

TE
65

**FOLIACIONES EN P^2
CON PRIMERA INTEGRAL RACIONAL**

T E S I S

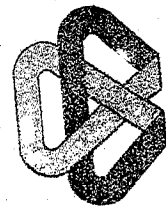
**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS**

**PRESENTA
ALEXIS GARCIA ZAMORA**

CIMAT, A.C.

FEBRERO 1995.

Para Adriana



CIMAT
BIBLIOTECA

015945

C I M A T
B I B L I O T E C A

FOLIACIONES EN \mathbb{P}^2 CON PRIMERA INTEGRAL RACIONAL.

ALEXIS GARCÍA ZAMORA

Typeset by *AMS-TEX*

Agradecimientos

Quiero agradecer al Profesor Xavier Gómez-Mont quien me planteó el problema que se estudia en esta tesis y la dirigió de un modo, al parecer, efectivo. Además, su constante apoyo, su confianza en mí y su sagaz espíritu crítico fueron imprescindibles para llevar a cabo este trabajo.

Mi Profesor y amigo Sevín Recillas ha ejercido sobre mí una profunda influencia intelectual. En particular tuvo la paciencia necesaria para escuchar infinitas versiones inacabadas de esta tesis y siempre tuvo alguna sugerencia importante que hacer.

Sin el entusiasmo y la inteligencia de Héctor Plá probablemente nunca me hubiera enterado de la existencia de la Geometría Algebraica. Ya no puede enterarse de mi agradecimiento pero sí puedo, y debo, hacerlo público.

El último capítulo de esta tesis se salvó de ser sólo un intento malogrado gracias a las intensas conversaciones con el Profesor Gert-Martin Greuel en Agosto del 94. X. Gómez-Mont y C. Danthony me sugirieron la idea de la demostración del Teorema 2.5.5.

Isidro Nieto, Leticia Brambila y Jesús Muciño hicieron valiosas observaciones que ayudaron a mejorar la presentación final de este trabajo.

El CIMAT ayudó invaluablemente con su ambiente, a la vez amistoso y científicamente estimulante. Además su apoyo económico fue vital. El IMATE también financió durante algunos meses esta tesis.

Falta la larga lista de todos los que con su amistad y su cariño contribuyeron a la realización de este trabajo. Como pretendo escribir una tesis escueta no los nombraré. Ellos saben quiénes son y a todos les agradezco por igual. Y esta México, por supuesto, que me recibió tan bien.

Tabla de contenido

Introducción	
Capítulo I.	... v.
Foliaciones holomorfas en \mathbb{P}^2 .	
1.1. Foliaciones, definiciones básicas.	... 1.
1.2. Singularidades de foliaciones.	... 1.
1.3. Hojas algebraicas y primera integral racional.	... 3.
1.4. Puntos singulares de foliaciones con primera integral racional.	... 4.
1.5. Integración local alrededor de un nodo de \mathcal{F} 8.
1.6. Foliaciones holomorfas en superficies algebraicas.	...10.
Capítulo II.	...11.

El Problema de Poincaré reformulado.	...13.
2.1. El problema de Poincaré clásico.	...13.
2.2. Fórmula I de Poincaré.	...13.
2.3. Fórmula II de Poincaré (fórmula del género).	...14.
2.4. Ejemplos.	...15.
2.5. Foliaciones asociadas a pinceles genéricos.	...17.
2.6. El problema de Poincaré sobre superficies algebraicas.	...20.
Capítulo III.	
Equisingularidad y el problema de Poincaré.	...22.
3.1. La variedad de curvas equisingulares a la solución general y el problema de Poincaré.	...22.
3.2. Equisingularidad.	...23.
3.3. Solución al problema de Poincaré cuando $v_i \geq 2u_i$26.
REFERENCIAS.	...32.

INTRODUCCION.

Esta tesis está escrita suponiendo que el lector domina el lenguaje de la geometría algebraica pero no necesariamente la teoría de los campos vectoriales holomorfos. Dentro de estos límites hemos intentado escribir un trabajo "self-contained".

Dada una ecuación diferencial

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}, \quad p, q \in \mathbb{C}[x, y],$$

nos interesa encontrar un criterio para determinar si (1) tiene una primera integral racional. Más explícitamente, una primera integral racional es una expresión $\frac{P}{Q} = \lambda$, con $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que

$$d\left(\frac{P}{Q}\right) \wedge (p(x, y)dx - q(x, y)dy) = 0.$$

Una solución algebraica de (1) es una curva plana irreducible $f(x, y) = 0$, tal que $f \mid df \wedge (p dx - q dy)$, además (1) tiene un número infinito de soluciones algebraicas si y sólo si tiene una primera integral racional (1.3.4). Si fuera posible encontrar una cota para el grado d de la solución general de (1) en términos del grado m de p ó q tendríamos una respuesta al problema de determinar la integrabilidad algebraica de (1), en el sentido de que toda solución algebraica de un grado fijo puede determinarse resolviendo las ecuaciones algebraicas dadas por

$$f \mid df \wedge (p dx - q dy).$$

El problema de encontrar una tal cota fue estudiado por Poincaré a fines del siglo pasado, en general es imposible resolverlo como muestra el ejemplo dado por la ecuación $py dx - qxdy = 0$ ($p, q \in \mathbb{Z}$) que tiene primera integral $\frac{y^p}{x^q} = \lambda$.

Luego de los trabajos de Poincaré, que pudieron dar respuesta solo a un número muy reducido de casos, el problema cayó en el olvido hasta que en 1991 apareció publicado un trabajo de Cerveau y Lins Neto ([C-LN]). En este trabajo se demuestra que:

Si C es una curva plana reducida tal que todas sus componentes son solución de una ecuación de grado m y C tiene sólo singularidades nodales entonces $\deg(C) \leq m + 2$.

Por un lado este resultado da respuesta a un problema más general que al estudiado por Poincaré pues investiga ecuaciones algebraicas con *una* solución algebraica y no con *todas* sus soluciones algebraicas, por otro lado es sólo una respuesta a una especie de Problema débil de Poincaré pues impone en las hipótesis condiciones sobre la curva C .

Más tarde, en 1992, M. Carnicer probó que:

Si (1) no tiene singularidades dicríticas entonces $d \leq m + 2$ ([M]).

Hacemos notar que en [M] el término dicrítico tiene un significado distinto al que usamos en nuestro trabajo y que el conjunto de casos considerado por Carnicer tiene intersección vacía con el caso de primera integral racional.

En este trabajo estudiamos la siguiente versión del problema de Poincaré (al que llamaremos en ocasiones el problema de Poincaré reformulado):

Problema de Poincaré. *Dada \mathcal{F} una foliación en \mathbb{P}^2 con primera integral racional, acotar superiormente el grado d de una solución general por medio de una cota que dependa de \mathcal{F} (esto es, una cota que no presuponga ninguna información sobre las soluciones.)*

Si suponemos además que todas las singularidades de \mathcal{F} son de multiplicidad uno, entonces a cada punto singular es posible asociarle un par de números enteros primos relativos (u_i, v_i) (el cociente de los valores propios de la parte lineal de \mathcal{F} en ese punto, vea 1.4.2). Una cota para d que dependa de estos pares sería una solución al Problema de Poincaré. En esta tesis resolvemos el problema de Poincaré para dos clases de foliaciones:

1 (Teorema 2.5.5 y Corolario 2.5.6) *Si \mathcal{F} tiene singularidades de multiplicidad uno y todas son de tipo $(1, 1)$ ó $(1, -1)$, entonces*

$$m = 2d - 2.$$

(Esto es una solución incluso para el problema de Poincaré clásico).

2 (Teorema 3.3) *\mathcal{F} tiene singularidades de multiplicidad uno y todos los nodos (puntos singulares con $u_i \cdot v_i > 0$) cumplen $v_i \geq 2u_i$, y al menos dos nodos tienen $u_i > 1$.*

En el CAPITULO I se desarrolla la teoría básica de las foliaciones holomorfas en \mathbb{P}^2 (la versión proyectiva de los campos vectoriales holomorfos), en este capítulo no se presenta ningún resultado original. Los epígrafes 1.1, 1.2 y 1.3 son una versión simplificada de algunos pasajes del libro de Jouanolou ([J]). En los epígrafes 1.4 y 1.5 se establecen algunos resultados básicos sobre singularidades de foliaciones con primera integral racional, todos bien conocidos (vea, por ejemplo, [P1]).

En el CAPITULO II se plantea la formulación general del Problema de Poincaré. El capítulo comienza con pruebas modernas de algunos resultados de Poincaré (llamados aquí fórmulas de Poincaré), y que relacionan al grado m de la foliación con el grado, género y tipo de singularidades de la solución general. La importancia de estas demostraciones es que permiten extender estos resultados a superficies algebraicas en general.

En 2.4 los ejemplos que demuestran que la formulación clásica del problema de Poincaré no puede ser resuelta en general son presentados. El ejemplo 2.4.1 es probablemente conocido desde la época de Poincaré. El ejemplo 2.4.2 es asimismo elemental, pero al parecer nuevo y demuestra que no sólo el grado sino también el género de la solución general no puede ser acotado por el grado de la foliación.

El epígrafe 2.5 es una "variación sobre un tema de Poincaré". El objetivo es probar el:

Teorema 2.5.5. *Sea \mathcal{F} una foliación irreducible en \mathbb{P}^2 con singularidades de valores propios $(1, 1)$ ó $(1, -1)$. Si \mathcal{F} tiene primera integral racional $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$, entonces todas las fibras de f son curvas reducidas y la cerradura algebraica de la fibra general es una curva no singular que intersecta transversalmente cualquier otra curva obtenida como cerradura de una fibra de f .*

Este Teorema se deduce de una serie de resultados establecidos por Poincaré (vea [P1]). Sin embargo, el teorema no fue explícitamente enunciado y en la demostración de los pasos intermedios existen algunas lagunas. Hemos restaurado y completado la demostración dándole, eso pretendemos, un espíritu moderno. La importancia de esta demostración es que el argumento usado puede extenderse al caso de superficies racionales.

Este teorema implica, utilizando la Fórmula I de Poincaré (2.2), que en este caso $2d - 2 = m$.

El epígrafe 2.6 se ocupa justamente de las generalizaciones a las que hemos hecho referencia. Hemos elegido esta presentación, primero los resultados en \mathbb{P}^2 y luego su extensión a superficies más generales, en primer lugar porque pensamos que hace más comprensible el texto y en segundo lugar porque resalta la importancia de los resultados obtenidos.

El CAPITULO III está dedicado a probar el:

Teorema 3.3. *Sea \mathcal{F} una foliación en \mathbb{P}^2 , con primera integral racional $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$, con singularidades aisladas de multiplicidad 1 y tal que en todos sus nodos $v_i \geq 2u_i$, supongamos además que existen al menos dos nodos con $u_i > 1$. Sea S la superficie obtenida al eliminar el lugar de indeterminación de f . Entonces*

$$\frac{3d}{2} \leq h^1(S, TS) + 8.$$

La idea fundamental que se introduce aquí es el estudio de las variedades de curvas planas equisingulares en conexión con el problema de Poincaré. Dada C_0 solución general de \mathcal{F} calculamos una cota inferior para la dimensión de la variedad $\mathcal{E}q(C_0)$ de curvas planas equisingulares a C_0 . El próximo paso es interpretar un abierto $U \subset \mathcal{E}q(C_0)$ como un espacio base para una deformación de S . Esta es la idea general de cómo obtener la desigualdad que aparece en el teorema.

Es fácil ver que $h^1(S, TS)$ depende sólo de los valores (u_i, v_i) de \mathcal{F} en las singularidades de tipo nodo. De este modo, bajo las hipótesis del teorema el problema de Poincaré ha sido resuelto.

