

LINEALIZACIÓN TOPOLÓGICA DE FLUJOS HOLOMORFOS EN EL DOMINIO DE POINCARÉ

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

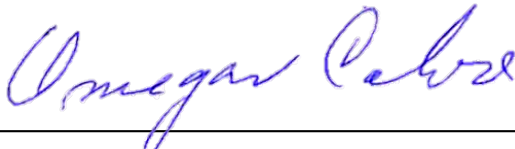
Matemáticas Básicas

Presenta

César David Romero Mora

Director de Tesis:

Dr. José Omegar Calvo Andrade



Autorización de la versión final

A Ana Julia, mi revolucionaria favorita ...

*“C’est naturellement par la
partie qualitative qu’on doit
aborder la théorie de toute
fonction (...)
D’ailleurs, cette étude
qualitative aura par elle-même
un intérêt de premier ordre”.*

- Henri Poincaré (1881)

*“No Mauricio, this is no trouble,
this is your luck. Try to work as
hard and as fast as you can on
this subject because the day will
come when you will not
understand a single word of
what they will be saying about
structural stability; this
happened to me in topology”.*

- S. Lefschetz to M. Peixoto
(1957)

*“Our concern is with cruder
results which reflect only the
topological structure of a flow”.*

- J. Guckenheimer (1972)

Resumen

El propósito de este trabajo es dar a conocer el Teorema de Guckenheimer sobre linealización topológica de flujos holomorfos, cuya parte lineal pertenece al dominio de Poincaré. Este resultado es análogo al Teorema de Hartman-Grobman para flujos reales.

Este es un resultado sobre estabilidad local, pero hace uso de un teorema de Palis-Smale acerca de la estabilidad estructural en sistemas Morse-Smale. Por lo tanto, la exposición hace un recorrido por estos conceptos. En primer lugar, presentamos algunos preliminares y las herramientas más importantes necesarias para la prueba de estabilidad de sistemas Morse-Smale: hiperbolicidad, Teorema de la variedad estable y Lema de inclinación (λ -lema). En segundo lugar, definimos flujos holomorfos con parte lineal en el dominio de Poincaré y explicamos la demostración del resultado principal de Guckenheimer.

Agradecimientos

Sería ingenuo de mi parte pretender que en tan poco espacio voy a poder incluir a todas las personas que, de alguna manera, han contribuido a lo largo de mi vida para que ahora esté alcanzando esta meta. Sepan que los recuerdo con mucho cariño.

Agradezco en primer lugar a mis padres, María Adela Mora y Carlos Julio Romero; mi hermana, Marisol; y mi abuelita, Ana Julia Mora. Gracias por todo su amor y cariño, por la confianza que siempre han depositado en mí y por el apoyo incondicional que he recibido de ustedes desde que tengo memoria.

A mis amigos de Colombia, que con sus palabras y motivación me han demostrado que la distancia a veces se puede hacer muy corta. En especial, a Stefanía Agudelo, gracias por estar siempre presente.

A los amigos que conocí en México. Gracias por hacerme sentir como en familia. Gracias por las comidas, las tardes de juegos, los viajes, las retas de ping-pong, los karaokes, etc. Esta experiencia no habría sido igual de atractiva sin ustedes. Quisiera mencionar especialmente a Henry Ocampo, tuve muy buena suerte al tenerlo como *roommie* estos dos años.

A mi asesor, el Dr. Omegar Calvo, por sus explicaciones y conversaciones, que equilibraban muy bien las matemáticas con otros aspectos de la vida.

A los miembros del sínodo, la Dra. Mónica Moreno y el Dr. Renato Iturriaga, por dedicar parte de su tiempo a leer y aportar a este trabajo.

Al CIMAT, por permitirme ingresar al programa de maestría y por el acompañamiento recibido durante el proceso. Especialmente, a los profesores que hicieron parte de mi formación, por la paciencia y el compromiso que tuvieron aun en situaciones adversas. Pero también al personal administrativo por su apoyo.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por la beca que me fue otorgada durante los últimos tres semestres de la maestría, la cual facilitó en gran medida la realización de este posgrado.

Índice general

Resumen	v
Agradecimientos	vii
Introducción	1
1. Sistemas dinámicos	3
1.1. Conceptos básicos	3
1.2. Dinámica topológica	6
1.3. Clasificación e invariantes	13
1.4. Genericidad	17
2. Estabilidad local	19
2.1. Sistemas lineales	19
2.2. Hiperbolicidad	26
2.3. Transversalidad	27
2.4. Variedades invariantes	28
2.5. Lema de inclinación (λ -lema)	32
2.6. Estabilidad local y linealización	38
3. Estabilidad estructural	43
3.1. Definición	43
3.2. Sistemas dinámicos Morse-Smale	44
3.3. Estabilidad estructural de sistemas dinámicos Morse-Smale	44
4. De lo global a lo local: linealización de flujos holomorfos	51
4.1. Flujos holomorfos	51
4.2. Hiperbolicidad	54
4.3. Linealización	55
4.4. Estabilidad local: Teorema de Guckenheimer	57
Bibliografía	61

Introducción

El presente trabajo está enmarcado dentro del área de sistemas dinámicos diferenciables. Más precisamente, abordamos la cuestión de la estabilidad local de la estructura de las órbitas de un flujo holomorfo cerca de una singularidad. Para entender mejor los conceptos relacionados, dividimos esta presentación en dos partes: la teoría cualitativa de sistemas dinámicos y la idea de estabilidad estructural.

En primer lugar, la teoría de sistemas dinámicos tiene su origen en el estudio de ecuaciones diferenciales. A su vez, estas fueron introducidas por los trabajos de Sir Isaac Newton (1686) en física mecánica. En los inicios de la disciplina, la motivación radicaba en resolver analíticamente la mayor cantidad de ecuaciones a partir de una condición inicial. Sin embargo, a pesar de que este propósito se cumplió ampliamente, se hizo evidente que aproximarse al problema con este método era difícil y, en ocasiones, inoperante. Fue así como Henri Poincaré (1881) propuso estudiar de forma cualitativa las soluciones, obteniendo una descripción topológica de estas, en lugar de una expresión analítica. Este enfoque adoptó el nombre de sistemas dinámicos y desde el siglo XX ha sido explorado por matemáticos como Birkhoff, Anosov, Smale, Palis, Pugh, entre muchos otros.

Por su parte, el concepto de estabilidad estructural tiene sus orígenes en el trabajo *Sistemas robustos* de Andronov y Pontryagin (1937). Allí, estudiaron flujos en un disco $D \subset \mathbb{R}^2$, cuyas soluciones fueran transversales a la frontera, y propusieron condiciones para que la estructura topológica de las órbitas permaneciera invariante ante perturbaciones. Inicialmente, el trabajo no tuvo tanta resonancia, pero Lefschetz y DeBaggis lo retomaron y definieron formalmente la noción de estabilidad estructural, despertando interés en occidente. Así, se involucraron investigadores como Mauricio Peixoto, quien encontró condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad estructural de flujos en el disco (1959), y Stephen Smale, quien abrió un ambicioso programa de investigación en estabilidad estructural de sistemas dinámicos en variedades. Uno de los resultados obtenidos por este programa, la estabilidad estructural de sistemas Morse-Smale, es un tema central de este trabajo.

