CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Una fórmula algebraica del índice de Poincaré–Hopf para campos vectoriales reales con una variedad de ceros complejos

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Víctor Castellanos Vargas

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Xavier Gómez–Mont A.

Abril de 2000 Guanajuato, Gto. México

A
Diana, Adriana, Angélica
y
toda mi familia

AGRADECIMIENTOS

No cabe duda que haber llegado a esta etapa de mi vida involucra a mucha gente, de alguna u otra forma la mayoria de mis amigos contribuyeron a que los momentos de desanimo fueran más llevaderos y superados. Hacer una lista de tanta gente seria una tarea interminable y peligrosa porque se me podría escapar alguno. Por ello, hago extensivo mi agradecimiento a todos mis amigos por su amistad y bondad en los momentos más difíciles durante el desarrollo de este trabajo.

No encuentro palabras en nuestro vocabulario, para expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Xavier Gómez–Mont quien, como persona ha sido mi mejor amigo y como profesor mi modelo a seguir, ello debido a sus características personales que, simplemente lo hacen, ¡excepcional!. A él agradezco haber dirigido este trabajo tan atinadamente, haberme involucrado de una manera tan sutil en el maravilloso tema de este trabajo así como el apoyo económico que me brindó y que fueron fundamentales para lograr este objetivo.

Al Dr. Jesús Muciño por su amistad, consejos, comentarios y sugerencias que ayudaron a que el trabajo final tuviera una mejor presentación, tanto en contenido matemático como en redacción.

A la Dra. Leticia Brambila, porque sus comentarios y sugerencias hicieron que este trabajo se escribiera en un contexto más general y quedara más completo.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Al Dr. Sevin Recillas, quien fuera mi profesor de los primeros cursos de geometría algebraica que cursé en la maestria del CIMAT y de quien aprendí muchas matemáticas.

Al Dr. Rafael Heraclio Villarreal, porque aún cuando no nos conociamos, acepto leer este trabajo y fue uno de los que me inyectaron confianza y afecto por mi trabajo.

Agradezco al Dr. Omegar Calvo por haberme escuchado en las numerosas platicas que tuvimos a la hora del café y las galletas en el CIMAT y de donde surgio una gran idea para redondear los resultados de mi trabajo.

Al CIMAT, que me albergo por cerca de ocho años, durante los cuales hice una tesis de licenciatura, obtuve el grado de maestria, realice mi tesis doctoral y me dió apoyo enconómico. A todo su personal le agradezco haberme considerado uno de sus amigos.

Al CONACyT, quien me proporcionó una beca por cinco años, para realizar mis estudios de Maestria y Doctorado.

Otra de las instituciones a quien le agradezco su apoyo económico es al CONCYTEG, que al final del camino llego al rescate para poder concluir satisfactoriamente este trabajo.

No puede faltar, expresar mi agradecimiento a mis compañeros de cubículo, Claudia, Abel y Armando así como a mi amiga Paty, mi cuate Ernesto, M. Cruz y el Agus.

A toda mi famila le doy las gracias por haber confiado en mí, darme su amor, ayuda moral y económica. A nuestro padre espiritual, porque con su amor tengo lo que he logrado en esta vida.

ÍNDICE

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

NOTACION

$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$	*Conjunto de campos vectoriales analítico reales.*
$X = \sum_{k=1}^{n} X^k \frac{\partial}{\partial x_k}$	*Campo vectorial analítico real.*
$X_{\mathbb{C}}$	*Campo vectorial holomorfo descrito por las mismas series de potencias que definen a* X.
$\mathrm{Sing}_{\mathbb{R}}(X)$	*Conjunto de los ceros de* X.
$\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(X)$	*Conjunto de los ceros complejos de* $X_{\mathbb{C}}$.
$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, k)$	*Conjunto de campos vectoriales* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\mathrm{Sing}_{\mathbb{R}}(X) = \{0\}$ *y* $k := \mathrm{codimSing}_{\mathbb{C}}(X)$.
$\mathcal{A}$	*Anillo de gérmenes de funciones analítico reales en* 0.
$\mathcal{O}$	*Anillo de gérmenes de funciones holomorfas en* 0.
$I_X := X^1\mathcal{A} + \cdots + X^n\mathcal{A}$	*Ideal de las componentes de* X *en* $\mathcal{A}$.
$X^1\mathcal{O} + \cdots + X^n\mathcal{O}$	*Ideal de las componentes de* X *en* $\mathcal{O}$.
$A_X = \frac{\mathcal{A}}{X^1\mathcal{A} + \cdots + X^n\mathcal{A}}$	*Anillo local de las componentes de* X *en* $\mathcal{A}$.
$\frac{\mathcal{O}}{X^1\mathcal{O} + \cdots + X^n\mathcal{O}}$	*Anillo local de las componentes de* X *en* $\mathcal{O}$.

INTRODUCCIÓN

Usualmente, se pueden encontrar estructuras topológicas de un espacio (variedad) por medio de objetos geométricos definidos sobre éste. Las propiedades globales de los espacios imponen ciertas restricciones sobre los objetos geométricos que pueden existir sobre ellos y, reciprocamente, si tenemos un objeto geométrico, al estudiar los puntos "especiales" donde pasan cosas interesantes, *i.e.,* los "puntos singulares" y sumando las contribuciones locales de estos puntos, obtenemos una propiedad global del espacio. Un ejemplo típico de ésto, es el teorema de Poincaré–Hopf sobre el índice de un campo vectorial (objeto geométrico) y la caracteristica de Euler–Poincaré de la variedad (espacio) sobre la cual está definido dicho campo vectorial.

Este ejemplo ha sido el punto de partida de trabajos que persiguen describir propiedades de variedades definiendo objetos geométricos sobre ellas. Por ejemplo, Gómez-Mont, Seade y Verjovsky [GSV] definieron el índice GSV de un campo vectorial restringido a una variedad afín $V = \{f = 0\}$ la cual tiene una singularidad aislada en el origen y coincide con una singularidad aislada del campo vectorial. Sobre el índice GSV, se han escrito una cantidad importante de artículos tanto en el caso real como complejo y su objetivo principal ha sido encontrar una fórmula algebraica para calcular este número que nos da información topológica de la variedad V. Entre los trabajos que se encuentran en la literatura sobre el índice GSV estan los de Gómez–Mont, Verjovsky, Bonatti, Giraldo, Mardešić, Seade, *et.al.*, cuyas citas bibliograficas son [GSV], [Gó], [GóM 1], [GóM 2], [GGóM] y [BG].

Nuestro interés en este trabajo es el índice de Poincaré–Hopf (definido como el grado del mapeo de Gauss inducido por el campo vectorial en una esfera

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

suficientemente pequeña alrededor del punto singular), así que, siempre que yo hable del índice de un campo vectorial, me estare refiriendo al índice de Poincaré–Hopf.

Como lo comenté antes, el resultado principal en la teoría del índice de Poincaré–Hopf es sin duda el teorema *(de Poincaré–Hopf)* el cual dice que si X es un campo vectorial sobre una variedad C^∞, M compacta y tal que X tiene únicamente un número finito de puntos críticos aislados $p_1, \ldots, p_r$, entonces

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Ind}_{p_i} X = \chi(M)$$

donde $\mathrm{Ind}_{p_i} X$ denota el índice de X en el punto p_i y $\chi(M)$ es la característica de Euler-Poincaré de M. Algunas referencias donde se puede encontrar una prueba de este resultado son [M 1, pág. 35] y [H, pág. 133]. Este teorema es muy importante ya que nos da información de la topología de la variedad a través del índice.

El índice de un campo vectorial, está definido para campos vectoriales continuos y consecuentemente para campos vectoriales que son $\mathcal{C}^r$, $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^w$ y holomorfos, dependiendo de la estructura del campo vectorial es la dificultad para calcularlo.

Por ejemplo, si $Z = \sum_{k=1}^{n} Z^k \dfrac{\partial}{\partial z_k}$ es un campo vectorial holomorfo en $\mathbb{C}^n$, con un punto singular aislado en 0, entonces el índice de Z en 0, $\mathrm{Ind}_0 Z$, se puede calcular a través del álgebra A_Z, obtenida del anillo $\mathcal{O}$ de gérmenes de funciones holomorfas sobre $\mathbb{C}^n$ en 0, dividido por el ideal que generan los gérmenes de las componentes de X, esto es,

$$A_Z = \frac{\mathcal{O}}{Z^1\mathcal{O} + \cdots + Z^n\mathcal{O}},$$

y se tiene que

$$\mathrm{Ind}_0 Z = \dim A_Z.$$

Este teorema (véa capítulo 0, sección §0.3) nos muestra que haciendo uso del álgebra, podemos calcular un invariente topológico como lo es el índice de

Poincaré–Hopf. A la dimensión de A_X también se le conoce como el número de Milnor [Lo, pág. 3] y mide la multiplicidad del punto singular. El resultado anterior es falso en el caso real, ya que en $\mathbb{R}^n$ tenemos campos vectoriales con índice negativo. Así pues, una pregunta natural es: *¿Hay una manera algebraica de calcular el índice de campos vectoriales reales?*

Una respuesta afirmativa a esta pregunta, fue dada a conocer por Eisenbud y Levine en 1977 en el caso que la singularidad aislada del campo vectorial real permanece aislada en $\mathbb{C}^n$. Antes de describir el resultado de Eisenbud y Levine, vamos a identificar los tipos de singularidades aisladas de campos vectoriales reales, en el sentido referido anteriormente.

Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ un campo vectorial analítico real con una única singularidad aislada en el origen y denotemos por $X_{\mathbb{C}}$ al campo vectrorial complejificado de X, el cual esta definido por las mismas series de potencias que definen a X. Cuando la singularadad aislada de X sigue siendo aislada para su complejificado $X_{\mathbb{C}}$ se llama *"singularidad algebraicamente aislada"*, en caso contrario, se le llama *"singularidad no algebraicamente aislada"*. En algunos libros se refieren a una singularidad algebraicamente aislada como de multiplicidad finita.

Un resultado fundamental en el teorema de Eisenbud y Levine es el hecho que una singularidad aislada de un campo vectorial analítico real X, es algebraicamente aislada si y sólo si la dimensión del álgebra A_X es finita. Si el punto singular no es algebraicamente aislado, la dimensión de A_X es infinita. Ana referencia de lo anterior es el teorema 6 del capítulo 5 sección 3 de [CLO], véa también el teorema 03.b del capítulo 0. Adicionalmente, la condición que el 0 es una singularidad no algebraicamente aislada del campo vectorial X, es por definición que la dimensión pura del conjunto singular complejo de X sea positiva, *i.e.* $\dim \mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(X) > 0$, algebraicamente se traduce en decir que las componentes de X vistas como elementos del anillo $\mathcal{O}$ no forman una sucesión regular o geométricamente, que la variedad afín de las componentes de X en $\mathbb{C}^n$ no es una intersección completa.

Cuando la singularidad aislada del campo vectorial analítico real X es algebraicamente aislada, Eisenbud y Levine demostraron que si

$$\phi : A_X = \frac{\mathcal{A}}{X^1\mathcal{A} + \cdots + X^n\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$$

es un funcional lineal tal que la clase del jacobiano, J_0, de X en A_X va a un valor positivo y si $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$ es la forma bilineal simétrica sobre el álgebra A_X definida por

$$\langle p, q \rangle := \phi(pq), \qquad \forall\, p, q \in A_X.$$

Entonces,

Teorema. *(Eisenbud–Levine) La forma bilineal simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es no degenerada, su signatura no depende de ϕ y*

$$\mathrm{Ind}_0 X = \text{signatura } \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Una demostratración de este teorema es el artículo de Eisenbud y Levine [EL], otra pueba del mismo resultado fue hecha por Arnold, Guzein–Zade y Varchenko en su libro *"Singularities of differentiable maps* [AGV, pág. 103] y un bosquejo de la misma (tomada de [AGV]) en el capítulo 0 sección §0.4 de este trabajo.

Si la singularidad aislada de X no es algebraicamente aislada, la fórmula de Eisenbud y Levine no hace sentido, ya que en ese caso el álgebra A_X es de dimensión infinita y por consiguiente, no tenemos un concepto bien definido de signatura de una forma bilineal definida sobre tal espacio. Más aún, no siempre hay funcionales lineales con un valor positivo en la clase del jacobiano. Así, la pregunta ahora es: ¿Qué pasa con el índice en puntos singulares no algebraicamente aislados? ¿Hay una fórmula algebraica para calcularlo? Mi problema de tesis doctoral es justamente sobre estas preguntas que han permanecido sin resolver.

Así que, el objetivo principal en este trabajo es **"investigar si existe una fórmula algebraica para calcular el índice de campos vectoriales analítico reales en puntos singulares que no son algebraicamente aislados"**.

En resumen, trabajaremos con campos vectoriales analítico reales con una singularidad aislada en 0 tal que su conjunto singular complejo es de dimensión pura positiva y nuestro objetivo es encontrar una fórmula algebraica para calcular el índice de Poincaré–Hopf. En la siguiente tabla se puede apreciar en qué casos ya existe una tal fórmula algebraica y cuales permanecen sin resolver. Por ejemplo, el cuadro del centro en la parte inferior, corresponde a nuestro problema.

$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{Sing}_{\mathbb{R}}(X)$ aislada		
Indice de Poincaré–Hopf	X	$X_{\mathbb{C}}$
$\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(X)$, aislada	Fórmula algebraica de Eisenbud–Levine	$\dim A_{X_{\mathbb{C}}}$
$\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(X)$, no aislada	Fómula algebraica de este trabajo *(en codimensión 1 y 2)*	ABIERTO

En lo que resta de esta sección hablaré de mi contribución al problema planteado. Para ello, es necesario definir una familia de campos vectoriales y hablar de un resultado que es fundamental en la primera parte de nuestro trabajo.

