CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A. C.

Módulos de polinomios y conjuntos polinominales en espacios de Banach

Tesis que como requisito parcial para obtener el grado de doctor en Matemáticas presenta:

Mayte Fernández Unzueta

Directores de Tesis:
Dr. Fernando Bombal, Dra. Berta Gamboa

Septiembre de 1998, Guanajuato, Gto

Agradecimientos

A Fernando Bombal le debo gran parte de este trabajo. Aceptó dirigirlo bajo condiciones poco usuales y además del raudal de conocimiento que recibí de él, me enseño una forma de ver y disfrutar las matemáticas. Debo agradecerle también sus palabras de aliento, dadas en el momento justo, y que lograron siempre ahuyentar mi desánimo.

Fue gracias a Berta Gamboa el que me iniciara en el estudio de esta área. He contado en todo momento con su colaboración tanto personal como académica y trabajar con ella ha sido un placer.

Agradezco al CONACyT el apoyo económico brindado mediante una beca de doctorado.

El CIMAT me ha ofrecido un estimulante ambiente de trabajo y el apoyo científico de quienes lo integran, particularmente de Xavier Gómez-Mont, Helga Fetter, Fernando Galaz, y mis compañeros de estudios, a los que les agradezco su amistad y su colaboración, especialmente a Ernesto Tapia, por su valiosa ayuda durante el proceso de tipografiado de esta tesis.

En el CIMAT he encontrado además el apoyo personal y la amistad invaluable de Luis Hernández Lamoneda y Adolfo Sánchez Valenzuela.

Agradezco a mis compañeros y amigos del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid y del Departamento de Álgebra, Geometría y Topología de la Universidad de Valladolid el haber logrado, con su hospitalidad, que mi estancia en España fuera muy provechosa y agradable.

Más que agradecida, estoy en deuda con Jorge, mis padres y mis hermanos por su cariño y generosidad. Les dedico entonces este trabajo (y quedo aún lejos de saldar la cuenta).

Prefacio

El estudio de las transformaciones polinomiales definidas en espacios de dimensión infinita aparece ya en los años treinta. En [42], por ejemplo, J.E. Littlewood estudia ciertas transformaciones bilineales en un número infinito de variables. Diferentes autores establecen entonces, la relación entre las formas multilineales simétricas y los polinomios homogéneos en tales espacios. Posteriormente, en los años sesenta, L. Nachbin desarrolla de modo sistemático el estudio de las transformaciones holomorfas definidas en espacios localmente convexos con lo que se vuelve al estudio de los polinomios y su relación con las propiedades geométricas y topológicas de los espacios.

En los últimos años se ha desarrollado la teoría de forma continuada (en [36] pueden encontrarse muchas de las referencias), desde los diversos puntos de vista: la holomorfía (p.e. [49] [4] o [21]), las álgebras de funciones (p.e. [14] o [2]) y la geometría de los espacios de Banach a través, propiamente, de las transformaciones polinomiales (p.e. [26] o [28]).

Uno de los objetivos principales de este trabajo es el proponer y desarrollar un enfoque (serían de hecho dos, aunque relacionados: el llamado *homológico*, en el que las propiedades surgen por comparación de distintas familias de transformaciones, en este caso polinomios homogéneos, entre dos espacios de Banach, y el *conjuntista*, en el que las propiedades surgen por comparación, ahora, de ciertas familias de subconjuntos del espacio) que permite llevar a cabo un estudio sistemático de las propiedades polinomiales de los espacios de Banach.

Es habitual encontrar en la literatura la idea de generalización de la teoría lineal, pues los operadores lineales son los polinomios homogéneos de grado uno. La teoría desarrollada debiera, entonces, contener y ser compatible con el estudio clásico de los operadores y las clases lineales de conjuntos.

Tanto la generalización de los ideales de operadores a módulos de polinomios, como la de las clases de conjuntos que se dan en este trabajo, permiten hacer un uso óptimo, en el contexto no lineal de las topologías polinomiales, de algunos de los resultados principales de la teoría lineal (como el teorema de Rosenthal, o la caracterización de los espacios sin copias de c_0). Esta es una de las razones por las cuales el estudio de las propiedades polinomiales se torna sencillo y claro. Veremos que en muchos casos (p.e. T. II.21, T.IV.5, Prop. IV.11, T. IV.16, Prop. IV.24, T. V.5 o T. V.7) los teoremas bien conocidos de la teoría lineal, admiten una extensión al caso polinomial válida para todo grado de homogeneidad $m \in \mathbb{N}$.

Cada polinomio homogéneo puede determinarse por una transformación lineal definida en el espacio tensor proyectivo. El estudio, entonces de los espacios tensores junto con la teoría de operadores es una vía de estudio de las propiedades polinomiales. Este punto de vista es útil en ocasiones, aunque habitulamente resulta complicado conocer las propiedades del espacio tensor en función de las propiedades del espacio.

La primera parte del capítulo I recoge las definiciones y resultados conocidos, que utilizamos a lo largo del trabajo. En la sección I.2 se introduce la topología polinomial τ_m inducida en el espacio por la familia de polinomios homogéneos de grado m escalares y se estudian algunas de sus propiedades más significativas. Uno de los resultados principales que se demuestran en esta sección es el teorema I.28, donde se afirma que un polinomio homogéneo de grado m es continuo si y sólo si es continuo de la topología τ_m en la topología débil.

En el capítulo II se desarrolla el método homológico para algunas familias concretas de polinomios. Este enfoque, así como algunas de las propiedades que se estudian en los capítulos IV y V (como la propiedad de Dieudonné o la recíproca de Dunford-Pettis) fueron introducidos y estudiados, para operadores lineales, en [35]. La definición de los módulos de Dieudonné, de Dunford-Pettis e incondicionalmente convergentes que aquí se introducen, están basadas en una de las consecuencias inmediatas del teorema I.28: todo polinomio homogéneo de grado m transforma las sucesiones de Cauchy en la topología τ_m en sucesiones débiles de Cauchy. Estas definiciones no coinciden con las generalizaciones respectivas aparecidas, por ejemplo en [28]; al final del capítulo se establecen las relaciones entre ambas generalizaciones.

En el capítulo III se desarrolla el método de comparación de las clases de conjuntos. De nuevo surge la pregunta de cómo llevar a cabo la generalización. En este caso se sigue la definición dada en [9], pues resulta una definición natural y que permite probar importantes resultados, como el criterio de reflexividad polinomial III.13, de forma muy sencilla. Se Incluyen en este capítulo algunos de los resultados aparecidos en [9] y se establecen las relaciones válidas para todo espacio de Banach, entre las clases lineales y las polinomiales de un grado fijo, probando con ejemplos que para cada relación no establecida, existe un espacio que no la verifica. En la última sección del capítulo se introducen los módulos de polinomios que estas clases de conjuntos determinan y se estudian algunas de sus propiedades.

En el capítulo IV se estudian las propiedades que resultan del método homológico en relación a los polinomios que definidos como polinomios de Dunford-Pettis. Entre los resultados que se obtienen están distintas caracterizaciones para la contención de ℓ_1 en el espacio tensor (T. IV.5), para la propiedad de Dunford-Pettis de grado m (T. IV.16) o para la propiedad Λ_m-Schur (Prop. IV.24). Al igual que en el caso lineal, estas propiedades pueden ser caracterizadas tanto desde el punto de vista homológico, como desde el conjuntista. Se define además, una clase de conjuntos en el espacio de polinomios escalares, estrechamente relacionada con los polinomios de Dunford-Pettis.

En el capítulo V se estudian los polinomios incondicionalmente convergentes definidos en el capítulo II, introduciendo también una clase de subconjuntos del espacio de polinomios, que los caracteriza y mediante la cual se prueban algunas de las propiedades más relevantes. Esta clase de subconjuntos generaliza una clase lineal contenida en el espacio dual, introducida en [44]. Este enfoque permite generalizar el estudio de las propiedades que involucran a los operadores incondicionalmente convergentes, llevado a cabo en [44], al caso polinomial.

Índice General

Capítulo I

Introducción

I.1 Preliminares

Como mencionamos en la introducción, este trabajo centra su interés en el estudio de propiedades definidas en los espacios de Banach a través de ciertas aplicaciones definidas en ellos: los polinomios. Empezaremos por tanto, estableciendo las definiciones, notación y resultados más importantes al respecto, que utilizaremos a lo largo del trabajo. No incluimos las demostraciones puesto que se trata de resultados bien conocidos que pueden verse, por ejemplo en [34], [43], [49] o [20].

Notación

E, E_i, $i \in \mathbb{N}$, y F serán espacios de Banach, es decir, espacios vectoriales normados y completos para la topología de la norma; m denotará siempre un número natural. Supondremos también que el campo de escalares es $\mathbb{C}$.

Para cada espacio de Banach E, B_E será su bola unitaria:

$$B_E = \{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}$$

y E^* su dual topológico, donde la norma se define como

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)|;\ x \in B_E\}.$$

$\mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_m; F)$ será el espacio de Banach formado por las aplicaciones m-lineales y continuas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ en F con la norma

$$\|T\| = \sup\{\|T(x_1, ..., x_m)\|; x_j \in E_j, \|x_j\| \leq 1, j = 1, ..., m\}.$$

Cuando los espacios coincidan ($E = E_i$ para cada $i = 1, \ldots, m$) escribiremos $\mathcal{L}(^mE; F)$. En el caso en que F sea el campo de escalares $\mathbb{C}$, denotaremos a estos espacios $\mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_m)$ y $\mathcal{L}(^mE)$ respectivamente.

Aplicaciones multilineales y definición de polinomio

Proposición I.1 *Para cada $1 < k \leq m$ se cumple que la transformación lineal*

$$\Psi : \mathcal{L}(E_1 \times ... \times E_m; F) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1 \times ... \times E_k; \mathcal{L}(E_{k+1} \times ... \times E_m; F))$$

definida como $\Psi(T)(x_1, \ldots, x_k)(x_{k+1}, \ldots, x_m) = T(x_1, \ldots, x_m)$ es una isometría biyectiva entre los dos espacios de Banach.

Para cada $T \in \mathcal{L}(^mE; F)$ definimos su *simetrizado* como:

$$T^s(x_1, ..., x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} T(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}),$$

donde $\mathcal{S}_m$ es el grupo de permutaciones de orden m. Diremos que una aplicación $T \in \mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_m, F)$ es *simétrica* si $T^s = T$. Si denotamos por $\mathcal{L}^s(^mE; F)$ al subespacio de $\mathcal{L}(^mE; F)$ formado por las transformaciones simétricas, se cumple:

Proposición I.2 *El operador lineal*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(^mE; F) & \longrightarrow & \mathcal{L}^s(^mE; F) \\ T & \mapsto & T^s \end{array}$$

es una proyección continua y $\|T^s\| \leq \|T\|$.

Desde luego, la noción de transformación multilineal simétrica tiene sentido sólo si los espacios E_i $(i = 1, ..., m)$ coinciden, pero éste será el caso que con mayor frecuencia trataremos.

La siguiente proposición permite determinar una aplicación multilineal simétrica conociendo los valores de la misma en la llamada diagonal, es decir, en los elementos de la forma $(x, ..., x)$ con $x \in E$. Usaremos la notación $z^m = (z, \overset{m}{\ldots}, z)$, $z \in E$:

Proposición I.3 (Fórmula de Polarización) *Dado el operador simétrico $T \in \mathcal{L}^s(^mE; F)$ y $x_0, ..., x_m \in E$, se cumple:*

$$T(x_1, ..., x_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\epsilon_j = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_m T((x_0 + \epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_m x_m)^m).$$

Definición I.4 *Una aplicación entre dos espacios de Banach $P : E \to F$, es un polinomio homogéneo de grado m si existe $T \in \mathcal{L}(^mE; F)$ de modo que para cada $x \in E$ $P(x) = T(x, \overset{m}{\ldots}, x)$.*

Proposición I.5 *El conjunto*

$$\mathcal{P}(^mE; F) := \{P : E \to F;\ \text{polinomio } m\text{-homogéneo}\}$$

dotado con la norma $\|P\| = \sup\{\|P(x)\|; x \in E, \|x\| \leq 1\}$ es un espacio de Banach.

Cuando el espacio de Banach F sea el campo de escalares $\mathbb{C}$, denotaremos por $\mathcal{P}(^mE)$ al espacio $\mathcal{P}(^mE, \mathbb{C})$. $\mathcal{P}(^{\leq m}E)$ (resp. $\mathcal{P}(E)$) será el espacio de Banach generado por los polinomios homogéneos de grado menor o igual que m (resp. por todos los polinomios homogéneos).

Proposición I.6 *Para cada $T \in \mathcal{L}(^mE; F)$, sea $P_T \in \mathcal{P}(^mE; F)$ definido por $P_T(x) = T(x, \overset{m}{\ldots}, x)$ para cada $x \in E$. La aplicación $T \to P_T$ induce un isomorfismo de espacios de Banach entre $\mathcal{L}^s(^mE; F)$ y $\mathcal{P}(^mE; F)$, con $\|P_T\| \leq \|T\| \leq \frac{m^m}{m!}\|P_T\|$.*

Observación I.7 Un mismo polinomio es la restricción a la diagonal de distintas transformaciones multilineales; la fórmula de polarización permite probar sin embargo, que es la restricción a la diagonal de una única transformación multilineal simétrica.

Proposición I.8 *Si $P : E \to F$ es una transformación definida para cada $x \in E$ como $P(x) = T(x, \overset{m}{\ldots}, x)$, donde T es una transformación m-lineal (no necesariamente continua) de $E \times \overset{m}{\ldots} \times E$ en F, son equivalentes:*

1. *P es continuo.*
2. *P es acotado en toda bola de radio finito de E.*
3. *P es acotado en alguna bola abierta de radio finito de E.*

Si P cumple cualquiera de estas condiciones, P es un elemento de $\mathcal{P}(^mE, F)$.

Producto tensorial de espacios de Banach

La definición de polinomio se puede dar equivalentemente desde el contexto del producto tensorial de espacios de Banach; como antes, incluimos los resultados bien conocidos que necesitaremos.

Si E_i, $i = 1, ..., m$, son espacios vectoriales, denotamos por $E_1 \otimes ... \otimes E_m$ a su producto tensorial y por $\otimes$ a la aplicación m-lineal canónica

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_m & \xrightarrow{\otimes} & E_1 \otimes ... \otimes E_m \\ (x_1, \ldots, x_m) & \mapsto & x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \end{array}$$

Se cumple que para cada espacio vectorial F y cada aplicación m-lineal $f : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$, existe un única aplicación lineal $\hat{f} : E_1 \otimes \ldots \otimes E_m \to F$ de modo que $\hat{f} \circ \otimes = f$. Recíprocamente, para cada aplicación lineal $\hat{f} : E_1 \otimes \ldots \otimes E_m \to F$, la expresión $f(x_1, \ldots, x_m) = \hat{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)$ define una única transformación m-lineal de $E_1 \times \cdots \times E_m$ en F.

Cuando los espacios tienen además una estructura de espacio de Banach, cabe preguntarse por la existencia en $E_1 \otimes \ldots \otimes E_m$ de alguna norma compatible (en el sentido que a continuación detallamos) con las normas de cada uno de los E_i. Se define entonces:

Definición I.9 *Se dice que una norma α en $E_1 \otimes \ldots \otimes E_m$ es razonable si satisface las siguientes condiciones:*

1. $\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \leq \|x_1\| \cdots \|x_m\|$ *para todo* $x_1 \in E_1, \ldots, x_m \in E_m$.
2. *Si* $x_1^* \in E_1^*, \ldots, x_m^* \in E_m^*$, *entonces* $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_m^* \in (E_1 \otimes \cdots \otimes E_m, \alpha)^*$ *y su norma (como funcional) está acotada por* $\|x_1^*\| \cdots \|x_m^*\|$.

La condición 1 en la definición de norma razonable establece la continuidad de la aplicación $\otimes$. Del mismo modo, es posible deducir de las dos condiciones anteriores algunas otras propiedades de la norma válidas siempre, que expondremos sólo en el caso de las dos normas razonables con las que trabajaremos (la inductiva y la proyectiva).

La menor de las normas razonables

Para cada $u \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$, se define

$$\lambda(u) = \sup\{|(x_1^* \otimes \cdots \otimes x_m^*)(u)|;\ x_1^* \in B_{E_1^*}, \ldots, x_m^* \in B_{E_m^*}\}.$$

Proposición I.10 *Si λ, x_i y E_i son como antes, se cumple:*

1. λ *es una norma razonable en* $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ *y* $\lambda(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = \|x_1\| \cdots \|x_m\|$.
2. *Si α es cualquier otra norma razonable en $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$, para cada $u \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ se tiene que $\lambda(u) \leq \alpha(u)$.*

Definición I.11 *El producto tensorial inyectivo de los espacios de Banach E_i $i = 1, \ldots, m$, es la completación del espacio normado $(E_1 \otimes \cdots \otimes E_m, \lambda)$ y se denota por $E_1 \check{\otimes} \ldots \check{\otimes} E_m$. Si $E_i = E$ para todo i, denotamos al producto tensorial inyectivo de orden m por $\check{\otimes}_\epsilon^m E$.*

Proposición I.12 *Si $i \in \{1, \ldots, m\}$ y W_i es un subespacio cerrado de E_i, entonces $E_1 \check{\otimes} \ldots \check{\otimes} W_i \check{\otimes} \ldots \check{\otimes} E_m$ es un subespacio cerrado de $E_1 \check{\otimes} \ldots \check{\otimes} E_m$.*

La mayor de las normas razonables

Hemos introducido la definición de la norma inductiva en los productos tensoriales pues será necesario utilizar alguna de sus propiedades (como es el caso de la proposición I.47); sin embargo las propiedades de la norma que a continuación introducimos hacen que sea ésta la que definiremos siempre en el espacio tensorial.

Cada elemento $u \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ es una suma finita de la forma $u = \sum x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_m}$, donde $x_{i_j} \in E_j$, $j = 1, \ldots, m$ (esta expresión no es única). Se define entonces,

$$\gamma(u) = \sup\{|\sum \Psi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})|;\ \Psi \in \mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_m),\ \|\Psi\| \leq 1\}.$$

Proposición I.13 *Si γ, x_{i_j} y E_j son como antes, se cumple:*

1. γ *es una norma razonable en* $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ *y* $\gamma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = \|x_1\| \cdots \|x_m\|$.
2. *Si α es cualquier otra norma razonable en $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$, para cada $u \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ se tiene que $\alpha(u) \leq \gamma(u)$.*
3. *Para cada $u \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$,*

$$\gamma(u) = \inf\{\sum \|x_{i_1}\| \cdots \|x_{i_m}\|;\ u = \sum x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_m}\}.$$

Producto tensorial proyectivo y producto tensorial simétrico de espacios de Banach

Definición I.14 *El producto tensorial proyectivo de los espacios de Banach E_i $i = 1, \ldots, m$, es la completación del espacio normado $(E_1 \otimes \cdots \otimes E_m, \gamma)$ y se denota por $E_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} E_m$. Si $E_i = E$ para todo i, denotamos al producto tensorial proyectivo de orden m por $\hat{\otimes}_\pi^m E$.*

Como consecuencia de las proposiciones I.10 y I.13, se obtiene:

Corolario I.15 *Sean $m \in \mathbb{N}$ y E un espacio de Banach. La identidad en $\otimes^m E$ induce una aplicación lineal y continua*

$$\begin{array}{rccc} J : & \hat{\otimes}_\pi^m E & \longrightarrow & \check{\otimes}_\epsilon^m E \\ & x \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x & \mapsto & x \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x \end{array}$$

Teorema I.16 *Sean $m, i \in \mathbb{N}$, con $i \leq m$ y E_i, F espacios de Banach. Para cada aplicación multilineal $T \in \mathcal{L}(E_1 \times \ldots \times E_m; F)$ existe una única aplicación lineal $\hat{T} \in \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} E_m; F)$ tal que $T = \hat{T} \circ \otimes$. Recíprocamente, para cada $\hat{S} \in \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} E_m; F)$ y cada $(x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, la expresión $S(x_1, \ldots, x_m)$*

$= \hat{S}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)$ *determina un único elemento de* $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$. *La correspondencia* $T \leftrightarrow \hat{T}$ *establece un isomorfismo entre espacios de Banach.*

$$\mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_m; F) \simeq \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} E_m; F).$$

Proposición I.17 *Sean* E_i, F_i *espacios de Banach para* $i = 1, \ldots, m$, *y* $S_i \in \mathcal{L}(E_i, F_i)$. *La aplicación definida en los elementos de* $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ *como*

$$\begin{array}{rcccl} S_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} S_m & : E_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} E_m & \longrightarrow & F_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} F_m \\ & \sum x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_m} & \mapsto & \sum S_1(x_{i_1}) \otimes \cdots \otimes S_m(x_{i_m}) \end{array}$$

es lineal y continua.

En el caso en que $E = E_i$, $F = F_i$ y $S = S_i$ para cada i, el operador $S \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} S$, que denotaremos $S^{(m)}$, resulta ser simétrico.

Proposición I.18 *Sean* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *y* Ψ *una aplicación cociente (i.e. un operador suprayectivo) del espacio de Banach* E_i *en el espacio de Banach* W_i. *La aplicación* $Id \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \Psi \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} Id$ *es una aplicación cociente de* $E_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} E_m$ *en* $E_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} W_i \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} E_m$.

La proyección descrita en la proposición I.2

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{S} & : \mathcal{L}(^m E; F) & \to & \mathcal{L}^s(^m E; F) \\ & T & \mapsto & T^s \end{array}$$

induce una proyección continua en el espacio de Banach $\hat{\otimes}_\pi^m E$. Al subespacio imagen de esta proyección se le denomina *producto tensorial simétrico* y lo denotaremos $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$.

La aplicación

$$\begin{array}{rccc} \theta_m : & E & \longrightarrow & \hat{\otimes}_{s,\pi}^m E \\ & x & \mapsto & x \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x \end{array}$$

es un polinomio homogéneo de grado m, que denominaremos *polinomio canónico* y a su imagen, $\theta_m(E) := \{x \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x;\ x \in E\}$, *conjunto diagonal.*

El espacio $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ admite una norma equivalente que resulta más adecuada para el estudio de las transformaciones polinomiales, y que será la que entendamos definida en $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$: cada elemento $u \in \otimes_s^m E$ se puede expresar (no de manera única) como una combinación lineal finita de elementos diagonales [49]. Se define su norma:

$$\|u\| = \inf\{\sum_{i=1}^k |\lambda_i| \|x_i\|^m;\ u = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x_i\}.$$

Proposición I.19 *El espacio* $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ *es la cerradura de la envolvente lineal del conjunto* $\theta_m(E)$. *Se cumple también que* $\|\theta_m(x)\| = \|x\|^m$ *para cada* $x \in E$ *y*

$$B_{\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E} = \overline{coe(\theta_m(B_E))}.$$

Proposición I.20 *[7] Sea* E *un espacio de Banach y* $m \in \mathbb{N}$. *Para cada* $k \in \{1, \ldots, m\}$, *el espacio* $\hat{\otimes}_{s,\pi}^k E$ *es un subespacio complementado de* $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$.

Proposición I.21 *Sea* E *un espacio de Banach y* $m \in \mathbb{N}$. *Se cumple:*

1. *Para cada subespacio* F *complementado en* E, $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m F$ *es un subespacio complementado de* $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$.
2. *Si* E *es separable, entonces* $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ *es separable.*

De modo análogo a lo que se tenía en el tensor proyectivo, el tensor simétrico cumple la siguiente propiedad universal:

Proposición I.22 *Sean* E *y* F *espacios de Banach y* $m \in \mathbb{N}$. *Para cada* $T \in \mathcal{L}^s(^m E; F)$ *existe una única aplicación* $\hat{T} \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E; F)$ *tal que* $T = \hat{T} \circ \otimes$. *Recíprocamente, para cada* $\hat{S} \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E; F)$ *y cada* $x \in E$, *la expresión* $S(x, \ldots, x) = \hat{S}(x \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x)$ *determina un único elemento de* $\mathcal{L}^s(^m E; F)$. *La correspondencia* $T \leftrightarrow \hat{T}$ *establece un isomorfismo entre espacios de Banach.*

$$\mathcal{L}^s(^m E; F) \simeq \mathcal{L}(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E; F).$$

Proposición I.23 *Dado* $P \in \mathcal{P}(^m E, F)$, *existe una única aplicación lineal* $\hat{P} \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E; F)$ *tal que* $P = \hat{P} \circ \theta_m$, *además* $\|P\| = \|\hat{P}\|$. *Recíprocamente, para cada* $T \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E, F)$ *y cada* $x \in E$, *la expresión* $P(x) = T(\theta_m(x))$ *define un elemento de* $\mathcal{P}(^m E, F)$ *tal que* $\hat{P} = T$. *La correspondencia* $P \leftrightarrow \hat{P}$ *establece una isometría.*

$$\mathcal{P}(^m E, F) \equiv \mathcal{L}(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E, F).$$

Observación I.24 La proposición anterior afirma en particular, que el espacio dual $(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E)^*$ es isométrico a $\mathcal{P}(^m E)$.

Para referirnos a la imagen bajo los dos isomorfismos vistos anteriormente, utilizaremos siempre la siguiente notación:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L}^s(^m E; F) & \simeq & \mathcal{P}(^m E, F) & \equiv & \mathcal{L}(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E; F) \\ T_P & \leftrightarrow & P & \leftrightarrow & \hat{P} \end{array}$$

Proposición I.25 *Sean $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$, $T \in \mathcal{L}(E_1, E)$ y $S \in \mathcal{L}(F, F_1)$. Se cumplen las siguientes relaciones:*

$$\widehat{P \circ T} = \hat{P} \circ T^{(m)} \qquad \widehat{S \circ P} = S \circ \hat{P} \qquad T^{(m)} \circ \theta_m = \theta_m \circ T.$$

I.2 Topologías polinomiales

Los espacios de polinomios introducidos anteriormente determinan de forma natural ciertas topologías en el espacio de Banach: las topologías iniciales respecto a las familias de polinomios escalares. Empezaremos estudiando las propiedades generales que serán de utilidad a lo largo de todo el trabajo.

Definición I.26 *Dado E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$, denotaremos por E_{τ_m} (resp. $E_{\tau_{\leq m}}$, $E_{\tau_{pol}}$) al espacio E con la topología inicial inducida por los polinomios $\mathcal{P}(^mE)$ (resp. $\mathcal{P}(^{\leq m}E)$, $\mathcal{P}(E)$).*

La colección de conjuntos de la forma

$$\mathcal{U}_{x_0} = \{x \in E;\ |p_i(x) - p_i(x_0)| < \epsilon_i, 0 < \epsilon_i, p_i \in \mathcal{P}(^*E), i = 1, \ldots, n\}$$

es una base de entornos de un punto $x_0 \in E_{\tau_*}$, donde $(*)$ corresponde a cada una de las topologías $\tau_m, \tau_{\leq m}$ y τ_{pol}.

Diremos que la sucesión $\{x_n\} \subset E$ es τ_m de Cauchy si para cada sucesión creciente de números naturales $\{n_j\}$ y cada $p \in \mathcal{P}(^mE)$, se cumple

$$\lim_{j,k} |p(x_{n_j}) - p(x_{n_k})| = 0.$$

Observación I.27 De la definición anterior y de la proposición I.25 se tiene que la sucesión $\{x_n\}$ en el espacio de Banach E es τ_m convergente a $x \in E$ si y sólo si para cada $p \in \mathcal{P}(^mE)$, $\lim_n p(x_n) = p(x)$ y esto, si y sólo si la sucesión $\{\theta_m(x_n)\}_n$ es débilmente convergente a $\theta_m(x)$ en $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$.

Se cumple también, que la sucesión $\{x_n\}$ es τ_m de Cauchy si y sólo si la sucesión $\{\theta_m(x_n)\}$ es débil de Cauchy en $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$.

El caso $m = 1$ corresponde a la topología débil del espacio E; veremos más adelante que los demás casos describen topologías no vectoriales, aunque estrechamente relacionadas con la topología débil del espacio tensor.

En el siguiente resultado se generaliza un conocido teorema para operadores lineales:

Teorema I.28 *Sean E y F espacios de Banach , $m \in \mathbb{N}$ y $P : E \to F$ una transformación de modo que existe una aplicación multilineal T definida en el espacio producto $E \times \overset{m}{\cdots} \times E$, con valores en F cumpliendo $P(x) = T(x, \ldots, x)$ para cada $x \in E$. Entonces*

1. *P es continuo (i.e. $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$) si y sólo si P es (τ_m-w) continuo (i.e. continuo de la topología τ_m de E en la topología débil de F).*

2. Todo operador lineal y continuo $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es τ_m-τ_m continuo.

Demostración. 1. El polinomio P es continuo si y sólo si lo es el operador lineal asociado $\hat{P} \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, F)$ (Prop. I.23); se cumple entonces que $\hat{P}$ es w-w continuo. Como la topología τ_m en E es precisamente la inducida por la familia $\{f^* \circ \theta_m;\ f^* \in (\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E)^*\}$, resulta que θ_m es τ_m-w continuo y por tanto P es τ_m-w continuo.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\theta_m"'] & F \\ \hat{\otimes}^m_{s,\pi} E \arrow[ur, "\hat{P}"'] & \end{tikzcd}$$

Recíprocamente, como la norma define una topología más fina que τ_m, si la aplicación homogénea de grado m, $P : E \to F$ es τ_m-w continua, es también $\|\cdot\|$-w continua. Comprobemos entonces que el conjunto $P(B_E)$ es acotado en F_w: sea $\mathcal{U}$ un entorno débil de 0 en F. Como P es $\|\cdot\| - w$ continuo, existe $\delta > 0$ de modo que $P(\delta B_E) =\subset \mathcal{U}$ y por tanto $P(B_E) = P(\frac{1}{\delta}\delta B_E) = \frac{1}{\delta^m} P(\delta B_E) \subset \frac{1}{\delta^m}\mathcal{U}$. Por ser $P(B_E)$ un conjunto acotado de F_w, es acotado en $F_{\|\cdot\|}$. De la proposición I.8 se deduce entonces que P es un polinomio continuo.

2. Consideremos un punto $x_0 \in E$ y los entornos de $T(x_0)$ y $\theta_m(T(x_0))$ en F_{τ_m} y $(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} F)_w$ respectivamente,

$$V = \{y \in F;\ |p_i(y) - p_i(T(x_0))| < \epsilon_i, i = 1, \ldots, n\},$$

$$\tilde{V} = \{z \in \hat{\otimes}^m_{s,\pi} F;\ |\hat{p}_i(z) - \hat{p}_i(\theta_m(T(x_0)))| < \epsilon_i, i = 1, \ldots, n\}$$

donde $\hat{p}_i$ es el operador lineal asociado a cada polinomio p_i. Como el operador $T^{(m)} : \hat{\otimes}^m_{s,\pi} E \to \hat{\otimes}^m_{s,\pi} F$, que en los elementos de la diagonal cumple $T^{(m)}(\theta_m(x)) = \theta_m(T(x))$, es continuo, el conjunto

$$\{w \in \hat{\otimes}^m_{s,\pi} E;\ T^{(m)}(w) \in \tilde{V}\}$$

es un abierto débil de $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ que contiene a $\theta_m(x_0)$ y por lo tanto existe un entorno básico

$$\tilde{U} = \{w \in \hat{\otimes}^m_{s,\pi} E;\ |\hat{q}_j(w) - \hat{q}_j(\theta_m(x_0))| < \delta_j, j = 1, \ldots, k\}$$

tal que $T^{(m)}(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$. El conjunto

$$U = \{x \in E;\ |q_j(x) - q_j(x_0)| < \delta_j, j = 1, \ldots, k\}$$

es un entorno de x_0 en τ_m tal que $T(U) \subset V$. □

Corolario I.29 *Todo polinomio $P \in \mathcal{P}(^m E, F)$ transforma las sucesiones τ_m de Cauchy de E en sucesiones débiles de Cauchy en F.*

El resultado anterior, en el caso lineal, resultaba clave para el estudio de ciertas propiedades de los espacios de Banach; del mismo modo sucede con las propiedades descritas a través de las familias de polinomios y permite, por ejemplo, escoger adecuadamente la generalización de los llamados *ideales de operadores*. Como veremos en el capítulo II, éstas serán clases definidas a partir de la topología τ_m en el espacio de partida y de la topología débil en el espacio de llegada.

Propiedades topológicas

Las topologías descritas anteriormente tienen propiedades muy distintas en los casos $m = 1$ y $m > 1$.

Propiedad I.30 Sea $m > 1$. Los puntos x, $y \in E$ se pueden separar en τ_m si y sólo si $y \neq e^{\frac{2ik\pi}{m}} x$ para $k = 0, \ldots m-1$.

Demostración. Si $y = e^{\frac{2ik\pi}{m}} x$ para algún $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, se cumple que $p(y) = p(x)$ para cada $p \in \mathcal{P}(^m E)$ y por tanto y pertenece a todos los entornos básicos de x. Recíprocamente: sean x e $y \in E$ tales que para cada $p \in \mathcal{P}(^m E)$, $p(x) = p(y)$. Si son linealmente independientes, existe un funcional $x^* \in E^*$ para el cual $x^*(x) \neq 0$ y $x^*(y) = 0$; $(x^*)^m$ define un elemento de $\mathcal{P}(^m E)$ que permite separar los puntos. Consideremos ahora el caso en que $x = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Por hipótesis se cumple que para cada $f^* \in (\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E)^*$, $f^*(\theta_m(x)) = f^*(\theta_m(y))$ por lo que

$$x \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x = y \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes y = \lambda x \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes \lambda x = \lambda^m x \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x$$

y esto es sólo posible si $\lambda^m = 1$. □

Las topologías $\tau_{\leq m}$ y τ_{pol} sí son separadas, dado que contienen a todos los entornos débiles.

Propiedad I.31 En E_{τ_m} (resp. $\tau_{\leq m}$ y τ_{pol}) coinciden la compacidad con la compacidad secuencial.

Demostración. Sea $A \subset E$ un conjunto relativamente τ_m- compacto. Por el teorema I.28, θ_m es una aplicación (τ_m-w)-continua y por lo tanto $\theta_m(\overline{A})$ coincide con el conjunto débilmente compacto $\overline{\theta_m(A)}$, por lo que para cualquier sucesión $\{x_n\}_n \in A$ existe $\{\theta_m(x_{n_k})\}_k$ débilmente convergente a $z \in \overline{\theta_m(A)} = \theta_m(\overline{A})$, es decir, $z = \theta_m(x)$ y $\{x_{n_k}\}_k$ converge a x en E_{τ_m}.

Recíprocamente, sea A es un conjunto relativamente τ_m-secuencialmente compacto y $\{x_\alpha\}_\alpha$ una red contenida en A. Como los conjuntos compactos y los secuencialmente compactos en la topología débil coinciden, existe una subred $\{\theta_m(x_{\alpha_\beta})\}_\beta$ débilmente convergente a $z \in \overline{\theta_m(A)}$ y una sucesión contenida en la red, $\{\theta_m(y_n)\}_n$ débilmente convergente a z. Por hipótesis existe una subsucesión $\{y_{n_j}\}_j$ τ_m-convergente a $x \in E$, por lo que $\{\theta_m(y_{n_j})\}_j$ converge débilmente a $\theta_m(x)$. Como la topología débil es separada, debe ocurrir que $z = \theta_m(x)$, de donde se deduce la existencia de una subred $\{x_{\alpha_\beta}\}_\beta$ τ_m-convergente a x y por tanto que A es relativamente compacto en E_{τ_m}.

Las otras topologías verifican claramente esta misma propiedad y por tanto son angélicas (es decir, coincide la compacidad con la compacidad secuencial y son separadas). □

Propiedad I.32 Dados m, k y $l \in \mathbb{N}$, cualquiera de las aplicaciones definidas del siguiente modo:

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{k,m} : E_{\tau_{km}} & \to & E_{\tau_m} \\ x & \mapsto & \tilde{x} \end{array}$$

donde $\tilde{x} = e^{\frac{2il\pi}{k}} x$, es continua en 0.

Demostración. Dado un entorno básico cualquiera de 0 en E_{τ_m},

$$\mathcal{U}_0 = \{x \in E; |p_i(x)| < \epsilon_i, 0 < \epsilon_i, p_i \in \mathcal{P}(^mE), i = 1,..,n\},$$

escogemos $\tilde{\epsilon}_i = \epsilon_i^k$ de modo que el conjunto

$$\mathcal{U} = \{x \in E; |p_i(x)^k| < \tilde{\epsilon}_i, 0 < \tilde{\epsilon}_i, i = 1,..,n\},$$

está contenido en $\mathcal{U}_0$ y es claro que $(p_i)^k$ define un polinomio homogéneo de grado km. □

De la continuidad en 0 y tomando $m = 1$, se obtiene en particular, que los entornos débiles de cero son siempre entornos polinomiales. La propiedad I.30 muestra, en cambio, que cualquier punto $x_0 \in E$ distinto de cero tiene siempre un entorno abierto débil que no es entorno en τ_m. Se cumple entonces:

Propiedad I.33 El espacio topológico E_{τ_m}, para cada $m > 1$, no es vectorial.