Un escenario de interés para el estudio de la estabilidad estructural se da en cercanía de las singularidades de un flujo. De aquí surge la idea de estabilidad local.

Dos resultados históricamente relevantes en el sentido de la estabilidad local son el Teorema de Hartman-Grobman (1960) y el Teorema de Guckenheimer (1972). El primero trata de la equivalencia local entre un flujo real y su parte lineal cerca de una singularidad hiperbólica. Entretanto, el segundo se puede entender como un análogo del primero restringido a un tipo específico de flujos holomorfos. Más específicamente, garantiza la equivalencia local entre un flujo holomorfo y su parte lineal en una singularidad hiperbólica cuya parte lineal pertenece al dominio de Poincaré. El objetivo de esta tesis es desglosar y explicar la prueba de este resultado.

Organización de la tesis

El trabajo pretende ser una guía para la comprensión del Teorema de Guckenheimer. Por tal motivo, aunque no reclamamos ninguna originalidad en los resultados contenidos, consideramos haber hecho un ejercicio de estructuración ideal para alguien que desee comprender las herramientas usadas en dicha prueba. La distribución de texto tuvo una influencia notable del libro de Palis y de Melo [PdM82] y se compone de cuatro capítulos.

En el capítulo 1 damos los preliminares sobre sistemas dinámicos diferenciables. Introducimos los conceptos de sistema discreto y continuo en variedades y cómo estos pueden ser reducidos al estudio de difeomorfismos y campos vectoriales, respectivamente. También explicamos las herramientas de dinámica topológica que serán utilizadas en los capítulos siguientes: conjuntos invariantes, conjugación, equivalencia topológica y genericidad.

En el capítulo 2 estudiamos la noción de estabilidad local. Abordamos primero el caso de sistemas lineales, para luego extender los argumentos a sistemas no lineales. Estos argumentos incluyen los conceptos de hiperbolicidad, transversalidad y variedades transversales invariantes (Teorema de la variedad estable). Al final, explicamos el Lema de inclinación y una prueba del Teorema de Hartman-Grobman que hace uso de dicho lema.

En el capítulo 3 formalizamos la definición de estabilidad estructural e introducimos los sistemas Morse-Smale. El interés sobre estos sistemas reside en que son estructuralmente estables, hecho que se utiliza para la demostración del Teorema de Guckenheimer. Naturalmente, la prueba de la estabilidad estructural de sistemas Morse-Smale es el resultado más relevante del capítulo.

Finalmente, en el capítulo 4, definimos flujos holomorfos y extendemos la definición de hiperbolicidad a singularidades de estos flujos. De esta manera, llegamos al punto culmen del documento, donde retomamos la idea de linealización y desarrollamos la prueba del Teorema de Guckenheimer.

Capítulo 1

Sistemas dinámicos

Desde un punto de vista intuitivo, un sistema dinámico es una forma de describir el pasaje a través del tiempo de todos los puntos de un espacio dado [HS74]. Esta noción, a pesar de estar enunciada de manera informal, tiene la capacidad de incluir tres elementos esenciales que van a permitir una definición más rigurosa; estos son: el “espacio fase”, cuyos puntos representan posibles estados del sistema, el “tiempo”, que refleja la estructura de orden entre las transiciones de estados y la “ley evolutiva”, que es la regla que permite determinar el estado del sistema a partir de los estados en niveles inferiores de la estructura temporal. Una exposición más detallada de esta idea se puede encontrar en [KH95].

A lo largo de este trabajo nos interesan principalmente los sistemas dinámicos suaves (discretos y continuos). Consecuentemente, los espacios fase serán variedades diferenciables y la ley evolutiva estará dada por difeomorfismos o campos vectoriales en dichas variedades.

En este capítulo introduciremos los conceptos básicos de sistemas dinámicos y las herramientas de dinámica topológica que serán empleadas posteriormente, tales como los conceptos de conjuntos invariantes, clasificación topológica y genericidad.

1.1. Conceptos básicos

Las definiciones dadas a continuación se formulan de manera abstracta, pero en la mayoría del texto se hace énfasis solo en el contexto de variedades diferenciables.

Definición 1.1.1 (Iterado). Sea M un conjunto no vacío y $f : M \rightarrow M$ una función. Para $k \in \mathbb{Z}^+$ denotamos por f^k al k -ésimo iterado de f . Es decir, f^k es la composición $f^k = f \circ \dots \circ f$ (k veces) de f con sí misma. Denotamos $f^0 = Id$ como la identidad. Además, si f es invertible, entonces denotamos $f^{-k} = f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}$ (k veces). En este último caso, el iterado f^k está bien definido para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.1.2 (Sistema discreto). Un sistema dinámico de tiempo discreto es una tripleta (M, \mathbb{Z}, Φ) , donde M es un conjunto no vacío (variedad diferenciable m -dimensional) y $\Phi : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$ es una función que satisface

- (i) $\Phi(0, x) = x$, para todo $x \in M$.
- (ii) $\Phi(k, \Phi(j, x)) = \Phi(j + k, x)$, para todo $j, k \in \mathbb{Z}$, $x \in M$.

Note que si (M, \mathbb{Z}, Φ) es un sistema discreto, entonces podemos recuperar la función $f := \Phi(1, \cdot) : M \rightarrow M$. Esta función f resulta invertible y la dinámica se puede entender completamente por los iterados de f , puesto que $f^k(x) = \Phi(k, x)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, $x \in M$. Así, un sistema discreto se puede definir solo con la función f .

De ahora en adelante, nos referiremos a sistemas discretos en una variedad diferenciable M , por lo que la función f será un difeomorfismo (de clase C^r) de M , i.e., $f \in \text{Diff}^r(M)$.

Definición 1.1.3 (Sistema continuo). Un sistema dinámico de tiempo continuo (diferenciable de clase C^r) es una tripleta (M, \mathbb{R}, Φ) , donde M es un conjunto no vacío (variedad diferenciable m -dimensional) y $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ es una función (diferenciable de clase C^r) que satisface

- (i) $\Phi(0, x) = x$, para todo $x \in M$.
- (ii) $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(t + s, x)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$, $x \in M$.

Un sistema dinámico continuo también es llamado flujo real. Para un flujo real, la función en tiempo t , $f^t := \Phi(t, \cdot) : M \rightarrow M$ es invertible para todo $t \in \mathbb{R}$. En nuestro caso, las funciones f^t serán difeomorfismos (de clase C^r) de M , i.e., $f^t \in \text{Diff}^r(M)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Note que, dado un flujo y un tiempo fijo $t_0 \in \mathbb{R}$, los iterados $(f^{t_0})^k = f^{t_0 k}$ forman un sistema dinámico de tiempo discreto. Sin embargo, muy pocos difeomorfismos pueden ser obtenidos de esta manera.

Ejemplo 1.1.1. Sea $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ el círculo visto como el grupo cociente del grupo aditivo de los números reales módulo el subgrupo de los enteros. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos el mapa $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ como $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$. Luego, R_α es un difeomorfismo C^∞ y sus iterados $R_\alpha^k(x) = x + k\alpha \pmod{1}$ definen un sistema dinámico discreto en \mathbb{S}^1 . Este sistema corresponde a la rotación de \mathbb{S}^1 por un ángulo de $2\pi\alpha$.

