ al incorporarse a S, es decir, $v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

entonces, $\varphi_i(v)$ es el pago esperado para el jugador i en este proceso.

Otra expresión para $\varphi_i(v)$ es:

$$\varphi_i(v) = 1/n!(\sum_{\mathcal{R}} (v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}))$$

donde $\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}$ es el conjunto de jugadores que preceden a i en el orden $\mathcal{R}$. Para ver que estas expresiones son iguales, sólo hay que notar que

$$\mid \{\mathcal{R} \mid \mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} = S\} \mid = s!(n-s-1)!$$

Con esta expresión, si se elige al azar un orden $\mathcal{R}$ de N con una distribución uniforme sobre los $n!$ órdenes posibles y se le da al jugador i la utilidad marginal que aporta a $v(N)$ cuando se incorpora a los jugadores que lo preceden, $(v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - v(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}))$, entonces, $\varphi_i(v)$ es el pago

esperado que obtiene i.

2.2 Valor de Banzhaf

Otro de los valores que por varios años se trató de axiomatizar es el Valor de Banzhaf. Owen (1982) propone una axiomatización que no lo determina unívocamente. Dubey y Shapley (1979) establecen algunas de sus propiedades. La axiomatización que se presenta en esta sección se debe a Lehrer (1988).

En esta sección se denotará por G al conjunto de todos los juegos, aún variando el número de jugadores y por G_S al conjunto de los juegos simples.

Definición 7 *Para $T \subseteq N$, con $\mid N \mid = n$, el juego T-unanimidad, denotado por u_T^n, se define por $u_T^n(S) = 1$ si $T \subseteq S$ y $u_T^n(S) = 0$ de otra forma.*

Definición 8 *Para $T \subseteq N$ y $k \leq \mid T \mid$, el juego k-T simétrico, denotado por w_T^k, se define por:*

$$w_T^{k,n}(R) = \begin{cases} 1 & si \mid T \cap R \mid \geq k \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

Para cada coalición $T \subseteq N$ se deriva un juego v_T amalgamando los jugadores de T en uno solo; a este jugador se le llamará T'. El espacio de jugadores para v_T es $N \backslash T \cup \{T'\}$, y se define por:

$$v_T(S) = v(S)$$

$$v_T(S \cup \{T'\}) = v(S \cup T)$$

donde $S \subseteq N \backslash T$.

Definición 9 *Se dirá que φ satisface el axioma de reducción si y sólo si $\phi_i(v) + \phi_j(v) \leq \phi_{T'}(v_T)$ para cualquier coalición $T = \{i, j\}$ de dos jugadores.*

El axioma de reducción establece que para cualquier coalición de dos jugadores $T = \{i, j\}$ la suma de los valores de i y j en el juego original es menor o igual al valor de T' en el nuevo

juego. Si ϕ satisface este axioma, amalgamar cualesquiera dos jugadores es productivo para ellos. El Valor de Banzhaf para el jugador i correspondiente al juego v con n jugadores es el siguiente:

$$\phi_i(v) = 1/2^{n-1} \sum_{S \subseteq N} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

En un juego simple, el Valor de Banzhaf del jugador i, es el número de coaliciones perdedoras que se vuelven ganadoras cuando se les incorpora el jugador i, dividido entre el número de coaliciones que no lo contienen (incluyendo al vacío), con el fin de que el valor quede entre 0 y 1. La expresión anterior es una forma de generalizar esta idea.

Lema 2 *Si ϕ es el Valor de Banzhaf, entonces $\phi_i(v) + \phi_j(v) = \phi_{T'}(v_T)$ para toda coalición $T = \{i, j\}$.*

Demostración.

$$2^{n-1}(\phi_i(v) + \phi_j(v)) = \sum_{S \subseteq N} [v(S \cup \{i\}) - v(S)] + \sum_{S \subseteq N} [v(S \cup \{j\}) - v(S)] =$$

$$= \sum_{S \subseteq N \backslash \{i,j\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S) + v(S \cup \{i,j\}) - v(S \cup \{j\})] +$$

$$+ \sum_{S \subseteq N \backslash \{i,j\}} [v(S \cup \{j\}) - v(S) + v(S \cup \{i,j\}) - v(S \cup \{i\})]$$

$$= 2 \sum_{S \subseteq N \backslash \{i,j\}} [v(S \cup \{i,j\}) - v(S)] = 22^{n-2} \phi_{T'}(v_T). \blacksquare$$

Teorema 3 *(Lehrer). ϕ satisface los axiomas de nulidad, simetría, linealidad y reducción si y sólo si ϕ es el Valor de Banzhaf en G.*

Demostración. La existencia nuevamente se demuestra exhibiendo que el Valor de Banzhaf satisface los axiomas mencionados; en particular, el lema anterior demuestra que el axioma de reducción se satisface, los tres restantes se dejan como ejercicio al lector. La unicidad se demuestra primero para juegos de unanimidad, usando un proceso doble de inducción en forma simultánea: primero sobre el número de jugadores y en seguida sobre el número de jugadores no nulos en el juego de unanimidad.

Supóngase que ϕ a sido determinada para juegos simples con n jugadores y sobre juegos del tipo u_T^{n+1} donde $\mid T \mid \leq k$, es decir $\phi(u_T^{n+1}) = 1/2^{t-1}$, con $\mid T \mid = t$. Sea T arbitrario tal que $\mid T \mid = k+1$, como:

a) $(t-1)u_T^{n+1} + w_T^{k,n+1} = \sum_{\{R|R\subseteq T,|R|=k\}} u_R^{n+1}$

b) por nulidad y simetría

$$\phi_i(u_T^{n+1}) = \begin{cases} a & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \notin T \end{cases}$$

c) por nulidad y simetría

$$\phi_i(w_T^{k,n+1}) = \begin{cases} b & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \notin T \end{cases}$$

entonces, utilizando linealidad en (a) e hipótesis de inducción en su lado derecho:

$$ka + b = k/2^{k-1} \tag{2.1}$$

Ahora, sea $S = \{i, j\}$ con $i, j \in T$, amalgamando i y j en u_T^{n+1} se obtiene por (a) y por aditividad que:

$$\phi_i(u_T^{n+1}) + \phi_j(u_T^{n+1}) = \phi_{S'}((u_T^{n+1})_S)$$

de donde, por el axioma de reducción se tiene:

$$2a \leq 1/2^{k-1} \tag{2.2}$$

mientras que si se amalgaman i y j en $w_T^{k,n+1}$, se obtiene el juego $\hat{\nu}$ dado por

$$\hat{\nu}(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } S' \in R \text{ y } k-2 \leq \mid (R\backslash\{S'\}) \cap T \mid \\ 0 & \text{si } i \notin T \end{cases}$$

con espacio de jugadores $N\backslash\{i,j\} \cup \{S'\}$.

Por hipótesis de inducción $\phi_{S'}(v) = k/2^{k-1}$ y nuevamente por el axioma de reducción:

$$2b \leq k/2^{k-1} \tag{2.3}$$

de (4.4), (4.5) y (4.6) se obtiene:

$$ka + b \leq k/2^k + k/2^k = k/2^{k-1} \tag{2.4}$$

comparando con (4.4) se obtiene que las desigualdades en (4.6) y (4.7) se deben satisfacer como igualdades. En particular

$$a = 1/2^k = \phi_i(u_T^{n+1}).$$

La extensión de la unicidad del valor a todo G se hace en la misma forma que como se hizo con el Valor de Shapley. ■

2.3 Valor de Shapley Ponderado

Uno de los principales axiomas que caracterizan el Valor de Shapley es el de simetría. La motivación que subyace para usar este axioma es el supuesto de que excepto por los parámetros del juego, los jugadores deben ser completamente simétricos. Por ejemplo, en el juego (N, v), donde $N = \{1, 2\}$ y $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0$, $v(\{1, 2\}) = 1$, el suponer simetría en el papel de los jugadores conduce a la solución $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Sin embargo la falta de simetría puede darse por ejemplo,

a) Se requiere un esfuerzo mayor por parte de alguno de los jugadores.

b) Un jugador puede representar a muchos agentes mientras que el otro sólo a pocos.

c) Los jugadores tienen diferentes habilidades.

d) Se pueden construir problemas de asignación de costos sin esta simetría.

Para corregir la distribución de las ganancias cuando se carezca de esta simetría, el Valor de Shapley Ponderado considera un vector de ponderaciones para los jugadores dado externamente.

De hecho, modifica las soluciones de los juegos de la base usual y por medio de la linealidad determina la solución de los demás.

Definición 10 *Se dirá que v es monótono si y sólo si $v(S) \leq v(T)$ para S y T tales que $S \subseteq T$.*

Definición 11 *Se dirá que φ es positivo si y sólo si cuando v sea monótono se tiene que $\varphi(v) \geq 0$.*

Definición 12 *Se dirá que S es una coalición natural de socios en el juego v, si para cada $T \subset S$ $(T \neq S)$ y $R \subseteq N \backslash S$, $v(R \cup T) = v(R)$.*

Una coalición natural de socios se debe comportar como un solo individuo, ya que ninguna subcoalición propia tiene poder. En la siguiente definición $\varphi v(S)$ denota el real $\sum_{k \in S} \varphi_k(v)$.

Definición 13 *Se dirá que φ satisface el axioma de sociedad si cada vez que S es una coalición natural de socios en v se tiene que $\varphi_i(v) = \varphi_i(\varphi v(S) u_S)$ para todo $i \in S$.*

La interpretación de este axioma es la siguiente: se espera que cada coalición natural de socios juegue como un sólo individuo en v y negocie lo obtenido entre sus elementos en forma independiente.

Para cada $S \subseteq N$, el juego de unanimidad (N, u_S) se define como sigue: $u_S(T) = 1$ si $S \subseteq T$, y $u_S(T) = 0$ de otra forma.

Definición 14 *El Valor de Shapley Ponderado con un sistema de ponderación simple $w \in \mathbb{R}^N$, $w > 0$, es un mapeo lineal $Sh^w : G^N \to \mathbb{R}^N$ que asigna a cada juego de unanimidad u_S:*

$$Sh_i^w(N, u_S) = \begin{cases} w_i / w(S) & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$.

Los pesos son exógenos y deben ser determinados por consideraciones tales como la habilidad de los jugadores al negociar o experiencia pasada. Los axiomas no proveen sugerencia alguna de como deban ser.

Teorema 4 *(Kalai y Samet). Una solución φ satisface los axiomas de eficiencia, aditividad, positividad, nulidad y sociedad si y sólo si existe $w > 0$ tal que $\varphi \equiv Sh^w$.*

Capítulo 3

Valores lineales

En esta sección se propone un enfoque común para axiomatizar valores lineales. Considere el espacio vectorial G^N formado con todos juegos con N fijo, o si se desea sólo con los juegos superaditivos. Si la solución $\varphi : G^N \to \mathbb{R}^n$ es lineal, al determinar la solución en un conjunto de juegos que formen una base, la solución queda determinada. Así, se utilizan axiomas complementarios para determinar el valor en una base del espacio vectorial y se aprovecha la linealidad para determinar el valor en todo el espacio.

Una ventaja adicional en este enfoque, es que se tienen bases comúnes para la axiomatización de varios valores, lo que permite comparar los supuestos que los determinan al elegir alguno de ellos en aplicaciones particulares.

La linealidad de φ usualmente no se pide como axioma, sin embargo los principales valores resultan serlo.

Definición 15 *Se dirá que φ es lineal si y sólo si $\varphi(\alpha v + \beta\theta) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(\theta)$ para toda $v, \theta \in G$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Si $\{w_T \mid \emptyset \neq T \subseteq N\}$ es una base arbitraria para G entonces para cada v existen reales δ_T^v, $\emptyset \neq T \subseteq N$, tales que

$$v = \sum_T \delta_T^v w_T = A\delta^v$$

donde $a_{ST} = w_T(S)$ y por lo tanto:

$$\delta^v = A^{-1} v$$

Como φ es una solución lineal, se debe tener:

$$\varphi(v) = \varphi(\sum_T \delta_T^v w_T) = \sum_T \delta_T^v \varphi(w_T) = B\delta^v = BA^{-1}v$$

donde $b_{iT} = \varphi_i(w_T)$.

La base más comúnmente usada en teoría de juegos, y que se supondrá en lo sucesivo, es la formada por los juegos

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq S \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

para $\emptyset \neq T \subseteq N$.

Esto lleva a:

$$a_{ST} = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq S \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

$$b_{iT} = \varphi_i(u_T)$$

Nótese que A^{-1} no depende del juego y que cada columna de B es el valor del juego base correspondiente. Así, si los valores en la base están determinados, la linealidad determina el valor en todo el espacio. Aprovechando esta propiedad, cuando se requieran otros axiomas, bastaría exigir que se satisfagan en juegos de la forma u_T. A continuación se encuentra la matriz A^{-1} y posteriormente se analiza la matriz B.