Este resultado se ha podido probar de forma sencilla observando las distintas propiedades de separación que satisfacen los puntos de E_{τ_m}, sin embargo hay que tener presente que esto último es a su vez una consecuencia del carácter no lineal de la familia de aplicaciones $\mathcal{P}(^mE)$ que induce la topología τ_m. Las topologías $\tau_{\leq m}$ y τ_{pol} sí son separadas y más finas que la topología débil, pero no necesariamente vectoriales: en [2] los autores prueban que en ningún espacio de Hilbert complejo la topología τ_{pol} es vectorial. En [6] se estudian las propiedades topológicas de

$E_{\tau_{\leq m}}$ y $E_{\tau_{\leq pol}}$ y se prueba que tampoco en ℓ_∞ son topologías vectoriales. Una condición más débil que la anterior es la de tener una topología polinomial de modo que la suma resulte una función secuencialmente continua; en [6] se estudia esta propiedad y se comprueba que tampoco es satisfecha por todos los espacios de Banach. En [3] se trata esta propiedad en relación con algunas otras y se introducen, por ejemplo, las propiedades (P) y (RP) (ver III.44 y V.8).

El siguiente ejemplo muestra que la propiedad I.32 no es válida en general, para cualquier par de índices n y m con $n \neq mk$:

Ejemplo (R.Aron, M.González)

Existe en ℓ_2 una red formada por elementos de norma uno convergente a cero en la topología $(\ell_2)_{\tau_3}$ pero no en $(\ell_2)_{\tau_2}$:

La construcción de la red se hace en el caso real y determina igualmente un ejemplo para el caso complejo:

Sea Λ el conjunto formado por los subconjuntos finitos de $\mathcal{P}(^3\ell_2)$, ordenado por inclusión. Para cada elemento $\lambda = \{p_{\lambda_1}, ...p_{\lambda_n}\} \in \Lambda$ se construye una aplicación continua $f_\lambda : \ell_2 \to \mathbb{R}^n$, definida como $f_\lambda(x) = (p_{\lambda_1}(x), ..., p_{\lambda_n}(x))$. Por ser cada una de estas funciones impar $(f_\lambda(-x) = -f_\lambda(x))$ y gracias al teorema de Borsuk [23], existe un $x_\lambda \in \ell_2$ de norma 1 tal que $f_\lambda(x_\lambda) = 0$. De esta forma queda determinada una red $\{x_\lambda\}_\lambda$ convergente a cero en $(\ell_2)_{\tau_3}$, de elementos de norma uno. Por otra parte, $q(x) = \|x\|^2$ define un polinomio homogéneo de grado dos en ℓ_2; como $q(x_\lambda) = 1$, la red no es convergente a cero en $(\ell_2)_{\tau_2}$. □

Es preciso observar que no se puede construir un ejemplo análogo con sucesiones en vez de redes, pues en ℓ_2 cualquier relativamente compacto de τ_3 es relativamente compacto en norma (Prop. 3.8 [8]) y por tanto también relativamente compacto en τ_2. Este ejemplo prueba también que en general las topologías correspondientes a grados de homogeneidad distintos no son comparables.

Propiedades de continuidad secuencial

En el teorema I.28 probamos que cada polinomio $\mathcal{P}(^mE, F)$ es τ_m-w continuo, por lo que la topología débil en el espacio de partida no es natural en este contexto; sin embargo muchas de las propiedades conocidas de los espacios de Banach vienen caracterizadas a través de ella y conviene, por tanto, tener presente cuáles son las relaciones entre ambas, así como con las topologías correspondientes a distintos grados de homogeneidad. Ya vimos que no son comparables, pero sí hay establecidas relaciones entre los respectivos conjuntos compactos, como muestra el siguiente resultado bien conocido (ver por ejemplo, el lema 20 en [29] o [26]):

Lema I.34 *Sea E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$. Dada una sucesión $\{x_n\}_n$ convergente a x en E_{τ_m} (resp. de Cauchy en E_{τ_m}), existe una subsucesión débilmente convergente a $e^{\frac{2ik\pi}{m}}x$ para algún $k \in \mathbb{N}$ (resp. débilmente de Cauchy); si $x \neq 0$, la subsucesión se puede escoger convergente en $E_{\tau_{\leq m}}$ (resp de Cauchy en $E_{\tau_{\leq m}}$).*

Demostración. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en E_{τ_m}. Cada funcional lineal continuo $x^* \in E^*$ determina un polinomio $(x^*)^m \in \mathcal{P}(^mE)$ por lo que $(x^*(x_n))^m \to (\alpha_{x^*})^m$ (cuando la sucesión sea τ_m-convergente a x, se tendrá $\alpha_{x^*} = x^*(x)$; un argumento análogo probará el resultado en este caso). Si $\alpha_{x^*} = 0$ para todos los funcionales lineales, la sucesión es débilmente convergente a cero. En caso contrario se escoge un $x^* \in E^*$ de modo que $\alpha_{x^*} \neq 0$. De la condición anterior se deduce que existe una subsucesión $\{x^*(x_{n_j})\}_j$ convergente a $e^{\frac{2ik\pi}{m}}\alpha_{x^*}$ para algún $k \in \{0, 1, ..., m-1\}$. Fijamos ahora $i \in \{1, ..., m-1\}$ y definimos la aplicación lineal y continua

$$\begin{array}{ccc} \hat{\otimes}_\pi^m E & \xrightarrow{\Psi_i} & \hat{\otimes}_\pi^i E \\ x_1 \otimes ... \otimes x_m & \mapsto & x^*(x_{i+1})...x^*(x_m)x_1 \otimes ... \otimes x_i \end{array}$$

Como $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ es complementado en $\hat{\otimes}_\pi^m E$, la sucesión $\{x_{n_j} \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x_{n_j}\}_j$ es débil de Cauchy en $\hat{\otimes}_\pi^m E$ y por tanto también lo son su imagen por Ψ_i y $\{x_{n_j} \otimes \overset{i}{\cdots} \otimes x_{n_j}\}_j$ (pues estas últimas coinciden salvo una sucesión escalar convergente a un valor no nulo). □

La demostración de la última parte del lema anterior no puede ser usada en el caso en que la sucesión $\{x_n\}_n$ sea de Cauchy en E_{τ_m} y débilmente convergente a cero; de hecho no se sabe si el resultado es cierto en cualquier espacio de Banach, aunque se pueden probar resultados positivos en algunos casos. Esto motiva la siguiente definición:

Definición I.35 *El espacio de Banach E satisface la propiedad m-B si cada sucesión $\{x_n\}_n$ de Cauchy en E_{τ_m} admite una subsucesión de Cauchy en $E_{\tau_{\leq m}}$*

Lema I.36 *Dada una sucesión $\{x_n\}_n$ de Cauchy (resp. convergente a x_0) en $E_{\tau_{\leq m}}$, para cada $x \in E$, $\{x_n + x\}_n$ es de Cauchy (resp. convergente a $x_0 + x$) en $E_{\tau_{\leq m}}$.*

Demostración. Dado $p \in \mathcal{P}(^mE)$, existen $p_i \in \mathcal{P}(^iE)$ de modo que

$$p(x_n + x) = p(x) + \sum_{i=2}^{m} p_i(x_n);$$

$q = \sum_{i=2}^m p_i \in \mathcal{P}(^{\leq m}E)$ por hipótesis, $\{q(x_n)\}_n$ es convergente (resp. a $q(x_0)$) y en consecuencia $\{p(x_n + x)\}_n$ es convergente (resp. a $p(x) + q(x_0) = p(x + x_0)$). □

No se sabe si las topologías τ_m satisfacen también esta propiedad de invariancia por traslaciones, pues de hecho se cumple:

Proposición I.37 *Dado un espacio de Banach E, son equivalentes:*

1. *E satisface la propiedad m-B.*
2. *Para cada sucesión $\{x_n\}_n$ de Cauchy en E_{τ_m} existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ de modo que para cada $x \in E$, $\{x_{n_k} + x\}_k$ es de Cauchy en E_{τ_m}.*

Demostración. Si suponemos la condición 1 toda sucesión $\{x_n\}_n$ de Cauchy en E_{τ_m} admite una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ de Cauchy en $E_{\tau_{\leq m}}$; el lema I.36 asegura entonces que $\{x_{n_k} + x\}_k$ es de Cauchy en E_{τ_m}. Recíprocamente: sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en E_{τ_m}; por el lema I.34, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ débil de Cauchy, que si no es débilmente convergente a cero, es también $\tau_{\leq m}$ de Cauchy. Si es una subsucesión débilmente convergente a cero, la condición 2 permite tomar un $x \in E$ y una subsucesión (denotada igual) tal que $\{x_{n_k} + x\}_k$ sea de Cauchy en τ_m y no débilmente convergente a cero y por tanto de Cauchy en $E_{\tau_{\leq m}}$. Con el lema I.36 se prueba de nuevo, que $\{x_{n_k}\}_k$ es de Cauchy en $E_{\tau_{\leq m}}$. □

Observación I.38 Tanto la propiedad *m-B* como la proposición I.37 admiten una formulación análoga reemplazando "*sucesión de Cauchy en E_{τ_m}*" por "*sucesión convergente a x en E_{τ_m}*" que, por la no linealidad de la topología τ_m pueden no ser equivalentes a las expuestas anteriormente.

Si $\{e_i^{(k)}\}$ es la base canónica del espacio ℓ_k, $k \in \mathbb{N}$, el polinomio $Q \in \mathcal{P}(^m\ell_m, \ell_1)$ definido como $Q(\sum_i a_i e_i^{(m)}) = \sum_i a_i^m e_i^{(1)}$ muestra que los polinomios no necesariamente son secuencialmente débilmente continuos (para $m > 1$, $\{e_i^{(m)}\}$ es débilmente convergente a cero, mientras que $\{e_i^{(1)}\}$ no es débil de Cauchy). Introduciremos, por tanto, la siguiente definición:

Definición I.39 *[9] El espacio de Banach E tiene la propiedad de continuidad secuencial de orden m (m-SCP) si para cualquier sucesión $\{x_n\}_n$ débilmente convergente a x en E, cada polinomio $p \in \mathcal{P}(^mE)$ cumple que $\lim_n p(x_n) = p(x)$.*

Denotamos por $\mathcal{P}_{wsc}(^mE)$ al subespacio de $\mathcal{P}(^mE)$ formado por los polinomios débilmente secuencialmente continuos. Así, la *propiedad de continuidad secuencial de orden m* es precisamente $\mathcal{P}(^mE) = \mathcal{P}_{wsc}(^mE)$.

Observación I.40 Dados E y F espacios de Banach, el polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ es secuencialmente continuo de la topología débil de E en la topología débil de F si y sólo si el operador $P^* : F^* \to \mathcal{P}(^mE)$ definido como $P^*(x^*) = x^* \circ P$ para cada $x^* \in F^*$ verifica $P^*(B_{F^*}) \subset \mathcal{P}_{wsc}(^mE)$.

Proposición I.41 *[9] Sea E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:*

1. *E tiene la propiedad m-SCP ($\mathcal{P}(^mE) = \mathcal{P}_{wsc}(^mE)$).*
2. *El polinomio canónico θ_m es secuencialmente continuo de la topología débil de E en la topología débil de $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$.*
3. *Para cada sucesión débil de Cauchy $\{x_n\}_n \subset E$, $\{\theta_m(x_n)\}_n$ es débil de Cauchy en $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$.*
4. *Cada polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ transforma las sucesiones débiles de Cauchy de E en sucesiones débiles de Cauchy en F.*

Demostración. Por la observación I.40, 1 y 2 son claramente equivalentes, pues $(\theta_m)^*$ es el isomorfismo $\hat{P} \leftrightarrow P$ entre $(\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E)^*$ y $\mathcal{P}(^mE)$. La equivalencia con 3 es consecuencia del teorema 2.3 [5]. La afirmación 3 es un caso particular de 4. Por último, la observación I.40 prueba la implicación de 1 en 4. □

A los elementos del espacio vectorial generado por la familia de polinomios $\{(x^*)^m;\ x^* \in E^*\}$, se les denomina *polinomios de tipo finito* (en este caso, homogéneos de grado m) y se denotan $\mathcal{P}_f(^mE)$.

Proposición I.42 *Si $\mathcal{P}_f(^mE)$ es denso en $\mathcal{P}(^mE)$, E tiene la propiedad de continuidad secuencial de orden m (m-SCP).*

Demostración. Dada una sucesión $\{x_n\}_n \subset B_E$ débilmente convergente a x en E y un polinomio $p \in \mathcal{P}(^mE)$, para cada $\epsilon > 0$ existe $p_f = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_i^*)^m$ donde $x_i^* \in E^*$, de modo que $\|p - p_f\| < \frac{\epsilon}{3}$. Existe entonces N tal que si $n > N$ $|p_f(x_n) - p_f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$, por lo que para todo $n > N$,

$$|p(x_n) - p(x)| \le |p(x_n) - p_f(x_n)| + |p_f(x_n) - p_f(x)| + |p_f(x) - p(x)| < \epsilon \ \square$$

I.43 En [46] se prueba que en el espacio c_0 los polinomios de cualquier grado son aproximables por polinomios de tipo finito.

Aunque la propiedad de continuidad secuencial no sea válida en todo espacio de Banach, sí lo es restringida a ciertas clases de sucesiones (como las convergentes en norma o las que forman un conjunto de Dunford-Pettis: Prop. III.30). Probaremos ahora que se cumple sobre las sucesiones que son sumas parciales de series débilmente incondicionalmente de Cauchy:

Una serie formal en espacio de Banach $\sum_{i=1}^\infty x_i$ es una serie *débilmente incondicionalmente de Cauchy* (d.i.C) si $\sum_{i=1}^\infty |x^*(x_i)| < \infty$ para todo $x^* \in E^*$ (Cap.V [17]). En términos de convergencia débil, es equivalente a que la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{i=1}^n x_{k_i}\}_n$ asociada a cada subserie $\sum_{i=1}^\infty x_{k_i}$, sea débil de Cauchy. Para la topología τ_m en E introducimos entonces, la siguiente definición:

Definición I.44 *Una serie $\sum_{i=1}^\infty x_i$ en el espacio de Banach E es τ_m -Cauchy si para todo $p \in \mathcal{P}(^mE)$,*

$$\lim_{n,k} |p(\sum_{i=1}^n x_i) - p(\sum_{i=1}^k x_i)| = 0$$

(es decir, si la sucesión de sumas parciales asociada a la serie, $\{\sum_{i=1}^n x_i\}_n$ es una sucesión de Cauchy en E_{τ_m}). La serie es τ_m-incondicionalmente de Cauchy (τ_m-i.C) si todas sus subseries son τ_m de Cauchy.

Lema I.45 *Una serie $\sum_{i=1}^\infty x_i$ en el espacio de Bananch E es τ_m-incondicionalmente de Cauchy si y sólo si es débilmente incondicionalmente de Cauchy.*

Demostración. Sea $\sum_{i=1}^\infty x_i$ una serie d.i.C y $T : c_0 \to E$ el operador lineal y continuo definido por $T(e_i) = x_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, donde $\{e_i\}_i$ denota la base canónica de c_0. La serie $\sum_{i=1}^\infty e_i$ es d.i.C en c_0 por lo que la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{i=1}^k e_{n_i}\}_k$ asociada a cada una de las subseries $\sum_{i=1}^\infty e_{n_i}$ es débil de Cauchy y por lo tanto Cauchy en $c_{0\tau_m}$ (en c_0 coinciden las sucesiones débiles de Cauchy con las sucesiones τ_{pol} de Cauchy, como consecuencia de la proposición I.42 y del ejemplo I.43). El teorema I.28 implica entonces, que $\{T(\sum_{i=1}^k e_{n_i})\}_k$ es τ_m de Cauchy.

Veamos la implicación contraria: si suponemos que $\sum_{i=1}^\infty x_i$ no es una serie d.i.C, existe un funcional $x^* \in E^*$ tal que $\sum_{i=1}^\infty |x^*(x_i)| = \infty$. La sucesión $\{x^*(x_i)\}_i \subset \mathbb{C}$ admite una subsucesión $\{x^*(x_{i_k})\}_k$ contenida en uno de los cuadrantes determinados por las rectas $\{\mathcal{R}e(z) = 0\}$ y $\{\mathcal{I}m(z) = 0\}$, de modo que $\sum_{i=1}^\infty |x^*(x_{i_k})| = \infty$. Si $x^*(x_{i_k}) = r_k + i g_k$ es la descomposición de cada elemento de la subsucesión en parte real y parte imaginaria, tenemos que $sgn\{r_k,\ k \in \mathbb{N}\} = cte.$ y $sgn\{g_k,\ k \in \mathbb{N}\} = cte.$ $\sum_{k=1}^\infty |x^*(x_{i_k})| = \sum_{k=1}^\infty (r_k^2 + g_k^2)^{\frac{1}{2}} = \infty$ y por lo tanto $\sum_{k=1}^\infty (|r_k| + |g_k|) = \infty$. Podemos elegir $m_j \in \mathbb{N}$ para cada $j \in \mathbb{N}$ de modo que

$\sum_{k=1}^{m_j} |r_k| > j$, o $\sum_{k=1}^{m_j} |g_k| > j$, y por tanto

$$|\sum_{k=1}^{m_j} x^*(x_{i_k})| = |\sum_{k=1}^{m_j}(r_k + ig_k)| = |\sum_{k=1}^{m_j} r_k + i\sum_{k=1}^{m_j} g_k| =$$
$$|(\sum_{k=1}^{m_j} r_k)^2 + (\sum_{k=1}^{m_j} g_k)^2|^{\frac{1}{2}} = |(\sum_{k=1}^{m_j} |r_k|)^2 + (\sum_{k=1}^{m_j} |g_k|)^2|^{\frac{1}{2}} > j.$$

Hemos construido una subserie para la cual

$$\sup_n\{|\sum_{k=1}^{n} x^*(x_{i_k})|\} = \infty.$$

Como $(x^*)^m$ define un elemento de $\mathcal{P}(^m E)$ y

$$\sup_n\{|x^*(\sum_{k=1}^{n} x_{i_k})|^m\} = \infty,$$

la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{k=1}^{n} x_{i_k}\}_n$ no es de Cauchy en E_{τ_m} y por consiguiente $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ no es τ_m-incondicionalmente de Cauchy. □

El siguiente resultado se prueba ahora de forma sencilla; utilizaremos el teorema de Orlicz-Pettis (Cap.IV, [17]), cuya formulación está descrita en el caso $m = 1$ del corolario:

Corolario I.46 *Una serie $\sum x_i$ en un espacio de Banach E es τ_m-subserie convergente si y sólo si es incondicionalemente convergente.*

Demostración. Por un lado, si la serie es incondicionalmente convergente, cada sucesión de sumas parciales asociada a una subserie, $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k}$ es convergente en norma y por tanto convergente en E_{τ_m}.

Para probar el recíproco, consideremos una serie $\sum x_i$ tal que para cada subserie $\sum x_{i_k}$ existe $z \in E$ de modo que

$$\lim_n |p(\sum_{i=1}^{n} x_{i_k}) - p(z)| = 0 \quad \forall\ p \in \mathcal{P}(^m E). \tag{I.1}$$

Comprobemos que $\sum x_i$ es entonces, débilmente subserie convergente. En efecto: por el lema anterior sabemos que la serie es d.i.C. Para cada subserie $\sum_{k=1} x_{i_k}$, la sucesión $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k}$ es τ_m-convergente a cierto $z \in E$. Por el lema I.34, existe una subsucesión s_{n_j} que converge débilmente a z'. Comprobemos que toda la sucesión s_n es débilmente convergente a z': por tratarse de una serie d.i.C, la

sucesión s_n es débil de Cauchy y por tanto, fijado $x^* \in E^*$, para cada $\epsilon > 0$ existe N de modo que

$$|x^*(s_l) - x^*(z')| \leq |x^*(s_l) - x^*(s_{n_j})| + |x^*(s_{n_j}) - x^*(z')| \leq \epsilon$$

para todo $l, n_j > N$. La serie es, en consecuencia, subserie débilmente convergente y por tanto es convergente en norma (T. Orlicz-Pettis). □

Veamos ahora una propiedad importante de ciertas sucesiones definidas en el espacio dual E^*, que utilizaremos en el capítulo II:

Proposición I.47 *Para todo $m \in \mathbb{N}$ y toda sucesión $\{x_n^*\}_n$ débilmente convergente a cero (resp. débil* convergente a 0) en el espacio de Banach dual E^*, la sucesión $\{(x_n^*)^m\}_n$ es débilmente (resp. débil*) convergente a cero en $(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E)^*$.*

Demostración. Consideremos primero el caso en el que $\{x_n^*\}_n$ converge débilmente* a cero. Como todo elemento de $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ es aproximable en norma por combinaciones absolutamente convexas finitas de elementos diagonales (Prop. I.19), basta comprobar la convergencia puntual de $\{(x_n^*)^m\}_n$ sobre los elementos de la diagonal, pero resulta claro que si $\{x^*(x)\}_n$ converge a cero para cada $x \in E$ entonces $\lim_n (x_n^*)^m(x) = \lim_n (x_n^*(x))^m = 0$.

Veamos ahora el caso de la convergencia débil: como $\check{\otimes}_\epsilon^m E^*$ es un subespacio cerrado de $(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E)^*$ (en [51] y [37] se prueba para $E^* \otimes_\epsilon F^*$; por inducción se deduce el caso $m \in \mathbb{N}$ dado que el producto tensorial inyectivo es estable por subespacios) para probar que $\{(x_n^*)^m\}_n$ converge débilmente a cero, basta probar que $\lim_n \psi((x_n^*)^m) = 0$ para cada $\psi \in (\check{\otimes}_\epsilon^m E^*)^*$; ψ es entonces, de tipo integral ([20], p.231), es decir, existe una medida μ de Borel, σ-aditiva y de variación acotada en el espacio compacto $B^{**} = B_{E^{**}} \times \ldots \times B_{E^{**}}$, de modo que $\psi((x^*)^m) = \int_{B^{**}} x_1^{**}(x^*) \cdots x_m^{**}(x^*) d\mu(x_1^{**}, \cdots, x_m^{**})$ para cada $x^* \in E^*$. Como $< \cdot, x_n^* \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x_n^* >$ es convergente a cero y uniformemente acotada, $\lim_n \psi((x_n^*)^m) = 0$. □

Observación I.48 Con una demostración análoga a la del lema anterior se prueba que si la sucesión $\{x_n\}_n$ es débilmente convergente a cero en el espacio de Banach E, entonces $\{x_n \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x_n\}_n$ es débilmente convergente a cero en $\check{\otimes}_\epsilon^m E$.

Capítulo II

Método homológico

El método homológico para el estudio de un espacio de Banach, consiste fundamentalmente en la caracterización de algunas de sus propiedades en términos del comportamiento de ciertas familias de transformaciones definidas en él. Cuando tales transformaciones son operadores lineales entre espacios de Banach, las familias consideradas son las que A. Pietsch define en [47] como *ideales de operadores*, a efecto de que las propiedades obtenidas sean invariantes por isomorfismos. Por esta misma razón, al aplicar el método homológico al caso de los polinomios homogéneos, deberemos restringirnos a lo que llamaremos *módulos de polinomios*.

II.1 Módulos de polinomios

Definición II.1 *Un conjunto Φ de polinomios homogéneos de grado $m \in \mathbb{N}$, de modo que para cada pareja de espacios de Banach E y F, $\Phi(^mE, F) \subset \mathcal{P}(^mE, F)$, es un módulo de polinomios si verifica las siguientes condiciones:*

1. $\mathcal{P}(^m\mathbb{K}, \mathbb{K}) \subseteq \Phi(^m\mathbb{K}, \mathbb{K})$.
2. *Si P y $Q \in \Phi(^mE, F)$ entonces $P + Q \in \Phi(^mE, F)$.*
3. *Dados G, H espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(G, E)$, $S \in \mathcal{L}(F, H)$ y $P \in \Phi(^mE, F)$, se cumple que $S \circ P \circ T \in \Phi(^mG, H)$.*

Observación II.2 Si Φ es un módulo de polinomios, para cada pareja de espacios de Banach E y F y cada $m \in \mathbb{N}$, $\Phi(^mE, F)$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathcal{P}(^mE, F)$. Cuando este subespacio vectorial sea cerrado diremos que Φ es un *módulo cerrado*.

Como primeros ejemplos de módulos podemos considerar los siguientes:

- La familia de todos los polinomios homogéneos de un grado fijo (*el módulo total*).

- La familia $\mathcal{P}_{co}$ de los polinomios homogéneos de un grado fijo que transforman la bola unidad en un conjunto relativamente compacto (*polinomios compactos*).

El módulo de polinomios compactos está contenido en el módulo total, pero la contención contraria no es cierta; de hecho se cumple que todo polinomio de un espacio de Banach E en cualquier otro espacio de Banach F es compacto si y sólo si E es de dimensión finita (Prop. II.30). Esta simple caracterización ilustra cómo definir diferentes propiedades a través del método homológico. Concretamente el esquema a seguir es el siguiente:

Dados Φ y Ψ dos módulos de polinomios homogéneos y $\mathcal{E}$ una clase de espacios de Banach, diremos que

Definición II.3 *E tiene la propiedad $\mathcal{P}(\Phi, \Psi, m, \mathcal{E})$ si para cualquier $F \in \mathcal{E}$ se cumple que $\Phi(^mE, F) \subseteq \Psi(^mE, F)$.*

Escribiremos $\mathcal{P}(\Phi, \Psi, m)$ cuando la clase de espacios de Banach $\mathcal{E}$ sea el total. La propiedad "*ser de dimensión finita*" se caracterizaría, de acuerdo al ejemplo anterior, mediante la propiedad $\mathcal{P}(\mathcal{P}, \mathcal{P}_{co}, m)$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Proposición II.4 *Dados dos módulos de polinomios Ψ, Φ, $m \in \mathbb{N}$ y una clase de espacios de Banach $\mathcal{E}$, la propiedad $\mathcal{P}(\Phi, \Psi, m, \mathcal{E})$ es invariante por isomorfismos de espacios de Banach y se conserva por el paso a subespacios complementados.*

Demostración. Sea E un espacio con la propiedad $\mathcal{P}(\Phi, \Psi, m, \mathcal{E})$, T un isomorfismo entre los espacios de Banach E y G y $Q \in \Phi(^mG, F)$ con $F \in \mathcal{E}$; $Q \circ T \in \Phi(^mE, F) \subseteq \Psi(^mE, F)$ y en consecuencia $Q = Q \circ T \circ T^{-1} \in \Psi(^mG, F)$. Consideremos ahora el caso en que H sea un subespacio complementado de E. Si denotamos por $T : E \to H$ a la proyección continua y por $J : H \to E$ a la inclusión correspondiente, se cumplirá que para cualesquiera $F \in \mathcal{E}$ y $Q \in \Phi(^mH, F)$, $Q \circ T \in \Phi(^mE, F) \subseteq \Psi(^mE, F)$ y por tanto $Q \circ T \circ J \in \Psi(^mH, F)$. □

Se puede probar que la propiedad $\mathcal{P}(\Phi, \Psi, 1, \mathcal{E})$ (es el caso lineal) es también estable bajo productos finitos, pero la demostración utiliza la linealidad de las transformaciones. En algunos casos particulares será posible probarlo también si $m > 1$, como por ejemplo para la propiedad $\mathcal{P}(\mathcal{R}_m, \mathcal{L}^*)$ (Prop. IV.13) o la propiedad m-DP (Prop. IV.20).

Los módulos y propiedades polinomiales que trataremos aquí y en general, los que han sido estudiados por diferentes autores, son generalizaciones de ideales

y propiedades de operadores bien conocidos. Veremos que tales generalizaciones no son únicas, es decir, nociones que en el caso lineal son equivalentes, en el polinomial no lo son. En la medida de lo posible expondremos las diferentes alternativas y estudiaremos las que a nuestro juicio dan lugar a la extensión más adecuada, preservando la noción intrínseca que, como hemos dicho, en el caso lineal puede ser descrita por definiciones equivalentes que dejan de serlo en el contexto de los polinomios. Es posible estudiar las propiedades respecto a las diferentes topologías polinomiales: $\tau_m, \tau_{\leq m}$ para cada $m \in \mathbb{N}$ o τ_{pol}. La formulación tanto de las definiciones como de las propiedades es similar en cada caso, de modo que lo haremos siempre con la topología τ_m.

Antes de abordar en profundidad los módulos que serán objeto de estudio en este trabajo, empezaremos por exponer los que con mayor frecuencia han ido apareciendo en la literatura. Éstos no necesariamente han sido definidos como tales o bien, han aparecido con el nombre de *ideales de polinomios*.

Ejemplos de módulos estudiados por diferentes autores

II.5 Polinomios compactos.

$P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ es compacto si transforma la bola unidad de E en un conjunto relativamente compacto de F (II.30).

II.6 Polinomios débil-débil secuencialmente continuos.

Es el módulo formado por los polinomios que transforman las sucesiones débilmente convergentes en sucesiones débilmente convergentes. Los introdujimos en la observación I.40, en relación con los polinomios $\mathcal{P}_{wsc}(^mE)$. Si denotamos a este módulo por $\mathcal{P}_{wwsc}$, el espacio E verifica la propiedad $\mathcal{P}(\mathcal{P}, \mathcal{P}_{wwsc}, m)$ si y sólo si E tiene la propiedad $m-SCP$ (Obs. I.40).

II.7 Polinomios completamente continuos.

$P \in \mathcal{P}_{cc}(^mE, F)$ si transforma las sucesiones débilmente convergentes de E en sucesiones convergentes de F. En [5] (Th.2.4) son llamados "*débilmente secuencialmente continuos*" y se prueba que $\mathcal{P}_{cc}(^mE, F)$ coincide con el módulo de los polinomios que transforman las sucesiones débiles de Cauchy de E en sucesiones de Cauchy en F. En [28], [6], [27], [45], [33], [12] et al. se estudia este módulo en relación con otras clases de polinomios.

II.8 Polinomios completamente continuos en 0.

Se definen en [28] como aquellos polinomios que transforman las sucesiones débilmente convergentes a cero en sucesiones convergentes a cero en norma; se denotan $\mathcal{P}_{cc0}(^mE, F)$. Si $m = 1$ coinciden, desde luego, con los completamente continuos, pero no es necesariamente cierto cuando $m > 1$. De las definiciones se tiene $\mathcal{P}_{cc}(^mE,F) \subset \mathcal{P}_{cc0}(^mE,F)$. En [28] (Prop.19) se prueba que si E no es de Schur, la contención es estricta para todo $m > 1$.

II.9 En [26] y [6] se trata con una clase de polinomios distinta a los completamente continuos, pero que es también una generalización de la noción de ideal de operadores completamente continuos: la formada por los polinomios que transforman sucesiones convergentes en la topología $\tau_{\leq m}$, en sucesiones convergentes en norma.

II.10 Polinomios débilmente completamente continuos.
Se definen en [28] como los polinomios que transforman las sucesiones débiles de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes: $\mathcal{P}_{wcc}(^mE,F)$; corresponde a una generalización del ideal de los operadores de Dieudonné.

II.11 Polinomios incondicionalmente convergentes.
En [28] y [29] se definen del siguiente modo: $P \in \mathcal{P}(^mE,F)$ es incondicionalmente convergente si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i)$ es incondicionalmente convergente para cada serie d.i.C $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Los autores demuestran que esta clase contiene a los completamente continuos, a los completamente continuos en el cero, a los débilmente compactos y establecen distintas relaciones entre ellos.

II.12 Todo ideal de operadores $\mathcal{H}$ determina un módulo de polinomios $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ del siguiente modo: diremos que $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}(^mE,F)$ si su operador lineal asociado $\hat{P}$ está en el ideal $\mathcal{H}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E,F)$. Las dos primeras condiciones de módulo son claras y la tercera es consecuencia de las relaciones que cumplen los generadores simétricos frente a la composición (Prop. I.25): para $T \in \mathcal{L}(E_1,E)$ y $S \in \mathcal{L}(F,F_1)$, $\widehat{P \circ T} = \hat{P} \circ T^{(m)}$ y $\widehat{SP} = S \circ \hat{P}$.

II.13 Los polinomios tales que su operador adjunto es incondicionalmente convergente, introducidos en [28].

II.14 En [6] se define la clase de los polinomios que transforman la bola unidad de E en un conjunto relativamente compacto en la topología $\tau_{\leq m}$ y τ_{pol} de F. En principio esta clase no determina un módulo, pues la suma de conjuntos compactos en estas topologías no necesariamente es compacto (Th.5.5 [15]). El caso particular que aparecerá con frecuencia, es el de los polinomios *débilmente compactos* (corresponden a $m = 1$), que sí determina un módulo.

Cada uno de estos ejemplos es una generalización de los respectivos ideales de operadores, aunque no necesariamente responden a un criterio de generalización común. En este trabajo abordaremos sólo algunas clases de polinomios y algunas propiedades, pero siguiendo un criterio general aplicable a otros casos no considerados aquí. La idea a grandes rasgos es muy sencilla: tener en cuenta la relación que se establece, como consecuencia del teorema I.28, entre un espacio dotado de la topología τ_m y las transformaciones polinomiales de grado m definidas en él. Este enfoque permite además, establecer la dualidad existente en el caso lineal, entre propiedades definidas por el método homológico y propiedades definidas a través de ciertos subconjuntos que introduciremos en el siguiente capítulo. Los módulos de los ejemplos anteriores estarán, desde luego, estrechamente relacionados y en la medida de lo posible expondremos estas relaciones.

II.2 Definiciones y primeras propiedades

Después de la definición de módulo de polinomios, introducimos los módulos de polinomios que serán objeto de estudio en este trabajo.

En el corolario I.29 se afirma que cada elemento de $\mathcal{P}(^mE,F)$ transforma las sucesiones de Cauchy en E_{τ_m} en sucesiones débiles de Cauchy de F; los módulos que estudiaremos son los que, en cierta medida, mejoran la convergencia en F, así como el módulo de los polinomios compactos y débilmente compactos. Veremos que ésta es una generalización de los respectivos ideales de operadores que proporciona un método eficaz de estudio de propiedades invariantes bajo isomorfismos, como ocurría en el caso lineal (del que puede verse una clara exposición en [8]).

Definición II.15 *Diremos que el polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE,F)$ es:*

- COMPACTO *si transforma la bola unidad de E en un conjunto relativamente compacto de F. Denotamos por $\mathcal{P}_{co}(^mE,F)$ al subespacio de polinomios compactos.*

- DÉBILMENTE COMPACTO *si transforma la bola unidad de E en un conjunto relativamente débilmente compacto. Denotamos por $\mathcal{P}_{wc}(^mE,F)$ al subespacio de polinomios débilmente compactos.*

- DIEUDONNÉ *si transforma las sucesiones τ_m de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes. Denotamos por $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(^mE,F)$ al subespacio de polinomios de Dieudonné.*

- DUNFORD-PETTIS *si transforma las sucesiones τ_m de Cauchy de E en sucesiones convergentes de F. Denotamos por $\mathcal{P}_{\mathcal{DP}}(^mE,F)$ al subespacio de polinomios de Dunford-Pettis.*

INCONDICIONALMENTE CONVERGENTE *si para toda serie d.i.C* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *en* E, *la sucesión* $\{P(\sum_{i=1}^{n} x_i)\}_n$ *converge en norma. Denotamos por* $\mathcal{P}_{ic}(^mE, F)$ *al subespacio de polinomios incondicionalmente convergentes.*

La nomenclatura es similar a la que utilizan otros autores (como en los ejemplos de la sección anterior) pues hace referencia a una misma noción lineal. A lo largo del trabajo utilizaremos, siempre que no se indique lo contrario, estas definiciones.

Observación II.16 Es equivalente definir los módulos de polinomios de Dunford-Pettis y Dieudonné del siguiente modo:

$$\mathcal{P}_{DP}(^mE, F) = \{P : \text{ para cada subconjunto } A \subset E \text{ tal que toda sucesión } (x_n) \subset A \text{ contiene una subsucesión } \tau_m \text{ de Cauchy, } P(A) \text{ es relativamente compacto en } F\}$$

$$\mathcal{P}_{D}(^mE, F) = \{P : \text{ para cada subconjunto } A \subset E \text{ tal que toda sucesión } (x_n) \subset A \text{ contiene una subsucesión } \tau_m \text{ de Cauchy, } P(A) \text{ es relativamente débilmente compacto en } F\}$$

Veamos, por ejemplo, el caso de los polinomios de Dunford-Pettis (el otro caso se prueba de manera análoga):

Si A es como antes y P es un polinomio de Dunford-Pettis, $P(A)$ es relativamente compacto, pues cada sucesión $\{x_n\}$ admite una subsucesión τ_m de Cauchy que es transformada por P en una sucesión convergente; en consecuencia, cada sucesión $\{P(x_n)\}_n \subset P(A)$ admite una subsucesión convergente.