Ejemplo 1.1.2. Considere $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real de $n \times n$. Definimos la función $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como $\Phi(t, x) = e^{tA}x$. Es claro que $\Phi(0, x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\Phi(t + s, x) = e^{(t+s)A}x = e^{tA}e^{sA}x = e^{tA}\Phi(s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Luego, Φ define un sistema dinámico continuo de clase C^∞ en \mathbb{R}^n .

La definición de función exponencial (ver 2.1.3) justifica el ejemplo anterior, el cual está relacionado con la ecuación diferencial $x' = Ax$ en \mathbb{R}^n . Este hecho se puede enunciar en un contexto mucho más general mediante los siguientes resultados.

Proposición 1.1.1. *Sea M una variedad diferenciable m -dimensional y Φ un flujo de clase C^r en M . Entonces, existe un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ tal que las funciones $f_x := \Phi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow M$ son curvas integrales de X a través de x , para todo $x \in M$.*

Demostración. Fijando $x \in M$ y variando $t \in \mathbb{R}$, obtenemos una curva parametrizada (de clase C^r) en M , dada por $f_x := \Phi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow M$ (a veces denominada el flujo a través de x). Sea $X(x)$ el vector tangente a esta curva en $t = 0$, es decir, en el punto x ,

$$X(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_x(t).$$

En consecuencia, el vector $X(x)$ pertenece al espacio tangente a M en el punto x , $T_x M$. Así, el mapa $X : M \rightarrow TM$, es una sección del fibrado tangente TM , i.e., X es un campo vectorial en M . Como Φ es de clase C^r , es claro que $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Además, por la definición del campo vectorial X , también se sigue que las funciones f_x son curvas integrales de X a través de x para todo $x \in M$. \square

Una posible interpretación de la proposición es que cada sistema dinámico continuo da lugar a una ecuación diferencial.

Sin embargo, el resultado inverso no siempre es válido. Hace falta imponer condiciones sobre la ecuación diferencial para obtener un sistema dinámico continuo a partir de ella. Una de esas condiciones es que la ecuación diferencial sea autónoma; es decir, que la derivada no dependa del tiempo. Más aún, estas se pueden reducir a ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden. Por lo tanto, basta con considerar campos vectoriales. Infortunadamente, esta condición tampoco es suficiente, pues se debe garantizar que las soluciones se puedan extender y sean continuamente diferenciables para cualquier valor real de t , lo cual no siempre ocurre. A continuación, enunciamos un escenario en el que se asegura esta situación, cuya prueba está en [PdM82], y representa el caso de mayor interés de este trabajo.

Teorema 1.1.2 (Existencia y unicidad). *Sea M una variedad diferenciable m -dimensional compacta sin frontera y $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ un campo vectorial. Entonces, existe un único flujo global de clase C^r en M para X . Es decir, existe un mapa $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ de clase C^r tal que $\Phi(0, x) = x$ y $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, x) = X(\Phi(t, x))$, para todo $x \in M$.*

Corolario 1.1.2.1. *Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ el flujo determinado por X por el teorema 1.1.2. Para cada $t \in \mathbb{R}$ la función $X^t : M \rightarrow M$, $X^t(x) = \Phi(t, x)$, es un difeomorfismo de clase C^r . Además, $X^0 = Id$ y $X^{t+s} = X^t \circ X^s$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$.*

Definición 1.1.4 (Flujo de un campo vectorial). Dado $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ como en el teorema 1.1.2, se denominará indistintamente como flujo de X al mapa Φ o a las funciones $\{X^t\}_{t \in \mathbb{R}}$. En el último caso, la notación se simplifica a X^t .

Lo anterior explica la preferencia del estudio de sistemas dinámicos en variedades diferenciables compactas. Además, dada una variedad diferenciable compacta M , es claro por qué es suficiente con analizar los conjuntos de difeomorfismos, $\text{Diff}^r(M)$ (para el caso discreto), y de campos vectoriales, $\mathfrak{X}^r(M)$ (para el caso continuo).

Para finalizar la primera parte de definiciones de esta sección, introducimos la noción más general de sistema dinámico diferenciable [Sma67]. Esta versión no será utilizada de forma extendida a lo largo de este documento, pero se incluye al considerarla de interés, ya que engloba las definiciones 1.1.2 y 1.1.3, además de ser de utilidad para la sección 4.1.

Definición 1.1.5 (Sistema dinámico diferenciable). Sea G un grupo de Lie y M una variedad diferenciable. Un sistema dinámico diferenciable es una acción diferenciable de G sobre M . Es decir, un homomorfismo $\psi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ tal que el mapa inducido $\Phi : G \times M \rightarrow M$, dado por $\Phi(g, x) = \psi(g)(x)$, es diferenciable.

1.2. Dinámica topológica

Como se mencionó previamente, el énfasis del presente trabajo está en sistemas dinámicos en variedades diferenciables. En particular, dichos espacios poseen también una estructura topológica y las funciones evolutivas resultan ser continuas. Por lo tanto, es de utilidad establecer un marco de trabajo de propiedades topológicas para el estudio de la dinámica diferenciable.

En esta sección se describen las más importantes de dichas herramientas topológicas, simultáneamente para difeomorfismos y flujos. Estas serán empleadas en los análisis de los siguientes capítulos.

Definición 1.2.1 (Órbita). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$. La órbita de un punto $p \in M$ es el conjunto $\mathcal{O}_f(p) = \{f^k(p) : k \in \mathbb{Z}\}$. Análogamente, sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y X^t , $t \in \mathbb{R}$, el flujo de X . La órbita de un punto $p \in M$ es el conjunto $\mathcal{O}_X(p) = \{X^t(p) : t \in \mathbb{R}\}$. Cuando no haya lugar a confusión, no se incluirá el subíndice en la notación.

Definición 1.2.2 (Punto periódico). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$. Un punto $p \in M$ se dice periódico si existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^k(p) = p$. Análogamente, sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y X^t , $t \in \mathbb{R}$, el flujo de X . Un punto $p \in M$ se dice periódico si existe $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $X^t(p) = p$. Al conjunto de puntos periódicos lo denotamos como $\text{Per}(f)$ o $\text{Per}(X)$, respectivamente.

La órbita de un punto periódico se denomina órbita periódica. Para flujos, una órbita periódica también puede llamarse órbita cerrada.

Definición 1.2.3 (Punto fijo). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$. Un punto $p \in M$ se dice punto fijo si $f(p) = p$. Análogamente, sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Un punto $p \in M$ se dice punto fijo (o singularidad) si $X(p) = 0$. Al conjunto de puntos fijos lo denotamos como $\text{Fix}(f)$ o $\text{Fix}(X)$, respectivamente.

Observación. Si $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $p \in M$ es un punto fijo, entonces $f^k(p) = p$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Análogamente, si $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ es un punto fijo, entonces $X^t(p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observación. Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$, $p \in M$ es un punto periódico si, y solo si, $\mathcal{O}_f(p)$ es un conjunto finito. Análogamente, sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, si $p \in M$ es un punto periódico no fijo, entonces $\mathcal{O}_X(p)$ es un conjunto difeomorfo a \mathbb{S}^1 .

Definición 1.2.4 (Período). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$, $p \in M$ un punto periódico de f y $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ el mínimo entero positivo tal que $f^{k_0}(p) = p$, entonces k_0 es llamado el período de p . Análogamente, sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, X^t , $t \in \mathbb{R}$, el flujo de X , $p \in M$ un punto periódico no fijo de X y $t_0 \in \mathbb{R}^+$ el mínimo número positivo tal que $X^{t_0}(p) = p$, entonces t_0 es llamado el período de p .