FOLIACIONES HOLOMORFAS EN \mathbb{P}^2

Todas las variedades que se consideran son \mathbb{C} -variedades algebraicas. Por \mathbb{P}^2 denotamos el plano proyectivo complejo, el plano afín será denotado indistintamente por \mathbb{A}^2 ó \mathbb{C}^2 .

Un fibrado vectorial será denotado por una letra mayúscula y el haz de sus secciones por la misma letra en cursivas, en particular TP^2 , $T\mathbb{P}^2$ denotan respectivamente el fibrado y el haz tangente. Una excepción se hará cuando tratemos del haz $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$, el fibrado correspondiente será denotado por $H^{\otimes n}$, donde H es el fibrado asociado al divisor de rectas en \mathbb{P}^2 . Asimismo el fibrado asociado a $\mathcal{L}(n) = (n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$ será denotado por $L(n)$.

En este capítulo establecemos varias definiciones y resultados elementales sobre foliaciones holomorfas en \mathbb{P}^2 .

1.1. Foliaciones, definiciones básicas.

1.1.1. **Definición:** Una foliación holomorfa \mathcal{F} en \mathbb{P}^2 es un morfismo no trivial

$$\mathcal{F} : L \rightarrow T\mathbb{P}^2,$$

módulo multiplicación por una constante, donde L es un fibrado en rectas sobre \mathbb{P}^2 y $T\mathbb{P}^2$ el fibrado tangente de \mathbb{P}^2 , (equivalentemente $\mathcal{F} \in \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^2, T\mathbb{P}^2 \otimes L^{-1})$).

1.1.2. Notemos que como consecuencia de la sucesión de Euler:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3}(1) \rightarrow T\mathbb{P}^2 \rightarrow 0,$$

$H^0(\mathbb{P}^2, T\mathbb{P}^2 \otimes \mathcal{L}^{-1}) \neq 0$, si y sólo si $(H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)))^3 \neq 0$, esto es, si y sólo si $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \neq 0$, lo que implica $L = H^{\otimes -(m-1)}$, $m \geq 1$. Así que sólo existen foliaciones holomorfas para $L = H^{\otimes -m}$, $m > 0$. El conjunto de las foliaciones holomorfas con L fijo tiene una estructura natural de \mathbb{C} -espacio proyectivo.

Definimos

$$\mathcal{Y}(m) = \{\text{campos de direcciones en } \mathbb{P}^2 \text{ de grado } m\}$$

$$= \mathbb{P} \left(\sum_{i=0}^2 Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y_i \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) \text{ módulo } G.R., \right.$$

$$\left. G \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-1)), R = \sum_{i=0}^2 x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(m) &= \{1 - \text{formas proyectivas en } \mathbb{P}^2 \text{ de grado } m\} \\ &= \mathbb{P} \left(\sum_{i=0}^2 w_i dx_i, w_i \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) \text{ y tales que } \sum_{i=0}^2 x_i w_i \equiv 0. \right), \end{aligned}$$

y finalmente

$$\mathcal{F}(m) = \{\text{foliaciones en } \mathbb{P}^2 \text{ determinadas por un morfismo } \mathcal{F} : H^{\otimes -m} \rightarrow T\mathbb{P}^2.\}$$

1.1.3. Proposición. Los \mathbb{C} -espacios vectoriales asociados a $\mathcal{Y}(m)$, $\mathcal{W}(m+1)$ y $\mathcal{F}(m-1)$ son isomorfos.

Prueba. Para probar el isomorfismo entre $\mathcal{Y}(m)$ y $\mathcal{W}(m+1)$ se considera la sucesión:

$$(H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)))^3 \xrightarrow{\alpha} (H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+1)))^3 \xrightarrow{\beta} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+2)),$$

donde

$$\alpha(Y_0, Y_1, Y_2) = (x_1 Y_2 - Y_1 x_2, -Y_2 x_0 + Y_0 x_2, x_0 Y_1 - x_1 Y_0)$$

y

$$\beta(w_0, w_1, w_2) = (x_0 w_0, x_1 w_1, x_2 w_2).$$

Es fácil comprobar que

$$\text{Ker } \alpha = \{(x_0 G, x_1 G, x_2 G), G \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-1))\}.$$

Además, esta sucesión es justamente el complejo de Koszul asociado a la sucesión regular (x_0, x_1, x_2) en $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, de donde se sigue que la sucesión anterior es exacta.

Para probar el isomorfismo entre $\mathcal{Y}(m)$ y $\mathcal{F}(m-1)$ se considera la sucesión de Euler

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 3} \rightarrow T\mathbb{P}^2 \rightarrow 0,$$

y la sucesión de fibrados asociada:

$$0 \rightarrow L^{-1} \rightarrow (L^{-1})(1)^{\oplus 3} \rightarrow T\mathbb{P}^2 \otimes L^{-1} \rightarrow 0,$$

donde $L = H^{\otimes -(m-1)}$, pasando a la sucesión en cohomología se obtiene:

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, H^{\otimes m-1}) \rightarrow (H^0(\mathbb{P}^2, H^{\otimes m}))^3 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, T\mathbb{P}^2 \otimes L^{-1}) \rightarrow 0,$$

como α está dado por $\alpha(G) = (x_0 G, x_1 G, x_2 G)$ tenemos el isomorfismo deseado.

Q.E.D.

Notemos que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(m-1) &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^2, T\mathbb{P}^2 \otimes H^{\otimes m-1}) \\ &= 3 \dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^2, H^{\otimes m}) - \dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^2, H^{\otimes m-1}) - 1 \end{aligned}$$

$$= 3 \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} - 1 = m^2 + 4m + 2$$

1.1.4. Finalmente notamos que dado $\mathcal{F} : L \rightarrow T\mathbb{P}^2$ la restricción a un plano afín \mathbb{C}^2 determina:

$$\mathcal{F}_{afin} : L|_{\mathbb{C}^2} \rightarrow T\mathbb{C}^2,$$

pero $H^1(\mathbb{C}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}^*) = 0$, luego $L|_{\mathbb{C}^2}$ es trivial y

$$\mathcal{F}_{afin} \in \mathbb{P}H^0(\mathbb{C}^2, T\mathbb{C}^2),$$

esto es, un campo vectorial en \mathbb{C}^2 , módulo multiplicación por una constante.

1.1.5. **Definición.** Dado $\mathcal{F} : L \rightarrow T\mathbb{P}^2$, llamamos grado de la foliación \mathcal{F} al grado del campo de direcciones asociado a \mathcal{F} .

Notemos que según esta definición $\mathcal{F}(m-1) = \{\text{espacio de foliaciones de grado } m\}$. $\mathcal{F}(m-1)$ tiene una estructura natural de variedad proyectiva de dimensión $m^2 + 4m + 2$.

1.2. Singularidades de foliaciones.

1.2.1. **Definición.** Sea $\mathcal{F} \in H^0(\mathbb{P}^2, T\mathbb{P}^2 \otimes L^{-1})$ una foliación. Definimos el *lugar singular* de \mathcal{F} , $Sing\mathcal{F}$ como el conjunto de ceros de \mathcal{F} , $Sing\mathcal{F} := Supp(\mathcal{F})_0$.

Notemos que de acuerdo a los isomorfismos establecidos en 1.1.3 el lugar singular de \mathcal{F} puede ser definido equivalentemente como:

- a) $\{p \in \mathbb{P}^2 : \mathcal{F}_p : L_p \rightarrow T_p\mathbb{P}^2 \text{ no es inyectiva.}\}$
- b) $\{p \in \mathbb{P}^2 : [Y_0(p) : Y_1(p) : Y_2(p)] = p.\}$
- c) $\{p \in \mathbb{P}^2 : w_0(p) = w_1(p) = w_2(p) = 0.\}$

Hay dos casos a considerar: $Sing\mathcal{F}$ es unión de puntos aislados o $Sing\mathcal{F}$ contiene alguna curva. Si $Sing\mathcal{F}$ es unión de puntos aislados decimos que \mathcal{F} tiene *singularidades aisladas*.

1.2.2. Supongamos por el momento que \mathcal{F} tiene singularidades aisladas.

Dado $\mathcal{F} : L \rightarrow T\mathbb{P}^2$ y $p \in Sing\mathcal{F}$ consideramos un plano afín \mathbb{A}^2 que contenga a p , sea Y el campo vectorial asociado a $\mathcal{F}|_{\mathbb{A}^2}$. Es evidente que p es un punto singular de Y . Supongamos que Y está determinado por:

$$\dot{x} = q_1(x, y)$$

$$\dot{y} = q_2(x, y).$$

Definición. La multiplicidad de \mathcal{F} en p , $mult_p\mathcal{F}$ se define como

$$dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, p}}{(q_1, q_2)}.$$

En particular si $p \in \mathbb{P}^2 - \text{Sing}\mathcal{F}$, $\text{mult}_p\mathcal{F} = 0$.

1.2.3. **Teorema.** Sea \mathcal{F} una foliación de grado m en \mathbb{P}^2 con singularidades aisladas, entonces:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2} \text{mult}_p(\mathcal{F}) = m^2 + m + 1.$$

Prueba: Consideramos la sucesión de Euler tensorizada:

$$0 \rightarrow L^{-1} \rightarrow (L(1)^{-1})^{\oplus 3} \rightarrow T\mathbb{P}^2 \otimes L^{-1} \rightarrow 0,$$

el número de ceros de una sección de $T\mathbb{P}^2 \otimes L^{-1}$ es igual a la segunda clase de Chern $c_2(T\mathbb{P}^2 \otimes L^{-1})$.

De la sucesión exacta anterior obtenemos una igualdad de polinomios de Chern:

$$c(L^{-1})c(T\mathbb{P}^2 \otimes L^{-1}) = c((L^{-1}(1))^{\oplus 3}).$$

Pero el anillo de cohomología de \mathbb{P}^2 es isomorfo a $Z[t]/t^3$, y por otro lado $c_1(L(1)^{-1}) = m$. Sustituyendo en la igualdad los polinomios de Chern de L^{-1} y $(L(1)^{-1})^{\oplus 3}$ y reduciendo módulo t^3 se llega al resultado. Q.E.D.

1.2.4. Dada $\mathcal{F} : L \rightarrow T\mathbb{P}^2$ tal que $\text{Sing}\mathcal{F}$ contiene una curva es posible asociar a \mathcal{F} una foliación con singularidades aisladas. El procedimiento es particularmente sencillo si trabajamos con 1-formas proyectivas, sea

$$w = w_0 dx_0 + w_1 dx_1 + w_2 dx_2$$

y \mathcal{F}_w es la foliación asociada por el isomorfismo establecido en 1.1.3, del hecho de que $\text{Sing}\mathcal{F}_w$ contiene una curva, digamos de ecuación $F = 0$, y de que $\text{Sing}\mathcal{F}_w = \{p \in \mathbb{P}^2 : w_0(p) = w_1(p) = w_2(p) = 0\}$ se sigue que $F \mid w_i, i = 0, 1, 2$.

De modo que toda componente de $\text{Sing}\mathcal{F}$ es un divisor común de los w_i . Inversamente si $F \mid w_i$ entonces $(F = 0) \subset \text{Sing}\mathcal{F}$. Así que si llamamos $F = m.c.d.(w_i)$, la foliación $\bar{\mathcal{F}}$ determinada por

$$\bar{w} = \frac{1}{F}(w_0 dx_0 + w_1 dx_1 + w_2 dx_2)$$

tiene singularidades aisladas.