Lema 5

$$\sum_{\{R|T\subseteq R\subseteq S\}} (-1)^{r+t} = \begin{cases} 1 & \textit{si } T = S \\ 0 & \textit{de otra forma} \end{cases}$$

Demostración. La demostración es directa si T no está contenido en S o si $S = T$. Supóngase $T \subset S$, entonces

a) Si $T \cup \{i\} = S$, R toma los valores T y $T \cup \{i\}$ de donde

$$(-1)^{t+t} + (-1)^{t+t+1} = 0$$

b) Supóngase que para cualesquiera S y T tales $T \cup \{i_1, \ldots, i_k\} = S$ se tiene que $\sum_{\{R|T\subseteq R\subseteq S\}} (-1)^{r+t} = 0$.

c) Sean S y T tales que $T \cup \{i_1, \ldots, i_{k+1}\} = S$, entonces

$$\sum_{\{R|T\subseteq R\subseteq S\}} (-1)^{r+t} = \sum_{\{R|T\subseteq R\subseteq S, i_{k+1}\in R\}} (-1)^{r+t} + \sum_{\{R|T\subseteq R\subseteq S, i_{k+1}\notin R\}} (-1)^{r+t} =$$

$$= \sum_{\{R|T\cup\{i_{k+1}\}\subseteq R\subseteq S\}} (-1)^{r+t} + \sum_{\{R|T\subseteq R\subseteq S\setminus\{i_{k+1}\}\}} (-1)^{r+t} = 0. \blacksquare$$

Lema 6 *Si a_{ST}^{-1} denota una entrada de la matriz A^{-1}, entonces $a_{ST}^{-1} = (-1)^{s+t} a_{ST}$.*

Demostración. Si $D = AA^{-1}$, entonces

$$d_{ST} = \sum_R a_{SR} a_{RT}^{-1} = \sum_R (-1)^{r+t} a_{SR} a_{RT} = \sum_{\{R|T\subseteq R\subseteq S\}} (-1)^{r+t}$$

y por el lema anterior $D = I$. $\blacksquare$

Hasta aquí, con sólo pedir linealidad, se tiene que, $\varphi(v) = BA^{-1}v$, donde ya se ha caracterizado completamente A^{-1}. En lo sucesivo, se van a trabajar diferentes conjuntos de axiomas para hacer lo propio con B.

3.1 Linealidad, simetría y nulidad

El siguiente lema asegura que el pago al jugador $i \in R$, en u_R, con una solución que satisface los axiomas de simetría y nulidad, depende sólo de la cardinalidad de R.

Lema 7 *Si φ es una solución simétrica que satisface el axioma de nulidad entonces*

a) $\varphi_i(u_R) = \varphi_j(u_T)$ *para todo* $i \in R$ *y* $j \in T$, *si* $|R| = |T|$

b) $\varphi_i(u_R) = 0$, *si* $i \notin R$.

Demostración. Supóngase φ una solución con las características del lema. Para $i, j \in R$, y θ definida por: $\theta(i) = j, \theta(j) = i$ y $\theta(k) = k$ para $k \neq i, j$, se tiene que $\theta * u_R = u_R$ y por simetría

$$\varphi(u_R) = \varphi(\theta * u_R) = \theta * \varphi(u_R)$$

es decir

$$\varphi_i(u_R) = \varphi_{\theta(i)}(u_R) = \varphi_j(u_R)$$

Además, si $i \not\in R$, i es un jugador nulo en u_R y por el axioma de nulidad $\varphi_i(u_R) = 0$. Con esto, $\varphi_i(u_R)$ debe ser de la forma:

$$\varphi_i(u_R) = \begin{cases} q_R & \text{si } i \in R \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Ahora si S y T son tales que $s = t$ y θ es tal que $\theta(S) = T$ entonces $\theta * u_T = u_S$ y $\varphi(u_S) = \varphi(\theta * u_T) = \theta * \varphi(u_T)$, esto es, si $i \in S$ y $\theta(i) = j$ entonces $j \in T$ y

$$q_S = \varphi_j(u_S) = \varphi_i(u_T) = q_T. \blacksquare$$

El pago común que recibe cada jugador de S, en u_S, cuando $\mid S \mid = r$ se denotará por q_r.

Dubey, Neyman y Weber[1981] caracterizan a todos los valores sin eficiencia con un teorema similar al que sigue (sólo piden aditividad en lugar de linealidad), sin embargo la demostración que presentan es mucho más complicada que la que se presenta aquí. Cabe mencionar que ellos llaman a estos operadores semivalores, porque no están totalmente determinados.

Teorema 8 *La solución φ satisface los axiomas de linealidad, simetría y nulidad si y sólo si*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_{s+1}(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

donde:

$$p_s = \sum_{\{T \mid S \subseteq T\}} (-1)^{t+s} q_t = \sum_{t=s}^{n} (-1)^{t+s} \binom{n-s}{t-s} q_t$$

para $s = 1, \ldots, n$.

Antes de entrar en la demostración, nótese que la última ecuación puede escribirse matricialmente como: $p = Mq$ donde

$$m_{st} = \begin{cases} (-1)^{t+s}\binom{n-s}{t-s} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y además[1]

$$m_{st}^{-1} = \begin{cases} \binom{n-t}{r-t} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Así, al ser M no singular, dado q queda determinado p y viceversa.

Demostración. Supóngase φ con las características del teorema, entonces por el lema anterior φ determina q, la cual a su vez determina p. Ahora, sea $C = BA^{-1}$, entonces

$$c_{iS} = \sum_T b_{iT} a_{TS}^{-1} = \sum_{\{T \mid S \subseteq T\}} (-1)^{t+s} b_{iT} =$$

Ahora bien, si $i \in S$

$$c_{iS} = \sum_{\{T \mid S \subseteq T\}} (-1)^{t+s} q_t = p_s$$

y si $i \notin S$

$$c_{iS} = \sum_{\{T \mid (S \cup \{i\}) \subseteq T\}} (-1)^{t+s} q_t$$

haciendo el cambio de variable $R = S \cup \{i\}$ se obtiene:

$$= - \sum_{\{T \mid R \subseteq T\}} (-1)^{t+r} q_t = -p_{s+1}$$

[1] Se desprende del hecho de que:

$$\sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-k}{m} \binom{n}{k} = 0$$

ver por ejemplo, Riordan (1978) pág. 15.

Como $\varphi(v) = BA^{-1}v$ se tiene que:

$$\varphi_i(v) = \sum_S c_{iS}v(S) = \sum_{T\ni i} c_{iT}v(T) + \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} c_{iS}v(S) =$$

$$= \sum_{T\ni i} p_t v(T) - \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} p_{s+1}v(S)$$

y haciendo $S = T\setminus\{i\}$ en el primer término:

$$= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} p_{s+1}v(S\cup\{i\}) - \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} p_{s+1}v(S) =$$

$$= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} p_{s+1}(v(S\cup\{i\}) - v(S))$$

Es fácil ver que la φ dada en el teorema es lineal, simétrica y satisface el axioma de nulidad. ■

Lema 9 *Si $q_t = 1/t$ entonces $p_s = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$.*

Demostración. Por inducción matemática sobre la diferencia $n-s$. Para $s = n$, la demostración es directa. Supóngase que la aserción es válida para S con $s = k+1, \ldots, n$. Entonces si $|S| = k$ y $l \notin S$,

$$\sum_{\{T|S\subseteq T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t} = \sum_{\{T|S\subseteq T, l\notin T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t} + \sum_{\{T|S\subseteq T, l\in T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t}$$

$$= \sum_{\{T|S\subseteq T\subseteq N\setminus\{l\}\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t} + \sum_{\{T|(S\cup\{l\})\subseteq T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t}$$

$$= \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)!} - \frac{s!(n-s-1)!}{n!} = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}. \blacksquare$$

Lema 10 *Si $q_t = 1/2^{t-1}$ entonces $p_s = \frac{1}{2^{n-1}}$*

Demostración. Nuevamente por inducción sobre $n-s$, si $s = n$, entonces independientemente del valor de n, el único término en la suma es con $T = N$ y la ecuación se satisface. Si S es tal

que $s = n-k$ y $l \notin S$ entonces

$$\sum_{\{T|S\subseteq T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{2^{t-1}} = \sum_{\{T|S\subseteq T\subseteq N\setminus\{l\}\}} \frac{(-1)^{t+s}}{2^{t-1}} + \sum_{\{T|S\cup\{l\}\subseteq T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{2^{t-1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}. \blacksquare$$

Corolario 11 *Si φ es una solución lineal entonces con la sucesión $\{q_t\}$ dada en el lema 2, se tiene que:*

a) *Si $q_t = 1/t$ entonces φ es el Valor de Shapley.*

b) *Si $q_t = 1/2^{t-1}$ entonces φ es el Valor de Banzhaf.*

Nótese que el axioma de eficiencia, el único de los axiomas que se utiliza en la demostración del Valor de Shapley y que no se menciona en el corolario anterior, determina $q_s = 1/s$.

3.2 Linealidad, simetría, nulidad y reducción

A continuación, aprovechando los resultados anteriores, se axiomatiza el Valor de Banzhaf de una manera relativamente sencilla.

Teorema 12 *Existe una única solución φ que satisface los axiomas de nulidad, simetría, linealidad, reducción y $q_1 = 1$. Esta solución es el Valor de Banzhaf.*

Demostración. La existencia nuevamente se demuestra exhibiendo que el Valor de Banzhaf satisface los axiomas mencionados. Supóngase un operador φ que satisface los cuatro axiomas mencionados en el teorema. Por el teorema 8 se tiene que:

$$\varphi_i(v) = \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} p^n_{s+1}(v(S\cup\{i\}) - v(S)) =$$

$$= \sum_{S\ni i} p^n_s v(S) - \sum_{S\not\ni i} p^n_{s+1}v(S)$$

$$\varphi_{T'}(v_T) = \sum_{\{S\subseteq N'|T'\in S\}} p^{n-1}_s v_T(S) - \sum_{\{S|T'\notin S\}} p^{n-1}_{s+1}v(S) =$$

$$= \sum_{\{S\subseteq N|\{i,j\}\subseteq S\}} p_{s-1}^{n-1} v(S) - \sum_{\{S|S\subseteq N\setminus\{i,j\}\}} p_{s+1}^{n-1} v(S)$$

así, $\varphi_i(v) + \varphi_j(v) \leq \varphi_{T'}(v_T)$, si y sólo si,

$$\sum_{S\ni i} p_s^n v(S) - \sum_{S\not\ni i} p_{s+1}^n v(S) + \sum_{S\ni j} p_s^n v(S) - \sum_{S\not\ni j} p_{s+1}^n v(S) \leq$$

$$\sum_{\{S|\{i,j\}\subseteq S\}} p_{s-1}^{n-1} v(S) - \sum_{\{S|S\subseteq N\setminus\{i,j\}\}} p_{s+1}^{n-1} v(S)$$

si y sólo si

$$\sum_{\{S|\{i,j\}\subseteq S\}} (2p_s^n - p_{s-1}^{n-1}) v(S) - \sum_{\{S|S\subseteq N\setminus\{i,j\}\}} (2p_{s+1}^n - p_{s+1}^{n-1}) v(S) +$$

$$\sum_{\{S|i\in S, j\notin S\}} (p_s^n - p_{s+1}^n) v(S) + \sum_{\{S|i\notin S, j\in S\}} (p_s^n - p_{s+1}^n) v(S) \leq 0$$

Nótese que en esta desigualdad se tiene uno y sólo un término por cada coalición. Así, debe suceder que:

$$2p_s^n = p_{s-1}^{n-1} \quad s = 2, .., n; \; n \geq 2$$

$$2p_{s+1}^n = p_{s+1}^{n-1} \quad s = 0, ..n-2; \; n \geq 2$$

$$p_s^n = p_{s+1}^n \quad s = 1, .., n-1; \; n \geq 2$$

de donde se desprende fácilmente que

$$p_s^n = \frac{1}{2^{n-1}} q_1 = \frac{1}{2^{n-1}}. \blacksquare$$

3.3 Linealidad, nulidad y sociedad

Ahora se verá, que básicamente con los axiomas de sociedad y nulidad se puede determinar la solución para los juegos en la base, que corresponden al Valor de Shapley Ponderado.

Lema 13 *Si S es una coalición natural de socios y $\delta = A^{-1}v$ entonces $\delta_T = 0$ si $S \not\subseteq T$ y $S \cap T \neq \emptyset$.*

Demostración. Supóngase que $S \not\subseteq T$ y $S \cap T \neq \emptyset$, entonces

$$\delta_T = \sum_{R\subseteq T} (-1)^{t+r} v(R)$$

ahora para $R \subseteq T$, sea $R_s = S \cap R$ y $R_t = R \cap (T\setminus S)$,

$$= \sum_{R_t\subseteq T\setminus S} \sum_{R_s\subseteq S\cap T} (-1)^{t+r_s+r_t} v(R_s \cup R_t)$$

$$= \sum_{R_t\subseteq T\setminus S} (-1)^{r_t} v(R_t) \sum_{R_s\subseteq S\cap T} (-1)^{t+r_s} = 0$$

por el lema 5. $\blacksquare$

Teorema 14 *φ es una solución lineal que satisface los axiomas de sociedad, nulidad y $\varphi(u_N) > 0$ si y sólo si existe w tal que φ es el Valor de Shapley Ponderado con sistema de ponderación simple w.*

Demostración. Sea φ una solución que satisfaga los axiomas mencionados en el teorema. Como N es una coalición natural de socios en u_N:

$$\varphi_i(u_N) = \varphi u_N(S) \varphi_i(u_S)$$

así, basta considerar $w_i = \varphi_i(u_N)$ y sustituir en la ecuación anterior para obtener para $\varphi_i(u_S) = w_i/w(S)$.