El concepto de órbita surgió en analogía directa con cuestiones de mecánica celeste, en las que se buscaba entender el comportamiento a largo plazo de un sistema evolutivo [BS02]. Este análisis asintótico evidencia la importancia de identificar conjuntos que permanezcan inalterados bajo la evolución del sistema y las órbitas constituyen un primer ejemplo de estos conjuntos. A continuación, se formaliza este concepto y se introducen otros conjuntos con esta característica.

Definición 1.2.5 (Conjunto invariante). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$. Un subconjunto $A \subset M$ se dice invariante si $f^k(A) = A$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Análogamente, sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y X^t , $t \in \mathbb{R}$, el flujo de X . Un subconjunto $A \subset M$ se dice invariante si $X^t(A) = A$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.2.1. *Un conjunto es invariante si, y solo si, es una unión de órbitas.*

Demostración. Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$. Suponga que $A \subset M$ es un conjunto invariante. Luego, es claro que $A \subset \bigcup_{p \in A} \mathcal{O}_f(p)$. Además, como A es invariante, si $p \in A$, entonces $\mathcal{O}_f(p) \subset A$. Así, $\bigcup_{p \in A} \mathcal{O}_f(p) \subset A$. Concluimos que $A = \bigcup_{p \in A} \mathcal{O}_f(p)$. Recíprocamente, considere $A \subset M$ y el conjunto $\bigcup_{p \in A} \mathcal{O}_f(p)$. Fijando $k \in \mathbb{Z}$ arbitrario, se tiene que $f^k \left(\bigcup_{p \in A} \mathcal{O}_f(p) \right) = \bigcup_{p \in A} f^k(\mathcal{O}_f(p)) = \bigcup_{p \in A} \mathcal{O}_f(p)$. Luego, $\bigcup_{p \in A} \mathcal{O}_f(p)$ es un conjunto invariante. La prueba para flujos es análoga. \square

Definición 1.2.6 (Conjunto ω -límite). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$. El conjunto ω -límite de un punto $p \in M$, $\omega(p)$, es el conjunto de puntos $q \in M$ para los cuales existe una sucesión de enteros $k_i \rightarrow \infty$ tal que $f^{k_i}(p) \rightarrow q$. Análogamente, sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y X^t , $t \in \mathbb{R}$, el flujo de X . El conjunto ω -límite de un punto $p \in M$, $\omega(p)$, es el conjunto de puntos $q \in M$ para los cuales existe una sucesión de números reales $t_i \rightarrow \infty$ tal que $X^{t_i}(p) \rightarrow q$.

Definición 1.2.7 (Conjunto α -límite). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$. El conjunto α -límite de un punto $p \in M$, $\alpha(p)$, es el conjunto de puntos $q \in M$ para los cuales existe una sucesión de enteros $k_i \rightarrow -\infty$ tal que $f^{k_i}(p) \rightarrow q$. Análogamente, sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y X^t , $t \in \mathbb{R}$, el flujo de X . El conjunto α -límite de un punto $p \in M$, $\alpha(p)$, es el conjunto de puntos $q \in M$ para los cuales existe una sucesión de números reales $t_i \rightarrow -\infty$ tal que $X^{t_i}(p) \rightarrow q$.

Observación. Sea $p \in M$. Si $f \in \text{Diff}^r(M)$, el conjunto $\alpha(p)$ para f es el conjunto $\omega(p)$ para f^{-1} . Asimismo, si $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, el conjunto $\alpha(p)$ para X es el conjunto $\omega(p)$ para $-X$.

Observación. Puesto que M es una variedad compacta, se verifica que los conjuntos $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ son no vacíos, para todo $p \in M$.

Definición 1.2.8 (Conjunto límite L_ω). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$, definimos $L_\omega(f)$ como $L_\omega(f) = \{p \in M : p \in \omega(q) \text{ para algún } q \in M\}$. Análogamente, sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, definimos $L_\omega(X)$ como $L_\omega(X) = \{p \in M : p \in \omega(q) \text{ para algún } q \in M\}$.

Definición 1.2.9 (Conjunto límite L_α). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$, definimos $L_\alpha(f)$ como $L_\alpha(f) = \{p \in M : p \in \alpha(q) \text{ para algún } q \in M\}$. Análogamente, sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, definimos $L_\alpha(X)$ como $L_\alpha(X) = \{p \in M : p \in \alpha(q) \text{ para algún } q \in M\}$.

Definición 1.2.10 (Conjunto límite L). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$, definimos $L(f)$ como $L(f) = L_\omega(f) \cup L_\alpha(f)$. Análogamente, sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, definimos $L(X)$ como $L(X) = L_\omega(X) \cup L_\alpha(X)$.

Definición 1.2.11 (Punto recurrente). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ o $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, un punto $p \in M$ se dice (positivamente) recurrente si $p \in \omega(p)$. Al conjunto de puntos recurrentes lo denotamos como $R(f)$ o $R(X)$, respectivamente.

Definición 1.2.12 (Punto errante). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$. Un punto $p \in M$ es errante para f si existe una vecindad $U \subset M$ de p tal que $f^k(U) \cap U = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Análogamente, sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y X^t , $t \in \mathbb{R}$, el flujo de X . Un punto $p \in M$ es errante para X si existe una vecindad $U \subset M$ de p y un número $t_0 > 0$ tal que $X^t(U) \cap U = \emptyset$ para todo $|t| > t_0$.

Definición 1.2.13 (Punto no-errante). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ o $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, un punto $p \in M$ se dice no-errante si no es errante. El conjunto de puntos no-errantes se denomina conjunto no-errante y lo denotamos como $\Omega(f)$ o $\Omega(X)$, respectivamente.

Concluimos esta primera parte con una serie de resultados que relacionan los conceptos anteriores y reflejan la conveniencia del estudio de conjuntos invariantes lo más generales posibles; en particular, el conjunto no-errante.

Proposición 1.2.2. *Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$. Luego, para cada $p \in M$ se cumple que los conjuntos $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ son conjuntos cerrados invariantes.*

Demostración. Sea $p \in M$. Primero demostraremos que $\omega(p)$ es un conjunto cerrado. Tomamos una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $x_i \in \omega(p)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y existe $x \in M$ tal que $x_i \rightarrow x$. Por definición de ω -límite, esto implica que existen sucesiones de enteros $\{k_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tales que $k_{i,j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ y $f^{k_{i,j}}(p) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Así, por un argumento diagonal, existen subsucesiones $\{j_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $j_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$ y $\{k_{i,j_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $k_{i,j_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$, con $f^{k_{i,j_i}}(p) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x$. Es decir, $x \in \omega(p)$ y $\omega(p)$ es un conjunto cerrado. La prueba para $\alpha(p)$ es análoga. Así que podemos concluir que $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ son conjuntos cerrados.

