Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

PROBLEMA DE INVERSIÓN ÓPTIMA EN MERCADOS CON LIQUIDEZ LIMITADA

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con especialidad en

Probabilidad y Estadística

P r e s e n t a:

Leimar Chavarría Jaramillo

Director de tesis:

Dr. Daniel Hernández Hernández

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto. 30/ 06/ 2020

A mis amados padres: Gilberto y Mariela

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Profesor Daniel Hernández Hernández, quien en su papel de asesor, aportó su conocimiento y tiempo para la realización de este trabajo. Gracias al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), por la formación recibida. Agradezco también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico con una beca de maestría. Gracias a mis padres por el apoyo constante durante mi formación académica.

RESUMEN

En esta tesis abordamos el problema de selección de portafolio óptimo para un modelo de inversión en un activo que presenta cierto riesgo de liquidez. Para modelar el precio del activo, utilizamos un proceso continuo y positivo S el cual es una estructura de tipo Ito-Lévy con algunas condiciones de regularidad e integrabilidad. El aspecto de poca liquidez se ve reflejado en restricciones en los tiempos de transacción, los cuales corresponden a tiempos aleatorios y discretos siguiendo una ley Poisson. La metodología que hemos utilizado para encontrar una estrategia de inversión óptima es plantear una ecuación de programación dinámica y después de encontrar una solución, comprobar mediante argumentos de verificación, que dicha solución corresponde a la función de valor para el problema de optimización.

Palabras Clave

Programación dinámica, Riesgo de Liquidez, Inversión óptima, Consumo, Semimartingala, Fórmula de Ito.

Índice

INTRODUCCIÓN GENERAL

En la industria financiera hay muchos tipos de riesgos que requieren una atención especial por parte de los profesionales en el área. Entre ellos, los mas importantes son el riesgo de mercado, el riesgo de crédito y el riesgo de liquidez; este último será el que se abordará en este trabajo. La falta de liquidez aparece frecuentemente en los mercados y está relacionada a muchos factores diferentes, es por ello que existen en la literatura muchos enfoques para modelar este problema. Davis y Norman [5] y Cetin y Rogers [3] plantean que para mantener una frecuencia de transacciones, se debe pagar un alto costo de liquidez. Longstaff [8] considera un mercado con un activo que es siempre líquido y otro activo que puede ser negociado inicialmente, pero no se puede negociar de nuevo hasta el final de un período de tiempo. El enfoque que vamos a tomar acá para la liquidez, es suponer que un activo posee restricciones en los tiempos de transacción. En nuestro modelo, un agente puede observar y negociar el activo, únicamente en tiempos aleatorios dados por un proceso de Poisson no homogéneo.

Esta tesis presenta un estudio del problema de elección de portafolio óptimo y está dividida en tres capítulos, de la siguiente manera:

CAPÍTULO 1: este capítulo corresponde a los preliminares necesarios para para comprender la dinámica del proceso de precio $(S_t)_{t\geq 0}$ que se ha supuesto para el activo con riesgo. Se define el concepto de semimartingala y se construye una integral con respecto a una semimartingala. Después de eso, se consideran procesos de la forma

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(s)ds + \int_0^t \beta(s)dB(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(s,z)\overline{N}(ds,dz),$$

los cuales son llamados procesos de Ito-Lévy. Se presenta la fórmula de Ito para este tipo de procesos y finalmente se incluye una versión del teorema de Girsanov para este caso.

CAPÍTULO 2: En este capítulo se considera un agente que tiene un capital inicial X_0 para ser invertido durante un periodo de tiempo $[0,T]$. El agente solo puede cambiar su posición en los tiempos $(\tau_n)_{n\geq 0}$, donde $(\tau_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión creciente de tiempos de llegada de un proceso de Poisson. En cada uno de estos tiempos, el agente elige una cantidad α_n de su capital para ser invertida en el activo. Por lo tanto, su proceso de capital sigue la dinámica

$$X_{\tau_{n+1}} = X_{\tau_n} + \alpha_n \frac{S_{\tau_{n+1}} - S_{\tau_n}}{S_{\tau_n}}, \qquad n \geq 0.$$

Una estrategia de inversión $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ es llamada admisible si

$$X_{\tau_n} \geq 0 \qquad \forall n \geq 0.$$

Denotaremos por $\mathcal{A}$ el conjunto de todas las estrategias admisibles. El principal resultado de este capítulo es encontrar

$$V_0 = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[U(X_T)],$$

para una función de utilidad U.

CAPÍTULO 3: este capítulo es una modificación al modelo planteado en el capítulo 2, aunque la misma dinámica para el precio es asumida, el proceso de capital ahora tiene la forma

$$X_{\tau_{n+1}} = X_{\tau_n} + \alpha_n \frac{S_{\tau_{n+1}} - S_{\tau_n}}{S_{\tau_n}} - c_n(\tau_{n+1} - \tau_n), \qquad n \geq 0,$$

donde $c_n(\tau_{n+1} - \tau_n)$ representa un consumo que el agente puede hacer de su capital durante el periódo $(\tau_n, \tau_{n+1}]$. En este caso se resuelve el problema de optimización,

$$V_0 = \sup_{(\alpha_n, c_n) \in \mathcal{C}} \mathbb{E}[U(X_T) + \sum_{n=0}^{\infty} U(c_n)(\tau_{n+1-\tau_n})],$$

donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de estrategias de inversión/consumo tales que su proceso de capital asociado $X_{\tau_n} \geq 0$.

CAPÍTULO 1

PRELIIMINARES

1.1. Procesos de Ito-Lévy

Los procesos de Ito-Lévy son una generalización de los procesos de Ito. En este caso las trayectorias no son continuas y los saltos están relacionados a un proceso de Lévy y por lo tanto hay que modificar las herramientas básicas de procesos de Ito. Dos conceptos son de suma importancia para definir formalmente un proceso de Ito-Lévy; los procesos de Lévy y las semimartingalas. El objetivo de esta sección es presentar una breve introducción a estos conceptos. Los contenidos que acá se presentan, fueron tomados de [14] y [12].

Comenzamos con un par de definiciones técnicas que serán de utilidad.

Definicion 1.1.1. Sea $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ una filtración en una sigma álgebra $\mathcal{G}$. Decimos que

i) $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ es continua por la derecha si $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t^+}$ donde $\mathcal{G}_{t^+} = \bigcap\limits_{u>t} \mathcal{G}_u$

ii) $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ es continua por la izquierda si $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t^-}$ donde $\mathcal{G}_{t^-} = \sigma\Big(\bigcup\limits_{0\leq u<t} \mathcal{G}_u\Big)$

iii) $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ es continua si $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t^-} = \mathcal{G}_{t^+}$.

Definicion 1.1.2. Diremos que una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ satisface las condiciones usuales si es continua por la derecha y $\mathcal{F}_0$ contiene todos los conjuntos $\mathbb{P}-$nulos de $\mathcal{F}$.

En adelante supondremos que nuestro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ es completo y la filtración satisface las condiciones usuales.

1.1.1. Procesos de Lévy

Definicion 1.1.3. Sea $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un proceso adaptado a la filtración $\mathbb{F}$; con $X_0 = 0$ c.s. Decimos que X es un proceso de Lévy si

i) X tiene incrementos estacionarios; esto es, $X_t - X_s$ tiene la misma distribución que $X_{t-s}, 0 \leq s < t < \infty$.

ii) $X_t - X_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, $0 \leq s < t < \infty$.

iii) X es continuo en probabilidad; esto es, $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{t\to s} \mathbb{P}(|X_t - X_s| > \epsilon) = 0.$$

El siguiente teorema es clave para el entendimiento de un proceso de Levý. Su demostración puede encontrarse en [14].

Teorema 1.1.1. *Sea X un proceso de Lévy.*

a) Existe un único proceso de Lévy Y el cual es una modificación càdlàg (continuo por la derecha con límites por la izquierda) de X.

b) Sea $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^0 \vee \mathcal{N}$ donde $(\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0}$ es la filtración natural de X y $\mathcal{N}$ son todos los subconjuntos $\mathbb{P}-$nulos de $\mathcal{F}$. Entonces $(\mathcal{G})_{t\geq 0}$ es continua por la derecha.

c) Sea T un tiempo de paro. En el conjunto $\{T < \infty\}$ el proceso $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ definido por $Y_t = X_{T+t} - X_T$ es un proceso de Lévy adaptado a $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_{T+t}$. Y es independiente de $\mathcal{F}_T$ y Y tiene la misma distribución que X.

En vista del Teorema 1.1.1, siempre consideraremos un proceso de Lévy càdlàg. Esto nos permite definir el salto del proceso al tiempo $t \geq 0$ como $\Delta X_t = X_t - X_{t^-}$ donde $X_{t^-} = \lim_{s \uparrow t} X_s$. Sea $\mathcal{B}_0$ la familia de conjuntos de Borel $U \subset \mathbb{R}$ cuya clausura $\overline{U}$ no contiene 0; para $U \in \mathcal{B}_0$ denotamos por $N(t,U)$ el número de saltos de longitud $\Delta X_s \in U$ hasta el tiempo t. Para ver que $N(t,U)$ es finito, definimos

$$T_1 = \inf\{t > 0; \Delta X_t \in U\}$$

y

$$T_{n+1} = \inf\{t > T_n; \Delta X_t \in U\}.$$

Dado que X tiene trayectorias càdlàg, es fácil verificar que $\{T_n \geq t \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t\}$ y por lo tanto T_n es un tiempo de paro. Finalmente, trayectorias càdlàg y el hecho que $T_1 > 0$ c.s, implican que $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ c.s. Esto último implica que $N(t,U)$ es finito y por lo tanto

$$N(t,U) = \sum_{0<s\leq t} 1_U(\Delta s).$$

Hay varias medidas útiles relacionadas a proceso de Lévy, por ejemplo, es claro que para todo $(t,w) \in [0,\infty) \times \Omega$, la función $U \to N(t,U)$ define una medida de contar en $\mathcal{B}_0$. EL Teorema 1.1.2 presenta otras medidas que permitirán caracterizar los procesos de Lévy.

Teorema 1.1.2. *Sea $U \in \mathcal{B}_0$.*

a) La función $U \to N(t,U)$ define una medida σ-finita en $\mathcal{B}_0$ para todo $(t,w) \in [0,\infty) \times \Omega$. Denotamos la forma diferencial de esta medida medida $N(t,dz)$.

b) La función $[a,b) \times U \to N(b,U) - N(a,U)$ define una medida $\sigma-$finita en $[0,\infty)$ para ω fijo. La forma diferencial de esta medida es $N(dt,dz)$.

c) La función $\nu(U) = \mathbb{E}[N(1,U)]$ define una medida $\sigma-$finita en $\mathcal{B}_0$, llamada la medida de Lévy de X.

d) El proceso $\pi_U(t) = N(t,U)$ define un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = \nu(U)$.

Observación. i) La medida $N(t, dz)$ es una medida de contar, por lo tanto para cualquier función f Borel medible y finita y $U \in \mathcal{B}_0$

$$\int_U f(z)N(t, dz) = \sum_{0<s\leq t} f(\Delta X_s)1_U(\Delta X_s)$$

ii) Sea $R > 0$. Puede probarse que el proceso

$$M_t^k = \int_{\frac{1}{k}\leq|z|\leq R} z(N(t, dz) - tv(dz))$$

es una martingala en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que converge en este espacio a un límite M_t el cual denotaremos por

$$M_t = \int_{|z|\leq R} z(N(t, dz) - tv(dz)).$$

Ejemplo 1.1.3. Dos ejemplos de procesos de Lévy son el Movimiento Browniano y el Proceso de Poisson. Otro caso importante es el Proceso de Poisson Compuesto. Sea $X(n)$, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tomando valores en $\mathbb{R}$ y con distribución μ_X y sea $\pi(t)$ un proceso de Poisson con intensidad λ, independiente de $(X(n))_{n\geq 0}$.

El proceso de Poisson compuesto $Y(t)$ es definido por

$$Y(t) = X(1) + \cdots + X(\pi(t)), \qquad t \geq 0.$$

Un incremento de este proceso es dado por

$$Y(s) - Y(t) = \sum_{k=\pi(t)+1}^{\pi(s)} X(k), \qquad s > t.$$

Este incremento es independiente de $X(1), \ldots, X(\pi(t))$, y su distribución depende de la diferencia $(s-t)$ y de la distribución de $X(1)$. Así $Y(t)$ es un proceso de Lévy. Para encontrar la medida ν de $Y(t)$, note que si $U \in \mathbf{B}_0$ entonces

$$\nu(U) = \mathbb{E}[N(1, U)] = \mathbb{E}\Big[\sum_{0<s\leq 1} 1_U(\Delta Y(s))\Big].$$

El siguiente teorema dice que siempre podemos descomponer un proceso de Lévy como la suma de un proceso de saltos y un Movimiento Browniano con deriva. Una prueba sencilla puede consultarse en [14]

Teorema 1.1.4. *Sea X_t un proceso de Lévy, entonces*

$$X_t = \alpha t + \sigma B(t) + \int_{|z|<R} z\tilde{N}(t, dz) + \int_{|z|\geq R} zN(t, dz),$$

donde $\alpha, \sigma \in \mathbb{R}, R \in [0, \infty]$, $\tilde{N}(t, dz) = N(t, dz) - tv(dz)$ y $B(t)$ es un movimiento Browniano.

Teorema 1.1.5. *En el Teorema 1.1.4 siempre es posible elegir $R = 1$. Si $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$, para todo $t \geq 0$, entonces,*

$$\int_{|z|\geq 1} |z|v(dz) < \infty$$

y por lo tanto podemos tomar $R = \infty$ y así

$$X_t = \alpha t + \sigma B(t) + \int_{\mathbb{R}} z\tilde{N}(t, dz).$$

1.1.2. Semimartingalas e Integración Estocástica

La integral de Ito esta definida para un conjunto muy limitado de procesos estocásticos, Sin embargo muchas aplicaciones requieren considerar integradores más generales. Así es necesario construir un concepto de integral que incluya un conjunto más amplio de integrales.