Para demostrar el teorema en la otra dirección, primero supóngase que el jugador i es un jugador nulo en v. Entonces

$$\varphi_i(v) = \sum_T \sum_S a_{ST}^{-1} v(T) = \sum_T \sum_{\{S|i\in S, S\subseteq T\}} \frac{w_i}{w(S)} (-1)^{s+t} v(T)$$

$$= \sum_{\{T|i\in T\}} \sum_{\{S|i\in S, S\subseteq T\}} \frac{w_i}{w(S)} (-1)^{s+t} v(T) +$$

$$\sum_{\{T|i\notin T\}} \sum_{\{S|i\in S, S\subseteq T\}} \frac{w_i}{w(S)} (-1)^{s+t} v(T)$$

$$= \sum_{\{T|i\notin T\}} \sum_{\{S|i\in S, S\subseteq T\}} \frac{w_i}{w(S)}(-1)^{s+t}[v(T\cup\{i\}) - v(T)] = 0.$$

Ahora, como el Valor de Shapley Ponderado es lineal, el axioma de sociedad se puede expresar como:

$$\frac{w_i}{w(S)}\chi_S' BA^{-1}v = B^i A^{-1}v$$

donde S es una coalición natural de socios que contiene al jugador i, $b_{jT} = \frac{w_j}{w(T)}$ si $j \in T$ y cero de otra forma, B^i el i-ésimo renglón de la matriz B y $\chi_S \in \mathbb{R}^n$ con su j-ésima coordenada igual a 1 o 0 dependiendo de si $j \in S$ o no. Denotando por $\delta = A^{-1}v$, la igualdad es equivalente a:

$$\chi_S' B\delta = \frac{w(S)}{w_i} B^i \delta$$

Ahora bien,

$$\chi_S' B\delta = \sum_{j\in S}\sum_{T\ni j} \frac{w_j}{w(T)}\delta_T = \sum_T \frac{w(S\cap T)}{w(T)}\delta_T$$

y

$$\frac{w(S)}{w_i} B^i\delta = \frac{w(S)}{w_i}\sum_{T\ni i}\frac{w_i}{w(T)}\delta_T = \sum_{T\ni i}\frac{w(S)}{w(T)}\delta_T$$

y aplicando el lema anterior se tiene que las dos últimas expresiones son iguales. ■

Capítulo 4

Contribuciones balanceadas

En esta sección se supondrá que el espacio de jugadores no esta fijo, se puede pensar que se tiene una población infinita de jugadores de donde se extrae un subconjunto finito $N = \{1, \ldots, n\}$ de ellos, los cuales a su vez negocian para formar coaliciones. No se asume que se forma la gran coalición. Por otro lado, si se desea se puede pensar que v es fija aunque arbitraria.

Dado un juego (N, v) y una coalición $S \subseteq N$, se denota por (S, v_S) al subjuego que se obtiene al restringir v a los subconjuntos de S; es decir, el dominio de la función v se restringe a 2^S.

Sea $\mathbb{R}^N$ el espacio Euclideano $|N|$-dimensional con coordenadas indexadas por los elementos de N.

Por simplicidad, se pensará que una solución es una regla que asigna a cada pareja (N, v) un vector en $\mathbb{R}^N$.

Definición 16 *Una solución φ es una regla que asocia a cada juego (N, v) un vector de pago $\varphi(N, v)$ en $\mathbb{R}^N$. Se escribirá $\varphi(S)$ para denotar $\varphi(S, v_S)$.*

Ahora supóngase que hay un acuerdo entre los jugadores para usar una solución φ para distribuir el beneficio cada vez que una coalición S se forme. Así, la coalición S ya no recibe $v(S)$, en su lugar recibe

$$R^\varphi(S) = \sum_{i\in S}\varphi_i(S, v_S).$$

Estas cantidades forman un juego (N, R^φ). Más aún, este es el juego que realmente se esta

jugando. Desde el momento en que los jugadores conocen la solución φ que se va a usar, deben considerar que al formar la coalición S van a recibir $R^\varphi(S)$ y no $v(S)$. Desde luego que si φ es eficiente $R^\varphi \equiv v$ pero este no siempre es el caso (bajo estos supuestos, la eficiencia pasa de ser un axioma a ser un requisito para tener consistencia teórica). La idea de este juego R^φ no aparece en la literatura y es una de las principales innovaciones de esta sección. Su importancia se aclara con los teoremas 15, 17 y 21.

Se denotará por G^N al conjunto de todos los juegos con el conjunto de jugadores N como su primera coordenada.

Con el fin de simplificar la notación se dirá que $\varphi(N,v) = (\varphi_i^N(N,v))_{i\in N} \in \mathbb{R}^N$ es la solución asociada a $(N,v) \in G^N$. También, para un juego fijo (N,v) y un subconjunto $S \subseteq N$, se escribirá $\varphi(S)$ en lugar de $\varphi(S, v_S)$.

En 1980, Myerson introduce el *axioma de contribuciones balanceadas.* El usa este axioma en una estructura diferente pero bajo el mismo espíritu. En este contexto, se dirá que una solución φ satisface el axioma de contribuciones balanceadas si para cualquier juego (N,v),

$$\varphi_i(S) - \varphi_i(S\backslash\{j\}) = \varphi_j(S) - \varphi_j(S\backslash\{i\})$$

para todo $\{i,j\} \subseteq S$ y cualquier subconjunto $S \subseteq N$ con al menos dos jugadores.

La idea detrás de este axioma es la siguiente: suponga que los jugadores están de acuerdo en usar la solución φ en cada coalición que se forme, para S formada, $\varphi_i(S) - \varphi_i(S\backslash\{j\})$ es el monto que el jugador i gana o pierde cuando el jugador j renuncia. El axioma de contribuciones balanceadas pide que estos montos sean simetricos con respecto a los jugadores.

Teorema 15 *Si la solución φ satisface el axioma de contribuciones balanceadas entonces $\varphi(S) = Sh(S, R_S^\varphi)$, donde R_S^φ es el subjuego de R^φ correspondiente a la coalición S.*

Demostración.

En la demostración de este teorema se usara el teorema 17. La demostración se hace por inducción sobre el numero de jugadores. Recuerde que $R^\varphi(S) = \sum_{i\in S}\varphi_i(S)$, así $\varphi_i(\{i\}) = R^\varphi(\{i\}) = Sh_i(\{i\}, R^\varphi_{\{i\}})$. Ahora, supóngase $\varphi_i(S\backslash\{k\}) = Sh_i(S\backslash\{k\}, R^\varphi_{S\backslash\{k\}})$ para $k \in S$. Así, por el teorema 17, φ satisface:

$$s\varphi_i(S) = R^\varphi(S) - R^\varphi(S\backslash\{i\}) + \sum_{k\in S\backslash\{i\}} \varphi_i(S\backslash\{k\})$$

$$= R^\varphi(S) - R^\varphi(S\backslash\{i\}) + \sum_{k\in S\backslash\{i\}} \sum_{T\subseteq S\backslash\{i,k\}} \frac{t!(s-1-t-1)!}{(s-1)!}(R^\varphi(T\cup\{i\}) - R^\varphi(T))$$

Nótese que cada termino correspondiente a un subconjunto propio de $S\backslash\{i\}$ se repite $(s-t-1)$ veces. Entonces,

$$= R^\varphi(S) - R^\varphi(S\backslash\{i\}) + \sum_{T\subseteq S\backslash\{i\}} \frac{t!(s-t-1)!}{(s-1)!}(R^\varphi(T\cup\{i\}) - R^\varphi(T))$$

de esta forma,

$$\varphi_i(S) = \sum_{T\subseteq S\backslash\{i\}} \frac{t!(s-t-1)!}{s!}(R^\varphi(T\cup\{i\}) - R^\varphi(T)). \blacksquare$$

El teorema 15 establece que si se usa un valor φ que satisfaga el axioma de contribuciones balanceadas se esta utilizando el Valor de Shapley del juego R^φ. En otras palabras, al usar φ para resolver v, realmente se esta usando el Valor de Shapley para resolver R^φ.

Comentarios:

a) En 1980, Myerson demostró que el axioma de contribuciones balanceadas y eficiencia caracterizan al Valor de Shapley. De esta forma, si φ verifica el axioma de contribuciones balanceadas y φ no es el Valor de Shapley entonces φ no es eficiente.

b) Los Valores de Shapley y Banzhaf satisfacen el axioma de contribuciones balanceadas. Además, para cualquier medida de probabilidad ξ en $[0,1]$ se pude definir un semivalor (el operador φ no queda totalmente determinado por los axiomas) de la siguiente forma

$$\psi_i(N,v) = \sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}} p^n_{s+1}[v(S\cup\{i\}) - v(S)], \text{ donde } p^n_s = \int_0^1 x^s(1-x)^{n-s-1}d\xi(x).$$

el cual satisface el axioma de contribuciones balanceadas. Es bien conocido que los valores de Banzhaf y de Shapley son casos particulares de estos valor asociados.

Lema 16 *Si*

$$\psi_i(N,v) = \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} p^n_{s+1}[v(S\cup\{i\}) - v(S)]$$

donde $p^s_t + p^s_{t+1} = p^{s-1}_t$ *para* $s \leq n$ *y* $t < s$ *entonces* ψ *satisface el axioma de contribuciones balanceadas.*

Demostración.

$$\psi_i(S,v_S) - \psi_j(S,v_S) =$$

$$= \sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{i\}\}} p^s_t v(T\cup\{i\}) - \sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{i\}\}} p^s_t v(T) - \sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{j\}\}} p^s_t v(T\cup\{j\}) + \sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{j\}\}} p^s_t v(T)$$

$$= \sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{i\},j\notin T\}} p^s_t v(T\cup\{i\}) - \sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{i\},j\notin T\}} p^s_t v(T) - \sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{j\},i\notin T\}} p^s_t v(T\cup\{j\}) +$$

$$+ \sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{j\},i\notin T\}} p^s_t v(T) + \sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{i\},j\in T\}} p^s_t v(T\cup\{i\}) - \sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{i\},j\in T\}} p^s_t v(T)$$

$$- \sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{j\},i\in T\}} p^s_t v(T\cup\{j\}) + \sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{j\},i\in T\}} p^s_t v(T)$$

$$= \sum_{\{T:T\subseteq (S\setminus\{j\})\setminus\{i\}\}} p^s_t v(T\cup\{i\}) - \sum_{\{T:T\subseteq (S\setminus\{i\})\setminus\{j\}\}} p^s_t v(T\cup\{j\})$$

$$- \sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{i\},j\in T\}} p^s_t v(T) + \sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{j\},i\in T\}} p^s_t v(T)$$

$$= \sum_{\{T:T\subseteq (S\setminus\{j\})\setminus\{i\}\}} (p^s_t + p^s_{t+1}) v(T\cup\{i\}) - \sum_{\{T:T\subseteq (S\setminus\{i\})\setminus\{j\}\}} (p^s_t + p^s_{t+1}) v(T\cup\{j\}).$$

Tomando en cuenta que, $p^s_t + p^s_{t+1} = p^{s-1}_t$ y sumando y restando $\sum_{\{T:T\subseteq S\setminus\{i,j\}\}} p^{s-1}_t v(T)$ se obtiene

$$\psi_i(S,v_S) - \psi_j(S,v_S) = \psi_i(S\setminus\{j\}, v_{S\setminus\{j\}}) - \psi_j(S\setminus\{i\}, v_{S\setminus\{i\}}). \blacksquare$$

Con el fin de ilustrar el resultado anterior, considere el juego tripersonal: $v(\{1\}) = 1$, $v(\{2\}) = 4$, $v(\{3\}) = 3$, $v(\{1,2\}) = 5$, $v(\{1,3\}) = 6$, $v(\{2,3\}) = 9$ y $v(\{1,2,3\}) = 10$. Si se usa el Valor de Banzhaf para resolver cada subjuego se obtiene la parte central de la siguiente tabla:

	$B(S,v_S)$			
S	1	2	3	$R^B(S)$
$\{1\}$	1	–	–	1
$\{2\}$	–	4	–	4
$\{3\}$	–	–	3	3
$\{1,2\}$	1	4	–	5
$\{1,3\}$	2	–	4	6
$\{2,3\}$	–	5	4	9
$\{1,2,3\}$	1.5	4.5	4.5	10.5

En el lado derecho se tienen los montos que se reparten en cada uno de ellos. En particular, el último renglón contiene los pagos a los jugadores si se usa el Valor de Banzhaf, pero estos coinciden con el Valor de Shapley del juego que se va formando en la última columna, esto es, $Sh(N,R^B) = (1.5, 4.5, 4.5)'$.

Capítulo 5

Contribuciones balanceadas ponderados

Ahora se analiza el caso no simétrico. Con el fin de introducir un resultado similar al del teorema 15 para el caso no simétrico, se introducen pesos a los jugadores.

Definición 17 *La solución φ satisface el axioma de* Contribuciones Balanceadas Ponderadas *(CBP) con vector de pesos $w \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si*

$$(\varphi_i(S) - \varphi_i(S\backslash\{j\}))w_j = (\varphi_j(S) - \varphi_j(S\backslash\{i\}))w_i$$

para todo $\{i,j\} \subseteq S$ y cualquier coalición $S \subseteq N$ con al menos dos jugadores . Esta solución se denotará por φ^w.