Ahora veamos que $\omega(p)$ es invariante. Por la proposición 1.2.1, solo hace falta ver que este conjunto es una unión de órbitas. Es claro que $\omega(p) \subset \bigcup_{x \in \omega(p)} \mathcal{O}_f(x)$. Ahora, si $y \in \bigcup_{x \in \omega(p)} \mathcal{O}_f(x)$, entonces $y \in \mathcal{O}_f(x)$ para algún $x \in \omega(p)$. Como $x \in \omega(p)$, existe una sucesión de enteros $k_i \rightarrow \infty$ tal que $f^{k_i}(p) \rightarrow x$, y como $y \in \mathcal{O}_f(x)$, existe un entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f^k(x) = y$. Definimos la sucesión de enteros j_i dada por $j_i = k + k_i$. Entonces, es claro que $j_i \rightarrow \infty$ y $f^{j_i}(p) = f^{k+k_i}(p) = f^k(f^{k_i}(p)) \rightarrow f^k(x) = y$, ya que f es un difeomorfismo. Luego, $y \in \omega(p)$. Así, $\omega(p) = \bigcup_{x \in \omega(p)} \mathcal{O}_f(x)$ y $\omega(p)$ es un conjunto invariante. La prueba para $\alpha(p)$ es análoga. Finalmente, tenemos que $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ son conjuntos invariantes. \square

La proposición 1.2.2 se satisface también para flujos y la prueba es completamente análoga a la expuesta aquí para difeomorfismos.

Proposición 1.2.3. *Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$. Se satisfacen las siguientes contenciones,*

$$\text{Fix}(f) \subset \text{Per}(f) \subset R(f) \subset L(f) \subset \Omega(f).$$

Además, cada uno de estos conjuntos es invariante y $\Omega(f)$ es cerrado.

Demostración. Note que si $x \in \text{Fix}(f)$, se tiene directamente de las definiciones 1.2.2 y 1.2.3 que $x \in \text{Per}(f)$, luego $\text{Fix}(f) \subset \text{Per}(f)$. Asimismo, si $x \in \text{Per}(f)$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^k(x) = x$. Al definir la sucesión de números enteros $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, con $k_i = ik$, podemos notar que $k_i \rightarrow \infty$ y $f^{k_i}(x) = f^{ik}(x) = f^k(x) = x$, luego $f^{k_i}(x) \rightarrow x$. Es decir, $x \in \omega(x)$, lo cual implica que $x \in R(f)$ y $\text{Per}(f) \subset R(f)$. Supongamos ahora que $x \in R(f)$, i.e., $x \in \omega(x)$. Por las definiciones 1.2.8 y 1.2.10, se tiene que $x \in L_\omega(f) \subset L(f)$. Luego, $R(f) \subset L(f)$. Finalmente, si $x \in L(f)$, entonces existe $q \in M$ tal que $x \in \omega(q)$ o $x \in \alpha(q)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in \omega(q)$. Luego, existe una sucesión de enteros $k_i \rightarrow \infty$ tal que $f^{k_i}(q) \rightarrow x$. Considere $U \subset M$ una vecindad arbitraria de x , i.e., $x \in U$. Luego, como $f^{k_i}(q) \rightarrow x$ y $k_i \rightarrow \infty$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_i}(q) \in U$ y $k_i > 0$ para todo $i \geq i_0$. De la misma manera, existe $i_1 \in \mathbb{N}$, $i_1 > i_0$, tal que $k_{i_1} > k_{i_0}$. Note entonces que $f^{k_{i_1}}(q) \in U$ y $f^{k_{i_1}}(q) \in f^{k_{i_1}-k_{i_0}}(U)$, ya que $f^{k_{i_0}}(q) \in U$. Luego, haciendo $k = k_{i_1} - k_{i_0}$, se tiene que $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$. Lo anterior implica que $x \in \Omega(f)$, por lo que $L(f) \subset \Omega(f)$. Con esto concluimos la prueba de las contenciones.

Para probar la invariancia de los conjuntos, usamos la caracterización de la proposición 1.2.1. Más precisamente, queremos ver que si un punto está contenido en alguno de los conjuntos, entonces también está contenida toda su órbita. En primer lugar, si $x \in \text{Fix}(f)$, entonces $\mathcal{O}_f(x) = \{x\}$. Luego, $\mathcal{O}_f(x) \subset \text{Fix}(f)$. De manera análoga, si $x \in \text{Per}(f)$ y $y \in \mathcal{O}_f(x)$, entonces $y \in \text{Per}(f)$. Es decir, $\mathcal{O}_f(x) \subset \text{Per}(f)$. Seguidamente, si $x \in R(f)$, entonces $x \in \omega(x)$ y existe una sucesión de números enteros $k_i \rightarrow \infty$ tal que $f^{k_i}(x) \rightarrow x$. Si $y \in \mathcal{O}_f(x)$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f^k(x) = y$. De aquí se tiene que $f^{k_i}(y) = f^{k+k_i-k}(y) = f^k(f^{k_i}(f^{-k}(y))) = f^k(f^{k_i}(x)) \rightarrow f^k(x) = y$, pues f es un difeomorfismo. Luego, $y \in R(f)$ y $\mathcal{O}_f(x) \subset R(f)$. Para el caso $L(f)$ basta con notar que $L(f) = \bigcup_{x \in M} (\alpha(x) \cup \omega(x))$ y por la proposición 1.2.2 se concluye el resultado. Finalmente, si $x \in \Omega(f)$, entonces para toda vecindad $U \subset M$ de x existe $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$. Si $y \in \mathcal{O}_f(x)$, existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $f^j(x) = y$. Sea $V \subset M$ una vecindad arbitraria de y . Luego, $U = f^{-j}(V)$ es una vecindad de x y existe $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $\emptyset \neq f^k(U) \cap U = f^k(f^{-j}(V)) \cap f^{-j}(V)$. Así, como f es difeomorfismo, se tiene que $f^k(V) \cap V \neq \emptyset$. Entonces, $y \in \Omega(f)$ y $\mathcal{O}_f(x) \subset \Omega(f)$. Esto permite concluir que todos los conjuntos son invariantes.

Para terminar la prueba de la proposición, veamos que $\Omega(f)$ es cerrado. Esto es equivalente a probar que el conjunto de puntos errantes $M \setminus \Omega(f)$ es abierto. Sea $x \in M \setminus \Omega(f)$. Luego, existe una vecindad $U \subset M$ de x tal que $f^k(U) \cap U = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. De aquí es claro que todo punto $y \in U$ es un punto errante, i.e., $x \in U \subset M \setminus \Omega(f)$. Así, $M \setminus \Omega(f)$ es abierto y $\Omega(f)$ es cerrado. \square

Tal como la proposición 1.2.2, el resultado de la proposición 1.2.3 se verifica también para flujos y la prueba es similar a la descrita para difeomorfismos.

Proposición 1.2.4. *Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$. Si $\Omega(f)$ es un conjunto finito, entonces $\Omega(f) = \text{Per}(f)$.*

Demostración. Por la proposición 1.2.3 sabemos que $\text{Per}(f) \subset \Omega(f)$, luego, solo hay que probar una contención. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x \in \Omega(f)$ tal que $x \notin \text{Per}(f)$. Como $x \notin \text{Per}(f)$, tenemos que $\mathcal{O}_f(x)$ es infinito, por una observación anterior en la definición 1.2.3. Sin embargo, por la proposición 1.2.3, sabemos que $\Omega(f)$ es invariante, entonces $\mathcal{O}_f(x) \subset \Omega(f)$. Esto es una contradicción, pues $\Omega(f)$ es un conjunto finito. Luego, $\Omega(f) \subset \text{Per}(f)$ y $\Omega(f) = \text{Per}(f)$. \square

La proposición 1.2.4 solo es aplicable y relevante para difeomorfismos. Este resultado (y una adaptación adecuada para flujos) se usará más adelante en la sección 3.2 para definir sistemas dinámicos Morse-Smale.