Vamos a denotar por $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, k)$ al conjunto de campos vectoriales analítico reales con una singularidad aislada en 0 y tal que $k := \mathrm{codimSing}_{\mathbb{C}}(X)$. Con esta notación, es claro que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, n)$ es un campo vectorial con una singularidad algebraicamente aislada en 0.

En el lema 1.2, probamos que los campos vectoriales en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$ tienen la característica particular que se escriben de la forma

$$X = fY,$$

donde f es una función analítico real con $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ ó $f(x) < 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ y $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ es un campo vectorial tal que $\mathrm{codimSing}_{\mathbb{C}}(Y) > 1$. Este resultado no es complicado en el caso complejo

[GH, pág. 13], [Gun] y [W, pág. 65], sin embargo, no es trivial el hecho que la factorización sea con una función y un campo vectorial analítico reales.

Nuestro primer resultado (teorema 1) resuelve el problema cuando el campo verctorial tiene una variedad de ceros complejos de codimensión uno.

Teorema 1. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$ y supongamos que el campo vectorial Y que se obtiene de X, al escribir $X = fY$ tiene una singularidad algebraicamente aislada en 0. Entonces*

$$M = \frac{f\mathcal{A}}{X^1\mathcal{A} + \cdots + X^n\mathcal{A}}$$

es una álgebra de dimensión finita, la clase J_0 de $\dfrac{JX}{f^{n-1}}$ en M es no cero y si $L : M \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal tal que $L(J_0) > 0$, entonces tenemos que el producto bilineal

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_L : M \times M \longrightarrow & M \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h, g) \longmapsto & \frac{hg}{f} \longmapsto L\left(\frac{hg}{f}\right) \end{aligned}$$

es una forma bilineal no degenerada, su signatura signatura$\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ no depende de L y

$$\mathrm{Ind}_0 X = (\mathrm{signo}(f))^n \, signatura \langle \cdot, \cdot \rangle_L.$$

En el caso particular que f es reducida fuera del origen, podemos rescatar la fórmula del teorema 1 a través de una forma bilineal sobre el álgebra $\dfrac{\mathcal{A}}{(I_X : \sqrt{I_X})}$ (proposición 1.5). La importancia de este resultado radica en el hecho que la forma bilineal que aparece es menos complicada que la que se usa en el teorema 1.

Si el campo vectorial tiene una variedad de ceros complejos de codimensión 2, encontramos una fórmula algebraica del índice para una famila generica de campos vectoriales y damos un teorema de clasificación. La famila de campos vectoriales a los que me refiero son los del **tipo A** segun la siguiente,

Definición. Diremos que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ es del **tipo A**, si satisface las siguientes tres condiciones

(i) X se escribe de la forma

$$X = fY^1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + fY^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + g\frac{\partial}{\partial x_n}$$

donde $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ y $g \in \mathcal{A}$.

(ii) El campo vectorial $Y = Y^1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + Y^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + g\frac{\partial}{\partial x_n}$ que se obtiene de X después de suprimir la función f de las primeras $n-1$ coordenadas, es un campo vectorial en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, k)$, con $2 < k \leq n$.

(iii) La variedad afín de las funciones analíticas f y g en $\mathbb{C}^n$ es de codimensión 2 y coincide con $\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(X)$.

Denotemos por $V(g)$ a la variedad afín de g y por $f|_{V(g)-\{0\}}$ a la restricción de f a $V(g) - \{0\}$. Observe que si $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ del **tipo A** es tal que el campo vectorial Y tiene al cero como una singularidad algebraicamente aislada, entonces $f|_{V(g)-\{0\}}$ es de un solo signo.

Teorema 2. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ del* **tipo A** *y supongase que el campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ que se obtiene de X, es un campo vectorial con una singularidad algebraicamente aislada en 0. Entonces,*

$$M = \frac{f\mathcal{A} + g\mathcal{A}}{X^1\mathcal{A} + \cdots + X^n\mathcal{A}} = fA_X + gA_X$$

es un álgebra de dimensión finita, la clase J_0 de $\frac{JX}{f^{n-2}} = fJY$ en M es no cero y si $L : M \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal tal que $L(J_0) > 0$ y definimos el producto bilineal

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_L : M \times M &\longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h, s) &\longmapsto \frac{hs}{f} \longmapsto L\left(\frac{hs}{f}\right). \end{aligned}$$

entonces tenemos que $\langle\cdot,\cdot\rangle_L$ *es una forma bilineal no degenerada, su signatura no depende de* L *y*

$$\mathrm{Ind}_0 X = \left(\textit{signo}\ f|_{V(g)-\{0\}}\right)^{n-1} \textit{signatura}\langle\cdot,\cdot\rangle_L.$$

El siguiente teorema nos dice qué tipo de campos vectoriales en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ pueden ser llevados a campos vectoriales del **tipo A** y consecuentemente podemos calcular su índice mediante la fórmula del teorema 2.

Teorema 3. *Sea* $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ *tal que* $\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(Z)$ *es intersección completa y reducida fuera del origen, con ecuaciones* $f = 0$ *y* $g = 0$*. Entonces, existen dos campos vectoriales* A *y* B *tal que*

$$Z = Af + Bg.$$

Ademas, si A *ó* B *no se anula en cero, entonces existe un difeomorfismo local* ψ *tal que*

$$\psi_* Z$$

es un campo vectorial en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ *del* **tipo A**.

La trascendencia de estos resultados es debido a que generalizan el resultado clásico de Eisenbud–Levine y de nueva cuenta se vé cómo el álgebra nos ayuda a calcular el índice y en consecuencia obtener información topológica de variedades. Una particularidad importante de estas fórmulas algebraicas, es el hecho que se puede hacer uso de la computadora para operar con ellas, por ejemplo, uno puede hacer uso del *Software para geometría y álgebra conmutativa "Macaulay 2"* desarrollado por M. Stillmann y D. Grayson [GS] (ejemplo 1.6), este programa de computación esta basado sobre la teoría de bases de Gröbner que recientemente ha proporcionado algoritmos para hacer calculos algebraicos. Algunas referencias sobre este tema son [AL], [CLO] y [V].

Para encontrar las fórmulas de los teoremas 1 y 2, fue necesario identificar un espacio de dimensión finita y posteriormente definir una forma bilineal cuya signatura es el índice. Lo sorprendente de ello es que haciendo uso del complejo de Koszul podemos rescatar estos espacios, segun lo muestran nuestros siguientes resultados.

Proposición 3.1. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, k)$ y K el complejo de Koszul para X. Entonces tenemos que*

$$H_{n-k}(K) \neq 0,$$

es un $H_0(K)$–módulo y $H_i(K) = 0, \forall i > n-k$.

En el caso que X tiene una variedad de ceros complejos de codimensión uno tenemos el,

Corolario 3.3. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$ y supongamos que el campo vectorial Y que se obtiene de X al escribir $X = fY$ tiene una singularidad algebraicamente aislada. Sea K el complejo de Koszul asociado a X. Entonces,*

$$ann_{H_0(K)} H_{n-1}(K) = \frac{f\mathcal{O}}{X^1\mathcal{O} + \cdots + X^n\mathcal{O}}$$

es el módulo M de dimensión finita del teorema 1.

Y si el conjunto singular complejo de X es de codimensión 2 y es del **tipo A** se tiene el,

Corolario 3.5. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ del* **tipo A** *y supongase que el campo vectorial Y que se obtiene de X tiene una singularidad algebraicamente aislada en 0. Sea K el complejo de Kozsul de X. Entonces,*

$$ann_{H_0(K)} H_{n-2}(K) = \frac{f\mathcal{O} + g\mathcal{O}}{X^1\mathcal{O} + \cdots + X^n\mathcal{O}}$$

es el módulo M de dimensión finita del teorema 2.

Estos resultados nos llevan a enunciar la siguiente,

Conjetura. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, k)$ y K su complejo de Koszul asociado. Entonces, el anulador de $H_{n-k}(K)$ como $H_0(K)$–módulo,*

$$ann_{H_0(K)} H_{n-k}(K)$$

es un espacio de dimensión finita, sobre el cual podemos definir una forma bilineal simétrica y no degenerada con la propiedad que el índice de X en 0 es la signatura de esta forma bilineal.

Esta tesis, esta distribuida en 4 capítulos, en el capítulo 0 enunciamos el material fundamental sobre la teoría del índice de Poincaré–Hopf. El capítulo

1 esta dedicado a la prueba del teorema 1, de la proposición 1.5 y damos algunos ejemplos donde hacemos el cálculo del índice mediante la fórmula del teorema 1 y con la ayuda de Macaulay 2.

El capítulo 2 contiene la prueba de los teoremas 2 y 3 así como ejemplos y algunas preguntas interesantes que han quedado sin resolver.

Finalmente, en el capítulo 3 definimos el complejo de Koszul K de campos vectoriales en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ y profundizamos sobre la relación entre los grupos de homología y el hecho que X sea un campo vectorial en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, k)$ (propocición 3.1). Probamos además de la proposición 3.1, los corolarios 3.2 y 3.5. También calculamos explicitamente el $n-1$ (teorema 3.2) y $n-2$ (teorema 3.4) grupo de homología de K cuando el campo vectorial es un elemento de $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$ y $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ del **tipo A**, respectivamente.

CAPÍTULO 0

MATERIAL FUNDAMENTAL

En este capítulo bosquejamos el material fundamental del índice de Poincaré–Hopf, así como algunos resultados a los que se hace referencia en las demostraciones de nuestros resultados.

§0.1 El grado de una aplicación

Definición 0.1a. *(Orientación)* Una orientación para un espacio vectorial de dimensión finita, es una clase de equivalencia de bases ordenadas. La relación de equivalencia es definida como sigue: La base ordenada $(b_1, \ldots, b_n)$ determina la misma orientación que la base $(b'_1, \ldots, b'_n)$ si

$$b'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j \quad \text{con} \quad \det(a_{ij}) > 0.$$

El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ tiene una orientación estandar correspondiente a la base canónica $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. En el caso de dimensión 0, es conveniente definir una "orientación" con el símbolo $+1$ ó -1.

Una variedad diferenciable *orientable* consiste de una variedad M junto con una orientación del espacio tangente, TM_x.

Sean M y N dos variedades orientables sin frontera de dimensión n y sea

$$f : M \longrightarrow N,$$

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

una aplicación C^1. Si M es compacto y N conexo, se define el grado de f de la siguiente manera.

Sea $x \in M$ un punto regular de f, así que

$$df_x : TM_x \longrightarrow TN_{f(x)},$$

es un isomorfismo lineal entre espacios orientados. Definimos el *signo* de df_x como $+1$ ó -1 de acuerdo a si df_x preserva ó cambia orientación, respectivamente.

Definición 0.1b. *(Grado de una aplicación)* Para cualquier valor regular $y \in N$ de f, definimos el grado de f en y como

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} signo\,(df_x)\,.$$

Observe que si $y \in N$ es un valor regular de f, se tiene que $f^{-1}(y)$ es un conjunto finito (posiblemente vacío), esto debido a que $f^{-1}(y) \subset M$ es siempre compacto y $f^{-1}(y)$ es un conjunto discreto pues f es inyectiva en una vecindad de cada $x \in f^{-1}(y)$.

Algunos resultados importantes sobre el grado de una aplicación, son:

Teorema 0.1c. *(El grado está bien definido) El entero* $\deg(f, y)$ *no depende del valor regular* y.

Demostración. La prueba de este resultado la puede encontrar en [M 1, pág. 28], [H, pág. 124] y en el caso real en [D, pág 6].
□

Teorema 0.1d. *(El grado es invariante bajo homotopias) Si f es C^1–homotópico a g, entonces*

$$\deg(f) = \deg(g).$$

Demostración. [M 1, pág. 28], [H, pág. 123] y [D, pág. 9].
□

§0.2 El índice de un campo vectorial

Consideremos un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y un campo vectorial C^1

$$X = \sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

sobre U, esto es, cada coordenada X^j de X es una aplicación C^1 definida en U, $X^j : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, n$. Supongamos que $a \in U$ es una singularidad aislada de X y sea $D^n_\epsilon = \{x \in U \, : \, ||x - a|| < \epsilon\}$ el n–disco centrado en a y radio ϵ. Consideremos la $(n-1)$–esfera S^{n-1}_ϵ con centro en a y radio ϵ la cual es la frontera de D^n_ϵ, con la orientación inducida del disco.

La función

$$\frac{X}{||X||} : S^{n-1}_\epsilon \longrightarrow S^{n-1},$$

aplica una esfera suficientemente pequeña en la $(n-1)$–esfera unitaria.

Definición 0.2a. *(Indice)* El índice de Poincaré–Hopf del campo vectorial X en el punto singular aislado a, $\mathrm{Ind}_a X$, es el grado de la aplicación

$$\frac{X}{||X||} : S^{n-1}_\epsilon \longrightarrow S^{n-1}.$$

Esta definición es un concepto topológico y se demuestra que es invariante bajo difeomorfismos de U. Para explicar esto, consideremos la situación más general de una aplicación $f : M \longrightarrow N$, con un campo vectorial sobre cada variedad, M y N.

Definición 0.2b. *(Correspondencia de campos vectoriales)* Los campos vectoriales X sobre M y Y sobre N "corresponden" bajo f si la derivada df_x, de f en x, aplica el vector $X(x)$ en el vector $Y(f(x))$ para cada $x \in M$.