Teorema 17 *Dado $w \in \mathbb{R}^n$, $w > 0$, una solución φ^w verifica el axioma de contribuciones balanceadas ponderadas si y sólo si*

$$w(S)\varphi_i^w(S) = (R^{\varphi^w}(S) - R^{\varphi^w}(S\backslash\{i\}))w_i + \sum_{k\in S\backslash\{i\}} w_k\varphi_i^w(S\backslash\{k\})$$

Si además $\sum_{k\in S}\varphi_k^w(S) = v(S)$ entonces $\varphi_i^w(S) = Sh^{w_S}(S, v_S)$.

Demostración. Con el fin de demostrar la primera parte del teorema, sea φ^w una solución que satisfaga el axioma de contribuciones balanceadas ponderadas con $w > 0$ y considere la expresión:

$$(\varphi_i^w(S) - \varphi_i^w(S\backslash\{k\}))w_k = (\varphi_k^w(S) - \varphi_k^w(S\backslash\{i\}))w_i$$

donde i es fijo y $k \in S\backslash\{i\}$. Ahora, si se suman estas ecuaciones variando $k \in S\backslash\{i\}$ entonces:

$$w(S\backslash\{i\})\varphi_i^w(S) - \sum_{k\in S\backslash\{i\}} w_k\varphi_i^w(S\backslash\{k\}) = w_i(R^{\varphi^w}(S) - \varphi_i(S) - \sum_{k\in S\backslash\{i\}} \varphi_k^w(S\backslash\{i\}))$$

así,

$$w(S)\varphi_i^w(S) = w_i(R^{\varphi^w}(S) - R^{\varphi^w}(S\backslash\{i\})) + \sum_{k\in S\backslash\{i\}} w_k\varphi_i^w(S\backslash\{k\})$$

Sea φ^w una solución que satisfaga la expresión del teorema 17. Nuevamente la demostración es por inducción sobre el número de jugadores.

La demostración para coaliciones con dos jugadores es directa. Ahora, supóngase φ^w que satisfaga,

$$(\varphi_i(S\backslash\{k\}) - \varphi_i(S\backslash\{j,k\}))w_j = (\varphi_j(S\backslash\{k\}) - \varphi_j(S\backslash\{i,k\}))w_i$$

para jugadores $i, j, k \in S$ distintos. Entonces

$$w(S)(w_j\varphi_i(S\backslash\{j\}) - w_i\varphi_j(S\backslash\{\ i\})) =$$

$$= w_j[w(S\backslash\{j\}) + w_j]\varphi_i(S\backslash\{j\}) - w_i[w(S\backslash\{\ i\}) + w_i]\ \varphi_j(S\backslash\{\ i\})$$

$$= w_j w(S\backslash\{j\})\ \varphi_i(S\backslash\{j\}) - w_i w(S\backslash\{\ i\})\ \varphi_j(S\backslash\{\ i\}) + w_j^2\varphi_i(S\backslash\{j\}) - w_i^2\varphi_j(S\backslash\{\ i\})$$

$$= w_j[w_i(R^{\varphi^w}(S\backslash\{j\}) - R^{\varphi^w}(S\backslash\{i,j\})) + \sum_{k\in S\backslash\{i,j\}} w_k\varphi_i(S\backslash\{j,k\})] + w_j^2\varphi_i(S\backslash\{j\})$$

$$-w_i[w_j(R^{\varphi^w}(S\backslash\{i\}) - R^{\varphi^w}(S\backslash\{i,j\})) + \sum_{k\in S\backslash\{i,j\}} w_k\varphi_j(S\backslash\{i,\ k\})] - w_i^2\varphi_j(S\backslash\{\ i\})$$

$$= -w_j w_i R^{\varphi^w}(S\backslash\{i\}) + w_j^2\varphi_i(S\backslash\{j\}) + w_i w_j R^{\varphi^w}(S\backslash\{j\}) - w_i^2\varphi_j(S\backslash\{\ i\})$$

$$+ \sum_{k\in S\backslash\{i,j\}} w_k[w_j\varphi_i(S\backslash\{j,k\}) - w_i\varphi_j(S\backslash\{i,\ k\})]$$

por hipótesis de inducción,

$$= -w_j w_i R^{\varphi^w}(S\backslash\{i\}) + w_j^2\varphi_i(S\backslash\{j\}) + w_i w_j R^{\varphi^w}(S\backslash\{j\}) - w_i^2\varphi_j(S\backslash\{\ i\})$$

$$+ \sum_{k\in S\backslash\{i,j\}} w_k[w_j\varphi_i(S\backslash\{k\}) - w_i\varphi_j(S\backslash\{\ k\})]$$

sumando y restando $w_i w_j R^{\varphi^w}(S)$,

$$= w_j w_i[R^{\varphi^w}(S) - R^{\varphi^w}(S\backslash\{i\})] + \sum_{k\in S\backslash\{i\}} w_k w_j\varphi_i(S\backslash\{k\})$$

$$-w_i w_j[R^{\varphi^w}(S) - R^{\varphi^w}(S\backslash\{j\})] - \sum_{k\in S\backslash\{j\}} w_k w_i\varphi_j(S\backslash\{\ k\})$$

$$= w(S)(w_j\varphi_i(S) - w_i\ \varphi_j(S\ ))$$

así se obtiene que

$$w_j\varphi_i(S\backslash\{j\}) - w_i\varphi_j(S\backslash\{\ i\}) = w_j\varphi_i(S\ ) - w_i\varphi_j(S\ ).$$

Para demostrar la segunda parte del teorema se tiene que demostrar que $\varphi^w(S,\cdot)$ es lineal y $\varphi_i^w(S,u_T) = w_i/w(T)$ si $i\in T$ y cero de otra forma, para $T\subseteq S$. Ambas demostraciones son directas por inducción sobre la cardinalidad de las coaliciones, así, sólo se presenta el paso de inducción de la segunda demostración. Supóngase $\varphi_i^w(S\backslash\{k\},u_T) = w_i/w(T)$ si $i\in T$ y 0 de otra forma, entonces

$$w(S)\varphi_i^w(S,u_T) = w_i(u_T(S) - u_T(S\backslash\{i\})) + \sum_{k\in S\backslash\{i\}} w_k\varphi_i^w(S\backslash\{k\},u_T)$$

si $i\notin T$ todos los términos son cero y en el otro caso,

$$= w_i + \sum_{k\in S\backslash T} w_k\frac{w_i}{w(T)} = \frac{w_i(w(T)+w(S\backslash T))}{w(T)} = \frac{w_i w(S)}{w(T)}. \blacksquare$$

Comentarios:

c) $\varphi_i(S)$ es el promedio ponderado de s cantidades: los montos que el jugador i obtiene si cualquiera de los otros deja la coalición S y la diferencia $R^{\varphi^w}(S) - R^{\varphi^w}(S\backslash\{i\})$ la cual corresponde a cuando es el jugador i el que deja la coalición.

d) Nótese que, la primera ecuación del teorema 17 puede ser usada para definir otros valores ponderados además del de Shapley.

En el ejemplo precedente con $w' = (3,2,3)$, se obtiene,

	$\varphi^w(S)$		
S	1	2	3
$\{1\}$	1	–	–
$\{2\}$	–	4	–
$\{3\}$	–	–	3
$\{1,2\}$	1	4	–
$\{1,3\}$	2	–	4
$\{2,3\}$	–	4.8	4.2
$\{1,2,3\}$	1.25	4.3	4.45

y el Valor de Shapley Ponderado $Sh^w(N,v) = (1.25, 4.3, 4.45)'$ otra vez coincide con el último renglón de la tabla, el cual puede ser definido como el Valor de Banzhaf Ponderado.

A continuación se establece la equivalencia entre la propiedad de contribuciones balanceadas ponderadas y el Valor de Shapley Ponderado de (N,R^{φ}). Esta equivalencia permite definir en forma natural el valor ponderado asociado a cualquier valor que tenga la propiedad de contribuciones balanceadas, como es el caso del valor de Banzhaf.

Para cada $S\subseteq N$, el juego de unanimidad (N,u_S) se define como: $u_S(T) = 1$ si $S\subseteq T$, y $u_S(T) = 0$ de otra forma.

Lema 18 *Si A y B son matrices cuyas entradas están dadas por,*

$$b_{iT} = \begin{cases} \frac{w_i}{w(T)} & \text{if } i\in T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad a_{TS} = \begin{cases} 1 & \text{if } S\subseteq T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

entonces $Sh^w(N,v) = BA^{-1}v$.

Demostración. Se sabe que los juegos de unanimidad $\{u_T : T \subseteq N, T \neq \emptyset\}$ forman una base para el espacio vectorial G^N, así debe existir un vector $\delta \in R^{2^N-1}$ tal que

$$v = \sum_{T\neq\emptyset} \delta_T u_T = A\delta,$$

donde A es una matriz cuyas columnas son los juegos u_T. De esta forma, $\delta = A^{-1}v$. Ahora, por la linealidad de $Sh(N,\cdot)$,

$$Sh^w(N,v) = Sh^w(N, \sum_{T\neq\emptyset} \delta_T u_T) = \sum_{T\neq\emptyset} \delta_T\, Sh^w(N, u_T) = B\delta = BA^{-1}v$$

donde B es una matriz con columnas $Sh^w(N, u_T)$. ■

$$g(N,S) = \sum_{\{T|S\subseteq T\subseteq N\}} \frac{(-1)^{s+t}}{w(T)}$$

Lema 19 *Si $i \in N\backslash S$ entonces $g(N,S) = g(N\backslash\{i\},S) - g(N, S\cup\{i\})$.*

Demostración.

$$g(N\backslash\{i\},S) - g(N,S\cup\{i\}) =$$

$$\sum_{\{T|S\subseteq T\subseteq N\backslash\{i\}\}} \frac{(-1)^{s+t}}{w(T)} - \sum_{\{T|S\cup\{i\}\subseteq T\subseteq N\}} \frac{(-1)^{s+t+1}}{w(T)}$$

$$\sum_{\{T|S\subseteq T\subseteq N,\, i\notin T\}} \frac{(-1)^{s+t}}{w(T)} + \sum_{\{T|S\subseteq T\subseteq N,\, i\in T\}} \frac{(-1)^{s+t}}{w(T)} = g(N,S) \blacksquare$$

Lema 20 *Si $S \subset N$ entonces $\sum_{k\notin S} \frac{w_k}{w(N)} g(N\backslash\{k\},S) = g(N,S)$.*

Demostración.

$$\sum_{k\notin S} \frac{w_k}{w(N)} g(N\backslash\{k\},S) = \sum_{k\notin S} \sum_{\{T|S\subseteq T\subseteq N\backslash\{k\}\}} \frac{w_k}{w(N)} \frac{(-1)^{s+t}}{w(T)} =$$

$$= \sum_{\{T|S\subseteq T\subseteq N\}} \sum_{k\notin T} \frac{w_k}{w(N)} \frac{(-1)^{s+t}}{w(T)} = \sum_{\{T|S\subseteq T\subseteq N\}} \frac{w(N\backslash T)}{w(N)w(T)} (-1)^{s+t}$$

$$= \sum_{\{T|S\subseteq T\subseteq N\}} \left(\frac{1}{w(T)} - \frac{1}{w(N)}\right)(-1)^{s+t}$$

$$= g(N,S) - \frac{1}{w(N)} \sum_{\{T|S\subseteq T\subseteq N\}} (-1)^{s+t} = g(N,S) \blacksquare$$

Teorema 21 *Dado $w > 0$, las siguientes proposiciones son equivalentes,*

a) φ^w tiene la propiedad CBP.

b) $w(N)\varphi_i^w(N) = (R^{\varphi^w}(N) - R^{\varphi^w}(N\backslash\{i\}))w_i + \sum_{k\in N\backslash\{i\}} w_k \varphi_i^w(N\backslash\{k\})$.

c) $\varphi_i^w(N) = \sum_{\{S: i\notin S\}} w_i\, g(N, S\cup\{i\})(R^{\varphi^w}(S\cup\{i\}) - R^{\varphi^w}(S))$.

d) $\varphi^w(N) = Sh^w(N, R^{\varphi^w})$.

Demostración.

a) $\Rightarrow$ b)

Sea φ^w una solución con la propiedad de CBP con $w > 0$ y considere la expresión:

$$(\varphi_i^w(S) - \varphi_i^w(S\backslash\{k\}))w_k = (\varphi_k^w(S) - \varphi_k^w(S\backslash\{i\}))w_i$$

con i fija y $k \in S\backslash\{i\}$. Ahora, si se suman estas ecuaciones variando $k \in S\backslash\{i\}$ se tiene que:

$$w(S\backslash\{i\})\varphi_i^w(S) - \sum_{k\in S\backslash\{i\}} w_k \varphi_i^w(S\backslash\{k\}) = w_i(R^{\varphi^w}(S) - \varphi_i(S) - \sum_{k\in S\backslash\{i\}} \varphi_k^w(S\backslash\{i\}))$$

así,

$$w(S)\varphi_i^w(S) = w_i(R^{\varphi^w}(S) - R^{\varphi^w}(S\backslash\{i\})) + \sum_{k\in S\backslash\{i\}} w_k \varphi_i^w(S\backslash\{k\})$$

Sea φ^w una solución que satisfaga la expresión del teorema. La demostración se hará por inducción sobre el numero de jugadores.