Los conceptos presentados hasta el momento tienen correspondencia tanto en difeomorfismos como en flujos, pero los trata de forma independiente. Para el final de esta sección, introducimos dos herramientas topológicas importantes que permiten relacionar estrechamente estos dos tipos de sistemas: sección transversal (mapa de Poincaré) y suspensión.

Definición 1.2.14 (Sección transversal). Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, donde M es una variedad m -dimensional. Considere $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$. Una sección transversal para X en p es una subvariedad $\Sigma \subset M$ de dimensión $m - 1$ (codimensión uno), tal que $p \in \Sigma$ y $X(x) \notin T_x \Sigma$ para todo $x \in \Sigma$ (i.e., Σ es transversal al campo vectorial; la noción de transversalidad se define en la sección 2.3).

Definición 1.2.15 (Sección global y local). Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $p \in M$, con $X(p) \neq 0$ y $\Sigma \subset M$ una sección transversal para X en p . La sección Σ es global si para todo $x \in M$ se tiene que $\mathcal{O}_X(x) \cap \Sigma \neq \emptyset$; de lo contrario, es una sección local.

En general, la existencia de secciones globales no está garantizada. En su lugar, se trabaja con secciones locales, que son una herramienta suficientemente poderosa para el estudio de flujos. El mejor ejemplo de su utilidad se tiene con el mapa de Poincaré (o mapa de primer retorno), que permite dar una descripción de las órbitas de un flujo cercanas a una órbita periódica.

Teorema 1.2.5. *Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $p \in M$, con $X(p) \neq 0$ y $\Sigma \subset M$ una sección local para X en p . Suponga que existen $q \in M$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tales que $X^{t_0}(q) = p$. Sea $U \subset M$ una vecindad de q . Entonces existe un abierto $V \subset U$ tal que $q \in V$ y una función continua $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tau(q) = t_0$ y $X^{\tau(x)}(x) \in \Sigma$ para todo $x \in V$.*

Aunque el teorema 1.2.5 está enunciado en un contexto general, la idea es utilizarlo para construir el mapa de Poincaré para órbitas periódicas. En la siguiente definición se restringe el resultado del teorema a este escenario.

Definición 1.2.16 (Tiempo de primer retorno). Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $p \in M$ un punto periódico de período $t_0 > 0$, i.e., $X^{t_0}(p) = p$, y $\Sigma \subset M$ una sección local para X en p . Haciendo $q = p$, podemos aplicar el teorema 1.2.5 y encontrar una vecindad $V \subset M$ de p y una función continua $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$, con $\tau(p) = t_0$ y $X^{\tau(x)}(x) \in \Sigma$, para todo $x \in V$. La función τ se denomina tiempo de primer retorno.

Definición 1.2.17 (Mapa de Poincaré). Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $p \in M$ un punto periódico de período $t_0 > 0$ ($\gamma := \mathcal{O}_X(p)$) y $\Sigma \subset M$ una sección local para X en p . Podemos definir un mapa $P : V \rightarrow \Sigma$, dado por $P(x) = X^{\tau(x)}(x)$, para todo $x \in V$, donde V es la vecindad de p garantizada por el teorema 1.2.5 y τ es el tiempo de primer retorno. La función P se denomina mapa de primer retorno o mapa de Poincaré asociado a la órbita γ .

Note que la codimensión de una sección local es uno. Esto implica que, en muchos casos, los difeomorfismos en dimensión m presentan el mismo grado de dificultad que los flujos en dimensión $m + 1$.

Definición 1.2.18 (Suspensión bajo una función). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de clase C^∞ , acotada lejos de cero, considere el subconjunto $M_\tau = \{(x, t) \in M \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq \tau(x)\} \subset M \times \mathbb{R}$ y la variedad cociente $M_{f,\tau} = M_\tau / \sim$, obtenida con la relación de equivalencia \sim dada por la identificación $(x, \tau(x)) \sim (f(x), 0)$. El flujo de suspensión de f bajo la función τ es el flujo $X^t : M_{f,\tau} \rightarrow M_{f,\tau}$ inducido por la traslación temporal $T_t : M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$, $T_t(x, s) = (x, s + t)$. El flujo X^t es de clase C^{r-1} en $M_{f,\tau}$; así, por la proposición 1.1.1, da lugar a un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^{r-1}(M_{f,\tau})$.

Observación. Note que, en la definición 1.2.18, si M es una variedad m -dimensional, entonces $M_{f,\tau}$ es una variedad $(m + 1)$ -dimensional.

Definición 1.2.19 (Suspensión). Si la función τ en la definición 1.2.18 es la constante uno, i.e., $\tau \equiv 1$, entonces el flujo obtenido se denomina simplemente flujo de suspensión de f y el espacio cociente obtenido, $M_{f,1}$, se denota solo como M_f y se denomina toro de suspensión.

De ahora en adelante, nos referiremos por suspensión solamente al flujo de suspensión de tiempo uno de la definición anterior.

La suspensión y la sección transversal son construcciones inversas: la suspensión de $f \in \text{Diff}^r(M)$ es $X \in \mathfrak{X}^{r-1}(M_f)$, y $M \times \{0\} \subset M_f$ es una sección transversal global para X en $(x, 0) \in M \times \{0\}$, para todo $x \in M$.

1.3. Clasificación e invariantes

Como se ha mencionado previamente, un objetivo central de la teoría de sistemas dinámicos diferenciables es el estudio del comportamiento asintótico de sus órbitas. En las secciones anteriores se definió los objetos principales, así como herramientas topológicas para su caracterización. Sin embargo, tal como ocurre en otras áreas matemáticas, el estudio debe implicar algún tipo de clasificación. Para clasificar sistemas dinámicos necesitamos una noción de equivalencia. Una clase de equivalencia se puede interpretar entonces como el conjunto de sistemas que tienen una misma estructura de sus órbitas, bajo un adecuado cambio de coordenadas. Se pueden introducir distintas relaciones de equivalencia asociadas a varios tipos de cambio de coordenadas y traducir el problema de la descripción asintótica de las órbitas a la clasificación de sistemas con respecto a esas relaciones [KH95].

En esta sección se definen las relaciones de equivalencia más importantes para difeomorfismos y flujos. También, se consideran algunos invariantes que surgen de dichas equivalencias.

Definición 1.3.1 (Conjugación). Sean $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $g \in \text{Diff}^r(N)$. Una conjugación entre f y g es un homeomorfismo $h : M \rightarrow N$, tal que $h \circ f = g \circ h$. En otras palabras, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

conmuta. Entonces, $h \circ f^k = g^k \circ h$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. En este caso, f y g se dicen topológicamente conjugados. Análogamente, sean $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $Y \in \mathfrak{X}^r(N)$. Una conjugación entre X y Y es un homeomorfismo $h : M \rightarrow N$ tal que $h \circ X^t = Y^t \circ h$, para todo $t \in \mathbb{R}$. En este caso, X y Y se dicen topológicamente conjugados.