Si f es un difeomorfismo, entonces Y es únicamente determinado por X, para ello usamos la notación

$$Y = df \circ X \circ f^{-1}.$$

Teorema 0.2c. *(Invarianza del índice bajo difeomorfismos) Supongase que el campo vectorial X sobre U corresponde al campo vectorial*

$$Y = df \circ X \circ f^{-1},$$

sobre U' bajo un difeomorfismo $f : U \longrightarrow U'$. Entonces el índice de X en un punto singular aislado a, es igual al índice de Y en $f(a)$, i.e.

$$\mathrm{Ind}_a X = \mathrm{Ind}_{f(a)} Y.$$

Demostración. [M 1, pág. 33] y [AGV, pág. 87 y 89].
□

Definición 0.2d. *(Campos vectoriales no degenerados)* El campo vectorial X es no degenerado en el punto a, si la transformación lineal dX_a es no singular.

Esta definición implica que a es un punto singular aislado y podemos calcular el índice de X en a por medio del jacobiano de X.

Teorema 0.2e. *(El índice de campos vectoriales no degenerados) El índice de un campo vectorial X en un punto singular no degenerado a, es $+1$ ó -1 de a cuerdo a si el signo del determinante de dX_a es positivo o negativo.*

Demostración. [M 1 pág. 37] y [D, pág 134].
□

El índice de un campo vectorial, satisface la "ley de conservación del número", esto es, sea X un campo vectorial con una singularidad aislada en a, t un parámetro y X_t una perturbación de X tal que $X_0 = X$.

Teorema 0.2d. *(Aditividad del índice) Sea X un campo vectorial con una singularidad aislada en a, y X_t una perturbación de X con puntos singulares aislados, $p_1, \ldots, p_r$. Entonces,*

$$\mathrm{Ind}_a X = \sum_{j=1}^{r} \mathrm{Ind}_{p_j} X_t.$$

Demostración. [AGV, pág. 87 y 89], [D, pág. 141].
□

§0.3 Fómula del índice de campos vectoriales holomorfos

Sea $Z = \sum_{k=1}^{n} Z^k \frac{\partial}{\partial z_k}$ un germen de campo vectorial holomorfo con una singularidad aislada en 0. Denotemos por $\mathcal{O}$, al anillo de gérmenes de funciones holomorfas sobre $\mathbb{C}^n$ en 0 y sea $I_Z = Z^1\mathcal{O} + \cdots + Z^n\mathcal{O}$ el ideal generado por las componentes de Z.

Definición 0.3a. *(Multiplicidad)* La multiplicidad de Z en el punto singular 0 es la dimensión de su álgebra local,

$$\mu_0 Z = \dim A_Z; \quad A_Z = \frac{\mathcal{O}}{I_Z}.$$

El gérmen Z se llama de multiplicidad finita, si su multiplicidad es finita.

Los teoremas importantes en este contexto, son los siguientes.

Teorema 0.3b. *Un gérmen de campo vectorial holomorfo, deja de ser de multiplicidad finita en un punto a, si y sólo si a es una imagen inversa no aislada del cero del gérmen.*

Demostración. [AGV, pág. 86].
□

Este teorema lo que dice es que el punto singular de Z es aislado si y sólo si $\mu_0 Z$ es finito.

Teorema 0.3c. *El índice de un campo vectorial holomorfo, con una singularidad aislada en* 0 *coincide con su multiplicidad, esto es*

$$\mathrm{Ind}_0 Z = \dim A_Z = \mu_0 Z.$$

Bosquejo de la prueba. Una demostración completa de este teorema la puede encontrar en [AGV, pág. 86]. Aquí solo haremos el cálculo para un campo vectorial en particular (la aplicación Pham) y el resultado se obtiene usando la propiedad de invarianza del índice, aditividad y la multiplicidad bajo equivalencias.

Sea $Z^m = \sum_{k=1}^{n} z_k^{m_k} \frac{\partial}{\partial z_k}$ un campo vectorial, es claro que 0 es una singularidad aislada de Z^m. A la aplicación definida por este campo vectorial se le llama "aplicación Pham".

Afirmación: El índice y la multiplicidad de Z^m, coinciden.

El índice de Z^m, es el grado de la aplicación $\frac{Z^m}{\|Z^m\|} : S_\epsilon^{2n-1} \longrightarrow S^{2n-1}$ que es igual al número de soluciones del sistema de ecuaciones

$$z^{m_1} = \epsilon_1, \ldots, z^{m_n} = \epsilon_n,$$

para una $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ general. Esto debido a que, el determinante de la forma real $\hat{A} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, de una aplicación lineal compleja $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es siempre positivo [AGV, pág. 90] y así, por el teorema 0.2e cualquier aplicación holomorfa no cambia orientación [AGV, pág. 90]. Por lo tanto

$$\mathrm{Ind}_0 Z^m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n.$$

Ahora, vamos a encontrar la dimensión del álgebra local de Z^m. Para ello, encontramos una base de

$$A_{Z^m} = \frac{\mathcal{O}}{z_1^{m_1}\mathcal{O} + \cdots + z_n^{m_n}\mathcal{O}}.$$

Sea $I = (i_1, \ldots, i_n)$ un multi–índice, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ y

$$f(z) = \sum_{|I|=0}^{\infty} a_I z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n},$$

una funcion holomorfa. Observe que todos los monomios $z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$ para el cual hay un índice $i_k \geq m_k$ es cero en A_{Z^m}. Así, una base para A_{Z^m} son todos los monomios de la forma

$$z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}, \quad \text{donde} \quad 0 \leq i_1 < m_1, \ldots, 0 \leq i_n < m_n.$$

Por lo tanto, la dimensión del álgebra local de Z^m es

$$\mu_0 Z^m = \dim A_{Z^m} = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$$

y así

$$\mathrm{Ind}_0 Z^m = \mu_0 Z^m.$$

□

Terminamos este capítulo con una sección sobre la fórmula algebraica de Eisenbud y Levine para calcular el índice de Poincaré–Hopf en puntos singulares algebraicamente aislados.

§0.4 Fórmula algebraica del índice de campos vectoriales reales con ceros algebraicamente aislados

Sea $X = \sum_{k=1}^{n} X^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ un gérmen de campo vectorial analítico real con una singularidad algebraicamente aislada en 0. Denotemos por $\mathcal{A}$, al anillo de gérmenes de funciones analítico reales sobre $\mathbb{R}^n$ en 0 y sea

$$I_X = X^1\mathcal{A} + \cdots + X^n\mathcal{A},$$

el ideal generado por las componentes de X.

Un punto singular aislado de X es algebraicamente aislado, si la dimensión del álgebra local de X es finita, [EL, pág. 19]. Así, el álgebra

$$A_X = \frac{\mathcal{A}}{I_X},$$

es de dimensión finita. Recordemos que el jacobiano de X es el determinante de la matriz $\left(\frac{\partial X^j}{\partial x_i}\right)$ de las derivadas parciales de las componentes de X y denotemos por J a la clase del jacobiano de X, en A_X.

Lema 0.4a. *La clase J del jacobiano de X es no cero en A_X.*

Demostración. [AGV, pág. 100] y [EL, pág. 35].
□

Consideremos una aplicación lineal $\alpha : A_X \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea B_α una forma bilineal sobre A_X, definida por la fórmula

$$B_\alpha(g,h) = \alpha(g \cdot h), \quad \forall g,h \in A_X.$$

Lema 0.4b. *La forma bilineal B_α es no degenreada si y sólo si $\alpha(J) > 0$.*

Demostración. [AGV, pág. 100], [EL, pág. 35].
□

El siguiente resultado es el teorema de Eisenbud y Levine sobre la fórmula de la signatura para encontrar el índice de Poincaré–Hopf.

Teorema 0.4c. *(Fórmula de la signatura) Sea X un campo vectorial analítico real, con una singularidad algebraicamente aislada en 0 y sea $J \in A_X$ la clase del jacobiano de X. Si $\alpha : A_X \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal tal que $\alpha(J) > 0$, y si, $\langle , \rangle = \langle , \rangle_\alpha$ es la forma bilineal simétrica sobre el anillo A_X definida por*

$$\langle p,q \rangle = \alpha(pq), \quad \forall p,q \in A_X.$$

Entonces,

$$\mathrm{Ind}_0 X = signatura\langle , \rangle.$$

Para poder aplicar este teorema, es necesario saber que hay funcionales lineales α, tal que $\alpha(J) > 0$. Esto es una consecuencia del lema 0.4a. El enunciado del teorema implica que la signatura de $\langle , \rangle_\alpha$ es independiente de la funcional lineal α y del valor que ésta toma en J. Ello se obtiene del lema 0.4b y el teorema se prueba usando una funcional lineal canónica.

Bosquejo de la demostración. Una demostración completa de este resultado puede encontrarla en [EL] y una prueba alternativa en [AGV, pág. 103]. El bosquejo de la prueba que presentamos en este trabajo esta basada en la prueba que dieron Arnold, Gusein–Zade y Varchenko en su libro.

El punto singular aislado de X se descompone en μ raíces complejas del sistema $X(x) = \epsilon$, para un valor regular pequeño ϵ. Sean $a_1, \ldots, a_n$ estas raíces. La involución de la conjugación compleja actúa sobre el conjunto de estas raíces.

Como 0 es una singularidad algebraicamente aislada, tenemos que $\dim A_X = \mu < \infty$. Fijemos μ polinomios $e_1, \ldots, e_\mu$ determinando una $\mathbb{R}$–base de $\dfrac{\mathbb{R}\{x\}}{I_X}$ y, consecuentemente una $\mathbb{C}$–base del álgebra $\dfrac{\mathbb{C}\{x\}}{I_X}$.

Denotemos por $L_\mathbb{R}$ al espacio de las combinaciones $\mathbb{R}$–lineales de los elementos de la base y por L al espacio de las combinaciones $\mathbb{C}$–lineales. Consideremos la forma bilineal B^ϵ definida sobre $L_\mathbb{R}$ por la fórmula

$$B^\epsilon(g,h) = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{g(a_i)h(a_i)}{J(a_i)}$$

donde J es la clase del jacobiano de X. Se tiene entonces que la signatura de esta forma bilineal es el número de raíces reales del sistema $X(x) = \epsilon$, contadas con el signo del jacobiano en a_i, [AGV, pág. 104]. Esto se tiene debido a que la signatura de la forma bilineal es igual a $J^+ - J^-$, donde J^+ denota al número de puntos fijos de la conjugación compleja sobre los cuales $J > 0$ y J^- es el número de estos puntos fijos donde $J < 0$ y al hecho que las funciones de $L_\mathbb{R}$ sobre el conjunto de las raíces complejas $(a_1, \ldots, a_n)$ y solo sobre éstas son invariantes bajo la conjugación compleja.

Luego, por este resultado y el teorema 0.2e se tiene que

$$\mathrm{Ind}_0 X = \mathit{signatura}\,(B^\epsilon)\,.$$

Finalmente, al hacer tender ϵ a cero se concluye que la forma bilineal B^ϵ tiende a una forma bilineal bien definida B, la cual corresponde a la aplicación lineal

$$\alpha_0(h) = \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{h(a_i)}{J(a_i)}.$$

La forma bilineal B es no degenerada y $\alpha_0(J) > 0$. Consecuentemente, la signatura de B, igual que la signatura de la forma bilineal pre–límite B^ϵ, es el índice de X en 0.

Así, hemos probado la fórmula de la signatura para la forma bilineal especial B que esta definida a través de la funcional lineal α_0.
$\square$

CAPÍTULO 1

EL ÍNDICE DE CAMPOS VECTORIALES REALES CON CEROS COMPLEJOS DE CODIMENSIÓN UNO

Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ y supongamos que $\mathrm{Sing}_{\mathbb{R}}(X) = \{0\}$, *i.e.*, la única singularidad aislada del campo vectorial X es el origen. Es claro que la singularidad aislada de X es también singularidad de $X_{\mathbb{C}}$, sin embargo, ésta podría no ser aislada. Un ejemplo sencillo es el campo vectorial

$$X = \left(x^2 + y^2\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(x^2 + y^2\right) \frac{\partial}{\partial y},$$

observe que $\mathrm{Sing}_{\mathbb{R}}(X) = \{0\}$ y $\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(X) = \{y = ix\} \cup \{y = -ix\}$ son dos rectas. El índice de este campo vectorial real está claramente definido y de hecho vale cero, pues al sumarle una constante distinta de cero a una de las componentes de X se destruye la singularidad y en ese caso el índice vale cero. Así, $\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(X)$ puede ser una variedad de codimensión k con $k = 1, 2, \ldots, n$.

En este capítulo, estudiaremos nuestro problema en el caso de campos vectoriales analítico reales con singularidad aislada en 0 y tal que los ceros complejos del campo vectorial complejificado es una hipersuperficie, *i.e.* campos vectoriales en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$.

§1.1 Fórmula algebraica del índice de campos vectoriales reales con ceros complejos en una hipersuperficie.

En esta sección vamos a probar el teorema 1, para ello demostramos algunos resultados que son necesarios.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Lema 1.1. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ un campo vectorial con singularidad aislada en 0 de la forma $X = fY$, donde*

$$f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$

es una función que no cambia de signo fuera del 0 y $Y = \sum_{k=1}^{n} Y^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ es otro campo vectorial analítico real. Entonces

$$\mathrm{Ind}_0 X = (\mathrm{signo}(f))^n \mathrm{Ind}_0 Y.$$

Demostración. Como $X(0) = 0$, $f(0) = 0$ y $X = fY$ tenemos que $Y(0) \neq 0$ ó $Y(0) = 0$. Si $Y(0) \neq 0$ el resultado se satisface trivialmente, ya que $\mathrm{Ind}_0 Y = 0$ y al sumarle una constante positiva a f, se destruye la singularidad de X y por lo tanto el índice de X en 0, también vale cero.