Definicion 1.1.4. Un proceso H se dice simple predictible si H tiene una representación

$$H_t = H_0 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i 1_{(T_i, T_{i+1}]}(t),$$

donde $0 = T_1 \leq \cdots \leq T_{i+1} < \infty$ es una sucesión finita de tiempos de paro, $H_i \in \mathcal{F}_{T_i}$ con $|H_i| < \infty$ c.s. La colección de procesos simples predictibles será denotada por $\mathbf{S}$.

Llamaremos $\mathbf{S}_u$ el conjunto $\mathbf{S}$ con la topología de convergencia uniforme en (t, w) y $\mathbf{L}^0$ el espacio de variables aleatorias finito valuadas con la topología de convergencia en probabilidad. Para un proceso X definimos la función lineal $\mathbf{I}_X : \mathbf{S_u} \to \mathbf{L}^0$ como

$$\mathbf{I}_X(H) = H_0 X_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i (X_{T_{i+1}} - X_{T_i}).$$

Definicion 1.1.5. Diremos que un proceso adaptado X es una semimartingala total si X es càdlàg y la función $\mathbf{I}_X : \mathbf{S_u} \to \mathbf{L}^0$ es continua. Diremos que X es una semimartingala si $\forall T \geq 0$, $(X_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ es una semimartingala total.

Una consecuencia inmediata de la definición es que el conjunto de semimartingalas forma un espacio vectorial. También se sigue que si una semimartingala es adaptada a una subfiltración $\mathbb{G}$ de $\mathbb{F}$, entonces X es también una $\mathbb{G}$-semimartingala. Otro hecho importante es que la propiedad de ser semimartingala es local. Para un proceso X y un tiempo de paro T, definimos el proceso parado en $T-$ como $X_t^{T-} = X_t 1_{\{0\leq t<T\}} + X_{T-}1_{\{T\geq t\}}$.

Teorema 1.1.6. *Sea X un proceso adaptado y càdlàg. Sea (T_n) una sucesión creciente de variables aleatorias positivas creciendo a infinito y (X^n) una sucesión de semimartingalas tal que para todo n, $X^{T_n-} = (X^n)^{T_n-}$, entonces X es una semimartingala.*

Definicion 1.1.6. Diremos que un proceso X càdlàg es descomponible si puede ser escrito como $X_t = X_0 + M_t + A_t$, donde $M_0 = A_0 = 0$, M es una martingala localmente cuadrado integrable y A es un proceso adaptado, càdlàg y de variación finita en los compactos de $[0, \infty)$.

En vista del Teorema 1.1.4, un proceso de Lévy es un proceso descomponible. El siguiente teorema proporciona buenos ejemplos de procesos que son semimartingalas.

Teorema 1.1.7. *Son semimartingalas*

a) Cualquier martingala en L^2 con trayectorias cádlag.

b) Un proceso descomponible.

c) Un proceos de Lévy.

d) Una martingala local con trayectorias continuas.

Vamos ahora a definir integración estocástica respecto a una semimartingala. Del Teorema 1.1.7 se sigue en particular que el movimiento Browniano es una semimartingala, así una definición de integral, debería coincidir con la integral de Ito cuando el integrador es un movimiento Browniano. Sea $\mathbb{D}$ el espacio de procesos adaptados con trayectorias càdlàg, $\mathbb{L}$ el espacio de procesos adaptados con trayectorias càglàd (continuas por la izquierda con limites por la derecha) y $\mathbf{b}\mathbb{L}$ los procesos en $\mathbb{L}$ con trayectorias acotadas.

Definicion 1.1.7. Una sucesión de procesos $(H^n)_{n\geq 1}$ converge a un proceso H uniformemente en compactos en probabilidad(ucp) si para todo $t > 0$, $\sup_{0\leq s\leq t} |H_s^n - H_s|$ converge a 0 en probabilidad.

Sean $\mathbb{D}_{ucp}$, $\mathbb{L}_{ucp}$ y $\mathbf{S}_{ucp}$ los respectivos espacios con la topología ucp. Podemos metrizar $\mathbb{D}_{ucp}$ por

$$d(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathbb{E}(\text{mín}\{1, \sup_{0\leq s\leq n} |X_s - Y_s|\}).$$

$\mathbb{D}_{ucp}$ es de hecho un espacio métrico completo y $\mathbf{S}_{ucp}$ es denso en $\mathbb{L}_{ucp}$.

Definicion 1.1.8. Para $H \in \mathbf{S}$ y X un proceso adaptado y càdlàg, definimos la función lineal $J_X : \mathbf{S} \to \mathbb{D}$

$$J_X(H) = H_0 X_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i (X^{T_{I+1}} - X^{T_i}),$$

donde $X_t^{T_i} = X_{T_i \wedge t}$. Llamamos $J_X(H)$ la integral estocástica de H con respecto a X.

Teorema 1.1.8. *Sea X una semimartingala. La función $J_X : \mathbf{S}_{ucp} \to \mathbb{D}_{ucp}$ es continua.*

Para una semimartingala X, el operador J_X es continuo en $\mathbf{S}_{ucp}$ y además $\mathbf{S}_{ucp}$ es denso en $\mathbb{L}_{ucp}$. Así J_X se puede extender de $\mathbf{S}$ a $\mathbb{L}$ por continuidad, dado que $\mathbb{D}_{ucp}$ es un espacio métrico completo.

Definicion 1.1.9. Sea X una semimartingala. La extensión continua de $J_X : \mathbb{L}_{ucp} \to \mathbb{D}_{ucp}$ es llamada la integral estocástica.

Para $H \in \mathbb{L}$ y X una semimartingala, denotaremos la integral

$$(J_X(H))_t = H \cdot X_t = \int_0^t H_s dX_s.$$

1.1.3. Variación Cuadrática de una Semimartingala

El proceso de variación cuadrática de una semimartingala es un concepto de gran importancia en el estudio de integración estocástica.

Definicion 1.1.10. Sean X y Y semimartingalas. El proceso de variación cuadrática de X, denotado por $[X,X] = ([X,X]_t)_{t\geq 0}$ es definido por

$$[X,X] = X^2 - 2\int X_- dX,$$

con $X_{0-} = 0$). La covariación cuadrática de X y Y, es definida por

$$[X,Y] = XY - \int X_- dY - \int Y_- dX.$$

Es fácil ver que el operador $(X,Y) \to [X,Y]$ es bilíneal y simétrico, esto nos da la identidad de polarización

$$[X,Y] = \frac{1}{2}([X+Y, X+Y] - [X,X] - [Y,Y]).$$

Recordemos que para un proceso X, X^T denota el proceso $X^T_t = X_{T\wedge t}$.

Definicion 1.1.11. Sea σ una sucesión finita de tiempos de paro finitos:

$$0 = T_0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_k < \infty.$$

La sucesión σ es llamada una partición aleatoria. Una sucesión de particiones aleatorias σ_n,

$$\sigma_n : T_0^n \leq T_1^n \leq \cdots \leq T_{k_n}^n$$

se dice que tiende a la identidad si

i) $\lim_{n\to\infty} \sup_k T_k^n = \infty$ c.s.; y

ii) $||\sigma_n|| = \sup_k |T_{k+1}^n - T_k^n|$ converge a 0 c.s.

Teorema 1.1.9. *Sea X una semimartingala. El proceso de variación cuadrática de X es un proceso adaptado, càdlàg y creciente. Más aún, satisface las siguientes propiedades* *i)* $[X, X]_0 = X_0^2$ *y* $\Delta[X, X] = (\Delta X)^2$

ii) Si σ_n *es una sucesión de particiones aleatorias convergiendo a la identidad, entonces*

$$X_0^2 + \sum_i (X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n})^2 \to [X, X]$$

con convergencia en ucp*, donde* σ_n *es la sucesión* $0 = T_0^n \leq T_1^n \leq \cdots \leq T_{k_n}^n$ *para* T_i^n *tiempos de paro.*

iii) Si T *es cualquier tiempo de paro, entonces* $[X^T, X] = [X, X^T] = [X^T, X^T] = [X, X]^T$

Un resultado análogo se cumple para el caso de la covariación.

Teorema 1.1.10. *Sean* X *y* Y *semimaratingalas. El proceso* $[X, Y]$ *satisface*

i) $[X, Y]_0 = X_0 Y_0$ *y* $\Delta[X, Y] = \Delta X \Delta Y$

ii) Si σ_n *es una sucesión de particiones aleatorias convergiendo a la identidad, entonces*

$$X_0 Y_0 + \sum_i (X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n})(Y^{T_{i+1}^n} - Y^{T_i^n}) \to [X, Y]$$

con convergencia en ucp*, donde* σ_n *es la sucesión* $0 = T_0^n \leq T_1^n \leq \cdots \leq T_{k_n}^n$ *para* T_i^n *tiempos de paro.*

iii) Si T *es cualquier tiempo de paro, entonces* $[X^T, Y] = [X, Y^T] = [X^T, Y^T] = [X, Y]^T$

1.1.4. Proceso Ito-Levý

Vimos que los proceso de Lévy son semimartiingalas, esto hace natural considerar proceso de la forma

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(s) ds + \int_0^t \beta(s) dB(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(s, z) \overline{N}(ds, dz)$$

donde

$$\overline{N}(ds, dz) = \begin{cases} N(ds, dz) - \nu(dz) ds, & \text{si } |z| < R \\ N(ds, dz), & \text{si } |z| \geq R \end{cases}$$

y $\alpha(t,w), \beta(t,w), \gamma(t,z,w)$ son tales que las integrales existen. En forma diferencial

$$dX(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\overline{N}(dt,dz)$$

llamaremos estos procesos, procesos de Ito-Lévy.

Teorema 1.1.11. *Sea*

$$M(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(s,z)\tilde{N}(ds,dz), \qquad 0 \le t \le T.$$

Si

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \gamma^2(t,z)\nu(dz)dt\Big] < \infty,$$

el proceso M(t) es una martingala. Si

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \gamma^2(t,z)\nu(dz)dt < \infty \quad c.s,$$

el proceso $M(t)$ es una martingala local.

Teorema 1.1.12. *(Fórmula de Ito) Sea X un proceso de Ito-Levý. Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y definamos $Y(t) = f(t, X(t))$. Entonces,*

$$\begin{aligned} dY(t) =& \frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))[\alpha(t)dt + \beta(t)dB(t)] + \frac{1}{2}\beta^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X(t))dt \\ &+ \int_{|z|<R} \big\{f(t,X(t-)+\gamma(t,z)) - f(t,X(t-)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t-))\gamma(t,z)\big\}\nu(dz)dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \{f(t,X(t-)+\gamma(t,z)) - f(t,X(t-))\}\overline{N}(dt,dz) \end{aligned}$$

Corolario 1.1.12.1. *Sea $X(t)$ un proceso de Ito-Lévy con $X(0) = 0$ y $\alpha(t) = 0$, entonces*

$$\mathbb{E}[X^2(t)] = \mathbb{E}\Big[\int_0^T \beta^2(t)dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \gamma^2(t,z)\nu(dz)dt\Big]$$

Siempre que el lado derecho sea finito.

Observación. Notemos que si

$$dX(t) = \int_{\mathbb{R}} z\tilde{N}(dt,dz) \in \mathbb{R},$$

entonces por el corolario anterior, $E[X^2(T)] = T\int_{\mathbb{R}} z^2\nu(dz) < \infty$. Así, se vale la isometría

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t H(t)dX(t)\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^t H^2(t)dt\Big]\int_{\mathbb{R}} z^2\nu(dz),$$

para todo $H \in \mathbb{L}_{ucp}$ tal que $H \in L^2([0,T] \times \Omega)$, esto es tal que

$$||H||^2_{L^2([0,T]\times\Omega)} = \mathbb{E}\Big[\int_0^t H^2(t)dt\Big] < \infty.$$

Usando esto, podemos extender la definición de la integral

$$\int_0^T Y(t)dX(t) \in L^2(\Omega)$$

a todos los procesos $Y(t)$ que son límites en $L^2([0,T] \times \Omega)$ de procesos $H_n(t) \in \mathbb{L}_{ucp} \cap L^2([0,T] \times \Omega)$. Llamaremos tale s procesos $Y(t)$ proceso predictibles.

Ejemplo 1.1.13. El Teorema 1.1.12 es un resultado de mucha utilidad. Una aplicación sencilla es generalizar el Movimiento Browniano Geométrico. Supongamos que X es un proceso de Ito-Lévy con $\gamma(t,z) > -1$. Consideremos la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = S_{t-}dX_t = S(t-)\alpha(t)dt + S(t-)\beta(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}} S(t-)\gamma(t,z)\overline{N}(dt,dz)$$

Definamos $Y(t) = \ln S(t)$. Aplicando fórmula de Ito

$$\begin{aligned}
dY(t) =& \frac{1}{S(t)}[S(t-)\alpha(t)dt + S(t-)\beta(t)dB(t)] - \frac{1}{2}\frac{\beta^2(t)S^2(t-)}{S^2(t)}dt \\
&+ \int_{|z|<R} \Big\{ \ln(X(t-) + S(t-)\gamma(t,z)) - \ln(S(t-)) - \frac{\gamma(t,z)S(t-)}{S(t-)}\Big\}\nu(dz)dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \{\ln(S(t-) + S(t-)\gamma(t,z)) - \ln(S(t-))\}\overline{N}(dt,dz) \\
=& \Big(\alpha(t) - \frac{1}{2}\beta^2(t)\Big)dt + \beta(t)dB(t) \\
&+ \int_{|z|<R} \Big\{ \ln(1+\gamma(t,z)) - \gamma(t,z)\Big\}\nu(dz)dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \Big\{ \ln(1+\gamma(t,z))\Big\}\overline{N}(dt,dz)
\end{aligned}$$

. Esto último nos dice que

$$\begin{aligned}
Y(t) =& Y(0) + \int_0^t \Big(\alpha(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s)\Big)ds + \int_0^t \beta(s)dB(s) \\
&+ \int_0^t \int_{|z|<R} \Big\{ \ln(1+\gamma(s,z)) - \gamma(s,z)\Big\}\nu(dz)ds \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Big\{ \ln(1+\gamma(s,z))\Big\}\overline{N}(ds,dz),
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}S(t) =&S(0)\exp\Big\{\int_0^t\Big(\alpha(s)-\frac{1}{2}\beta^2(s)\Big)ds+\int_0^t\beta(s)dB(s)\\&+\int_0^t\int_{|z|<R}\big\{\ln(1+\gamma(s,z))-\gamma(s,z)\big\}\nu(dz)ds\\&+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\big\{\ln(1+\gamma(s,z))\big\}\overline{N}(ds,dz)\Big\}.\end{aligned}$$

1.1.5. Teorema de Girsanov Para Procesos de Ito-Lévy

Consideremos $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado, $T>0$ fijo y Q una medida de probabilidad en $\mathcal{F}_T$ la cual es equivalente a $\mathbb{P}$ en $\mathcal{F}_T$. Por el teorema de Radon-Nikodym

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}}=Z(T)$$

para alguna variable aleatoria $Z(T)$ la cual es $\mathcal{F}_T$-medible y positiva $\mathbb{P}-$c.s.