La demostración para coaliciones con dos jugadores es directa. Ahora, suponga φ^w que satisface,

$$(\varphi_i(S\backslash\{k\}) - \varphi_i(S\backslash\{j,k\}))w_j = (\varphi_j(S\backslash\{k\}) - \varphi_j(S\backslash\{i,k\}))w_i$$

para jugadores distintos $i, j, k \in S$. Entonces

$$w(S)(w_j\varphi_i(S\backslash\{j\}) - w_i\varphi_j(S\backslash\{\ i\})) =$$

$$= w_j[w(S\backslash\{j\}) \ + w_j]\varphi_i(S\backslash\{j\}) - w_i[w(S\backslash\{\ i\}) + w_i]\ \varphi_j(S\backslash\{\ i\})$$

$$= w_j w(S\backslash\{j\})\ \varphi_i(S\backslash\{j\}) - w_i w(S\backslash\{\ i\})\ \varphi_j(S\backslash\{\ i\}) + w_j^2\varphi_i(S\backslash\{j\}) - w_i^2\varphi_j(S\backslash\{\ i\})$$

$$= w_j[w_i(R^{\varphi^w}(S\backslash\{j\}) - R^{\varphi^w}(S\backslash\{i,j\})) + \sum_{k\in S\backslash\{i,j\}} w_k\varphi_i(S\backslash\{j,k\})] + w_j^2\varphi_i(S\backslash\{j\})$$

$$-w_i[w_j(R^{\varphi^w}(S\backslash\{i\}) - R^{\varphi^w}(S\backslash\{i,j\})) + \sum_{k\in S\backslash\{i,j\}} w_k\varphi_j(S\backslash\{i,\ k\})] - w_i^2\varphi_j(S\backslash\{\ i\})$$

$$= -w_j w_i R^{\varphi^w}(S\backslash\{i\}) + w_j^2\varphi_i(S\backslash\{j\}) + w_i w_j R^{\varphi^w}(S\backslash\{j\}) - w_i^2\varphi_j(S\backslash\{\ i\})$$

$$+ \sum_{k\in S\backslash\{i,j\}} w_k[w_j\varphi_i(S\backslash\{j,k\}) - w_i\varphi_j(S\backslash\{i,\ k\})]$$

por hipótesis de inducción,

$$= -w_j w_i R^{\varphi^w}(S\backslash\{i\}) + w_j^2\varphi_i(S\backslash\{j\}) + w_i w_j R^{\varphi^w}(S\backslash\{j\}) - w_i^2\varphi_j(S\backslash\{\ i\})$$

$$+ \sum_{k\in S\backslash\{i,j\}} w_k[w_j\varphi_i(S\backslash\{k\}) - w_i\varphi_j(S\backslash\{\ k\})]$$

sumando y restando $w_i w_j R^{\varphi^w}(S)$,

$$= w_j w_i[R^{\varphi^w}(S) - \ R^{\varphi^w}(S\backslash\{i\})] + \sum_{k\in S\backslash\{i\}} w_k w_j\varphi_i(S\backslash\{k\})$$

$$-w_i w_j[R^{\varphi^w}(S) - R^{\varphi^w}(S\backslash\{j\})] - \sum_{k\in S\backslash\{j\}} w_k w_i\varphi_j(S\backslash\{\ k\})$$

$$= w(S)(w_j\varphi_i(S) - w_i\ \varphi_j(S\ ))$$

así, se obtiene que

$$w_j\varphi_i(S\backslash\{j\}) - w_i\varphi_j(S\backslash\{i\}) = w_j\varphi_i(S\ ) - w_i\varphi_j(S\ ).$$

b) $\Rightarrow$ *c)*

La demostración es por inducción sobre la cardinalidad de N. Para $N = \{i\}$ la demostración se hace en forma directa. Supóngase que el inciso c) del teorema se cumple cuando el espacio de jugadores es $N\backslash\{k\}$. Nótese primero que,

$$\sum_{k\in N\backslash\{i\}} \frac{w_k}{w(N)}\varphi_i(N\backslash\{k\}) = \sum_{k\in N\backslash\{i\}} \sum_{S\subseteq N\backslash\{i,k\}} \frac{w_k w_i}{w(N)} g(N\backslash\{k\}, S\cup\{i\})(R^\varphi(S\cup\{i\}) - R^\varphi(S))$$

$$= \sum_{\{S|i\notin S, S\neq N\backslash\{i\}\}} \sum_{k\notin S} \frac{w_i w_k}{w(N)} g(N\backslash\{k\}, S\cup\{i\})(R^\varphi(S\cup\{i\}) - R^\varphi(S))$$

$$= \sum_{\{S|i\notin S, S\neq N\backslash\{i\}\}} w_i\, g(N, S\cup\{i\})(R^\varphi(S\cup\{i\}) - R^\varphi(S))$$

Así,

$$\varphi_i(N) = (R(N) - R(N\backslash\{i\}))\frac{w_i}{w(N)} + \sum_{\{S|i\notin S, S\neq N\backslash\{i\}\}} w_i\, g(N, S\cup\{i\})(R^\varphi(S\cup\{i\}) - R^\varphi(S))$$

$$= \sum_{\{S|i\notin S\}} w_i\, g(N, S\cup\{i\})(R^\varphi(S\cup\{i\}) - R^\varphi(S))$$

c) $\Leftrightarrow$ *d)*

Si $C = BA^{-1}$ entonces

$$c_{iS} = \sum_T b_{iT} a_{TS}^{-1} = \sum_{\{T: S\subseteq T\subseteq N, i\in T\}} \frac{w_i(-1)^{s+t}}{w(T)}$$

$$= \begin{cases} w_i\, g(N,S) & \text{if } i \in S \\ -w_i\, g(N, S\cup\{i\}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

así

$$\sum_S c_{iS} R^\varphi(S) = \sum_{\{S:i\in S\}} w_i\, g(N,S) R^\varphi(S) - \sum_{\{S:i\notin S\}} w_i\, g(N,S\cup\{i\}) R^\varphi(\{S\})$$

$$= \sum_{\{S:i\notin S\}} w_i\, g(N,S\cup\{i\})\, R^\varphi(S\cup\{i\}) - \sum_{\{S:i\notin S\}} w_i\, g(N,S\cup\{i\})\, R^\varphi(\{S\})$$

$$= \sum_{\{S:i\notin S\}} w_i\, g(N,S\cup\{i\})\, [R^\varphi(S\cup\{i\}) - R^\varphi(\{S\})]$$

$c) \Rightarrow a)$

$$(\varphi_i^w(S) - \varphi_i^w(S\backslash\{j\}))w_j =$$

$$= \sum_{\{S:S\subseteq N\backslash\{i\}, j\in S\}} w_i w_j g(N,S\cup\{i\})[R^{\varphi^w}(S\cup\{i\}) - R^{\varphi^w}(S)]$$

$$+ \sum_{\{S:S\subseteq N\backslash\{i\}, j\notin S\}} w_i w_j g(N,S\cup\{i\})[R^{\varphi^w}(S\cup\{i\}) - R^{\varphi^w}(S)]$$

$$- \sum_{\{S:S\subseteq N\backslash\{i,j\}\}} w_i w_j g(N\backslash\{j\}, S\cup\{i\})[R^{\varphi^w}(S\cup\{i\}) - R^{\varphi^w}(S)]$$

Redefiniendo S por $S\cup\{j\}$ en la primera suma y juntando las dos últimas por medio del lema 19,

$$= \sum_{\{S:S\subseteq N\backslash\{i,j\}\}} w_i w_j g(N,S\cup\{i,j\})[R^{\varphi^w}(S\cup\{i,j\}) - R^{\varphi^w}(S\cup\{j\})]$$

$$- \sum_{\{S:S\subseteq N\backslash\{i,j\}\}} w_i w_j g(N,S\cup\{i,j\})[R^{\varphi^w}(S\cup\{i\}) - R^{\varphi^w}(S)]$$

$$= \sum_{\{S:S\subseteq N\backslash\{i,j\}\}} w_i w_j g(N,S\cup\{i,j\})[R^{\varphi^w}(S\cup\{i,j\}) - R^{\varphi^w}(S\cup\{j\}) - R^{\varphi^w}(S\cup\{i\}) + R^{\varphi^w}(S)]$$

$$= (\varphi_j^w(S) - \varphi_j^w(S\backslash\{i\}))w_i \blacksquare$$

Si φ es eficiente entonces $R^\varphi \equiv v$ y de esta forma por el teorema 21, $\varphi^w(N) = Sh^w(N,v)$, es decir, el Valor de Shapley Ponderado es la única solución eficiente con la propiedad CBP. Ahora, si φ no es eficiente, se podría pensar en repetir el argumento y definir un nuevo juego $\widetilde{R}^\varphi$, donde $\widetilde{R}^\varphi(S) = \sum_{i\in S}\varphi_i(S, R_S^\varphi)$, pero el teorema anterior establece que $\widetilde{R}^\varphi \equiv R^\varphi$, ya que,

$$\widetilde{R}^\varphi(S) = \sum_{i\in S}\varphi_i(S, R_S^\varphi) = \sum_{i\in S} Sh_i(S, R_S^\varphi) = R^\varphi(S)$$

o aún más simple, $\widetilde{R}^\varphi \equiv R^\varphi$ porque Sh^w es eficiente.

Ahora , supóngase que se desea definir el valor ponderado φ^w correspondiente a la solución φ, entonces resulta natural pedir que φ^w distribuya los mismos montos entre las colaciones que φ y la importancia relativa entre los jugadores puede ser reflejada a través de la propiedad CBP, pero otra vez por el teorema anterior estas dos propiedades determinan φ^w. Esta debe ser el Valor de Shapley Ponderado de R^φ. Entre las ventajas de definir a φ^w como el Valor de Shapley Ponderado de R^φ están las siguientes:

i Si los pesos son iguales entre sí, entonces φ^w se reduce a φ.

ii φ^w distribuye los mismos montos que φ, pero las proporciones son de acuerdo a los pesos.

iii Si se aplica el procedimiento al Valor de Shapley se obtiene el Valor de Shapley Ponderado.

Comentarios

a) Si φ tiene la propiedad CB entonces φ es el Valor de Shapley de R^φ.

b) Si los pesos son iguales entre sí y φ es eficiente entonces φ es el Valor de Shapley, es decir, La única solución eficiente que tiene la propiedad CB es el Valor de Shapley.

c) El inciso c) del teorema 21 proporciona una fórmula cerrada para el cálculo del Valor de Shapley Ponderado.

d) Entre las ventajas de definir a φ^w como el Valor de Shapley Ponderado de R^φ están las siguientes:

i Si los pesos son iguales entre sí, entonces φ^w se reduce a φ.

ii φ^w distribuye los mismos montos que φ, pero las proporciones son de acuerdo a los pesos.

iii Si se aplica el procedimiento al Valor de Shapley se obtiene el Valor de Shapley Ponderado.

e) Considere una solución φ no eficiente con la propiedad CBP. Al definir un nuevo juego $\widetilde{R}^\varphi$, donde $\widetilde{R}^\varphi(S) = \sum_{i\in S} \varphi_i(S, R^\varphi_S)$, se obtiene por el teorema anterior que $\widetilde{R}^\varphi \equiv R^\varphi$, ya que,

$$\widetilde{R}^\varphi(S) = \sum_{i\in S} \varphi_i(S, R^\varphi_S) = \sum_{i\in S} Sh_i(S, R^\varphi_S) = R^\varphi(S)$$

Capítulo 6

Determinación de precios axiomáticamente

El propósito principal de esta sección es determinar axiomáticamente un conjunto de precios para una colección de bienes cuya producción es de rendimientos decrecientes a escala con respecto a la dimensión del vector[1]. Se asocia a cada vector de bienes un vector de precios en forma similar a como se asignan valores en juegos cooperativos.

Se denotará por $N = \{1, ..., n\}$ a un conjunto finito de bienes, por $\mathbb{R}^N$ al espacio euclideano donde las coordenadas de los vectores están indexadas por los elementos de N y por $\mathbb{R}^N_+$ a su ortante estrictamente positivo.

Se dirá que v es subaditivo si $v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$ para todo $S, T \subseteq N$, tal que $S \cap T = \emptyset$. Al juego se le llama superaditivo si la proposición con la desigualdad inversa se satisface y aditivo en caso de que se cumpla con igualdad.

Para un vector fijo de bienes $\alpha \in \mathbb{R}^N_+$, el juego v representa la estructura de costos de producción de α. Se supondrá que $v(S)$ es el costo de producción de las coordenadas de α con subíndice en S. En general, v depende de α, pero como esta dependencia no se usará en este trabajo, no se denotará explícitamente. Una noción importante a lo largo de esta sección es que se supone implícitamente que formando coaliciones de coordenadas se reducen los costos (vía producción conjunta); de esta forma, se supondrá que v es subaditiva. Es bien conocido que el

[1] Esto significa que la producción conjunta de cualquier subconjunto de coordenadas de α es más barata que su producción por separado.

conjunto de todos los juegos con espacio de jugadores N es un espacio vectorial si se definen la suma y producto de la siguiente manera:

$$(v+w)(S) = v(S) + w(S)$$

y

$$(\lambda v)(S) = \lambda v(S)$$

donde v y w son juegos y $\lambda \in \mathbb{R}$. Sea G el conjunto de todos los juegos subadtivos.