Veamos ahora la otra contención: sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en E_{τ_m} y P como antes. Existe entonces $z \in F$ y una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ de modo que $\lim_k \|P(x_{n_k}) - z\| = 0$. Debemos comprobar que toda la sucesión $\{P(x_n)\}_n$ converge a z. Si no es así, una construcción como la anterior da lugar a la existencia de una subsucesión $\{x_{n(i)}\}_i$ y $z' \neq z$ tales que $\lim_i \|P(x_{n(i)}) - z'\| = 0$, pero por hipótesis $\{x_n\}_n$ es de Cauchy en E_{τ_m} y por lo tanto, para cada $f^* \in F^*$ existe $\lim_n f^*(P(x_n))$ ($f^* \circ P \in \mathcal{P}(^mE)$). Se deduce entonces que para todo $f^* \in F^*$, $f^*(z) = f^*(z')$, lo que resulta ser una contradicción.

Observación II.17 En las definiciones de los polinomios Dunford-Pettis y Dieudonné hemos considerado sucesiones de Cauchy en E_{τ_m}. En el caso $m = 1$ es equivalente definirlas partiendo de sucesiones τ_m convergentes o incluso τ_m convergentes a cero por la linealidad de la topología débil. En el caso general ambas definiciones no tienen, en principio, por qué ser equivalentes. La elección que tiene en cuenta las sucesiones de Cauchy es la que permite establecer la dualidad mencionada al finalizar la sección anterior, pero obedece también a la idea intuitiva descrita antes, de determinar los módulos que mejoran la convergencia de las sucesiones de E_{τ_m}.

Observación II.18 La definición natural de la incondicionalidad de un polinomio sería, según lo dicho en la observación anterior, partiendo de series τ_m-i.C de E, pero en el lema I.45 vimos que coincidían con las series d.i.C.

Observación II.19 Los módulos de polinomios compactos y de polinomios débilmente compactos se incluyen en los descritos en el ejemplo (II.12) ya que se cumple (Lemma 4.1 [49]):

$$P \in \mathcal{P}_{co}(^mE, F) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{P} \in \mathcal{L}_{co}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, F)$$

$$P \in \mathcal{P}_{wc}(^mE, F) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{P} \in \mathcal{L}_{wc}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, F)$$

Los polinomios incondicionales sin embargo no son de este tipo: en [48] se construye un espacio de cotipo 2 (y por tanto sin copias de c_0) X, tal que $X \hat{\otimes}_{s,\pi} X$ contiene un subespacio isomorfo a c_0 (Cor.10.7 [48]). El polinomio canónico θ_2 es incondicional (Prop. II.34) y en cambio el operador $\hat{\theta}_2$ es un isomorfismo en un espacio con copia de c_0 y por lo tanto no es incondicional.

Proposición II.20 *Cada una de las clases definidas en II.15 determina un módulo cerrado de polinomios.*

Demostración. Haremos la prueba en el caso de los polinomios incondicionalmente convergentes; los otros casos se demuestran de forma análoga.

Las condiciones de módulo (Def. II.1) son claras. Veamos entonces que para cada par de espacios E y F, $\mathcal{P}_{ic}(^mE, F)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{P}(^mE, F)$:

Sea $\{P_n\}_n \subset \mathcal{P}_{ic}(^mE, F)$ una sucesión convergente en norma a P y $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ una serie d.i.C en E. Las sumas parciales $\{s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i\}$ forman una sucesión débil de Cauchy y en consecuencia acotada por algún M. Como $\lim_n \|P_n - P\| = 0$, para cada $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $\|P_{n_0} - P\| < \epsilon$. Dado que $P_{n_0} \in \mathcal{P}_{ic}(^mE, F)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $k, l > k_0$,

$$\|P_{n_0}(\sum_{i=1}^{k} x_i) - P_{n_0}(\sum_{i=1}^{l} x_i)\| < \epsilon.$$

Se cumple entonces

$$\|P(\sum_{i=1}^{k} x_i) - P(\sum_{i=1}^{l} x_i)\| \leq \|P(\sum_{i=1}^{k} x_i) - P_{n_0}(\sum_{i=1}^{k} x_i)\| +$$

$$\|P_{n_0}(\sum_{i=1}^{k} x_i) - P_{n_0}(\sum_{i=1}^{l} x_i)\| + \|P_{n_0}(\sum_{i=1}^{l} x_i) - P(\sum_{i=1}^{l} x_i)\| < \epsilon(1 + 2M^m)$$

para todo $k, l > k_0$, de donde se deduce que P es también un polinomio incondicionalmente convergente. □

Teorema II.21 *Dados E y F espacios de Banach, y $m \in \mathbb{N}$, se cumplen las siguientes inclusiones:*

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{P}_{wc}(^mE, F) & & \\ & \subset & & \subset & \\ \mathcal{P}_{co}(^mE, F) & & & & \mathcal{P}_{\mathcal{D}}(^mE, F) \subset \mathcal{P}_{ic}(^mE, F) \subset \mathcal{P}(^mE, F) \\ & \subset & & \subset & \\ & & \mathcal{P}_{\mathcal{DP}}(^mE, F) & & \end{array}$$

Demostración. La única contención de este esquema que no es inmediata es la que afirma que todo polinomio de Dieudonné es incondicionalmente convergente. En el caso lineal es una consecuencia del teorema de Orlicz-Pettis [17] pero para probar el caso $m > 1$ es necesario usar el siguiente lema, que probaremos en el capítulo V (Prop. V.5):

Lema II.22 *Un polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ is incondicionalmente convergente si y sólo si para toda serie d.i.C $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ en E, la sucesión $\{P(\sum_{i=1}^{n} x_i)\}_n$ es débilmente convergente en F.*

La sucesión de sumas parciales de una serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ d.i.C en E es una sucesión τ_m-Cauchy (Lema I.45) por lo que cualquier polinomio $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}(^mE, F)$ la transforma en una sucesión débilmente convergente; dando por válida la proposición V.5 se concluye que la transforma, de hecho, en una sucesión convergente en norma. □

Observación II.23 En ocasiones será necesario conocer el comportamiento de los polinomios homogéneos de grado k actuando sobre las sucesiones de Cauchy

en la topología τ_m, donde k y m no son necesariamente iguales (por ejemplo, T. IV.16 o Prop. IV.24). Se puede definir, de forma análoga a la vista en II.15, el subespacio de $\mathcal{P}(^kE, F)$ formado por aquellos polinomios que transforman las sucesiones τ_m de Cauchy en sucesiones convergentes en norma y el subespacio de los que transforman las sucesiones τ_m de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes. Se puede demostrar igualmente que hay un esquema de contenciones entre subespacios análogo al dado en el caso $k = m$ (T. II.21). La demostración es similar: todas las contenciones son inmediatas, salvo la relativa a los Dieudonné y los incondicionales, que utiliza del mismo modo el lema II.22.

Los módulos son distintos

Mediante el método definido en la primera sección (Def. II.3) vamos a tratar a continuación algunas de las propiedades que se obtienen directamente con los módulos antes descritos. Dejaremos otras propiedades para un estudio posterior, en el que aparecerán caracterizadas también en términos conjuntistas. Empezaremos probando con ejemplos que todas las inclusiones del teorema II.21 son en general estrictas, con lo que se garantiza que las propiedades obtenidas aplicando el método homológico a esos módulos son no triviales. En cada uno de los siguientes casos existe F tal que:

II.24 $\mathcal{P}_{co}(^m\ell_p, F) \subsetneq \mathcal{P}_{wc}(^m\ell_p, F)$, $p > m$.

Es bien conocido que si $p > m$ el espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}\ell_p$ es reflexivo (ver por ejemplo, [49] o [16]) lo que es equivalente, según la observación II.19 a

$$\mathcal{P}_{wc}(^m\ell_p, F) = \mathcal{P}(^m\ell_p, F);$$

sin embargo $\theta_m : \ell_p \to \hat{\otimes}^m_{s,\pi}\ell_p$ no es un polinomio compacto (si lo fuera, por la proposición I.19, la bola unitaria de $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}\ell_p$ sería un conjunto compacto).

II.25 $\mathcal{P}_{\mathcal{DP}}(^m\ell_p, F) \subsetneq \mathcal{P}_{\mathcal{D}}(^m\ell_p, F)$, $p > m$.

Todo polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ es débilmente compacto, dado que $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}\ell_p$ es reflexivo; en particular cada uno de esos polinomios es de Dieudonné. Por otro lado, cada polinomio de Dunford-Pettis transforma la bola en un conjunto relativamente compacto (de nuevo, por ser $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}\ell_p$ reflexivo, de cada sucesión acotada en ℓ_p se puede extraer una subsucesión τ_m de Cauchy) y por tanto son todos compactos; la contención debe ser entonces estricta.

II.26 $\mathcal{P}_{co}(^m\ell_1, F) \subsetneq \mathcal{P}_{\mathcal{DP}}(^m\ell_1, F)$.

El polinomio $\theta_m : \ell_1 \to \hat{\otimes}^m_{s,\pi}\ell_1$ no es un polinomio compacto ni débilmente compacto (esto implicaría que $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}\ell_1$ es de dimensión finita o reflexivo) pero sí es de Dunford-Pettis; de hecho se cumple

$$\mathcal{P}_{\mathcal{DP}}(^m\ell_1, F) = \mathcal{P}(^m\ell_1, F)$$

pues vimos anteriormente (Lema I.34) que de toda sucesión τ_m de Cauchy se puede extraer una subsucesión débil de Cauchy, por lo que en el caso del espacio de Banach $E = \ell_1$ (y de cualquier espacio de Schur), las sucesiones τ_m de Cauchy admiten subsucesiones convergentes en norma. Cualquier polinomio m-homogéneo es entonces, de Dunford-Pettis.

II.27 $\mathcal{P}_{wc}(^m\ell_1, F) \subsetneq \mathcal{P}_{\mathcal{DP}}(^m\ell_1, F)$ y $\mathcal{P}_{wc}(^m\ell_1, F) \subsetneq \mathcal{P}_{\mathcal{D}}(^m\ell_1, F)$ se prueban como en el caso anterior.

II.28 $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(^m\mathcal{J}_{m+1}, F) \subsetneq \mathcal{P}_{ic}(^m\mathcal{J}_{m+1}, F)$, donde $\mathcal{J}_{m+1}$ es el espacio de James construido a partir de la norma de ℓ_{m+1}. El espacio $\mathcal{J}_{m+1}$ no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0, lo que nos permite afirmar que todos los polinomios definidos sobre él son incondicionales (Prop. II.34). Probaremos ahora que el polinomio canónico

$$\theta_m : \mathcal{J}_{m+1} \longrightarrow \hat{\otimes}^m_{s,\pi}\mathcal{J}_{m+1}$$

no es de Dieudonné. Para ello observemos primero que el espacio $\mathcal{J}_{m+1}$ tiene la propiedad k-SCP para $k \leq m$ (Def. I.39). En efecto: dada una sucesión $\{x_n\}_n$ débilmente convergente a x en $\mathcal{J}_{m+1}$, existe una subsucesión de modo que $\{x_{n_j} - x\}_j$ es equivalente a la base canónica de ℓ_{m+1} y genera un subespacio complementado, por lo que para cada $p \in \mathcal{P}(^{\leq m}\mathcal{J}_{m+1})$, $\lim_j p(x_{n_j} - x) = 0$; el lema I.36 asegura entonces que $\{x_{n_j}\}_j$ converge a x en la topología $E_{\tau_{\leq m}}$.

La base sumante $\{\xi_n\}_n$ de $\mathcal{J}_{m+1}$ es una sucesión débil de Cauchy no débilmente convergente; por la propiedad *m-SCP* la sucesión $\{\theta_m(\xi_n)\}_n$ es también débil de Cauchy, pero no es débilmente convergente (Lema I.34), con lo que queda probado que el polinomio θ_m no es de Dieudonné.

II.29 $\mathcal{P}_{ic}(^m c_0, F) \subsetneq \mathcal{P}(^m c_0, F)$

El polinomio canónico θ_m de c_0 no es incondicionalmente convergente: la sucesión $\{\sum_{i=1}^n e_i\}_n$ es d.i.C, no convergente en norma por lo que su imagen $\{\theta_m(\sum_{i=1}^n e_i)\}_n$ tampoco lo es (Prop. III.6).

Primeras propiedades

En los ejemplos expuestos utilizamos el hecho fundamental de que el polinomio $\theta_m : E \to \hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$ estuviera o no en el ideal. Con el mismo argumento se obtienen las siguientes conclusiones:

II.30 $E \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathcal{P}, \mathcal{P}_{co}, m)$, si y sólo si E es de dimensión finita.

Considerando $F = \hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$, el polinomio θ_m debiera ser compacto pero por ser la bola unitaria de F la clausura de la envoltura absolutamente convexa de $\theta_m(\mathcal{B}_E)$ (Prop. I.19), sólo sucede si la dimensión es finita. De la observación II.19 se obtiene que es equivalente también a que el espacio tensor $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$ cumpla la propiedad $\boldsymbol{\mathcal{P}}(P, P_{co}, 1)$

II.31 $E \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathcal{P}, \mathcal{P}_{wc}, m)$, si y solamente si el espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$ es reflexivo.

Se prueba como el caso anterior ya que la clausura en norma y la clausura débil de un convexo acotado coinciden (T. III.13). Análogamente se cumple la equivalencia con la propiedad del espacio tensor $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$, $\boldsymbol{\mathcal{P}}(P, P_{wc}, 1)$.

II.32 Un espacio E con la *propiedad de aproximación A.P* (1.e [41]) tiene la propiedad $\boldsymbol{\mathcal{P}}(P, P_{\mathcal{D}}, m)$, si y sólo si E_{τ_m} es secuencialmente completo.

Por un lado, dada una sucesión $\{x_n\}_n \in E\tau_m$ de Cauchy, si el polinomio θ_m es de Dieudonné, debe transformar la sucesión en una sucesión débilmente convergente $\{x_n \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x_n\}_n$, en $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$; como E cumple la A.P, el límite debe ser de la forma $x \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x$ (Lemma 21 [29]) y por lo tanto $\{x_n\}_n$ converge en la topología τ_m a x. La otra implicación es clara y no requiere de la A.P.

II.33 $E \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(P, P_{\mathcal{DP}}, m)$ si y solamente si toda sucesión τ_m de Cauchy en E admite una subsucesión convergente en norma.

Para ver esto usamos que el polinomio θ_m transforma por consiguiente, cada sucesión τ_m-Cauchy $\{x_n\}_n$, en la sucesión $\{x_n \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x_n\}_n$ convergente en norma. Como $\|x_n \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x_n\| = \|x_n\|^m$, si la convergencia es a cero, se deduce que la sucesión original también converge a cero. En caso contrario, existe una subsucesión tal que $\{\theta_m(x_{n_j})\}_j$ converge a un elemento $z \in \hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$. La proposición III.6 afirma entonces que $z = x_0 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x_0$ para algún $x_0 \in E$. Escogemos un funcional lineal continuo $f \in (\hat{\otimes}^{m-1}_{s,\pi}E)^*$ de tal modo que $f(x_0 \otimes \overset{m-1}{\cdots} \otimes x_0) = 1$ y definimos el operador lineal $T_f : \hat{\otimes}^m_{s,\pi}E \to E$ determinado por la condición $T_f(x \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x) = f(x \otimes \overset{m-1}{\cdots} \otimes x)x$ sobre los elementos de la diagonal. Se deduce entonces que la subsucesión $\{x_{n_j}\}_j \in E$ converge en norma a x_0. Como antes, la otra implicación resulta clara. Estudiaremos esta propiedad en la sección 4.4 (propiedad Λ_m-Schur).

La propiedad que nos falta por ver es la que compara el módulo de los polinomios incondicionalmente convergentes con el total. Su comportamiento es análogo al del caso lineal y de hecho es una propiedad independiente del grado de los polinomios. La escribimos en forma de proposición porque la usaremos repetidas veces a lo largo del trabajo:

Proposición II.34 *$E \in \mathcal{P}(P, P_{ic}, m)$ si y sólo si E no contiene ningún subespacio isomorfo al espacio de Banach c_0.*

Demostración. Si E contiene una copia de c_0, existe una sucesión básica $\{x_i\}_i$ equivalente a la base canónica de c_0. La serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es d.i.C y existe $\epsilon > 0$ tal que para cualesquiera $n \leq k \in \mathbb{N}$, $\|\sum_{i=n}^{k} x_i\| > \epsilon > 0$. Si suponemos que E tiene la propiedad $\mathcal{P}(P, P_{ic}, m)$, en particular el polinomio θ_m es incondicionalmente convergente y por tanto $\{\theta_m(\sum_{i=1}^{n} x_i)\}_n$ es convergente en norma; por la proposición III.6, existe $\{n_k\}_k \subset \mathbb{N}$ tal que $\{y_k := \sum_{i=1}^{n_k} x_i\}_k$ es convergente en E, pero $\|y_{k+1} - y_k\| = \|\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} x_i\| > \epsilon$, lo que resulta una contradicción.

La otra implicación es consecuencia de que en un espacio sin copias de c_0 toda serie d.i.C es incondicionalmente convergente ([17], V. Th.8) y por tanto la sucesión de sumas parciales asociada, es convergente en norma y transformada a su vez en una sucesión convergente, por cualquier elemento de $\mathcal{P}(^m E, F)$. □

II.3 Relación con otros módulos

A continuación compararemos los módulos definidos en II.15 con las respectivas clases de polinomios expuestas en la primera sección. Empecemos notando:

Observación II.35 Si el espacio F es de dimensión finita, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y cualquier espacio de Banach E,

$$\mathcal{P}_{co}(^m E, F) = \mathcal{P}(^m E, F)$$

y por tanto todos los módulos del teorema II.21 coinciden. Esto no necesariamente ocurre con las generalizaciones expuestas como ejemplo (Sección 2.1), pues está involucrada la propiedad de continuidad secuencial débil, que es una propiedad asociada al espacio de polinomios $\mathcal{P}(^m E)$ (Obs. I.40). Como ejemplo podemos considerar el polinomio

$$\begin{array}{rcl} Q : \ell_3 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i & \mapsto & \sum_{i=1}^{\infty} x_i^3 \end{array}$$

que es compacto pero no completamente continuo, pues $\{Q((-1)^n e_n)\}$ no es una sucesión convergente en $\mathbb{C}$.

II.36 Polinomios de Dunford-Pettis.

Denotábamos:

$$\mathcal{P}_{DP}(^m E, F) = \{P \in \mathcal{P}(^m E, F);\ \{P(x_n)\} \text{ es convergente para cada sucesión } \{x_n\} \text{ de Cauchy en } E_{\tau_m}\} \quad (\text{Def. II.15})$$

$$\mathcal{P}_{cc}(^m E, F) = \{P \in \mathcal{P}(^m E, F);\ \{P(x_n)\} \text{ es convergente para cada sucesión } \{x_n\} \text{ débil de Cauchy en } E\} \quad (\text{Ej. II.7})$$

Proposición II.37 *Dados E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$, se cumple:*

1. $\mathcal{P}_{cc}(^m E, F) \subset \mathcal{P}_{DP}(^m E, F)$ para cada espacio de Banach F.

2. Son equivalentes:

i) E tiene la propiedad de continuidad secuencial m-SCP.

ii) $\mathcal{P}_{cc}(^m E, F) = \mathcal{P}_{DP}(^m E, F)$ para cada espacio de Banach F.

iii) $\mathcal{P}(^m E) = \mathcal{P}_{cc}(^m E)$.

En este caso, todo polinomio m-homogéneo de Dunford-Pettis en E, transforma las sucesiones débiles de Cauchy en sucesiones convergentes en norma.

Demostración. 1. Consideremos un polinomio $P \in \mathcal{P}_{cc}(^m E, F)$ y una sucesión τ_m de Cauchy, $\{x_n\}_n$. El lema I.34 garantiza la existencia de una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ débil de Cauchy. Por ser P completamente continuo, $\{P(x_{n_k})\}_k$ es una sucesión convergente en F. Con la observación II.16 se concluye que P es de Dunford-Pettis.

2. Dado $P \in \mathcal{P}_{DP}(^m E, F)$ y una sucesión débil de Cauchy en E, $\{x_n\}_n$, si E cumple la propiedad m-SCP (Prop. I.41), $\{x_n\}_n$ es también τ_m de Cauchy, por lo que $\{P(x_n)\}_n$ es convergente en norma. P es, por tanto, un polinomio completamente continuo. Supongamos ahora que E no cumple la m-SCP; existe $\{x_n\}_n$ débil de Cauchy y $q \in \mathcal{P}(^m E)$ tales que $\{q(x_n)\}_n$ no es convergente en $\mathbb{C}$. Claramente $q \in \mathcal{P}_{DP}(^m E, \mathbb{C})$ pero no es completamente continuo. La equivalencia entre i) y iii) (ver [12]) es la ya vista en la proposición I.41, pues en $F = \mathbb{C}$ coinciden la convergencia débil y la convergencia en norma. □

Observación II.38 De las demostraciones anteriores se desprende que para $m \in \mathbb{N}$ y E, F espacios de Banach,

$$\mathcal{P}_{cc}(^mE,F) = \mathcal{P}_{DP}(^mE,F) \cap \mathcal{P}_{wwsc}(^mE,F),$$

donde $\mathcal{P}_{wwsc}(^mE,F)$ denota el espacio de polinomios que son secuencialmente continuos de la topología débil de E en la topología débil de F (Obs. I.40).

En el ejemplo II.8 (polinomios completamente continuos en cero) se estableció que siempre se cumple $\mathcal{P}_{cc}(^mE,F) \subset \mathcal{P}_{cc0}(^mE,F)$ y que la otra igualdad es cierta si y sólo si E es de Schur [28]. En ese mismo trabajo se proponen dos ejemplos para mostrar que la clase $\mathcal{P}_{cc0}(^mE,F)$, $m > 1$ no tiene el comportamiento regular que se tiene si $m = 1$. Estos ejemplos sirven para ilustrar que no hay una relación válida en todo espacio de Banach entre ellos y los polinomios de Dunford-Pettis:

$$\begin{array}{rcll} P:\ell_2 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \in \mathcal{P}_{DP}(^2\ell_2) \setminus \mathcal{P}_{cc0}(^2\ell_2) \\ (x_n) & \mapsto & \sum x_n^2 & \end{array}$$

En efecto, por tratarse de un polinomio escalar, es de Dunford-Pettis (Obs. II.35) sin embargo no transforma la sucesión débilmente convergente a cero $\{e_n\}$ en una sucesión convergente a cero. Para comprobarlo en el caso recíproco, construimos el siguiente polinomio: dada la base canónica de ℓ_3, sea $e_1^* \in (\ell_3)^*$ el primer término de la sucesión biortogonal y Q el polinomio:

$$\begin{array}{rcll} Q:\ell_3 & \longrightarrow & \ell_3 & \in \mathcal{P}_{cc0}(^2\ell_3,\ell_3) \setminus \mathcal{P}_{DP}(^2\ell_3,\ell_3) \\ x & \mapsto & e_1^*(x)x & \end{array}$$

Si $\{x_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)} e_i\}$ es una sucesión débilmente convergente a cero, la sucesión $\{Q(x_n) = a_1^{(n)} x_n\}$ es convergente en norma a cero, sin embargo ninguna subsucesión de $\{Q(e_1+e_n) = e_1 + e_n\}$ converge en norma, lo que prueba que Q no es un polinomio de Dunford-Pettis (cada subsucesión de $\{e_1+e_n\}$ tiene una subsucesión τ_2 convergente dado que $\hat{\otimes}^2_{s,\pi}\ell_3$ es reflexivo).

II.39 Polinomios de Dieudonné

Veremos ahora que la relación entre las distintas clases, al igual que en el caso anterior, es la propiedad de continuidad secuencial:
Denotábamos:

$\mathcal{P}_D(^mE,F) = \{P \in \mathcal{P}(^mE,F);\ \{P(x_n)\}$ es débilmente convergente para cada sucesión $\{x_n\}$ de Cauchy en $E_{\tau_m}\}$ (Def. II.15)

$\mathcal{P}_{wcc}(^mE,F) = \{P \in \mathcal{P}(^mE,F);\ \{P(x_n)\}$ es débilmente convergente para cada sucesión $\{x_n\}$ débil de Cauchy en $E\}$ (Ej. II.10)

Proposición II.40 *Dados E y F espacios de Banach y $m \in \mathbb{N}$, se cumple:*

1. $\mathcal{P}_{wcc}(^mE,F) \subset \mathcal{P}_D(^mE,F)$.
2. *Son equivalentes:*
   i) *E tiene la propiedad de continuidad secuencial m-SCP.*
   ii) $\mathcal{P}_{wcc}(^mE,F) = \mathcal{P}_D(^mE,F)$.
   iii) $\mathcal{P}(^mE) = \mathcal{P}_{wcc}(^mE) = \mathcal{P}_{cc}(^mE)$.

En este caso todo polinomio m-homogéneo definido en E transforma las sucesiones débiles de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes.

Las demostraciones son análogas a las de la proposición II.37. Para cada $m \in \mathbb{N}$ y E, F espacios de Banach se cumple también:

$$\mathcal{P}_{wcc}(^mE,F) = \mathcal{P}_D(^mE,F) \cap \mathcal{P}_{wwsc}(^mE,F).$$

II.41 Polinomios incondicionalmente convergentes.

En este caso, a diferencia de los anteriores, la relación entre las distintas definiciones de incondicionalidad no es la continuidad débil secuencial, aunque ambas generalicen el mismo ideal de operadores. Esto es debido por una parte, a que todos los polinomios escalares son secuencialmente continuos restringidos a las sucesiones de sumas parciales de series d.i.C (Lema I.45) y por otra, a que se definen a partir de sumas infinitas de elementos del espacio y que por tanto, deben entenderse como límites de sumas finitas, en alguna topología; el módulo $\mathcal{P}_{ic}$ considera el espacio topológico E_{τ_m}, mientras que el módulo $\mathcal{P}_{uc}$ se define a partir de la topología débil en $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$.
Denotábamos:

$\mathcal{P}_{ic}(^mE,F) = \{P \in \mathcal{P}(^mE,F);\ \{P(s_n)\}$ es convergente para cada sucesión de sumas parciales $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ asociada a cada serie d.i.C $\sum_{i=1}^{\infty} x_i\}$ (Def. II.15)

$\mathcal{P}_{uc}(^mE,F) = \{P \in \mathcal{P}(^mE,F);\ \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i)$ es incondicionalmente convergente para cada serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ d.i.C de E$\}$ (Ej. II.10)

Proposición II.42 *Dados E, F espacios de Banach y $m \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{P}_{ic}(^mE,F) \subset \mathcal{P}_{uc}(^mE,F).$$

Demostración. Si $m = 1$ es claro que las dos definiciones coinciden. Fijemos entonces $m > 1$; las funciones de Rademacher generalizadas $s_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ [4] satisfacen la siguiente propiedad de ortogonalidad:

$$\int_0^1 s_{i_1}(t)\dots s_{i_m}(t)dt = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 = \dots = i_m \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Consideremos un polinomio $P \in \mathcal{P}_{ic}(^mE, F)$, T_P la aplicación m-lineal simétrica asociada y una serie d.i.C $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ en E.

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = \int_0^1 \sum_{i_1 \dots i_m = 1}^{n} s_{i_1}(t)\dots s_{i_m}(t) T_P(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})dt =$$

$$\int_0^1 T_P(\sum_{i_1=1}^{n} s_{i_1}(t)x_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^{n} s_{i_m}(t)x_{i_n})dt = \int_0^1 P(\sum_{i=1}^{n} s_i(t)x_i)dt.$$

Para cada $t \in [0,1]$ la serie $\sum_{i=1}^{n} s_i(t)x_i$ es d.i.C y por ser P incondicional, $\{P(\sum_{i=1}^{n} s_i(t)x_i)\}_n$ es una sucesión convergente en norma. La serie $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i)$ es, entonces, incondicionalmente convergente. □

Proposición II.43 *Dado E espacio de Banach y $m > 1$, son equivalentes:*

1. *E no contiene copias de c_0.*
2. *Para todo espacio de Banach F, $\mathcal{P}_{ic}(^mE, F) = \mathcal{P}(^mE, F)$.*
3. *Para todo espacio de Banach F, $\mathcal{P}_{ic}(^mE, F) = \mathcal{P}_{uc}(^mE, F)$.*

Demostración. La equivalencia entre 1 y 2 corresponde a la proposición II.34 y 3 es consecuencia de 2, gracias a la proposición anterior. Veamos ahora que 3 implica 1: utilizaremos para ello el polinomio construido en el lema 7 [28] como ejemplo de polinomio en la clase $\mathcal{P}_{uc}$ y no débilmente compacto: si E contiene a c_0 existe una sucesión $\{x_n\} \subset E$ equivalente a su base canónica. Escogemos $x^* \in E^*$ de modo que $x^*(x_1) = 1$ y $x^*(x_n) = 0$ para todo $n > 1$ y definimos

$$\begin{array}{rcl} P : E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x^*(x)^{m-1}x \end{array}$$

Para cualquier $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ serie d.i.C en E se tiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|P(y_i)\| \le \sup_j \|y_j\| (\sum_{i=1}^{\infty} |x^*(y_i)|^{m-1}) \le \sup_j \|y_j\| (\sum_{i=1}^{\infty} |x^*(y_i)|)^{m-1} < \infty,$$

lo que prueba que $P \in \mathcal{P}_{uc}(^mE, E)$, sin embargo

$$P(\sum_{i=1}^{n} x_i) = (x^*(\sum_{i=1}^{n} x_i))^{m-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

y por tanto P no pertenece al módulo $\mathcal{P}_{ic}(^mE, F)$; en consecuencia 3 no puede ser cierto. □

Capítulo III

Método Conjuntista

III.1 Definiciones generales

Asociadas a la topología de un espacio aparecen ciertas familias de subconjuntos, como la familia de los acotados o la de los compactos, cuyas propiedades se reflejan en propiedades del espacio. Éstas serán las que estudiaremos a continuación, respecto a las topologías definidas en el capítulo I. Veremos que con este permite probar importantes resultados de forma muy simple (por ejemplo, los teoremas III.13 y IV.31).

Consideraremos clases de subconjuntos estrechamente relacionadas con los módulos de la sección anterior y que, por lo tanto, resultarán ser generalizaciones de las clases definidas en el contexto lineal. La forma de llevar a cabo esta generalización es teniendo en cuenta de nuevo, que la topología natural (además de la de la norma) en E al tratar con transformaciones del tipo $\mathcal{P}(^mE, F)$ es τ_m (T. I.28), como lo era la topología débil en cuanto a los operadores lineales.

Si $\mathcal{F}$ denota una clase de subconjuntos de espacios de Banach que se preserva por operadores lineales, se cumple la siguiente caracterización trivial de $\mathcal{F}$:

Dado A un subconjunto acotado del espacio de Banach E, $A \in \mathcal{F}(E)$ si y sólo si para todo espacio de Banach F y todo $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $T(A) \in \mathcal{F}(F)$.

Para obtener una caracterización análoga de las clases de subconjuntos polinomiales, es necesario definirlas del siguiente modo:

Definición III.1 *[9] Dada una clase $\mathcal{F}$ de subconjuntos de espacios de Banach, un espacio de Banach E y $m \in \mathbb{N}$, diremos que un subconjunto $A \subset E$ es un conjunto de la clase $\mathcal{F}_m$ si $\theta_m(A) \in \mathcal{F}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E)$.*

Esta definición fue introducida en [9]; en ese trabajo se prueban también algunos de los resultados que citaremos en este capítulo.

Proposición III.2 *Sea $\mathcal{F}$ una clase de conjuntos acotados de espacios de Banach que se preserva por operadores lineales, E un espacio de Banach y A un conjunto acotado en E. Se cumple que A es un conjunto en la clase $\mathcal{F}_m(E)$ si y sólo si para cada espacio de Banach F y cada $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$, $P(A) \in \mathcal{F}(F)$.*

Demostración. Consideremos un polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$. Por definición, si $A \in \mathcal{F}_m(E)$, $\theta_m(A) \in \mathcal{F}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E)$. Si $\hat{P}$ denota al operador lineal asociado a P, se cumple $P(A) = \hat{P}(\theta_m(A))$. Como $\mathcal{F}$ es una clase estable por operadores lineales, $\hat{P}(\theta_m(A)) \in \mathcal{F}(F)$.

Para la demostración del recíproco, basta imponer la condición para el polinomio canónico $\theta_m \in \mathcal{P}(^mE, \hat{\otimes}^m_{s,\pi}E)$: en efecto, por hipótesis $\theta_m(A) \in \mathcal{F}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E)$, es decir, $A \in \mathcal{F}_m(E)$. □

Al igual que en el caso de los módulos (Def. II.3), definiremos las propiedades por comparación de las distintas clases:

Definición III.3 *Dadas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ clases de subconjuntos de espacios de Banach, diremos que E tiene la propiedad $\boldsymbol{P}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ si se cumple que $\mathcal{F}(E) \subset \mathcal{G}(E)$.*

Proposición III.4 *Dado $m \in \mathbb{N}$ y una propiedad $\boldsymbol{P}(\mathcal{F}_m, \mathcal{G})$ válida en todo espacio de Banach, también lo es, para cada $k \in \mathbb{N}$ la propiedad*

$$\boldsymbol{P}(\mathcal{F}_{mk}, \mathcal{G}_k).$$

Demostración. Sea E un espacio de Banach. $A \in \mathcal{F}_{mk}(E)$ si y sólo si $\theta_{mk}(A) = \theta_m(\theta_k(A)) \in \mathcal{F}(\hat{\otimes}^{mk}_{s,\pi}E)$. Claramente se obtiene entonces que $\theta_k(A) \in \mathcal{F}_m(\hat{\otimes}^k_{s,\pi}E) \subset \mathcal{G}(\hat{\otimes}^k_{s,\pi}E)$, es decir: $A \in \mathcal{G}_k(E)$. □

Con el objeto de estudiar mediante subconjuntos, propiedades invariantes por isomorfismos de espacios de Banach y proyecciones continuas, se requieren condiciones de estabilidad a este respecto sobre las familias consideradas:

Proposición III.5 *[9] Si $\mathcal{F}$ es una clase de subconjuntos que se preserva bajo uniones finitas, paso a subconjuntos y aplicaciones lineales continuas, también se preserva la clase $\mathcal{F}_m$.*

Demostración. La estabilidad bajo uniones finitas y paso a subconjuntos es muy sencilla, basta con escribir las definiciones. La estabilidad bajo operadores se debe a la relación entre el operador $T : E \to F$ y su operador asociado $T^{(m)} : \hat{\otimes}^m_{s,\pi}E \to \hat{\otimes}^m_{s,\pi}F$: siempre se verifica $T^{(m)} \circ \theta_m = \theta_m \circ T$ (Prop. I.25). Si $A \in \mathcal{F}_m(E)$, $\theta_m(A) \in \mathcal{F}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E)$ y por tanto el operador $T^{(m)}$ lo transforma en un conjunto de la misma clase; como $T^{(m)} \circ \theta_m(A) = \theta_m(T(A))$, resulta que $T(A) \in \mathcal{F}_m(E)$. □

Utilizaremos las siguientes notaciones:

- $A \in \mathcal{B}(E)$ si A es un conjunto acotado de E.
- $A \in \mathcal{K}(E)$ si A es relativamente compacto en E.
- $A \in \mathcal{W}(E)$ si A es relativamente débilmente compacto en E.
- $A \in \mathcal{R}(E)$ si cada sucesión contenida en A tiene una subsucesión débil de Cauchy. Los llamaremos conjuntos Rosenthal.

Claramente en todo espacio de Banach E se cumple:

$$\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{W}(E) \subset \mathcal{R}(E) \subset \mathcal{B}(E)$$

Proposición III.6 *Para todo espacio de Banach E y todo $m \in \mathbb{N}$, se cumple:*

1. $\mathcal{B}(E) = \mathcal{B}_m(E)$.
2. $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}_m(E)$.

Demostración. Recordemos (Prop. I.19) que la norma de un elemento diagonal $x \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x \in \hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$, $x \in E$, es precisamente

$$\|x \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x\| = \|x\|^m.$$

por lo que 1 es claramente cierto.