La conjugación restringida a $\text{Diff}^r(M)$ o $\mathfrak{X}^r(M)$ es una relación de equivalencia. En el caso discreto ($\text{Diff}^r(M)$) será la herramienta utilizada para la clasificación de sistemas a partir de la estructura de sus órbitas. Sin embargo, para el caso continuo ($\mathfrak{X}^r(M)$), esta noción es muy restrictiva; ya que no solo impone una condición sobre la forma de las órbitas, sino también sobre la velocidad a la que son recorridas.

En vista de lo anterior, vamos a introducir una equivalencia para flujos más flexible, que solo tenga en cuenta la topología de las órbitas.

Definición 1.3.2 (Reparametrización temporal). Sean $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$. El flujo X^t es una reparametrización temporal del flujo Y^t si para cada $p \in M$ las órbitas $\mathcal{O}_X(p)$ y $\mathcal{O}_Y(p)$ coinciden y las orientaciones dadas por el cambio de t en la dirección positiva son la misma.

Definición 1.3.3 (Equivalencia topológica). Sean $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $Y \in \mathfrak{X}^r(N)$. Una equivalencia topológica (o equivalencia por órbitas) entre X y Y es un homeomorfismo $h : M \rightarrow N$ tal que el flujo $Z^t : M \rightarrow M$, $Z^t = h^{-1} \circ Y^t \circ h$, es una reparametrización temporal del flujo X^t . En este caso, X y Y se dicen topológicamente equivalentes (o equivalentes por órbitas).

En otras palabras, dos campos vectoriales son topológicamente equivalentes si existe un mapa que lleva órbitas en órbitas, preservando la orientación dada por el tiempo en la dirección positiva. Además, es claro que la equivalencia topológica es una relación de equivalencia en $\mathfrak{X}^r(M)$ más débil que la conjugación.

A continuación, se presentan dos resultados que señalan que los conjuntos invariantes bajo la dinámica discutidos en la sección 1.2 son preservados bajo las relaciones de equivalencia previamente definidas. En consecuencia, como la estructura asintótica de las órbitas es capturada por tales conjuntos, se concluye que estas equivalencias son adecuadas para una tarea de clasificación de sistemas dinámicos alrededor de ese criterio.

Proposición 1.3.1. *Sea $h \in \text{Homeo}(M)$ una conjugación entre $f, g \in \text{Diff}^r(M)$, entonces,*

- (i) $h(\mathcal{O}_f(p)) = \mathcal{O}_g(h(p))$, para todo $p \in M$. En particular, h envía conjuntos invariantes de f en conjuntos invariantes de g .
- (ii) $h(\omega_f(p)) = \omega_g(h(p))$ y $h(\alpha_f(p)) = \alpha_g(h(p))$, para todo $p \in M$.
- (iii) $h(\text{Fix}(f)) = \text{Fix}(g)$.
- (iv) $h(\text{Per}(f)) = \text{Per}(g)$. Además, si $p \in M$ es un punto periódico de f de periodo $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces $h(p) \in M$ es un punto periódico de g del mismo período.
- (v) $h(R(f)) = R(g)$.
- (vi) $h(L(f)) = L(g)$.
- (vii) $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.

Demostración. Vamos a usar que h es una conjugación, entonces $h \circ f^k = g^k \circ h$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

- (i) Sea $p \in M$. Luego, $x \in \mathcal{O}_g(h(p))$ si, y solo si, $x = g^k(h(p)) = h(f^k(p))$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Esto pasa si, y solo si, $x \in h(\mathcal{O}_f(p))$. Luego, $h(\mathcal{O}_f(p)) = \mathcal{O}_g(h(p))$. Ahora, supongamos que $A \subset M$ es un conjunto invariante de f . Usando la proposición 1.2.1, tenemos que A es una unión de órbitas, i.e., $A = \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_f(x)$. Luego, $h(A) = h(\bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_f(x)) = \bigcup_{x \in A} h(\mathcal{O}_f(x)) = \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_g(h(x))$. Así, $h(A)$ es una unión de órbitas, entonces es un conjunto invariante de g .
- (ii) Sea $p \in M$. Tenemos que $x \in \omega_g(h(p))$ si, y solo si, existe una sucesión de enteros $k_i \rightarrow \infty$ tal que $g^{k_i}(h(p)) \rightarrow x$. Esto se cumple si, y solo si, $h(f^{k_i}(p)) \rightarrow x$. Como h es un homeomorfismo, entonces lo anterior pasa si, y solo si, $f^{k_i}(p) \rightarrow h^{-1}(x)$, i.e., $h^{-1}(x) \in \omega_f(p)$. Finalmente, esto se tiene si, y solo si, $x \in h(\omega_f(p))$. Luego, $h(\omega_f(p)) = \omega_g(h(p))$. La prueba para los conjuntos α -límite es análoga.
- (iii) Note que $p \in \text{Fix}(g)$ si, y solo si, $h(f(h^{-1}(p))) = g(p) = p$. Esto pasa si, y solo si, $f(h^{-1}(p)) = h^{-1}(p)$, es decir, $h^{-1}(p) \in \text{Fix}(f)$ y $p \in h(\text{Fix}(f))$. Por lo tanto, $h(\text{Fix}(f)) = \text{Fix}(g)$.
- (iv) Se tiene que $p \in \text{Per}(g)$ si, y solo si, $h(f^k(h^{-1}(p))) = g^k(p) = p$, para algún $k \in \mathbb{Z}^+$. Esto pasa si, y solo si, $f^k(h^{-1}(p)) = h^{-1}(p)$, es decir, $h^{-1}(p) \in \text{Per}(f)$ y $p \in h(\text{Per}(f))$. Luego, $h(\text{Per}(f)) = \text{Per}(g)$. Por otro lado, si $p \in M$ es un punto periódico de f de período $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces $p = f^k(p) = h^{-1}(g^k(h(p)))$. Luego, $h(p)$ es un punto periódico de g de período a lo más k . De hecho, el período de $h(p)$ es exactamente k , de lo contrario se contradice la minimalidad de k como período de p bajo f . Note que el ítem (iii) es un caso especial de este.
- (v) Tenemos que $p \in R(g)$ siempre que $p \in \omega_g(p)$. Por el ítem (ii), esto pasa si, y solo si, $p \in h(\omega_f(h^{-1}(p)))$, si, y solo si, $h^{-1}(p) \in \omega_f(h^{-1}(p))$, i.e., $h^{-1}(p) \in R(f)$. Equivalentemente, $p \in h(R(f))$. Luego, $h(R(f)) = R(g)$.
- (vi) Note que $L(f) = \bigcup_{x \in M} (\alpha_f(x) \cup \omega_f(x))$. Luego, por el ítem (ii), tenemos que $h(L(f)) = h(\bigcup_{x \in M} (\alpha_f(x) \cup \omega_f(x))) = \bigcup_{x \in M} (\alpha_g(h(x)) \cup \omega_g(h(x))) = L(g)$.
- (vii) Tenemos que $p \in \Omega(g)$ si, y solo si, para toda vecindad $U \subset M$ de p existe $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $h(f^k(h^{-1}(U))) \cap U = g^k(U) \cap U \neq \emptyset$. Esto ocurre si, y solo si, $f^k(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(U) \neq \emptyset$. Luego, como toda vecindad $V \subset M$ de $h^{-1}(p)$ se puede escribir como $V = h^{-1}(h(V))$ y $h(V)$ es una vecindad de p , entonces lo anterior se tiene si, y solo si, para toda vecindad $V \subset M$ de $h^{-1}(p)$ existe $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $f^k(V) \cap V \neq \emptyset$, i.e., $h^{-1}(p) \in \Omega(f)$ y $p \in h(\Omega(f))$. De aquí se concluye que $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$. \square

La proposición 1.3.1 también es válida para campos vectoriales topológicamente conjugados y su prueba es análoga. Sin embargo, este hecho no será utilizado. En su lugar, incluimos el resultado para campos vectoriales topológicamente equivalentes.