1.3. Hojas algebraicas y primera integral racional.

1.3.1. **Definición.** Sea S una curva analítica en \mathbb{P}^2 , esto es una variedad compleja analítica de dimensión 1. S es llamada una hoja de la foliación \mathcal{F} si para todo punto $p \in S$,

$$\mathcal{F}(L_p) = T_p S,$$

donde L_p es la fibra de L en p y $T_p S$ la recta tangente a S en p . S será llamada también curva integral o curva solución de \mathcal{F} .

Definiciones equivalentes pueden ser dadas en término de campos de direcciones o 1-formas proyectivas. Por ejemplo si $Y = \sum Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ es el campo de direcciones asociado a \mathcal{F} , S será una solución si para todo $p \in S$ la recta generada por p y $(Y_0(p) : Y_1(p) : Y_2(p))$ coincide con la recta tangente a S en p .

1.3.2. Un caso particularmente importante ocurre cuando la clausura \bar{S} de S es una curva algebraica.

Supongamos que \mathcal{F} tiene singularidades aisladas:

Definición-Proposición. Una curva algebraica irreducible C de ecuación $F = 0$ es llamada una solución algebraica de \mathcal{F} si alguna de las siguientes condiciones equivalentes se cumple:

- a) $F \mid dF \wedge w$.
- b) $F \mid \sum Y_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$.
- c) $\forall p \in C - \text{Sing}\mathcal{F}, \mathcal{F}(L|_C) = TC$.

Debemos comprobar, primero que esta definición es un caso particular de la definición 1.3.1 y segundo que las tres condiciones enunciadas son equivalentes. Veamos:

La condición c) expresa que para cada $p \in C$, $\mathcal{F}(L_p)$ es igual a $T_p C$ ó $\mathcal{F}(L_p)$ es el morfismo trivial, esto es, si $p \in C - \text{Sing}\mathcal{F}$ entonces $\mathcal{F}(L_p) = T_p C$, así que $C - \text{Sing}\mathcal{F}$ es una hoja de la foliación \mathcal{F} .

Resta probar las equivalencias entre a), b) y c). Para esto notamos que vía la identificación $T_p \mathbb{P}^2 = \{\text{unión de rectas en } \mathbb{P}^2 \text{ a través de } p\}$, el morfismo \mathcal{F} hace corresponder a L_p la recta generada por p y $(Y_i(p))$. Luego si $\forall p \in C, \mathcal{F}(L|_C) \subset T_p C, p = (\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2)$ y p no es un punto singular tenemos que $\mathcal{F}(L_p)$ está dada por

$$x_i - \bar{x}_i = Y_i(p), \quad i = 0, 1, 2$$

y, por otro lado, $T_p C$ tiene ecuación $\sum_{i=0}^2 \frac{\partial F}{\partial x_i}(p)(x_i - \bar{x}_i) = 0$.

Luego para $p \in C - \text{Sing}\mathcal{F}, F(p) = 0$ implica $\sum Y_i(p) \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0$, luego como $\text{Sing}\mathcal{F}$ es finito

$$F \mid \sum Y_i \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Inversamente puede verse del mismo razonamiento que $F \mid \sum Y_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$ implica $\mathcal{F}(L|_C) \subset TC$.

La equivalencia entre a) y b) es consecuencia del modo en que fue definido α en la prueba de 1.1.3 y de la ecuación de Euler:

$$\sum \frac{\partial F}{\partial x_i} = d \cdot F,$$

donde $d = \text{grado}(F)$.

1.3.3. Definición. Sea R una fracción racional homogénea irreducible, esto es $R = \frac{F}{G}$, $\text{deg}F = \text{deg}G = d$. Decimos que R es una primera integral racional de \mathcal{F} si $dR \wedge w_{\mathcal{F}} = 0$ (equivalentemente si $dR = uw_{\mathcal{F}}$ para alguna fracción racional u), donde $w_{\mathcal{F}}$ es la 1-forma proyectiva asociada a \mathcal{F} .

1.3.4. Teorema. Supongamos que \mathcal{F} tiene singularidades aisladas. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- i) \mathcal{F} tiene infinitas soluciones algebraicas.
- ii) Todas las soluciones de \mathcal{F} son algebraicas.
- iii) Las soluciones de \mathcal{F} son las componentes irreducibles de un pincel de curvas planas $\lambda F + \mu G = 0$, con F y G irreducibles.
- iv) \mathcal{F} tiene una primera integral racional $R = \frac{F}{G}$.

Prueba. iii) implica ii) y ii) implica i) son evidentes. Falta probar iv) implica iii) y i) implica iv).

Para probar iv) implica iii) basta probar que si $f = 0$ es una componente irreducible del pincel $\lambda F + \mu G = 0$ entonces $f = 0$ es solución algebraica de \mathcal{F} .

Supongamos que

$$(1) \quad F + lG = f^\alpha h$$

y que f no divide a h .

Tenemos que para algún polinomio homogéneo v

$$vw = G \cdot d(F + lG) - (F + lG) \cdot dG,$$

así que:

$$(2) \quad f^\alpha \mid vw \wedge df = (G(f^\alpha dh + \alpha f^{\alpha-1} h df) - f^\alpha h \cdot dG) \wedge df.$$

Además es claro de (2) que $f^{\alpha-1} \mid v$ y que f^α no divide a v . Esto demuestra iv) implica iii).

Falta probar i) implica iv):

Denotamos por $A = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, $K = \mathbb{C}(x_0, x_1, x_2)$. Comenzamos probando el siguiente:

Lema. Sean $f_1, \dots, f_n \in A$ tales que $\text{m.c.d.}\{f_i\} = 1$. La aplicación lineal

$$\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \Omega_{K/\mathbb{C}}^1$$

$$(\alpha_i) \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{df_i}{f_i}$$

es inyectiva.

Prueba. Supongamos que tenemos:

$$(1) \quad \lambda_1 \frac{df_1}{f_1} + \dots + \lambda_n \frac{df_n}{f_n} = 0.$$

Sea $Z_i = (f_i = 0)$. Por el teorema de los ceros de Hilbert existe $a \in Z_1 - \cup_{2 \leq j \leq n} Z_j$.

Sea L una recta afín no contenida en Z_1 que pase por a y $\gamma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ una parametrización afín de L con $\gamma(0) = a$. Sea $q_i = f_i \circ \gamma$, las funciones $\frac{q'_i}{q_i}$, $i = 1, \dots, n$ son regulares en 0, mientras que $\frac{q'_1}{q_1}$ tiene un polo simple en 0 de residuo la multiplicidad r de 0 como raíz de q_1 . De (1) se deduce que:

$$\lambda_1 \frac{q'_1}{q_1} + \dots + \lambda_n \frac{q'_n}{q_n} = 0,$$

en $\mathbb{C}((t))$.

Por lo tanto su residuo en cero debe ser 0, así que $r\lambda_1 = 0$. Q.E.D.

Sea $\{f_i\}$, $i = 1, \dots, n$ un conjunto de soluciones de \mathcal{F} y consideremos la aplicación lineal

$$\phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \Omega_{A/\mathbb{C}}^2$$

$$(\alpha_i) \rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{df_i}{f_i} \right) \wedge w.$$

Se mostrará que si $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \phi > 1$ entonces \mathcal{F} tiene primera integral racional. Sea $\{e_i\}$ la base canónica de \mathbb{C}^n y sean

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i,$$

$$v = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$$

$(\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C})$.

Supongamos que u y v son dos elementos linealmente independientes de $\text{Ker } \phi$. Existen dos polinomios K_α y K_β tales que si $F = f_1 \dots f_n$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{df_i}{f_i} = \frac{K_\alpha}{F} w, \text{ y}$$

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \frac{df_i}{f_i} = \frac{K_\beta}{F} w,$$

por el lema anterior tanto K_α como K_β son distintos de cero, de aquí se deduce que:

$$d\left(\frac{K_\alpha}{F}\right) \wedge w + \frac{K_\alpha}{F} dw = 0$$

$$d\left(\frac{K_\beta}{F}\right) \wedge w + \frac{K_\beta}{F} dw = 0,$$

de donde $d\left(\frac{K_\alpha}{K_\beta}\right) \wedge w = 0$.

Así que $\frac{K_\alpha}{K_\beta}$ es primera integral de \mathcal{F} , si \mathcal{F} tiene un número infinito de soluciones algebraicas podemos escoger $n > \dim_{\mathbb{C}} \Omega_{A/\mathbb{C}}^2 + 1$ y obtenemos el resultado.

1.3.5. Inversamente a lo probado en 1.3.4, dado un pincel irreducible $\lambda F + \mu G = 0$ es posible construir una foliación con singularidades aisladas \mathcal{F} tal que $R = \frac{F}{G}$ es primera integral racional de \mathcal{F} .

Para esto basta considerar $\bar{w} = dF \cdot G - dG \cdot F$ y luego aplicarle a \bar{w} el proceso de reducción explicado en 1.2.4.

1.4. Puntos singulares de foliaciones con primera integral racional.

1.4.1. Sea $\mathcal{F} : L \rightarrow T\mathbb{P}^2$ una foliación holomorfa con primera integral racional. Suponemos además que \mathcal{F} tiene singularidades aisladas y que todas las singularidades de \mathcal{F} son de multiplicidad 1. Recordamos qué significa esto.

Dado $p \in \text{Sing}\mathcal{F}$ sea \mathbb{A}^2 una carta afín conteniendo a p , suponemos que en las coordenadas afines correspondientes $p = (0, 0)$. Restringida a esta carta \mathcal{F} da lugar a un campo vectorial algebraico :

$$\dot{x} = q_1(x, y)$$

$$\dot{y} = q_2(x, y),$$

la condición \mathcal{F} tiene singularidad de multiplicidad 1 significa:

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, (0,0)}}{(q_1, q_2)} = 1.$$

En otras palabras, las curvas afines $q_1(x, y) = 0$ y $q_2(x, y) = 0$ tienen intersección transversal en el origen. Esto implica en particular que si tomamos el desarrollo de Taylor del sistema de ecuaciones anterior

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = DQ|_{(0,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x, y) D^2Q|_{(0,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots,$$

donde $Q = (q_1, q_2)$, entonces $DQ|_{(0,0)}$ tiene valores propios distintos de cero.

Después de un cambio lineal de coordenadas podemos suponer que el sistema anterior es de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots$$

donde J es una matriz de Jordan.

1.4.2. **Proposición.** Sea

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots$$

un campo vectorial en \mathbb{C}^2 asociado a una foliación con primera integral racional y con singularidades de multiplicidad 1. Entonces J satisface:

- 1) J es una matriz diagonal.
- 2) Los valores propios u, v de J son distintos de cero.
- 3) $\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$.

Prueba. 2) es consecuencia directa de que las singularidades de \mathcal{F} son de multiplicidad 1.

1) Recordamos (vea [A] para los detalles) que dado un campo vectorial holomorfo en \mathbb{C}^2 con parte lineal $A \neq 0$:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots$$

decimos que los valores propios λ_1, λ_2 de A son resonantes si

$$\lambda_1 = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2, \quad m_i \in \mathbb{Z}^+, \quad m_1 + m_2 \geq 2$$

(similarmente si intercambiamos λ_1 y λ_2).

El Teorema de Poincaré asegura que si los valores propios de A no son resonantes entonces (1) puede ser reducida por un cambio formal de variables a

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Además si el campo vectorial es polinomial el cambio de variables es también polinomial.

Para la prueba de la parte 2) distinguimos el caso en que (u, v) son valores propios resonantes y el caso en que no lo son. Si (u, v) no son resonantes entonces por el teorema de Poincaré y el hecho de que nuestro campo es polinomial el sistema (1) se transforma mediante un cambio de variable polinomial en

$$(1') \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

las soluciones algebraicas de esta ecuación deben corresponderse con las soluciones de (1).