Lema 1.1.1. *Supongamos que $Q<<P$(Q es absolutamente continua con respecto a $\mathbb{P}$) con $\frac{dQ}{d\mathbb{P}}=Z(T)$ en $\mathcal{F}_T$. Entonces*

$$Q|\mathcal{F}_t<<\mathbb{P}|\mathcal{F}_t\quad\forall t\in[0,T]$$

y

$$Z(t)=\frac{d(Q|\mathcal{F}_t)}{d(\mathbb{P}|\mathcal{F}_t)}=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z(T)|\mathcal{F}_t],\qquad 0\leq t\leq T.$$

En particular, $Z(t)$ es una $\mathbb{P}$-martingala.

Lema 1.1.2. *Supongamos que $Q<<P$ con $\frac{dQ}{d\mathbb{P}}=Z(T)$ en $\mathcal{F}_T$. Sea $Y(t)$ un proceso adaptado tal que $Z(t)Y(t)$ es una martingala con respecto a $\mathbb{P}$. Entonces $Y(t)$ es una martingala con respecto a Q. Similarmente, si $Z(t)Y(t)$ es una martingala local con respecto a P, entonces $Y(t)$ es una martingala local con respecto a Q.*

Teorema 1.1.14. *(Teorema de Girsanov para semimartingalas). Sea Q una medida de probabilidad en $\mathcal{F}_T$ equivalente a $\mathbb{P}$, con*

$$dQ=Z(t)d\mathbb{P}\quad en\quad\mathcal{F}_t,\ t\in[0,T].$$

Sea $M(t)$ una $\mathbb{P}$-martingala local. entonces el proceso $\hat{M}(t)$ definido por

$$\hat{M}(t) = M(t) - \int_0^t \frac{d[M, Z](s)}{Z(s)}$$

es una Q-martingala local.

Teorema 1.1.15. *(Teorema de Girsanov para procesos de Ito-Lévy) Sea $X(t)$ un proceso de Ito-Lévy de la forma*

$$dX(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\tilde{N}(dt,dz), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Supongamos que existen procesos predictibles $u(t), \theta(t,z)$ tales que

$$\beta(t)u(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\theta(t,z)\nu(dz) = \alpha(t)$$

y tal que el proceso

$$\begin{aligned} Z(t) = \exp\Big[&- \int_0^t u(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(s)ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1-\theta(s,z))\tilde{N}(ds,dz) \\ &+ \int_0^t \int_R \{\ln(1-\theta(s,z)) + \theta(s,z)\}\nu(dz)ds\Big] \qquad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

es bien definido y satisface $\mathbb{E}[Z(T)] = 1$. Defina la medida de probabilidad Q en $\mathcal{F}_T$ por $dQ = Z(T)d\mathbb{P}$. Entonces $X(t)$ es una martingala local respecto a Q.

CAPÍTULO 2

MODELO DE INVERSIÓN EN UN ACTIVO CON RIESGO DE LIQUIDEZ

Muchos de los modelos financieros suponen que hay liquidez en el mercado, esto es, que un agente puede vender o comprar acciones de un activo en cada instante de tiempo, y que además este cambio de posición no genera costos adicionales. Estos modelos, aunque útiles, no son reales en la práctica, pues en muchos mercados las transacciones solo se pueden llevar a cabo en ciertos momentos. Ejemplos comunes de mercados que presentan este tipo de impedimento son aquellos relacionados con capital humano, planes de pensión y fondos de inversión.

En este capítulo consideraremos un problema de optimización de portafolios de inversión en un horizonte de tiempo finito, cuando hay restricciones en los tiempos de transacción. En estos modelos, supondremos que los tiempos en los cuales se puede cambiar el portafolio son aleatorios. Un modelo de este tipo, ofrece un panorama más realista en contraposición al modelo clásico propuesto por Merton.

Algunos antecedentes al modelo planteado aquí son: Rogers y Zane [15] y Matsumoto

[10] quienes proponen un modelo de inversión en un activo con riesgo y otro sin riesgo y donde las inversiones se dan solo en los saltos de un proceso de Poisson homogéneo, pero el proceso de precios es observado continuamente. Pham y Tankov [13] suponen un horizonte de tiempo infinito y también que los tiempos de transacción corresponden a un proceso de Poisson, pero en este caso, el proceso de precio del activo es observado solo en los instantes de transacción.

2.1. Planteamiento del Modelo

Fijaremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un horizonte de tiempo finito T. Supondremos que un agente puede invertir en un activo con proceso de precios $(S_t)_{t\geq 0}$ sólo en los tiempos de llegadas $(\tau_n)_{n\geq 0}$ de un proceso de Poisson, el cual es independiente de $(S_t)_{t\geq 0}$. El proceso de precios corresponde a la solución de la ecuación

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_{t-} dM_t, \ \ S_0 = s_0,$$

donde M es un proceso de Itó-Levy con $M_0 = 0$, $\Delta M > -1$ y

$$dM_t = \alpha(t)dt + \beta(t)dB_t + \int_{-1}^{\infty} z(N(dt, dz) - \nu(dz)dt). \tag{2.1}$$

Así, S_t satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = S_{t-}\Big[\alpha(t)dt + \beta(t)dB_t + \int_{-1}^{\infty} z(N(dt, dz) - \nu(dz)dt)\Big]. \tag{2.2}$$

Supondremos además que

1. $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}$ es una función determinista con $\int_0^T |\alpha(t)|dt < \infty$
2. $\beta : [0, T] \to (0, \infty)$ es una función determinista con $\int_0^T \beta^2(t)dt < \infty$
3. $\int_0^T \frac{\alpha^2(t)}{\beta^2(t)} dt < \infty$
4. $\int_0^T \int_{-1}^{\infty} z\nu(dz)dt < \infty$

5. $\nu(\{T\},(-1,\infty)) = 0$, donde $\nu(U,V) = \int_U \int_V \nu(dz)dt$. En otras palabras, estamos suponiendo que al tiempo terminal T, no hay saltos en el precio i.e $S_T = S_{T-}$.

De acuerdo al Ejemplo 2.2,

$$
\begin{aligned}
S(t) =& S(0) \exp \Big\{ \int_0^t (\alpha(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s))ds + \int_0^t \beta(s)dB(s) \\
&+ \int_0^t \int_{-1}^{\infty} \ln(1+z)N(ds,dz) - \int_0^t \int_{-1}^{\infty} z\nu(dz)ds \Big\} \\
=& S(0) \exp \Big\{ M_t - \frac{1}{2} \int_0^t \beta^2(s)ds \Big\} \exp \Big\{ \int_0^t \int_{-1}^{\infty} (\ln(1+z) - z)N(ds,dz) \Big\} \\
=& S(0) \exp \Big\{ M_t - \frac{1}{2} \int_0^t \beta^2(s)ds \Big\} \exp \Big\{ \sum_{s \le t} [\ln(1+\Delta M_s) - \Delta M_s] \Big\} \\
=& S(0) \exp \Big\{ M_t - \frac{1}{2} \int_0^t \beta^2(s)ds \Big\} \prod_{s \le t} (1+\Delta M_s) e^{\Delta M_s}
\end{aligned}
$$

Observación. EL proceso que elegimos para modelar el precio del activo se justifica en lo siguiente:

i) Podemos suponer que $S(0) = 1$ y, dado que $\Delta M_t > -1$, entonces $S(t) \ge 0$ y de hecho $S(t) > 0$ c.s.

ii) Es fácil ver que $S(t)$ es una generalización del movimiento Browniano geométrico, que es comúnmente usado en finanzas para modelar el precio de los activos.

Para $0 \le t \le s < T$, definimos el retorno entre t y s como

$$
Z_{t,s} = \frac{S_s - S_t}{S_t} = \Big\{ e^{(M_s - M_t - \frac{1}{2}\int_t^s \beta^2(u)du)} \prod_{t < u \le s} e^{-\Delta M_u}(1+\Delta M_u) \Big\} - 1
$$

y denotamos por $p(t,s,dz) = \mathbb{P}[Z_{t,s} \in dz]$.

Proposición 2.1.1. *Existe una constate $C > 0$ tal que*

$$
\int_{(-1,\infty)} |z| p(t,s,dz) \le C
$$

para todos $0 \le t \le s < T$. Esto es $\mathbb{E}[|Z_{t,s}|]$ es uniformemente acotada.

Consideraremos en el intervalo $[0, T]$ un proceso de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ no homogéneo con función de intensidad $\lambda : [0, T) \to (0, \infty)$, donde lambda es una función determinista que satisface

$$\int_0^t \lambda(s)ds < \infty, \ \forall t < T,$$

y

$$\int_0^T \lambda(s)ds = \infty.$$

Con lambda construida de esta manera, tendremos una sucesión creciente e infinita de llegadas en el proceso de Poisson en el intervalo $[0, T)$. Llamaremos esta secuencia $(\tau_n)_{n\geq 0}$. Es fácil ver que $(\tau_n)_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov homogénea con probabilidades de transición,

$$\mathbb{P}[\tau_{n+1} \in ds | \tau_n = t] = \lambda(s) e^{-\int_t^s \lambda(u)du} 1_{\{t \leq s < T\}} ds.$$

El agente solo podrá observar el proceso de precios en los tiempos $\tau_n's$. Así, la única información observable para el agente es la del proceso $(S_{\tau_n}, \tau_n)_{n\geq 0}$. Teniendo esto en mente, definimos la filtración de información observable $\mathcal{F}^I = (\mathcal{F}_n^I)_{n\geq 0}$

$$\mathcal{F}_n^I = \sigma\Big\{(S_{\tau_k}, \tau_k) : 0 \leq k \leq n\Big\}, \ n \geq 1 \tag{2.3}$$

y $\mathcal{F}_0^I$ es la sigma álgebra trivial.

Observación. Denotaremos por $Z_n = Z_{\tau_{n-1}, \tau_n}$ y $\Psi(t, s) = \lambda(s) e^{-\int_t^s \lambda(u)du}$. La independencia de N y S garantizan que para todo $n \geq 0$,

1. $$\mathbb{P}[\tau_{n+1} \in ds | \mathcal{F}_n^I] = \Psi(\tau_n, s)ds \tag{2.4}$$

2. $$\mathbb{P}[Z_{n+1} \in dz | \mathcal{F}_n^I \vee \sigma(\tau_{n+1})] = p(\tau_n, \tau_{n+1}, dz) \tag{2.5}$$

En este modelo, el agente comienza con un capital $X_0 > 0$. Una estrategia de inversión es un proceso no negativo $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ adaptado a la filtración $\mathcal{F}^I$ donde α_n representa la cantidad del capital invertido en el activo en el período $(\tau_n, \tau_{n+1}]$. Suponiendo que el mercado de dinero (el banco) paga una tasa de interés $r = 0$, entonces el proceso de capital X satisface

$$X_{\tau_{n+1}} = X_{\tau_n} + \alpha_n Z_{n+1} \ n \geq 0.$$

Definicion 2.1.1. Una estrategia de inversión $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ es llamada admisible si

$$X_{\tau_n} \geq 0 \ \ \forall n \geq 0.$$

Denotaremos por $\mathcal{A}$ el conjunto de todas las estrategias admisibles.

Observación. Sea $0 \leq t \leq s$. Dado que $S > 0$ c.s, entonces

$$S_s - S_t > -S_t,$$

y por lo tanto

$$Z_{t,s} = \frac{S_s - S_t}{S_t} > -1,$$

así la condición $X_{\tau_{n+1}} \geq 0$, nos implica

$$X_{\tau_n} \geq -\alpha_n Z_{n+1} \geq \alpha_n \geq 0. \tag{2.6}$$

Esta última desigualdad implica que no tenemos una posición corta en el activo.

Por razones técnicas es importante introducir un proceso de capital continuo que sea compatible con nuestro proceso. Para esto es necesario considerar la sigma álgebra no observable $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{G}_t = \sigma(S_u, N_u),\ 0 \leq u \leq t\} \vee \mathcal{N},\ \ 0 \leq t \leq T,$$

donde $\mathcal{N}$ son todos los conjuntos $\mathbb{P}$-nulos del proceso de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$. Es importante resaltar que, en vista del Teorema 1.1.1, la filtración $\mathcal{G}$ satisface las condiciones usuales y además tenemos que

$$\mathcal{F}_n^I \subset \mathcal{G}_{\tau_n}.$$

Proposición 2.1.2. *Sea $L_t = e^{-\int_0^t \frac{\alpha(u)}{\beta(u)}dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\alpha^2(u)}{\beta^2(u)}du}$ y definimos la medida de probabilidad Q tal que*

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}} = L_T,$$

Entonces el proceso S es una 23 $(Q, \mathcal{G})$ supermartingala.