En el caso que $Y(0) = 0$ entonces el 0 es singularidad aislada de Y ya que de lo contrario tampoco seria singularidad aislada de X. Luego, tenemos definido el índice de Y en 0 y por lo tanto existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(0) \cap \mathrm{Sing}_{\mathbb{R}}(X) = \{0\}$ y $B_\epsilon(0) \cap \mathrm{Sing}_{\mathbb{R}}(Y) = \{0\}$. Por definición, el índice de X en 0 es el grado de la aplicación $\frac{X}{||X||} : \partial B_\epsilon(0) \longrightarrow S_1^{n-1}$ y como

$$\begin{aligned} \frac{X}{||X||} &= \frac{fY}{||fY||} = \frac{f}{|f|} \frac{Y}{||Y||} \\ &= (\mathrm{signo}(f)) \frac{Y}{||Y||} \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_0 X &= grado\left(\frac{X}{||X||}\right) = grado\left((\mathrm{signo}(f)) \frac{Y}{||Y||}\right) \\ &= (\mathrm{signo}(f))^n \left[grado\left(\frac{Y}{||Y||}\right)\right] \\ &= (\mathrm{signo}(f))^n \,\mathrm{Ind}_0 Y. \end{aligned}$$

$\square$

Observe que en dimensión par el índice de $X = fY$ en el punto singular es el índice de Y en el mismo punto. En el ejemplo de la introducción de este capítulo, $X = fY$ donde $f = x^2 + y^2$ y $Y = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, así. Por el lema 1.1, $\mathrm{Ind}_0 X = \mathrm{Ind}_0 Y = 0$.

Lema 1.2. *Si* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$, *existe una función* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *con la propiedad que* $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ *ó* $f(x) < 0$ *para toda* $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *y un campo vectorial*

$$Y = \sum_{k=1}^{n} Y^k \frac{\partial}{\partial x_k} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$$

analítico reales tal que X *se escribe en la forma*

$$X = fY.$$

Demostración. Puesto que $(\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(X))$ es una hipersuperficie en $\mathbb{C}^n$, existe una función g (holomorfa) que es factor común de las las componentes de X [[GH], [Gun] y [W]] esto es

$$X^i = gY^i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.1.1}$$

Por otro lado, como $\mathcal{O}$ es un dominio de factorización única [GH] tenemos la descomposición en factores primos de cada coordenada del campo vectorial X,

$$X^i = u_i \prod_{j=1}^{k_i} X^{i,j}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.1.2}$$

En $\mathbb{C}\{x\}$ tenenos definida la aplicación conjugación $^-$ en los coeficientes de las funciones holomorfas,

$$\begin{aligned} ^-\colon \mathbb{C}\{x\} &\longrightarrow \mathbb{C}\{x\} \\ h = \sum_{|I|=0}^{\infty} a_I x^I &\longmapsto \bar{h} = \sum_{|I|=0}^{\infty} \bar{a}_I x^I \end{aligned}$$

En particular, como $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\bar{X}^i = X^i, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n \tag{1.1.3}$$

Así, para cada i fijo se tiene que en la descomposición en factores primos de X^i cualquier $X^{i,j}$ tiene su conjugado, es decir, dado X^{i,j_0} en la descomposición en primos de X^i existe j_0' tal que $X^{i,j_0'}$ esta en dicha descomposición y $\bar{X}^{i,j_0} = X^{i,j_0'}$. Por lo tanto, X^i se puede escribir de la forma

$$X^i = u_i \left(\prod_{j=1}^{k_{i_0}} X^{i,j} \right) \left(\prod_{j=1}^{k_{i_0}} \bar{X}^{i,j} \right)$$

Ahora, por (1.1.1) hay elementos $X^{i,j}$ que pertenecen a la descomposición en primos de todos los X^i, así, por (1.1.2) también está su conjugado y por lo tanto podemos concluir que los $X^1, \ldots, X^n$ tienen un factor común f que es de hecho analítico real, esto es

$$X^i = fY^i, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n \tag{1.1.4}$$

con f analítico real ($\bar{f} = f$). Por (1.1.3) y (1.1.4) se tiene que

$$\bar{Y}^i = Y^i, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$$

lo cual implica que Y^i es analítico real para cada $i = 1, \ldots, n$.

Por lo tanto $Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ esta en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ y $X = fY$. Claramente $f(0) = 0$ pues $0 \in \mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(X)$ y es de un solo signo en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ya que de lo contrario, 0 no es singularidad aislada de X.

En el caso que los X^i son polinomios, el factor común f se puede encontrar usando el algoritmo para encontrar el máximo común divisor mediante bases de Gröbner [CLO, pág. 188]

□

La importancia del lema 1.2 es en el sentido que la función que se factoriza del campo vectorial X, no cambia de signo fuera del cero y es analítico real.

Lema 1.3. *Sea* $X = \sum_{k=1}^{n} X^k \frac{\partial}{\partial x_k} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ *de la forma* $X = fY$. *Entonces, la clase del jacobiano de* X *en* A_X *es*

$$JX = [(unidad) f^n JY] \in A_X = \frac{\mathcal{A}}{(X^1, X^2, \ldots, X^n)}$$

donde JY *es el jacobiano de* Y.

Demostración. Una propiedad de los determinantes es

$$\det\left(A^1, \ldots, A^{j-1}, B + sC, A^{j+1}, \ldots, A^n\right) =$$
$$\det\left(A^1, \ldots, A^{j-1}, B, A^{j+1}, \ldots, A^n\right) + s \det\left(A^1, \ldots, A^{j-1}, C, A^{j+1}, \ldots, A^n\right)$$

donde A^j, B y C son vectores columnas. Esta propiedad la usaremos repetidamente en la prueba de este lema así como también la propiedad que dice que si una matriz tiene dos columnas iguales entonces su determinante es cero.

Por hipótesis, $X = \sum_{k=1}^{n} fY^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ con $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $Y = \sum_{k=1}^{n} Y^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ analítico reales. Definamos

$$Y^T = \begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix}, \quad Y_{x_j}^T = \begin{pmatrix} Y_{x_j}^1 \\ \vdots \\ Y_{x_j}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Y^1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial Y^n}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

$$A_j = f_{x_j} Y^T \quad \text{y} \quad B_j = f Y_{x_j}^T,$$

donde $f_{x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ y $j = 1, 2, \ldots, n$. Con esta notación, la regla de Leibniz se escribe

$$JX = \det\left(A_1 + B_1, \ldots, A_n + B_n\right)$$

Usando las propiedes del determinante mencionadas arriba, JX se descompone como una suma de determinantes de matrices donde cada una de ellas es de la forma $S = (S_1, \ldots, S_n)$ con $S_j = A_j$ ó $S_j = B_j$, $j = 1, \ldots, n$. Para cualquier matriz S tal que existen dos columnas, digamos S_j y S_k con $j < k$, para las cuales $S_j = A_j$ y $S_k = A_k$ entonces

$$\begin{aligned}\det(S) &= \det\left(S_1, \ldots, A_j, \ldots, A_k, \ldots, S_n\right)\\ &= f_{x_j} f_{x_k} \det\left(S_1, \ldots, Y^T, \ldots, Y^T, \ldots, S_n\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Por otro lado, si S es tal que $S_j = B_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$ excepto para una única $j = k$ para la cual $S_k = A_k$ se tiene que

$$\begin{aligned}\det(S) &= \det\left(B_1, \ldots, B_{k-1}, A_k, B_{k+1} \ldots, B_n\right)\\ &= \det\left(fY_{x_1}^T, \ldots, fY_{x_{k-1}}^T, f_{x_k} Y^T, fY_{x_{k+1}}^T \ldots, fY_{x_n}^T\right)\\ &= f^{n-2} f_{x_k} \det\left(Y_{x_1}^T, \ldots, Y_{x_{k-1}}^T, fY^T, Y_{x_{k+1}}^T \ldots, Y_{x_n}^T\right)\end{aligned}$$

es un elemento de I_X y por lo tanto es cero en A_X. Por último, cuando S es tal que $S_j = B_j$, $\forall j = 1, \ldots, n$ se sigue que

$$\begin{aligned}\det(S) &= \det\left(B_1, B_2, \ldots, B_n\right)\\ &= \det\left(fY_{x_1}^T, fY_{x_2}^T, \ldots, fY_{x_n}^T\right)\\ &= f^n \det\left(Y_{x_1}^T, Y_{x_2}^T, \ldots, Y_{x_n}^T\right)\\ &= f^n JY\end{aligned}$$

donde JY es el jacobiano del campo Y. Así, $JX = [(unidad) f^n JY] \in A_X$.
□

Los resultados anteriores son los elementos necesarios para dar la demostración del teorema 1.

Teorema 1. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$ y supongamos que el campo vectorial Y que se obtiene de X, al escribir $X = fY$ tiene una singularidad algebraicamente aislada en 0. Entonces*

$$M = \frac{f\mathcal{A}}{X^1\mathcal{A} + \cdots + X^n\mathcal{A}}$$

es una álgebra de dimensión finita, la clase J_0 de $\dfrac{JX}{f^{n-1}}$ en M es no cero y si $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal tal que $L(J_0) > 0$, entonces tenemos que el producto bilineal

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle_L : M \times M &\longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h,g) &\longmapsto \frac{hg}{f} \longmapsto L\left(\frac{hg}{f}\right) \end{aligned}$$

es una forma bilineal no degenerada, su signatura signatura$\langle\cdot,\cdot\rangle_L$ no depende de L y

$$\mathrm{Ind}_0 X = (\mathrm{signo}(f))^n \, signatura\langle\cdot,\cdot\rangle_L.$$

Demostración. Como el campo vectorial Y tiene una singularidad algebraicamente aislada en 0, tenemos que

$$A_Y = \frac{\mathcal{A}}{Y^1\mathcal{A} + \cdots + Y^n\mathcal{A}}$$

es una álgebra de dimensión finita.

Denotemos por ϕ a la aplicación sobre $\mathcal{A}$ que es multiplicación por f, esto es,

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ h &\longmapsto \phi(h) = fh. \end{aligned}$$

La imagen de ϕ es el ideal generado por f en $\mathcal{A}$. Además, la imagen bajo ϕ del ideal generado por las componentes de Y, es el ideal de las componentes de X, véa el diagrama 1.0. Por lo tanto la aplicaciónϕ resulta ser un isomorfismo de A_X a M y así M es de dimensión finita.

Por el lema 1.3, $JX = (unidad) f^n JY \in A_X$. Tenemos entonces que $\dfrac{JX}{f^{n-1}} = fJY \in A_X$ y por lo tanto $J_0 = [fJY] \in M$. Como $JY \in A_Y$ es no cero [EL] y $\phi(JY) = J_0$, se sigue que J_0 es no cero. El hecho que J_0 es no cero nos garantiza que hay funcionales lineales sobre M con un valor positivo en J_0.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & I_Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \frac{\mathcal{A}}{I_Y} = A_Y \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_X \arrow[r, hook] \arrow[d] & f\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{f\mathcal{A}}{I_X} = M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

DIAGRAMA 1.0

Sea $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que $L(J_0) > 0$ y definamos la aplicación bilineal

$$
\begin{aligned}
\langle \cdot, \cdot \rangle_L : M \times M &\longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{R} \\
(h, g) &\longmapsto \frac{hg}{f} \longmapsto L\left(\frac{hg}{f}\right).
\end{aligned}
$$

Definamos la aplicación

$$
\begin{aligned}
L' : A_Y &\longrightarrow \mathbb{R} \\
g &\longmapsto L'(g) = L(fg).
\end{aligned}
$$

Como L es lineal y $L(J_0) > 0$ tenemos que L' es lineal con $L'(JY) > 0$. Por el teorema de Eisenbud y Levine se tiene que $\mathrm{Ind}_0 Y = signatura \langle \cdot, \cdot \rangle_{L'}$ donde

$$
\begin{aligned}
\langle \cdot, \cdot \rangle_{L'} : A_Y \times A_Y &\longrightarrow A_Y \longrightarrow \mathbb{R} \\
(h, g) &\longmapsto hg \longmapsto L'(hg).
\end{aligned}
$$

$$\begin{tikzcd}
A_Y \times A_Y \arrow[r] \arrow[d, "\phi\times\phi"'] & A_Y \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "L'"] & \\
M \times M \arrow[r, "\cdot(1/f)"'] & M \arrow[r, "L"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMA 1.1

Usando el isomorfismo $\phi : A_Y \longrightarrow M$ se tiene que el diagrama (1.1) conmuta y por lo tanto $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ es un producto bilineal no degenerado, su signatura no depende de L y es igual a la de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L'}$ que es el índice de Y en 0.
Luego, por el lema 1.1 se obtiene que

$$\mathrm{Ind}_0 X = (\mathrm{signo} f)^n \; signatura \langle \cdot, \cdot \rangle_L.$$

□

Ejemplo 1.4. Consideremos el campo vectorial

$$X = \left(x^3 + y^2 x + z^2 x\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(x^2 y + y^3 + z^2 y\right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(x^2 z + y^2 z + z^3\right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Realizando los calculos adecuados tenemos que

$$\mathrm{Sing}_{\mathbb{R}}(X) = \{0\} \quad \text{y} \quad \mathrm{codimSing}_{\mathbb{C}}(X) = 1.$$

En este caso, el conjunto singular complejo de X es un cono en $\mathbb{C}^3$. Lo anterior indica que $X \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3, 1\right)$.