Integrando explícitamente (ver 5.1) se comprueba que para que (1') tenga todas sus soluciones algebraicas es necesario que

$$J = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix},$$

con $\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$.

Si (u, v) son resonantes entonces $\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}^-$, en particular u es diferente de v y así J debe ser diagonal y con $\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$. Q.E.D.

1.4.3. La siguiente clasificación de las singularidades de una foliación con primera integral racional y con singularidades aisladas y de multiplicidad 1 será de utilidad ([P1]). Sea $p \in \text{Sing}\mathcal{F}$, denotemos por (u, v) , $u \leq v$ el par de números enteros primos relativos obtenido de los valores propios de \mathcal{F} en p .

- a) Si $\frac{u}{v} < 0$ la singularidad de \mathcal{F} en p es llamada una *silla*.
- b) Si $0 < \frac{u}{v} < 1$ la singularidad de \mathcal{F} en p es llamada un *nodo monocrítico*.
- c) Si $\frac{u}{v} = 1$ la singularidad de \mathcal{F} en p es llamada un *nodo dicrítico*.

1.5. Integración local alrededor de un nodo de \mathcal{F} .

1.5.1. **Definición.** a) Una curva plana C definida por $F = 0$ tiene una *singularidad ordinaria* de orden r en p si la imagen de F en $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}$ tiene r componentes irreducibles no singulares y con tangentes distintas.

b) Una curva plana C tiene una singularidad cuspidal de tipo (u, v) con r ramas en p si la imagen de F en $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}$ tiene r componentes irreducibles f_1, \dots, f_r , todas con la misma tangente y tal que cada componente f_i satisfaga:

- i) f_i es de orden u , esto es, u es el menor entero tal que f no es elemento de m_p^{u-1} ,
- ii) si l es la ecuación local de la tangente a f_i , $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}}{(f_i, l)} = v$.

(Aquí consideramos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p} =$ germen de funciones holomorfas en p).

1.5.2. Veamos la integración explícita a que se hizo referencia en la prueba de la proposición 1.4.2.

Sea

$$J = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y consideremos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ut} \\ e^{vt} \end{pmatrix} \cdot c,$$

esto es

$$(1) \quad x^v = \lambda y^u.$$

Si $\frac{u}{v}$ no fuera racional las soluciones obtenidas no serían algebraicas, similarmente se comprueba que si

$$J = \begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

la solución obtenida tampoco es algebraica.

Tomando en cuenta las consideraciones en la prueba de 1.4.2 vemos que la solución general de \mathcal{F} con primera integral racional debe ser una curva con singularidades de tipo ordinaria en los nodos dicríticos de \mathcal{F} y cuspidales de tipo (u, v) en los nodos monocríticos de \mathcal{F} . Por supuesto también cabe la posibilidad de que la solución general no sea singular en estos puntos.

Sin embargo, la expresión local (1) no permite determinar cuántas ramas (componentes locales irreducibles) tiene la solución general en el punto singular en cuestión.

1.5.3. Si $p \in \mathbb{P}^2$ está en el lugar base de $\lambda F + \mu G = 0$ entonces todas las curvas de este pincel pasan a través de p , esto implica que la foliación asociada \mathcal{F} tiene un nodo en p . Inversamente si \mathcal{F} tiene un nodo en p existen infinitas soluciones de \mathcal{F} a través de p , por lo tanto p es un punto base del pincel $\lambda F + \mu G = 0$.

Los puntos sillar de \mathcal{F} se corresponden a singularidades de soluciones no genéricas de \mathcal{F} . Luego son o bien singularidades ordinarias de orden 2 de una solución irreducible o intersección de componentes irreducibles de un elemento reducible del pincel.

Además el cociente $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ es igual en el último caso al cociente $\frac{n_1}{n_2}$ donde n_1, n_2 son la multiplicidad con que aparecen F_1 y F_2 como fibra (en el sentido de teoría de esquemas) de la aplicación racional

$$\mathbb{P}^2 \xrightarrow{(F:G)} \mathbb{P}^1$$

que define al pincel $\lambda F + \mu G = 0$.

1.5.4. Supongamos que en p , la foliación \mathcal{F} con primera integral racional tiene una singularidad de tipo nodo y que la curva general tiene r ramas a través de p , entonces dos soluciones generales se intersectan con multiplicidad $r^2 uv$ en p . Del teorema de Bezout y de la observación de que los nodos de \mathcal{F} están en correspondencia 1 : 1 con el lugar base del pincel asociado se sigue que

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 u_i v_i = d^2,$$

donde n es el número de nodos de \mathcal{F} y d el grado de la solución general.

1.6. Foliaciones holomorfas en superficies algebraicas.

Más generalmente podemos definir una foliación sobre una superficie S (algebraica, irreducible, no singular) como un morfismo

$$\mathcal{F} : L \rightarrow TS,$$

módulo multiplicación por una constante, donde L es un fibrado en rectas en S y TS el fibrado tangente de S .

Muchos de los resultados enunciados en este capítulo para $S = \mathbb{P}^2$ pueden extenderse al caso de superficies más generales. En particular los resultados concernientes a la estructura local de una foliación alrededor de un punto singular se extienden de manera inmediata.

\mathcal{F} tiene primera integral racional si existe una aplicación racional

$$S \xrightarrow{f} X,$$

con X una curva algebraica, tal que las fibras de f sean soluciones de \mathcal{F} .

En el caso en que S sea racional necesariamente tenemos $X = \mathbb{P}^1$. En efecto, dado $f : S \rightarrow X$ con S racional, sea Y una curva racional en S tal que $f|_Y$ no es constante, entonces f determina una aplicación racional dominante $Y \rightarrow X$, como Y es racional se sigue del Teorema de Lüroth ([Sh]) que $X \cong \mathbb{P}^1$.

EL PROBLEMA DE POINCARÉ REFORMULADO

A lo largo de este capítulo y el siguiente, y a menos que se establezca explícitamente lo contrario, una foliación \mathcal{F} será una foliación en \mathbb{P}^2 con singularidades aisladas de multiplicidad 1.

2.1. El problema de Poincaré clásico.

2.1.1. Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa en \mathbb{P}^2 de grado m . Supongamos que \mathcal{F} tiene una primera integral racional $R = \frac{F}{G}$ con F irreducible de grado d .

La pregunta original es: ¿cómo identificar si \mathcal{F} tiene primera integral racional? En término de $w_{\mathcal{F}}$ esta pregunta tiene una respuesta algebraica precisa. Si $F = 0$ es solución de \mathcal{F} entonces $F \mid df \wedge w$, luego determinar si $w_{\mathcal{F}}$ tiene alguna solución de grado d es equivalente a resolver las ecuaciones algebraicas:

$$(1) \quad H.F = dF \wedge w$$

con $H \in \Omega_{\mathbb{P}^2/\mathbb{C}}^2$ de grado $m + d$ con coeficientes indeterminados.

La ecuación (1) tiene infinitas soluciones irreducibles F si y solo si existe un pincel $\lambda F + \mu G = 0$ de curvas de grado d tal que $R = F/G$ es primera integral racional de \mathcal{F} (1.3.4).

Esto da un algoritmo para determinar si \mathcal{F} tiene primera integral racional, el paso d de este algoritmo es resolver las ecuaciones (1) con coeficientes indeterminados para $\deg F = d$. Pero ¿qué sucede si \mathcal{F} no tiene primera integral racional? Es necesario tener un "criterio de parada" para este algoritmo. La determinación de un tal criterio de parada, o lo que es lo mismo la determinación de una cota para d en términos de un número que dependa de $\text{Cal}\mathcal{F}$, es lo que se conoce como el problema de Poincaré. Su formulación clásica es:

2.1.2. **Problema:** Supongamos que \mathcal{F} de grado m tiene una primera integral racional con solución general de grado d . Encontrar una cota para d en términos de m .

Los ejemplos de la sección 2.4 muestran que esta formulación del problema no tiene solución en general.

2.2. Fórmula I de Poincaré.

2.2.1. Dado un pincel irreducible $\lambda F + \mu G = 0$ de grado d es posible asociarle una foliación irreducible \mathcal{F} que tiene a $R = \frac{F}{G}$ como primera integral racional (1.3.5). Recordemos que para esto necesitamos calcular el máximo común divisor a los coeficientes de

$\bar{w} = F.dG - G.dF$. De modo que en principio no conocemos cuál es el grado de la foliación irreducible asociada.

Dado $\lambda F + \mu G = 0$ irreducible el elemento general de este pincel es una curva irreducible de grado d que tiene singularidades sólo en el lugar base del pincel (Teorema de Bertini), llamamos a tal curva *solución general* de \mathcal{F} . Sin embargo para algunos valores (λ_i, μ_i) es posible que $\lambda_i F + \mu_i G = 0$ sea una curva reducible, en tal caso escribimos:

$$\lambda_i F + \mu_i G = \prod U_{ij}^{n_{ij}},$$

y llamamos $d_{ij} = \deg U_{ij}$. Con esta notación tenemos:

2.2.2. Proposición.(Fórmula I de Poincaré): *Sea \mathcal{F} una foliación en \mathbb{P}^2 con primera integral racional $R = F/G$, $\deg F = d$. Entonces*

$$2d - 2 = \sum_{ij} d_{ij}(n_{ij} - 1) + m.$$

Prueba: Sea L una recta en \mathbb{P}^2 que no pase a través de ningún punto singular de \mathcal{F} ni sea tangente a ninguna solución no general de \mathcal{F} .

Consideramos la intersección de L con las curvas del pincel, a cada punto $p \in L$ le corresponde un valor (λ_p, μ_p) determinado por la curva solución que intersecciona a L en p . Tenemos así definida una aplicación regular de grado d , $i: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Si aplicamos el teorema de Riemann-Hurwitz a esta aplicación obtenemos:

$$-2 = -2d + \sum d_{ij}(n_{ij} - 1) + m.$$

Las ramificaciones se obtienen de las intersecciones de L con las soluciones no reducidas y de las m tangencias que debe tener L con \mathcal{F} . Q.E.D.

2.3. Fórmula II de Poincaré (fórmula del género).

2.3.1. Sea \mathcal{F} una foliación en \mathbb{P}^2 con primera integral racional, como se hizo notar en 1.1.5 los nodos de \mathcal{F} se corresponden con el lugar base de $\lambda F + \mu G = 0$ y la solución general $C(F = 0)$ tiene dos tipos de singularidades posibles, ordinarias si el nodo correspondiente es dicrítico o cuspidal de tipo (u, v) si el nodo correspondiente es monocrítico. Además se tiene que $\frac{v}{u} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ donde λ_1, λ_2 son los valores propios de la parte lineal de \mathcal{F} en el punto singular ($\lambda_1 > \lambda_2$).

Sean p_1, \dots, p_n los nodos de \mathcal{F} , si r_i es el número de ramas de la solución general C en p_i tenemos ([G-H]):

$$2g(C) - 2 = d^2 - 3d - \sum_{i=1}^n r_i^2 u_i v_i + \sum_{i=1}^n r_i (u_i + v_i - 1),$$

donde $g(C)$ es el género geométrico de C (esto es $h^1(\bar{C}, \mathcal{O}_{\bar{C}})$, con \bar{C} la normalización de C).

2.3.2. Proposición (fórmula II de Poincaré). Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa de grado m en \mathbb{P}^2 con primera integral racional. Sea d el grado de la solución general y r_i, u_i, v_i como en 2.3.1. Entonces:

$$i) \sum_{i=1}^n r_i(u_i + v_i) = (m + 2)d,$$

$$ii) 2g - 2 = (m - 1)d - \sum_{i=1}^n r_i.$$

Prueba: Sea $\bar{C} : \pi \rightarrow C$ la normalización de C y $\mathcal{F} : L \rightarrow T\mathbb{P}^2$ el morfismo que define la foliación.