Dado $\alpha \in \mathcal{A}$, podemos definir el proceso de capital para $0 \leq t < T$,

$$X_t = X_{\tau_n} + \alpha_n Z_{\tau_n,t}, \quad \tau_n \leq t \leq \tau_{n+1} \tag{2.7}$$

o equivalentemente

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_u dS_u \tag{2.8}$$

donde H_t es el proceso

$$H_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{S_n} 1_{\{\tau_n < t \leq \tau_{n+1}\}}.$$

Notemos que H_t representa la cantidad de acciones invertidas en el tiempo τ_n. El capital terminal se puede obtener mediante

$$X_T = \lim_{n\to\infty} X_{\tau_n} = \lim_{t\uparrow T} X_t = X_0 + \int_0^T H_u dS_u.$$

La condición (2.6) se traduce entonces a

$$0 \leq S_{t-}H_t \leq X_{t-}. \tag{2.9}$$

Denotamos por $\mathcal{X}$ el conjunto de procesos de capital $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ dados por (2.7) con la condición (2.9). Denotamos por $\overline{\mathcal{X}}$ el conjunto de todos los procesos de capital positivos dados por (2.7) pero usando un proceso general H el cual es $\mathcal{G}$ predecible, S-integrable y satisface (2.9). Para $X \in \overline{\mathcal{X}}$, definimos el proceso valuado en $[0,1]$, $\pi_t = \frac{H_t S_{t-}}{X_{t-}}$. Notemos entonces que

$$dX_t = \pi_t X_{t-} dM_t,$$

donde M_t está dado por (2.1).

2.2. Problema de Inversión Óptima

Para el modelo de inversión planteado en la sección anterior y una función de utilidad U, el problema consiste en encontrar una estrategia admisible $\alpha \in \mathcal{A}$ que optimice $\mathbb{E}[U(X_T)]$. La función de utilidad U debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. U es de clase C^1, estrictamente creciente y estrictamente cóncava en $(0, \infty)$

2. $U'(0+) = \infty$ y $U'(\infty) = 0$

3. Existe una constante $C > 0$ y $p \in (0, 1)$ tal que

$$U^+(x) \leq C(1 + x^p), \quad \forall x > 0$$

4. $U(0) > -\infty$, o existen $C' > 0$ y $p' < 0$ tal que

$$U^-(x) \leq C'(1 + x^{p'}), \quad \forall x > 0.$$

Ejemplo 2.2.1. Como función de utilidad podemos considerar $U(x) = \ln(x)$. En efecto, es fácil ver que U satisface las condiciones 1 y 2, la condición 3 se satisface tomando $C = 1$ y $p = \frac{1}{2}$ y para la condición 4, se puede elegir $C' = 1$ y $p' = -\frac{1}{2}$. La función $U(x) = \frac{x^r - 1}{r}$, $r < 1$ también satisface las condiciones para ser función de utilidad en nuestro caso.

2.3. Programación Dinámica

Recordemos que uno de nuestros objetivos es resolver el problema de optimización

$$V_0 = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[U(X_T)].$$

Para esto intentaremos encontrar una ecuación de programación dinámica. El siguiente lema nos brinda una manera de definir dicha ecuación.

Lema 2.3.1. *Sea $\alpha \in \mathcal{A}$ y sea $(X_{\tau_n})_{n\geq 0}$ el proceso de riqueza asociado a la estrategia α. Consideremos una función medible $v : [0,T) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $v(\tau_{n+1}, X_{\tau_{n+1}}) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, entonces*

$$\mathbb{E}[v(\tau_{n+1}, X_{\tau_{n+1}})|\mathcal{F}_n^I] = \int_{\tau_n}^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(\tau_n, s) v(s, X_{\tau_n} + \alpha_n z) p(\tau_n, s, dz) ds,$$

donde la igualdad es c.s.

Demostración. Por propiedades de la esperanza condicional y las ecuaciones (2.4) y (2.5) se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[v(\tau_{n+1}, X_{\tau_{n+1}})|\mathcal{F}_n^I] =& \mathbb{E}[\mathbb{E}[v(\tau_{n+1}, X_{\tau_{n+1}})|\mathcal{F}_n^I \vee \sigma(\tau_{n+1})]|\mathcal{F}_n^I] \\
=& \mathbb{E}[\mathbb{E}[v(\tau_{n+1}, X_{\tau_n} + \alpha_n Z_{n+1})|\mathcal{F}_n^I \vee \sigma(\tau_{n+1})]|\mathcal{F}_n^I] \\
=& \mathbb{E}\Big[\int_{(-1,\infty)} v(\tau_{n+1}, X_{\tau_n} + \alpha_n z) p(\tau_n, \tau_{n+1}, dz) \; |\mathcal{F}_n^I\Big] \\
=& \int_{\tau_n}^T \int_{(-1,\infty)} v(s, X_{\tau_n} + \alpha_n z) \Psi(\tau_n, s) p(\tau_n, s, dz) ds.
\end{aligned}$$

■

Sea ES el conjunto de funciones medibles w en $[0,T) \times (0,\infty)$ tales que:

1. $w(t, \cdot)$ es cóncava en $(0,\infty)$ para todo $t \in [0,T)$, y
2. para alguna constante positiva $C = C(w)$ tenemos

$$U(x) \leq w(t,x) \leq C(1+x), \;\; \forall (t,x) \in [0,T) \times (0,\infty).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
&\sup_{\alpha \in [0,x]} \int_t^T \int_{(-1,\infty)} v(s, x + \alpha z) \Psi(t,s) p(t,s,dz) ds \\
=& \sup_{\pi \in [0,1]} \int_t^T \int_{(-1,\infty)} v(s, x(1+\pi z)) \Psi(t,s) p(t,s,dz) ds,
\end{aligned}$$

así que, teniendo en cuenta el Lema 2.3.1, si denotamos por

$$\Gamma(t,x,\pi,v) = \int_t^T \int_{(-1,\infty)} v(s, x(1+\pi z)) \Psi(t,s) p(t,s,dz) ds$$

para $(t, x, \pi, v) \in [0, T) \times (0, \infty) \times [0, 1] \times ES$ y

$$\overline{\Gamma}(t, x, v) = \sup_{\pi \in [0,1]} \Gamma(t, x, \pi, v),$$

podemos plantear la ecuación de programación dinámica como

$$v(t, x) = \overline{\Gamma}(t, x, v)$$

para todo $(t, x) \in [0, T) \times (0, \infty)$, junto con la condición

$$\lim_{t \uparrow T, x' \to x} v(t, x) = U(x), \quad x > 0.$$

La definición de ES puede parecer poco natural, sin embargo es adecuada pues, como se verá mas adelante, se cumple que el operador definido como $\mathcal{L}w(t, x) = \overline{\Gamma}(t, x, w)$ actúa de ES en ES. Así, podemos plantear el problema de programación dinámica como: Encontrar $w \in ES$ tal que

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = w \\ \lim_{t \uparrow T, x' \to x} w(t, x) = U(x) \end{cases} \tag{2.10}$$

Lema 2.3.2. *Para $w \in ES$, $\mathcal{L}w \in ES$. Para todo $(t, x) \in [0, T) \times (0, \infty)$, existe $\alpha \in [0, x]$ tal que*

$$\Gamma(t, x, \alpha, w) = \overline{\Gamma}(t, x, w)$$

Demostración. Lo primero que vamos a verificar es que $\mathcal{L}w$ satisface la condición 2 en la definición de ES. Para esto, notemos que

$$\int_t^T \Psi(t, s) ds = 1.$$

En efecto

$$\begin{aligned} \int_t^T \Psi(t, s) ds &= \int_t^T \lambda(s) e^{-\int_t^s \lambda(u) du} ds = -e^{-\int_t^s \lambda(u) du} \Big|_t^T \\ &= -e^{-\int_t^T \lambda(u) du} + e^{-\int_t^t \lambda(u) du} = 1 \end{aligned}$$

Sea $w \in ES$, entonces existe una constante $C = C(w)$ tal que para todo $(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty)$, $w(t,x) \leq C(1+x)$, así,

$$\begin{aligned}\Gamma(t,x,\pi,w) \leq & C\int_t^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(s,t)(1+x(1+\pi z))p(t,s,dz)ds \\ = & C\Big[\int_t^T \Psi(t,s)\int_{(-1,\infty)} p(t,s,dz)ds + x\pi\int_t^T \Psi(s,t)\int_{(-1,\infty)} zp(t,s,dz)ds\Big] \\ \leq & C[1+xC_2] \leq C_3(1+x)\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la Proposición 2.1.1. Tomando supremo por los $\pi \in [0,1]$,

$$\mathcal{L}w(t,x) = \overline{\Gamma}(t,x,w) \leq C_3(1+x). \tag{2.11}$$

Similarmente, dado que $U(x) \leq w(t,x)$, se tiene que

$$U(x) \leq \int_t^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(t,s)w(s,x)p(t,s,dz)ds = \Gamma(t,x,0,w) \leq \overline{\Gamma}(t,x,w),$$

y por lo tanto

$$U(x) \leq \mathcal{L}w. \tag{2.12}$$

De (2.11) y (2.12) se sigue que para todo $(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty)$,

$$U(x) \leq \mathcal{L}w(t,x) \leq C_3(1+x).$$

Verifiquemos ahora que $\mathcal{L}w$ es medible. Sea $(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty)$ fijo, entonces

$$U(x(1+\pi z)) \leq \Gamma(t,x,\pi,w),$$

y por la definición U, la función $\Gamma(t,x,\pi,w)$ es finita excepto posiblemente cuando $\pi = 1$ (si $U(0) = -\infty$). Por otro lado, dado que $w(s,\cdot)$ es cóncava entonces para todo $\lambda \in (0,1)$ y $x_1 \neq x_2$,

$$(1-\lambda)w(s,x_1) + \lambda w(s,x_2) \leq w(s,(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2,)$$

así dados $\pi_1 \neq \pi_2 \in [0,1)$, si elegimos $x_1 = x(1+\pi_1 z)$ y $x_2 = x(1+\pi_2 z)$ obtenemos

$$\begin{aligned}(1-\lambda)w(s,x(1+\pi_1 z)) + \lambda w(s,x(1+\pi_2 z)) \leq & w(s,(1-\lambda)x(1+\pi_1 z)) + \lambda x(1+\pi_2 z)) \\ = & w(s,x[1+((1-\lambda)\pi_1 + \lambda\pi_2)z]).\end{aligned}$$

De la desigualdad anterior se sigue fácilmente que

$$(1-\lambda)\Gamma(t,x,\pi_1,w)+\lambda\Gamma(t,x,\pi_2,w)\leq\Gamma(t,x,(1-\lambda)\pi_1+\lambda\pi_2,w)$$

lo cual implica que la función $\Gamma(t,x,\cdot,w)$ es cóncava para $\pi\in[0,1]$, y por lo tanto continua en el intervalo $(0,1)$ y se sigue inmediatamente del Lema de Fatou que $\Gamma(t,x,\cdot,w)$ es semicontinua por arriba en $[0,1]$. Así que $\mathcal{L}w(t,x) = \text{máx}_{\pi\in[0,1]}\Gamma(t,x,\pi,w)$. Por el Teorema de Kuratowsky y Ryll Nardzewski (ver [17] pag 189) la multifunción $(t,x)\to \arg\text{máx}_{\pi\in[0,1]}\Gamma(t,x,\pi,w)$ admite una selección medible. Finalmente, dado que la función $\pi\to\Gamma(t,x,\pi,w)$ es continua en $(0,1)$, entonces

$$\mathcal{L}w(t,x)=\underset{\pi\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}{\text{máx}}\Gamma(t,x,\pi,w),$$

lo cual prueba que $\mathcal{L}w$ es medible. Finalmente la concavidad de $\mathcal{L}w(t,\cdot)$ se sigue fácilmente de la concavidad de $w(t,\cdot)$. ■

2.3.1. Una supersolución a la ecuación de programación dinámica

Nuestro objetivo ahora es encontrar una solución al problema de programación dinámica planteado en (2.10). Para esto, se construirá primero una supersolución, es decir, vamos a resolver el problema

$$\begin{cases}\mathcal{L}w\leq w\\ \text{lím}_{t\uparrow T,x'\to x}w(t,x)=U(x),\end{cases}\tag{2.13}$$

para $(t,x)\in[0,T]\times(0,\infty)$.

Definicion 2.3.1. Sea U una función de utilidad. La función dual convexa de U es la función

$$\overline{U}(y)=\sup_{x>0}\{U(x)-xy\},\quad y>0.$$

El siguiente lema resume algunas de las propiedades elementales de la función dual convexa. Su prueba puede consultarse en [7].