Se desea asignar a cada (v, α), un vector de precios $P \in \mathbb{R}^N$ donde P_i, su i-ésima coordenada, sea un precio unitario justo para el bien i. Con el fin de lograrlo, se le impone un conjunto de axiomas a la función,

$$P : G \times \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N$$

de tal manera que esta función quede unívocamente determinada.

Teorema 22 *Si $P(\cdot, \alpha)$ es lineal en su primera coordenada manteniendo fija α, entonces P es de la forma:*

$$P(v, \alpha) = BA^{-1}v \tag{6.1}$$

donde las columnas de A forman una base para G y cada columna de B es el precio asociado por P a la correspondiente columna de A.

Demostración. Si $\{u_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ es una base para G entonces para cada $v \in G$ existen números reales δ^v_ω, $\omega \in \Omega$, tales que

$$v = \sum_{\omega \in \Omega} \delta^v_\omega u_\omega = A\delta^v \tag{6.2}$$

donde $\delta^v \in \mathbb{R}^\Omega$ y A es la matriz con entradas $a_{S\omega} = u_\omega(S)$. De aquí,

$$\delta^v = A^{-1}v \tag{6.3}$$

por (6.2),

$$P(v, \alpha) = P(\sum_{\omega \in \Omega} \delta^v_\omega u_\omega, \alpha) = \sum_{\omega \in \Omega} \delta^v_\omega P(u_\omega, \alpha) = B\delta^v$$

donde $b_{i\omega} = P_i(u_\omega, \alpha)$. Ahora, si se usa (6.3),

$$P(v, \alpha) = BA^{-1}v. \blacksquare$$

Definición 18 *Se dirá que los bienes i y j comparten costos fijos con v si*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \text{ y } v(S \cup \{i, j\}) = v(S \cup \{i\})$$

para todo $S \subseteq N \backslash \{i, j\}$.

Con estas igualdades se desea caracterizar el que los bienes i y j comparten costos fijos. Además, se dirá que el bien i es *nulo* en el juego v si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$, para toda $S \subseteq N$.

Axiomas:

Axioma 1 (Costos compartidos) Para toda $\alpha \in \mathbb{R}^N_+$ y $v \in G$, $\alpha^T P(v, \alpha) = v(N)$.

Axioma 2 (Costos fijos) Si los bienes i y j comparten costos fijos con v entonces $P_i(v, \alpha) = P_j(v, \alpha)$.

Axioma 3 (Bienes nulos) Si el bien i es nulo en el juego v, entonces $P_i(v, \alpha) = 0$.

Axioma 4 (Aditividad) Para cualesquier $v, w \in G$ y $\alpha \in \mathbb{R}^N_+$, $P(v+w, \alpha) = P(v, \alpha) + P(w, \alpha)$.

Los axiomas 1 y 4 están comentados en [8] y [10], y el axioma 3 es sólo una transcripción del axioma tradicional de nulidad. El axioma 1 establece que el costo de producir α iguala lo que se obtiene al evaluar las coordenadas de α al precio que les quede asignado. El segundo axioma establece que un costo que parezca costo fijo se distribuya en partes iguales entre las unidades que lo generan. El tercer axioma asigna costo cero a los bienes que no cuesta producir. El último de los axiomas requiere que si un costo se puede separar en componentes, entonces su precio debe ser la suma de los precios que le quedan asignados a sus componentes.

Con el fin de usar (6.1), se necesita una base para el cono G. Para este propósito no se utilizara la base tradicional, en lugar de ella sea $\{u_T \mid \emptyset \neq T \subseteq N\}$ definido por,

$$u_T(S) = a_{ST} = \begin{cases} 1 & \text{si } T \cap S \neq \emptyset \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Lema 23 *Si P satisface los axiomas 1-3, y $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$P_i(\lambda u_R, \alpha) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\alpha(R)} & si\ i \in R \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

donde $\alpha(R) = \sum_{k \in R} \alpha_k$.

Demostración. Si $i \notin R$ entonces el bien i es un bien nulo en el juego λu_R y por lo tanto $P_i(\lambda u_R, \alpha) = 0$. En el otro caso, cualquier par de bienes en R comparten costos fijos en λu_R, y por tanto deben ser iguales. Así, si se usa el axioma de costos compartidos:

$$\lambda = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k P_k(\lambda u_R, \alpha) = P_i(\lambda u_R, \alpha) \sum_{k \in R} \alpha_k = P_i(\lambda u_R, \alpha)\alpha(R). \blacksquare$$

El lema 23 y el axioma de aditividad proveen la linealidad de P en su primera coordenada y se obtiene la expresión $b_{iT} = P_i(u_T, \alpha)$. Así, por el teorema 22, $P(v, \alpha) = BA^{-1}v$. Ahora, para tener una expresión de P sólo se necesita la inversa de A; el siguiente lema se dedica a conseguirla.

Lema 24 *Si a^{-1}_{ST} denota la ST-ésima entrada de la matriz A^{-1}, entonces*

$$a^{-1}_{ST} = \begin{cases} (-1)^{n+s+t+1} & si\ \bar{S} \subseteq T \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

Demostración.

$$\sum_T a^{-1}_{ST} a_{TR} = \sum_{\{T | \overline{S} \subseteq T, T \cap R \neq \emptyset\}} (-1)^{n+s+t+1} \tag{6.4}$$

Si $R \not\subseteq S$, entonces $R \cap \overline{S} \neq \emptyset$ y $\overline{S} \subseteq T \Rightarrow T \cap R \neq \emptyset$. Así, usando el lema 5, la suma es cero porque se esta sumando sobre el conjunto $\{T \mid \overline{S} \subseteq T \subseteq N\}$ y $S \neq \emptyset$.

Si $R = S$, entonces la suma es sobre el conjunto $\{T \mid \overline{T} \subseteq S, S \cap T \neq \emptyset\}$. Ahora, para cada T en el conjunto se toma T_S tal que $T = N \backslash S \cup T_S$, entonces la suma puede ser expresada como:

$$\sum_{\{T_S | T_S \subseteq S, T_S \neq \emptyset\}} (-1)^t = 1$$

por el lema 5 (ya que falta un termino, T_S debe ser no vacío).

Si $R \subsetneq S$ y si se repite el último argumento entonces se necesita sumar sobre el conjunto $\{T_S \mid T_S \subseteq S, T_S \cap R \neq \emptyset\}$. Nótese que $\{T_S \mid T_S \subseteq S\} = \{T_S \mid T_S \subseteq S, T_S \cap R \neq \emptyset\} \cup \{T_S \mid T_S \subseteq S \backslash R\}$, así, si se aplica la misma suma en ambos lados, el termino del lado izquierdo y el segundo del derecho son cero por el lema 5. $\blacksquare$

Teorema 25 *Existe una y sólo una $P : G \times \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N$ que satisface los axiomas 1-4. Además, la i-ésima coordenada de P esta dada por*

$$P_i(v, \alpha) = \sum_{S \not\ni i} \sum_{T \subseteq S} \frac{(-1)^{s+t}}{\alpha(\overline{N \backslash T})} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Demostración. Por el teorema 22, $P(v, \alpha) = BA^{-1}v$. El lema 24 nos da una posible expresión para A^{-1} y usando la misma base el lema 23 nos da la B correspondiente. Supóngase que $C = BA^{-1}$ y que C_{iS} sea su iS-ésima entrada. A continuación se calcula C_{iS} dependiendo de si i pertenece o no a S.

Si $i \notin S$, entonces $i \in R$ para cada R tal que $\bar{R} \subseteq S$. Además, si $T = \overline{R}$ entonces se obtiene,

$$C_{i,S} = \sum_R b_{iR} a^{-1}_{RS} = \sum_{\{R | \bar{R} \subseteq S\}} \frac{(-1)^{n+s+r+1}}{\alpha(R)} = \sum_{\{T | T \subseteq S\}} \frac{(-1)^{s+t+1}}{\alpha(\overline{T})}$$

y si $i \in S$, entonces para cada R tal que $\bar{R} \subseteq S$, sea T de tal forma que $R = \bar{S} \cup \{i\} \cup T$. Así,

$$C_{i,S} = \sum_R b_{iR} a^{-1}_{RS} = \sum_{\{R | i \in R, \bar{R} \subseteq S\}} \frac{(-1)^{n+s+r+1}}{\alpha(R)}$$

$$= \sum_{\{T | i \notin T, T \subseteq S\}} \frac{(-1)^{s+t+1}}{\alpha(\overline{T})} = \sum_{\{T | T \subseteq S \backslash \{i\}\}} \frac{(-1)^{s+t+1}}{\alpha(\overline{T})}$$

y de esta forma,

$$P_i(v, \alpha) = \sum_S C_{iS} v(S) = \sum_{\{S | i \in S\}} C_{iS}\ v(S\ ) + \sum_{\{S | i \notin S\}} C_{iS} v(S)$$

$$= \sum_{\{S|i\in S\}} \sum_{\{T|T\subseteq S\setminus\{i\}\}} \frac{(-1)^{s+t+1}}{\alpha(\overline{T})} v(S\ ) + \sum_{\{S|i\notin S\}} \sum_{\{T|T\subseteq S\}} \frac{(-1)^{s+t+1}}{\alpha(\overline{T})} v(S)$$

$$= \sum_{\{S|i\notin S\}} \sum_{\{T|T\subseteq S\}} \frac{(-1)^{s+t}}{\alpha(\overline{T})} v(S\cup\{i\}\ ) - \sum_{\{S|i\notin S\}} \sum_{\{T|T\subseteq S\}} \frac{(-1)^{s+t}}{\alpha(\overline{T})} v(S)$$

$$= \sum_{\{S|i\notin S\}} \sum_{\{T|T\subseteq S\}} \frac{(-1)^{s+t}}{\alpha(\overline{T})} (v(S\cup\{i\}) - v(S)). \blacksquare$$

Comentarios:

a) A pesar de que los axiomas usados en esta formulación difieren muy poco de los usados por Shapley, el resultado es diferente. Nótese que $(\alpha_i P_i(v,\alpha))_{i\in N}$ no es el Valor de Shapley Ponderado; para verificarlo basta evaluar los juegos de unanimidad ($u_R(S) = 1$, si $S \supseteq R$, y 0 de otra forma) con ambas fórmulas.

b) Para calcular los precios se puede utilizar la siguiente propiedad de sus coeficientes,

$$\begin{cases} g(N,S) = g(N\backslash\{i\}, S\backslash\{i\}) - g(N, S\backslash\{i\}) \text{ for } i\in S \\ g(N,\emptyset) = 1/w(N) \end{cases}$$

la cual admite una demostración directa y permite programas de computadora recursivos muy cortos.

Ejemplo 1. Suponga una compañía que quiere producir 15 unidades de un producto A y 20 unidades de otro producto B. Los costos del material son \$1 por unidad del producto A y \$1.5 por unidad del producto B. Además, se necesita una máquina para producirlos. Esta máquina puede ser rentada por \$70 y sobrepasa la capacidad de la compañía, de tal forma que se puede pensar en que se puede producir cualquier cantidad de ambos productos. Así, $v(\{A\}) = 15(1) + 70 = 85$, $v(\{B\}) = 20(1.5) + 70 = 100$, y $v(\{A,B\}) = 15(1) + 20(1.5) + 70 = 115$, con $\alpha^T = (15, 20)$. El vector correspondiente de precios es $(3, 3.5)$.

Ejemplo 2. El problema es compartir el costo de un elevador para un edificio con n pisos (excluyendo la planta baja). Considere un bien por cada piso y sea α_i el número de personas que viven en él. Además, supongan n números reales: $c_1, \ldots, c_n$ tales que $c_1 < \ldots < c_n$, donde c_i denota el costo de construcción de un elevador hasta el piso i. Así, se puede considerar $v(S) = \max\{c_k \mid k \in S\}$, como el costo de construir un elevador para darle servicio a los pisos en S. Los precios dados por el teorema 2 son los siguientes:

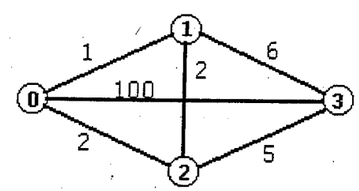
$$\begin{aligned} P_1(v,\alpha) &= \frac{c_1}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} \\ P_2(v,\alpha) &= \frac{c_1}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} + \frac{c_2-c_1}{\sum_{k=2}^n \alpha_k} \\ &\vdots \\ P_n(v,\alpha) &= \frac{c_1}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} + \frac{c_2-c_1}{\sum_{k=2}^n \alpha_k} + \ldots + \frac{c_n-c_{n-1}}{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Esta solución ha aparecido en la literatura varias veces (por ejemplo, en [4]) y tiene interés por sí misma. Con el fin de interpretarla, se puede expresar el costo del elevador en partes de la siguiente forma:

$$c_n = (c_n - c_{n-1}) + (c_{n-1} - c_{n-2}) + \cdots + (c_2 - c_1) + c_1. \tag{6.5}$$

Nótese que las personas que usan el elevador en la parte del nivel $i-1$ al i viven en el piso i o en uno más alto. Así, el costo de cada parte se divide por igual entre exactamente todos los que la usan. Cada precio se forma sumando los cocientes correspondientes.