Tenemos entonces un morfismo

$$\tilde{\mathcal{F}}|_{\bar{C}} : \pi^*L|_{\bar{C}} \rightarrow T\bar{C},$$

este morfismo determina una sección $s \in H^0(\bar{C}, T\bar{C} \otimes \pi^*L^{-1}|_{\bar{C}})$.

Esta sección se anula en los $\sum r_i$ puntos que se proyectan a los nodos de \mathcal{F} , con multiplicidad 1 en cada punto. Por otro lado $\deg T\bar{C} \otimes L^{-1}|_{\bar{C}} = 2 - 2g + (m - 1)d$.

Luego tenemos

$$\sum r_i = 2 - 2g + (m - 1)d.$$

La prueba de i) es simplemente evaluar en la fórmula del género (2.3.1) la expresión anterior. Q.E.D.

2.4. Ejemplos.

El siguiente conjunto de ejemplos muestran que el problema de Poincaré clásico no tiene solución, el ejemplo 2.4.1 es bien conocido y citado con frecuencia en la literatura, los otros ejemplos aunque elementales parecen ser nuevos y nos ayudarán a conjeturar qué tipo de formulación tiene oportunidad de ser resuelta.

2.4.1. Ejemplo. ([J]) Sea \mathcal{F} en \mathbb{P}^2 determinada por:

$$w_{\mathcal{F}} = pyz \cdot dx + qxz \cdot dy - (p + q)yx \cdot dz$$

con p, q enteros positivos y primos relativos, $(x : y : z)$ coordenadas homogéneas en \mathbb{P}^2 .

El pincel de curvas

$$\lambda x^p y^q + \mu z^{p+q} = 0$$

determina una primera integral de \mathcal{F} . Notemos que en este caso $m = 1$, y el grado de la solución $d = p+q$ puede ser elegido arbitrariamente grande. Esto prueba que la formulación clásica del problema no tiene solución.

2.4.2. **Ejemplo.** Este ejemplo muestra que, además de ser imposible acotar el grado d en términos de m , es imposible acotar $g(C)$.

Sea

$$(1) \quad y^d = \lambda x^{d-2}(x-1)(y-1)$$

un pincel de curvas de grado d en \mathbb{A}^2 . Tenemos:

Proposición. i) El elemento genérico de (1) es irreducible.

ii) La foliación asociada a (1) tiene grado 2 y todos sus puntos singulares son de multiplicidad 1.

iii) Si C es la curva general en (1)

$$g(C) = \begin{cases} \frac{d-1}{2} & \text{si } d \text{ es impar} \\ \frac{d-2}{2} & \text{si } d \text{ es par.} \end{cases}$$

Prueba: i) Supongamos que el elemento general de (1) es reducible. Entonces

$$(2) \quad y^d - \lambda x^{d-2}(x-1)(y-1) = f(x, y)g(x, y).$$

donde $f(x, y) = y^p + f_1(x, y)$, $g(x, y) = y^q + f_2(x, y)$, $p+q=d$. Pero la parte izquierda de (2) sólo tiene dos monomios en los que aparece y , así que en

$$(y^p + f_1(x, y))(y^q + f_2(x, y))$$

debe ser $p=d, q=0$. Esto implica que $g(x, y)$ debe ser constante.

Además se puede ver entonces que y^d y $x^{d-2}(x-1)(y-1)$ son las únicas componentes reducibles de (1).

Para probar ii) utilizamos la fórmula I de Poincaré (2.2.2)

$$m = 2d - 2 - (d-1) - (d-3) = 2.$$

Para probar que todos los puntos singulares son de multiplicidad 1 se comprueba que \mathcal{F} tiene 7 puntos singulares. En efecto $(0, 0)$, $(1, 0)$ y la intersección de $y=0$ y $y=1$ son nodos de \mathcal{F} (1.5.3). Además $(0, 1)$, $(1, 1)$ y la intersección de $x=0$ y $x=1$ son sillas de \mathcal{F} . Por otro lado se comprueba que \mathcal{F} tiene otra singularidad sobre la recta $x = -\frac{d-2}{d-1}$.

El cálculo del género utiliza la fórmula 2.3.2 ii). Notemos que si d es impar la singularidad de la solución general en el origen tiene una rama ($r=1$) y por tanto

$$g(C) = \frac{d+2}{2} - \frac{3}{2},$$

análogamente, si d es par entonces en la singularidad en el origen la solución general tiene dos ramas ($r = 2$) y por tanto:

$$g(C) = \frac{d+2}{2} - \frac{4}{2}.$$

Q.E.D.

2.4.3. Se propone el siguiente problema:

Problema: Dada \mathcal{F} con primera integral racional acotar el grado d de C en función de m y de las parejas de primos relativos (u_i, v_i) asociadas a los valores propios de los nodos de \mathcal{F} (nótese que en los ejemplos anteriores $d \leq \sum v_i$).

Los teoremas 2.5.5 (+ corolario 2.5.6) y 3.3 darán respuesta a este problema cuando:

- 1) todas las singularidades son de tipo $(1, 1)$ ó $(1, -1)$,
- 2) para todos los nodos se satisface la relación $v_i \geq 2u_i$ y hay al menos dos nodos con $u_i > 1$.

2.5. Foliaciones asociadas a pinceles genéricos.

2.5.1. Es bien conocido que en la variedad algebraica de pinceles de curvas planas $\mathbb{G}(1, N)$, $N = \frac{d(d+3)}{2}$, el elemento genérico corresponde a un pincel cuya curva general es no singular, interseca transversalmente al resto de las curvas generales y tal que toda singularidad fuera del lugar base es ordinaria de orden 2 (vea [G-H], pinceles de Lefschetz). Es claro que la foliación asociada a este pincel es una foliación con singularidades de multiplicidad 1 y de tipo $(1, 1)$ en los nodos y tipo $(1, -1)$ en las sillas.

Probaremos el resultado inverso: si \mathcal{F} es una foliación en el plano con singularidades de multiplicidad uno y tipo $(1, 1)$ ó $(-1, 1)$ y además \mathcal{F} tiene primera integral racional entonces el pincel irreducible asociado es genérico en el sentido que se explicó anteriormente.

Por la fibra de una aplicación racional entendemos la fibra en el sentido de la teoría de esquemas. Así, por ejemplo, si expresamos al pincel de curvas planas $\lambda F + \mu G = 0$ como una aplicación racional $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$, la fibra sobre $(\mu_0 : \lambda_0)$ será la curva $\lambda_0 F + \mu_0 G = 0$, que eventualmente es no reducida.

2.5.2. Proposición. Sea $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ una aplicación racional. Si existen $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{P}^1$, tales que $f^{-1}(t_i) = n_i E_i$ es un divisor múltiple ($n_i > 1$), entonces todas las fibras de f son reducibles (esto es, el pincel f es reducible).

Prueba. Sea $f^{-1}(t_i) = n_i E_i$ (E_i no necesariamente irreducible). Sean $\bar{\mathbb{P}}^2 = \mathbb{P}^2 - \{\cup E_i\}$, $\bar{\mathbb{P}}^1 = \mathbb{P}^1 - \{t_i\}$. Primeramente comprobaremos que $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > 1$.

Para esto recordemos la fórmula I de Poincaré (2.2.2)

$$2d - 2 = \sum_{i,j} (n_{ij} - 1) + m,$$

como $n_i \deg E_i = d$, tenemos

$$(d-1) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{d}{n_i} (n_i - 1) \right),$$

de aquí se deduce que

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \geq \frac{d+2}{d} > 1.$$

Así que existe un triángulo $\Delta \subset \mathbb{P}^1$ tal que sus ángulos interiores son de amplitud $\frac{\pi}{n_i}$. Sea G el grupo triangular en \mathbb{P}^1 asociado a Δ , el cociente de \mathbb{P}^1 por G define una aplicación regular

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{g} \mathbb{P}^1,$$

que se ramifica sobre tres valores de \mathbb{P}^1 correspondientes a las órbitas de los vértices de Δ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que estos tres valores son justamente t_1, t_2, t_3 . Notemos que en una vecindad de un punto de ramificación la aplicación g es de la forma z^{n_i} , donde z es una coordenada local. Sea $\tilde{\mathbb{P}}^1 = \mathbb{P}^1 - \{g^{-1}(t_i)\}$. Tenemos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & & \mathbb{P}^1 \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

Nuestro objetivo es construir $h: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ racional tal que $f = g \circ h$.

Para esto fijamos $p_0 \in \tilde{\mathbb{P}}^2$ y consideramos $f(p_0) = t_0$, elegimos s_0 tal que $s_0 \in g^{-1}(t_0)$. La construcción de h es como sigue: sea $p \in \mathbb{P}^2$ y consideremos una curva con parámetro real uniendo a p_0 y p , la proyectamos por medio de f y consideramos su levantamiento por medio de g que comienza en s_0 , el punto final s de este levantamiento será por definición $s = h(p)$.

Para demostrar que h está bien definida debemos probar que h envía curvas cerradas en curvas cerradas.

Sea $\gamma \in \pi_1(\tilde{\mathbb{P}}^2, p_0)$. Del teorema de Zariski de tipo Lefschetz ([F-L]) se deduce que existe una recta $L \subset \mathbb{P}^2$ y $\gamma_L \in \pi_1(L - L \cap \{E_i\})$ tal que $\gamma \sim \gamma_L$. Si γ_L es unión de curvas cerradas que dan una vuelta alrededor de puntos de $L \cap E_i$ entonces su imagen por f es una curva cerrada que da n_i vueltas alrededor de t_i (como f_i es localmente de la forma z^{n_i}). Pero entonces el levantamiento por g de esta es una curva cerrada que da una vuelta alrededor del punto correspondiente de $g^{-1}(t_i)$.

Esto prueba la existencia de h . Que h es racional es consecuencia inmediata de que $f = g \circ h$ y h tiene fibras finitas. Q.E.D.

2.5.3. Proposición. Sea \mathcal{F} una foliación dicrítica (esto es, todos sus nodos son dicríticos) en \mathbb{P}^2 . Supongamos que \mathcal{F} tiene una primera integral racional y sea C una fibra reducible del pincel asociado. Sea $\tilde{\mathbb{P}}^2 = \mathbb{P}^2 - \{\text{nodos de } \mathcal{F}\}$ y $\tilde{C} = C|_{\tilde{\mathbb{P}}^2}$. Entonces \tilde{C} es conexa.

Prueba. Sean p_1, \dots, p_n los nodos de \mathcal{F} y consideremos la superficie racional S obtenida por explotar \mathbb{P}^2 en los nodos p_i .

La transformada propia $\tilde{\mathcal{F}}$ es una foliación que tiene como curvas solución las transformadas propias de las soluciones de \mathcal{F} . Supongamos que para C como en las hipótesis \bar{C} es no conexa, entonces la transformada propia de C será una curva no conexa en S . Por otro lado la fibra general del pincel asociado

$$S \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{P}^1$$

es irreducible. Se sigue del lema de Zariski ([B-P-VdV]) que toda fibra de \tilde{f} debe ser conexa. Esto es una contradicción. Q.E.D.

2.5.4. Es consecuencia de la Proposición 2.5.3 que si todos los puntos sillas de una foliación dicrítica son de la forma $(-1, 1)$ entonces todas las fibras de $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ con alguna componente múltiple debe ser una potencia de una curva reducida, ya que -1 es el cociente de las multiplicidades de las componentes de la fibra que se intersectan en tal punto (1.5.3).