Lema 2.3.3. *Sea U una función de utilidad y $\overline{U}$ su dual convexa, entonces* *a)* $\overline{U}$ *es convexa, no creciente y semicontinua por abajo*

b) *La derivada* $\overline{U}'$ *es definida, continua y no decreciente en* $(0, \infty)$

c) $U(x) = \inf_{y>0}\{\overline{U}(y) + xy\}, \;\; x > 0$

d) *Existen constantes* $C' > 0$*,* $q < 0$ *y* $0 < q' < 1$ *tales que* $\overline{U}^{+}(y) \leq C'(1 + y^{q})$*, y* $\overline{U}^{-}(y) \leq C'(1 + y^{q'})$ *para todo* $y > 0$*.*

Teorema 2.3.1. *Sean*

$$Y_{t,T} = e^{-\int_t^T \frac{\alpha(u)}{\beta(u)} dB_u - \frac{1}{2}\int_t^T (\frac{\alpha(u)}{\beta(u)})^2 du}$$

y

$$f(t,x) = \inf_{y>0}\{\mathbb{E}[\overline{U}(yY_{t,T})] + xy\} \;\; (t,x) \in [0,T) \times (0,\infty),$$

entonces $f \in ES$ *y*

$$\begin{cases} \mathcal{L}f \leq f \\ \lim_{t\uparrow T, x'\to x} f(t,x) = U(x) \end{cases} \tag{2.14}$$

Demostración. para cada $t \in [0, T)$, $f(t,\cdot)$ es claramente cóncava en $(0,\infty)$ por ser el ínfimo de funciones afines. Por otro lado, es fácil ver que $\mathbb{E}[Y_{t,T}] = 1$. Por la desigualdad de Jensen,

$$\overline{U}(y) = \overline{U}(\mathbb{E}[yY_{t,T}]) \leq \mathbb{E}[\overline{U}(yY_{t,T})],$$

sumando xy y tomando ínfimos

$$\inf_{y>0}\{\overline{U}(y) + xy\} \leq \inf_{y>0}\{\mathbb{E}[\overline{U}(yY_{t,T})] + xy\}.$$

De la definición de f, el Lema 2.3.3 y la desigualdad anterior,

$$U(x) \leq f(t,x). \tag{2.15}$$

y para y_0 fijo,

$$f(t,x) \leq E[\overline{U}(y_0 Y_{t,T})] + xy_0.$$

Si definimos

$$\mathcal{F}_t^{'} = \sigma\{(S_u - S_t, N_u - N_t),\ t \leq u \leq T\}.$$

la información futura a t, entonces por independencia

$$\mathbb{E}[Y_{0,T}|\mathcal{F}_t^{'}] = \mathbb{E}[Y_{0,t}Y_{t,T}|\mathcal{F}_t^{'}] = Y_{t,T}\mathbb{E}[Y_{0,t}] = Y_{t,T},$$

usando de nuevo la desigualdad de Jensen,

$$\mathbb{E}[\overline{U}(y_0 Y_{t,T})] = \mathbb{E}[\overline{U}(\mathbb{E}[y_0 Y_{0,T}|\mathcal{F}_t^{'}])] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[\overline{U}(y_0 Y_{0,T})|\mathcal{F}_t^{'}]] = \mathbb{E}[\overline{U}(y_0 Y_{0,T})] < \infty,$$

Usando la desigualdad anterior tenemos

$$f(t,x) \leq \mathbb{E}[\overline{U}(y_0 Y_{0,T})] + y_0 x \leq C(1+x). \tag{2.16}$$

De (2.15) y (2.16) se sigue que

$$U(x) \leq f(t,x) \leq C(1+x),\ \ \forall (t,x) \in [0,T) \times (0,\infty),$$

concluimos que $f \in ES$. Veamos ahora que f satisface la condición terminal. Por las propiedades de crecimiento de $\overline{U}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\overline{U}(yY_{t,T}))^2] \leq & \mathbb{E}[(\overline{U}^{+}(yY_{t,T}))^2] + \mathbb{E}[(\overline{U}^{-}(yY_{t,T}))^2] \\ \leq & C'(\mathbb{E}[(1+y^q Y_{t,T}^q)^2] + \mathbb{E}[(1+y^{q'} Y_{t,T}^{q'})^2])\end{aligned}$$

Usando la continuidad de la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal, podemos verificar fácilmente que que

$$\sup_{0 \leq t < T} \mathbb{E}[(\overline{U}(yY_{t,T}))^2] < \infty.$$

Esto significa que la colección de variables $\{\overline{U}(yY_{t,T})\}_{0 \leq t < T}$ es uniformemente integrable, y por tanto

$$\lim_{t \uparrow T} \mathbb{E}[\overline{U}(yY_{t,T})] = \overline{U}(y).$$

Esto último implica que para todo $x, y > 0$,

$$U(x) \leq \liminf_{t \uparrow T, x' \to x} f(t,x') \leq \limsup_{t \uparrow t, x' \to x} f(t,x') \leq \overline{U}(y) + xy$$

Tomando ínfimo en $y > 0$, obtenemos

$$U(x) \leq \liminf_{t \uparrow T, x' \to x} f(t, x') \leq \limsup_{t \uparrow t, x' \to x} f(t, x') \leq U(x)$$

y por lo tanto

$$\lim_{t \uparrow t, x' \to x} f(t, x') = U(x).$$

Fijemos ahora $0 \leq t \leq s \leq T$ $x > 0$, $y > 0$ y $\pi \in [0, 1]$. De la definición de f,

$$f(s, x(1 + \pi Z_{t,s})) \leq \mathbb{E}[\overline{U}(yY_{t,T})] + x(1 + \pi Z_{t,s})yY_{t,s}$$

tomando esperanza

$$\mathbb{E}[f(s, x(1 + \pi Z_{t,s}))] \leq \mathbb{E}[\overline{U}(yY_{t,T})] + xy\mathbb{E}[(1 + \pi Z_{t,s})Y_{t,s}]. \tag{2.17}$$

Notemos que $\mathbb{E}[(1 + \pi)Z_{t,s}Y_{t,s}] \leq 1$. Para esto, denotaremos por $\mathbb{E}_Q$ la esperanza respecto a la medida de probabilidad definida en la Proposición 2.1.2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(1 + \pi Z_{t,s})Y_{t,s}] =& \mathbb{E}[\mathbb{E}[(1 + \pi Z_{t,s})Y_{t,s} | \mathcal{G}_t]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(1 + \pi Z_{t,s})\frac{Y_{0,s}}{Y_{0,t}} | \mathcal{G}_t]] \\
=& \mathbb{E}[\mathbb{E}_Q[(1 + \pi Z_{t,s}) | \mathcal{G}_t]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}_Q[1 + \pi(\frac{S_s}{S_t} - 1) | \mathcal{G}_t]] \\
=& \mathbb{E}[\frac{1}{S_t}\mathbb{E}_Q[S_t + \pi(S_s - S_t) | \mathcal{G}_t]] \leq \mathbb{E}[\frac{1}{S_t}(S_t)] = 1,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue porque S es una $(Q, \mathcal{G})$ supermartingala. Así de la desigualdad (2.17)

$$\mathbb{E}[f(s, x(1 + \pi Z_{t,s}))] \leq \mathbb{E}[\overline{U}(yY_{t,T})] + xy,$$

tomando ínfimo por los $y > 0$,

$$\mathbb{E}[f(s, x(1 + \pi Z_{t,s}))] \leq f(t, x)$$

o equivalentemente

$$\int_{(-1,\infty)} f(s, x(1 + \pi z))p(t, s, dz) \leq f(t, x)$$

multiplicando por $\Psi(t, s)$ e integrando

$$\int_t^T \int_{(-1,\infty)} f(s, x(1 + \pi z))\Psi(t, s)p(t, s, dz)ds \leq \int_t^T \Psi(t, s)f(t, x)ds = f(t, x).$$

Concluimos que $\mathcal{L}f(t, x) \leq f(t, x)$.

$\blacksquare$

2.3.2. Solución a la ecuación de programación dinámica

El lema anterior es crucial para la construcción de una solución a nuestra ecuación de programación dinámica. Su importancia queda en evidencia en el siguiente lema.

Lema 2.3.4. *Definimos recursivamente la sucesión de funciones* $v_0 = U$, $v_{m+1} = \mathcal{L}v_m$. *Entonces*

$$v_m \leq v_{m+1} \leq f, \;\; m \geq 0.$$

Demostración. Usaremos inducción. Tenemos trivialmente $U = v_0 \leq v_1$, más aún, dado que el operador $\mathcal{L}$ es monótono y $U \leq f$ tenemos

$$v_1 = \mathcal{L}U \leq \mathcal{L}f \leq f,$$

así el estamento es cierto para $m = 0$. Usando ahora la hipótesis inductiva

$$v_{m+2} = \mathcal{L}v_{m+1} \leq \mathcal{L}v_m = v_{m+1}, \;\; v_{m+2} = \mathcal{L}v_{m+1} \leq \mathcal{L}f \leq f,$$

y esto concluye el resultado. ■

Notemos del lema anterior que la sucesión v_m es no decreciente y acotada, por lo tanto existe

$$v^* = \lim_{n\to\infty} v_m \leq f \tag{2.18}$$

Necesitaremos algunas condiciones adicionales en el proceso de saltos. Esto en parte porque en el caso en que $U(0) = -\infty$, se presentan algunos problemas de finitud. En específico vamos a suponer que

(H1) Existe $q > 1$ tal que

$$\int_0^T \int_0^\infty ((1+y)^q - 1 - qy)\nu(dy)dt < \infty$$

(H2) Si la función de utilidad U satisface que $U(0) = -\infty$, entonces existe $r < p' < 0$ tal que

$$\int_0^T \int_{-1}^0 ((1+y)^r - 1 - ry)\nu(dy)dt < \infty$$

(H3) $\nu(\{t\},(-1,\infty))=0$ para todo t.

Observación. Es fácil ver que la suposición 1 puede reescribirse como $\nu_q([0,T])<\infty$ y la condición 2 como $\nu_r([0,T])<\infty$ donde

$$\nu_l(dt)=\int_{-1}^{\infty}\sup_{\pi\in[0,1]}((1+\pi)^l-l\pi y)\nu(dy)dt$$

Vamos ahora a probar un lema técnico que nos ayudará en las pruebas de verificación. Para ello denotamos por $\mathcal{T}$ el conjunto de variables aleatorias $0\leq\tau<T$ las cuales son tiempos de paro con respecto a la filtración $\mathcal{G}$.

Lema 2.3.5. *Para cualquier $X\in\overline{\mathcal{X}}$, las familias $(f^+(\tau,X_\tau))_{\tau\in\mathcal{T}}$ y $U^-(X_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ son uniformemente $\mathbb{P}$-integrables.*

Demostración. Sea $X\in\overline{\mathcal{X}}$, recordemos entonces que

$$dX_t=\pi_tX_{t-}dM_t$$

el cuál es un proceso de Ito-Lévy de la forma

$$dX_t=\pi_tX_{t-}\alpha(t)dt+\pi_tX_{t-}\beta(t)dB(t)+\int_{-1}^{\infty}\pi_tX_{t-}z(N(dt,dz)-\nu(dz)dt).$$

Supongamos que para algún l, $\nu_l([0,T])<\infty$, aplicando fórmula de Ito (Teorema 1.1.12) a $(X_t)^l$,

$$\begin{aligned}d(X_t^l)=&l(X_t)^{l-1}[\pi_tX_{t-}\alpha(t)dt+\pi_tX_{t-}\beta(t)dB(t)]+\frac{1}{2}l(l-1)(X_t)^l\beta(t)^2\pi_t^2dt\\&+\int_{-1}^{\infty}\{(X_{t-})^l((1+z\pi_t)^l-1-lz\pi_t)\}\nu(dz)dt\\&+\int_{\mathbb{R}}\{(X_{t-})(1+z\pi_t)^l-1)\}(N(dt,dz)-\nu(dz)dt).\end{aligned}$$

Reagrupando términos e integrando

$$\begin{aligned}(X_t)^l=&x^l+\int_0^t(X_{u-})^l\{l\pi_u\alpha(u)+\frac{1}{2}l(l-1)\beta^2(u)\pi_u^2\}du\\&+\int_0^t\int_{-1}^{\infty}\{(X_{u-})^l((1+z\pi_u)^l-1-lz\pi_u)\}\nu(dz)du\\&+\text{términos de martingala local.}\end{aligned}$$

Fijemos $\tau \in \mathcal{T}$. Sea T_n' una sucesión de tiempos de localización para la parte de martingala local y

$$T_n = T_n' \wedge \{\text{ínf}\, t : (X_t)^l \geq n\}.$$

Notemos que $T_n \uparrow T$. Así, localizando y tomando esperanzas

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_{t\wedge\tau\wedge T_n})^l] =& x^l + \mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau\wedge T_n} (X_{u-})^l\{l\pi_u\alpha(u) + \frac{1}{2}l(l-1)\beta^2(u)\pi_u^2\}du \\ &+ \int_0^{t\wedge\tau\wedge T_n}\int_{-1}^{\infty}\{(X_{u-})^l((1+z\pi_u)^l - 1 - lz\pi_u)\}\nu(dz)du\Big]\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\mathbb{E}[(X_{t\wedge\tau\wedge T_n})^l] \leq x^l + \mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau\wedge T_n} (X_{u-})^l\Big\{\Big(|l\alpha(u)| + \frac{|l(l-1)|}{2}\beta^2(u)\Big)du + \nu_l(du)\Big\}\Big].$$

Dado que $(X_{u-})^l \leq n$ para $0 \leq u \leq \tau \wedge T_n$ y $\nu_l([0,T]) < \infty$, concluimos que

$$\mathbb{E}[(X_{t\wedge\tau\wedge T_n})^l] < \infty, \;\; 0 \leq t < T.$$

Teniendo en cuenta ahora que las trayectorias de X^l son càdlàg y $\nu_l(\{u\}) = 0$ para todo $0 \leq u \leq T$, tenemos

$$\begin{aligned}&\int_0^{t\wedge\tau\wedge T_n} (X_{u-})^l\Big\{\Big(|l\alpha(u)| + \frac{|l(l-1)|}{2}\beta^2(u)\Big)du + \nu_l(du)\Big\} = \\ &\int_0^{t\wedge\tau\wedge T_n} (X_{u})^l\Big\{\Big(|l\alpha(u)| + \frac{|l(l-1)|}{2}\beta^2(u)\Big)du + \nu_l(du)\Big\} \leq \\ &\int_0^{t} (X_{u\wedge\tau\wedge T_n})^l\Big\{\Big(|l\alpha(u)| + \frac{|l(l-1)|}{2}\beta^2(u)\Big)du + \nu_l(du)\Big\},\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}[(X_{t\wedge\tau\wedge T_n})^l] \leq x^l + \int_0^t \mathbb{E}[(X_{u\wedge\tau\wedge T_n})^l]\Big\{\Big(|l\alpha(u)| + \frac{|l(l-1)|}{2}\beta^2(u)\Big)du + \nu_l(du)\Big\}.$$

Aplicando lema de Gronwall,

$$\mathbb{E}[(X_{t\wedge\tau\wedge T_n})^l] \leq C(l).$$

Dado que $C(l)$ no depende de τ ni n, tendiendo $n \to \infty$ y $t \to T$,concluimos que

$$\mathbb{E}[(X_\tau)^l] \leq C(l).$$

Si $U(0) = -\infty$, entonces

$$U^-(x) \leq C'(1 + x^{p'})$$

así

$$\mathbb{E}[(U^-(X_\tau))^{r/p'}] \leq C'(1 + \mathbb{E}[(X_\tau)^r]) \leq K(r)$$

y por lo tanto $\{U^-(X_\tau)\}_{\tau \in \mathcal{T}}$ es uniformemente integrable. De forma análoga se procede con f. ■

Observación. En el lema anterior si tomamos $\pi_t = 1$ obtenemos que $X_t = X_0 S_t$, así si $U(0) = -\infty$, concluimos que

$$\mathbb{E}[(S_t)^r] = \mathbb{E}[(1 + Z_{0,t})^r] < \infty,$$

en general, uno puede concluir que

$$\mathbb{E}[(1 + Z_{t,s})^r] = \int_{(-1,\infty)} (1 + z)^r p(t, s, dz) < \infty.$$

El siguiente teorema garantiza que v^* construida de esta manera, satisface la ecuación de programación dinámica.