Ejemplo 3. Considere la siguiente gráfica:



y suponga que los nodos 1, 2, y 3 necesitan conectarse al nodo 0. El costo de conectar cada arista se muestra en la figura. Con el fin de fijar ideas, supóngase que los nodos 1, 2 y 3 requieren de un servicio como drenaje, luz o cable de TV, el cual al inicio sólo se encuentra en el nodo 0. Para calcular $v(S)$, se puede restringir la gráfica a los nodos en $S \cup \{0\}$ y asociarle

el costo del mínimo árbol que genera esta subgráfica (otra alternativa es asociarle el costo del mínimo árbol (en la gráfica completa) que conecta los nodos en S. Se usa la primera alternativa sólo para incrementar el poder de negociación de los nodos 1 y 2). Así, se obtiene el siguiente juego:

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 1 & v(\{2\}) = 2 & v(\{3\}) = 100 \\ v(\{1,2\}) = 3 & v(\{1,3\}) = 7 & v(\{2,3\}) = 7 \\ & v(\{1,2,3\}) = 8 & \end{array}$$

y los siguientes precios para diferentes poblaciones :

α			$P(v,\alpha)$			$\alpha_i P_i(v,\alpha)$			$\alpha^T P(v,\alpha)$
1	1	1	-14.667	-14.167	36.833	-14.667	-14.167	36.833	8
10	30	60	-1.310	-1.366	1.034	-13.100	-40.967	62.067	8
60	10	30	-0.386	-0.278	1.132	-23.171	-2.779	33.950	8
30	60	10	-0.071	-0.073	1.454	-2.133	-4.410	14.543	8

Ejemplo 4. En [10] p. 289, Tauman considera un ejemplo del problema típico de transporte que se cubre en investigación de operaciones: considera dos orígenes B_1 y B_2 can capacidad de 20 unidades en cada uno, dos destinos A_1 y A_2 con una demanda de 20 unidades *per capita* y un costo de transporte de acuerdo a la siguiente tabla,

	A_1	A_2
B_1	10	15
B_2	1000	1500

El supone que los destinos tienen diferentes dueños y por lo tanto es necesario estar de acuerdo en como compartir los costos antes de que se pueda instrumentar la solución óptima del problema de transporte. El sugiere usar los precios Aumann-Shapley los cuales para este caso son $P(F,\alpha)^T = (505, 510)$ (En [8], Samet y Tauman determinan axiomáticamente los precios Aumann-Shapley).

Como alternativa, se calculará $P(v,\alpha)$. Considere un bien (es decir, el servicio de satisfacer

la demanda) por cada destino y $\alpha^T = (20, 20)$. Claramente $v(\{A_1, A_2\}) = 20,300$, sin embargo, los valores de $v(\{A_1\})$ y $v(\{A_2\})$ dependen de quien contrate con el origen B_1. Como no hay información al respecto, se trabajaran tres escenarios asciendo diferentes supuestos: en el primero se supondrá que A_1 obtiene el contrato con B_1, en el segundo es A_2 el que lo hace y en el tercero dividen en partes iguales la capacidad de B_1. Así, se obtiene los siguientes precios:

Escenario 1	$v(\{A_1\}) = 200$ $v(\{A_2\}) = 30000$ $v(\{A_1, A_2\}) = 20300$	$(-237.5, 1, 252.5)$
Escenario 2	$v(\{A_1\}) = 20000$ $v(\{A_2\}) = 300$ $v(\{A_1, A_2\}) = 20300$	$(1000, 15)$
Escenario 3	$v(\{A_1\}) = 10100$ $v(\{A_2\}) = 15150$ $v(\{A_1, A_2\}) = 20300$	$(381.25, 633.75)$

En el primer escenario, el destino A_1 tiene un gran poder de negociación, su precio asociado es una medida de este. En el segundo, ya se esta en la solución óptima y por lo tanto no hay incentivos para cooperar, así, cada quien paga su costo de transporte. El último escenario, (probablemente el más cercano al que se quiere plantear en [10]), da un precio mucho más favorable al destino A_1.

Comentarios:

El vector de precios P, tiene las siguientes propiedades:

a) Sea $\theta : N \to N$ biyectiva, $v \in G$ y $\alpha \in \mathbb{R}^N_+$, si se denota por $\theta * v$ el juego definido por $(\theta * v)(S) = v(\theta(S))$ y por $\theta * \alpha$ al vector en $\mathbb{R}^N_+$, tal que su i-ésima coordenada es $\alpha_{\theta(i)}$, se obtiene que, $P(\theta * v, \theta * \alpha) = \theta * P(v, \alpha)$.

b) $P(v, \iota) = Sh(v)$ donde ι es un vector de unos y $Sh(v)$ es el Valor de Shapley de v.

c) Un cambio en la escala de los bien conlleva a un cambio equivalente en los precios, es decir, $\lambda P(v, \lambda\alpha) = P(v, \alpha)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Capítulo 7

Conclusiones

A manera de conclusiones en esta sección se presentan las aportaciones de esta tesis. La primera de ellas esta implícita a lo largo de toda la tesis y es la exposición de la metodología que se usa en juegos cooperativos para determinar valores. Esta metodología, *a grosso* modo, es la siguiente: se forma un conjunto X de problemas "similares", se continua definiendo un conjunto S de soluciones, el cual debe contener todas las soluciones concebibles para cada uno de los problemas en X, (al especificar X y S se intenta que tengan alguna estructura matemática). Ya con esto, un operador $\varphi : X \to S$ está dando una solución $\varphi(x)$ a cada problema $x \in X$. El siguiente paso es incorporar criterios generales (axiomas) que se crea deba satisfacer cualquier operador φ "admisible", hasta que exista un solo operador que satisfaga todos los criterios. El avance que se obtiene con esto es sustancial, se obtienen o se eliminan soluciones para toda una clase de problemas con sólo aceptar o no "simples" supuestos generales. Nótese además que se evita la discusión sobre características que deba tener la solución de un problema específico.

Dada una clase fija de problemas, las soluciones que se obtienen son "buenas" o "justas" en el sentido de que no hay otro conjunto de soluciones asociadas, de tal forma que se satisfagan simultáneamente todos los axiomas o criterios preestablecidos. Si X es un conjunto de juegos, a una φ así determinada se le conoce como valor.

La forma en que se aborda la axiomatización simultánea de varios valores en la sección 3 es otra aportación. Se consideran, el espacio vectorial de todos los juegos que comparten el mismo espacio de jugadores y las funciones lineales de este espacio en $\mathbb{R}^n$; se utilizan axiomas complementarios para determinar el valor en una base del espacio vectorial y se aprovecha el

hecho de que la linealidad extiende el valor a todo el espacio en forma única. La importancia de tener bases comúnes radica en poder comparar los supuestos que determinan los valores al elegir alguno de ellos en aplicaciones particulares.

En la sección 4 se presenta una tercera aportación al dar una interpretación diferente al juego. Supóngase que cada vez que se forma una coalición S, se utiliza el Valor de Banzhaf para distribuir su ganancia $v(S)$, entonces los jugadores deben suponer que ya no están jugando v, sino R^φ, donde $R^\varphi(S) = \sum_{i \in S} \varphi_i(v_S)$. Sorpresivamente, el Valor de Shapley $Sh(N, R^\varphi)$ de este nuevo juego es igual al valor Banzhaf del juego original v. La sección 4 de la tesis, establece un resultado similar para todos los valores que satisfacen el axioma de contribuciones balanceadas. En la sección 5 se introducen pesos a los jugadores para obtener el resultado correspondiente para el caso no simétrico. Este último resultado permite establecer la equivalencia entre el axioma de contribuciones balanceadas y una generalización del Valor de Shapley Ponderado, la cual a su vez sugiere una forma natural de definir el valor ponderado asociado a cualquier valor que satisfaga el axioma de contribuciones balanceadas, como es el caso del Valor de Banzhaf.

La última aportación es una propuesta de como distribuir costos comúnes. La forma tradicional en que se aborda el problema de los costos comúnes es la siguiente. Denote por $\mathbb{R}^m_+$ y $\mathbb{R}^m_{++}$ el ortante positivo y estrictamente positivo de $\mathbb{R}^m$ respectivamente y sea $f : \mathbb{R}^m_{++} \to \mathbb{R}_+$ una función continuamente diferenciable que represente el costo de producción del vector de bienes x (se suponen m bienes, y x_j la cantidad del bien j) tal que $f(0) = 0$. Además, sea F el conjunto de funciones así definidas, aún variando m, entonces se define un mecanismo de precios como una función

$$P : F \times \mathbb{R}^m_{++} \to \mathbb{R}^m_+$$

Estos mecanismos de precios han sido axiomatizados por Samet y Tauman (1982) y por Billera y Heath (1982) en forma independiente. En ambos casos, los precios a los que arriban son,

$$P_j(f, \alpha) = \int_0^1 \frac{\partial f(t\alpha)}{\partial x_j} dt$$

y son llamados los precios Aumann- Shapley.

Así, en la sección 6 se da una formulación alternativa a este problema. La sugerencia es considerar el vector de bienes fijo α y un juego v que proporcione los costos de producción de

cualquier subconjunto de coordenadas de α; esto permite asignar a cada pareja (v, α) un vector único de precios $P(v, \alpha)$ en forma axiomática. También se establecen algunas propiedades de $P(v, \alpha)$. La justificación, es que tradicionalmente los precios quedan determinados por la última unidad, esto es, el precio para 1000 unidades puede ser uno y el de 1001 unidades otro totalmente distinto. Esto conduce a que las axiomatizaciones que se han basado en las cantidades a producir, sean muy forzadas.


```
>
```

Apéndice

Cálculo del Valor de Shapley

```
> restart;
```

Cálculo de los coeficientes.

```
> p := proc(n,s) local i; option remember; if s=n then 1/n; else i
  := op(1,N minus S); p(n-1, s)-p(n, s+1); fi; end;
```

p := **proc**(*n*, *s*)
local *i*;
option *remember*;
  if *s* = *n* **then** 1 / *n* **else** *i* := op(1, *N* minus *S*); p(*n* − 1, *s*) − p(*n*, *s* + 1) **fi**
end

Se genera la potencia de un conjunto.

```
> Pot := proc(N) local i,S,dummy,P; P:={{}}; for i in N do dummy:=P;
  for S in dummy do P:= P union { S union {i}}; od; od; end;
```

Pot := **proc**(*N*)
local *i*, *S*, *dummy*, *P*;
  P := { { } };
  for *i* **in** *N* **do** *dummy* := *P*; **for** *S* **in** *dummy* **do** *P* := *P* union { *S* union { *i* } } **od od**
end

Cálculo del Valor de Shapley suponiendo el juego v variable externa.

```
> Sh := proc (N,i) global w,v; local PotN,sum,S; PotN:=Pot(N minus
  {i}); sum:=0; for S in PotN do sum:=sum+p(nops(N),nops(S)+1)*(v(S
  union {i})-v(S)); od; RETURN(sum); end;
```

Sh := **proc**(*N*, *i*)
local *PotN*, *sum*, *S*;
global *w*, *v*;
  PotN := Pot(*N* minus { *i* });
  sum := 0;
  for *S* **in** *PotN* **do** *sum* := *sum* + p(nops(*N*), nops(*S*) + 1)*(v(*S* union { *i* }) − v(*S*)) **od**;
  RETURN(*sum*)
end

Ejemplo: sólo se define el conjunto de jugadores y se cálcula el valor para el jugador uno.

```
> N:={1,2,3}; Sh(N,1);
```

$$N := \{1, 2, 3\}$$

$$\frac{1}{3}\mathrm{v}(\{1\}) - \frac{1}{3}\mathrm{v}(\{\ \}) + \frac{1}{3}\mathrm{v}(\{1,2,3\}) - \frac{1}{3}\mathrm{v}(\{2,3\}) + \frac{1}{6}\mathrm{v}(\{1,2\}) - \frac{1}{6}\mathrm{v}(\{2\}) + \frac{1}{6}\mathrm{v}(\{1,3\})$$

$$-\frac{1}{6}\mathrm{v}(\{3\})$$

```
> restart;
```

Cálculo del Valor de Banzhaf

Se genera la potencia de un conjunto

```
> Pot := proc(N) local i,S,dummy,P; P:={{}}; for i in N do
  dummy:=P; for S in dummy do P:= P union { S union {i}};
  od; od; end;
```

Pot := **proc**(*N*)
local *i*, *S*, *dummy*, *P*;
  P := {{ }};
  for *i* **in** *N* **do** *dummy* := *P*; **for** *S* **in** *dummy* **do** *P* := *P* union {*S* union {*i*}} **od od**
end

Cálculo del Valor de Banzhaf suponiendo el juego v variable externa.

```
>  B := proc (N,i) global w,v; local PotN,sum,S;
  PotN:=Pot(N minus {i}); sum:=0; for S in PotN do
  sum:=sum+v(S union {i})-v(S); od;
  RETURN(sum/(2^(nops(N)-1))); end;
```