Combinando 2.5.3 y 2.5.4 tenemos:

Proposición. *Sea \mathcal{F} una foliación en \mathbb{P}^2 con singularidades de multiplicidad 1. Si \mathcal{F} tiene una primera integral racional irreducible $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ y todos sus sillas tienen valores propios $(-1, 1)$, entonces existen a lo sumo dos fibras de f con alguna componente múltiple y en tal caso estas fibras son potencias de curvas reducidas.*

2.5.5. **Teorema.** *Sea \mathcal{F} una foliación irreducible en \mathbb{P}^2 con singularidades de valores propios $(1, 1)$ ó $(1, -1)$. Si \mathcal{F} tiene primera integral racional $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$, entonces todas las fibras de f son curvas reducidas y la fibra general es una curva no singular que intersecta transversalmente cualquier otra fibra de f .*

Prueba. Supongamos que la curva general del pincel tiene r tangentes distintas en un nodo dicrítico p (1.5.2), entonces tenemos definida una aplicación regular, $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{h} \mathbb{P}^1$ de grado r , que a cada dirección en p le hace corresponder el valor de f en la curva tangente a esa dirección.

Por Riemann-Hurwitz tenemos:

$$2r - 2 = \sum_{i=1}^k r_i(n_i - 1),$$

donde el índice de la suma varía en las componentes múltiples del pincel, los n_i son las multiplicidades correspondientes y r_i el número de ramas de cada curva múltiple en p .

Si usamos la proposición 2.5.4 tenemos

$$2r - 2 = - \sum_{i=1}^k r_i + 2r,$$

$$\sum_{i=1}^k r_i = 2.$$

Como todo cubriente de \mathbb{P}^1 en \mathbb{P}^1 debe tener al menos dos puntos de ramificación concluimos que $k = 2$, $r_1 = r_2 = 1$. De aquí se deduce que $n_1 = n_2 = n$. Si $n > 1$ entonces existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{(f_1:f_2)} & \mathbb{P}^1 \\ & \searrow f & \downarrow (z_0^n:z_1^n) \\ & & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

donde f_1^n, f_2^n son las correspondientes fibras múltiples del pincel, así el pincel determinado por f no es irreducible. Q.E.D.

2.5.6. Como consecuencia del teorema 2.5.5 y de la fórmula II de Poincaré (2.2.2) tenemos:

Corolario. Sea \mathcal{F} una foliación en \mathbb{P}^2 de grado m y con primera integral racional de grado d , si todos los puntos singulares de \mathcal{F} tienen valores propios $(-1, 1)$ ó $(1, 1)$, entonces

$$m = 2d - 2.$$

2.6. El problema de Poincaré sobre superficies algebraicas.

2.6.1. Si \mathcal{F} está definida sobre S , una superficie algebraica irreducible y no singular, no existe una noción natural de grado de \mathcal{F} , ni de grado de una solución general, así que el problema de Poincaré no tiene una formulación precisa. Sin embargo podemos plantear el siguiente problema general:

Problema: Dada $\mathcal{F} : L \rightarrow TS$ una foliación con primera integral racional, ¿qué información se puede obtener sobre la solución general a partir de la foliación \mathcal{F} ?

2.6.2. La fórmula II de Poincaré puede generalizarse:

Proposición. Sea \mathcal{F} una foliación sobre S con primera integral racional y con puntos singulares de multiplicidad 1. Sean (u_i, v_i) los pares de primos relativos asociados a los nodos de \mathcal{F} , entonces:

(1)

$$\sum_{i=1}^n r_i(u_i + v_i) = -C \cdot (K_S + L).$$

(2)

$$g = -\frac{C \cdot L}{2} - \frac{\sum r_i}{2} + 1.$$

La prueba de la proposición 2.3.2 se repite paso a paso para obtener este resultado.

2.6.3. También puede obtenerse la siguiente generalización del Teorema 2.5.5:

Teorema. Sea \mathcal{F} una foliación sobre una superficie racional S con singularidades aisladas de valores propios $(1, 1)$ ó $(1, -1)$. Si \mathcal{F} tiene primera integral racional $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$, entonces todas las fibras de f son reducidas y la cerradura algebraica de la fibra general es una curva no singular que intersecta transversalmente cualquier otra curva obtenida como cerradura de una fibra de f .

Prueba. El paso importante para demostrar este teorema es generalizar la proposición 2.5.2 al caso de superficies racionales.

Para esto, dado $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ tal que $f^{-1}(t_i) = n_i E_i$ ($i = 1, 2, 3$), consideramos $\mathcal{P} = \mathbb{P}^1, \mathbb{C}$ ó \mathbb{H} (el plano de Poincaré), según sea $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} >, =$ ó < 1 podemos construir un triángulo Δ en el apropiado \mathcal{P} , tal que las amplitudes de los ángulos interiores a Δ sean $\frac{\pi}{n_i}$. Sea G el grupo triangular sobre \mathcal{P} asociado a Δ , entonces existe un subgrupo normal $\bar{G} \subset G$ tal que para $X = \mathcal{P}/\bar{G}$

$$X \xrightarrow{g} \mathbb{P}^1$$

es ramificado sobre estos tres valores (ver [F]). A partir de aquí la construcción de h se realiza como antes. El teorema de Zariski, que en el caso $S = \mathbb{P}^2$ garantiza que

$$\pi_1(L - L \cup \{E_i\}) \rightarrow \pi_1(S - \cap E_i)$$

es sobreyectiva debe ser sustituido ahora por un teorema de Deligne:

Dada $S \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}^2$ una aplicación birracional, para l una recta general en \mathbb{P}^2 , $\alpha^{-1}(l) = L$, tenemos que

$$\pi_1(L - L \cap \{E_i\}) \rightarrow \pi_1(S - \cup \{E_i\})$$

es sobre ([Fu]).

La prueba de las generalizaciones de las proposiciones 2.5.3, 2.5.4 y del teorema 2.5.5 son una repetición mecánica de las dadas anteriormente.

EQUISINGULARIDAD Y EL PROBLEMA DE POINCARÉ.

3.1. La variedad de curvas equisingulares a la solución general y el problema de Poincaré.

En este capítulo trabajaremos en la categoría de espacios complejos.

Recordemos que dos gérmenes de curvas planas $(C_1, 0)$ y $(C_2, 0)$ se dicen *analíticamente equisingulares* en 0 si dadas f_1, f_2 ecuaciones locales para C_1 y C_2 ,

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{(f_1)} \simeq \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{(f_2)}.$$

Dos gérmenes de curvas se dicen topológicamente equisingulares si existe un homeomorfismo del disco $h : \Delta \rightarrow \Delta$ tal que $f|_{C_1}$ es un homeomorfismo entre C_1 y C_2 .

Dada una curva irreducible $C_0 \subset \mathbb{P}^2$ de grado d denotaremos por $\mathcal{E}_{q_{top}}(C_0)$ la clausura algebraica en \mathbb{P}^N del conjunto de curvas equisingulares a C_0 . Es fácil comprobar que este es un conjunto definido localmente por ceros de funciones analíticas, y por tanto es una variedad algebraica en \mathbb{P}^N .

En [G-K] se demuestra que existe un espacio complejo $H'(C_0)$ que parametriza a las curvas planas de grado d analíticamente equisingulares a C_0 y que

$$\frac{d(d+3)}{2} - \tau(C_0) \leq \dim_{\mathbb{C}} H'(C_0)$$

($\tau(C_0)$ es la suma de los números de Tjurina en cada singularidad de C_0 , vea 3.2.2 para la definición).

En 3.2 calculamos un estimado para $\tau(C_0)$ en el caso en que C_0 tiene singularidades cuspidales y así demostramos que:

$$\frac{3d}{2} + \frac{\sum r_i(2v_i - u_i)}{2} \leq \dim_{\mathbb{C}} H'(C_0).$$

Notemos que obviamente se tiene $\dim H'(C_0) \leq \dim \mathcal{E}_{q_{top}}(C_0)$. Así que el estimado obtenido es válido también para $\mathcal{E}_{q_{top}}(C_0)$.

Este capítulo está dedicado a probar el siguiente:

Teorema 3.3: Sea \mathcal{F} una foliación en \mathbb{P}^2 , con primera integral racional $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$, con singularidades aisladas de multiplicidad 1 y tal que en todos sus nodos $v_i \geq 2u_i$, supongamos además que para al menos dos nodos $u_i > 1$. Sea S la superficie obtenida al eliminar el lugar de indeterminación de f . Entonces

$$\frac{3d}{2} \leq h^1(S, TS) + 8.$$

La demostración se divide en dos casos: para $C \in \mathcal{E}_{q_{top}}(C_0)$, un elemento general existe un pincel de curvas en $\mathcal{E}_{q_{top}}(C_0)$ que contiene a C , o no existe tal pincel.

En el primer caso se asocia a un abierto $U \subset \mathbb{G}(1, \mathcal{E}q(C_0))$ una deformación de la superficie S (por $\mathbb{G}(1, V)$ con V variedad proyectiva denotamos la variedad de rectas contenidas en V). En el segundo caso a un abierto $U \subset \mathcal{E}q(C_0)$ le asociamos asimismo una deformación de S . La diferenciación en ambos casos es para garantizar que dos fibras de la deformación sean isomorfas si y sólo si existe un elemento $\alpha \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que envía uno de los pinceles asociados (respectivamente curva) en el otro. Esto permite, después de pasar al cociente por la acción de $PGL(2, \mathbb{C})$ calcular el número de parámetros efectivos de las deformaciones.

3.2. Equisingularidad.

3.2.1. Para los detalles de esta sección véase [G-K].

Dada una aplicación holomorfa entre espacios complejos

$$f: X \rightarrow S$$

se define una deformación (\mathcal{X}, F, i) de f sobre (T, t_0) , donde T es un espacio complejo y $t_0 \in T$, como un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathcal{X} \\ f \downarrow & & \downarrow F \\ S & \xrightarrow{j} & S \times T \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ t_0 & \in & T \end{array}$$

tal que i es una inmersión cerrada y $\pi \circ F$ es un morfismo plano. Dos deformaciones (\mathcal{X}, F, i) , (\mathcal{X}', F', i') sobre (T, t_0) son equivalentes si existe un isomorfismo $\mathcal{X} \simeq \mathcal{X}'$ tal que el diagrama obvio (con la identidad en las segunda y tercera fila) conmute.

Se define un funtor de la categoría de espacios complejos con puntos en la categoría de conjuntos:

$$\mathcal{D}_{X/S}(T) = \{\text{Clases de isomorfismos de deformaciones de } f \text{ sobre } (T, t_0)\}.$$

Una deformación de X es una deformación de $f: X \rightarrow \{pto\}$.

Cualquier deformación (\mathcal{X}, F, i) de $f: X \rightarrow S$ define una deformación de X , y para todo $x \in X$ esta define a su vez una deformación del germen de espacio complejo (X, x) . Si esta deformación de (X, x) es trivial para toda x decimos que (\mathcal{X}, F, i) induce una deformación localmente trivial de X .

Notemos, por ejemplo que si $f: X \hookrightarrow S$ entonces una deformación localmente trivial es una familia \mathcal{X} sobre S tal que cada X_s es analíticamente equisingular a X .

Se define $\mathcal{D}'_{X/S}$ el subfunctor de $\mathcal{D}_{X/S}$ dado por

$$\mathcal{D}'_{X/S} = \{ \text{elementos de } \mathcal{D}_{X/S} \text{ que inducen una deformación localmente trivial de } X \}.$$

3.2.2. Consideremos el caso particular en que X es una curva singular plana irreducible C_0 y $S = \mathbb{P}^2$, en este caso tenemos (vea [G-K]):

Teorema. El funtor $\mathcal{D}'_{C_0/\mathbb{P}^2}$ es representable por un espacio complejo $H'(C_0)$ y

$$\dim_{\mathbb{C}} H'(C_0) \geq \frac{d(d+3)}{2} - \tau(C_0),$$

donde $d = \text{deg}(C_0)$ y $\tau(C_0) = \sum_{p \in C_0} \tau(C_0, p)$.