Teorema 2.3.2. *La función v^* definida en (2.18) satisface*

$$\begin{cases} \mathcal{L}v^* = v^* \\ \lim_{t \uparrow T, x' \to x} v^*(t, x) = U(x) \end{cases} \tag{2.19}$$

Demostración. Fijemos $\pi \in [0, 1]$. Recordemos que

$$v_{m+1}(t, x) \geq \int_t^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(t, s) v_m(s, x(1 + \pi z)) p(t, s, dz) ds.$$

Por construcción $U(x(1 - \pi)) \leq v_m(s, x(1 + \pi z))$ así que si $0 \leq \pi < 1$, la integral del lado derecho en la desigualdad anterior es claramente finita. En el caso $\pi = 1$, esta integral es de nuevo finita, de acuerdo a la observación anterior. Podemos usar teorema de convergencia monótona para concluir que

$$v^*(t, x) \geq \int_t^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(t, s) v^*(s, x(1 + \pi z)) p(t, s, dz) ds,$$

o equivalentemente

$$v^*(t,x) \geq \Gamma(t,x,\pi,v^*).$$

Tomando supremo sobre $\pi \in [0,1]$, tenemos $v^* \geq \mathcal{L}v^*$. Fijando ahora $\epsilon > 0$. Existe $m \geq 0$ tal que $v^*(t,x) - \epsilon \leq v_{m+1}(t,x)$ y usando convexidad, existe $\pi(t,x) \in [0,1]$ tal que

$$v^*(t,x) - \epsilon \leq v_{m+1}(t,x) = \Gamma(t,x,\pi(t,x),v_m)$$

y dado que $v_m \leq v^*$, entonces $\Gamma(t,x,\pi(t,x),v_m) \leq \Gamma(t,x,\pi(t,x),v^*) \leq \mathcal{L}v^*(t,x)$. Así

$$v^*(t,x) - \epsilon \leq \mathcal{L}v^*(t,x)$$

Luego si $\epsilon \to 0$, concluimos que $v^* \leq \mathcal{L}v^*$. Finalmente, dado que $U(x) \leq v^*(t,x) \leq f(t,x)$ y f satisface la condición terminal, el resultado se sigue. ■

2.4. Verificación

Después de haber construido una solución al problema de programación dinámica, vamos a ver cómo esta solución se relaciona con el problema de optimización.

Teorema 2.4.1. *Sea v^* la función definida en (2.18). Entonces*

$$V_0 = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[U(X_T)] = v^*(0, X_0)$$

y una estrategia óptima $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$ está dada por $\hat{\alpha}_n = \hat{\pi}(\tau_n, \hat{X}_{\tau_n})\hat{X}_{\tau_n}$, $n \geq 0$, donde $\hat{\pi}$ es una función medible en $[0,T) \times (0,\infty)$ solución a

$$\hat{\pi}(t,x) \in \arg\max_{\pi \in [0,1]} \Gamma(t,x,\pi,v^*)$$

y $(\hat{X}_{\tau_n})_{n\geq 0}$ es el capital dado por

$$\hat{X}_{\tau_{n+1}} = \hat{X}_{\tau_n} + \hat{\alpha}_n Z_{n+1}, \ \ n \geq 0 \text{ con } \hat{X}_0 = X_0$$

Demostración. Consideremos $\alpha \in \mathcal{A}$ y su correspondiente proceso de riqueza X. De acuerdo al Lema 2.3.5,

$$\mathbb{E}[|v^*(\tau_n, X_{\tau_n})|] < \infty, \ \ \forall n \geq 0$$

entonces, por el Lema 2.3.1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[v^*(\tau_{n+1}, X_{\tau_{n+1}})|\mathcal{F}^I_n] = & \int_{\tau_n}^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(\tau_n, s) v^*(s, X_{\tau_n} + \alpha_n z) p(\tau_n, s, dz) ds \\ \leq & \mathcal{L}v^*(\tau_n, X_{\tau_n}) = v^*(\tau_n, X_{\tau_n}).\end{aligned}$$

Esto implica que $\{v^*(\tau_n, X_{\tau_n})\}_{n\geq 0}$ es una $(\mathcal{F}^I, \mathbb{P})$- supermartingala. Recordemos que $U(x) \leq v^*(t,x)$, entonces

$$\mathbb{E}[U(X_{\tau_n})] \leq \mathbb{E}[v^*(\tau_n, X_{\tau_n})] \leq v^*(0, X_0).$$

Ya que $(U(X_\tau))_{\tau\in\mathcal{T}}$ es uniformemente integrable, haciendo $n \to \infty$, tenemos

$$\mathbb{E}[U(X_T)] \leq v^*(0, X_0),$$

y dado que $\alpha \in \mathcal{A}$ es arbitrario, tenemos que $V_0 \leq v^*(0, X_0)$. De manera análoga, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[v^*(\tau_{n+1}, \hat{X}_{\tau_{n+1}})|\mathcal{F}^I_n] = & \int_{\tau_n}^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(\tau_n, s) v^*(s, \hat{X}_{\tau_n} + \hat{\alpha}_n z) p(\tau_n, s, dz) ds \\ = & \mathcal{L}v^*(\tau_n, \hat{X}_{\tau_n}) = v^*(\tau_n, \hat{X}_{\tau_n})\end{aligned}$$

por lo cual el proceso $\{v^*(\tau_n, \hat{X}_{\tau_n})\}$ es una $(\mathcal{F}^I, \mathbb{P})$ martingala y por lo tanto

$$\mathbb{E}[v^*(\tau_n, \hat{X}_{\tau_n})] = v^*(0, X_0),$$

y pasando al límite,

$$\mathbb{E}[U(\hat{X}_T)] = v^*(0, X_0).$$

Concluimos que $V_0 = v^*(0, X_0)$ y $\hat{\alpha}$ es una estrategia de inversión óptima. ■

Observación. Un argumento completamente análogo al anterior funciona para un inversionista que empieza al tiempo t con un capital x. Esto significa que v^* es en efecto la función de valor para nuestro problema de optimización, es decir,

$$v^*(t,x) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}[U(X_T)|X_t = x]$$

Notemos que, por la definición de v^*, tenemos de antemano una forma de aproximar la función de valor. La siguiente proposición nos proporciona un algoritmo para aproximar también una estrategia de inversión óptima.

Proposición 2.4.1. *Sea $\mathcal{A}_m$ el conjunto de estrategias admisibles $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ tal que todo el capital es invertido en el mercado de dinero después de m llegadas, es decir $\alpha_n = 0$ para $n \geq m$. Entonces,*

$$v_m(0, X_0) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}_m} \mathbb{E}[U(X_T)]. \tag{2.20}$$

Para $0 \leq n \leq m-1$, consideremos la función medible $\hat{\pi}^n$ definida por

$$\hat{\pi}^n(t, x) = \arg\max_{\pi\in[0,1]} \Gamma(t, x, \pi, v_{m-n-1})$$

tal que

$$v_{m-n}(t, x) = \Gamma(t, x, \hat{\pi}^n(t, x), v_{m-n-1})$$

definamos la estrategia admisible $\hat{\alpha}^m \in \mathcal{A}_m$ por $\alpha_n^m = \hat{\pi}^n(\tau_n, \hat{X}_{\tau_n}^m)$ para $0 \leq n \leq m-1$ y $\alpha_n^m = 0$ para $n \geq m$, donde el proceso de capital está dado por

$$\hat{X}_{\tau_{n+1}}^m = \hat{X}_{\tau_n}^m + \hat{\alpha}_n^m Z_{n+1}, \;\; 0 \leq n \leq m-1, \;\; \hat{X}_{\tau_n}^m = X_{\tau_m}^m, \;\; n \geq m,$$

Comenzando con el capital inicial X_0. Entonces α^m es una estrategia óptima para (2.20).

2.5. Casos Particulares

Vamos a considerar ahora ciertas funciones de utilidad, para las cuales se puede caracterizar la función de valor mediante una ecuación más manejable. Un caso simple es considerar la función de utilidad $U(x) = \ln(x)$.

Proposición 2.5.1. *Sea $U(x) = \ln(x)$ y $(v_m)_{m\geq 0}$ la sucesión definida en el Lema 2.3.4, entonces*

$$v_m(t, x) = \ln(x) + g_m(t), \;\; \forall m \geq 1$$

para alguna función g_m que no depende de x.

Demostración. Veamos esto por inducción. Para el caso $m = 1$,

$$\begin{aligned}
v_1(t,x) &= \sup_{\pi\in[0,1]} \int_t^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(t,s)\ln(x(1+\pi z))p(t,s,dz)ds \\
&= \int_t^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(t,s)\ln(x)p(t,s,dz)ds \\
&+ \sup_{\pi\in[0,1]} \int_t^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(t,s)\ln(1+\pi z)p(t,s,dz)ds \\
&= \ln(x) + \sup_{\pi\in[0,1]} \int_t^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(t,s)\ln(1+\pi z)p(t,s,dz)ds
\end{aligned}$$

Notemos que la última expresión en la igualdad anterior no depende de x. Supongamos ahora que $v_m(t,x) = \ln(x) + g_m(t)$, así

$$\begin{aligned}
v_{m+1}(t,x) &= \sup_{\pi\in[0,1]} \int_t^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(t,s)v_m(s,x(1+\pi z))p(t,s,dz)ds \\
&= \sup_{\pi\in[0,1]} \int_t^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(t,s)(\ln(x(1+\pi z)) + g_m(s))p(t,s,dz)ds \\
&= \ln(x) + \sup_{\pi\in[0,1]} \int_t^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(t,s)(\ln(1+\pi z) + g_m(s))p(t,s,dz)ds.
\end{aligned}$$

De nuevo, la última expresión arriba es independiente de x. ■

De la proposición anterior, concluimos que la función de valor v^* satisface también que $v^*(t,x) = \ln(x) + g(t)$ donde g es una función no negativa tal que $g(T-) = 0$. Siguiendo las ideas de la proposición anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}v^*(t,x) &= \ln(x) + \int_t^T g(s)\Psi(t,s)ds \\
&\quad + \sup_{\pi\in[0,1]} \int_t^T \Psi(t,s)\Big(\int_{(-1,\infty)} \ln(1+\pi z)p(t,s,dz)\Big)ds
\end{aligned}$$

y dado que $\mathcal{L}v^* = v^*$, tenemos que

$$g(t) = \int_t^T g(s)\Psi(t,s)ds + \sup_{\pi\in[0,1]} \int_t^T \Psi(t,s)\Big(\int_{(-1,\infty)} \ln(1+\pi z)p(t,s,dz)\Big)ds$$

Consideremos ahora el caso en que

$$U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, \;\; x > 0, \;\; \gamma < 1, \gamma \neq 0.$$

En este caso se puede ver (con argumentos similares al caso anterior) que

$$v^*(t,x) = \frac{x^\gamma}{\gamma} g(t)$$

para alguna función g mayor que 1 en $[0,T)$ tal que $g(T-) = 1$. Además

$$\mathcal{L}v^*(t,x) = \frac{x^\gamma}{\gamma} \sup_{\pi\in[0,1]} \int_t^T \Psi(t,s)g(s)\Big(\int_{(-1,\infty)} (1+\pi z)^\gamma p(t,s,dz)\Big)ds$$

y nuevamente dado que $\mathcal{L}v^* = v^*$,

$$g(t) = \sup_{\pi\in[0,1]} \int_t^T \Psi(t,s)g(s)\Big(\int_{(-1,\infty)} (1+\pi z)^\gamma p(t,s,dz)\Big)ds$$

CAPÍTULO 3

LIQUIDEZ Y CONSUMO

En el capítulo anterior se abordó el problema de inversión óptima en una activo el cual presenta poca liquidez al inicio de un período de tiempo dado, pero que su liquidez aumenta al final de dicho período. En este capítulo consideramos el mismo modelo, solo que ahora, al agente se le es permitido consumir una porción de su capital. El concepto de consumo es importante en los enfoques modernos de matemáticas financieras, por ejemplo cuando se quiere alcanzar un estado de equilibrio en el mercado (una condición del mercado en la cual todos los movimientos son anulados por otros, resultando en un sistema estable y balanceado). Para el problema de equilibrio se supone que, cada vez que un agente recibe un capital, este pude consumir una porción, así como vender y/o comprar acciones del activo, pero no puede mantener ninguna porción de dicho capital. Es por ello que se hace necesario encontrar un proceso de consumo óptimo de modo que todos los inversionistas estén en capacidad de justificar sus decisiones de inversión y así el equilibrio pueda presentarse.