Veamos ahora que $\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{K}_m(E)$: como el polinomio canónico θ_m es continuo, debe transformar los conjuntos compactos en conjuntos compactos, así , si $A \in \mathcal{K}(E)$, $\theta_m(\overline{A}) \in \mathcal{K}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E)$, y por tanto $A \in \mathcal{K}_m(E)$.

Para comprobar la contención contraria consideremos un conjunto A en la clase $\mathcal{K}_m(E)$. Cada sucesión $\{x_n\}_n \subset A$ tiene una subsucesión $\{x_{n_j}\}_j$ tal que $\{\theta_m(x_{n_j})\}_j$ es convergente en $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$. Si la convergencia es a cero, de la relación anterior se obtiene que $\lim_j \|x_{n_j}\|^m = \lim_j \|x_{n_j}\| = 0$.

Supongamos ahora que el límite de la sucesión $z \in \hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$ es no nulo. Si $\{x_{n_j}\}_j$ no es débilmente convergente a cero, existe una subsucesión de $\{x_{n_j}\}_j$ (que denotamos igual) y $x^* \in E^*$ tales que $\lim_j x^*(x_{n_j}) = \alpha \neq 0$. El siguiente operador lineal y continuo

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \hat{\otimes}^m_{s,\pi}E & \longrightarrow & E \\ & x \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x & \mapsto & (x^*(x))^{m-1}x \end{array}$$

transformará entonces, la sucesión convergente $\{\theta_m(x_{n_j})\}_j$ en una sucesión convergente de E.

Falta por comprobar el caso en el que la sucesión $\{x_{n_j}\}_j$ es débilmente convergente a cero. Si suponemos que la sucesión no forma un conjunto relativamente compacto en E, existe una subsucesión (denotada igual) $\{x_{n_j}\}_j$ y existe $\epsilon > 0$ tales que $\|x_{n_j}\| > \epsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$. La inclusión

$$\begin{array}{rcl} J : \hat{\otimes}^m_\pi E & \longrightarrow & \check{\otimes}^m_\epsilon E \\ x\otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x & \mapsto & x\otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x \end{array}$$

es continua (Cor. I.15) y por tanto $\{J(\theta_m(x_{n_j}))\}_j$ es convergente en $\check{\otimes}^m_\epsilon E$. Por ser $\{x_{n_j}\}_j$ débilmente convergente a cero en E, $\{J(\theta_m(x_{n_j}))\}_j$ es débilmente convergente a cero en $\check{\otimes}^m_\epsilon E$ (Obs. I.47) de modo que $\{J(\theta_m(x_j))\}_j$ es convergente a cero en $\check{\otimes}^m_\epsilon E$, lo que resulta ser una contradicción, pues

$$\|J(\theta_m(x_{n_j}))\| = \|x_{n_j}\|^m > \epsilon^m > 0 \quad \text{para todo} \quad j \in \mathbb{N}.$$

□

Corolario III.7 *Para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada E espacio de Banach, el conjunto diagonal $\theta_m(E)$ es cerrado en $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$.*

Observación III.8 El conjunto diagonal $\theta_m(E)$ no es convexo si $m > 1$, por lo que no se puede afirmar a priori que sea un conjunto cerrado en la topología débil del espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$. En el lema 21 de [30] se prueba que sí lo es bajo la hipótesis de la propiedad de aproximación en el espacio. Veremos más adelante (Obs. IV.18) que sin embargo ésta no es una condición necesaria.

Algunas de las clases lineales de conjuntos $\mathcal{F}$ que consideraremos más adelante (los conjuntos limitados, III.19, los de Dunford-Pettis, III.25, o los $\mathcal{V}^*$, III.34) admiten una caracterización en términos de su comportamiento frente a operadores, de la forma:

$$\mathcal{F}(E) = \{A \subset E \text{ tales que para todo} T \in \mathcal{H}(E;F),\ \ T(A) \in \mathcal{C}(E)\} \qquad \text{(III.1)}$$

donde $\mathcal{H}$ es el ideal de operadores total $\mathcal{L}$ o el ideal $\mathcal{L}_{wc}$ de los operadores débilmente compactos y $\mathcal{C}$ es la clase de subconjuntos $\mathcal{K}$ o la clase $\mathcal{W}$.

En el siguiente resultado probaremos que las clases polinomiales definidas a partir de ellas admiten también una caracterización análoga. Denotaremos respectivamente $\mathcal{P}_\mathcal{H}$ al módulo total $\mathcal{P}$ si $\mathcal{H} = \mathcal{L}$ y al módulo de los polinomios débilmente compactos $\mathcal{P}_{wc}$ si $\mathcal{H} = \mathcal{L}_{wc}$:

Proposición III.9 *Sea $\mathcal{F}$ una clase de subconjuntos de espacios de Banach que admite una caracterización del tipo (III.1). Para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada E espacio de Banach, son equivalentes:*

1. *$A \in \mathcal{F}_m(E)$.*
2. *Para todo F y todo $P \in \mathcal{P}_\mathcal{H}(^mE, F)$, $P(A) \in \mathcal{C}(F)$.*

Demostración. $A \in \mathcal{F}_m(E)$, por definición, si y sólo si $\theta_m(A) \in \mathcal{F}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E)$, y dada la caracterización (III.1), si y sólo si para todo operador T del ideal $\mathcal{H}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, F)$, $T(\theta_m(A)) \in \mathcal{C}(F)$, pero el operador T pertenece al ideal $\mathcal{H}$ si y sólo si el polinomio asociado $P_T = T \circ \theta_m$ pertenece al módulo $\mathcal{P}_\mathcal{H}$ (pues $\mathcal{H}$ es el ideal total o el de los débilmente compactos (Obs. II.19)). □

Veamos ahora una sencilla proposición que sin embargo permitirá probar como corolarios algunas de las propiedades que veremos más adelante, como III.13, III.17 o III.40.

Proposición III.10 *Si la clase de subconjuntos $\mathcal{F}$ es estable bajo envolturas absolutamente convexas y cerradas, se cumple:*

$$\mathcal{F}_m(E) = \mathcal{B}(E) \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{F}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E) = \mathcal{B}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E).$$

Demostración. Si $B_E \in \mathcal{F}_m(E)$ se cumple que $B_{\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E} = \overline{coe(\theta_m(B_E))} \in \mathcal{F}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E)$. La otra implicación es clara. □

Más adelante introduciremos otras clases polinomiales de subconjuntos para las cuales la generalización natural no es de este tipo: serán las clases definidas en los espacios duales.

III.2 Algunas clases polinomiales de conjuntos

Conjuntos $\mathcal{W}_m$ y $\mathcal{R}_m$

Denotaremos $\tau_m(E)$ a los subconjuntos de E relativamente compactos en la topología τ_m. Según la definición III.1, $A \in \mathcal{W}_m(E)$ si y sólo si $\theta_m(A)$ es relativamente débilmente compacto en $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$.

Observación III.11

1. Si el espacio de Banach E tiene la propiedad de aproximación, $\mathcal{W}_m(E) = \tau_m(E)$.

   En efecto: dado el conjunto $A \in \mathcal{W}_m(E)$, para cada sucesión $\{x_n\}_n \subset A$ existe $\{x_{n_j}\}_j$ de modo que $\{\theta_m(x_{n_j})\}_j$ es débilmente convergente a $z \in \hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$. La propiedad de aproximación garantiza que $z = x\otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x$ para algún $x \in E$ (Lemma 21 [29]) y por tanto A es un conjunto relativamente compacto en E_{τ_m}. La otra contención es clara aún sin la propiedad de aproximación.

2. Si E tiene la propiedad m-SCP, se cumple claramente $\mathcal{W}_m(E) = \tau_m(E)$.

Proposición III.12 *Para cualesquiera m, $k \in \mathbb{N}$ y E espacio de Banach,*

1. $\mathcal{W}_{mk}(E) \subset \mathcal{W}_m(E)$.
2. $\mathcal{R}_{mk}(E) \subset \mathcal{R}_m(E)$.

Demostración. Es consecuencia directa del lema I.34 y de la propiedad III.4. □

Veremos en la siguiente proposición un ejemplo de cómo el enfoque conjuntista permite probar, en ocasiones de forma muy sencilla, resultados importantes. Se trata en este caso, de un resultado esencialmente conocido (ver, por ejemplo: [49] o en [16]) sobre la reflexividad polinomial:

Teorema III.13 *Dados $m \in \mathbb{N}$ y E un espacio de Banach, son equivalentes:*

1. *$\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ es reflexivo.*
2. *$\mathcal{P}(^m E)$ es reflexivo.*
3. *$\mathcal{B}(E) = \mathcal{W}_m(E)$.*
4. *E es reflexivo y $\mathcal{W}(E) = \mathcal{W}_m(E)$.*
5. *$\mathcal{P}(^m E, F) = \mathcal{P}_{wc}(^m E, F)$ para todo espacio de Banach F.*

Si E satisface la propiedad de aproximación, es también equivalente:

6. *E es reflexivo y tiene la propiedad m-SCP (Def. I.39).*

Demostración. $\mathcal{P}(^m E)$ es isométrico a $(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E)^*$(Prop. I.23) por lo que la equivalencia entre 1 y 2 es clara. En el capítulo anterior (Propiedad II.31) ya probamos 1⇔5.

Como en todo espacio de Banach se cumple $\mathcal{W}_n \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{B}$, 3 y 4 son claramente equivalentes: $\mathcal{B}(E) = \mathcal{W}_m(E)$ si y sólo si $\mathcal{B}(E) = \mathcal{W}(E)$ (i.e. E es reflexivo) y $\mathcal{W}(E) = \mathcal{W}_m(E)$.

La proposición III.10 en este caso particular, se lee como $\mathcal{B}(E) = \mathcal{W}_m(E)$ si y sólo si $\mathcal{B}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E) = \mathcal{W}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E)$, que es precisamente la equivalencia entre 1 y 3. Por último, si E tiene la propiedad de aproximación, de la observación III.11 se obtiene la equivalencia entre 4 y 6. □

Observación III.14 La proposición III.56 que probaremos más adelante, establece una nueva equivalencia para la reflexividad polinomial, válida sólo en el caso $m > 1$:

$$\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E \quad \text{es reflexivo} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(^m E, c_0) = \mathcal{P}_{wc}(^m E, c_0).$$

Ejemplos de espacios polinomialmente reflexivos

III.15 El espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} \ell_p$ es reflexivo si y sólo si $m < p$. En [46] se prueba que ℓ_p tiene la propiedad m-SCP si $m < p$, por lo que se cumple la equivalencia 6. Si $p \leq m$ el polinomio

$$\begin{array}{rcl} P : \ell_p & \longrightarrow & \ell_1 \\ (a_i)_i & \longmapsto & (a_i^m)_i \end{array}$$

no es secuencialmente continuo y por tanto no se cumple 6.

III.16 En [1] se prueba que los espacios $\mathcal{P}(^m T^*)$ son reflexivos para todo $m \in \mathbb{N}$, donde T^* denota el espacio de Tsirelson.

De forma similar, la proposición III.10 da lugar a una sencilla caracterización de los espacios tensores simétricos sin copias de ℓ_1:

Proposición III.17 *Dado E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$, son equivalentes:*

1. *$\mathcal{B}(E) = \mathcal{R}_m(E)$.*
2. *El espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no contiene copias de ℓ_1.*

Demostración. Por el teorema de dicotomía de Rosenthal (C.XI [17]), 2 es equivalente a $\mathcal{B}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E) = \mathcal{R}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E)$ y esto a su vez, por la proposición III.10, es equivalente a 1. □

Corolario III.18 *Sea E un espacio sin copias de ℓ_1 y con la propiedad m-SCP. Entonces el espacio tensor $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no contiene copias de ℓ_1.*

Demostración. La propiedad m-SCP implica la relación entre conjuntos $\mathcal{R}(E) = \mathcal{R}_m(E)$ (ver Prop. I.41); si además E no contiene a ℓ_1, se cumple $\mathcal{B}(E) = \mathcal{R}(E)$ y por consiguiente $\mathcal{B}(E) = \mathcal{R}_m(E)$. La proposición anterior concluye la demostración. □

Ejemplos de espacios con la propiedad m-SCP y sin copias de ℓ_1

Los espacios c_0, $C(K)$ (K un compacto Hausdorff discreto) no contienen copias de ℓ_1 y tienen la propiedad de Dunford-Pettis (por tanto la m-SCP, Prop. III.50), por lo que su tensor simétrico de cualquier orden no contiene a ℓ_1.

Los espacios ℓ_p y $\mathcal{J}_p$ para $p > m$ o T^* cumplen también las hipótesis del corolario anterior.

bconjuntos que a continuación presentamos en esta
estudiadas. Veremos cuál es el comportamiento
ún la definición III.1) polinomiales. Algunos de los
dos por otros autores; en tales casos se cita la referencia.
ales pueden verse en el trabajo [8] (en donde se incluye la

juntos limitados

Definición III.19 $A \in \mathcal{L}^*(E)$ *(conjunto limitado) si para cada sucesión* $\{x_n^*\}_n$ *convergente a cero en la topología* $\sigma(E^*, E)$ *de* E^**, se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|x_n^*(x)|; x \in A\} = 0. \tag{III.2}$$

Proposición III.20 *A es un conjunto limitado de E si y sólo si para todo $T \in \mathcal{L}(E, c_0)$, $T(A) \in \mathcal{K}(c_0)$.*

Demostración. (Puede verse en [8]). Cada sucesión $\{x_n^*\}_n$ débil* convergente a cero en E determina un operador lineal $T \in \mathcal{L}(E, c_0)$ definido como $T(x) = \{x_n^*(x)\}$ y recíprocamente, cada uno de esos operadores determina una sucesión $x_n^* = T^*(e_n)$, donde $\{e_n\}_n$ denota la base canónica de $(c_0)^* = \ell_1$; el hecho de que se verifique (III.2) es justamente decir que el conjunto $\{(x_n^*(x))_n; x \in A\}$ es un conjunto relativamente compacto de c_0. □

La proposición III.9 afirma en este caso, que se cumple:

Proposición III.21 *[9] Sea E un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1. *$A \in \mathcal{L}_m^*(E)$.*

2. *Dada $\{p_n\}_n \in \mathcal{P}(^mE)$ débil* convergente a cero,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|p_n(x)|;\ x \in A\} = 0.$$

3. *Para cada $P \in \mathcal{P}(^mE, c_0)$, $P(A) \in \mathcal{K}(c_0)$.*

Teorema III.22 *[9] Para todo espacio de Banach E y todo $m \in \mathbb{N}$ se cumple:*

$$\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}_m^*(E).$$

Demostración. Comprobemos primero que $\mathcal{L}_m^*(E) \subset \mathcal{L}^*(E)$. Si A no es un conjunto de la clase $\mathcal{L}^*(E)$ existe una sucesión en E^*, $\{x_n^*\}_n$ débil* convergente a cero y existen $\epsilon > 0$ y $\{x_n\}_n \subset A$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}, |x_n^*(x_n)| > \epsilon$. La sucesión de polinomios $\{(x_n^*)^m\}_n$ es débil* convergente a cero en $(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E)^*$ (Prop. I.47) y cumple que para todo $n \in \mathbb{N}, |(x_n^*(x_n))^m| > \epsilon^m$, por lo que $A \notin \mathcal{L}_m^*(E)$.

Veamos ahora por inducción que $\mathcal{L}^*(E) \subset \mathcal{L}_m^*(E)$. Si $m = 1$ no hay nada que probar. Supongamos que es cierto para $m-1$: sea $\{x_k\}_k$ una sucesión contenida en $A \in \mathcal{L}^*(E)$ y $\{p_n\}_n$ una sucesión convergente a cero en la topología débil* de $\mathcal{P}(^mE)$. Los correspondientes generadores simétricos $\{T_{p_n}\}_n$ forman también una sucesión débil* convergente a cero en $\mathcal{L}(^mE)$. Cada $x \in E$ determina un operador $T_x : \mathcal{L}(^mE) \to \mathcal{L}(^{m-1}E)$ definido como $T_x(S)(x_1, ..., x_{m-1}) = S(x, x_1, ..., x_{m-1})$, por lo que $\{T_x(T_{p_n})\}_n$ es una sucesión convergente a cero en la topología débil* de $\mathcal{L}(^{m-1}E)$. Por hipótesis de inducción $\lim T_{p_n}(x, x_n, \ldots, x_n) = 0$. La sucesión $\{T_{p_n}(\cdot, x_n, \ldots, x_n)\}_n$ de funcionales lineales es entonces, débil* convergente a cero. Como A es un conjunto limitado de E, debe cumplirse $\lim_n p_n(x_n) = 0$. □

Corolario III.23 *Para todo espacio de Banach E y todo $m \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{L}^*(E) \subset \mathcal{R}_m(E).$$

Demostración. Siempre se cumple $\mathcal{L}^*(E) \subset \mathcal{R}(E)$ y por tanto (Prop. III.4) también $\mathcal{L}_m^*(E) \subset \mathcal{R}_m(E)$, pero $\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}_m^*(E)$. □

De los resultados anteriores se obtiene la siguiente caracterización de los conjuntos limitados:

Teorema III.24 *Dado un espacio de Banach E y $m \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:*

1. *El conjunto $A \in E$ es limitado ($A \in \mathcal{L}^*(E)$).*

2. *Dada $\{p_n\}_n \in \mathcal{P}(^mE)$ débil* convergente a cero,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|p_n(x)|;\ x \in A\} = 0.$$

3. *Para cada $P \in \mathcal{P}(^mE, c_0)$, el conjunto $P(A)$ es relativamente compacto en c_0.*

Conjuntos de Dunford-Pettis

Definición III.25 *$A \in \mathcal{DP}(E)$ (conjunto Dunford-Pettis) si para cada sucesión $\{x_n^*\}_n$ débilmente convergente a cero en E^* se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|x_n^*(x)|;\ x \in A\} = 0.$$

La demostración del siguiente resultado puede verse en [8].

Proposición III.26 *Sea E un espacio de Banach. Son equivalentes*

1. *$A \in \mathcal{DP}(E)$.*
2. *Para todo espacio de Banach F y todo $T \in \mathcal{L}_{wc}(E, F)$, $T(A) \in \mathcal{K}(F)$.*
3. *Para todo $T \in \mathcal{L}_{wc}(E, c_0)$, $T(A) \in \mathcal{K}(c_0)$.*

De la caracterización anterior y de la proposición III.9 se obtiene:

Proposición III.27 *[9] Sea E un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1. *$A \in \mathcal{DP}_m(E)$.*
2. *Dada $\{p_n\}_n \in \mathcal{P}(^mE)$ débilmente convergente a cero,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|p_n(x)|;\ x \in A\} = 0.$$

3. *Para cada $P \in \mathcal{P}_{wc}(^mE, c_0)$; $P(A) \in \mathcal{K}(c_0)$.*
4. *Para cada F y cada $P \in \mathcal{P}_{wc}(^mE, F)$; $P(A) \in \mathcal{K}(F)$.*

Teorema III.28 *Para todo espacio de Banach E y todo $m \in \mathbb{N}$ se cumple:*

$$\mathcal{DP}(E) = \mathcal{DP}_m(E).$$

Demostración. Veamos primero $\mathcal{DP}_m(E) \subset \mathcal{DP}(E)$: si A no es un conjunto de la clase $\mathcal{DP}(E)$ existen una sucesión $\{x_n^*\}_n \subset E^*$ débilmente convergente a cero, $\epsilon > 0$ y $\{x_n\}_n \subset A$ tales que $|x_n^*(x_n)| > \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En la proposición I.47 probamos que la sucesión $\{q_n = (x_n^*)^m\}_n$ es también débilmente convergente a cero en $\mathcal{P}(^mE)$; como además cumple $|q_n(x_n)| > \epsilon^m$, se deduce que $\{x_n\}_n$ (y por tanto A) no pertenece a la clase $\mathcal{DP}_m(E)$.

Comprobaremos por inducción, como en [9], la contención contraria: si $m = 1$ no hay nada que probar. Supongamos que es cierto para $m-1$: sea $\{x_n\}_n$ una sucesión contenida en $A \in \mathcal{DP}(E)$ y $\{p_n\}_n$ una sucesión débilmente convergente a cero en $\mathcal{P}(^mE)$. Los correspondientes generadores simétricos $\{T_{p_n}\}_n$ forman también una sucesión débilmente convergente a cero en $\mathcal{L}(^mE) \simeq \mathcal{L}(^{m-1}E, E^*)$. Cada $x^{**} \in E^{**}$ determina un operador definido como:

$$\begin{array}{rcl} T_{x^{**}} : \mathcal{L}(^{m-1}E, E^*) & \longrightarrow & \mathcal{L}(^{m-1}E) \\ S & \mapsto & x^{**} \circ S \end{array}$$

$\{T_{x^{**}}(T_{p_n})\}_n$ es entonces una sucesión débilmente convergente a cero en $\mathcal{L}(^{m-1}E)$. Por hipótesis de inducción, $\lim x^{**}(T_{p_n}(\cdot, x_n, \ldots, x_n)) = 0$. Como esto es válido para cada $x^{**} \in E^{**}$, la sucesión $\{T_{P_n}(\cdot, x_n, \ldots, x_n)\}$ es débilmente convergente a cero en E^*; utilizando de nuevo que A es un conjunto de la clase $\mathcal{DP}(E)$ obtenemos: $\lim_n T_{p_n}(x_n, x_n, ..., x_n) = \lim_n p_n(x_n) = 0$. □

Por la coincidencia de las clases lineales y polinomiales de los conjuntos Dunford-Pettis, se obtiene una caracterización de ellos independiente del grado de homogeneidad:

Teorema III.29 *Sea E un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1. *$A \in \mathcal{DP}(E)$.*
2. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, todo espacio de Banach F y todo $P \in \mathcal{P}_{wc}(^mE, F)$, el conjunto $P(A)$ es relativamente compacto en F.*
3. *Para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $P \in \mathcal{P}_{wc}(^mE, c_0)$, el conjunto $P(A)$ es relativamente compacto en c_0.*

Proposición III.30 *Dado un espacio de Banach E y $m \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes inclusiones:*

1. *$\mathcal{DP}(E) \cap \mathcal{W}(E) \subset \tau_m(E) \subset \mathcal{W}_m(E)$.*
2. *$\mathcal{DP}(E) \subset \mathcal{R}_m(E)$.*

Demostración. 1. Supongámoslo cierto para $m-1$ y sea $\{x_n\}_n$ una sucesión en $\mathcal{W}(E)$, que podemos considerar débilmente convergente a cero. Para cada $p \in \mathcal{P}(^mE) \simeq \mathcal{L}(\hat{\otimes}_{s,\pi}^{m-1}E, E^*)$ la sucesión $\{T_p(\cdot, x_n \otimes \overset{m-1}{\cdots} \otimes x_n)\}$ es débilmente convergente a cero en E^*, de modo que si $\{x_n\}_n$ pertenece también a la clase $\mathcal{DP}(E)$, $\lim_n |p(x_n)| = 0$.

La afirmación 2 se debe a la propiedad $\mathcal{DP}(E) \subset \mathcal{R}(E)$, válida en todo espacio de Banach, junto a la proposición III.4 y el teorema III.28. □

El siguiente ejemplo muestra que las contenciones de la proposición anterior son en general estrictas. Como el espacio ℓ_{m+1} es reflexivo, cada subconjunto de

Dunford-Petiis es relativamente compacto (Propiedad $\boldsymbol{P}(\mathcal{DP},\mathcal{K})$, Sec. 3.3) y por el teorema III.13, cada acotado es un conjunto de la clase $\mathcal{W}_m(\ell_{m+1})$. Como no es un espacio de dimensión finita debe cumplirse:

$$\mathcal{K}(\ell_{m+1}) = \mathcal{DP}(\ell_{m+1}) \cap \mathcal{W}(\ell_{m+1}) \subsetneq \mathcal{W}_m(\ell_{m+1}) = \mathcal{R}_m(\ell_{m+1}) = \mathcal{B}(\ell_{m+1})$$

Conjuntos de Grothendieck

Definición III.31 *[40] $A \in \mathcal{G}r(E)$ (conjunto de Grothendieck) si y sólo si para todo $T \in \mathcal{L}(E, c_0)$, $T(A) \in \mathcal{W}(c_0)$.*

Como la definición de los conjuntos de Grothendieck es del tipo (III.1), se cumplirá:

Teorema III.32 *Dado E espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$ son equivalentes:*

1. *$A \in \mathcal{G}r_m(E)$ (es decir, $\theta_m(A) \in \mathcal{G}r(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E)$).*
2. *Para todo $P \in \mathcal{P}(^m E, c_0)$, $P(A) \in \mathcal{W}(c_0)$.*

Teorema III.33 *Las siguientes inclusiones son válidas para todo $m \in \mathbb{N}$, en cualquier espacio de Banach E:*

1. *$\mathcal{L}^*(E) \subset \mathcal{G}r_m(E)$.*
2. *$\mathcal{W}_m(E) \subset \mathcal{G}r_m(E)$.*
3. *$\mathcal{G}r_{mk}(E) \subset \mathcal{G}r_k(E)$.*
4. *Si $m > 1$, $\mathcal{G}r_{km}(E) \subset \mathcal{R}_k(E)$.*

Demostración. 1. Si $A \in \mathcal{L}^*(E)$, el teorema III.24 afirma entonces que para cada $P \in \mathcal{P}(^m E, c_0)$, $P(A) \in \mathcal{K}(c_0)$ y por tanto $P(A) \in \mathcal{W}(c_0)$.

Para ver 2 consideremos un conjunto $A \in \mathcal{W}(E)$; todo operador $T : E \to c_0$ lo transforma en $T(A) \in \mathcal{W}(c_0)$; por la proposición III.4 se obtiene el resultado para todo $m \in \mathbb{N}$.

Para probar 3 veamos primero que $\mathcal{G}r_m(c_0) = \mathcal{G}r(c_0)$: mediante el operador identidad se comprueba que $\mathcal{G}r(c_0) = \mathcal{W}(c_0)$ y por tanto igual a $\mathcal{W}_m(c_0) \subset \mathcal{G}r_m(c_0)$ (pues c_0 cumple la m-SCP: Ej. I.43). Para ver la otra contención consideremos un conjunto $A \notin \mathcal{W}(c_0)$, una sucesión en él sin subsucesiones débilmente convergentes $\{x_n\}_n$, un funcional x^* y una subsucesión $\{x_{n_j}\}_j$de modo que exista $\lim_j |x^*(x_{n_j})| \neq 0$. El polinomio $P : c_0 \to c_0$ definido como $P(x) = (x^*(x))^{m-1}x$

transforma la subsucesión en una sucesión sin subsucesiones débilmente convergentes y por tanto $A \notin \mathcal{G}r_m(c_0)$. Para el caso general, utilizamos el hecho mencionado con anterioridad de que los operadores lineales preservan las clases polinomiales (Prop. III.5), de donde obtenemos que si $A \in \mathcal{G}r_m(E)$ y $T \in \mathcal{L}(E, c_0)$, $T(A) \in \mathcal{G}r_m(c_0) = \mathcal{W}(c_0)$ y por tanto $A \in \mathcal{G}r(E)$. La proposición III.4 establece, de nuevo, el resultado para $k \in \mathbb{N}$.

Como antes, el caso $k = 1$ (del que puede verse una prueba en [27]) será suficiente para probar 4 para todo k. Consideremos una sucesión $\{x_n\}_n \in E$ acotada y sin subsucesiones débiles de Cauchy; la podemos suponer entonces, equivalente a la base canónica de ℓ_1. En tal caso existe un operador $T : E \to \ell_2$, de modo que $T(x_n) = e^2_n$ para cada n. Con él construimos el polinomio $P \in \mathcal{P}(^m E, c_0)$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} P : E & \xrightarrow{T} & \ell_2 & \xrightarrow{S} & \ell_m & \xrightarrow{\theta_m} & \hat{\otimes}^m_{s,\pi}\ell_m & \xrightarrow{\pi_1} & \ell_1 & \xrightarrow{\pi_2} & c_0 \\ x_n & \longmapsto & e^2_n & \longmapsto & e^m_n & \longmapsto & e^m_n \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes e^m_n & \longmapsto & e^1_n & \longmapsto & \pi_2(e^1_n) \end{array}$$

donde las aplicaciones π_1 y π_2 son cocientes. $P(x_n)$ es la imagen bajo π_2 de $\{e^1_n\}$, que no puede ser un conjunto relativamente débilmente compacto puesto que genera, por combinaciones absolutamente convexas y cerradas, toda la imagen de π_2, pero es una aplicación cociente sobre un espacio no reflexivo y en consecuencia no es débilmente compacta. De este modo queda probado $\{x_n\} \notin \mathcal{G}r_m(E)$. □

Veamos con ejemplos, que las relaciones del teorema III.33 son estrictas. Como consecuencia de las siguientes propiedades del espacio ℓ_∞:

1 propiedad de continuidad secuencial (m-SCP) (III.50).

2 propiedad de Grothendieck (III.52).

3 propiedad de Dunford-Pettis (IV.3).

4 si $m > 1$ siempre se cumple $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{G}r_m \subset \mathcal{R}$ (T.III.33).

se obtienen las relaciones entre sus clases de subconjuntos:

$$\mathcal{W}_m \overset{1}{=} \mathcal{W} \subsetneq \mathcal{L}^* \overset{2}{=} \mathcal{DP} \overset{3}{=} \mathcal{R} \overset{1}{=} \mathcal{R}_m \overset{4}{=} \mathcal{G}r_m \subsetneq \mathcal{G}r \overset{2}{=} \mathcal{B}$$

Por consiguiente $\mathcal{W}_m(\ell_\infty) \subsetneq \mathcal{G}r_m(\ell_\infty)$ y $\mathcal{G}r_m(\ell_\infty) \subsetneq \mathcal{G}r(\ell_\infty)$.

Las clases de subconjuntos de c_0 cumplen

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}^* \subsetneq \mathcal{G}r_m = \mathcal{G}r = \mathcal{W}_m = \mathcal{W} \subsetneq \mathcal{DP} = \mathcal{R} = \mathcal{B}$$

y por lo tanto $\mathcal{L}^*(c_0) \subsetneq \mathcal{G}r_m(c_0)$ y $\mathcal{G}r_m(c_0) \subsetneq \mathcal{R}(c_0)$.

Conjuntos $\mathcal{V}^*$ de Pelczynski

Definición III.34 *$A \in \mathcal{V}^*(E)$ si para cada sucesión en E^* que determina una serie débilmente incondicionalmente de Cauchy $\sum x_n^*$ se cumple:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|x_n^*(x)|;\ x \in A\} = 0. \tag{III.3}$$

Las demostraciones de los dos siguientes resultados pueden verse por ejemplo, en [8].

Proposición III.35 *Dado un espacio de Banach E, son equivalentes:*

1. *$A \in \mathcal{V}^*(E)$*
2. *Para todo $T \in \mathcal{L}(E, \ell_1)$, $T(A) \in \mathcal{K}(\ell_1)$.*

Proposición III.36 *Sea E un espacio de Banach y $\{x_n\} \notin \mathcal{V}^*(E)$. Existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ equivalente a la base canónica de ℓ_1 que genera un subespacio complementado de E.*

De la caracterización anterior y de la proposición III.9 se obtiene:

Proposición III.37 *[9] Sea E un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1. *$A \in \mathcal{V}_m^*(E)$.*
2. *Dada la serie $\sum_{n=1} p_n$ d.i.C en $\mathcal{P}(^mE)$ se cumple*
$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|p_n(x)|; x \in A\} = 0.$$
3. *Para cada $\mathcal{P}(^mE, \ell_1)$; $P(A) \in \mathcal{K}(\ell_1)$.*

Corolario III.38 *Si ℓ_p es un cociente del espacio de Banach E, para cada $m \geq p$ el espacio $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ_1.*

Demostración. Sea $T : E \to \ell_p$ una aplicación cociente Si e_i denota a la base canónica de ℓ_p y $m \geq p$ se cumple que $\{e_i\} \notin \mathcal{V}_m^*(\ell_p)$ (Cor. 3.9 [9]). Esta clase de conjuntos es estable por operadores lineales (Prop. III.5) y por tanto $\mathcal{B}(E) \notin \mathcal{V}_m^*(E)$. La proposición III.36 asegura en este caso, que existe una sucesión acotada en E $\{x_n\}_n$, de modo que $\{\theta_m(x_n)\}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_1 y genera un subespacio complementado. □

Este resultado prueba que bajo las hipótesis del corolario, el espacio ℓ_∞ está contenido en $\mathcal{P}(^mE)$, como fue establecido en [22].

Proposición III.39 *Sea E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$; se cumplen siempre las siguientes contenciones:*

1. *$\mathcal{V}_{m+1}^*(E) \subset \mathcal{V}_m^*(E)$.*
2. *$\mathcal{R}_m(E) \subset \mathcal{V}_m^*(E)$.*
3. *$\mathcal{G}r_m(E) \subset \mathcal{V}_m^*(E)$.*
4. *si $m > 1$ y $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_{mk}^*(E) \subset \mathcal{R}_k(E)$.*

Demostración. 1 fue demostrado en [9]: si la sucesión $\{x_n\}_n$ forma un conjunto $A \notin \mathcal{V}_m^*(E)$, existe una serie d.i.C. $\sum_{n=1}^\infty q_n$ en $\mathcal{P}(^mE)$, un $\epsilon > 0$ y una subsucesión -denotada igual- de modo que $|q_n(x_n)| > \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada n escogemos un funcional $x_n^* \in B_{E^*}$ de modo que $|x_n^*(x_n)| = \|x_n\|$ y construimos el polinomio $Q_n = x_n^* q_n \in \mathcal{P}(^{m+1}E)$. La serie $\sum_{n=1}^\infty Q_n$ resulta ser d.i.C. y cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|Q_n(x_n)| > \epsilon' > 0$, de donde se obtiene que $A \notin \mathcal{V}_{m+1}^*(E)$.

2 es cierto para $m = 1$ y por consiguiente para todo $m \in \mathbb{N}$ (Prop.III.4). De la misma forma, veamos 3 en el caso $m = 1$: consideremos un conjunto A que no pertenezca a la clase $\mathcal{V}^*(E)$; existe una sucesión en él que genera un subespacio isomorfo a ℓ_1 y complementado, de modo que es posible construir un operador lineal $T : E \to c_0$ sobreyectivo (la composición de la proyección sobre ℓ_1 con una aplicación cociente de ℓ_1 en el espacio separable c_0) cumpliendo que $T(A) \notin \mathcal{W}(c_0)$ y en consecuencia $A \notin \mathcal{G}r(E)$.

Por último comprobemos 4. Del mismo modo que antes, es suficiente probarlo para $k = 1$. Si el conjunto acotado A no pertenece a la clase $\mathcal{R}(E)$, existe una sucesión $\{x_n\}_n \subset A$ equivalente a la base canónica de ℓ_1. Utilizamos ahora la construcción del polinomio vista en el teorema III.33:

$$\begin{array}{ccccccccc} P : E & \overset{\pi_1}{\to} & \ell_2 & \overset{i}{\to} & \ell_m & \overset{\theta_m}{\to} & \hat{\otimes}_{s,\pi}^m \ell_m & \overset{\pi_2}{\to} & \ell_1 \\ x_n & \mapsto & e_n^2 & \mapsto & e_n^m & \mapsto & e_n^m \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes e_n^m & \mapsto & e_n^1 \end{array}$$

donde e_n^k denota en cada caso, la base canónica de ℓ_k, π_1 es una aplicación cociente (cuya existencia se puede ver, por ejemplo en [8] y que ya hemos utilizado en otras ocasiones) y π_2 es una proyección continua. El polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE, \ell_1)$ cumple entonces $\{P(x_n)\}_n \notin \mathcal{K}(\ell_1)$. Por la proposición III.37 se obtiene que $\{x_n\}_n$ y por tanto A, no pertenecen a $\mathcal{V}_m^*(E)$. □

A diferencia de las clases $\mathcal{L}^*$ y $\mathcal{DP}$, los conjuntos $\mathcal{V}^*$ no coinciden en general, con su equivalente polinomial, como muestra el ejemplo de la base canónica $\{e_n^m\}$ de ℓ_m, que por ser débilmente convergente, determina un conjunto $\mathcal{V}^*$, pero no un conjunto $\mathcal{V}_m^*$, dado que la sucesión $\{e_n^m \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes e_n^m\}_n$ es equivalente a la base canónica de ℓ_1 y genera un subespacio complementado en $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m \ell_m$.