Observe que

$$X^1 = xf, \quad X^2 = yf \quad \text{y} \quad X^3 = zf$$

donde $f = x^2 + y^2 + z^2$ es una función analítico real con la propiedad que

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f(x) > 0, \; \forall x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}.$$

Así, $X = fY$ donde Y es el campo vectorial analítico real

$$Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

el cual tiene una singularidad algebraicamante aislada en cero.

Sea $M = \dfrac{f\mathcal{A}}{X^1\mathcal{A}+X^2\mathcal{A}+X^3\mathcal{A}} = f A_X$. Una base de M es $\{f\}$ y $J_0 = 3f$. Definimos $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(f) = 1$, luego $L(J_0) = 3 > 0$ y por lo tanto la matriz que representa a la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle_L$ en esta base es la matriz de 1×1, (1) que tiene signatura $+1$. Así, por el teorema 1,

$$\mathrm{Ind}_0 X = 1.$$

Si le cambiamos de signo a las componentes de X, es claro que el índice también debe cambiar por un signo. Veamos cómo se refleja esto en nuestro resultado, para ello, ahora el campo vectorial X es

$$X = \left(-x^3 - y^2x - z^2x\right)\frac{\partial}{\partial x} - \left(x^2y + y^3 + z^2y\right)\frac{\partial}{\partial y} - \left(x^2z + y^2z + z^3\right)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Tenemos entonces que $f = -x^2 - y^2 - z^2$ y por lo tanto $f < 0$ en $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, M tiene base $\{f\}$, $J_0 = 3f$ y si definimos $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(f) = 1$ entonces $L(J_0) = 3$ y la signatura de $\langle\cdot,\cdot\rangle_L$ es $+1$. Por el teorema 1 tenemos que

$$\mathrm{Ind}_0 X = -1.$$

§1.2 Una fórmula alternativa

La siguiente proposición nos da una manera alternativa de calcular el índice de campos vectoriales en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$, al agregarles una hipótesis adicional.

Proposición 1.5. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$ y supongamos que el campo vectorial Y que se obtiene de X al escribir $X = fY$, tiene una singularidad algebraicamente aislada en 0. Si f es reducida y $J = \sqrt{I_X}$, entonces la clase J_0' del jacobiano de Y en*

$$M' = \frac{\mathcal{A}}{(I_X : J)}$$

es no cero y si $L : M' \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal tal que $L(J_0') > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle_L : M' \times M' &\longrightarrow M' \longrightarrow \mathbb{R}\\ (h,g) &\longmapsto hg \longmapsto L(hg)\end{aligned}$$

es una forma bilineal no degenerada y

$$\mathrm{Ind}_0 X = (\mathrm{signo}(f))^n \mathit{signatura}\langle \cdot, \cdot \rangle_L.$$

Demostración. Claramente $I_X = (f)I_Y$ donde $(f)I_Y$ es el producto de ideales. Luego,

$$\begin{aligned} \sqrt{I_X} &= \sqrt{(f)I_Y} \\ &= \sqrt{(f) \cap I_Y} \\ &= \sqrt{(f)} \cap \sqrt{I_Y}. \end{aligned}$$

Como f es reducida y $\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(Y) = \{0\}$, se tiene que $\sqrt{(f)} = (f)$ y el radical de I_Y es el ideal maximal (teorema de Nullstellensatz, [E]). Por lo tanto,

$$J = \sqrt{I_X} = (f) \cap (x_1, \ldots, x_n) = (f).$$

Luego, $(I_X : J) = (JI_Y : J) = I_Y$ y en consecuencia

$$M' = \frac{\mathcal{A}}{(I_X : J)} = \frac{\mathcal{A}}{Y^1\mathcal{A} + \cdots + Y^n\mathcal{A}}$$

es una álgebra de dimensión finita ya que el origen es singularidad algebraicamente aislada de Y. Por lo tanto, la clase J_0' de JY en M' es no cero. Finalmente, por el teorema de Eisenbud y Levine, $\mathrm{Ind}_0 Y = \mathit{signatura}\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ y por el lema 1.1 se concluye la prueba

□

Ejemplo 1.6. Conderemos el campo vectorial

$$X = \left(y^4 - x^4\right) \frac{\partial}{\partial x} - 2\left(x^3 y + xy^3\right) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Mediante calculos sencillos, tenemos que

$$\mathrm{Sing}_{\mathbb{R}}(X) = \{0\} \quad \text{y} \quad \mathrm{codimSing}_{\mathbb{C}}(X) = 2$$

ya que

$$\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(X) = \{x - iy = 0\} \cup \{x + iy = 0\}$$

son dos rectas en $\mathbb{C}^2$. Es decir, $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2, 1)$. El radical de I_X es $J = (f)$ donde $f = x^2 + y^2$ y

$$Y = \left(y^2 - x^2\right) \frac{\partial}{\partial x} - 2xy \frac{\partial}{\partial y}$$

es un campo vectorial tal que $X = fY$ y con una singularidad algebraicamente aislada en 0. Observe que $f(0) = 0$ y $f < 0$ en $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

Una base para M' es $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ donde $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = y$, $e_4 = y^2$ y $J_0' = 8y^2$. Definimos el funcional $L : M' \longrightarrow \mathbb{R}$ que manda e_4 a 1 y todos los demas elementos de la base a 0. Claramente, $L(J_0') > 0$ y en esta base, la matriz $B = (L(e_i e_j))_{i,j=1}^4$ que representa a $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ es

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene signatura 2. Por lo tanto, $\mathrm{Ind}_0 X = 2$.

Los comandos en Macaulay 2 para resolver el ejemplo anterior, son los siguientes:

```
i1 : R=QQ[x,y,MonomialOrder=>Lex]
o1 = R
o1 : PolynomialRing

i2 : X1=y^4-x^4
o2 = -x^4+y^4
o2 : R
```

```
i3 : X2=-2*(x^3*y+x*y^3)
           3         3
o3 = -2x y - 2x*y
o3 : R

i4 : JX=det jacobian matrix{{X1,X2}}
        6       4 2       2 4      6
o4 = 8x  + 24x y  + 24x y  + 8y
o4 : R

i5 : I=ideal(X1,X2)
              4    4       3          3
o5 = ideal(-x  + y  ,-2x y - 2x*y  )
o5 : R

i6 : J=radical I
              2    2
o6 = ideal(x  + y  )
o6 : ideal of R

i7 : f=x^2+y^2
      2    2
o7 = x  + y  )
o7 : R

i8 : M=R/(I:J)
o8 = M
o8 : QuotientRing

i9 : basis(M)
o9 = {0} |1 x y y2|
                1     4
o9 : Matrix M  <-- M
```

```
i10 : J'o=promote(JX//(f^2),M)
            2
o10 = 16y
o10 : M

i11 : E={1,x,y,y^2}
                   2
o11 = {1, x, y, y }
o11 : List

i12 : F=(u,v)->u*v
o12 = F
o12 : Function

i13 : Tab=MatrixExpression table(E,E,F)

      |             2|
o13 = | 1  x  y  y   |
      |    2         |
      | x y   0  0   |
      |       2      |
      | y  0 y   0   |
      | 2            |
      |y   0 0   0   |

o13 : MatrixExpression
```

Solo nos resta definir el funcional lineal $L : M' \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(J_0') > 0$ y sustituir los valores $\langle e_i, e_j \rangle = L(e_i e_j)$ en "Tab" para obtener B y posteriormente encontrar la signatura de B usando un método adecuado, por ejemplo el método de Lagrange ó Jacobi, [G].

CAPÍTULO 2

EL ÍNDICE DE CAMPOS VECTORIALES REALES CON CEROS COMPLEJOS DE CODIMENSIÓN DOS

En este capítulo damos la prueba del teorema 2 y describimos qué tipo de campos vectoriales son del **tipo A** después de un cambio de coordenadas.

§2.1 Fórmula algebraica del índice para una familia de campos vectoriales reales con ceros complejos de codimensión dos

En toda esta sección, el campo vectorial X siempre será un elemento de $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ del **tipo A**, es decir, X es un campo vectorial analítico real con una singularidad aislada en el origen tal que su conjunto singular complejo es una variedad de codimensión 2 en $\mathbb{C}^n$. Además, X se escribe de la forma

$$X = fY^1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + fY^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + g\frac{\partial}{\partial x_n}$$

con $f(0) = 0$ y $f, g \in \mathcal{A}$.

Denotaremos por Y al campo vectorial analítico real que se obtiene de X, después de suprimir la función f de las primeras $n-1$ coordenadas, quedandonos

$$Y = Y^1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + Y^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + g\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Recuerde que Y es un elemento de $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, k)$, donde $2 < k \leq n$. Es claro que n debe ser mayor que 2.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Lema 2.1. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ un campo vectorial del* **tipo A**. *Entonces, el jacobiano de X en A_X es (unidad)$f^{n-1}JY$, donde JY es el jacobiano de Y.*

Demostración. Puesto que X es del **tipo A**, se tiene que X se escribe como arriba. Tenemos entonces una función f y un campo vectorial Y, analítico reales. Definamos

$$U^T = \begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad U^T_{x_j} = \begin{pmatrix} Y^1_{x_j} \\ \vdots \\ Y^{n-1}_{x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Y^1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial Y^{n-1}}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

$$A_j = f_{x_j} U^T \quad \text{y} \quad B_j = f U^T_{x_j},$$

donde $f_{x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Luego, el jacobiano de X es

$$\begin{aligned} JX &= \det\left(\frac{\partial X^i}{\partial x_j}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 & \cdots & A_n + B_n \\ g_{x_1} & g_{x_2} & \cdots & g_{x_n} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} g_{x_j} \det\begin{pmatrix} A_1 + B_1 & \cdots & \widehat{A_j + B_j} & \cdots & A_n + B_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $\widehat{A_j + B_j}$ significa que es removido. Ahora, siguiendo la prueba del lema 1.3 el resultado se sigue.

□

Definamos ahora los siguientes objetos

$$A_g = \frac{\mathcal{A}}{g\mathcal{A}};$$

$$M = \frac{f\mathcal{A} + g\mathcal{A}}{fY^1\mathcal{A} + \cdots + fY^{n-1}\mathcal{A} + g\mathcal{A}};$$

$$N = \frac{fA_g}{fY^1A_g + \cdots + fY^{n-1}A_g} \quad \text{y}$$

$$A_Y = \frac{\mathcal{A}}{Y^1\mathcal{A} + \cdots + Y^{n-1}\mathcal{A} + g\mathcal{A}}.$$

El siguiente lema es fundamental para la prueba del teorema 2.

Lema 2.2. *Sea* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ *del* **tipo A**. *Entonces tenemos que*

$$M \cong N \cong A_Y.$$

Demostración. Primero demostramos que $M \cong N$. Para ello, definase la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_g : \mathcal{A} &\longrightarrow A_g \\ h &\longmapsto [h]. \end{aligned}$$

Observe que la cadena de ideales $0 \subset fY^1\mathcal{A} + \cdots + fY^{n-1}\mathcal{A} + g\mathcal{A} \subset f\mathcal{A} + g\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, se proyecta en la cadena $0 \subset fY^1A_g + \cdots + fY^{n-1}A_g \subset fA_g \subset A_g$, mediante la aplicación π_g, diagrama 2.2.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook] & fY^1\mathcal{A} + \cdots + fY^{n-1}\mathcal{A} + g\mathcal{A} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_g"] & f\mathcal{A} + g\mathcal{A} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_g"] & \mathcal{A} \arrow[d, "\pi_g"] \\
0 \arrow[r, hook] & fY^1A_g + \cdots + fY^{n-1}A_g \arrow[r, hook] \arrow[d] & fA_g \arrow[r, hook] \arrow[d] & A_g \arrow[d] \\
 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMA 2.2

Puesto que el kernel de π_g es el ideal $g\mathcal{A}$ y tenemos la cadena de ideales $g\mathcal{A} \subset fY^1\mathcal{A} + \cdots + fY^{n-1}\mathcal{A} + g\mathcal{A} \subset f\mathcal{A} + g\mathcal{A}$, al hacer exacto el diagrama 2.2 en las sucesiones horizontales, obtenemos el diagrama 2.3 del cual se tiene que M y N son isomorfos.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & g\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & g\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r, hook] & fY^1\mathcal{A} + \cdots + fY^{n-1}\mathcal{A} + g\mathcal{A} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_g"] & f\mathcal{A} + g\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_g"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\pi}_g"', "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r, hook] & fY^1A_g + \cdots + fY^{n-1}A_g \arrow[r, hook] \arrow[d] & fA_g \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMA 2.3

Este isomorfismo esta dado por la aplicación $\bar{\pi}_g$,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_g : M &\longrightarrow N \\ [lf + sg] &\longmapsto [lf] \end{aligned}$$

que es la inducida por π_g.