El objetivo de este capítulo será generalizar el modelo presentado en el capítulo 2, de modo que se tenga en cuanta el factor consumo así como también el riesgo de liquidez en el activo.

El problema de consumo bajo riesgo de liquidez ya ha sido estudiado en la literatura, Pham y Tankov [13] suponen que el precio de un activo puede ser observado solo en los tiempos aleatorios de un proceso de Poisson y que al inversionista se le es permitido consumir continuamente de su capital. Al considerar un horizonte de tiempo infinito, ellos se enfocan en maximizar la utilidad de consumo esperada. Schied y Schöneborn [16] plantean un modelo en el cual un agente debe vender una posición de acciones en un activo que presenta riesgo de liquidez.

3.1. Modelo de Consumo

De forma similar a como se hizo en el capítulo 2, supondremos que un agente que invierte en un activo, puede cambiar su posición sólo en los tiempos de llegada $(\tau_n)_{n\geq 0}$ de un proceso de Poisson, el cual es independiente del proceso de precios $(S_t)_{t\geq 0}$. Al tiempo τ_n, el agente elige una cantidad α_n de su capital para ser invertida en el activo, pero ahora elige también una tasa de consumo constante c_n durante el período $(\tau_n, \tau_{n+1}]$. Así, el proceso de capital sigue la dinámica

$$X_{\tau_{n+1}} = X_{\tau_n} + \alpha_n Z_{n+1} - c_n(\tau_{n+1} - \tau_n), \qquad \forall n \geq 0,$$

donde

$$Z_{n+1} = \frac{S_{\tau_{n+1}} - S_{\tau_n}}{S_{\tau_n}},$$

y el precio $(S_t)_{t\geq 0}$ sigue la dinámica dada por la ecuación (2.2) y satisface todas las suposiciones que se hicieron en sobre este proceso en el capítulo 2.

Definicion 3.1.1. i) Un proceso de consumo es un proceso $(c_n)_{n\geq 0}$, el cual es no negativo, $\mathcal{F}^I$ adaptado y tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\tau_{n+1} - \tau_n) < \infty \qquad c.s.$$

Aquí $\mathcal{F}^I$ es la sigma álgebra de información observable (ver ecuación (2.3)).

ii) Una estrategia de inversión es un proceso no negativo $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ adaptado a la filtración $\mathcal{F}^I$ donde α_n representa la cantidad del capital invertido en el activo en el período $(\tau_n, \tau_{n+1}]$.

iii) Un par (α_n, c_n) de inversión/consumo se dice admisible, si su respectivo proceso de capital X es tal que
$$X_{\tau_n} \geq 0, \qquad \forall n \geq 0.$$

Denotamos por $\mathcal{C}$ el conjunto de procesos de inversión/consumo admisibles. Nos planteamos el problema de optimización
$$V_0 = \sup_{(\alpha_n, c_n)\in\mathcal{C}} \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} U(c_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + U(X_T)\Big],$$
donde U es una función de utilidad definida en $\mathbb{R}_+$ con $U(0) = 0$, no decreciente, cóncava y de clase C^1 en $(0, \infty)$ satisfaciendo las condiciones $U'(0+) = \infty$ y $U'(\infty) = 0$. Supondremos además la siguiente condición de crecimiento en U: existen constantes $\gamma \in (0, 1)$ y $K > 0$, tales que
$$U(x) \leq Kx^{\gamma}. \tag{HC}$$

Por facilidad hemos utilizado la misma función de utilidad U para el capital final como para el consumo. Sin embargo, los razonamientos se mantienen iguales si consideramos un par de funciones de utilidad (U_1, U_2) satisfaciendo las condiciones de U.

Con el fin de encontrar V_0, trataremos de replicar los razonamientos presentados en el capítulo 2, haciendo las modificaciones adecuadas según sea el caso. Algunos resultados se presentan sin una demostración detallada debido a que las pruebas son muy similares a sus análogos en el anterior capítulo.

3.2. Programación Dinámica

Lema 3.2.1. *Sea* $(\alpha_n, c_n) \in \mathcal{C}$ *y sea* $(X_{\tau_n})_{n\geq 0}$ *el proceso de capital asociado a* (α_n, c_n). *Consideremos una función medible* $v : [0, T) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $v(\tau_{n+1}, X_{\tau_{n+1}}) \in$

$L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *entonces*

$$\mathbb{E}[v(\tau_{n+1}, X_{\tau_{n+1}})|\mathcal{F}_n^I] = \int_{\tau_n}^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(\tau_n, s) v(s, X_{\tau_n} + \alpha_n z - c_n(s-\tau_n)) p(\tau_n, s, dz) ds.$$

Sea $0 \leq t \leq T$, denotamos por $\{\tau_n^t\}_{n\geq 0}$ la sucesión construida de la siguiente manera. $\tau_0^t = t, \tau_1^t = \text{ínf}\{\tau_n; \tau_n > t\}, \tau_{n+1}^t = \text{ínf}\{\tau_n; \tau_n > \tau_n^t\}$.

Siguiendo las ideas del lema 2.3.1, nos planteamos el problema

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \sup_{0\leq c(T-t)+a<x, \alpha, c\geq 0} \Big[\int_t^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(t,s) v(s, x+az-c(s-t)) p(t,s,dz) ds \\ &+ U(c) \int_t^T (t-s)\Psi(t,s) ds \Big] \\ &= \sup_{0\leq \pi_1(T-t)+\pi_2\leq 1, \pi_1,\pi_2\geq 0} \Big[\int_t^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(t,s) v(s, x(1+\pi_2 z - \pi_1(s-t))) p(t,s,dz) ds \\ &+ U(\pi_1 x) \int_t^T (t-s)\Psi(t,s) ds \Big]. \end{aligned}$$

La condición terminal en este caso es

$$\lim_{t\uparrow T, x'\to x} v(t,x') = U(x).$$

Denotaremos por

$$\begin{aligned} \digamma(t,x,\pi_1,\pi_2,w) = \int_t^T \int_{(-1,\infty)} &\Psi(t,s) w(s, x(1+\pi_2 z - \pi_1(s-t))) p(t,s,dz) ds \\ &+ U(\pi_1 x) \int_t^T (t-s)\Psi(t,s) ds \end{aligned}$$

y

$$\overline{\digamma}(t,x,w) = \sup_{0\leq \pi_1(T-t)+\pi_2\leq 1, \pi_1,\pi_2\geq 0} \digamma(t,x,\pi_1,\pi_2,w).$$

Con la notación anterior definimos el operador $\mathcal{T}$ como

$$\mathcal{T} w(t,x) = \overline{\digamma}(t,x,w),$$

así debemos encontrar w tal que

$$\begin{cases} \mathcal{T}w(t,x) = w(t,x) \\ \text{lím}_{t\uparrow T, x'\to x} w(t,x) = U(x), \end{cases}$$

para $(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty)$. Nos referimos a este problema como el problema de programación dinámica.

3.2.1. Supersolución al problema de programación dinámica

Antes de resolver el problema de programación dinámica, encontraremos una supersolución, y veremos más adelante cómo esta supersolución ayuda a construir una solución.

Teorema 3.2.1. *Consideremos la función $f(t,x)$ definida por*

$$f(t,x) = \inf_{y>0} \Big\{ \mathbb{E}\Big[\overline{U}(Y_{t,T}y) + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{U}(Y_{t,\tau_i^t}y)(\tau_i^t - \tau_{i-1}^t) \Big] + xy \Big\}, \tag{3.1}$$

para $(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty)$, donde $\overline{U}$ es la función dual convexa de U (ver Definición 2.3.1) y

$$Y_{t,s} = e^{-\int_t^s \frac{\alpha(u)}{\beta(u)} dB_u - \frac{1}{2}\int_t^s (\frac{\alpha(u)}{\beta(u)})^2 du}.$$

Entonces $\text{lím}_{t\uparrow T, x'\to x} f(t,x') = U(x)$, $U(x) \le f(t,x)$ *y*

$$\mathcal{T}f(t,x) \le f(t,x);$$

para $(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty)$.

Demostración. Lo primero que vamos a verificar es que $U(x) \le f(t,x)$. Sean $(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty)$ y $y > 0$. Dado que $\mathbb{E}[Y_{t,T}] = 1$ y $\overline{U}$ es convexa, se sigue de la desigualdad de Jensen que

$$\overline{U}(y) \le \mathbb{E}[\overline{U}(yY_{t,T})].$$

Ahora como $U \ge 0$, entonces $\overline{U} \ge 0$, así, $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\infty} \overline{U}(yY_{t,\tau_i^t})(\tau_i^t - \tau_{i-1}^t)] \ge 0$, y por lo tanto

$$\overline{U}(y) + xy \leq \mathbb{E}\Big[\overline{U}(yY_{t,T}) + \sum_{i=0}^{\infty} \overline{U}(yY_{t,\tau_i^t})(\tau_i^t - \tau_{i-1}^t)\Big] + xy.$$

Tomando ínfimo sobre los $y > 0$, se obtiene que $U(x) \leq f(t,x)$. Notemos ahora que bajo (HC),

$$\overline{U}(y) \leq \overline{K} y^{-\overline{\gamma}},$$

donde $\overline{\gamma} = \frac{\gamma}{1-\gamma}$ y $\overline{K} = \frac{(K\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}}}{\overline{\gamma}}$. Así

$$\mathbb{E}[(\overline{U}(yY_{t,T}))^2] \leq K_3 \mathbb{E}[(yY_{t,T})^{-2\overline{\gamma}}],$$

y usando continuidad de la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal, se puede comprobar con facilidad que

$$\sup_{0 \leq t < T} \mathbb{E}[\overline{U}((yY_{t,T}))^2] < \infty.$$

Esto implica que la familia $(\overline{U}(yY_{t,T}))_{0 \leq t < T}$ es uniformemente integrable, y por lo tanto

$$\lim_{t \uparrow T} \mathbb{E}[\overline{U}(yY_{t,T})] = \overline{U}(y).$$

También se tiene que

$$\lim_{t \uparrow T} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\infty} \overline{U}(yY_{t,\tau_i^t})(\tau_i^t - \tau_{i-1}^t)] = 0,$$

así,

$$U(x) \leq \liminf_{t \to T, x' \to x} f(t,x') \leq \limsup_{t \uparrow T, x' \to x} f(t,x') \leq \lim_{t \uparrow T} \mathbb{E}[\overline{U}(yY_{t,T}) + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{U}(yY_{t,\tau_i^t})(\tau_i^t - \tau_{i-1}^t)],$$

por lo tanto

$$U(x) \leq \liminf_{t \to T, x' \to x} f(t,x') \leq \limsup_{t \uparrow T, x' \to x} f(t,x') \leq \overline{U}(y) + xy.$$

Tomando ínfimo sobre $y > 0$, tenemos que

$$U(x) \leq \liminf_{t \to T, x' \to x} f(t,x') \leq \limsup_{t \uparrow T, x' \to x} f(t,x') \leq U(x).$$

y por lo tanto $\lim_{t\uparrow T, x'\to x} f(t,x') = U(x)$. Verifiquemos ahora la propiedad de supersolución. Fijemos $t\in[0,T)$, $y>0$ y $0\leq \pi_1,\pi_2\leq 1$. De la definición de f se tiene que,

$$f(\tau_1^t, x(1+\pi_2 Z_{t,\tau_1^t} - \pi_1(\tau_1^t - t))) \leq \mathbb{E}\Big[\overline{U}(yY_{t,\tau_1^t}Y_{\tau_1^t,T}) + \sum_{i=1}^{\infty}\overline{U}(Y_{\tau_1^t,\tau_1^{\tau_1^t}}Y_{t,\tau_1^t}y)(\tau_i^{\tau_1^t} - \tau_{i-1}^{\tau_1^t})\Big]$$

$$+x(1+\pi_2 Z_{t,\tau_1^t} - \pi_1(\tau_1^t - t))Y_{t,\tau_1^t}y.$$

o equivalentemente

$$f(\tau_1^t, x(1+\pi_2 Z_{t,\tau_1^t} - \pi_1(\tau_1^t - t))) \leq \mathbb{E}\Big[\overline{U}(yY_{t,T}) + \sum_{i=1}^{\infty}\overline{U}(Y_{t,\tau_i^t}y)(\tau_i^t - \tau_{i-1}^t)$$

$$-\overline{U}(yY_{t,\tau_1^t})(\tau_1^t - t)] + x(1+\pi_2 Z_{t,\tau_1^t} - \pi_1(\tau_1^t - t))Y_{t,\tau_1^t}y.$$

Reagrupando términos y tomando esperanza,

$$\mathbb{E}[f(\tau_1^t, x(1+\pi_2 Z_{t,\tau_1^t} - \pi_1(\tau_1^t - t)))] + \mathbb{E}[\overline{U}(yY_{t,\tau_1^t})(\tau_1^t - t)] \leq$$

$$\mathbb{E}\Big[\overline{U}(yY_{t,T}) + \sum_{i=1}^{\infty}\overline{U}(Y_{t,\tau_i^t}y)(\tau_i^t - \tau_{i-1}^t)] + \mathbb{E}[x(1+\pi_2 Z_{t,\tau_1^t} - \pi_1(\tau_1^t - t))Y_{t,\tau_1^t}y]$$