Probaremos a continuación, dos importantes propiedades establecidas en función de los conjuntos de la clase $\mathcal{V}_m^*$:

Proposición III.40 *Dado E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$, son equivalentes:*

1. $\mathcal{V}_m^*(E) = \mathcal{B}(E)$
2. *El espacio $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ no contiene ningún subespacio complementado isomorfo al espacio ℓ_1.*

Demostración. Por la proposición III.10 sabemos que 1 es equivalente a que $\mathcal{V}^*(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E) = \mathcal{B}(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E)$ y esto es precisamente 2 (ver por ejemplo [8]). □

Proposición III.41 *Sea E un espacio de Banach, $m \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\}$ una sucesión en E tal que $\{\theta_m(x_n)\}$ determina una sucesión equivalente a la base canónica de ℓ_1 en $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{\theta_{km}(x_n)\}$ tiene una subsucesión que genera un subespacio complementado isomorfo a ℓ_1 en $\hat{\otimes}_{s,\pi}^{mk} E$.*

Demostración. Por hipótesis, $\{x_n\} \notin \mathcal{R}_m(E)$. La proposición III.39 afirma entonces que para todo k $\{x_n\} \notin \mathcal{V}_{km}(E)$, es decir: $\{\theta_{km}(x_n)\} \notin \mathcal{V}^*(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E)$. Por la proposición III.36, existe una subsucesión que genera un subespacio complementado isomorfo a ℓ_1. □

Corolario III.42 *Sea E un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1. *Para todo $m \in \mathbb{N}$ el espacio $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ no contiene copias de ℓ_1.*
2. *Para todo $m \in \mathbb{N}$ el espacio $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ no contiene copias complementadas de ℓ_1.*

Demostración. 1⇒2 es evidente. Si existe m de modo que $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ contenga un subespacio isomorfo a ℓ_1, existe $\{x_n\} \notin \mathcal{R}_m(E)$. Por la proposición anterior $\{x_n\} \notin \mathcal{V}_{2m}^*(E)$ y por lo tanto $\hat{\otimes}_{s,\pi}^{2m} E$ contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1 y complementado, lo que está en contradicción con 2. □

III.3 Propiedades a través de clases de conjuntos

En esta sección probamos algunas de las propiedades que resultan del método conjuntista presentado al inicio del capítulo, para las clases de conjuntos introducidas. Dejaremos el estudio de otras propiedades para los siguientes capítulos. Las clases lineales de conjuntos que hasta ahora hemos tratado, cumplen las siguientes relaciones, ya establecidas en la sección anterior, en cualquier espacio de Banach E:

$$\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{L}^*(E) \subset \mathcal{DP}(E) \subset \mathcal{R}(E) \subset \mathcal{V}^*(E) \subset \mathcal{B}(E)$$

$$\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{W}(E) \subset \mathcal{G}r(E) \subset \mathcal{V}^*(E) \subset \mathcal{B}(E)$$

Las propiedades de los espacios que presentamos a continuación y que pueden verse por ejemplo en [8], bastan para probar que las contenciones del esquema son en general, estrictas. Para cada una de las contenciones no descrita, existe un espacio de Banach que no la cumple:

$$\mathcal{K}(\ell_\infty) \subsetneq \mathcal{W}(\ell_\infty) \subsetneq \mathcal{L}^*(\ell_\infty) = \mathcal{DP}(\ell_\infty) = \mathcal{R}(\ell_\infty) \subsetneq \mathcal{G}r(\ell_\infty) = \mathcal{V}^*(\ell_\infty) = \mathcal{B}(\ell_\infty)$$

$$\mathcal{K}(\ell_p) = \mathcal{L}^*(\ell_p) = \mathcal{DP}(\ell_p) \subsetneq \mathcal{W}(\ell_p) = \mathcal{G}r(\ell_p) = \mathcal{R}(\ell_p) = \mathcal{V}^*(\ell_p) = \mathcal{B}(\ell_p), \quad p > 1$$

$$\mathcal{K}(c_0) = \mathcal{L}^*(c_0) \subsetneq \mathcal{W}(c_0) = \mathcal{G}r(c_0) \subsetneq \mathcal{DP}(c_0) = \mathcal{R}(c_0) = \mathcal{V}^*(c_0) = \mathcal{B}(c_0)$$

$$\mathcal{K}(\ell_1) = \mathcal{V}^*(\ell_1) \subsetneq \mathcal{B}(\ell_1)$$

Por la proposición III.4, el esquema análogo al anterior, considerando las respectivas clases $\mathcal{F}_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$, va a ser válido en cualquier espacio de Banach. Escribimos ahora las relaciones que también se cumplen en todo espacio de Banach, entre las clases lineales y las correspondientes a $m > 1$, que han sido probadas en la sección anterior y que utilizaremos con frecuencia para la descripción de algunas propiedades:

$$\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}^*_m(E) \subset \mathcal{D}P(E) = \mathcal{D}P_m(E) \subset \mathcal{R}_m(E) \subset \mathcal{V}^*_m(E) \subset \mathcal{B}(E)$$

$$\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}_m(E) \subset \mathcal{W}_m(E) \subset \mathcal{G}r_m(E) \subset \mathcal{V}^*_m(E) \subset \mathcal{R}(E) \subset \mathcal{V}^*(E) \subset \mathcal{B}(E)$$

$$\mathcal{W}_m(E) \subset \mathcal{W}(E) \subset \mathcal{G}r(E) \subset \mathcal{B}_m(E) = \mathcal{B}(E)$$

Observación III.43 Si $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ denotan cualquiera de las clases consideradas y E es un espacio de Banach, se cumple la equivalencia:

$$\mathcal{F}(E) \subset \mathcal{G}_{pol}(E) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{F}(E) \subset \mathcal{G}_m(E) \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

El hecho de que las topologías polinomiales no sean vectoriales impide que las clases de conjuntos verifiquen en general, la estabilidad bajo envolturas convexas o bajo la suma. Por ejemplo, en [3] se introduce la que denominan propiedad (P), con el fin de pasar de una condición sobre las sucesiones polinomialmente convergentes, a una condición sobre las sucesiones polinomialmente de Cauchy:

Definición III.44 *[3] El espacio de Banach E cumple la propiedad (P) si dadas dos sucesiones acotadas (u_j) y (v_j) en E tales que para todo $p \in \mathcal{P}(E)$, $|p(u_j) - p(v_j)| \to 0$, entonces $|q(u_j - v_j)| \to 0$ para todo $q \in \mathcal{P}(E)$.*

Se puede del mismo modo, definir la propiedad para cada grado m y se cumple la equivalencia entre las siguiente dos afirmaciones:

1. Propiedad (P_m): para cada par de sucesiones acotadas en E, $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ tales que $\lim_n |q(x_n) - q(y_n)| = 0$ para todo $q \in \mathcal{P}(^mE)$, se cumple $\lim_n |q(x_n - y_n)| = 0$ para todo $q \in \mathcal{P}(^mE)$.

2. La sucesión acotada $\{x_n\}$ es de Cauchy en E_{τ_m} si y sólo si para todo par de sucesiones (n_j) y (k_j) estrictamente crecientes de enteros positivos, con $n_j < k_j$ para todo j, la sucesión $y_j = (x_{k_j} - x_{n_j})$ es τ_m convergente a cero.

La implicación de 1 en 2 es clara. Para establecer el recíproco, se consideran (x_j) y (y_j) como en 1 y se construye la sucesión (w_j) de modo que $w_{2j} = x_j$ y $w_{2j+1} = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. La sucesión (w_j) resulta ser τ_m de Cauchy: fijado $q \in \mathcal{P}(^mE)$ y $\epsilon > 0$, existe N tal que para todo $n > N$, $|q(x_n) - q(y_n)| < \frac{\epsilon}{2}$. Si los índices tienen distinta paridad,

$$|q(w_{2j}) - q(w_{2k+1})| = |q(x_j) - q(y_k)| < \frac{\epsilon}{2}$$

y si tienen la misma,

$$|q(w_{2j}) - q(w_{2k})| \leq |q(w_{2j}) - q(w_{2k+1})| + |q(w_{2k+1}) - q(w_{2k})| < \epsilon,$$

siempre que j, $k > N$. Por hipótesis se cumple entonces, que la sucesión $\{w_{2j} - w_{2j+1}\}_j = \{x_j - y_j\}_j$ es τ_m convergente a 0.

Observación III.45 Una descripción de la propiedad $(P)_m$ en términos de conjuntos sería: " $A \in \mathcal{R}_m(E)$, si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}$ contenida en A existe una subsucesión tal que para n_j y k_j como antes, $\{x_{n_j} - x_{k_j}\} \in \tau_m(E)$". De aquí se deduce fácilmente que el límite debe ser cero. Habría, sin embargo otras formulaciones de la propiedad (que llamaremos *propiedad de tipo* (P_m)), como concluir que $\{x_{n_j} - x_{k_j}\} \in \mathcal{W}_m(E)$, o bien que pertenece a la clase $\mathcal{R}_m(E)$, que en principio son más débiles que la anterior.

Veremos en repetidas ocasiones que alguna de las distintas formulaciones de las propiedades de tipo (P_m) que acabamos de ver, será la condición a exigir en el espacio de Banach para que las propiedades definidas a través de las clases de conjuntos $\mathcal{R}_m$ y $\mathcal{W}_m$ que coincidían en el caso $m = 1$, lo hagan también para $m \in \mathbb{N}$.

Propiedades con los conjuntos limitados

• **Propiedad de Gelfand-Phillips $\boldsymbol{P(\mathcal{L}^*, \mathcal{K})}$.** En todo espacio de Banach E, se cumple $\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{L}^*(E)$. La coincidencia de las clases da lugar a la propiedad conocida como *de Gelfand-Phillips*. Esta propiedad la cumplen por ejemplo, los espacios en los que la bola del dual es débil* secuencialmente compacta (como los reflexivos y separables) o los espacios de Schur. Como consecuencia del teorema III.22 ($\mathcal{L}^*_m(E) = \mathcal{L}^*(E)$) y de la proposición III.6 ($\mathcal{K}_m(E) = \mathcal{K}(E)$), la propiedad de Gelfand-Phillips coincide con su generalización polinomial $\mathcal{L}^*_m(E) = \mathcal{K}_m(E)$.

La sucesión unitaria de ℓ_∞ forma un conjunto limitado y no relativamente compacto, por lo que

$$\ell_\infty \notin \mathcal{P}(\mathcal{L}^*, \mathcal{K}).$$

• **Propiedad $\boldsymbol{P(\mathcal{B}, \mathcal{L}^*)}$.** Un espacio de Banach E es de dimensión finita si y sólo si cumple la propiedad $\mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{L}^*)$ (Th. Josefson-Nissenzweig, C.XII[17]). Del mismo modo que antes, la propiedad coincide con su generalización polinomial.

El siguiente resultado, que aparece probado en [12] y [27], establece que las sucesiones débilmente convergentes que forman un conjunto limitado, convergen también en las topologías polinomiales:

Proposición III.46 *En todo espacio de Banach E se cumple*

$$\mathcal{L}^*(E) \cap \mathcal{W}(E) = \mathcal{L}^*(E) \cap \tau_{pol}(E) \subset \mathcal{L}^*(E) \cap \mathcal{W}_{pol}(E).$$

Demostración. La proposición III.30 afirmaba que $\mathcal{D}P(E) \cap \mathcal{W}(E) \subset \tau_m(E)$ para todo $m \in \mathbb{N}$; con la expresión

$$\mathcal{L}^*(E) \cap \mathcal{W}(E) \subset \mathcal{D}P(E) \cap \mathcal{W}(E)$$

se concluye fácilmente la demostración. □

Corolario III.47 *Dado E un espacio de Banach, son equivalentes:*

1. E tiene la propiedad de Gelfand-Phillips $\mathcal{P}(\mathcal{L}^*, \mathcal{K})$.

2. $\mathcal{K}(E) = \mathcal{L}^*(E) \cap \mathcal{W}(E)$

3. $\mathcal{K}(E) = \mathcal{L}^*(E) \cap \tau_{pol}(E)$

Demostración. La equivalencia entre 1 y 2 es bien conocida (ver p.ej. [8]) y la equivalencia con 3 es inmediata de la proposición anterior. □

• **Propiedad BD: $P(\mathcal{L}^*, \mathcal{W})$.** El espacio tien la propiedad **BD** cuando

$$\mathcal{L}^*(E) \subset \mathcal{W}(E)$$

En la siguiente proposición se probará que también esta propiedad coincide con su generalización polinomial, a pesar de que no lo haga una de las clases involucradas, la de los relativamente débilmente compactos $\mathcal{W}$.

Proposición III.48 *Sea E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:*

1. $E \in \boldsymbol{P}(\mathcal{L}^*, \mathcal{W})$.

2. $E \in \boldsymbol{P}(\mathcal{L}^*, \mathcal{W}_m)$.

3. $E \in \boldsymbol{P}(\mathcal{L}^*, \tau_{pol})$.

Demostración. Las inclusiones $\tau_{pol}(E) \subset \mathcal{W}_m(E) \subset \mathcal{W}(E)$ son siempre válidas, por lo que son claras las implicaciones $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. En la proposición III.46 se probó que también se cumple siempre $\mathcal{L}^*(E) \cap \mathcal{W}(E) \subset \tau_{pol}(E)$, que bajo la hipótesis de 1 establece que $\mathcal{L}^*(E) \subset \tau_{pol}(E)$. □

Ejemplos de espacios en relación a la propiedad BD

1. Los espacios con la propiedad de Gelfand-Phillips $\mathcal{P}(\mathcal{L}^*, \mathcal{K})$ verifican la propiedad BD pues siempre se cumple $\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{W}(E)$. En éstos se incluyen los espacios reflexivos, los separables y los de Schur.

2. En [13] los autores prueban que si E es un espacio sin copias de ℓ_1, cumple esta propiedad.

3. El espacio ℓ_∞ no cumple la propiedad BD (ver [8]).

• **Propiedad recíproca BD: $P(\mathcal{W}, \mathcal{L}^*)$.** Diremos que el espacio de Banach E tiene la propiedad R-BD (en [38] aparece como propiedad *Dunford-Pettis) si

$$\mathcal{W}(E) \subset \mathcal{L}^*(E)$$

Es fácil probar que esta propiedad equivale a que el espacio satisfaga

$$\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{R}(E).$$

En la demostración de esta equivalencia se utiliza el hecho de que el espacio E_w es e.v.t.l.c, por lo que en principio no se puede asegurar que las respectivas generalizaciones polinomiales

$$\mathcal{P}(\mathcal{W}_m, \mathcal{L}^*) \quad \text{y} \quad \mathcal{P}(\mathcal{R}_m, \mathcal{L}^*)$$

sean también equivalentes; si el espacio verifica la primera condición de tipo (P_m) descrita en la observación III.45 sí son equivalentes.

En el capítulo IV probaremos diferentes caracterizaciones y consecuencias de la propiedad $\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{R}_m(E)$. Las referentes a la propiedad $\mathcal{W}_m(E) \subset \mathcal{L}^*(E)$ tienen una formulación y una demostración análogas.

Proposición III.49 *Si E es un espacio con la propiedad recíproca BD, entonces E cumple la propiedad de continuidad secuencial para todo $m \in \mathbb{N}$: m-SCP.*

Demostración. Utilizando la proposición III.46, bajo estas hipótesis, el espacio debe cumplir:

$$\mathcal{W}(E) = \mathcal{W}(E) \cap \mathcal{L}^*(E) \subset \tau_{pol}(E),$$

y por tanto, las sucesiones débilmente convergentes son polinomialmente convergentes, cumpliéndose entonces la propiedad m-SCP (Def. I.39). □

Ejemplos de espacios en relación a la propiedad R-BD

1. ℓ_∞, ℓ_1 y cualquier otro espacio de Schur cumplen la propiedad.

2. Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita sin copias de ℓ_1, como sucede con los reflexivos, con c_0 o con el espacio de James $\mathcal{J}$, no tiene la propiedad R-BD, pues se cumpliría $\mathcal{B}(E) = \mathcal{R}(E) = \mathcal{L}^*(E)$ que, por lo visto anteriormente, es posible sólo si E es de dimensión finita.

Propiedades con los conjuntos de Dunford-Pettis

Las dos primeras propiedades que exponemos a continuación, coinciden con su respectiva generalización polinomial:

• **Propiedad DPrcP:** $\boldsymbol{P}(\mathcal{DP}, \mathcal{K})$. En [24] se define y estudia esta propiedad. Es una propiedad estable por el paso a subespacios y la cumplen, por ejemplo, los espacios tales que el dual no contiene a ℓ_1 (entre los que se incluyen los reflexivos) y los de Schur. Veremos en el capítulo IV que también la cumplen los espacios con la propiedad Λ_m-Schur, para algún $m \in \mathbb{N}$ (Def. IV.21). Dado que cada una de las clases invlolucradas coincide con su análogo polinomial, la propiedad $\boldsymbol{P}(\mathcal{DP}_m, \mathcal{K}_m)$ coincide para todo $m \in \mathbb{N}$.

• **Propiedad** $\boldsymbol{P}(\mathcal{DP}, \mathcal{L}^*)$. Todo espacio de Banach cumple $\mathcal{L}^*(E) \subset \mathcal{DP}(E)$; la igualdad entre las clases da lugar a una propiedad (no siempre válida, como ocurre en c_0) que también coincide con la respectiva propiedad polinomial. Los espacios con la propiedad de Grothendieck (i.e, $\mathcal{L}(E, c_0) = \mathcal{L}_{wc}(E, c_0)$) y los espacios con la propiedad $\mathcal{K} = \mathcal{DP}$, la verifican.

• **Propiedad de Dunford-Pettis:** $\mathcal{P}(\mathcal{W}, \mathcal{DP})$. Esta propiedad ha sido ampliamente estudiada (puede verse, por ejemplo [18]). Una de las equivalencias que caracteriza a esta propiedad es $\mathcal{P}(\mathcal{R}, \mathcal{DP})$. En el capítulo IV estudiaremos las respectivas propiedades polinomiales, que bajo una condición del tipo (P_m) serán equivalentes (Obs. III.45).

Proposición III.50 *Si $E \in \boldsymbol{P}(\mathcal{W}, \mathcal{DP})$ entonces E cumple la propiedad de continuidad secuencial para todo $m \in \mathbb{N}$: m-SCP.*

Demostración. Se prueba de forma similar a la vista en el caso de los conjuntos limitados: utilizando la proposición III.30, bajo la propiedad de Dunford-Pettis, el espacio debe cumplir:

$$\mathcal{W}(E) = \mathcal{W}(E) \cap \mathcal{DP}(E) \subset \tau_{pol}(E),$$

y por tanto, las sucesiones débilmente convergentes son polinomialmente convergentes. □

Ejemplos de espacios en relación con la propiedad de Dunford-Pettis

1. ℓ_∞, c_0, $C(K)$ y $C(K; F)$ con K un compacto Hausdorff y F de Schur, tienen la propiedad de Dunford-Pettis, así como ℓ_1 y cualquier otro espacio de Schur.

2. Los espacios reflexivos cumplen la propiedad $\boldsymbol{P}(\mathcal{DP}, \mathcal{K})$ y en consecuencia ningún espacio reflexivo de dimensión infinita puede ser de Dunford-Pettis.

3. Los espacios sin copias de ℓ_1 y con la propiedad $\mathcal{P}(\mathcal{DP}, \mathcal{L}^*)$, entre los que se incluyen los anteriores, no satisfacen la propiedad.

• **Propiedad** $\boldsymbol{P}(\mathcal{DP}, \mathcal{W})$. Se define en [39] con el nombre de propiedad recíproca de Dunford-Pettis*; veremos a continuación que coincide con cualquiera de sus generalizaciones polinomiales:

Proposición III.51 *Sea E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:*

1. $E \in \boldsymbol{P}(\mathcal{DP}, \mathcal{W})$.
2. $E \in \boldsymbol{P}(\mathcal{DP}, \mathcal{W}_m)$.
3. $E \in \boldsymbol{P}(\mathcal{DP}, \tau_{pol})$.

Demostración. Las inclusiones $\tau_{pol}(E) \subset \mathcal{W}_m(E) \subset \mathcal{W}(E)$ son siempre válidas, por lo que son claras las implicaciones $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. Por último, en la proposición III.30 se probó que también se cumple siempre

$$\mathcal{DP}(E) \cap \mathcal{W}(E) \subset \tau_{pol}(E),$$

que bajo la hipótesis 1 establece la contención $\mathcal{DP}(E) \subset \tau_{pol}(E)$. □

Claramente la propiedad recíproca de Dunford-Pettis* implica a la propiedad BD, aunque no son equivalentes, pues por ejemplo, existen espacios sin copias de ℓ_1 (y por tanto con la propiedad BD) que no cumplen la propiedad *R-DP**:

$$\mathcal{K}(c_0) = \mathcal{L}^*(c_0) \subset \mathcal{W}(c_0) \subsetneq \mathcal{DP}(c_0).$$

Propiedades con los conjuntos de Grothendieck

El método introducido en la definición III.3 permite definir y estudiar distitas propiedades en las que aparecen involucrados los conjuntos de Grothendieck, teniendo en cuenta qué relaciones no son siempre válidas. Aquí veremos dos de ellas. La primera, la denominada propiedad de Grothendieck se define habitualmente mediante el método homológico, aunque como veremos, también se expresa a través de las clases de conjuntos.

• Propiedad de Grothendieck polinomial

Definición III.52 *Se dice que E tiene la propiedad de Grothendieck si*

$$E \in \boldsymbol{P}(\mathcal{L}, \mathcal{L}_{wc}, c_0).$$

En [8] puede verse la demostración $1 \Leftrightarrow 2$ del siguiente resultado y la equivalencia con 3 es sencilla de probar:

Proposición III.53 *Dado un espacio de Banach E, son equivalentes:*

1. *E es un espacio de Grothendieck.*
2. *En E^* coinciden las sucesiones débilmente convergentes con las sucesiones $\sigma(E^*, E)$ convergentes.*
3. $\mathcal{G}r(E) = \mathcal{B}(E)$.

Observación III.54 Como consecuencia de 2 se obtiene que en todo espacio de Grothendieck, la clase de conjuntos limitados $\mathcal{L}^*$ y la clase de conjuntos de Dunford-Pettis $\mathcal{DP}$ coinciden y por tanto los espacios con la propiedad de Grothendieck cumplen también la propiedad $\boldsymbol{P}(\mathcal{DP}, \mathcal{L}^*)$.

Definición III.55 *[32] El espacio E tiene la propiedad de Grothendieck de grado m si*

$$\mathcal{P}(^mE, c_0) = \mathcal{P}_{wc}(^mE, c_0).$$

Las equivalencias entre 1, 3 y 4 del siguiente teorema fue establecida en [32], aunque con una demostración un poco distinta:

Proposición III.56 *Sea E un espacio de Banach y $m > 1$. Son equivalentes:*

1. *E tiene la propiedad de Grothendieck de grado m.*
2. $\mathcal{G}r_m(E) = \mathcal{B}(E)$.
3. *El espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ tiene la propiedad de Grothendieck.*
4. *El espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ es reflexivo.*

Demostración. La equivalencia entre 1 y 2 se debe a que el conjunto B_E está en la clase $\mathcal{G}r_m(E)$ si y sólo si para todo $P \in \mathcal{P}(^mE, c_0)$, el conjunto $P(B_E)$ es débilmente relativamente compacto (T.III.32), y esto es equivalente a que todo P sea un polinomio débilmente compacto.

La proposición III.10 en este caso, establece la equivalencia entre 2 y 3.

$4 \Rightarrow 3$ es claro. Por último, veamos la otra implicación. En el teorema III.33 vimos que si $m > 1$, $\mathcal{G}r_m \subset \mathcal{R}$; como consecuencia inmediata se obtiene que si un espacio E satisface la propiedad de Grothendieck de grado m, debe ser reflexivo ($\mathcal{B}(E) = \mathcal{W}(E)$), pues $\mathcal{G}r_m(E) = \mathcal{G}r(E) = \mathcal{R}(E) = \mathcal{B}(E)$, es decir, debe ser un espacio de Grothendieck sin copias de ℓ_1. Para ver que $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ es reflexivo, restará probar que $\mathcal{W}(E) = \mathcal{W}_m(E)$ (T. III.13): consideremos una sucesión $\{x_n\}_n$ débilmente convergente en E. Existe un subespacio H reflexivo, separable y complementado en E que contiene a la sucesión $\{x_n\}_n$ (C.V T.3 [19]). Por ser H complementado, el espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} H$ es a su vez complementado en $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ y separable (Prop. I.21). Si suponemos que el espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ es de Grothendieck, $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} H$ debe ser reflexivo (pues es de Grothendieck separable) y por lo tanto existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}_j$ tal que $\{\theta_m(x_{n_j})\}_j$ es débilmente convergente en $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} H$ y en consecuencia débilmente convergente en $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$. Queda probado entonces, que $\{x_n\}_n \in \mathcal{W}_m(E)$. □

Corolario III.57 *Dado $m > 1$ y E un espacio de Banach tal que $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no es reflexivo, existe una sucesión $\{p_n\}_n \in \mathcal{P}(^mE)$ convergente en la topología débil* pero no débilmente convergente.*

El espacio ℓ_∞ tiene la propiedad de Grothendieck, pero no es un espacio reflexivo, por lo que no puede cumplir la propiedad de Grothendieck de grado m para ningún $m > 1$.

• Propiedad débil de Gelfand-Phillips: $\boldsymbol{P}(\mathcal{G}r, \mathcal{W})$. Esta propiedad se introduce y estudia en [40]. Definimos entonces:

Definición III.58 *El espacio E tiene la propiedad τ_m-Gelfand-Phillips si*

$$E \in \boldsymbol{P}(\mathcal{G}r_m, \mathcal{W}_m).$$

Por el teorema III.33 esta propiedad equivale a que ambas clases coincidan, pues la otra contención es siempre cierta.

Ejemplos de espacios con la propiedad polinomial de Gelfand-Phillips

1. c_0 cumple la propiedad para todo $m \in \mathbb{N}$ (ver demostración T.III.33).

2. Si E cumple la propiedad débil de Gelfand-Phillips $\boldsymbol{P}(\mathcal{G}r, \mathcal{W})$ y la propiedad m-SCP, entonces $E \in \boldsymbol{P}(\mathcal{G}r_m, \mathcal{W}_m)$ pues
$$\mathcal{G}r_m(E) \subset \mathcal{G}r(E) \subset \mathcal{W}(E) = \mathcal{W}_m(E).$$

3. Los espacios E tales que $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$ es reflexivo, como T^* y ℓ_p, $p > m$ tienen la propiedad.

III.4 Módulos de polinomios definidos a través de clases de conjuntos

Los módulos de polinomios de Dunford-Pettis, de Dieudonné e incondicionalmente convergentes definidos en II.15 se caracterizan por su comportamiento frente a ciertas familias de sucesiones del espacio. La definición de los polinomios compactos y débilmente compactos, en cambio, viene dada en términos de la clase de conjuntos en la que el polinomio transforma a la bola unitaria. Veremos ahora otras clases de módulos definidos de este modo.

Definición III.59 *Si $\mathcal{H}$ es una clase de conjuntos de espacios de Banach, denotamos por $\mathcal{P}_\mathcal{H}$ a la familia de polinomios determinada, para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada pareja de espacios de Banach E y F, por la relación:*

$$P \in \mathcal{P}(^mE, F) \text{ es un elemento de } \mathcal{P}_\mathcal{H} \text{ si y sólo si } P(B_E) \in \mathcal{H}(F).$$

$\mathcal{H}$ denotará siempre una de las siguientes clases de conjuntos:

$$\mathcal{L}^*, \ \mathcal{DP}, \ \mathcal{G}r, \ \text{ o } \mathcal{V}^* \qquad (\star)$$

Cuando $\mathcal{H} = \mathcal{DP}$ utilizaremos la notación $\mathcal{P}_{\overline{\mathcal{DP}}}(^mE, F)$ para distiguir este módulo del módulo de polinomios de Dunford-pettis definido en II.15.

Proposición III.60 *Sea $\mathcal{H}$ alguna de las clases de conjuntos en $(\star)$. La familia de polinomios homogéneos de grado m, $\mathcal{P}_\mathcal{H}$, determina un módulo de polinomios cerrado.*

Demostración. Cada una de estas clases de conjuntos es estable por aplicaciones lineales y por el paso a subconjuntos, por lo que resulta inmediato verificar las propiedades de módulo de polinomios. Comprobemos que también son cerrados:

Sea $\{P_n\}_n \in \mathcal{P}(^mE, F)$ una sucesión de polinomios contenida en el subespacio $\mathcal{P}_\mathcal{H}(^mE, F)$, que converge en norma a $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\|P_{n_0} - P\| < \epsilon$, por tanto
$$P(B_E) \subset P_{n_0}(B_E) + \epsilon B_F. \qquad (*)$$

Esto implica entonces que $P(B_E) \in \mathcal{H}(F)$. La comprobación puede verse en [8] para las clases $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{DP}$ y $\mathcal{V}^*$. La prueba para la clase $\mathcal{G}r$, utiliza, como en los otros casos, el siguiente resultado, debido a A. Grothendick (C.XIII, Lemma 2. [17]):

Lema III.61 *Sea A un subconjunto de un espacio de Banach E. Si para cada $\epsilon > 0$ existe un subconjunto compacto (resp. débilmente compacto) $A_\epsilon \subset E$ tal que $A \subset A_\epsilon + \epsilon B_E$, entonces A es compacto (resp. débilmente compacto).*

Sea $A \in \mathcal{B}(F)$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto $A_\epsilon \in \mathcal{G}r(F)$ de modo que $A \subset A_\epsilon + \epsilon B_F$. Comprobemos que A es un conjunto de la clase $\mathcal{G}r(F)$. Sean $T \in \mathcal{L}(F, c_0)$ y $\epsilon > 0$. Como la suma es una función continua en la topología débil, se cumple:
$$T(\overline{A}^w) \subset \overline{T(A_\epsilon)}^w + \epsilon\|T\|B_{c_0}.$$
Por definición de la clase $\mathcal{G}r$ (Def. III.31), $T(A_\epsilon)$ es un conjunto débilmente relativamente compacto de c_0. El lema afirma entonces, que $T(A)$ es un conjunto relativamente débilmente compacto en c_0. Esto es válido para todo $T \in \mathcal{L}(F, c_0)$ y por tanto $A \in \mathcal{G}r(F)$.

Para cada $\epsilon > 0$ existe n_0 de modo que se cumple $(*)$, con $P_{n_0}(B_E) \in \mathcal{G}r(F)$. Según lo visto, el conjunto $P(B_E)$ debe pertenecer a la clase $\mathcal{G}r(F)$ y en consecuencia $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}r}(^mE, F)$. □

Proposición III.62 *Sea $m \in \mathbb{N}$, E y F espacios de Banach y $\mathcal{H}$ una clase de conjuntos en $(\star)$. El polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ pertenece al módulo $\mathcal{P}_\mathcal{H}$ si y sólo si el operador lineal asociado a P, $\hat{P}$, es tal que $\hat{P}(B_{\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E}) \in \mathcal{H}(F)$, es decir, $\hat{P} \in \mathcal{L}_\mathcal{H}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E, F)$.*

Demostración. Claramente, si $\hat{P}(B_{\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E}) \in \mathcal{H}(F)$, se cumple en particular que $P(B_E) = \hat{P}(\theta_m(B_E)) \in \mathcal{H}(F)$ y por tanto P es un elemento del módulo. Para comprobar la implicación contraria, usaremos la proposición I.19:
$$\hat{P}(B_{\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E}) \subset \overline{coe\hat{P}(\theta_m(B_E))} = \overline{coeP(B_E)}.$$

Como la clase $\mathcal{H}$ es estable bajo envolturas absolutamente convexas y cerradas, el conjunto $\hat{P}(B_{\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E})$ pertenece a la clase $\mathcal{H}(E)$. □

Corolario III.63 *Sean E y F dos espacios de Banach, $m \in \mathbb{N}$ y $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ y $P^* \in \mathcal{P}(^mF^*, \mathcal{P}(^mE))$ el operador adjunto de P, definido como $P^*(f^*) = f^* \circ P$. Se cumple entonces:*

1. *Son equivalentes:*
   - *(a) $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}^*}(^mE, F)$.*
   - *(b) P^* transforma las sucesiones de Cauchy en la topología $\sigma(F^*, F)$ de F^* en sucesiones convergentes en norma.*
2. *Son equivalentes:*
   - *(a) $P \in \mathcal{P}_{\widetilde{\mathcal{DP}}}(^mE, F)$.*
   - *(b) P^* transforma las sucesiones deébiles de Cauchy de F^* en sucesiones convergentes en norma, es decir, es de Dunford-Pettis.*
3. *Son equivalentes;*
   - *(a) $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{V}^*}(^mE, F)$.*
   - *(b) P^* es un operador incondicionalmente convergente.*
4. *Son equivalentes:*
   - *(a) $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}r}(^mE, F)$.*
   - *(b) P^* es secuencialmente continuo de la topología $\sigma(F^*, F)$ en la topología débil de $\mathcal{P}(^mE)$.*

Demostración. El adjunto del polinomio canónico $\theta_m \in \mathcal{P}(^mE, \hat{\otimes}^m_{s,\pi}E)$ es el isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \theta^*_m : (\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E)^* & \longrightarrow & \mathcal{P}(^mE) \\ \hat{p} & \longmapsto & \hat{p} \circ \theta_m = p \end{array}$$

Dados $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ y $\hat{P}$ su operador lineal asociado, los respectivos operadores adjuntos cumplen la relación $P^* = \theta^*_m \circ \hat{P}^*$. Como θ^*_m es un isomorfismo (de hecho es una isometría: Prop. I.22), se cumple que $P^*(B_{F^*}) \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(^mE))$ si y sólo si $\hat{P}^*(B_{F^*}) \in \mathcal{H}((\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E)^*)$. Podemos probar entonces cada una de las equivalencias, con la afirmación (b) expresada sobre $\hat{P}^*$ en lugar de hacerlo sobre P^*. Gracias a la proposición anterior, será suficiente demostrar el corolario para $m = 1$ (y aplicarlo sobre el espacio de Banach $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$).

Así por ejemplo, $P(B_E) \in \mathcal{L}^*(F)$ si y sólo si $\hat{P}(B_{\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E}) \in \mathcal{L}^*(F)$. Suponiendo válido el resultado para $m = 1$, esto último es equivalente a que el operador $\hat{P}^*$ transforme las sucesiones de Cauchy en la topología débil* de F^* en sucesiones convergentes en $(\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E)^*$ y por tanto equivalente a que $P^* = (\theta^*_m)^{-1} \circ \hat{P}^*$ transforme las sucesiones debil* de Cauchy de F^* en sucesiones convergentes en $\mathcal{P}(^mE)$. Los otros casos se demuestran de forma similar.

El resultado para el caso lineal es bien conocido, al menos en los tres primeros casos:

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y $\{x^*_n\}$ una sucesión débil* convergente a cero (resp. débilmente convergente a cero, resp. determina una serie d.i.C) en F^*, se cumple

$$\|T^*(x^*_n)\| = \sup\{|x^*_n \circ T(x)|;\ x \in B_E\} = \sup\{|x^*_n(y)|;\ y \in T(B_E)\}.$$

Por tanto la sucesión $\{T^*(x^*_n)\}$ es convergente en norma para toda sucesión $\{x^*_n\}$ débil* convergente a cero (resp. débilmente convergente a cero, resp. d.i.C) si y sólo si el conjunto $T(B_E)$ es un conjunto de la clase $\mathcal{L}^*(F)$ (resp. $\mathcal{DP}$(F), resp. $\mathcal{V}^*(F)$).

Por último veamos la equivalencia 4 en el caso lineal:

Sean $T \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}r}(E, F)$ y $\{x^*_n\}$ una sucesión débil* convergente a cero en F^*. Si la sucesión $\{T^*(x^*_n)\}$ no converge débilmente a cero en E^*, existen $x^{**} \in B_{F^{**}}$ y $\epsilon > 0$ tales que (pasando a una subsucesión, que denotamos igual),

$$|x^{**}(T^*(x^*_n))| > \epsilon \qquad (*)$$

para todo n. Consideremos una red $\{x_\alpha\} \in F$ que converge en la topología débil* de E^{**}, a x^{**}. La red forma un conjunto acotado, por lo que su imagen bajo el operador de Grothendieck T, es un conjunto de Grothendieck de F. La sucesión débil* convergente a cero, $\{x^*_n\}$ determina un operador lineal y continuo $S \in \mathcal{L}(F, c_0)$, definido como $S(x) = (x^*_n(x))$ para cada $x \in F$, por lo que $S(T(\{x_\alpha\})) \in \mathcal{W}(c_0)$; existe entonces una subred $z_{\alpha_i} = S(T(x_{\alpha_i}))$ débilmente convergente a un $z = (z_n) \in c_0$ y por tanto $z_n = \lim_{\alpha_i} x^*_n(T(x_{\alpha_i}))$ con $\lim_n z_n = 0$. El operador T^{**} es $\sigma(E^{**}, E^*)$-$\sigma(F^{**}, F^*)$ continuo, por lo que se cumple

$$w^* - \lim_{\alpha_i} T^{**}(x_{\alpha_i}) = w^* - \lim_{\alpha_i} T(x_{\alpha_i}) = T^{**}(x^{**}),$$

denotando por $w^*\lim$ al límite en la topología débil*. Para cada n se cumple entonces: $z_n = \lim_{\alpha_i} x^*_n(T(x_{\alpha_i})) = T^{**}(x^{**})(x^*_n)$. Por $(*)$ esta expresión es mayor que ϵ para cada n, pero eso contradice al hecho de que (z_n) sea un elemento de c_0.