Para probar que $N \cong A_Y$, definase la aplicación α que es multiplicación por f seguida de π_g,

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{A} &\longrightarrow A_g \\ h &\longmapsto [fh]. \end{aligned}$$

La imagen bajo α de $Y^1\mathcal{A} + \cdots + Y^{n-1}\mathcal{A} + g\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$, es $fY^1A_g + \cdots + fY^{n-1}A_g + gA_g$ y fA_g, respectivamente. Véa el diagrama 2.4.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook] & Y^1\mathcal{A}+\cdots+Y^{n-1}\mathcal{A}+g\mathcal{A} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{A} \arrow[d, "\alpha"] \\
0 \arrow[r, hook] & fY^1A_g+\cdots+fY^{n-1}A_g \arrow[r, hook] \arrow[d] & A_g \arrow[d] \\
 & 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

DIAGRAMA 2.4

Ahora, el kernel de α es $g\mathcal{A}$, así, completando el diagrama 2.4 a que sea exacto en las sucesiones horizontales, obtenemos el diagrama 2.5 del cual se tiene que N es isomorfo a A_Y.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & g\mathcal{A} \arrow[r, hook] \arrow[d] & g\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Y^1\mathcal{A}+\cdots+Y^{n-1}\mathcal{A}+g\mathcal{A} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & A_Y \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\alpha}"', "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & fY^1A_g+\cdots+fY^{n-1}A_g \arrow[r, hook] \arrow[d] & fA_g \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

DIAGRAMA 2.5

En este caso el isomorfismo esta definido como

$$
\begin{aligned}
\bar{\alpha} : A_Y &\longrightarrow N \\
[h] &\longmapsto [fh].
\end{aligned}
$$

$\square$

Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ del **tipo A**, denotemos por $V(g) = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, g(x) = 0\}$ y por $f|_{V(g)-\{0\}}$ a la función f restringida a $V(g) - \{0\}$.

Lema 2.3. *Sea* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ *del* **tipo A**. *Entonces tenemos que*

$$\mathrm{Ind}_0 X = \left(signo \; f|_{V(g)-\{0\}}\right)^{n-1} \mathrm{Ind}_0 Y.$$

Demostración. La aplicación definida por

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^n \times [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x,t) &\longmapsto \left([f + t(1-f)]Y^1, \ldots, [f + t(1-f)]Y^{n-1}, g\right). \end{aligned}$$

es una homotopía entre X y Y pues, $H(x,0) = X$, $H(x,1) = Y$ y es continua. Luego, los ceros de H estan en $V(g)$, y $f|_{V(g)-\{0\}}$ es de un solo signo ya que de lo contrario X tendría otra singularidad fuera del origen lo cual es una contradicción.

CASO I: Si $f|_{V(g)-\{0\}} > 0$, tenemos que

$$\mathrm{Sing}_{\mathbb{R}}(H) = \{0\} \; \forall t$$

pues para cada $x \neq 0$ y todo $t \in (0,1)$, $f(x) + t\,(1 - f(x))$ son todos los puntos en el intervalo entre 1 y $f(x)$ que no contiene a cero. Por lo tanto, el grado de $\dfrac{H(x,0)}{\|H(x,0)\|} = \dfrac{X}{\|X\|}$ es el grado de $\dfrac{H(x,1)}{\|H(x,1)\|} = \dfrac{Y}{\|Y\|}$ y en consecuencia, $\mathrm{Ind}_0 X = \mathrm{Ind}_0 Y$.

CASO II: Si $f|_{V(g)-\{0\}} < 0$, entonces cambiamos f por $-f$, en el campo vectorial X quedandonos ahora el campo vectorial

$$Y' = -Y^1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cdots - Y^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + Y^n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

el cual cumple con las mismas hipótisis que Y. Ahora, la homotopía H es entre X y Y'. Por el caso I, tenemos que

$$\mathrm{Ind}_0 X = \mathrm{Ind}_0 Y'$$

y por un calculo sencillo (usando el teorema de Eisenbud y Levine) se demuestra que

$$\mathrm{Ind}_0 Y' = (-1)^{n-1}\mathrm{Ind}_0 Y.$$

Con lo cual concluimos la prueba.

$\square$

Teorema 2. *Sea* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ *del* **tipo A** *y supongase que el campo vectorial* $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ *que se obtiene de* X*, es un campo vectorial con una singularidad algebraicamente aislada en* 0*. Entonces,*

$$M = \frac{f\mathcal{A} + g\mathcal{A}}{X^1\mathcal{A} + \cdots + X^n\mathcal{A}} = fA_X + gA_X$$

es una álgebra de dimensión finita, la clase J_0 *de* $\dfrac{JX}{f^{n-2}} = fJY$ *en* M *es no cero y si* $L : M \to \mathbb{R}$ *es un funcional lineal tal que* $L(J_0) > 0$ *y definimos el producto bilineal*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_L : M \times M &\longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h, s) &\longmapsto \frac{hs}{f} \longmapsto L\left(\frac{hs}{f}\right) \end{aligned}$$

entonces tenemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ *es una forma bilineal no degenerada, su signatura no depende de* L *y*

$$\mathrm{Ind}_0 X = \left(\textit{signo } f|_{V(g)-\{0\}}\right)^{n-1} \textit{signatura}\langle \cdot, \cdot \rangle_L.$$

Demostración. Del lema 2.2, obtenemos una aplicación ϕ de M a A_Y la cual hace conmutativo el diagrama 2.6

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\bar{\pi}_g"] \arrow[dr, "\phi"'] & N \\ & A_Y \arrow[u, "\bar{\alpha}"'] \end{tikzcd}$$

DIAGRAMA 2.6

Luego, como $\bar{\pi}_g$ y $\bar{\alpha}$ son isomorfismos, ϕ resulta un isomorfismo y esta definido por

$$\begin{aligned} \phi : M &\longrightarrow A_Y \\ [h] &\longmapsto \left((\bar{\alpha})^{-1} \circ \bar{\pi}_g\right)([h]). \end{aligned}$$

Puesto que $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ es un campo vectorial con singularidad algebraicamente aislada en cero, del teorema de Eisenbud-Levine tenemos que, A_Y es una álgebra simétrica [CR, Capítulo IX], [EL] (incluso es un anillo Gorenstein 0-dimensional [EL]), sobre la cual tenemos que la clase JY del jacobiano de Y es no cero, entonces $[\phi^{-1}(JY)] \neq 0$ y como $\phi^{-1}(JY)$ esta en la clase J_0, se sigue que $J_0 \in M$ es no cero. Esto nos garantiza que sí hay funcionales lineales sobre M que toman un valor positivo en J_0.

Luego, si $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es cualquier funcional lineal tal que $L(J_0) > 0$, entonces la aplicación lineal $L' : A_Y \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $L'(a) = \left(L \circ \phi^{-1}\right)(a) = L(fa)$ satisface que $L'(JY) > 0$. Así,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_L : M \times M &\longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h, s) &\longmapsto \frac{hs}{f} \longmapsto L\left(\frac{hs}{f}\right) \end{aligned}$$

es una forma bilineal simétrica, no degenerada y su signatura es la signatura del producto bilineal definido sobre A_Y a través de L' que a su vez es el índice de Y en 0, esto es

$$\mathrm{Ind}_0 Y = signatura\langle \cdot, \cdot \rangle_L$$

Finalmente, con el lema 2.3 concluimos la prueba del teorema 2.

□

Corolario 2.4. *Sea* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ *del* **tipo A** *y tal que* $\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(X)$ *es reducida fuera del cero. Entonces*

$$\frac{\sqrt{I_X}}{I_X}$$

es un módulo de dimensión finita sobre el cual podemos definir una forma bilineal, simétrica y no degenerada cuya signatura es el índice de X.

Demostración. Denotemos por $V(I_X)$ y $V(f,g)$ la variedad afín definida por los ideales I_X y (f,g) en $\mathcal{O}$. Puesto que $\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(X)$ es reducida fuera del cero, se tiene que $\sqrt{(f,g)} = (f,g)$. Además, como $V(I_X) = V(f,g)$ el teorema de Nullstellensatz nos dice que

$$\sqrt{I_X} = I\left(V(I_X)\right) = I\left(V(f,g)\right) = \sqrt{(f,g)} = (f,g).$$

Como siempre, $I\left(V(I_X)\right)$ denota al ideal de la variedad $V(I_X)$. Así, $Q = \dfrac{\sqrt{I_X}}{I_X}$ es el módulo M del teorema 2 y por lo tanto el corolario se sigue inmediatametmente.

□

§2.2 La fórmula del índice bajo cambios de coordenadas

En esta sección, vamos a probar el teorema 3 sobre la clasificación de campos vectoriales en $\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n, 2\right)$ que pueden ser llevados al **tipo A**.

Recordemos cómo cambian los campos vectoriales mediante difeomorfismos (cambios de coordenadas) y cómo actuan sobre el anillo de funciones.

Denotemos por $\mathbb{R}^n_z$ a $\mathbb{R}^n$ con coordenadas $z = (z_1, \ldots, z_n)$, análogamente, $\mathbb{R}^n_x$ tiene coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Si $Z = Z^1 \dfrac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + Z^n \dfrac{\partial}{\partial z_n}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n_z$ y

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^n_z &\longrightarrow \mathbb{R}^n_x \\ z &\longmapsto \psi(z) = x \end{aligned}$$

es un cambio de coordenadas. Entonces $X = \psi_* Z$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n_x$ dado por

$$\begin{aligned} \left(\psi_* Z\right)(x) &= D\psi|_{\psi^{-1}(x)} Z\left(\psi^{-1}(x)\right) && \text{(2.2a)} \\ &= \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial z_j}\left(\psi^{-1}(x)\right)\right) Z\left(\psi^{-1}(x)\right) = \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

observe que

$$X^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial z_j} \left(\psi^{-1}(x)\right) Z^j \left(\psi^{-1}(x)\right), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.2b}$$

A nivel de funciones, el cambio de coordenadas ψ induce un isomorfismo,

$$\begin{aligned} \psi^* : \mathcal{A}_z &\longrightarrow \mathcal{A}_x \\ h &\longmapsto \psi^* h = h \circ \psi^{-1} \end{aligned}$$

Lema 2.5. *Sean $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $\psi : \mathbb{R}^n_z \longrightarrow \mathbb{R}^n_x$ un cambio de coordenadas y $X = \psi_* Z$. Entonces,*

$$\frac{\sqrt{I_Z}}{I_Z} \cong \frac{\sqrt{I_X}}{I_X}.$$

Demostración. Sea $I_Z = Z^1\mathcal{A} + \cdots + Z^3\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_z$ el ideal de las componentes del campo vectorial Z e $I_X = X^1\mathcal{A} + \cdots + X^3\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_x$ el ideal correspondiente de X. Como ψ^* es isomorfismo, $\psi^*(I_Z)$ es un ideal de $\mathcal{A}_x$, ahora, puesto que ψ es difeomorfismo, $D\psi$ es invertible, así, por la ecuación $(2.2a)$, $\psi^*(Z) = (D\psi)^{-1} X$ y por lo tanto $\psi^*(I_Z) \subset I_X$. Por otra parte, de $(2.2b)$ se tiene que $I_X \subset \psi^*(I_Z)$, y en consecuencia $(\psi^*)^{-1} I_X = I_Z$ luego,

$$\frac{\sqrt{I_Z}}{I_Z} \cong \frac{\sqrt{I_X}}{I_X}$$

□

Este lema nos garantiza que el corolario 2.4 permanece válido bajo cambios de coordenadas. La ventaja de usar esta definición de M, radica en el hecho que es menos complicado encontrar una base para esta álgebra (usando la computadora).

Teorema 3. *Sea $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ tal que $\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(Z)$ es intersección completa y reducida fuera del origen, con ecuaciones $f = 0$ y $g = 0$. Entonces, existen dos campos vectoriales A y B tal que*

$$Z = Af + Bg.$$

Ademas, si A ó B no se anula en cero, entonces existe un difeomorfismo local ψ tal que

$$\psi_* Z$$

es un campo vectorial en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ *del* **tipo A**.

Demostración. Sea $Z = Z^1 \dfrac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + Z^n \dfrac{\partial}{\partial z_n}$ como en el toerema, puesto que $\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(Z) = V(f,g)$, el teorema de Nullstellensatz y el hecho que $\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(Z)$ es reducida fuera del cero nos dicen que $\sqrt{I_Z} = (f,g)$. Ahora, puesto que $I_Z \subset \sqrt{I_Z}$ se tiene que $Z^i \in (f,g)$ y por lo tanto, para cada i, $i = 1, \ldots, n$ existen funciones a_i, b_i tal que

$$Z^i = a_i f + b_i g, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Definimos entonces, dos nuevos campos vectoriales

$$\begin{aligned} A(z) &= a_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial z_n}, \quad \text{y} \\ B(z) &= b_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + b_n \frac{\partial}{\partial z_n} \end{aligned}$$

del cual tenemos que $Z = Af + Bg$.

Ahora, supongamos que $B(0) \neq 0$, entonces por el teorema del flujo tubular [PdeM, pág. 40], [HS] existe un difeomorfismo $\psi : U_0 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (U_0 vecindad abierta de 0) tal que $\psi_* B = \dfrac{\partial}{\partial z} = (0, \ldots, 0, 1)$ luego,

$$\begin{aligned} \psi_* Z &= \psi_* (Af + Bg) = \psi_* (Af) + \psi_*(Bg) \\ &= (\psi^* f)\, \psi_* (A) + (\psi^* g)\, \psi_* B \\ &= (\psi^* f)\, \psi_*(A) + (\psi^* g) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f' Y^1 \\ \vdots \\ f' Y^{n-1} \\ g' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

es un campo vectorial en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ del **tipo A**.
$\square$

Ejemplo 2.7. Consideremos el campo vectorial

$$Z = \left(x^2 + y^2 + z^2\right) x \frac{\partial}{\partial x} + \left(x^2 + y^2 + z\right) y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Es claro que $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3, 2)$, $V(X^1, X^2, X^3)$ es intersección completa con ecuaciones

$$f = x^2 + y^2 = 0 \quad g = z = 0,$$

es reducida fuera del origen y $\sqrt{I_Z} = (f, g)$. Para verificar lo enterior, puede usarse Macaulay 2. Luego,

$$Z = Af + Bg$$

donde A y B son los campos vectoriales

$$A = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 0\frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{y}$$
$$B = xz\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Observe que B es un campo vectorial nunca cero y el flujo en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$\phi_t = \left(x_0 e^{1/2t^2 + z_0 t}, y_0 e^t, t + z_0\right) = (x(t), y(t), z(t))$$

Ahora, en una vecindad de $(x, y, 0)$, el flujo es

$$\phi_t = \left(x e^{1/2t^2}, y e^t, t\right)$$

Observe que $\phi(u, v, t) = \left(u e^{1/2t^2}, v e^t, t\right) = (x, y, z)$, tiene la propiedad que

$$\phi_* \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B,$$

así

$$\psi(x,y,z) = \phi^{-1}(x,y,z) = \left(xe^{-1/2z^2}, ye^{-z}, z\right) = (u,v,t)$$

es un cambio de coordenadas, tal que

$$X = \psi_* Z = \begin{pmatrix} f'u \\ f'v \\ g' \end{pmatrix}, \quad f' = u^2 e^{t^2} + v^2 e^{2t}, \quad g' = t.$$

es un campo vectorial en $\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3, 2\right)$ del **tipo A**. Por el teorema 2 el índice de X en 0 es $+1$ y por lo tanto, tenemos que $\mathrm{Ind}_0 Z = +1$.