Es fácil ver que $\mathbb{E}[Y_{t,\tau_1^t}] = 1$ y $\mathbb{E}[x(1+\pi_2 Z_{t,\tau_1^t} - \pi_1(\tau_1^t - t))Y_{t,\tau_1^t}y] \leq xy(1-\pi_1\mathbb{E}[\tau_1^t - t])$. Usando la desigualdad de Jensen tenemos que $\overline{U}(y) \leq \mathbb{E}[\overline{U}(yY_{t,\tau_1^t})]$. Se concluye entonces que

$$\mathbb{E}[f(\tau_1^t, x(1+\pi_2 Z_{t,\tau_1^t} - \pi_1(\tau_1^t - t)))] + \overline{U}(y)\mathbb{E}[\tau_1^t - t] \leq$$

$$\mathbb{E}\Big[\overline{U}(yY_{t,T}) + \sum_{i=1}^{\infty}\overline{U}(Y_{t,\tau_i^t}y)(\tau_i^t - \tau_{i-1}^t)\Big] + xy(1-\pi_1\mathbb{E}[\tau_1^t - t]),$$

o equivalentemente

$$\mathbb{E}[f(\tau_1^t, x(1+\pi_2 Z_{t,\tau_1^t} - \pi_1(\tau_1^t - t)))] + (\overline{U}(y) + x\pi_1 y)\int_t^T (s-t)\Psi(t,s)ds \leq$$

$$\mathbb{E}\Big[\overline{U}(yY_{t,T}) + \sum_{i=1}^{\infty}\overline{U}(Y_{t,\tau_i^t}y)(\tau_i^t - \tau_{i-1}^t)\Big] + xy.$$

Tomando ínfimo sobre los $y>0$, obtenemos

$$\mathbb{E}[f(\tau_1^t, x(1+\pi_2 Z_{t,\tau} - \pi_1(\tau_1^t - t)))] + U(x\pi_1)\int_t^T (s-t)\Psi(t,s)ds \leq f(t,x),$$

y dado que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[[f(\tau_1^t, x(1+\pi_2 Z_{t,\tau_1^t} - \pi_1(\tau_1^t - t)))]\\
&= \int_t^T \int_{(-1,\infty)} f(s, x(1+\pi_2 z - \pi_1(s-t)))p(t,s,dz)\Psi(t,s)ds
\end{aligned}$$

se sigue que

$$\mathcal{F}(t, x, \pi_1, \pi_2, f) \leq f(t, x).$$

Tomando supremo

$$\overline{\mathcal{F}}(t, x, f) = \mathcal{T} f(t, x) \leq f(t, x).$$

■

3.3. Solución al Problema de Programación dinámica

Lema 3.3.1. *Sea $v_0 = U$, $v_{m+1} = \mathcal{T} v_m$. Entonces*

$$v_m \leq v_{m+1} \leq f, \qquad m \geq 0.$$

donde f es la función definida en (3.1).

Demostración. Procedemos por inducción. Para $m = 0$; notemos que $U(x) = \mathcal{F}(x, t, 0, 0, U)$ y por lo tanto $U \leq \mathcal{T} U$. Del Teorema 3.2.1 se tiene que $U \leq f$, y como el operador $\mathcal{T}$ es monótono, entonces $v_1 = \mathcal{T} U \leq \mathcal{T} f \leq f$.

Supongamos ahora que $v_m \leq v_{m+1} \leq f$. Usando de nuevo que $\mathcal{T}$ es monótono, se tiene que $v_{m+1} = \mathcal{T} v_m \leq \mathcal{T} v_{m+1} = v_{m+2} \leq \mathcal{T} f \leq f$. ■

Del lema anterior se obtiene que la sucesión $(v_m)_{m \geq 0}$ es una sucesión no decreciente y acotada, por lo tanto existe una función ν^* tal que

$$\nu^* = \lim_{m \to \infty} v_m. \tag{3.2}$$

Teorema 3.3.1. *La función ν^* definida en (3.2) soluciona el problema de programación dinámica, esto es,*

$$\begin{cases} \mathcal{T}\nu^*(t,x) = \nu^*(t,x) \\ \text{lím}_{t\uparrow T, x'\to x}\,\nu^*(t,x) = U(x), \end{cases}$$

para $(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty)$.

Demostración. Fijemos $\pi_1, \pi_2 \in [0,1]$. Por definición

$$v_{m+1}(t,x) \geq \int_t^T \int_{(-1,\infty)} \Psi(t,x) v_m(s, x(1+\pi_2 z - \pi_1)) p(t,s,dz)$$
$$+U(x\pi_1) \int_t^T (s-t)\Psi(t,s)ds \geq 0,$$

pasando al límite y usando teorema de convergencia monótona

$$\nu^*(t,x) \geq \mathcal{F}(t,x,\pi_1,\pi_2,\nu^*),$$

y tomando supremo

$$\nu^*(t,x) \geq \mathcal{T}\nu * (t,x).$$

Fijemos ahora $\epsilon > 0$. Existe m_0 tal que si $m \geq m_0$ entonces $\nu^*(t,x) - \epsilon \leq v_{m+1}(t,x)$. Dado que U es cóncava, se puede verificar fácilmente que $\mathcal{F}(.,.,\pi_1,\pi_2,v_m)$ es cóncava para todo $m \geq 0$. Así existen $\pi_1(t,x), \pi_2(t,x) \in [0,1]$ con $0 \leq \pi_1(t,x) + \pi_2(t,x), y \leq 1$ tales que

$$\nu^*(t,x) - \epsilon \leq v_{m+1}(t,x) = \mathcal{F}(t,x,\pi_1(t,x),\pi_2(t,x),v_m) \qquad m \geq m_0.$$

Dado que $v_m \leq \nu^*$, entonces

$$\mathcal{F}(t,x,\pi_1(t,x),\pi_2(t,x),v_m) \leq \mathcal{F}(t,x,\pi_1(t,x),\pi_2(t,x),\nu^*) \leq \mathcal{T}\nu^*(t,x).$$

Se sigue que

$$\nu^*(t,x) - \epsilon \leq \mathcal{T}\nu^*(t,x),$$

y el resultado se sigue haciendo $\epsilon \to 0$. La condición terminal se sigue dada la desigualdad, $U(x) \leq \nu^*(t,x) \leq f(t,x)$. ■

3.4. Verificación

Vamos a verificar que la solución a la ecuación de programación dinámica, corresponde a la función de valor para el problema de optimización. El resultado se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 3.4.1. *Sea ν^* la función definida en (3.2), entonces*

$$\nu^*(0, X_0) = \sup_{(\alpha_n, c_n) \in \mathcal{C}} \mathbb{E}\Big[U(X_T) + \sum_{k=0}^{\infty} U(c_k)(\tau_k - \tau_{k-1})\Big],$$

y una estrategia de inversión/consumo óptima $(\hat{\alpha}, \hat{c}) \in \mathcal{C}$ está dada por

$$(\hat{\alpha}_n, \hat{c}_n) = \Big(\hat{\pi}_2(\tau_n, \hat{X}_{\tau_n})\hat{X}_{\tau_n}, \hat{\pi}_1(\tau_n, \hat{X}_{\tau_n})\hat{X}_{\tau_n}\Big), \qquad n \geq 0,$$

donde $(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2)(t, x)$ es tal que

$$(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2)(t, x) \in \textit{argmáx}_{0 \leq \pi_1(T-t) + \pi_2 \leq 1, \pi_1, \pi_2 \geq 0} F(t, x, \pi_1, \pi_2, \nu^*),$$

y $(\hat{X}_{\tau_n})_{n \geq 0}$ es el proceso de capital dado por

$$\hat{X}_{\tau_{n+1}} = \hat{X}_{\tau_n} + \hat{\alpha}_n Z_{n+1} - \hat{c}_n(\tau_i - \tau_{i-1}), \quad n \geq 0, \quad \hat{X}_0 = X_0.$$

Demostración. Sea $(\alpha_n, c_n) \in \mathcal{C}$ y $(X_{\tau_n})_{n \geq 0}$ su proceso de capital asociado. De acuerdo al Lema 3.2.1,

$$\mathbb{E}[\nu^*(\tau_{n+1}, X_{\tau_{n+1}})|\mathcal{F}_n^I] = \int_{\tau_n}^{T} \int_{(-1,\infty)} \Psi(\tau_n, s)\nu^*(s, X_{\tau_n} + \alpha_n z - c_n(s - \tau_n))p(\tau_n, s, dz)ds.$$

Sumando el término $U(c_n)\int_{\tau_n}^{T}(s - \tau_n)\Psi(\tau_n, s)ds$ ambos lados de la igualdad anterior, tenemos que $\mathbb{E}[\nu^*(\tau_{n+1}, X_{\tau_{n+1}})|\mathcal{F}_n^I] + \mathbb{E}[U(c_n)(\tau_{n+1} - \tau_n)|\mathcal{F}_n^I] \leq \nu^*(\tau_n, X_{\tau_n})$, tomando esperanza,

$$\mathbb{E}[\nu^*(\tau_{n+1}, X_{\tau_{n+1}}) + U(c_n)(\tau_{n+1} - \tau_n)] \leq \mathbb{E}[\nu^*(\tau_n, X_{\tau_n})],$$

y por lo tanto

$$\mathbb{E}[\nu^*(\tau_{n+1}, X_{\tau_{n+1}}) + \sum_{k=0}^{n} U(c_k)(\tau_{k+1} - \tau_k)] \leq \nu^*(0, X_0).$$

Haciendo $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}[U(X_T) + \sum_{k=0}^{\infty} U(c_k)(\tau_{k+1} - \tau_k)] \leq \nu^*(0, X_0),$$

y dado que $(\alpha_n, c_n) \in \mathcal{C}$ son arbitrarios, se concluye que

$$V_0 \leq \nu^*(0, X_0).$$

Similarmente, tenemos que

$$\mathbb{E}[\nu^*(\tau_{n+1}, \hat{X}_{\tau_{n+1}}) + U(\hat{c}_n)(\tau_{k+1} - \tau_k)] = \mathbb{E}[\nu^*(\tau_n, \hat{X}_{\tau_n})],$$

y por lo tanto

$$\mathbb{E}[\nu^*(\tau_{n+1}, \hat{X}_{\tau_{n+1}}) + \sum_{k=0}^{n} U(\hat{c}_k)(\tau_{k+1} - \tau_k)] = \nu^*(0, X_0).$$

Haciendo $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}[U(\hat{X}_T) + \sum_{k=0}^{\infty} U(\hat{c}_k)(\tau_{k+1} - \tau_k)] = \nu^*(0, X_0),$$

y por lo tanto

$$V_0 = \nu^*(0, X_0).$$

■

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Sobre el presente trabajo vale destacar que:

(i) Para los dos problemas planteados (utilidad de capital terminal y utilidad de consumo más capital terminal) se pudo encontrar la función de valor mediante un proceso interactivo. Esto hace posible que se pueda implementar computacionalmente el algoritmo y sea aplicable en la práctica.

(ii) Se considera que los modelos son más realistas que el modelo clásico, pues no supone que se realizan transacciones de manera continua.

(iii) El proceso que se supuso para modelar el precio del activo, es bastante general y solo algunas condiciones de integrabilidad tuvieron que ser supuestas.

(iv) Se tomó una tasa de interés $r = 0$, lo cual se hizo por facilidad. Queda el interrogante, ¿Cómo cambiaría el método de solución si se considera una tasa de interés $r(t) \neq 0$?

(V) Aunque el modelo no supone transacciones continuamente, supone que se deben hacer un número infinito de transacciones en el intervalo $[0, T]$, lo cual no es posible en la práctica. Una pregunta natural sería, ¿Se puede resolver el problema de optimización si se considera una sucesión finita y aleatoria de tiempos de transacción en $[0, T]$?

REFERENCIAS

[1] Andrew Ang, Dimitris Papanikolaou, and Mark M Westerfield. Portfolio choice with illiquid assets. *Management Science*, 60(11):2737–2761, 2014.

[2] Netzahualcóyotl Castañeda-Leyva and Daniel Hernández-Hernández. Optimal consumption-investment problems in incomplete markets with stochastic coefficients. *SIAM journal on control and optimization*, 44(4):1322–1344, 2005.

[3] Umut Cetin and LCG Rogers. Modeling liquidity effects in discrete time. *Mathematical Finance*, 17(1):15–29, 2007.

[4] Alessandra Cretarola, Fausto Gozzi, Huyên Pham, and Peter Tankov. Optimal consumption policies in illiquid markets. *Finance and Stochastics*, 15(1):85–115, 2011.

[5] Mark HA Davis and Andrew R Norman. Portfolio selection with transaction costs. *Mathematics of operations research*, 15(4):676–713, 1990.

[6] Wendell H Fleming and Daniel Hernández-Hernández. An optimal consumption model with stochastic volatility. *Finance and Stochastics*, 7(2):245–262, 2003.

[7] Ioannis Karatzas, Steven E Shreve, I Karatzas, and Steven E Shreve. *Methods of mathematical finance*, volume 39. Springer, 1998.

[8] Francis A Longstaff. Portfolio claustrophobia: Asset pricing in markets with illiquid assets. *American Economic Review*, 99(4):1119–44, 2009.

[9] Michael Ludkovski and Hyekyung Min. Illiquidity effects in optimal consumption-investment problems. *arXiv preprint arXiv:1004.1489*, 2010.

[10] Koichi Matsumoto. Optimal portfolio of low liquid assets with a log-utility function. *Finance and Stochastics*, 10(1):121–145, 2006.

[11] Robert C Merton. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. In *Stochastic Optimization Models in Finance*, pages 621–661. Elsevier, 1975.

[12] Bernt Øksendal and Agnes Sulem. *Applied stochastic control of jump diffusions*. Springer Science & Business Media, 2007.

[13] Huyên Pham and Peter Tankov. A model of optimal consumption under liquidity risk with random trading times and its coupled system of integrodifferential equations. 2006.

[14] Philip Protter. Stochastic integration and differential equation. *Stochastic Modeling and Applied Probability*, 21, 2004.

[15] L-C-G Rogers and Omar Zane. A simple model of liquidity effects. In *Advances in finance and stochastics*, pages 161–176. Springer, 2002.

[16] Alexander Schied and Torsten Schöneborn. Risk aversion and the dynamics of optimal liquidation strategies in illiquid markets. *Finance and Stochastics*, 13(2):181–204, 2009.

[17] Sashi Mohan Srivastava. *A course on Borel sets*, volume 180. Springer Science & Business Media, 2008.