Comprobemos ahora la otra implicación: sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un operador tal que su adjunto T^*, es débil*-débil secuencialmente continuo. Para ver que $T(B_E) \in \mathcal{G}r(F)$, hay que verificar que para cada $S \in \mathcal{L}(F, c_0)$, la composición $S \circ T \in$

$\mathcal{L}(E, c_0)$ determina un operador débilmente compacto. El adjunto de este operador es $T^* \circ S^* \in \mathcal{L}(\ell_1, E^*)$. Como ℓ_1 es el dual de un espacio separable, la bola B_{ℓ_1} es débil* secuencialmente compacta (ver, por ejemplo, C.XIII [17]). Por tanto, si $\{x_n^*\}_n$ es una sucesión acotada en ℓ_1, existe una subsucesión $\{x_{n_i}^*\}$ convergente a cierto x^* en la topología débil* de ℓ_1. Se cumple entonces que $w^* - \lim_i S^*(x_{n_i}^*) = S^*(x^*)$, y ahora, por la hipótesis sobre T^*, $w - \lim_i T^*(S^*(x_{n_i}^*)) = T^*(S^*(x^*))$ y por lo tanto el operador $S \circ T$ es débilmente compacto. Esto es válido para cada $S \in \mathcal{L}(F, c_0)$, por lo que $T(B_E) \in \mathcal{G}r(F)$. □.

Las propiedades lineales definidas a través de clases de conjuntos tienen en ocasiones una descripción equivalente en términos del comportamiento de los operadores adjuntos, como es el caso de la propiedad recíproca de Dunford-Pettis* (Def. III.3) o el de la propiedad V^* de Pelczynski (Def. V.15). A la hora de definir las correspondientes propiedades polinomiales, debe tenerse presente la siguiente caracterización de ciertas clases de operadores adjuntos:

Dado el operador $T \in \mathcal{L}(F, E)$ entre los espacios de Banach F y E y $m \in \mathbb{N}$, definimos el operador $T^{(m)*} \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^mE), \mathcal{P}(^mF))$ como $T^{(m)*}(q) = q \circ T$ para cada $q \in \mathcal{P}(^mE)$.

Proposición III.64 *Sean E y F espacios de Banach, $m \in \mathbb{N}$ y $T \in \mathcal{L}(F, E)$.*

1. *Son equivalentes:*
   (a) $T(B_F) \in \mathcal{L}^*(E)$.
   (b) $T^{(m)*}$ *transforma las sucesiones de Cauchy en la topología débil* de $\mathcal{P}(^mE)$ en sucesiones convergentes en norma.*
2. *Son equivalentes:*
   (a) $T(B_F) \in \mathcal{DP}(E)$.
   (b) $T^{(m)*}$ *transforma las sucesiones débiles de Cauchy de $\mathcal{P}(^mE)$ en sucesiones convergentes en norma.*
3. *Son equivalentes:*
   (a) $T(B_F) \in \mathcal{V}_m^*(E)$.
   (b) $T^{(m)*}$ *es incondicionalmente convergente.*
4. *Son equivalentes:*
   (a) $T(B_F) \in \mathcal{G}r_m(E)$.
   (b) $T^{(m)*}$ *es secuencialmente continuo de la topología débil* del espacio $\mathcal{P}(^mE)$ en la topología débil de $\mathcal{P}(^mF)$.*

5. *Son equivalentes:*
   (a) $T(B_F) \in \mathcal{W}_m(E)$.
   (b) $T^{(m)*}$ *es débilmente compacto.*

Demostración. Llamamos $\mathcal{H}$ a cada una de las clases anteriores. Se cumple que el conjunto $T(B_F)$ pertenece a la clase $\mathcal{H}_m(E)$, por definición, si y sólo si $\theta_m(T(B_F)) \in \mathcal{H}(\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E)$. La aplicación $\theta_m \circ T$ es un elemento en $\mathcal{P}(^mF, \hat{\otimes}_{s,\pi}^m E)$, por lo que podemos utilizar las equivalencias de la proposición anterior con el polinomio $\theta_m \circ T$, (el caso de los conjuntos $\mathcal{W}$ no lo incluimos en la proposición anterior porque es el resultado ya visto, II.19). Sea $(\theta_m^*)^{-1}$ el operador inverso del isomorfismo entre espacios de Banach $\theta_m^* \in \mathcal{L}((\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E)^*, \mathcal{P}(^mE))$. Para cada $q \in \mathcal{P}(^mE)$ se satisface $T^{(m)*}(q) = (\theta_m \circ T)^*(\theta_m^*)^{-1}(q)$. La proposición anterior demuestra el resultado para $(\theta_m \circ T)^*$; como θ_m^* y $(\theta_m^*)^{-1}$ son isomorfismos (los que establecen la correspondencia $\hat{q} \leftrightarrow q$ entre un polinomio escalar y su funcional lineal asociado), el resultado es también válido para $T^{(m)*}$. □

Corolario III.65 *Sea E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:*

1. *E tiene la propiedad recíproca de Dunford-Pettis*, $\boldsymbol{P}(\mathcal{DP}, \mathcal{W})$.*
2. *Para cada espacio de Banach F, cada operador $T^{(m)*}$ de Dunford-Pettis, donde $T \in \mathcal{L}(F, E)$, es débilmente compacto.*
3. *Cada operador $T^{(m)*}$ de Dunford-Pettis, donde $T \in \mathcal{L}(\ell_1, E)$, es débilmente compacto.*

Demostración. Supongamos 1, es decir, $\mathcal{DP}(E) \subset \mathcal{W}(E)$. En la proposición III.51 vimos que entonces se cumple $\mathcal{DP}(E) \subset \mathcal{W}_m(E)$. Consideremos un operador lineal $T \in \mathcal{L}(F, E)$ de modo que $T^{(m)*}$ es de Dunford-Pettis; por la proposición anterior, eso ocurre si y sólo si $T(B_F) \in \mathcal{DP}(E)$. Bajo la hipótesis 1, se tiene que $T(B_F) \in \mathcal{W}_m(E)$ y de nuevo, la proposición anterior establece que el operador $T^{(m)*}$ es débilmente compacto.

La implicación de 2 en 3 es trivial, así es que comprobemos, por último, la implicación de 3 en 1. Sea $A \in \mathcal{DP}(E)$. Para cada sucesión $\{a_i\}$ contenida en A podemos construir un operador lineal y continuo $T \in \mathcal{L}(\ell_1, E)$ definido en la base de ℓ_1 como $T(e_i) = a_i$. La bola de ℓ_1 es la envoltura absolutamente convexa y cerrada de los elementos de la base por lo que $T(B_{\ell_1}) \in \overline{coe\{a_i, i \in \mathbb{N}\}}$. Los conjuntos de Dunford-Pettis son estables por envolturas absolutamente convexas y cerradas, y por tanto $T(B_{\ell_1}) \subset \mathcal{DP}(E)$. Por la proposición anterior, esto equivale a decir que $T^{(m)*}$ es un operador de Dunford-Pettis. La hipótesis establece que el operador $T^{(m)*}$ es débilmente compacto y por tanto $T(B_{\ell_1}) \in \mathcal{W}_m(E)$; se tiene entonces que $\{a_i\} \subset \mathcal{W}_m(E)$. Como es posible hacer esto para cada sucesión contenida en A, toda la sucesión determina un conjunto de la clase $\mathcal{W}_m(E)$. □

Corolario III.66 *Sea E un espacio de Banach que satisface la propiedad τ_m de Gelfand-Phillips, $P(\mathcal{G}r_m, \mathcal{W}_m)$. Entonces, para cada espacio de Banach F, cada operador $T^{(m)*}$ secuencialmente continuo de la topología débil* de $\mathcal{P}(^mE)$ en la topología débil de $\mathcal{P}(^mF)$, donde $T \in \mathcal{L}(F, E)$, es débilmente compacto.*

Demostración. La demostración es similar a la primera parte del corolario anterior; E tiene la propiedad τ_m de Gelfand-Phillips si $\mathcal{G}r_m(E) \subset \mathcal{W}_m(E)$ (Def. III.58). Si $T^{(m)*}$ es como en la hipótesis, la proposición anterior afirma que entonces $T(B_F) \in \mathcal{G}r_m(E)$. Dado que E tiene la propiedad τ_m de Gelfand-Phillips, también $T(B_F) \in \mathcal{W}_m(E)$. Utilizando de nuevo la proposición anterior, se llega a que $T^{(m)*}$ es débilmente compacto. □

Observación III.67 Se puede demostrar el recíproco en el corolario anterior para la propiedad débil de Gelfand-Phillips. Cuando $m > 1$, no se sabe si la clase de los conjuntos $\mathcal{G}r_m$ es estable bajo envolturas absolutamente convexas, por lo que no se puede llevar a cabo una demostración análoga de la implicación $3 \Rightarrow 1$ en el corolario sobre la propiedad *m-RDP**. Lo mismo sucederá con la propiedad *m-V** (Prop. V.17).

Capítulo IV

Propiedades con polinomios de Dunford-Pettis

Al finalizar la sección 3.1 mencionamos el hecho de que las clases de subconjuntos definidas en los espacios duales debían ser generalizadas de un modo distinto al introducido en la definición III.1. La clase de subconjuntos acotados del espacio de polinomios $\mathcal{P}(^mE) \equiv (\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E)^*$ que definimos ahora está estrechamente relacionada con los que hemos dado en llamar polinomios de Dunford-Pettis:

Definición IV.1 *Diremos que el subconjunto $A \subset \mathcal{P}(^mE)$ pertenece a la clase $\mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^mE))$ si y sólo si, para cada sucesión $\{x_n\}_n$ de Cauchy en E_{τ_m} se cumple*

$$\lim_{k,n\to\infty} \sup\{|q(x_k) - q(x_n)|;\ q \in A\} = 0.$$

Proposición IV.2 *Dados E y F espacios de Banach y $m \in \mathbb{N}$, son equivalentes:*

1. *$P \in \mathcal{P}_{DP}(^mE, F)$ (i.e: transforma las sucesiones de Cauchy en E_{τ_m} en sucesiones convergentes de F).*
2. *El operador lineal adjunto $P^* : F^* \to \mathcal{P}(^mE)$ definido como $P^*(f^*) = f^* \circ P$ cumple $P^*(B^*_F) \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^mE))$.*

Demostración. Consideremos una sucesión $\{x_n\}_n$ de Cauchy en E_{τ_m} y $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$; de las igualdades

$$\begin{aligned}\lim_{k,n\to\infty} \|P(x_k) - P(x_n)\| &= \lim_{k,n\to\infty} \sup_{f^*\in B_{F^*}} \{|f^*(P(x_k)) - f^*(P(x_n))|\} \\ &= \lim_{k,n\to\infty} \sup_{f^*\in B_{F^*}} \{|(P^*(f^*)(x_k)) - (P^*(f^*)(x_n))|\} \\ &= \lim_{k,n\to\infty} \sup_{q\in P^*(B_{F^*})} \{|q(x_k) - q(x_n)|\}\end{aligned}$$

se obtiene fácilmente la equivalencia buscada. □

Observación IV.3 De forma análoga se pueden definir los subconjuntos de la clase $\mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^kE))$, siendo válida también una caracterización como la anterior: $A \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^kE))$ si y sólo si, para cada sucesión $\{x_n\}_n$ de Cauchy en E_{τ_m},

$$\lim_{k,n\to\infty} \sup\{|q(x_k) - q(x_n)|;\ q \in A\} = 0.$$

IV.1 Caracterización de los espacios tensores sin copias de ℓ_1

Lema IV.4 *Sean E y F espacios de Banach y $m \in \mathbb{N}$. Si el operador lineal $T \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E, F)$ es de de Dunford-Pettis (i.e. transforma las sucesiones débiles de Cauchy en sucesiones convergentes en norma), su polinomio asociado $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ es de Dunford-pettis.*

Demostración. Consideremos una sucesión $\{x_n\}_n \subset E$ de Cauchy en la topología τ_m. La sucesión $\{\theta_m(x_n)\}_n$ es entonces débil de Cauchy en $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$ y por lo tanto $\{T(\theta_m(x_n))\}_n$ es convergente en norma. Para cada n, $P(x_n) = T(\theta_m(x_n))$, por lo que $P \in \mathcal{P}_{DP}(^mE, F)$. □

Teorema IV.5 *Dado E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$, son equivalentes:*

1. *$\mathcal{B}(E) = \mathcal{R}_m(E)$.*
2. *El espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$ no contiene copias de ℓ_1.*
3. *Para todo espacio de Banach F, cada polinomio en $\mathcal{P}(^mE, F)$ que transforma los conjuntos $\mathcal{R}_m(E)$ en conjuntos relativamente compactos de F es compacto. ($\mathcal{P}_{DP}(^mE, F) = \mathcal{P}_{co}(^mE, F)$).*
4. *Cada polinomio en $\mathcal{P}(^mE, c_0)$ que transforma los conjuntos $\mathcal{R}_m(E)$ en conjuntos relativamente compactos de c_0 es compacto.*

$$\mathcal{P}_{DP}(^mE, c_0) = \mathcal{P}_{co}(^mE, c_0).$$

5. *La clase de subconjuntos $\mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^mE))$ coincide con los relativamente compactos de $\mathcal{P}(^mE)$.*

Demostración. La equivalencia entre las afirmaciones 1 y 2 ya la hbíamos probado en la proposición III.17: por el teorema de dicotomía de Rosenthal (C.XI [17]), 2

es equivalente a $\mathcal{B}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E) = \mathcal{R}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E)$ y esto a su vez es equivalente a 1 por la proposición III.10.

Si suponemos 1 cierto, todo polinomio del módulo $\mathcal{P}_{DP}(^mE, F)$ transformará la bola unitaria en un conjunto relativamente compacto y por tanto será un polinomio compacto, con lo que queda probado 3.

4 es un caso particular de 3. Para ver 4⇒1 supongamos que existe un conjunto acotado A en E que no pertenece a la clase $\mathcal{R}_m(E)$; esto equivale a decir que existe una sucesión $\{x_n\}_n \subset A$ de modo que $\{\theta_m(x_n)\}_n$ es una sucesión en $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E$ equivalente a la base canónica de ℓ_1; es bien sabido (ver p.ej. Obs II.5 [8]) que se puede construir entonces un operador lineal $T \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E, c_0)$ completamente continuo, no compacto y de modo que $T(\theta_m(x_n)) = e_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ (e_n denota la base canónica de c_0). La restricción de T a la diagonal determina un polinomio $P \in \mathcal{P}_{DP}(^mE, c_0)$ (Lema IV.4) no compacto puesto que $P(x_n) = e_n$ para cada n, lo que contradice a 4.

Por último comprobemos la equivalencia entre 5 y 3: por la proposición IV.2, $P \in \mathcal{P}_{DP}(^mE, F)$ si y sólo si $P^*(B_{F^*}) \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^mE))$, por lo que suponiendo 5 se obtiene que P^* es compacto y por lo tanto P es compacto.

Probaremos la implicación contraria construyendo adecuadamente un polinomio de Dunford-Pettis para cada conjunto en $\mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^mE))$, como se hacía en [39] para el caso de los operadores lineales:

Dado $A \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^mE))$ consideremos el espacio de Banach

$$B(A) = \{f : A \to \mathbb{C} \ \text{ continua}\}, \quad \|f\| = \sup_{q\in A}\{|f(q)|\}$$

y el polinomio homogéneo de grado m

$$\begin{array}{rcl} P : E & \longrightarrow & B(A) \\ x & \longmapsto & P(x) : \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{C} \\ q & \mapsto & q(x); \end{array} \end{array}$$

$\|P(x)\| \le M\|x\|^m$, donde M es una cota para A. El polinomio es de Dunford-Pettis puesto que para cada sucesión $\{x_n\}_n$ de Cauchy en E_{τ_m},

$$\begin{aligned} \|P(x_n) - P(x_k)\| &= \sup_{q\in A}\{|(P(x_n) - P(x_k))(q)|\} \\ &= \sup_{q\in A}\{|q(x_n) - q(x_k)|\} \to_{n,k} 0 \end{aligned}$$

por ser $A \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^mE))$. La hipótesis 3 implica entonces que P es un polinomio compacto y por lo tanto el conjunto $P^*(B_{B(A)^*})$ es relativamente compacto en $\mathcal{P}(^mE)$. Si vemos que A está en este conjunto imagen, habremos concluido: para cada $q \in A$ definimos el funcional

$$x_q^* : B(A) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x_q^*(f) := f(q) \quad f \in B(A).$$

Gracias a la fórmula de polarización (Prop. I.3), es suficiente verificar que las evaluaciones en cada $x \in E$ coinciden para concluir que $P^*(x_q^*) = q$. Claramente se cumple que para cada $x \in E$, $P^*(x_q^*)(x) = x_q^*(P(x)) = q(x)$. Por tanto A está en la imagen por P^* de un conjunto acotado de $B(A)^*$. □

Observación IV.6 Este resultado recupera para el contexto polinomial, una caracterización muy útil de los espacios (en este caso tensores) sin copias de ℓ_1. Hemos mencionado en diversas ocasiones que si $m > 1$, en principio, las clases de polinomios de Dunford-Pettis definidos como en II.15 no tienen, en principio, por qué coincidir con los que transforman a los conjuntos $\mathcal{W}_m(E)$ en relativamente compactos. Para obtener la caracterización, haciendo uso del teorema de Rosenthal, en la demostración de $2 \Rightarrow 3$ debe escogerse como definición la que involucra a las sucesiones τ_m de Cauchy. De nuevo, si el espacio cumple la propiedad (P_m) (o similares, Def. III.45) es posible dar una descripción en términos de sucesiones convergentes en la topología polinomial.

Corolario IV.7 *Sea E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$ tales que $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ_1. Para cada espacio de Banach F y cada $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ son equivalentes:*

1. *El operador lineal asociado a P, $\hat{P} \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, F)$, es un operador de Dunford-Pettis.*
2. *$P \in \mathcal{P}_{DP}(^mE, F)$.*

Demostración. La implicación de 1 en 2 es siempre válida y es precisamente el lema IV.4. La implicación contraria es consecuencia de que los espacios sin copias de ℓ_1 son precisamente aquéllos en los que coinciden los operadores de Dunford-Pettis con los compactos (éste es un resultado bien conocido, que corresponde a $m = 1$ en el teorema anterior), es decir:

$$\mathcal{L}_{DP}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, F) = \mathcal{L}_{co}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, F). \qquad (*)$$

Si el polinomio P pertenece al módulo $\mathcal{P}_{DP}(^mE, F)$, por el inciso 3 del teorema IV.5, es un polinomio compacto y por consiguiente su operador lineal asociado es compacto. La igualdad $(*)$ afirma que también es un operador de Dunford-Pettis. Se tiene, entonces:

$$P \in \mathcal{P}_{DP}(^mE, F) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{P} \in \mathcal{L}_{DP}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, F). \sharp$$

Proposición IV.8 *Sea E un espacio de Banach tal que $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no contiene copias de ℓ_1. Para cada espacio F cociente de E, $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} F$ no contiene copias de ℓ_1.*

Demostración. Sea $\pi : E \to F$ una aplicación cociente y $P \in \mathcal{P}_{DP}(^mF, c_0)$. Como los polinomios de Dunford-Pettis forman un módulo y $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no contiene a ℓ_1, se cumple

$$P \circ \pi \in \mathcal{P}_{DP}(^mE, c_0) = \mathcal{P}_{co}(^mE, c_0),$$

es decir, el conjunto $P(\pi(B_E))$ es relativamente compacto en c_0. Como π es una aplicación suprayectiva, el conjunto $P(B_F)$ es también relativamente compacto y por lo tanto $P \in \mathcal{P}_{co}(^mF, c_0)$. El teorema IV.5 asegura ahora que $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} F$ no contiene copias de ℓ_1. □

Corolario IV.9 *Sea E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$ de modo que $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no contiene copias de ℓ_1. Para cada $k \leq m$ el espacio $\hat{\otimes}^k_{s,\pi} E$ no contiene copias de ℓ_1 y E cumple la propiedad m-B.*

Demostración. Para cada $k \leq m$ el espacio $\hat{\otimes}^k_{s,\pi} E$ es un subespacio complementado (Prop. I.20), y por tanto, un cociente del espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$; la proposición anterior concluye la primera parte del corolario. La propiedad *m-B* (Def. I.35) en el espacio E es precisamente que cada conjunto $A \in \mathcal{R}_m(E)$ pertenezca a la clase $\mathcal{R}_k(E)$ para cada $k \leq m$; por lo que acabamos de probar, si $\mathcal{R}_m(E) = \mathcal{B}(E)$, entonces $\mathcal{R}_k(E) = \mathcal{B}(E)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y en particular $\mathcal{R}_m(E) = \mathcal{R}_k(E)$. □

Observación IV.10 Este corolario no es exáctamente el recíproco del corolario III.18, en donde se probaba que un espacio sin copias de ℓ_1 y con la propiedad *m-SCP* era tal que $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ tampoco contenía a ℓ_1; faltaría para ello la equivalencia entre las propiedades *m-SCP* y $\boldsymbol{P}(\mathcal{R}_m, \mathcal{R})$.

IV.2 Propiedad $\mathcal{P}(^mE, c_0) = \mathcal{P}_{DP}(^mE, c_0)$

En el capítulo III introdujimos las propiedades $\boldsymbol{P}(\mathcal{W}_m, \mathcal{L}^*)$ y $\boldsymbol{P}(\mathcal{R}_m, \mathcal{L}^*)$, haciendo mención al hecho de que son equivalentes bajo una condición del tipo (P_m) (Obs. III.45). Desarrollaremos con detalle la segunda de ellas, pues es la que resulta compatible con el módulo de los polinomios de Dunford-Pettis introducidos anteriormente. Es posible, igualmente establecer las distintas caracterizaciones de la propiedad $\boldsymbol{P}(\mathcal{W}_m, \mathcal{L}^*)$ de un modo análogo, por ejemplo, en la proposición siguiente, la equivalencia 2 sería: *Todo operador $T \in \mathcal{L}(E, c_0)$ transforma los conjuntos de la clase $\mathcal{W}_m(E)$ en conjuntos relativamente compactos de c_0.*

Proposición IV.11 *Dados m y E, son equivalentes:*

1. $\mathcal{R}_m(E) = \mathcal{L}^*(E)$.

2. *Todo operador $T \in \mathcal{L}(E, c_0)$ transforma los subconjuntos τ_m-Rosenthal de E en subconjuntos relativamente compactos de c_0.*

3. *Para cada $k \in \mathbb{N}$, todo polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE, c_0)$ transforma los subconjuntos τ_m-Rosenthal de E en subconjuntos relativamente compactos de c_0.*

Demostración. Consideremos un operador $T \in \mathcal{L}(E, c_0)$ y un conjunto $A \in \mathcal{R}_m(E)$; si 1 es cierto, $A \in \mathcal{L}^*(E)$ y, por la proposición III.20, T lo transforma en un relativamente compacto. Recíprocamente, dado $A \in \mathcal{R}_m(E)$ y suponiendo válido 2, todo $T \in \mathcal{L}(E, c_0)$ lo transforma en un relativamente compacto, por lo que A debe ser limitado (Prop. III.20). La equivalencia con 3 se prueba de igual forma, teniendo en cuenta que los conjuntos limitados de E son precisamente los que son transformados en conjuntos relativamente compactos por cualquier elemento en $\mathcal{P}(^mE, c_0)$, para m arbitrario (T.III.24). El caso $k = m$ en 3 se lee como:

$$\mathcal{P}(^mE, c_0) = \mathcal{P}_{DP}(^mE, c_0).$$

□

Proposición IV.12 *Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita y cumple la propiedad $\mathcal{P}(^mE, c_0) = \mathcal{P}_{DP}(^mE, c_0)$, entonces $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1.*

Demostración. Si suponemos que $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no contiene como subespacio a ℓ_1 debe suceder $\mathcal{B}(E) = \mathcal{R}_m(E)$ (T. IV.5); el imponer además que se cumpla la propiedad $\mathcal{R}_m(E) = \mathcal{L}^*(E)$ (equivalencia 1 en la proposición anterior) establece que todos los conjuntos acotados de E son limitados, pero esto sólo es posible en espacios de dimensión finita (T. Josefson-Nissenzweig, C.XII [17]). □

Veremos a continuación que la equivalencia 2 en la proposición IV.11 permite probar que la propiedad se preserva por sumas finitas. Probaremos que se preserva también bajo ciertas sumas ℓ_p, que se definen del siguiente modo:

$E = (\sum \oplus E_n)_{\ell_p}$ es, por defnición, el espacio de sucesiones $x = (x_n)$ tales que $x_n \in E_n$ para cada n y $\|x\|_p^p = \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p$ es finito. $\|x\|_p$ es la norma en el espacio. Denotaremos i_n (resp. π_n) a la inclusión canónica de E_n en E (resp. a la proyección canónica de E en E_n).

Proposición IV.13 *Si $(E_n)_n$ es una sucesión de espacios de Banach que satisfacen la propiedad $P(\mathcal{R}_m, \mathcal{L}^*)$ y $1 \le p \le m$, la cumple también el espacio $E = (\sum \bigoplus E_n)_{\ell_p}$.*

Demostración. Dado $T \in \mathcal{L}(E, c_0)$ construimos la sucesión de operadores $\{T_n\}_n$ asociada, definida como $T_n = T \circ i_n \in \mathcal{L}(E_n, c_0)$ para cada n. Por hipótesis, cada T_n transforma los conjuntos de la clase $\mathcal{R}_m(E_n)$ en conjuntos relativamente compactos de c_0 (equivalencia 2 de la proposición IV.11). Cuando la sucesión de espacios es finita ($\forall n > N,\ E_n = \{0\}$) y $A \in \mathcal{R}_m(E)$, $T(A) \in \mathcal{K}(c_0)$ y por lo tanto queda probada la proposición.

En el caso general, si suponemos que para cada conjunto $A \in \mathcal{R}_m(E)$ se cumple

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in A} \| \sum_{n=1}^{j} T_n(\pi_n(x)) - T(x)\| = 0, \tag{IV.1}$$

para cada $\epsilon > 0$ existe j_0 de modo que

$$T(A) \subset \sum_{n=1}^{j_0} T_n(\pi_n(A)) + \epsilon \mathcal{B}_E.$$

Como $\sum_{n=1}^{j_0} T_n(\pi_n(A))$ es un conjunto relativamente compacto podemos asegurar gracias al lema III.61, que $T(A)$ también lo es y habremos concluido.

Queda por verificar entonces, que se cumple la condición (IV.1). El lema 1.3 de [10] asegura que el conjunto acotado A cumple la condición (IV.1) si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x\in A} \sum_{n>n_\epsilon} \|\pi_n(x)\|^p < \epsilon.$$

Supongamos que el conjunto $A \in \mathcal{R}_m(E)$ no la cumple; existen entonces $\epsilon > 0$, $\{k_j\}_j \subset \mathbb{N}$ y $\{x_j\}_j \subset E$ de modo que

$$\sum_{n=k_j+1}^{k_{j+1}} \|\pi_n(x_j)\|^p > \epsilon. \tag{IV.2}$$

Consideremos para cada $j \in \mathbb{N}$ y cada $n \in \{k_j + 1, \ldots, k_{j+1}\}$ un funcional $x^*_{n,j} \in \mathcal{B}_{E_n^*}$ tal que $|x^*_{n,j}(\pi_n(x_j))| = \|\pi_n(x_j)\|$, la sucesión de índices $m_j = k_{j+1} - k_j$ y el operador

$$\begin{array}{rcl} S : E & \longrightarrow & (\sum \oplus \ell_p^{m_j})_{\ell_p} \\ x & \mapsto & \{(x^*_{n,j})(\pi_n(x))_{n=k_j+1,\ldots,k_{j+1}}\}_j. \end{array}$$

Es continuo puesto que

$$\|S(x)\|^p = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=k_j+1}^{k_{j+1}} |x^*_{n,j}(\pi_n(x))|^p = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=k_j+1}^{k_{j+1}} \|\pi_n(x)\|^p \le \|x\|^p.$$

Como los conjuntos $\mathcal{R}_m$ se preservan bajo operadores lineales, $S(A)$ pertenece a la clase $\mathcal{R}_m((\sum \oplus \ell_p^{m_j})_{\ell_p})$. Los espacios $(\sum \oplus \ell_p^{m_j})_{\ell_p}$ y ℓ_p son isomorfos (2.a.12 [41]) y por consiguiente $S(A)$ es un conjunto relativamente compacto de ℓ_p (siempre que $p \leq m$, $\mathcal{R}_m(\ell_p) = \mathcal{K}(\ell_p)$: Cor.3.9 [9]). Sin embargo, los conjuntos relativamente compactos de ℓ_p son precisamente los conjuntos K que verifican

$$\lim_{i\to\infty} \sup\{\sum_{n=i}^{\infty} |a_n|^p,\ x = (a_n) \in K\} = 0,$$

por lo que $\lim_i \sup_{x\in A}\{\sum_{j=i}^{\infty} \sum_{n=k_j}^{k_{j+1}} |x_{n,j}^*(x)|^p\} = 0$, lo que contradice a (IV.2), pues

$$\|S(x_j)\|^p = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=k_j}^{k_{j+1}} \|\pi_n(x_j)\|^p \quad \text{y} \quad \{x_j\}_j \subset A.$$

Observación IV.14 El espacio $E = (\sum \bigoplus E_n)_{c_0}$ contiene a c_0 de forma complementada; como c_0 no cumple la propiedad $\mathcal{R}_m = \mathcal{L}^*$ (ver la sección 3.3), tampoco E.

Ejemplos de espacios en relación a la propiedad $\mathcal{P}(\mathcal{R}_m, \mathcal{L}^*)$

1. El espacio ℓ_p, para $1 < p < \infty$ tiene la propiedad $\mathcal{P}(^m E, c_0) = \mathcal{P}_{DP}(^m E, c_0)$ si y sólo si $p \leq m < \infty$. En efecto, si $1 < p \leq m < \infty$, puede verse el resultado como consecuencia del corolario 3.9 de [9], donde se prueba $\mathcal{K}(\ell_p) = \mathcal{V}_m^*(\ell_p)$; claramente entonces $\mathcal{L}^*(\ell_p) = \mathcal{R}_m(\ell_p)$.

   Si $p > m$ el espacio $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m \ell_p$ es reflexivo, lo que implica en particular, que no contiene copias de ℓ_1; la proposición IV.12 asegura entonces que el espacio ℓ_p no tiene la propiedad.

2. Para todo $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(^m \ell_1, c_0) = \mathcal{P}_{DP}(^m \ell_1, c_0)$: consideremos una sucesión $\{x_n\} \in \mathcal{R}_m(E)$. Como ℓ_1 tiene la propiedad de Dunford-Pettis, tiene la propiedad m-SCP para todo m (Prop. III.50) y por tanto $\mathcal{R}_m(\ell_1) = \mathcal{R}(\ell_1) = \mathcal{K}(\ell_1)$. Se deduce entonces que $\mathcal{R}_m(\ell_1) = \mathcal{L}^*(\ell_1)$. La misma demostración sirve para probar el resultado para cualquier espacio de Schur E.

3. El espacio ℓ_∞ y cualquier otro espacio con la propiedad de Grothendieck y la propiedad de Dunford-Pettis tiene la propiedad $\boldsymbol{P}(\mathcal{R}_m, \mathcal{L}^*)$, pues $\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{DP}(E)$ (III.54) y $\mathcal{R}_m(E) = \mathcal{R}(E) = \mathcal{DP}(E)$ (*IV.17*).

IV.3 Propiedad de Dunford-Pettis polinomial

Se han estudiados ampliamente diversas generalizaciones al contexto de los polinomios, de la propiedad de Dunford-Pettis. Por ejemplo, en [45] se introduce, y se prueba en [49], que un espacio tiene la propiedad de Dunford-Pettis si y sólo si tiene la propiedad polinomial de Dunford-Pettis -en este caso definida como: "*E tiene la propiedad DP polinomial si todo polinomio débilmente compacto de E en cualquier espacio de Banach F transforma las sucesiones débiles de Cauchy en sucesiones convergentes*"-. En [26] se define la propiedad $\mathcal{P}_N$-Dunford-Pettis y se establecen, como en [6] diferentes caracterizaciones de la misma. En [38] se estudian distintas formas de la propiedad de Dunford-Pettis relacionadas con tipos distintos de convergencia secuencial, entre las cuales se incluyen las dos anteriores.

En este trabajo definimos la propiedad de Dunford-Pettis polinomial de grado m de un modo distinto: estudiamos la propiedad que resulta del desarrollo general expuesto en los capítulos anteriores. Esta definición no coincide en principio, con ninguna de las citadas. Por ejemplo, en [38] se parte de sucesiones convergentes en la topología y no de sucesiones de Cauchy y se exige también la condición '*$x_n \to_\tau x$ si y sólo si $x_n - x \to_\tau 0$*'.

En [18] puede verse una amplia exposición de la propiedad de Dunford-Pettis (lineal).

Definición IV.15 *El espacio de Banach E tiene la propiedad m-Dunford-Pettis (m-DP) si para todo espacio de Banach F, cada polinomio débilmente compacto de $\mathcal{P}(^m E, F)$ transforma las sucesiones τ_m de Cauchy en sucesiones convergentes en norma.*

Con la notación de la definición II.15, la propiedad *m-DP* corresponde, para todo F, a

$$\mathcal{P}_{wc}(^m E, F) \subset \mathcal{P}_{DP}(^m E, F).$$

Teorema IV.16 *Sea E un espacio de Banach y $m, k \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:*

1. *E tiene la propiedad m-DP.*
2. *Para cada espacio de Banach F, cada polinomio débilmente compacto, $P \in \mathcal{P}_{wc}(^k E, F)$ transforma las sucesiones τ_m de Cauchy en E, en sucesiones convergentes de F.*
3. *Cada polinomio débilmente compacto $P \in \mathcal{P}_{wc}(^k E, c_0)$ transforma las sucesiones τ_m de Cauchy en E, en sucesiones convergentes de c_0.*
4. *$\mathcal{R}_m(E) = \mathcal{DP}(E)$.*

Demostración. Estas equivalencias son consecuencia de resultados ya probados en el capítulo anterior: 1 y 3 son casos particulares de 2 por lo que las implicaciones 2⇒1 y 2⇒3 son claras.
Veamos 4⇒2: consideremos un polinomio $P \in \mathcal{P}_{wc}({}^kE, F)$ y una sucesión $\{x_n\}_n$ de Cauchy en E_{τ_m}. La hipótesis 4 asegura que la sucesión determina un conjunto de Dunford-Pettis y por tanto es transformada por P en un conjunto relativamente compacto (T. III.29).
Las implicaciones 3⇒4 y 1⇒4 son consecuencia también del teorema III.29 pues 3 asegura que cada polinomio en $\mathcal{P}_{wc}({}^kE, c_0)$ (resp. $\mathcal{P}_{wc}({}^mE, F)$) transforma los conjuntos de la clase $\mathcal{R}_m(E)$ en conjuntos relativamente compactos, que son precisamente dos de las caracterizaciones de los conjuntos de Dunford-Pettis. □

Corolario IV.17 *Sea E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:*

1. *E tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*
2. *E tiene las propiedades m-DP y m-SCP.*

Demostración. En cualquier espacio de Banach se cumplen las relaciones

$$\mathcal{D}P(E) \subset \mathcal{R}_m(E) \subset \mathcal{R}(E), \tag{IV.3}$$

(Sección 3.3) por lo que suponiendo 1 ($\mathcal{D}P(E) = \mathcal{R}(E)$), se establecen en E las relaciones

$$\mathcal{D}P(E) = \mathcal{R}_m(E) = \mathcal{R}(E)$$

de donde se obtiene la equivalencia 4 de la propiedad m-DP (T.IV.16). La igualdad $\mathcal{R}(E) = \mathcal{R}_m(E)$ no es, en principio equivalente a la propiedad de continuidad secuencial de grado m, pero en la sección de conjuntos de Dunford-Pettis (Prop. III.30) probamos que siempre se cumple $\mathcal{D}P(E) \cap \mathcal{W}(E) \subset \tau_m(E)$, donde $\tau_m(E)$ denota a los conjuntos relativamente compactos de E_{τ_m}, por lo que se deduce que $\mathcal{W}(E) = \tau_m(E)$, y por consiguiente se cumple la propiedad m-SCP.
La implicación contraria se prueba con del mismo esquema (IV.3), teniendo en cuenta que la propiedad m-SCP implica siempre $\mathcal{R}_m(E) = \mathcal{R}(E)$. □

Observación IV.18 El corolario anterior permite probar que la propiedad de aproximación en el espacio, no es una condición necesaria para que el conjunto diagonal sea secuencialmente cerrado en la topología débil del espacio tensor (ver Obs. III.8): existe un subespacio F de c_0 que no cumple la propiedad de aproximación (2.d.6 [41]) y sin embargo $\theta_m(F)$ es débilmente secuencialmente cerrado, pues F tiene la propiedad de Dunford-Pettis (como todos los subespacios de c_0) y por tanto la propiedad m-SCP para todo $m \in \mathbb{N}$.