Una pregunta natural que se deriva del último resultado es: ¿todos los campos vectoriales de $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ pueden ser llavados a campos vectoriales del **tipo A**? Si la respuesta a esta pregunta es afirmativa, el problema estaría completamente resuelto en $\mathbb{R}^3$, sin embargo, esta pregunta queda sin resolver.

CAPÍTULO 3

EL COMPLEJO DE KOSZUL DE CAMPOS VECTORIALES EN $\mathbb{R}^n$ Y SU RELACIÓN CON EL ÍNDICE

En este capítulo vamos a investigar cuáles son los grupos de homología no triviales del complejo de Koszul K asociado a campos vectoriales en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$ y $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$. En la primer sección obtenemos resultados generales del complejo de Koszul para campos vectoriales en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, k)$, en la sección §3.2 demostramos que para campos en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$ tenemos homología no trivial al nivel 0, nivel $n-1$ y vemos que el anulador de $H_{n-1}(K)$ como $H_0(K)$–módulo es de dimensión finita y allí podemos definir una forma bilineal, cuya signatura es el índice de Poincaré–Hopf del campo vectorial X. En la última sección estudiamos el complejo de Koszul de campos vectoriales en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$, calculamos explicitamente el $H_{n-2}(K)$ grupo de homología para el caso $n = 3$ y obtenemos que el anulador de $H_{n-2}(K)$ como $H_0(K)$–módulo es de dimensión finita y coincide con el álgebra del teorema 2.

§3.1 El complejo de Koszul de campos vectoriales reales con ceros complejos de codimensión k.

Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ un campo vectorial con una singularidad aislada en el origen. Para construir el complejo de Koszul de X, sea

$$\Omega^i = \{\text{Gérmenes de } i\text{–formas diferenciales holomorfas en } 0\}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

cuya base estandar es,

$$E_j = \{e_J = dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_i} \,:\, J = (j_1, \dots, j_i) \subset (1, \dots, n)\}.$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Definimos el complejo de Koszul K de X, como

$$K: \quad 0 \longrightarrow \Omega^n \xrightarrow{X} \Omega^{n-1} \xrightarrow{X} \cdots \xrightarrow{X} \Omega^1 \xrightarrow{X} \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

y los morfismos, $\Omega^i \xrightarrow{X} \Omega^{i-1}$, son las aplicaciones contraciciôn por el campo vectorial, definidas por

$$\begin{aligned} X : \Omega^i &\longrightarrow \Omega^{i-1} \\ e_J &\longmapsto \sum_{\nu=1}^{i} (-1)^{\nu-1} X^{j_\nu} dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_{j_\nu}} \wedge \cdots \wedge dz_{j_i} \end{aligned}$$

donde $\widehat{dz_{j_\nu}}$ significa que es removido.

No es difícil verificar que K es un complejo. Y como siempre, el i–ésimo grupo de homología del complejo K es

$$H_i(K) = \frac{\ker\{\Omega^i \xrightarrow{X} \Omega^{i-1}\}}{\operatorname{Im}\{\Omega^{i+1} \xrightarrow{X} \Omega^i\}}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Siempre se tiene que

$$H_0(K) = \frac{\mathcal{O}}{X^1\mathcal{O} + \cdots + X^n\mathcal{O}} \quad \text{y} \quad H_n(K) = 0.$$

Algunas referencias sobre este tema son las siguientes: [GH, pág. 687] y [E, cap. 17].

El problema que nos hemos planteado en este trabajo se refiere a campos vectoriales en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, k)$, así que, el siguiente resultado es muy importante ya que como veremos en lo que resta de este capítulo, las álgebras de dimensión finita de los teoremas 1 y 2 estan relacionadas con los grupos de homología de K y para esto el siguiente resultado es fundamental.

Proposición 3.1. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, k)$ y K el complejo de Koszul de X. Se tiene entonces que*

$$H_{n-k}(K) \neq 0,$$

es un $H_0(K)$–módulo y $H_i(K) = 0$, $\forall i > n-k$.

Demostración. La demostración es inmediata del

Corolario. [Eisenbud, pág. 434] *Si $f_1, \ldots, f_i$ es una sucesión regular en $\mathcal{O}$, entonces*

$$H_{n-i}\left(K(f_1, \ldots, f_n)\right) = \frac{(f_1, \ldots, f_i) : (f_1, \ldots, f_n)}{(f_1, \ldots, f_i)}.$$

En particular, si $f_1, \ldots, f_i$ es una sucesión regular en el ideal $I = (f_1, \ldots, f_n)$, entonces $H_j = 0$ para $j > n-i$. Si $f_1, \ldots, f_i$ es una sucesión maximal en I y $I \neq \mathcal{O}$, entonces

$$H_{n-i}\left(K(f_1, \ldots, f_n)\right) \neq 0.$$

Puesto que $\operatorname{codim}\left(\operatorname{Sing}_{\mathbb{C}}(X)\right) = k$ tenemos que $depth(I_X) = n-k$, *i.e.*, hay una sucesión regular maximal en I_X de longitud $n-k$ y por lo tanto, $H_{n-k} \neq 0$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $X^{n-k+1}, \ldots, X^n$ forman dicha succesión regular maximal. Haciendo referencia al corolario anterior, tenemos que

$$H_{n-k}(K) = \frac{\left(X^{n-k+1}\mathcal{O} + \cdots + X^n\mathcal{O}\right) : \left(X^1\mathcal{O} + \cdots + X^{n-k}\right)}{X^{n-k+1}\mathcal{O} + \cdots + X^n\mathcal{O}} \tag{3.1.1}$$

es un $\mathcal{O}$–módulo. Como $X^1\mathcal{O} + \cdots + X^n\mathcal{O} \subset annH_{n-k}(K)$, pues

$$\left(aX^1 + \cdots + a_nX^n\right)h \in X^{n-k-1}\mathcal{O} + \cdots + X^n\mathcal{O},$$

para toda $h \in H_{n-k}(K)$, tenemos que $H_{n-k}(K)$ tiene estructura de $H_0(K)$–módulo.

$\square$

§3.2 El complejo de Koszul de campos vectoriales reales con ceros complejos de codimensión uno

En esta sección, hacemos el cálculo explicito de $H_{n-1}(K)$ y encontramos una relación entre el anulador de $H_{n-1}(K)$ como $H_0(K)$–módulo y el espacio de dimensión finita del teorema 1.

Teorema 3.2. *Sean $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$ y Y el campo vectorial que se obtiene de X después de escribirlo en la forma $X = fY$. Entonces, tenemos que*

$$H_{n-1}(K) \cong \frac{\mathcal{O}}{f\mathcal{O}}.$$

Demostración. De la proposición 3.1, tenemos que $H_{n-1}(K) \neq 0$. Por el lema 1.2, el campo vectorial X se escribe como $X = fY$, donde $f \in \mathcal{A}$ y $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, k)$ con $2 \leq k \leq n$. Así, usando de nuevo la proposicón 3.1 tenemos que la homología al nivel $n-1$ del complejo de Koszul $K(Y)$ asociado a Y es trivial y por lo tanto

$$\ker\{\Omega^{n-1} \xrightarrow{Y} \Omega^{n-2}\} = \mathrm{Im}\{\Omega^n \xrightarrow{Y} \Omega^{n-1}\}. \tag{3.2a}$$

Por otra parte, de la definición de $\Omega^i \longrightarrow \Omega^{i-1}$ y del hecho que $X = fY$, se tiene que

$$\ker\{\Omega^i \xrightarrow{X} \Omega^{i-1}\} = \ker\{\Omega^i \xrightarrow{Y} \Omega^{i-1}\}. \tag{3.2b}$$

Ahora, como $0 \longrightarrow \Omega^n \xrightarrow{Y} \Omega^{n-1}$ es inyectiva, tenemos que la imagen inversa de Ω^{n-1} bajo el mapeo contracción por Y es $\Omega^n \cong \mathcal{O}$, esto es

$$Y^{-1}\left(\Omega^{n-1}\right) = \Omega^n \cong \mathcal{O}. \tag{3.2c}$$

Por otro lado, la imagen inversa de $\mathrm{Im}\{\Omega^3 \xrightarrow{X} \Omega^2\}$ bajo el mapeo contracción por Y es $f\Omega^n \cong f\mathcal{O}$, *i.e.*,

$$Y^{-1}\left(\mathrm{Im}\{\Omega^n \xrightarrow{X} \Omega^{n-1}\}\right) = f\Omega^n \cong f\mathcal{O}. \tag{3.2d}$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
H_{n-1}(K) &= \frac{\ker\{\Omega^{n-1} \xrightarrow{X} \Omega^{n-2}\}}{\mathrm{Im}\{\Omega^n \xrightarrow{X} \Omega^{n-2}\}} && \text{por definición} \\
&= \frac{\ker\{\Omega^{n-1} \xrightarrow{Y} \Omega^{n-2}\}}{\mathrm{Im}\{\Omega^n \xrightarrow{X} \Omega^{n-1}\}} && \text{por (3.2b)} \\
&= \frac{\mathrm{Im}\{\Omega^n \xrightarrow{Y} \Omega^{n-1}\}}{\mathrm{Im}\{\Omega^n \xrightarrow{X} \Omega^{n-1}\}} && \text{por (3.2a)} \\
&\cong \frac{\mathcal{O}}{f\mathcal{O}} && \text{por (3.2c) y (3.2d)}
\end{aligned}$$

Con lo cual queda concluída la prueba.

□

Terminamos esta sección haciendo ver la conexión entre las homologias de K al nivel cero y $n-1$ con el teorema 1.

Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$, por el lema 1.2, el campo vectorial X se escribe, $X = fY$ donde $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ es una función que no cambia de signo fuera del origen y Y es un campo vectorial en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, k)$, con $2 \leq k \leq n$. Luego, el teorema anterior nos dice que el $n-1$ grupo de homología del complejo de Koszul asociado a X es $H_{n-1}(K) = \dfrac{\mathcal{O}}{f\mathcal{O}}$. Claramente, $H_{n-1}(K)$ es un $\mathcal{O}$–módulo cuyo anulador es el ideal $f\mathcal{O}$. Por otra parte, puesto que

$$I_X = X^1\mathcal{O} + \cdots + X^n\mathcal{O} \subset f\mathcal{O} = ann\,(H_{n-1}(K))$$

se tiene que $H_{n-1}(K)$ también tiene estructura de $H_0(K)$–módulo, dada por

$$\begin{aligned} H_0(K) \times H_{n-1}(K) &\to H_{n-1}(K) \\ (h_0 + I_X, h_2 + f\mathcal{O}) &\mapsto h_0h_2 + f\mathcal{O}. \end{aligned}$$

Por definición, el anulador de $H_{n-1}(K)$ como $H_0(K)$–módulo es

$ann_{H_0(K)} H_{n-1}(K) = \{h_1 + I_X \in H_0(K) \;:\; h_1 h \in f\mathcal{O}\ \forall h + f\mathcal{O} \in H_{n-1}(K)\}$,

claramente,

$$f\mathcal{O} + I_X \subset ann_{H_0(K)} H_{n-1}(K)$$

y si $h_0 + I_X \in ann_{H_0(K)} H_{n-1}(K)$ entonces

$$h_0 h \in f\mathcal{O}\ \forall h + f\mathcal{O} \in H_{n-1}(K),$$

en particular, como $1 + f\mathcal{O} \in H_{n-1}(K)$ y $1 \notin f\mathcal{O}$ se sigue que $h_0 \in f\mathcal{O}$ y así,

$$ann_{H_0(K)} H_{n-1}(K) \subset f\mathcal{O} + I_X.$$

Por lo tanto,

$$ann_{H_0(K)} H_{n-1}(K) = f\mathcal{O} + I_X = \frac{f\mathcal{O}}{X^1\mathcal{O} + \cdots + X^n\mathcal{O}}.$$

Luego, tenemos el siguiente

Corolario 3.3. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$ y supongamos que el campo vectorial Y que se obtiene de X al escribir $X = fY$ tiene una singularidad algebraicamente aislada. Sea K el complejo de Koszul asociado a X. Entonces,*

$$ann_{H_0(K)} H_{n-1}(K) = \frac{f\mathcal{O}}{X^1\mathcal{O} + \cdots + X^n\mathcal{O}}$$

es el módulo M de dimensión finita del teorema 1.