B := **proc**(*N*, *i*)
local *PotN*, *sum*, *S*;
global *w*, *v*;
  PotN := Pot(*N* minus {*i*});
  sum := 0;
  for *S* **in** *PotN* **do** *sum* := *sum* + v(*S* union {*i*}) − v(*S*) **od**;
  RETURN(*sum* / 2^(nops(*N*) − 1))
end

Ejemplo del cálculo del Valor de Banzhaf para el jugador 1 en un juego con tres jugadores.

```
>  N:={1,2,3}; B(N,1);
```

$$N := \{1, 2, 3\}$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{v}(\{1,3\})-\frac{1}{4}\mathrm{v}(\{3\})+\frac{1}{4}\mathrm{v}(\{1\})-\frac{1}{4}\mathrm{v}(\{\ \})+\frac{1}{4}\mathrm{v}(\{1,2,3\})-\frac{1}{4}\mathrm{v}(\{2,3\})+\frac{1}{4}\mathrm{v}(\{1,2\})$$
$$-\frac{1}{4}\mathrm{v}(\{2\})$$

Cálculo del Valor de Shapley Ponderado


```
> suma := proc(S) global w; local i,sum; sum:=0; for i in S do sum
  := sum+w[i]; od; 1/sum; end;
```

suma := **proc**(*S*) **local** *i*, *sum*; **global** *w*; *sum* := 0; **for** *i* **in** *S* **do** *sum* := *sum* + *w*[*i*] **od**; 1 / *sum* **end**

Cálculo de los coeficientes en forma recursiva.

```
> g := proc(N,S) local i; option remember; if S=N then
  suma(N); else i := op(1,N minus S); g(N minus {i},
  S)-g(N, S union {i}); fi; end;
```

g := **proc**(*N*, *S*)
local *i*;
option *remember*;
  if *S* = *N* **then** suma(*N*) **else** *i* := op(1, *N* minus *S*); g(*N* minus {*i*}, *S*) − g(*N*, *S* union {*i*}) **fi**
end

Se genera la potencia de un conjunto.

```
> Pot := proc(N) local i,S,dummy,P; P:={{}}; for i in N do
  dummy:=P; for S in dummy do P:= P union { S union {i}};
  od; od; end;
```

Pot := **proc**(*N*)
local *i*, *S*, *dummy*, *P*;
  P := {{ }};
  for *i* **in** *N* **do** *dummy* := *P*; **for** *S* **in** *dummy* **do** *P* := *P* union {*S* union {*i*}} **od od**
end

Cálculo del Valor de Shapley Ponderado suponiendo el juego v variable externa.

```
> WSh := proc (i,N) global w,v; local PotN,sum,S;
  PotN:=Pot(N minus {i}); sum:=0; for S in PotN do
  sum:=sum+w[i]*g(N,S union {i})*(v(S union {i})-v(S));
  od; RETURN(sum); end;
```

WSh := **proc**(*i*, *N*)
local *PotN*, *sum*, *S*;
global *w*, *v*;
  PotN := Pot(*N* minus {*i*});
  sum := 0;
  for *S* **in** *PotN* **do** *sum* := *sum* + *w*[*i*]*g(*N*, *S* union {*i*})*(v(*S* union {*i*}) − v(*S*)) **od**;
  RETURN(*sum*)
end

Ejemplo.

```
> N:={1,2}; n:=2; w := array(1..n); WSh(1,N);
```

$$N := \{1, 2\}$$

$$n := 2$$

$$w := \text{array}(1\,..\,2, [\ ])$$

$$\frac{w_1\,(\mathrm{v}(\{1,2\}) - \mathrm{v}(\{2\}))}{w_1 + w_2} + w_1\left(\frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_1 + w_2}\right)(\mathrm{v}(\{1\}) - \mathrm{v}(\{\ \}))$$

Cálculo del vector de precios

```
> suma := proc(S) global alpha; local i,sum; sum:=0; for i in S do
  sum := sum+alpha[i]; od; 1/sum; end;
```

suma := **proc**(*S*) **local** *i*, *sum*; **global** α; *sum* := 0; **for** *i* **in** *S* **do** *sum* := *sum* + α[*i*] **od**; 1 / *sum* **end**

Cálculo de los coeficientes.

```
> g := proc(N,S) local i; option remember; if S={} then suma(N);
  else i := op(1,S); g(N minus {i},S minus {i})-g(N, S minus {i});
  fi; end;
```

g := **proc**(*N*, *S*)
local *i*;
option *remember*;
  if *S* = { } **then** suma(*N*)
  else *i* := op(1, *S*); g(*N* minus {*i*}, *S* minus {*i*}) − g(*N*, *S* minus {*i*})
  fi
end

Se genera la potencia de un conjunto.

```
> Pot := proc(N) local i,S,dummy,P; P:={{}}; for i in N do dummy:=P;
  for S in dummy do P:= P union { S union {i}}; od; od; end;
```

Pot := **proc**(*N*)
local *i*, *S*, *dummy*, *P*;
  P := {{ }};
  for *i* **in** *N* **do** *dummy* := *P*; **for** *S* **in** *dummy* **do** *P* := *P* union {*S* union {*i*}} **od od**
end

Cálculo del vector de precios.

```
> precio := proc(v,alpha) local i,sum,PotN,S; global P;   for i in N
  do sum:=0; PotN := Pot(N minus {i}); for S in PotN do sum:=
  sum+g(N,S)*(v(S union {i})- v(S));  od; P[i]:=sum; od; end;
```

precio := **proc**(*v*, α)
local *i*, *sum*, *PotN*, *S*;
global *P*;
  for *i* **in** *N* **do**
    sum := 0;
    PotN := Pot(*N* minus {*i*});
    for *S* **in** *PotN* **do** *sum* := *sum* + g(*N*, *S*)*(*v*(*S* union {*i*}) − *v*(*S*)) **od**;
    P[*i*] := *sum*
  od

end

```
> N:={1,2,3}; n:=3; alpha := array(1..n); P:= array(1..n);
```

$$N := \{1, 2, 3\}$$
$$n := 3$$
$$\alpha := \text{array}(1\,..\,3, [\ ])$$
$$P := \text{array}(1\,..\,3, [\ ])$$

```
> v({}):=0; v({1}):=1; v({2}):=2; v({3}):=100; v({1,2}):=3;
  v({1,3}):=7; v({2,3}):=7; v({1,2,3}):=8;
```

$$\mathrm{v}(\{\ \}) := 0$$
$$\mathrm{v}(\{1\}) := 1$$
$$\mathrm{v}(\{2\}) := 2$$
$$\mathrm{v}(\{3\}) := 100$$
$$\mathrm{v}(\{1,2\}) := 3$$
$$\mathrm{v}(\{1,3\}) := 7$$
$$\mathrm{v}(\{2,3\}) := 7$$
$$\mathrm{v}(\{1,2,3\}) := 8$$

```
> alpha[1]:=10: alpha[2]:=30: alpha[3]:=60:
```

```
> P[1], P[2], P[3];
```

$$\frac{-131}{100}, \frac{-1229}{900}, \frac{931}{900}$$

```
>
```

Bibliografía

[1] Aumann, R. J., "A survey of cooperative games without side payments", *Essays in Mathematical Economics*, M. Shubik (*comp.*), Princeton, Princeton University Press, 1967 pp. 3-27.

[2] Bacharach M., " *Economics and the theory of games*", MacMillan Press LTD, 1976.

[3] Benoit y Krishna, "Nash equilibria of finitely repeated Games", *Journal of Applied Mathematics*, vol. 16, núm. 3, 1987, pp. 197-204.

[4] Billera L. J., Heath D. C. y Raanan (1978), "Internal telephone billing rates-a novel application of non-atomic game theory", *Journal of Operations Research*, **26**, issue 6, Dic., 956-965.

[5] Bolger E. M., "Characterizing the Banzhaf and Shapley values assuming limited linearity", *International Journal of Game Theory*, vol. 11, núm. 1, enero de 1980, pp. 1-12.

[6] Bosch D., Antoni y Escribano, C., "Asignacion de costos y el valor de Shapley: comparacion de soluciones". Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 1988.

[7] Corley H. W., "Games with vector payoffs", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 47, núm. 4, diciembre de 1985, pp. 491-497.

[8] Diaz H. y Owen G., "Fair subsidies for urban transportation systems", en Brams Schotter y Schwödiauer (*comps.*) *Applied game theory*, Viena y Würzburg Physica Verlag, 1979, pp. 325-333.

[9] Drescher M., A. W. Tucker y P. Wolfe (*comps.*), " Contributions to the theory of games", vol. III (Ann. Math. Studies núm. 39), Princeton University Press, Princeton, 1957.

[10] Driessen T.S.H. y Tijs S. H., "The τ-value, The core and semiconvex Games", *International Journal of Game Theory*, vol. 14, núm. 4, 1985, pp. 229-248.

[11] Dubey P. (1975), "On the uniqueness of the Shapley value", *International Journal of Game Theory*, **4**, 131-139.

[12] Dubey P., "The Shapley value as aircraft landing Fees-Revisited", *Management Science*, **28**, issue 8, Aug., 869-874.

[13] Dubey P. y Shapley L. S., "Totally balanced games arising from controlled programming problems", *Journal of Mathematical Programming*, 1984, pp. 245-267.

[14] Dubey P., Neyman A. and Weber, (1981), "Value theory without efficiency", *Mathematics of Operations Research*, v. 6, 1, Feb., pp. 122-128.

[15] Fishburn P. C., "Equity axioms for public risks", *Operations Research*, vol. 32, núm. 4, julio-agosto de 1984, pp. 901-908.

[16] Friedman F. W., " *Game theory with applications to economics*", Oxford University Press, 1986.

[17] Hannai, Peleg B., "An approach to the problem of efficient distribution of the labor force", *Applied Game Theory*, 1979, pp. 214-235.

[18] Hart S. y Mas–Colell A., "A potential, value and consistency", *Econometrica*, vol. 57, núm. 3, mayo de 1989, pp. 589-614.

[19] Ichiishi T., " *Game theory for economic analysis*", Academic Press, 1983.

[20] Legros P., "Allocating joint costs by means of the nucleolus", *International Journal of Game Theory*, vol. 15, núm. 2, 1986, pp. 109-119.

[21] Lehrer E., (1988), "An axiomatization of the Banzhaf value", *International Journal of Game Theory*, v. 17, 2, pp. 89-99.

[22] Kalai E. and Samet D., (1987), "On weighted Shapley values", *International Journal of Game Theory*, v. 16, 3, pp. 205-222.

[23] Monderer D., "Values and semivalues on subspaces of finite games", *International Journal of Game Theory*, vol. 17, núm. 4, 1988, pp. 301-310.

[24] Myerson R. B., "Values of games in partition function form", *International Journal of Game Theory*, vol. 6, núm. 1, septiembre de 1976, pp. 23-31.

[25] Myerson R. B., (1977), "Graphs and cooperation in games", *Mathematics of Operations Research*, v. 2, 3, pp. 225-229.

[26] Myerson R. B., (1980), "Conference Structures and Fair Allocation Rules", *International Journal of Game Theory*, v. 9, 3, pp. 169-182.

[27] Owen G., " *Game Theory*", Academic Press, segunda edición, 1982.

[28] Owen G., "Characterization of the Banzhaf-Coleman index", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, vol. 35, núm. 2, septiembre de 1978, pp. 315-327.

[29] Samet D. y Y. Tauman (1982), "The determination of marginal cost prices under a set of axioms", *Econometrica,* **50**, issue 4, July, 895-909.

[30] Samet D., Y. Tauman y Zang, "An application of the Aumann-Shapley prices for cost allocation in transportation problems", mimeografiado, 1982, pp. 1-40.

[31] Shapley L. S. (1953), "A value for n–person games", *Contribution to the Theory of Games*, **2**, 307-317.

[32] Shubik M., " *Game Theory in the Social Sciences*", The MIT Press, 1982.

[33] Shubik M., " *A Game-Theoretic Approach To Political Economy*", Cambridge: MIT Press, 1984.

[34] Straffin, Heaney, "Game theory and the Tennessee Valley authority", *Journal of Applied Mathematics*, vol. 10, núm. 1, febrero de 1979, pp. 35-43.

[35] Thomas L.C., " *Games, Theory and Applications*", Ellis Horwood Limited, 1984.

[36] Thomson, "The manipulability of the Shapley-value", *International Journal of Game Theory*, vol. 17, núm. 2, 1988, pp. 101-127.

[37] Thomson y Myerson R. B., "Monotonicity and independence axioms", *International Journal of Game Theory*, vol. 9, núm. 1, noviembre de 1978, pp. 37-49.

[38] Riordan, J., " *An introduction to combinatorial analysis*", Princeton University Press, Princeton, 1978.

[39] Roth, A. (Ed) (1988), *The Shapley value. Essays in honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press.

[40] Von Neumann J. y Morgenstern O., " *Theory of games and economic behavior*", Princeton, Princeton University Press, 1944.

[41] Vorob'ev, N. M., " *Game theory*", Nueva York, Springer Verlag, 1977.

[42] Young H.P. (1985), "Monotonic solution of cooperative games", International Journal of Game Theory, **14**, issue 2, 65-67.

CONACyT apoyó este Doctorado con la
Cátedra Patrimonial Nivel II, 970038.