Corolario IV.19 *Dados $m \in \mathbb{N}$ y E un espacio de Banach con la propiedad m-DP, $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ es reflexivo si y sólo si E es de dimensión finita.*

Demostración. El espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ es reflexivo si y sólo si para cada espacio de Banach F, $\mathcal{P}({}^mE, F) = \mathcal{P}_{wc}({}^mE, F)$ (T. III.13). Como no contiene copias de ℓ_1 se cumple también $\mathcal{P}_{DP}({}^mE, F) = \mathcal{P}_{co}({}^mE, F)$ (T.IV.5). Bajo la hipótesis de la propiedad m-DP debería cumplirse $\mathcal{P}({}^mE, F) \subset \mathcal{P}_{co}({}^mE, F)$, pero esto es posible sólo si E es de dimensión finita (ver II.30). Todo espacio de dimensión finita es reflexivo, por lo que el recíproco es claramente cierto. □

El caso $k = 1$ en el teorema anterior determina una caracterización de la propiedad m-DP en términos de operadores lineales. Veremos a continuación que esto permite probar (como sucedía con la propiedad $\boldsymbol{P}(\mathcal{R}_m, \mathcal{L}^*)$, IV.13) la estabilidad de la propiedad bajo productos finitos y bajo ciertas sumas infinitas. La demostración se lleva a cabo como en [6], si bien la propiedad m-DP y la que los autores introducen no son la misma.

Proposición IV.20 *Si $(E_n)_n$ es una sucesión de espacios de Banach que satisfacen la propiedad m-DP, la cumplen también los espacios $(\sum \oplus E_n)_{c_0}$ y $(\sum \oplus E_n)_{\ell_p}$, $1 \le p \le m$.*

Demostración. $(\sum \oplus E_n)_{\ell_p}$, $\|x\|$ y T_n se definen como en la proposición IV.13. Dado $T \in \mathcal{L}_{wc}(E, c_0)$ construimos la sucesión de operadores $\{T_n\}_n$ asociada, definida como $T_n = T \circ i_n \in \mathcal{L}_{wc}(E_n, c_0)$ para cada n. Por hipótesis, cada T_n transforma los conjuntos $\mathcal{R}_m(E_n)$ en conjuntos relativamente compactos de c_0 (equivalencia 3 del teorema IV.16 cuando $k = 1$). Si la sucesión de espacios es finita ($\forall n > N$, $E_n = \{0\}$) y $A \in \mathcal{R}_m(E)$, claramente $T(A) \in \mathcal{K}(c_0)$ y por tanto queda probada la proposición.
La prueba del caso general es análoga a al que aparece en la proposición IV.13: se trata de garantizar que cada conjunto $A \in \mathcal{R}_m(E)$ cumpla

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in A} \left\| \sum_{n=1}^{j} T_n(\pi_n(x)) - T(x) \right\| = 0, \tag{IV.4}$$

obteniendo entonces que para cada $\epsilon > 0$ existe j_0 de modo que

$$T(A) \subset \sum_{n=1}^{j_0} T_n(\pi_n(A)) + \epsilon \mathcal{B}_E.$$

Como $\sum_{n=1}^{j_0} T_n(\pi_n(A))$ es un conjunto relativamente compacto, $T(A)$ también lo es (Lema III.61) y se habrá concluido. La verificación de que se cumple dicha condición es la misma que la dada en IV.13.

Probemos ahora la propiedad para $E = (\sum \oplus E_n)_{c_0}$, donde T, T_n, i_n y π_n son como antes. El operador T es débilmente compacto y por tanto es también incondicionalmente convergente; el teorema 1.7 [10] asegura entonces, que se cumple la condición (IV.4) con $A = B_E$ (es decir, es el límite en la norma de los operadores). Con el mismo argumento que en el caso anterior, se obtiene que T transforma los conjuntos $\mathcal{R}_m(E_n)$ en conjuntos relativamente compactos. □

Ejemplos de espacios en relación con la propiedad m-Dunford-Pettis. La propiedad $\boldsymbol{P}(\mathcal{R}_m, \mathcal{L}^*)$, estudiada en la sección anterior implica siempre a la propiedad m-DP, pues en todo espacio de Banach se cumple $\mathcal{L}^*(E) \subset \mathcal{DP}(E)$, por consiguiente los ejemplos que cumplían la propiedad $\boldsymbol{P}(\mathcal{R}_m, \mathcal{L}^*)$ dados en IV.2 verificarán también la propiedad m-DP. Además de éstos aparecen algunos otros, pues, por ejemplo, la contención de ℓ_1 en el espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ ya no es requisito.

1. Los espacios c_0, ℓ_∞, $C(K)$, $C(K, F)$ con F de Schur y K un compacto Hausdorff, tienen la propiedad de Dunford-Pettis y por tanto las propiedades m-DP y m-SCP para cada $m \in \mathbb{N}$ (Cor. IV.17).

2. Si $1 < p < \infty$ y $p < m$, el espacio ℓ_p tiene la propiedad m-DP. Como consecuencia del corolario IV.17, estos espacios no cumplen la propiedad m-SCP para p y m como antes. Si $p > m$ no tienen la propiedad m-DP puesto que $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ es un espacio reflexivo de dimensión infinita (Coro. IV.19).

3. Con el espacio de Tsirelson T^*, se puede probar que en general las clases de conjuntos $\mathcal{DP}$ y $\mathcal{R}_{pol}$ son distintas (siempre se cumple $\mathcal{DP} \subset \mathcal{R}_{pol}$), pues $\mathcal{B}(T^*) = \mathcal{R}_{pol}(T^*) = \mathcal{R}_m(T^*)$ para todo m, y sin embargo la bola unitaria no es un conjunto de Dunford-Pettis, por tratarse de un espacio reflexivo.

La propiedad m-DP aparece estrechamente relacionada con la que definiremos a continuación

IV.4 Propiedad Λ_m-Schur

En [14] se definen los Λ-espacios como aquéllos en los que las sucesiones polinomialmente convergentes a cero (para todo grado) son convergentes a cero, y en [26] se definen los espacios con la propiedad Λ_m-Schur como aquéllos en los que coinciden las sucesiones convergentes a cero en la topología $\tau_{\leq m}$ con las convergentes a cero en norma. Introduciremos a continuación una definición distinta de la

propiedad Λ_m-Schur; como en otras ocasiones, es la definición que se obtiene con el enfoque de los capítulos anteriores. Del mismo modo, las distintas definiciones coinciden en el caso lineal. La definición que presentamos a continuación da lugar de forma sencilla, a diversas caracterizaciones y relaciones con otras propiedades, pues permite hacer uso de algunos resultados fundamentales, como por ejemplo, el teorema de Rosenthal.

Definición IV.21 *El espacio de Banach E es un espacio Λ_m de Schur si cada sucesión de Cauchy en E_{τ_m} tiene una subsucesión convergente en norma.*

Diremos que el espacio es Λ-Schur si las sucesiones de Cauchy en $E_{\tau_{pol}}$ son convergentes en norma.

Observación IV.22 Con las notaciones del capítulo III, la propiedad Λ_m-Schur es $\mathcal{R}_m(E) = \mathcal{K}(E)$; a diferencia del caso $m = 1$, esta definición no coincide exáctamente con el hecho de que las sucesiones de Cauchy en E_{τ_m} sean de Cauchy en norma, debido al posible factor raíz de la unidad: se puede escoger $\{x_i\}$ una sucesión convergente en norma a $x \neq 0$ (y por tanto de Cauchy en E_{τ_m}) y $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\lambda^m = 1$ de modo que la sucesión $\{y_i\}$ definida como $y_{2i} = x_{2i}$, $y_{2i+1} = \lambda x_{2i+1}$ sea τ_m de Cauchy, pero no convergente en norma.

Para la propiedad Λ-Schur ambas definiciones coinciden, pues en particular se exige la convergencia débil, que siempre separa puntos.

Observación IV.23 En los espacios con la propiedad de Gelfand-Phillips ($\boldsymbol{P}(\mathcal{L}^*, \mathcal{K})$, como los separables, o los reflexivos) coinciden la propiedad introducida en la sección IV.2, $\boldsymbol{P}(\mathcal{R}_m, \mathcal{L}^*$ con la propiedad Λ_m-Schur:

$$\mathcal{K}(E) = \mathcal{L}^*(E) = \mathcal{R}_m(E).$$

Proposición IV.24 *Sea E un espacio de Banach y $m, k \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:*

1. *E es un espacio Λ_m-Schur.*

2. *Para todo espacio de Bananch F, cada $P \in \mathcal{P}(^kE, F)$ transforma los conjuntos $\mathcal{R}_m(E)$ en relativamente compactos.*

3. *E no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0 y cada polinomio incondicionalmente convergente $P \in \mathcal{P}_{ic}(^kE, F)$ transforma los conjuntos $\mathcal{R}_m(E)$ en relativamente compactos.*

4. *$\mathcal{B}(\mathcal{P}(^kE)) = \mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^kE))$*

Demostración. Como cualquier polinomio transforma los conjuntos relativamente compactos en conjuntos relativamente compactos, si 1 es cierto, cualquier polinomio transformará los conjuntos $\mathcal{R}_m(E)$ en relativamente compactos, lo que demuestra 2.

Para comprobar el recíproco consideremos el polinomio canónico de grado k, θ_k; por hipótesis, para cada $A \in \mathcal{R}_m(E)$, $\theta_k(A)$ es un conjunto relativamente compacto de $\hat{\otimes}^k_{s,\pi} E$ incluido en la diagonal, lo que equivale a decir que A es un conjunto relativamente compacto de E (Prop. III.6).

Supongamos ahora que se cumple la condición 2. En la observación II.23 vimos que si $P \in \mathcal{P}(^kE, F)$ transforma las sucesiones τ_m de Cauchy de E en sucesiones convergentes en norma, P es un polinomio incondicionalmente convergente. La hipótesis 2 implica entonces que todos los polinomios homogéneos de grado k son incondicionalmente convergentes y por tanto E no contiene copias de c_0 (Prop. II.34). La otra afirmación en 3 es inmediata de 2.

La proposición II.34 establece también la implicación $3 \Rightarrow 2$, pues en un espacio sin copias de c_0, todos los polinomios son incondicionalmente convergentes.

Por último comprobemos $2 \Leftrightarrow 4$: para demostrar que cada $P \in \mathcal{P}(^kE, F)$ transforma los conjuntos $\mathcal{R}_m(E)$ en relativamente compactos, por la observación IV.3 basta probar que $P^*(B_{F^*}) \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^kE))$, pero esto es claramente cierto bajo la hipótesis 4. Recíprocamente: consideremos un conjunto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{P}(^kE))$; para probar que pertenece a la clase $\mathcal{L}_m$ haremos una construcción similar a la dada en IV.5: construimos el espacio de Banach

$$B(A) = \{f : A \to \mathbb{C} \text{ continua}\} \qquad \|f\| = \sup_{q\in A}\{|f(q)|\}$$

y el polinomio

$$\begin{array}{rcl} P : E & \longrightarrow & B(A) \\ x & \longmapsto & P(x)(q) := q(x). \end{array}$$

$P \in \mathcal{P}(^kE, B(A))$, por lo que por hipótesis, debe transformar los conjuntos de la clase $\mathcal{R}_m(E)$ en conjuntos relativamente compactos. De nuevo la observación IV.3 asegura entonces que $P^*(B_{B(A)^*}) \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^kE))$. Como antes (T. IV.5), se comprueba que $A \in P^*(B_{B(A)^*})$. □

La equivalencia 2, cuando $m = k$ permite obtener la siguiente caracterización de la propiedad Λ_m-Schur:

$$E \text{ es } \Lambda_m - \text{Schur} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(^mE, F) = \mathcal{P}_{DP}(^mE, F) \quad \text{para todo } F.$$

Observemos que la propiedad Λ_m-Schur viene también dada en términos de operadores lineales definidos en el espacio (caso $k = 1$ de la proposición); con esto probaremos a continuación que es una propiedad estable por productos finitos y por ciertas sumas ℓ_p:

Corolario IV.25 *Si $(E_n)_n$ es una sucesión de espacios de Banach Λ_m- Schur, lo son también los espacios $(\sum \bigoplus E_n)_{\ell_p}$, $1 \le p \le m$.*

Demostración. El espacio $E = (\sum \oplus E_n)_{\ell_p}$ y la sucesión de operadores $\{T_n\} \in \mathcal{L}(E_n, F)$ asociada a $T \in \mathcal{L}(E, F)$, son como en la proposición IV.13. Por hipótesis sobre cada E_n, T_n transforma sucesiones de Cauchy en E_{τ_m} en sucesiones convergentes en norma (equivalencia 3 con $k = 1$, de la proposición IV.24). Si la sucesión de espacios es finita ($\forall n > N$, $E_n = \{0\}$) y $A \in \mathcal{R}_m(E)$, claramente $T(A) \in \mathcal{K}(F)$ y habremos acabado.

La prueba del caso general es también análoga a la que aparece en la proposición IV.13 pues si para cada conjunto $A \in \mathcal{R}_m(E)$ se cumple

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in A} \|\sum_{n=1}^{j} T_n(\pi_n(x)) - T(x)\| = 0,$$

para cada $\epsilon > 0$ existe j_0 de modo que

$$T(A) \subset \sum_{n=1}^{j_0} T_n(\pi_n(A)) + \epsilon \mathcal{B}_E.$$

Como $\sum_{n=1}^{j_0} T_n(\pi_n(A))$ es un conjunto relativamente compacto, $T(A)$ también lo es (Lema III.61) y se habrá concluido. La verificación de que se cumple tal condición es la dada en IV.13 □

Proposición IV.26 *Dado un espacio de Banach E y $m \in \mathbb{N}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La propiedad m-Dunford-Pettis es equivalente en E a la propiedad Λ_m-Schur.*
2. *E cumple la propiedad $\mathcal{D}P(E) = \mathcal{K}(E)$.*

Demostración. La propiedad Λ_m-Schur implica siempre a la propiedad *m-DP*:

$$\mathcal{K}(E) = \mathcal{R}_m(E) \;\Rightarrow\; \mathcal{D}P(E) = \mathcal{R}_m(E);$$

si 1 es cierto, entonces $\mathcal{D}P(E) = \mathcal{K}(E)$. Recíprocamente, si los conjuntos de Dunford-Pettis en E son relativamente compactos, la propiedad *m-DP* es precisamente $\mathcal{K}(E) = \mathcal{D}P(E) = \mathcal{R}_m(E)$. □

Observación IV.27 Hemos puesto esta demostración del corolario IV.25, porque no requiere ya de ningún desarrollo distinto a los vistos hasta ahora, si bien es posible concluir el resultado utilizando la proposición 14 en [24] (en donde se prueba que la propiedad $\mathcal{K}(E) = \mathcal{DP}(E)$ es estable bajo sumas con norma ℓ_p) y las proposiciones IV.20 y IV.26 anteriores.

Como corolario de la proposición se obtiene un resultado análogo al que se demuestra en [26] y [6], para las respectivas definiciones de Λ_m-Schur que ahí se proponen:

Corolario IV.28 *Sea E un espacio de Banach Λ-Schur y $m \in \mathbb{N}$. E es Λ_m de Schur si y sólo si tiene la propiedad m-DP.*

Demostración. Como siempre se cumple $\mathcal{DP}(E) \subset \mathcal{R}_{pol}(E)$ (Prop: III.30), si E es Λ-Schur, se verifican las relaciones $\mathcal{K}(E) = \mathcal{DP}(E) = \mathcal{R}_{pol}(E)$, y en particular 2 de la proposición anterior. □

Observación IV.29 La proposición IV.26 se puede establecer sin la exigencia de la propiedad de Gelfand-Phillips, implícita en la propiedad Λ_m-Schur:

Dado un espacio de Banach E y $m \in \mathbb{N}$, son equivalentes:

1. La propiedad *m-Dunford-Pettis* es equivalente en E a $E \in \boldsymbol{P}(\mathcal{L}^* = \mathcal{R}_m)$.
2. E cumple la propiedad $\mathcal{DP}(E) = \mathcal{L}^*(E)$.

Ejemplos de espacios Λ_m-Schur.

1. Los espacios con la propiedad de Gelfand-Phillips ($\mathcal{K}(E) = \mathcal{L}^*(E)$) y la propiedad $\mathcal{R}_m(E) = \mathcal{L}^*(E)$, como los espacios ℓ_p, para $1 < p \leq m < \infty$. Estos mismos espacios no van a cumplir la propiedad con los índices complementarios, pues no cumplían la propiedad más débil $\mathcal{R}_m(E) = \mathcal{L}^*(E)$.
2. El espacio ℓ_∞ distingue las propiedades Λ_m-Schur y $\boldsymbol{P}(\mathcal{R}_m, \mathcal{L}^*)$: no es un espacio Λ_m-Schur puesto que $\mathcal{K}(\ell_\infty) \subsetneq \mathcal{L}^*(\ell_\infty)$ y en IV.2 vimos que sí cumple la propiedad $\boldsymbol{P}(\mathcal{R}_m, \mathcal{L}^*)$ (y por tanto la propiedad *m-DP*).

Observación IV.30 Si $m > 1$, la propiedad Λ_m-Schur en un espacio E no implica que el espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ sea de Schur; puede verse, por ejemplo, con el espacio ℓ_p, $1 < p < m$. Como $\hat{\otimes}^m_{s,\pi}\ell_p$ contiene a ℓ_p, claramente no es un espacio de Schur y sin embargo ℓ_p sí es Λ_m-Schur.

Teorema IV.31 *Sea E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:*

1. *E^* es un espacio de Schur.*
2. *$(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E)^*$ es un espacio de Schur.*
3. *$\mathcal{DP}(E) = \mathcal{B}(E)$.*
4. *Para todo espacio de Banach F, $\mathcal{P}_{wc}(^m E, F) = \mathcal{P}_{co}(^m E, F)$.*
5. *$\mathcal{P}_{wc}(^m E, c_0) = \mathcal{P}_{co}(^m E, c_0)$.*
6. *E tiene la propiedad m-Dunford-Pettis y el espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no contiene copias de ℓ_1.*

Demostración. La equivalencia entre 1 y 3 es bien conocida (ver p.ej. [8]), así como el teorema en el caso $m = 1$.

De los resultados vistos en la sección de conjuntos del capítulo anterior se extrae fácilmente la equivalencia entre 3 y 6 pues en todo espacio de Banach se cumple $\mathcal{DP}(E) \subset \mathcal{R}_m(E) \subset \mathcal{B}(E)$ (Prop. III.30); la igualdad $\mathcal{DP}(E) = \mathcal{R}_m(E)$ es cierta si y sólo si E tiene la propiedad m-DP (T. IV.16); y la igualdad $\mathcal{R}_m(E) = \mathcal{B}(E)$ lo es si y sólo si $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no contiene copias de ℓ_1.

Por la observación II.19, la afirmación 4 (resp.5) es equivalente a que para todo F, $\mathcal{L}_{wc}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, F) = \mathcal{L}_{co}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, F)$ para cualquier F (resp. $\mathcal{L}_{wc}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, c_0) = \mathcal{L}_{co}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, c_0)$) y por tanto equivalente a que el espacio $(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E)^*$ sea de Schur.

Para completar la demostración bastará probar la equivalencia entre 6 y 5: las hipótesis de 6 son precisamente:

$$\mathcal{P}_{co}(^m E, c_0) = \mathcal{P}_{DP}(^m E, c_0) \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_{wc}(^m E, c_0) \subset \mathcal{P}_{DP}(^m E, c_0),$$

lo que implica claramente $\mathcal{P}_{co}(^m E, c_0) = \mathcal{P}_{wc}(^m E, c_0)$.

Por el contrario, si suponemos que se satisface 5, debe cumplirse

$$\mathcal{L}_{wc}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, c_0) = \mathcal{L}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, c_0);$$

utilizando la caracterización (conocida para el caso lineal) al espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$, se obtiene que $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no contiene copias de ℓ_1 y cumple la propiedad de Dunford-Pettis. Como E es un subespacio complementado de $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$, E tiene también la propiedad de Dunford-Pettis y en particular, la propiedad *m-DP* (IV.17). □

Corolario IV.32 *Si E es un espacio de Banach de modo que su espacio dual E^* es un espacio de Schur, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, el espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

IV.5 Propiedad recíproca de Dunford-Pettis polinomial

La propiedad recíproca de Dunford-Pettis ($m = 1$ en la siguiente definición) se introduce y estudia en [39].

Definición IV.33 *El espacio de Banach E tiene la propiedad recíproca de Dunford-Pettis de grado m (m-RDP) si para cada F, cada $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ que transforma las sucesiones τ_m de Cauchy en sucesiones convergentes, es débilmente compacto:*

$$\text{Para todo } F \quad \mathcal{P}_{DP}(^mE, F) \subset \mathcal{P}_{wc}(^mE, F).$$

Esta propiedad aparece caracterizada a través de los conjuntos $\mathcal{L}_m$ introducidos al inicio del capítulo:

$A \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^mE))$ si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}$ de Cauchy en E_{τ_m},

$$\lim_{n,k} \sup\{|q(x_n) - q(x_k)|;\ q \in A\} = 0.$$

Teorema IV.34 *Para E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$, son equivalentes:*

1. *E tiene la propiedad m-RDP.*
2. *Los conjuntos $\mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^mE))$ son relativamente débilmente compactos.*

$$\mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^mE)) \subset \mathcal{W}(\mathcal{P}(^mE)).$$

Demostración. Es una prueba similar a la establecida en una de las equivalencias del teorema IV.5: recordemos que si $P \in \mathcal{P}_{DP}(^mE, F)$ entonces $P^*(B_{F^*}) \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^mE))$; la afirmación 2 implica entonces que P^* es un operador débilmente compacto y por lo tanto P es un polinomio débilmente compacto.

Para probar la implicación contraria utilizaremos el mismo polinomio de Dunford-Pettis construido en la demostración del teorema IV.5 para cada uno de los conjuntos de la clase $\mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^mE))$: Dado $A \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P}(^mE))$ y el espacio de Banach

$$B(A) = \{f : A \to \mathbb{C} \ \text{ continua}\}, \quad \|f\| = \sup_{q\in A}\{|f(q)|\}$$

el polinomio

$$\begin{array}{rcl} P : E & \longrightarrow & B(A) \\ x & \longmapsto & P(x)(q) := q(x) \end{array}$$

define un elemento de $\mathcal{P}_{DP}(^mE, F)$ (ver IV.5). Si suponemos cierto 1, P es débilmente compacto y por lo tanto el conjunto $P^*(B_{B(A)^*})$ es relativamente débilmente compacto en $\mathcal{P}(^mE)$. De modo similar al utilizado en IV.5 se prueba que que A está en el conjunto imagen de P^* y por lo tanto es un conjunto débilmente compacto. □

Proposición IV.35 *Sea E un espacio con la propiedad m-RDP y F un espacio cociente de E. Entonces F tiene la propiedad m-RDP*

Demostración. Consideremos un espacio de Banach G y un polinomio $P \in \mathcal{P}_{DP}(^mF, G)$. Si $\pi : E \to F$ es una aplicación cociente, por formar los polinomios de Dunford-Pettis un módulo, debe cumplirse $P \circ \pi \in \mathcal{P}_{DP}(^mE, G)$ y por lo tanto $P \circ \pi \in \mathcal{P}_{wc}(^mE, G)$, es decir, $P(\pi(B_E))$ es un conjunto relativamente compacto de G. Como π es una aplicación suprayectiva se debe cumplir también $P(B_F) \in \mathcal{W}(G)$ y por lo tanto P es débilmente compacto. □.

Proposición IV.36 *Si $m \in \mathbb{N}$ y el espacio de Banach F es un espacio de Schur, entonces para cada espacio de Banach E,*

$$\mathcal{P}(^mE, F) = \mathcal{P}_{DP}(^mE, F) \quad y \quad \mathcal{P}_{wc}(^mE, F) = \mathcal{P}_{co}(^mE, F).$$

Demostración. Consideremos un polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ y una sucesión $\{x_n\}_n \subset E$ τ_m de Cauchy. Por el corolario I.29, la sucesión $\{P(x_n)\}_n$ es débil de Cauchy en F. Por tratarse de un espacio de Schur, la sucesión es entonces convergente en norma, con lo que queda probado que P es un polinomio de Dunford-Pettis.

Para comprobar la otra relación basta recordar que si F es de Schur, los conjuntos relativamente débilmente compactos y los relativamente compactos coinciden, $\mathcal{W}(F) = \mathcal{K}(F)$ y por tanto, si $P(B_E) \in \mathcal{W}(F)$, también $P(B_E) \in \mathcal{K}(F)$. □

Corolario IV.37 *Sea $m \in \mathbb{N}$ y E un espacio de Banach con la propiedad recíproca de Dunford-Pettis, de grado m (m-RDP). Para cada espacio de Schur F se cumple*

$$\mathcal{P}(^mE, F) = \mathcal{P}_{co}(^mE, F).$$

Demostración. Bajo la hipótesis de que E cumple la propiedad *m-RDP*, todo polinomio de Dunford-Pettis es débilmente compacto. La conclusión es inmediata, de la proposición anterior. □

Proposición IV.38 *Si $m > 1$ y el espacio de Banach E contiene una copia de ℓ_1, entonces E no tiene la propiedad m-RDP.*

Demostración. En la proposición III.41 se prueba que si el espacio de Banach E contiene al espacio de Schur ℓ_1, para cada $m > 1$, $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ lo contiene de forma complementada; consideremos entonces un operador proyección $T \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, \ell_1)$ y su polinomio asociado $P_T \in \mathcal{P}(^m E, \ell_1)$. Si suponemos que E tiene la propiedad *m-RDP*, el corolario IV.37 establece que P_T y por tanto T, es compacto, lo que claramente es una contradicción pues T es una proyección sobre un espacio de dimensión infinita. □

Proposición IV.39 *Sea E un espacio de Banach con la propiedad m-RDP. Entonces los espacios de Banach $\hat{\otimes}^k_{s,\pi} E$ para $k = 1, \ldots, m$, tienen la propiedad recíprpoca de Dunford-Pettis, RDP.*

Demostración. Probaremos que el espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ tiene la propiedad RDP; como el espacio contiene de forma complementada a los espacios $\hat{\otimes}^k_{s,\pi} E$, $k = 1, \ldots, m$, quedará probado el resultado. Sea $T \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E, F)$ un operador de Dunford-Pettis. En el lema IV.4 probamos que su polinomio asociado $P_T \in \mathcal{P}(^m E, F)$ es de Dunford-Pettis. Bajo la hipótesis de la propiedad *m-RDP*, P_T es un polinomio débilmente compacto y por tanto T debe ser un operador débilmente compacto (Obs. II.19). □.

Proposición IV.40 *Sea E un espacio de Banach Λ_m-Schur. Si E tiene la propiedad m-RDP, entonces es de dimensión finita.*

Demostración. Vimos en la proposición IV.24 que si E es Λ_m-Schur, entonces todos los polinomios homogéneos de grado m definidos en él, son de Dunford-Pettis. Por tanto si el espacio tiene la propiedad *m-RDP*, todos los polinomios son débilmente compactos y en consecuencia el espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ es reflexivo (T. III.13), lo que es absurdo pues por ser E un espacio Λ_m-Schur, $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ contiene a ℓ_1 como subespacio (los espacios Λ_m-Schur cumplen las hipótesis de la proposición IV.12).

Ejemplos de espacios con la propiedad *m-RDP*

1. Si $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ es reflexivo, el espacio E tiene la propiedad *m-RDP*, puesto que para todo F,
$$\mathcal{P}(^m E, F) = \mathcal{P}_{wc}(^m E, F).$$
En este ejemplo se incluyen el espacio de Tsirelson T^* y ℓ_p para $p > m$.

2. Todo espacio E tal que $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no contiene copias de ℓ_1, como los del caso anterior y los descritos en III.18, entre los que se incluyen $\mathcal{J}_p$ $(p > m)$ y c_0, puesto que se cumple
$$\mathcal{P}_{co}(^m E, F) = \mathcal{P}_{DP}(^m E, F).$$

3. Los espacios en los que los polinomios de Dieudonné son débilmente compactos, como los espacios con la propiedad *m-V* (ver Def. V.6).

Capítulo V

Propiedades relativas a los polinomios incondicionalmente convergentes

Iniciaremos este capítulo demostrando uno de los resultados fundamentales acerca de los polinomios incondicionalmente convergentes, el teorema V.5, que utilizamos como lema en el capítulo II (Lema II.22). Para ello introducimos la siguiente clase de subconjuntos en los espacios de polinomios $\mathcal{P}(^mE) \equiv (\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E)^*$ y algunas de sus propiedades:

Definición V.1 *Dado un subconjunto A de $\mathcal{P}(^mE)$, decimos que A pertenece a la clase $\mathcal{V}_m(\mathcal{P}(^mE))$ si para cada serie d.i.C en E, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$,*

$$\lim_{n,k} \sup\{|q(\sum_{i=1}^{n} x_i) - q(\sum_{i=1}^{k} x_i)|; q \in A\} = 0.$$

Proposición V.2 *Dados E y F espacios de Banach y $m \in \mathbb{N}$, son equivalentes:*

1. *$P \in \mathcal{P}_{ic}(^mE, F)$.*

2. *El operador adjunto $P^* : F^* \to \mathcal{P}(^mE)$ definido como $P^*(f^*) = f^* \circ P$ cumple $P^*(B_{F^*}) \in \mathcal{V}_m(\mathcal{P}(^mE))$.*

Demostración. Consideremos una serie $\sum x_i$ débilmente incondicionalmente de Cauchy en E y un polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE,F)$. De las igualdades

$$\begin{aligned}\|P(\sum_{i=1}^{k} x_i) - P(\sum_{i=1}^{n} x_i)\| &= \sup_{f^*\in B_{F^*}} \{|f^*(P(\sum_{i=1}^{k} x_i) - P(\sum_{i=1}^{n} x_i))|\}\\ &= \sup_{f^*\in B_{F^*}} \{|P^*(f^*)(\sum_{i=1}^{k} x_i) - P^*(f^*)(\sum_{i=1}^{n} x_i)|\}\\ &= \sup_{q\in P^*(B_{F^*})} \{|q(\sum_{i=1}^{k} x_i) - q(\sum_{i=1}^{n} x_i)|\}\end{aligned}$$

se deduce claramente que al tomar límites se obtendrá

$$\lim_{k,n} \|P(\sum_{i=1}^{k} x_i) - P(\sum_{i=1}^{n} x_i)\| = 0$$

para cada serie d.i.C $\sum x_i$, si y sólo si $P^*(B_{F^*}) \in \mathcal{V}_m(\mathcal{P}(^mE))$. □

Proposición V.3 *Todo conjunto relativamente débilmente compacto A de $\mathcal{P}(^mE)$ es un conjunto de la clase $\mathcal{V}_m(\mathcal{P}(^mE))$.*

Demostración. Supongamos que A es relativamente débilmente compacto pero no pertenece a $\mathcal{V}_m(\mathcal{P}(^mE))$. Existe una serie d.i.C en E, $\sum x_i$, para la cual

$$\lim_{n,k} \sup\{|q(\sum_{i=1}^{n} x_i) - q(\sum_{i=1}^{k} x_i)|; q \in A\} \neq 0. \tag{V.1}$$

Consideremos el operador lineal y continuo $T \in \mathcal{L}(c_0,E)$ tal que $T(e_i) = x_i$ para cada i, donde $\{e_i\}_i$ es la base canónica de c_0. Componiendo T con el polinomio canónico en E, θ_m se obtiene un polinomio $P \in \mathcal{P}(^mc_0, \hat{\otimes}^m_{s,\pi}E)$

$$\begin{array}{ccccc} P: c_0 & \xrightarrow{T} & E & \xrightarrow{\theta_m} & \hat{\otimes}^m_{s,\pi}E\\ \sum a_ie_i & \mapsto & \sum a_ix_i & \mapsto & \theta_m(\sum a_ix_i)\end{array}$$

cuyo operador conjugado es

$$\begin{array}{ccc} P^*: (\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E)^* & \longrightarrow & \mathcal{P}(^mc_0)\\ \hat{q} & \longmapsto & \hat{q}\circ P.\end{array}$$

Como A es relativamente débilmente compacto, su imagen por P^* es también un conjunto relativamente débilmente compacto de $\mathcal{P}(^mc_0)$. El teorema IV.31

prueba que $(\hat{\otimes}^m_{s,\pi}c_0)^* \equiv \mathcal{P}(^mc_0)$ es un espacio de Schur, puesto que $c_0^* = \ell_1$ lo es y por lo tanto el conjunto $P^*(A)$ es relativamente compacto en $\mathcal{P}(^mc_0)$. Por otro lado, la condición (V.1) asegura la existencia de un $\epsilon > 0$ y sucesiones $\{n_j\}_j, \{k_j\}_j \in \mathbb{N}, \{q_j\}_j \in A$ tales que para todo j

$$\begin{aligned}&|P^*(\hat{q}_j)(\sum_{i=1}^{n_j} e_i) - P^*(\hat{q}_j)(\sum_{i=1}^{k_j} e_i)| =\\ &\qquad |q_j\circ T(\sum_{i=1}^{n_j} e_i) - q_j\circ T(\sum_{i=1}^{k_j} e_i)| = |q_j(\sum_{i=1}^{n_j} x_i) - q_j(\sum_{i=1}^{k_j} x_i)| > \epsilon.\end{aligned}$$

Por ser $\{P^*(\hat{q}_j)\}_j$ un conjunto relativamente compacto, admite una subsucesión (que denotamos igual) convergente a cierto $p_0 \in \mathcal{P}(^mc_0)$. En el lema I.45 probamos que las sucesiones de sumas parciales asociadas a las series d.i.C son polinomialmente de Cauchy; en consecuencia existe J tal que para todo $j > J$

$$\begin{aligned}&|q_j(T(\sum_{i=1}^{n_j} e_i)) - q_j(T(\sum_{i=1}^{k_j} e_i))| \le |q_j(T(\sum_{i=1}^{n_j} e_i)) - p_0(\sum_{i=1}^{n_j} e_i)| +\\ &\qquad |p_0(\sum_{i=1}^{n_j} e_i) - p_0(\sum_{i=1}^{k_j} e_i)| + |p_0(\sum_{i=1}^{k_j} e_i)) - q_j(T(\sum_{i=1}^{k_j} e_i))| < \epsilon\end{aligned}$$

lo que resulta ser una contradicción. □

Observación V.4 En la demostración anterior se utiliza el que A sea un conjunto relativamente débilmente compacto para asegurar que $P^*(A) \in \mathcal{W}(\mathcal{P}(^mc_0)) = \mathcal{K}(\mathcal{P}(^mc_0))$, pero también es cierto $\mathcal{R}(\mathcal{P}(^mc_0)) = \mathcal{K}(\mathcal{P}(^mc_0))$, por lo que se puede probar de forma análoga

$$\mathcal{R}(\mathcal{P}(^mE)) \subset \mathcal{V}_m(\mathcal{P}(^mE)).$$

Teorema V.5 *Un polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE,F)$ es incondicionalmente convergente si y sólo si para toda serie d.i.C en E, $\sum x_i$, la sucesión $\{P(\sum_{i=1}^n x_i)\}_n$ es débilmente convergente en F.*

Demostración. Esta prueba se lleva a cabo con un argumento similar al de la proposición anterior: supongamos que $P \in \mathcal{P}(^mE,F)$ transforma la sucesión de sumas parciales asociada a cualquier serie d.i.C en una sucesión débilmente convergente, y que existe una serie d.i.C $\sum x_i$, de modo que $\{P(\sum_{i=1}^n x_i)\}_n$ no es convergente en norma. Se pueden encontrar entonces, $\epsilon > 0$, $\{n_j\}_j$ y $\{k_j\}_j$ tales que para todo j

$$\|P(\sum_{i=1}^{n_j} x_i) - P(\sum_{i=1}^{k_j} x_i)\| > \epsilon. \quad (*)$$

Componiendo el operador lineal $T \in \mathcal{L}(c_0, E)$ definido por $T(e_i) = x_i$ para cada i, con P se obtiene el polinomio

$$\begin{array}{ccccc} Q : c_0 & \xrightarrow{T} & E & \xrightarrow{P} & F \\ \sum a_i e_i & \mapsto & \sum a_i x_i & \mapsto & P(\sum a_i x_i) \end{array}$$

que tiene por operador conjugado a

$$\begin{array}{ccc} Q^* : F^* & \longrightarrow & \mathcal{P}(^m c_0) \\ f^* & \longmapsto & f^* \circ Q. \end{array}$$

Por $(*)$ se cumple que

$$\sup\{|f^*(Q(\sum_{i=1}^{n_j} e_i)) - f^*(Q(\sum_{i=1}^{k_j} e_i))|; f^* \in F^*, \|f^*\| \leq 1\}$$

$$= \|P(\sum_{i=1}^{n_j} x_i) - P(\sum_{i=1}^{k_j} x_i)\| > \epsilon$$

lo que asegura precisamente que $Q^*(\mathcal{B}_{F^*})$ no es un conjunto de la clase $\mathcal{V}_m(\mathcal{P}(^m c_0))$. Sin embargo veamos que sí es relativamente débilmente compacto, lo que estará en contradicción con la proposición V.3.