$\tau(C_0, p)$ es el número de Tjurina de C_0 en p , esto es, dada una ecuación local para C_0 en p , $f(x, y) = 0$

$$\tau(C_0, p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{C_0, p}}{(f, f_x, f_y)}.$$

3.2.3. **Teorema.** Sea C_0 la solución general de una foliación \mathcal{F}_0 con singularidades de multiplicidad uno, entonces con la notación del Capítulo II para d, u_i, v_i y r_i tenemos:

$$\frac{3d}{2} + \frac{\sum r_i(v_i - 2u_i)}{2} \leq \dim_{\mathbb{C}} H'(C_0).$$

Prueba. Sea $[C] \in H'(C_0)$. Supongamos que en un punto singular $p \in C$, C tiene r ramas y sea $f = 0$, $f = f_1 \dots f_r$, una ecuación local de C , esto es, en coordenadas locales $f_i = y^u + k_i x^v$.

Para calcular un estimado de $\dim H'(C_0)$ debemos lograr, por 3.2.2, una cota superior para $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J})$, donde $\mathcal{J} = \sum_{p \in C} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}}{(f, f_x, f_y)}$.

La inclusión natural

$$\phi: \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}}{(f)} \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}}{(f_i)}, \text{ induce:}$$

$$\Phi: \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}}{(f, f_x, f_y)} \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}}{(f_i, f_x, f_y)}.$$

Fijaremos i y calcularemos un estimado para $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}}{(f_i, f_x, f_y)}$. Sea $p = 0$ en alguna carta afín y

$$\begin{cases} x(t) = t^u \\ y(t) = t^v \end{cases}$$

una parametrización local de $f_i = 0$.

Notemos que $f_x|_{f_i=0} = f_{ix} \cdot \prod_{j \neq i} f_j$, y por tanto

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}{(f_i, f_x, f_y)} \cong \mathbb{C}[[t^u, t^v]] / (t^{ruv-v}).$$

Sea $h \in \mathbb{C}[[t^u, t^v]]$, $h = \sum k_{ab} t^{ua} t^{vb}$, para que la imagen de este elemento en el cociente no sea cero debemos tener

$$0 \leq au + bv < ruv - v,$$

$$0 \leq a < rv - \frac{v(b+1)}{u},$$

tomando en cuenta que los únicos valores significativos de b son $b = 0, 1, \dots, u-1$, obtenemos:

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}{(f, f_x, f_y)} \leq ruv - \frac{(u+1)v}{2} + u.$$

Si repetimos el mismo cálculo para cada componente local tenemos:

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}{(f, f_x, f_y)} \leq r^2 uv - \frac{r(u+1)v}{2} + ru.$$

El próximo paso es calcular un estimado para la dimensión de $\text{coker } \Phi$.

Lema. Sea

$$E_1 = \left\{ \sum \mathbb{C}x^a y^b \mid 0 \leq b \leq u-1, 0 \leq a \leq v-1 \right\},$$

$$E_2 = E_1 \oplus \left\{ \sum \mathbb{C}x^a y^b \mid v \leq a \leq 2v-1, 0 \leq b \leq u-1 \right\},$$

$$E_j = E_{j-1} \oplus \left\{ \sum \mathbb{C}x^a y^b \mid (j-1)v \leq a \leq jv-1, 0 \leq b \leq u-1 \right\}.$$

Entonces $E = (0, E_1, \dots, E_{r-1}) \subset \text{coker } \phi$.

Prueba. Primero hacemos notar que:

$$(0, E_1, \dots, E_1) \subset \text{coker } \phi,$$

pues dado $(0, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ con, digamos, $\alpha_2 \neq 0$ debemos tener que para algún $h_1, h_2, h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$:

$$\alpha_2 + f_2 h_2 = f_1 h_1 + f h,$$

pero esto es imposible porque en $f_2 h_2 - f_1 h_1 - f h$ no pueden aparecer monomios de los grados considerados en la definición de E_1 .

Sea ahora $\alpha = (0, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r)$ con $\alpha_i \in E_{i-1}$.

Si $\alpha_2 \neq 0$, por lo probado anteriormente $\alpha \in \text{coker } \phi$. Si $\alpha_2 = 0$ pero $\alpha_3 \notin E_2 \ominus E_1$ el mismo argumento vale, si $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 \in E_2 \ominus E_1$ tenemos:

$$\alpha_3 + f_3 h_3 = f_1 h_1 + f h$$

$$\alpha_3 + f_3 h_3 = f_2 h_2 + f h.$$

Por lo tanto

$$f_1 \cdot f_2 \mid (\alpha_3 + f_3 h_3).$$

Otra vez vemos que esto es imposible por motivos de grado. El resto de la prueba es una repetición del mismo argumento. Q.E.D.

Notemos que

$$\dim E = (r-1)\dim E_1 + (r-2)\dim(E_2 \ominus E_1) + \dots + \dim(E_{r-1} \ominus E_{r-2}),$$

y $\dim E_1 = \dim(E_j \ominus E_{j-1}) = uv$. Como $\dim E_i = iuv - \frac{u(u+1)}{2} + u$, tenemos que:

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}}{(f, f_x, f_y)} \leq \frac{r^2 uv}{2} - \frac{r(v-2u)}{2}.$$

Si sumamos sobre todos los puntos singulares obtenemos

$$\frac{d(d+3)}{2} - \frac{\sum r_i^2 u_i v_i}{2} + \frac{\sum r_i (v_i - 2u_i)}{2} \leq \dim_{\mathbb{C}} H'(C_0)$$

y de aquí se sigue el resultado. Q.E.D.

3.3. Solución al Problema de Poincaré cuando $v_i \geq 2u_i$.

3.3. Teorema: Sea \mathcal{F} una foliación en \mathbb{P}^2 con primera integral racional $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$, con singularidades aisladas de multiplicidad 1 y tal que en todos sus nodos $v_i \geq 2u_i$, supongamos además que existen al menos dos nodos con $u_i > 1$. Sea S la superficie obtenida al eliminar el lugar de indeterminación de f . Entonces

$$\frac{3d}{2} \leq h^1(S, TS) + 8.$$

Observación. Si S es una superficie obtenida por una sucesión de n ($n \geq 4$) explosiones de sucesivas de \mathbb{P}^2 tenemos $h^1(S, TS) = 2n - 8$ (vea [K]). Es claro entonces que $h^1(S, TS)$ depende sólo de las parejas (u, v) y por tanto el teorema da una respuesta al problema de Poincaré. Notemos además que la condición de que existan dos nodos con $u_i > 1$ garantiza que $n \geq 6$.

Prueba. Consideramos dos casos:

i) El elemento general $[C] \in V$ está contenido en un pincel de curvas equisingulares a C .

ii) No existe ningún pincel de curvas planas que contenga a C como elemento general.

Comenzamos con una acotación importante. Sea C una curva plana de grado d con singularidad cuspidal de tipo (u, v) (r ramas) en p . Si consideramos una cadena mínima de explosiones de \mathbb{P}^2 tal que $\bar{C} \subset S$ es no singular, entonces un elemento de $\mathbb{P}H^0(S, \mathcal{O}_S(\bar{C}))$ se corresponde con una única curva C_1 de grado d tal que:

1) (C_1, p) es equisingular a (C, p) .

2) La recta tangente a C en p coincide con la recta tangente a C_1 en p .

E inversamente una curva C_1 con las propiedades anteriores determina un único elemento de $\mathbb{P}H^0(S, \mathcal{O}_S(\bar{C}))$. Notemos que las condiciones i), ii) anteriores pueden ser reformuladas:

i) $h^0(\bar{C}, \mathcal{O}_{\bar{C}}(\bar{C})) > 0$,

ii) $h^0(\bar{C}, \mathcal{O}_{\bar{C}}(\bar{C})) = 0$.

Caso i. Sea $\mathbb{G}(1, N) \supset \mathbb{G}(1, V) = \{\text{rectas en } \mathbb{P}^N \text{ contenidas en } V\}$. Tenemos una variedad de incidencia $\mathbb{P}^N \supset \Gamma \times \mathbb{G}(1, N) = \{([C], l) \mid C \text{ es elemento del pincel } l\}$, y un diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ & p_1, p_2 & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ V & & \mathbb{G}(1, V). \end{array}$$

Por hipótesis p_1 es un morfismo dominante. Si aplicamos el teorema de dimensión de la fibra (vea por ejemplo, [S]), obtenemos:

$$(1) \quad \dim V + h^0(\bar{C}, \mathcal{O}_{\bar{C}}(\bar{C})) - 1 = \dim \mathcal{G}_0,$$

donde $\mathcal{G}_0 = \overline{p_2(\Gamma_0)}$, y $\Gamma_0 \subset \Gamma$ es una componente irreducible tal que $p_1|_{\Gamma_0}$ es dominante.

Sea $U \subset \mathcal{G}_0$ un abierto con $[l_0] \in U$, tenemos definida la aplicación racional:

$$\Phi: \mathbb{P}^2 \times U \rightarrow \mathbb{P}^1 \times U,$$

$$(x, l) \rightarrow (\phi_l(x), l)$$

($\phi_l = \text{el pincel } p_2^{-1}(l)$).

Denotemos por $\mathcal{B}_{\phi_l} = \{\text{puntos base de } \phi_l\}$ y por $\mathcal{B} \subset \mathbb{P}^2 \times U$ el conjunto analítico

$$\mathcal{B} := \{(x, l) \mid x \in \mathcal{B}_{\phi_l}\}.$$

Realizaremos una "explosión paramétrica" a lo largo de \mathcal{B} . Si $(\xi(t), \eta(t))$ es una parametrización de una componente de \mathcal{B} , definimos localmente la explosión paramétrica como el subconjunto de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ determinado por la ecuación

$$[x - \chi(t)]z_1 - [y - \eta(t)]z_0 = 0,$$

($(z_0 : z_1)$ coordenadas homogéneas de \mathbb{P}^1 .)

Como las curvas en consideración son equisingulares podemos repetir este proceso hasta eliminar las indeterminaciones de Φ y así obtenemos una aplicación holomorfa

$$\tilde{\Phi}: S \rightarrow \mathbb{P}^1 \times U.$$

Notemos que para cada $l \in U$ fijo $(pr_2 \circ \tilde{\Phi})^{-1}(l)$ es la superficie S_{ϕ_l} que se obtiene al eliminar las indeterminaciones de la aplicación racional $\phi_l : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$, y $\tilde{\Phi}|_{S_{\phi_l}} = \tilde{\phi}_l$, la aplicación holomorfa correspondiente. Así tenemos un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S_0 & \xrightarrow{i} & S \\ \tilde{\phi}_{l_0} \downarrow & & \downarrow \tilde{\Phi} \\ \mathbb{P}^1 & \rightarrow & \mathbb{P}^1 \times U \\ \downarrow & & \downarrow p_2 \\ l_0 & \in & U, \end{array}$$

En particular, obtenemos una deformación de la superficie S_0 :

$$\tilde{\Phi} \circ p_2 : S \rightarrow U.$$

Notemos que $\tilde{\Phi} \circ p_2$ es una aplicación suave (sin puntos críticos y por tanto es plana.

Para continuar con la demostración necesitamos el siguiente lema (que debe ser conocido):

Lema. Sean S_1, S_2 superficies complejas obtenidas mediante la explosión de \mathbb{P}^2 en k puntos (digamos $S_1 = \tilde{\mathbb{P}}^2_{(p_1, \dots, p_k)}$, $S_2 = \tilde{\mathbb{P}}^2_{(q_1, \dots, q_k)}$). Supongamos que existe un isomorfismo

$$\phi : S_1 \rightarrow S_2.$$

Entonces existe $\alpha \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que $\alpha(p_i) = q_i$ y $\phi = \pi^* \alpha$ ($\pi : S_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ la cadena de explosiones).