Lo fundamental del teorema 1, fué haber encontrado un espacio de dimensión finita sobre el cual encontramos una fórmula algebraica, para calcular el índice de Poincaré–Hopf de campos vectoriales en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 1)$. El corolario anterior lo que nos dice es que dicho espacio lo podemos encontrar, haciendo uso de una teoría general de geometría algebraica como lo es el complejo de Koszul. La siguiente sección es en el mismo sentido que ésta, solo que ahora consideramos campos vectoriales en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$.

§3.3 El complejo de Koszul de campos vectoriales reales con ceros complejos de codimensión dos

El problema de este trabajo, lo hemos resuelto para campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$, salvo demostar que todos los campos vectoriales en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3, 2)$ se pueden aproximar por campos vectoriales que son del **tipo A**.

En esta sección, vamos a calcular explicitamente los grupos de homología no triviales del complejo de Koszul K asociado a elementos de $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3, 2)$ y veremos qué relación hay entre estos grupos de homología y el espacio de dimensión finita del teorema 2. En general, si $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ tambien encontramos una relación (corolario 3.5)

Sean $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3, 2)$ y K el complejo de Koszul asociado. Por la proposición 3.1, tenemos que $H_1(K) \neq 0$ y $H_i(K) = 0$, para $i = 2, 3$.

Teorema 3.4. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3, 2)$ y K el complejo de Koszul asociado. Entonces, tenemos que*

$$H_1(K) \cong \frac{(X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}) : (X^1\mathcal{O})}{X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}}.$$

Demostración. Puesto que $\dim(\mathrm{Sing}_{\mathbb{C}}(X)) = 1$, podemos suponer que X^2 y X^3 son una suceción regular en I_X. Definimos

$$\left(X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}\right) : \left(X^1\mathcal{O}\right) = \{g \in \mathcal{O} \mid gX^1 \in X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}\},$$

y damos la aplicación ϕ definida por

$$\begin{aligned} \phi : \ker\{\Omega^1 \xrightarrow{X} \mathcal{O}\} &\longrightarrow \left(X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}\right) : \left(X^1\mathcal{O}\right) \\ w = edz_1 + fdz_2 + gdz_3 &\longmapsto e \end{aligned}$$

ésta función está bien definida pues si $w \in \ker\{\Omega^1 \xrightarrow{X} \mathcal{O}\}$ entonces

$$X(w) = eX^1 + fX^2 + gX^3 = 0$$

y en ese caso $eX^1 \in X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}$. Por lo tanto $e \in \left(X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}\right) : \left(X^1\mathcal{O}\right)$.

• **ϕ es suprayectiva.**

Esto es inmediato, ya que si $h \in \left(X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}\right) : \left(X^1\mathcal{O}\right)$ entonces

$$hX^1 \in X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}$$

y por lo tanto, existen elementos m, $n \in \mathcal{O}$ tal que

$$hX^1 = -mX^2 - nX^3.$$

Luego, $hX^1 + mX^2 + nX^3 = 0$ y al tomar $w = hdz_1 + mdz_2 + ndz_3$ tenemos que $\phi(w) = h$.

Por otra parte, X^2, $X^3 \in \left(X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}\right) : \left(X^1\mathcal{O}\right)$ y por lo tanto

$$X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O} \subset \left(X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}\right) : \left(X^1\mathcal{O}\right).$$

Además, tenemos que

$$\mathrm{Im}\{\Omega^2 \xrightarrow{X} \Omega^1\} \subset \ker\{\Omega^1 \xrightarrow{X} \mathcal{O}\}$$

y

$$\phi\left(\mathrm{Im}\{\Omega^2 \xrightarrow{X} \Omega^1\}\right) = X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}.$$

Luego, ϕ nos da lugar a la aplicación

$$[\phi] : H_1(K) \longrightarrow \frac{\left(X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}\right) : \left(X^1\mathcal{O}\right)}{X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}}$$

definida de manera natural.

Como ϕ es suprayectiva, se tiene que $[\phi]$ también es suprayectiva. Verifiquemos ahora que $[\phi]$ es inyectiva.

• $[\phi]$ **es inyectiva.** Sea $w = edz_1 + fdz_2 + gdz_3 \in H_1(K.)$, tal que $e \in X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}$; *i.e.* $[\phi](w) = 0$. Luego, $e = -\left(AX^2 + BX^3\right)$ y como $eX^1 + fX^2 + gX^3 = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} -\left(AX^2 + BX^3\right)X^1 + fX^2 + gX^3 &= 0 \\ \left(f - AX^1\right)X^2 + \left(g - BX^1\right)X^3 &= 0 \\ \left(AX^1 - f\right)X^2 &= \left(g - BX^1\right)X^3. \end{aligned} \tag{3.3a}$$

Como X^2 y X^3 son una sucesión regular, se tiene que X^2 no divide a X^3 y viceversa. Por lo tanto, de la ecuación (3.3a) tenemos que X^3 divide a $\left(AX^1 - f\right)$ *i.e.* existe $c' \in \mathcal{O}$ tal que $c'X^3 = AX^1 - f$. De igual manera, tenemos que X^2 divide a $\left(g - BX^1\right)$ por lo cual existe, $c'' \in \mathcal{O}$ tal que $c''X^2 = g - BX^1$. Es facil ver que $c' = c''$.

Probemos que existe $\eta \in \Omega^2$ tal que $X(\eta) = w$. Sea $\eta = adz_1 \wedge dz_2 + bdz_1 \wedge dz_3 + cdz_2 \wedge dz_3$. La imagen de η bajo X es

$$X(\eta) = -\left(aX^2 + bX^3\right)dz_1 + \left(aX^1 - cX^3\right)dz_2 + \left(bX^1 + cX^2\right)dz_3.$$

Haciendo, $a = A$, $b = B$, y $c = c' = c''$ tenemos que $X(\eta) = w$.

Con todo lo anterior hemos probado que si $[\phi](w) = 0$ entonces $w = 0$ en $H_1(K)$ y por lo tanto $[\phi]$ es biyectiva y hemos concluído la prueba.
□

Analicemos cual es la relación de esta sección con nuestro problema. Sea $X \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3, 2\right)$, entonces tenemos que el 0 grupo de homología del complejo de Koszul asociado a X, es

$$H_0(K) = \frac{\mathcal{O}}{X^1\mathcal{O} + X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}}.$$

Como $X \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3, 2\right)$ hay dos elementos que forman una sucesión regular máximal en el ideal de las componentes de X, supongamos que X^2 y X^3 forman dicha sucesión, por el teorema 3.4 se tiene que

$$H_1(K) = \frac{\left(X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}\right) : \left(X^1\mathcal{O}\right)}{X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}}.$$

Claramente $H_1(K)$ es un $\mathcal{O}$–módulo y

$$X^1\mathcal{O} + X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O} \subset ann\left(H_1(K)\right)$$

ya que si $p \in X^1\mathcal{O}+X^2\mathcal{O}+X^3\mathcal{O}$ tenemos que $ph \in X^2\mathcal{O}+X^3\mathcal{O}$ para todo $h \in H_1(K)$. Así, $H_1(K)$ puede ser reconsiderado como un $H_0(K)$–módulo donde la multiplicación es definida de manera natural. Luego, podemos considerar el anulador de $H_1(K)$ en $H_0(K)$ y ver si satisface las propiedades de una álgebra simétrica.

En el caso que el campo vectorial X es del **tipo A**, tenemos que

$$H_1(K) = \frac{\left(fY^2\mathcal{O} + g\mathcal{O}\right) : \left(fY^1\mathcal{O}\right)}{fY^2\mathcal{O} + g\mathcal{O}}.$$

No es difícil convencerce que

$$\left(fY^2\mathcal{O} + g\mathcal{O}\right) : \left(fY^1\mathcal{O}\right) = Y^2\mathcal{O} + g\mathcal{O}$$

y por lo tanto, el anulador de $H_1(K)$ como $\mathcal{O}$–módulo, es el ideal $f\mathcal{O} + g\mathcal{O}$. Tenemos entonces que

$$ann_{H_0(K)} H_1(K) = \frac{f\mathcal{O} + g\mathcal{O}}{X^1\mathcal{O} + X^2\mathcal{O} + X^3\mathcal{O}}.$$

Luego, el anulador de $H_1(K)$ como $H_0(K)$–módulo, es el espacio de dimensión finita M del teorema 2 y por lo tanto, tenemos definida nuestra fórmula del índice en $ann_{H_0(K)} H_1(K)$.

En general, si $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ es del **tipo A** se tiene que fY^{n-1} y g forman una sucesión regular, entonces

$$H_{n-2}(K) = \frac{\left(fY^{n-1}\mathcal{O} + g\mathcal{O}\right) : \left(fY^1\mathcal{O} + \cdots + fY^{n-2}\mathcal{O}\right)}{fY^{n-1}\mathcal{O} + g\mathcal{O}}.$$

Se puede ver que

$$\left(fY^{n-1}\mathcal{O} + g\mathcal{O}\right) : \left(fY^1\mathcal{O} + \cdots + fY^{n-2}\mathcal{O}\right) = Y^{n-1}\mathcal{O} + g\mathcal{O}$$

y por lo tanto, el anulador de $H_{n-2}(K)$ como $H_0(K)$–módulo es el álgebra de dimensión finita del teorema 2, esto es

$$ann_{H_0(K)} H_{n-2}(K) = \frac{f\mathcal{O} + g\mathcal{O}}{X^1\mathcal{O} + \cdots + X^n\mathcal{O}}.$$

Corolario 3.5. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, 2)$ del* **tipo A** *y supongase que el campo vectorial Y que se obtiene de X tiene una singularidad algebraicamente aislada en 0. Sea K el complejo de Kozsul de X. Entonces,*

$$ann_{H_0(K)} H_{n-2}(K) = \frac{f\mathcal{O} + g\mathcal{O}}{X^1\mathcal{O} + \cdots + X^n\mathcal{O}}$$

es el módulo M de dimensión finita del teorema 2.

Las relaciones que hemos encontrado entre los anuladores de los grupos de homología y los espacios de dimensión finita de los teoremas 1 y 2 nos conducen a formular la siguiente conjetura.

Conjetura. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n, k)$ y K su complejo de Koszul asociado. Entonces, el anulador de $H_{n-k}(K)$ como $H_0(K)$–módulo,*

$$ann_{H_0(K)} H_{n-k}(K)$$

es un espacio de dimensión finita, sobre el cual podemos definir una forma bilineal simétrica y no degenerada con la propiedad que el índice de X en 0 es la signatura de esta forma bilineal.

Bibliografía

[AGV] V. I. Arnold, S. M. Gusein–Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps, Vol. I*, Birkhäuser, 1985.

[AL] W. W. Adams and P. Loustaunau, *Introduction to Gröbner bases* Graduate studies in math. *Vol. 3*, AMS, 1994.

[AM] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison–Wesley, 1969.

[BG] Ch. Bonatti and X. Gómez–Mont, *The index of a holomorphic vector field on a singular variety I*, Asterisque **222** (1994), 9–35.

[CLO] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms,* An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra , Springer–Verlag, 1992.

[CR] C. W. Curtis and I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras,* Monographs in Pure and Applied Math. XI, Interscience, 1962.

[D] A. Dold (traducción de C. Prieto), *Teoría del punto fijo volumén II*, Título del original en Alemán: FIXPUNKTTHEORIE, FerUniversität – Gesamthochschule, 1982, Monografías del Instituto de Matemáticas de la UNAM, Vol. 18, 1984.

[E] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer, 1996.

[EL] D. Eisenbud and H. Levine, *An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ*, Annals of Math. **106** (1977), 19–44.

[G] F. R. Gantmacher, *The theory of matrices Vol. I*, Chelsea Publishing Company, New York, 1977.

[GGóM] L. Giraldo, X. Gómez–Mont and P. Mardešić, *Computation of topological numbers via linear algebra: Hypersurfaces, Vector Fields and Vector Fields on Hypersurfaces*, Contemporary Mathematics **240** (1999), 175–182.

[GH] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley and Sons, 1978.

[GS] D. Grayson and M. Stillman, *Macaulay 2:*, a software system for algebraic geometry and commutative algebra (version 0.8.51); available at http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2.

[Gó] X. Gómez–Mont, *An algebraic formula for the index of a vector field on a hypersurface with an isolated singularity*, Algebraic Geometry **7** (1998), 731–752.

[GóM 1] ——— and P. Mardešić, *The index of vector field tangent to a hypersurface and the signature of the relative Jacobian determinant*, Annals Inst. Fourier **47 No. 5** (1997), 1523–1539.

[GóM 2] ——— and P. Mardešić, *The index of a vector field tangent to an odd dimentional hypersurface and the signature of the relative Hessian*, U. Bourgogne, Prépublications du Laboratoire de Topologie **97 No. 136** (1997), 1–13.

[GSV] ———, J. Seade and A. Verjovsky, *The index of a holomorphic flow with an isolated singularity*, Math. Ann. **291** (1995), 737–751.

[Gun] R. C. Gunning, *Lectures on complex analytic varieties: Finite analytic mapping*, Princeton, N. J., 1974.

[H] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer–Verlag, 1976.

[HS] M. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dinamical Systems and Linear Algebra*, New York, Academic Press, 1979.

[Lo] E. J. N. Looijenga, *Isolated singular points on complete intersections,* London Math. Lectures Notes Series: 77, Cambridge University Press, 1984.

[M 1] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Virginia University Press, 1990.

[M 2] ———, *Singular points of complex hypersurfaces*, Prinston University Press, 1968.

[PdeM] J. Palis and W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems,* an introduction, Springer, 1982.

[V] W. V. Vasconcelos, *Computational Methods in Conmutative Algebra and Algebraic Geometry*, Springer, 1998.

[W] H. Whitney, *Complex analytic varieties*, Addison–Wesley, 1972.