El conjunto $Q^*(\mathcal{B}_{F^*})$ es débilmente relativamente compacto sí y sólo sí Q^* es un operador débilmente compacto, y esto sí y sólo sí el polinomio Q es también débilmente compacto (Obs. II.19). Comprobemos esta última condición.

Sea $y_n = Q(z_n) = P(T(z_n))$ con $\{z_n\}_n$ una sucesión en $\mathcal{B}_{c_0}$ que podemos suponer (extrayendo una subsucesión) débil de Cauchy. Como el espacio c_0 verifica la propiedad (u) de Pelczynski (1.c.1 II [41]), existe una serie d.i.C $\sum w_i$ de modo que $\{\sum_{i=1}^{n} w_i - z_n\}_n$ converge débilmente y por tanto polinomialmente a cero en c_0 (Ej. I.43), es decir, $\{q(\sum_{i=1}^{n} w_i - z_n)\}_n$ converge a cero para cualquier k y cualquier $q \in \mathcal{P}(^k c_0)$. Puesto que la serie $\sum T(w_i)$ es d.i.C debe cumplirse que la sucesión $\{P(\sum_{i=1}^{n} T(w_i))\}_n$ es débilmente convergente a cierto $z \in F$.

Por otro lado, en la proposición 2.1 de [3] (o bien en el lema V.8) se prueba que el espacio c_0 cumple la propiedad (RP), lo que asegura que $\{q(\sum_{i=1}^{n} w_i) - q(z_n)\}_n$ converge a cero para cualquier k y cualquier $q \in \mathcal{P}(^k c_0)$, en particular para los polinomios $q \in \mathcal{P}(^m c_0)$ de la forma $f^* \circ Q$, $f^* \in F^*$, de donde se deduce que la

sucesión $\{Q(z_n)\}_n$ es también débilmente convergente a $z \in F$. Queda probado así que el conjunto $Q^*(\mathcal{B}_{F^*})$ es débilmente relativamente compacto y por tanto se obtiene una contradicción con la proposición V.3. □

V.1 Propiedad m-V

Definición V.6 *El espacio de Banach E cumple la propiedad V de grado m, (m-V) si para cada espacio de Banach F, todo polinomio incondicionalmente convergente $P \in \mathcal{P}(^m E, F)$ es débilmente compacto:*

$$\mathcal{P}_{ic}(^m E, F) = \mathcal{P}_{wc}(^m E, F).$$

Puesto que se cumple siempre la relación $\mathcal{P}_{DP}(^m E, F) \subset \mathcal{P}_{ic}(^m E, F)$, si el espacio de Banach E tiene la propiedad m-V, tendrá también la propiedad m-RDP, es decir,

$$\mathcal{P}_{DP}(^m E, F) \subset \mathcal{P}_{wc}(^m E, F).$$

Teorema V.7 *Sea E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:*

1. *E tiene la propiedad V de grado m, (m-V).*
2. *Los conjuntos de la clase $\mathcal{V}_m(\mathcal{P}(^m E))$ son débilmente compactos en $\mathcal{P}(^m E)$.*

Demostración. Recordemos primero que siempre se cumplen las contenciones

$$\mathcal{P}_{wc}(^m E, F) \subset \mathcal{P}_{ic}(^m E, F) \quad \text{y} \quad \mathcal{W}(\mathcal{P}(^m E)) \subset \mathcal{V}_m(\mathcal{P}(^m E)).$$

Probemos 2⇒1. Consideremos un polinomio incondicionalmente convergente $P \in \mathcal{P}_{ic}(^m E, F)$; probaremos que es débilmente compacto viendo que el operador adjunto

$$\begin{array}{ccc} P^* : F^* & \longrightarrow & \mathcal{P}(^m E) \\ y^* & \longmapsto & y^* \circ P \end{array}$$

es débilmente compacto (Obs.II.19), es decir: $P^*(\mathcal{B}_{F^*}) \in \mathcal{W}(\mathcal{P}(^m E))$. La proposición V.2 establece que el conjunto $P^*(\mathcal{B}_{F^*})$ pertenece a la clase $\mathcal{V}_m(\mathcal{P}(^m E))$, por lo que bajo la hipótesis 2, es también un conjunto relativamente débilmente compacto.

Para ver la otra implicación, construiremos un polinomio incondicionalmente convergente a partir de cada conjunto $A \in \mathcal{V}_m(\mathcal{P}(^m E))$. Sea entonces $A \in \mathcal{V}_m(\mathcal{P}(^m E))$. Consideremos el espacio de Banach

$$B(A) = \{f : A \to \mathbb{C} \ \text{ continua}\}, \quad \|f\| = \sup_{q \in A}\{|f(q)|\}$$

y el polinomio homogéneo de grado m

$$\begin{array}{rcl} P: E & \longrightarrow & B(A) \\ x & \longmapsto & P(x): \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{C} \\ q & \mapsto & q(x); \end{array} \end{array}$$

$\|P(x)\| \leq M\|x\|^m$, donde M es una cota para A. Veamos que P es un polinomio incondicionalmente convergente. Para cada serie $\sum x_i$ d.i.C en E se cumple:

$$\begin{aligned} \|P(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i) - P(\sum_{i=1}^k x_i)\| &= \sup_{q\in A}\{|(P(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i) - P(\sum_{i=1}^k x_i))(q)|\} \\ &= \sup_{q\in A}\{|q(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i) - q(\sum_{i=1}^k x_i)|\}; \end{aligned}$$

como $A \in \mathcal{V}_m(\mathcal{P}(^mE))$, el límite en la expresión anterior es cero. Si suponemos que E tiene la propiedad m-V, P es un polinomio débilmente compacto y entonces $P^*(B_{B(A)^*}) \in \mathcal{W}(\mathcal{P}(^mE))$. Para cada $q \in A$ definimos el funcional

$$x_q^*: B(A) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x_q^*(f) := f(q) \quad f \in B(A).$$

En cada $x \in E$ se cumple $P^*(x_q^*)(x) = x_q^*(P(x)) = q(x)$, de donde se obtiene que A está contenido en la imagen bajo P^* de un conjunto acotado y por lo tanto $A \in \mathcal{W}(\mathcal{P}(^mE))$. □

Lema V.8 *Sea E un espacio de Banach sin copias de ℓ_1 que satisface la propiedad m-SCP. Si $\{x_n\}_n$, $\{y_n\}_n$ son sucesiones acotadas en E tales que $\lim_n |q(x_n-y_n)| = 0$ para todo $q \in \mathcal{P}(^mE)$, entonces, para cada $q \in \mathcal{P}(^mE)$, $\lim_n |q(x_n) - q(y_n)| = 0$.*

Demostración. Denotaremos esta propiedad como $(\mathrm{RP})_m$, siguiendo la notación establecida en [3], donde se define la propiedad (RP) considerando, en vez del espacio de polinomios $\mathcal{P}(^mE)$, el espacio $\mathcal{P}(E)$. La demostración del resultado es análoga a la que propone el teorema 2.2 en [3], donde se prueba que un espacio sin copias de ℓ_1 y con la propiedad de Dunford-Pettis (por consiguiente, con la propiedad m-SCP) cumple la propiedad (RP): consideremos dos sucesiones $\{x_n\}_n$, $\{y_n\}_n$ tales que $\lim_n |q(x_n - y_n)| = 0$ para todo $q \in \mathcal{P}(^mE)$. Por el lema I.34, la sucesión $\{x_n - y_n\}$ admite una subsucesión (que denotamos igual) débil de Cauchy. Como el espacio E no contiene copias de ℓ_1, es posible extraer de $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sendas subsucesiones débiles de Cauchy (que denotamos del mismo modo). Por hipótesis, E tiene la propiedad m-SCP y por tanto para cada $q \in \mathcal{P}(^mE)$ existen r_q, $s_q \in \mathbb{C}$ tales que $\lim_n q(x_n) = r_q$ y $\lim_n q(y_n) = s_q$. La sucesión $\{z_k\}_k$, donde $z_{2n} = y_n$ y $z_{2n-1} = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es débil de Cauchy y por tanto τ_m de Cauchy. En consecuencia existe $\lim_n q(z_n)$ para cada $q \in \mathcal{P}(^mE)$, es decir, $r_q = s_q$. Hemos probado entonces, que para cada $q \in \mathcal{P}(^mE)$, $\lim_n |q(x_n) - q(y_n)| = 0$. □

Proposición V.9 *Si E es un espacio de Banach que no contiene copias de ℓ_1, tiene la propiedad (u) de Pelczynski y la propiedad m-SCP para $m \in \mathbb{N}$, entonces E tiene la propiedad m-V.*

Demostración. Consideremos un espacio de Banach F y un polinomio $\mathcal{P}_{ic}(^mE, F)$. Para ver que es débilmente compacto, veamos que $P(B_E) \in \mathcal{W}(F)$.

Sea $\{z_n\}$ una sucesión contenida en B_E y $y_n = P(z_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como E no contiene copias de ℓ_1, existe una subsucesión de $\{z_n\}$ (que denotamos igual) débil de Cauchy. El espacio E tiene la propiedad (u) de Pelczynski (1.c.1 II [41]) y por tanto existe una serie d.i.C $\sum w_i$ de modo que la sucesión $\{\sum_{i=1}^n w_i - z_i\}_n$ es débilmente convergente a cero. Como el espacio cumple la propiedad m-SCP, el lema anterior asegura que tiene la propiedad $(\mathrm{RP})_m$ por lo que podemos afirmar que para cada $q \in \mathcal{P}(^mc_0)$, $\lim_n |q(\sum_{i=1}^n w_i) - q(z_n)| = 0$. Como el polinomio P es incondicional, existe $y = \lim_n P(\sum_{i=1}^n w_i)$. Por último, la sucesión $\{y_n\}$ converge débilmente a y, pues para cada $f^* \in F^*$,

$$\lim_n f^*(y_n) = \lim_n f^*(P(z_n)) = \lim_n f^*(P(\sum_{i=1}^n w_i)) = f^*(y).$$

Hemos probado que cada sucesión contenida en $P(B_E)$ tiene una subsucesión débilmente convergente, lo que equivale a decir que $P(B_E) \in \mathcal{W}(F)$. □

Corolario V.10 *El espacio de Banach c_0 tiene la propiedad m-V para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. c_0 satisface las hipótesis de la proposición anterior puesto que es un espacio sin copias de ℓ_1 y con la propiedad (u) de Pelczynski (1.c.1 II [41]). Probamos también (Ej. I.43) que tiene la propiedad m-SCP para todo $m \in \mathbb{N}$. □

Proposición V.11 *Sea E un espacio de Banach con la propiedad m-V. El espacio $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ es reflexivo si y sólo si E no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0.*

Demostración. La reflexividad del espacio $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ es equivalente (T. III.13) a que para cada F se cumpla

$$\mathcal{P}_{wc}(^mE, F) = \mathcal{P}(^mE, F).$$

Por hipótesis, E cumple la propiedad m-V, es decir, los polinomios incondicionalmente convergentes son débilmente compactos, por lo que la reflexividad será precisamente, que se establezca la identidad

$$\mathcal{P}_{ic}({}^mE,F)=\mathcal{P}({}^mE,F);$$

por la proposición II.34, esto se cumple si y sólo si c_0 no está contenido en E. □

Proposición V.12 *Sea E un espacio de Banach con la propiedad m-V y F un cociente de E. Entonces F tiene la propiedad m-V.*

Demostración. Para cada aplicación cociente $\pi: E\to F$, el operador definido en la diagonal por

$$\begin{array}{cccc}\pi^{(m)}: \hat{\otimes}^m_{s,\pi}E & \longrightarrow & \hat{\otimes}^m_{s,\pi}F \\ x\otimes \overset{m}{\cdots}\otimes x & \mapsto & \pi(x)\otimes \overset{m}{\cdots}\otimes\pi(x),\end{array}$$

es también una aplicación cociente (Prop. I.18). Consideremos un espacio H y un polinomio incondicional $Q\in\mathcal{P}_{ic}({}^mF,H)$, con $\hat{Q}\in\mathcal{L}(\hat{\otimes}^m_{s,\pi}F,H)$ la aplcicación lineal asociada. Comprobemos que Q es un polinomio débilmente compacto. El operador lineal

$$\hat{R}:\hat{\otimes}^m_{s,\pi}E\overset{\pi^{(m)}}{\longrightarrow}\hat{\otimes}^m_{s,\pi}F\overset{\hat{Q}}{\longrightarrow}H$$

determina un polinomio $R\in\mathcal{P}({}^mE,H)$ definido como $R(x)=\hat{R}(x\otimes\overset{m}{\cdots}\otimes x)$. Para cada serie $\sum x_i$ d.i.C en E, la sucesión $\{R(\sum_{i=1}^n x_i)=Q(\sum_{i=1}^n\pi(x_i))\}_n$ es convergente en norma, pues Q es incondicional y la serie $\sum\pi(x_i)$ es d.i.C, lo que prueba que R es un polinomio incondicionalmente convergente. Como E cumple la propiedad m-V, R y $\hat{R}$ son débilmente compactos. Por otro lado, $\pi^{(m)}$ es suprayectiva y $\hat{R}=\hat{Q}\circ\pi^{(m)}$, por lo que se cumple que $\hat{Q}(B_{\hat{\otimes}^m_{s,\pi}F})\in\mathcal{W}(H)$ y en consecuencia Q es débilmente compacto. □

Proposición V.13 *Sean E y F espacios de Banach de modo que F^* no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ_1. Todo polinomio $P\in\mathcal{P}({}^mE,F)$ es incondicionalmente convergente.*

Demostración. Como F^* no contiene a ℓ_1, se verifica la relación $B_{F^*}\in\mathcal{R}(F^*)$ y por lo tanto la imagen de B_{F^*} bajo el operador adjunto $P^*: F^*\to\mathcal{P}({}^mE)$ definido como $P^*(f^*)=f^*\circ P$ pertenece a la clase $\mathcal{R}(\mathcal{P}({}^mE))$. De la observación V.4 se deduce que $P^*(B_{F^*})\in\mathcal{V}_m(\mathcal{P}({}^mE))$ y por tanto P es incondicionalmente convergente (Prop. V.2). □

Corolario V.14 *Si E es un espacio de Banach con la propiedad m-V para algún $m>1$, E no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ_1.*

Demostración. Sea $\{x_i\}\subset E$ una sucesión equivalente a $\{e_i\}$, la base canónica de ℓ_1; podemos construir como en la demostración del teorema III.33, un polinomio $P\in\mathcal{P}({}^mE,\ell_1)$ de modo que $P(x_i)=e_i$ para cada i. Denotamos por π a una aplicación cociente de ℓ_1 en J, donde J denota el espacio de James (existe, pues J es separable) y construimos el polinomio:

$$\begin{array}{ccccc}Q:E & \overset{P}{\longrightarrow} & \ell_1 & \overset{\pi}{\longrightarrow} & J\\ x_i & \longmapsto & e_i & \longmapsto & \pi(e_i).\end{array}$$

Como J^* no contiene copias de ℓ_1, la proposición anterior asegura que $Q\in\mathcal{P}_{ic}({}^mE,J)$, sin embargo no es un polinomio débilmente compacto: la sucesión $\{Q(x_i)\}_i$ genera por envoltura absolutamente convexa y cerrada, toda la imagen bajo π de B_{ℓ_1} quien no puede ser un conjunto relativamente débilmente compacto pues π es una aplicación cociente sobre el espacio no reflexivo J. □

Ejemplos relativos a la propiedad m-V

1. Los espacios de Banach $C(K)$ con K un compacto Hausdorff, tienen la propiedad V de Pelcynski. Si K no es disperso el espacio contiene una copia de ℓ_1 y por tanto el espacio no tiene la propiedad m-V si $m>1$ (Cor. V.14). En [52] se prueba que si K es disperso sí cumple la propiedad para todo $m\in\mathbb{N}$.

2. Los espacios T^* y ℓ_p, $p>m$ son tales que su tensor simétrico de orden m es reflexivo y por tanto tienen la propiedad m-V.

V.2 Propiedad m-V^*

La propiedad V^* se introduce en [44] y se define como:

"*El espacio de Banach E tiene la propiedad V^* si todo conjunto de la clase V^* es relativamente débilmente compacto.*" Con la notación utilizada hasta ahora, la propiedad es:

$$\mathcal{W}(E)=\mathcal{V}^*(E).$$

De acuerdo a la definición III.3, la propiedad m-V^* se define del siguiente modo:

Definición V.15 *[9] Dado $m\in\mathbb{N}$, el espacio de Banach E tiene la propiedad m-V^* siempre que*

$$\mathcal{W}_m(E)=\mathcal{V}^*_m(E).$$

Observación V.16 [9] Siempre se cumplen las relaciones

$$\mathcal{W}_m(E) \subset \mathcal{R}_m(E) \subset \mathcal{V}_m^*(E),$$

por lo que en un espacio con la propiedad m-V^* debe cumplirse $\mathcal{W}_m(E) = \mathcal{R}_m(E)$; si el espacio tiene además la propiedad de aproximación (lo que implica $\mathcal{W}_m(E) = \tau_m(E)$, Obs. III.11) se obtiene que la topología τ_m en E es secuencialemente completa, como ocurría en el caso $m = 1$.

En [28] se define de modo distinto la propiedad (m-V^*); los autore s generalizan la siguiente definición equivalente de la propiedad V^*:

E tiene la propiedad V^* si todo operador $T \in \mathcal{L}(\ell_1, E)$ tal que su operador adjunto T^* es incondicionalmente convergente, es débilmente compacto,

diciendo que E cumple la propiedad m-V^* *si para cada espacio de Banach F, cada polinomio $P \in \mathcal{P}(^mF, E)$ tal que su operador adjunto P^* es incondicionalmente convergente, es débilmente compacto.* Esta generalización determina una propiedad muy distinta de la que estudiamos aquí: los autores prueban de hecho, que tal propiedad (m-V^*) es equivalente a la propiedad (V^*).

En el siguiente resultado utilizamos los operadores adjuntos $T^{(m)*}$ introducidos en la sección 3.4.

Proposición V.17 *Sea E un espacio de Banach que satisface la propiedad m-V^*. Para cada espacio de Banach F, cada operador incondicionalmente convergente $T^{(m)*} \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^mE), \mathcal{P}(^mF))$, definido como $T^{(m)*}(q) = q \circ T$ para cada $q \in \mathcal{P}(^mE)$, con $T \in \mathcal{L}(F, E)$, es débilmente compacto.*

Demostración. En la proposición III.64 probamos que $T^{(m)*} \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^mE), \mathcal{P}(^mF))$ es un operador incondicionalmente convergente si y sólo si $T(B_F) \in \mathcal{V}_m^*(E)$. Si el espacio E tiene la propiedad m-V*, el conjunto $T(B_F)$ pertenece a la clase $\mathcal{W}_m(E)$ y por tanto $T^{(m)*}$ es débilmente compacto (Prop. III.64). □

Observación V.18 En el caso de la propiedad recíproca de Dunford-Pettis se probaba una caracterización en términos de $T^{(m)*}$. El obstáculo para probar el recíproco en la proposición anterior es que no se sabe si la clase de los conjuntos $\mathcal{V}_m^*$ es estable por envolturas absolutamente convexas y cerradas, para poder construir, dada una sucesión $\{a_i\} \in \mathcal{V}_m^*$, un operador $T \in \mathcal{L}(\ell_1, E)$ de modo que $T(B_{\ell_1}) \in \mathcal{V}_m^*(E)$, de forma análoga a III.65. Esto mismo sucedía con la propiedad τ_m de Gelfand-Phillips (Obs. III.67).

Proposición V.19 *Si el espacio E tiene la propiedad m-V^*, entonces $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ es reflexivo si y sólo si $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ no contiene copias complementadas de ℓ_1.*

Demostración. $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ no contiene copias complementadas de ℓ_1 si y sólo si $\mathcal{V}_m(E) = \mathcal{B}(E)$ (Prop. III.40). Si E cumple la propiedad m-V^*, es equivalente entonces, a que $\mathcal{W}_m(E) = \mathcal{B}(E)$, es decir, a la reflexividad del espacio $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ (T.III.13). □

Corolario V.20 *El espacio de Banach E cumple simultáneamente las propiedades m-V y m-V^* si y sólo si $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ es reflexivo.*

Demostración. Supongamos que E cumple las propiedades m-V y m-V^* pero $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ no es reflexivo. Por la proposición anterior el espacio E debe ser tal que $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ contiene una copia complementada de ℓ_1 y de hecho, contiene una sucesión en la diagonal $\{x_i \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes x_i\}$ equivalente a la base canónica de ℓ_1 y que genera un subespacio complementado. Podemos entonces, hacer una construcción similar del polinomio Q en la proposición IV.38 (en este caso P se obtiene como el polinomio asociado al operador proyección de $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ en ℓ_1) con lo que se prueba la existencia de un polinomio Q incondicionalmente convergente pero no débilmente compacto, lo que contradice el que E cumpla la propiedad m-V. □

Proposición V.21 *Sea E un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:*

1. *$\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ es reflexivo.*
2. *E tiene la propiedad m-V y la propiedad recíproca de Dunford-Pettis*, R-DP*.*
3. *E tiene la propiedad m-V^* y la propiedad recíproca de Dunford-Pettis polinomial de grado m, m-RDP.*

Demostración. Comprobemos primero la equivalencia entre 1 y 2. El resultado para el caso $m = 1$ fue establecido en [39]. Si el espacio $\hat{\otimes}_{s,\pi}^m E$ es reflexivo, el teorema III.13 prueba que se cumplen las relaciones

$$\mathcal{P}(^mE, F) = \mathcal{P}_{wc}(^mE, F) \quad \text{y} \quad \mathcal{W}_m(E) = \mathcal{B}(E).$$

De la primera relación resulta claro que todo polinomio incondicionalmente convergente es débilmente compacto, y de la segunda relación, que todo conjunto de Dunford-Pettis es relativamente compacto y por tanto se cumplen las propiedades m-V y $RDP*$ (Prop. III.51).

Para probar el recíproco basta observar que un espacio con la propiedad $RDP*$ no puede contener copias de c_0, pues es una propiedad que se preserva por subespacios y c_0 no la cumple. Por la proposición II.34, todos los polinomios definidos en E son entonces incondicionalmente convergentes. Si el espacio cumple además la propiedad $m - V$, todos los polinomios son débilmente compactos y por tanto $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ es reflexivo.

Si el espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ es reflexivo ya probamos que E cumple la propiedad m-RDP; por otra parte, en el teorema III.13 mostramos que la reflexividad era equivalente a que todos los conjuntos acotados de E pertenecieran a la clase $\mathcal{W}_m(E)$, en particular los conjuntos $\mathcal{V}^*_m(E)$ y por tanto debe cumplirse la propiedad m-V^*.

Por último, si suponemos que se cumple 3, la propiedad m-RDP implica que el espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no puede contener copias complementadas de ℓ_1 (se utiliza el mismo argumento que en la demostración de la proposición IV.38). Esto es equivalente a la igualdad entre clases de conjuntos, $\mathcal{V}^*_m(E) = \mathcal{B}(E)$ (Prop. III.41). La propiedad $m - V^*$ implica en este caso, $\mathcal{W}_m(E) = \mathcal{B}(E)$, es decir, la reflexividad del espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$. □

Ejemplos relativos a la propiedad m-V^*.

1. Si $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ es reflexivo, E tiene la propiedad m-V^*. Esto es consecuencia inmediata del corolario anterior, o bien se puede probar a través de la identidad entre las clases de conjuntos

$$\mathcal{W}_m(E) = \mathcal{V}^*_m(E) = \mathcal{B}(E).$$

En este ejemplo se incluyen los espacios ℓ_p, $1 < p < m$ y T^*.

2. El espacio c_0 no cumple la propiedad m-V* para ningún $m \in \mathbb{N}$, pues contradice lo establecido en la observación V.16: la sucesión formada por la base sumante $\{\sum_{i=1}^n e_i\}$ es un conjunto en $\mathcal{R}_m(c_0)$, pero no en $\mathcal{W}_m(c_0)$ (no posee subsucesiones débilmente convergentes).

En [9] se prueban también los siguientes resultados:

3. Los espacios ℓ_p y $L_p(\mu)$ cumplen la propiedad m-V^* para $p \leq m$.

4. El espacio J de James no tiene la propiedad V^*, pues no es secuencialmente completo, sin embargo tiene la propiedad m-V^* para algún $m > 1$ [9].

V.3 Otras propiedades

Definición V.22 *Un espacio de Banach E tiene la propiedad polinomial de Dieudonné de grado m (m-D), si para cada espacio de Banach F, todo polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ que transforma las sucesiones τ_m de Cauchy de E en sucesiones débilmente convergentes de F, es débilmente compacto.*

La definición de la propiedad (lineal) de Dieudonné fue introducida en [35]. Con la notación del capítulo II, definimos entonces la propiedad m-D como:

$$\mathcal{P}_{wc}(^mE, F) = \mathcal{P}_D(^mE, F).$$

Teorema V.23 *Sea $m \in \mathbb{N}$. El espacio de Banach E cumple la propiedad m-D en los siguientes casos:*

1. *E tiene la propiedad m-V.*

2. *El espacio $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no contiene copias de ℓ_1.*

Demostración. 1 es claramente cierto, pues en el teorema II.21 vimos que todo polinomio de Dieudonné es incondicionalmente convergente, así si éstos son débilmente compactos, también lo son los de Dieudonné.

2 se demuestra forma similar al caso lineal: si $\hat{\otimes}^m_{s,\pi} E$ no contiene copias de ℓ_1, de cada sucesión acotada en E se puede extraer una subsucesión τ_m de Cauchy ($\mathcal{B}(E) = \mathcal{R}_m(E)$, III.17); si $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ es un polinomio de Dieudonné, transformará la subsucesión en una sucesión débilmente convergente de F, con lo que se prueba $P(B_E) \in \mathcal{W}(F)$ y por tanto P es débilmente compacto. □

Proposición V.24 *Sea E un espacio con la propiedad (u) de Pelczynski y la propiedad m-SCP. Para cada espacio de Banach F, cada polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE, F)$ incondicionalmente convergente transforma las sucesiones τ_m de Cauchy en E, en sucesiones débilmente convergentes en F:*

$$\mathcal{P}_D(^mE, F) = \mathcal{P}_{ic}(^mE, F) \quad \textit{para cada } F.$$

Demostración. Esta prueba se lleva a cabo de modo análogo al de la proposición V.9: consideremos un polinomio $P \in \mathcal{P}_{ic}(^mE, F)$ y una sucesión $\{x_n\}$ τ_m de Cauchy en E. Por la propiedad (u), existe una serie d.i.C $\sum_i w_i$ de modo que $\{x_n - \sum_{i=1}^n w_i\}_n$ es débilmente convergente a cero. La sucesión $\{z_n\}$ construida como $z_{2n} = x_n$ y $z_{2n-1} = \sum_{i=1}^n w_i$ es débil de Cauchy. Si el espacio cumple la propiedd m-SCP, es también τ_m de Cauchy. Puesto que P es incondicionalmente convergente, existe $y \in F$ tal que $\lim_n \|P(\sum_{i=1}^n w_i) - y\| = 0$. Es ahora inmediato verificar que entonces la sucesión $\{P(x_n)\}$ converge débilmente a y. □

Observación V.25 El polinomio construido en el corolario V.14 para demostrar que un espacio de Banach que contiene a ℓ_1 no tiene la propiedad m-V, es un polinomio de Dunford-Pettis (pues $Q = \pi \circ P$; P transforma las sucesiones τ_m de Cauchy de E en sucesiones débiles de Cauchy en ℓ_1 y por tanto, convergentes en norma) no débilmente compacto. El polinomio es también de Dieudonné (T.

II.21). Se prueba entonces que si el espacio E contiene a ℓ_1 no se cumple la propiedad m-RDP ni la propiedad

$$\mathcal{P}_{wc}(^mE, F) = \mathcal{P}_D(^mE, F) \quad \text{para todo } F, \text{ con } m > 1.$$

Así, el espacio de Banach ℓ_1 no cumple estas propiedades, sin embargo satisface las hipótesis de la proposición anterior, por lo que

$$\mathcal{P}_D(^m\ell_1, F) = \mathcal{P}_{ic}(^m\ell_!, F) \quad \text{para todo } F.$$

Bibliografía

[1] R. Alencar, R.M. Aron, S. Dineen, *A reflexive space of holomorphic functions in infinitely many variables*, Proc. Amer. Math. Soc., 90 (1984), 407-411.

[2] R.M. Aron, B.J. Cole, T.W. Gamelin, *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. reine angew. Math. 415 (1991), 51-93.

[3] R.M. Aron, Y.S. Choi, J.G. Llavona, *Estimates by polynomials*, Bull. Austral. Math. Soc. 52 (1995), 475-486.

[4] R.M. Aron, J. Globevnik *Analytic functions on c_0*, Revista Matemática Univ. Complutense Madrid 2 (1989), 27-33.

[5] R.M. Aron, C. Hervés, M. Valdivia, *Weakly Continuous Mappings on Banach Spaces*, J. Funct. Anal. 52 (1983), 189-204.

[6] P. Biström, J.A. Jaramillo, M. Lindström, *Polynomial compactness in Banach Spaces*, por aparecer.

[7] F. Blasco, *Complementation in spaces of symmetric tensor products and polynomials* Studia Math., 123 (1997), 165-173.

[8] F. Bombal, *Sobre algunas propiedades de espacios de Banach*, Rev. Acad. Cie. Madrid, LXXXIV (1990), 83-116.

[9] F. Bombal, *On polynomial properties in Banach spaces*, Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XLIV, (1996) 135-146.

[10] F. Bombal *Operators on vector sequence spaces*, Geometric aspects of Banach spaces, London Math. Soc. Lecture Notes 140 (1989), 94-106.

[11] F. Bombal *On $(\mathcal{V}^*)$ sets and Pelczynski's propery $(\mathcal{V}^*)$*. Glasgow Math. J., 32 (1990), 109-120.

[12] F. Bombal, G. Emmanuele, *Remarks on completely continuous polynomials*, Quaestiones Mathematicae, 20 (1997), 85-93.

[13] J. Bourgain, J. Diestel, *Limited operators and strict cosingularity*, Math. Nachr. 119 (1984) 55-58.

[14] T.K.Carne, B.Cole, T.W.Gamelin, *A uniform algebra or analytic functions on a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. 314 (1989), 639-659.

[15] J.M.F. Castillo, R. García, R. Gonzalo, *Banach Spaces in which all multilinear forms are weakly sequentially continuous*, por aparecer.

[16] Y.S. Choi, S.G. Kim, *Polynomial properties of Banach Spaces*, J. Math. Anal. Appl., 190 (1995), 211-219.

[17] J. Diestel, *Sequences and series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Math. 92, Springer Verlag New York (1984).

[18] J. Diestel, *A survey of results related to the Dunford-Pettis property*, Contemporary Mathematics, Vol.2, A.M.S. (1980) 15-60.

[19] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces-selected topics*, Lecture Notes in Math. 485, Springer-Verlag (1975).

[20] J. Diestel, J.J. Uhl Jr., *Vector measures*, Math. Surveys n . 15, Amer. Math. Soc (1997).

[21] S. Dineen, *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, Math. Studies 57, North-Holland, Amsterdam (1981).

[22] S. Dineen, *A Dvoretsky-Rogers Theorem for Polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 2817-2821.

[23] J. Dugundji, *Topology*, Boston, Mass.: Allyn and Bacon, Inc. (1966).

[24] G. Emmanuele, *Banach spaces in which Dunford-Pettis sets are relatively compact*, Arch. Math., Vol. 58 (1992), 477-485.

[25] G. Emmanuele, *On the Banach spaces with the property* (V^*) *of Pelczynski*, Annali Mat. Pura Appl. CLII (1988), 171-181.

[26] J. Farmer, W.B. Johnson *Polynomial Schur and Polynomial Dunford-Pettis properties*, Banach Spaces, Contemporary Mathematics, Vol.144 (Bor-Luh Lin,ed.), Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1993).

[27] P. Galindo, *Polynomials and limited sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 124, N. 5, (1996), 1481-1488.

[28] M. González, J.M Gutiérrez, *Unconditionally converging polynomials on Banach spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1995), 117, 321-331.

[29] M. González, J.M Gutiérrez, *When every polynomial is unconditionally converging*, Arch.Math., Vol.63 (1994), 145-151.

[30] M. González, J.M Gutiérrez, *Schauder type theorems for differentiable and holomorphic maps*, Monatsh.Math.122 (1996), 325-343.

[31] M. González, J.M Gutiérrez, *Gantmacher type theorems for holomorphic mappings*, Math. Nachr 186 (1997), 131-145.

[32] M. González, J.M Gutiérrez, *Polynomial Grothendieck properties*, Glasgow Math. J. 37, N. 2, (1997), 211-226.

[33] R. Gonzalo, J.A. Jaramillo, *Compact polynomials between Banach spaces*, Proc. Royal Irish Acad., Vol 95A, No.2 (1995), 213-226.

[34] A. Grothendieck, *Produits Tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem.Amer.Math.Soc.16, AMS, Providence (1995).

[35] A. Grothendieck,*Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type* $C(K)$, Canad. J. Math., 5 (1953), 129-173.

[36] J.M. Gutiérrez, J.A. Jaramillo, J.G. Llavona, *Polynomials and geometry of Banach spaces*, Vol. 10, N.2 (1995), 79-114.

[37] J.R. Holub, *Tensor product bases and tensor diagonals*, Trans. Amer. Math. Soc., (1970) Vol.151, 563-579.

[38] J.A.Jaramillo, A.Prieto, I. Zalduendo *Sequential convergences and Dunford-Pettis properties*, por aparecer.

[39] T. Leavelle, *The reciprocal Dunford-Pettis property*, Ann. Mat. Pura e Appl.

[40] D.H.Leung, *A Gelfand-Phillips Property with respect to the weak topology*, Math. Nachr. 149 (1990) 177-181.

[41] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-New York, Vol.I, (1977), Vol.II (1979).

[42] J.E. Littlewood, *On bounded bilinear forms in an infinite number of variables*, Quart. J. Math. 1 (1930), 164-174.

[43] J. Mujica, *Complex analysis in Banach spaces*, Math. Studies No. 120 (North-Holland, 1986).

[44] A. Pelczynski, *On Banach spaces on which every unconditionally operator is weakly compact.* Bull. Acad. Pol. Sci., 10 (1962), 641-648.

[45] A.Pelczynski, *On Weakly compact polynomial operators on B-spaces with the Dunford-Pettis property*, Bull. Acad. Pol. Sci., XI (1963), 371-378.

[46] A. Pelczynski, *A property of multilinear operations*, Studia Math. 16 (1957), 173-182.

[47] A. Pietsch, *Operators ideals*, North-Holland Math. Libr. 20, Amsterdam (1979).

[48] G. Pisier *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*, CBMS (Regional conference of the A.M.S.) 60 (1986). 60.

[49] R.A. Ryan, *Applications of Topological Tensor Products to Infinite Dimensional Holomorphy*, Ph.D.Thesis, Trinity College Dublin (1980).

[50] R.A. Ryan, *Dunford-Pettis properties*, Bull. Acad. Pol. Sci., 27 (1979), 373-379.

[51] R. Schatten, *A theory of cross-spaces*, Ann. of Math. Studies, No. 26, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., (1950). MR 12, 186.

[52] I. Villanueva, *Aplicaciones multilineales en espacios de funciones continuas* Tesis Doctoral en elaboración, Universidad Complutense de Madrid.