Prueba. ϕ induce un isomorfismo

$$\phi^* : Pic(S_2) \rightarrow Pic(S_1),$$

de modo que si llamamos E_1, \dots, E_k a los divisores excepcionales en S_1 y F_1, \dots, F_k los divisores excepcionales en S_2 debemos obtener (después de un reordenamiento de los índices) $\phi(E_i) = F_i$.

De modo que ϕ induce un isomorfismo

$$\tilde{\phi} : \mathbb{P}^2 - \{p_1, \dots, p_k\} \rightarrow \mathbb{P}^2 - \{q_1, \dots, q_k\}$$

que puede ser extendido de manera continua por $\tilde{\phi}(p_i) = q_i$. Además $\phi(E_i) \simeq F_i$ permite extender $\tilde{\phi}^*$ a un isomorfismo $\tilde{\phi}^* : T_{p_i} \mathbb{P}^2 \rightarrow T_{q_i} \mathbb{P}^2$.

Sea X un campo vectorial holomorfo a lo largo de una de una curva C ($p_i \in C$), $X = f(z) \frac{\partial}{\partial z}$ y $Y = \tilde{\phi}^* X = \tilde{f}(w) \frac{\partial}{\partial w}$. Si resolvemos las ecuaciones diferenciales asociadas a X y Y obtenemos funciones holomorfas $g(z), \tilde{g}(w)$ relacionadas por

$$g = \tilde{g} \circ \tilde{\phi}.$$

Así que $\tilde{\phi}$ es holomorfa en la dirección determinada por C . Como la elección de C es arbitraria $\tilde{\phi}$ es holomorfa en p_i . De este modo se obtiene un biholomorfismo $\tilde{\phi}$ de \mathbb{P}^2 , por tanto $\tilde{\phi} \in PGL(2, \mathbb{C})$.

Q.E.D.

Supongamos ahora que en alguna dirección la deformación inducida es trivial, esto es, supongamos que existe una curva $C \subset U$ ($l_0 \in U$) y un isomorfismo entre $p_2 \circ \bar{\Phi}^{-1}(C) = S_C$ y $S_0 \times C$, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_0 \times C & \xrightarrow{\sim} & S_C \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{id} & C \end{array}$$

conmute.

Entonces, por el lema anterior, debe existir $\alpha_t \in PGL(2)$ tal que la aplicación inducida $\tilde{\alpha}_t$ sea un isomorfismo entre S_t y S_0 ($t \in C$). En particular α_t debe enviar el lugar base del pincel l_t en el lugar base de l_0 (y también las rectas tangentes al lugar base de l_t en las correspondientes rectas tangentes al lugar base de l_0). Afirmamos que entonces $\alpha_t(l_t) = l_0$, pues si no, existirían dos pinceles de curvas equisingulares con el mismo lugar base (l_0 y $\alpha_t(l_t)$) lo cual es imposible. Por tanto, equivalencia de deformaciones es equivalente a equivalencia bajo la acción de $PGL(2)$ en $\mathbb{G}(1, V)$. Necesitamos:

Lema. Existe un cociente \tilde{V} en la categoría de espacios complejos,

$$q: \mathbb{G}(1, V) \rightarrow \tilde{V}$$

para la acción de $PGL(2)$ en $\mathbb{G}(1, V)$.

Prueba. Comprobaremos que se satisfacen las condiciones de Holmann ([Po]) para la existencia de un cociente analítico:

1) la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi: PGL(2) \times \mathbb{G}(1, V) &\rightarrow \mathbb{G}(1, V) \times \mathbb{G}(1, V), \\ (\alpha, l) &\rightarrow (\alpha(l), l) \end{aligned}$$

es propia.

2) para todo $l \in \mathbb{G}(1, V)$ $St(l) = \{\alpha \in PGL(2) \mid \alpha(l) = l\}$, es finito.

Primero veamos 2), α debe enviar el lugar base de l en el lugar de $\alpha(l)$ y análogamente debe suceder con las rectas tangentes a las singularidades del elemento general de l (las cuales están bien definidas pues las singularidades son cuspidales). Como existen al menos dos puntos singulares en la curva general vemos que existen a lo sumo un número finito de β tales que $\beta(l) = l$. Esto de paso implica que Φ tiene fibras finitas y por tanto es localmente propia ([B-P-VdV]). Esto es, para cada $x \in PGL(2) \times \mathbb{G}(1, V)$ existe una vecindad abierta V_x de x tal que $\Phi|_{V_x}$ es propia.

Comprobaremos que Φ es una aplicación abierta. Para esto notemos que si consideramos

$$\mathbb{G}(1, V) \hookrightarrow \mathbb{P}^M \quad \left(M = \frac{N(N+1)}{2} - 1\right),$$

vía la inmersión de Plücker, la acción de $PGL(2)$ es lineal.

En efecto, la acción sobre una curva de grado d asigna a

$$(1) \quad \sum a_J x^J$$

un polinomio

$$(2) \quad \sum P_J(a_J, \alpha_{ij}) x^J,$$

con $\deg_{a_J} P_J = 1$.

Por otro lado las coordenadas de Plücker son de la forma

$$(1') \quad (\dots, a_I b_J - a_J b_I, \dots).$$

Luego la acción de $\alpha \in PGL(2)$ transforma este elemento en

$$(2') \quad (\dots, P_I(a_K, \alpha) P_J(b_K, \alpha) - P_J(a_K, \alpha) P_I(b_K, \alpha), \dots),$$

tomando en cuenta que P_I, P_J son lineales en las primeras coordenadas vemos que (2') es lineal en las coordenadas de Plücker. De aquí se deduce fácilmente que Φ es abierta.

Sea ahora $K \subset \mathbb{G}(1, V) \times \mathbb{G}(1, V)$ un compacto y $\bar{K} = \Phi^{-1}(K)$. Para cada $x \in K$, $y_i \in \Phi^{-1}(x)$ elegimos un abierto V_{y_i} tal que $\Phi|_{V_{y_i}}$ sea propia, sea $U_{y_i} \subset V_{y_i}$ un abierto tal que $y_i \in U_{y_i}$ y $\bar{U}_{y_i} \subset V_{y_i}$. Entonces, si llamamos $U_x = \cap_i \Phi(U_{y_i})$ tenemos que $\cup_{x \in K} U_x \supset K$ es un cubrimiento por abiertos, de modo que existen x_1, \dots, x_k tales que

$$\cup_{j=1}^k U_{x_j} \supset K,$$

además, $\Phi^{-1}(\bar{U}_{x_j} \cap K)$ es un compacto por la construcción de los U_{y_i} , por tanto

$$\Phi^{-1}(K) \subset \cup_{i,j} \Phi^{-1}(\bar{U}_{y_{ij}} \cap K),$$

así $\Phi^{-1}(K)$ es compacto. Q.E.D.

Sea $\bar{\mathcal{G}}_0$ el espacio cociente de \mathcal{G}_0 . Sea \bar{U} un abierto incluido en la imagen de U en $\bar{\mathcal{G}}_0$, entonces \bar{U} determina una deformación de $\bar{\phi}_0$. Se sigue de la construcción que no existe $C \subset \bar{U}$ tal que la clase de deformaciones inducida sea trivial.

Como $H^1(S_0, TS_0)$ parametriza las clases de equivalencia de deformaciones infinitesimales de S , tenemos por el teorema de dimensión de la fibra, que:

$$\dim \mathcal{G}_0 - 8 \leq h^1(S_0, TS_0).$$

Caso ii. El argumento sigue las mismas líneas. Sea $U \subset V$ un abierto, $[C_0] \in U$. Definimos:

$$B := \{(x, [C]) \in \mathbb{P}^2 \times U \mid x \text{ es punto singular de } C\},$$

y un proceso similar muestra que obtenemos $\tilde{\Phi} : S \rightarrow U$ una familia plana con $S_0 =$ superficie obtenida al desingularizar C_0 . Otra vez tenemos la existencia del espacio analítico $V/PGL(2)$.

Si $C \subset \tilde{U}$ es una curva tal que la deformación inducida es trivial, entonces si $S_0 \cong S_t$ los pares $(p_i, L_i), (q_i, L'_i)$ de puntos singulares y rectas tangentes de C_0 y C_1 cumplen que existe $\alpha \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que

$$\alpha(p_i) = q_i, \alpha(L_i) = L'_i.$$

Por hipótesis la única curva en V con puntos singulares en q_i y recta tangente L'_i en q_i es $\alpha(C_0)$, así que es imposible la existencia de una tal curva en \tilde{U} . Luego

$$\dim U - 8 \leq \dim \{\text{espacio de deformaciones de } S_0\} = h^1(S_0, TS_0).$$

Luego tenemos el teorema en este caso.

Q.E.D.

Guanajuato Enero 1991 - Morelia Octubre 1994.

REFERENCIAS.

- [A] V.I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer Verlag, 1988 (segunda edición).
- [B-P-VdV] Barth, Peters, Van de Ven, *Compact Complex Surface*. Springer Verlag, 1984.
- [C] M. Carnicer, *About the Poincaré Problem in the Non-dicritical Case*. Por aparecer en *Annals of Mathematics*.
- [C-LN] D. Cerveau y A. Lins-Neto, *Holomorphic Foliations in $CP(2)$ Having an Invariant Algebraic Curve*. *Ann. Inst. Fourier* **41** (1991), 883-903.
- [F] R. H. Fox, *On Frenkel's Conjecture about F-groups*. *Mat. Tidsskrift B*, (1952), 61-65.
- [Fu] W. Fulton, *On the Topology of Algebraic Varieties*. *Proceedings in Pure Mathematics*, AMS vol. **46** (1987).
- [F-L] W. Fulton y R. Lazarsfeld, *Connectivity and its Applications in Algebraic Geometry*. *Lecture Notes in Mathematics* **862**, 62-92, Springer Verlag, 1981.
- [GM] X. Gómez-Mont, *On Closed Leaves of Holomorphic Foliations by Curves*. *Lecture Notes in Mathematics* **1414**, 61-98, Springer Verlag, 1989.
- [GM-OB], X. Gómez-Mont y L. Ortiz-Bobadilla, *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*. *Aportaciones Matemáticas*, Sociedad Matemática Mexicana, 1988.
- [GM-V] X. Gómez-Mont y R. Vila, *On Meromorphic Integrals of Holomorphic Foliations in Surfaces*. Sin publicar.
- [G-K] G-M. Greuel y U. Karras, *Families of Varieties with Prescribed Singularities*. *Compositio Mathematica* **69**, 83-110 (1989).
- [G-H] P. Griffiths y J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley Interscience, 1978.
- [H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*. Springer Verlag, 1977.
- [J] J.P. Jouanolou, *Equations de Pfaff algébriques*. *Lecture Notes in Mathematics* **708**, Springer Verlag, 1979.
- [K] K. Kodaira, *Complex Manifolds and Deformations of Complex Structures*. Springer Verlag, 1986.

[P1] H. Poincaré, *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*. Rend. del C. Mat. di Palermo **t5** (1891), 161-191.

[P2] H. Poincaré, *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*. Rend. del C. Mat. di Palermo **t11** (1887), 193-239.

[Po] H. Popp, *Moduli Theory and Classification Theory of Algebraic Varieties*. Lecture Notes in Mathematics **620**, Springer Verlag, 1977.

[S] C.S. Seshadri, *Theory of Moduli*, en Arcata 1974. AMS Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 1975.

[Sh] I.R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*. Springer Verlag, 1977.