Proposición 1.3.2. *Sea $h \in \text{Homeo}(M)$ una equivalencia topológica entre los campos $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, entonces,*

- (i) $h(\mathcal{O}_X(p)) = \mathcal{O}_Y(h(p))$, para todo $p \in M$. En particular, h envía conjuntos invariantes de X en conjuntos invariantes de Y .
- (ii) $h(\omega_X(p)) = \omega_Y(h(p))$ y $h(\alpha_X(p)) = \alpha_Y(h(p))$, para todo $p \in M$.
- (iii) $h(\text{Fix}(X)) = \text{Fix}(Y)$.
- (iv) $h(\text{Per}(X)) = \text{Per}(Y)$.
- (v) $h(R(X)) = R(Y)$.
- (vi) $h(L(X)) = L(Y)$.
- (vii) $h(\Omega(X)) = \Omega(Y)$.

Demostración. Vamos a emplear que h es una equivalencia topológica, entonces el flujo $h^{-1} \circ Y^t \circ h$ es una reparametrización temporal del flujo X^t .

- (i) Sea $p \in M$. Luego, como $h^{-1} \circ Y^t \circ h$ es una reparametrización temporal de X^t , entonces los conjuntos $\mathcal{O}_X(p)$ y $h^{-1}(\mathcal{O}_Y(h(p)))$ coinciden. De aquí se concluye que $h(\mathcal{O}_X(p)) = \mathcal{O}_Y(h(p))$. La prueba de que h envía conjuntos invariantes de X en conjuntos invariantes de Y es análoga a la presentada en el ítem (i) de la proposición 1.3.1, mediante uniones de órbitas.
- (ii) Sea $p \in M$. Tenemos que $x \in \omega_Y(h(p))$ si, y solo si, existe una sucesión de números reales $t_i \rightarrow \infty$ tal que $Y^{t_i}(h(p)) \rightarrow x$. Como h es un homeomorfismo, esto pasa si, y solo si, $h^{-1}(Y^{t_i}(h(p))) \rightarrow h^{-1}(x)$. Dado que $h^{-1} \circ Y^t \circ h$ es una reparametrización temporal de X^t , entonces lo anterior es equivalente a la existencia de una sucesión de números reales $s_i \rightarrow \infty$ tal que $X^{s_i}(p) \rightarrow h^{-1}(x)$. Finalmente, esto se tiene si, y solo si, $h^{-1}(x) \in \omega_X(p)$ y $x \in h(\omega_X(p))$. Luego, $h(\omega_X(p)) = \omega_Y(h(p))$. La prueba para los conjuntos α -límite es análoga.
- (iii) Note que $p \in \text{Fix}(Y)$ si, y solo si, $\mathcal{O}_Y(p) = \{p\}$. Por el ítem (i), esto pasa si, y solo si, $h(\mathcal{O}_X(h^{-1}(p))) = \{p\}$ y $\mathcal{O}_X(h^{-1}(p)) = \{h^{-1}(p)\}$. Es decir, $h^{-1}(p) \in \text{Fix}(X)$ y $p \in h(\text{Fix}(X))$. Por lo tanto, $h(\text{Fix}(X)) = \text{Fix}(Y)$.
- (iv) Se tiene que $p \in \text{Per}(Y)$ si, y solo si, $Y^{t_0}(p) = p$, para algún $t_0 \in \mathbb{R}^+$. Luego, $h^{-1}(Y^{t_0}(p)) = h^{-1}(p)$. Como $h^{-1} \circ Y^t \circ h$ es una reparametrización temporal de X^t , entonces esto pasa si, y solo si, existe $t_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $X^{t_1}(h^{-1}(p)) = h^{-1}(p)$, es decir, $h^{-1}(p) \in \text{Per}(X)$ y $p \in h(\text{Per}(X))$. Luego, $h(\text{Per}(X)) = \text{Per}(Y)$.
- (v) Tenemos que $p \in R(Y)$ siempre que $p \in \omega_Y(p)$. Usando el ítem (ii), esto pasa si, y solo si, $p \in h(\omega_X(h^{-1}(p)))$ y $h^{-1}(p) \in \omega_X(h^{-1}(p))$, i.e., $h^{-1}(p) \in R(X)$. Equivalentemente, $p \in h(R(X))$. Luego, $h(R(X)) = R(Y)$.
- (vi) Note que $L(X) = \bigcup_{x \in M} (\alpha_X(x) \cup \omega_X(x))$. Luego, por el ítem (ii), tenemos que $h(L(X)) = h(\bigcup_{x \in M} (\alpha_X(x) \cup \omega_X(x))) = \bigcup_{x \in M} (\alpha_Y(h(x)) \cup \omega_Y(h(x))) = L(Y)$.

- (vii) Notemos que $p \notin \Omega(Y)$ si, y solo si, existe una vecindad $U \subset M$ de p y un número $t_0 > 0$ tal que $Y^t(U) \cap U = \emptyset$ para todo $|t| > t_0$. Así, $h^{-1}(Y^t(U)) \cap h^{-1}(U) = \emptyset$ para todo $|t| > t_0$. Como $h^{-1} \circ Y^t \circ h$ es una reparametrización temporal de X^t , entonces lo anterior se tiene si, y solo si, existe un número $t_1 > 0$ tal que $X^t(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(U) = \emptyset$ para todo $|t| > t_1$. Note que $h^{-1}(U)$ es una vecindad de $h^{-1}(p)$, así que esto pasa si, y solo si, $h^{-1}(p) \notin \Omega(X)$ y $p \notin h(\Omega(X))$. Por lo tanto, $h(\Omega(X)) = \Omega(Y)$. \square

1.4. Genericidad

En la última sección de este capítulo introducimos otra herramienta topológica útil para el problema de clasificación de sistemas dinámicos: la genericidad. Este concepto consiste en desarrollar una noción de “mayoría” para el conjunto de sistemas dinámicos de una variedad. Así, ante una propiedad dada, podemos preguntarnos si la mayor parte (en un sentido adecuado) de los sistemas la satisfacen. Para esto, tenemos en cuenta que el conjunto de sistemas dinámicos usualmente tiene asociada al menos una topología, con base en la cual se puede formalizar dicha noción [KH95].

Definición 1.4.1 (Conjunto G_δ). Sea X un espacio topológico. Un conjunto $Y \subset X$ es llamado G_δ si es una intersección contable de conjuntos abiertos.

Definición 1.4.2 (Conjunto residual). Sea X un espacio topológico. Un conjunto $Y \subset X$ es llamado residual o genérico si contiene un conjunto denso G_δ .

Teniendo en cuenta las definiciones previas, podemos introducir el concepto de propiedad genérica para elementos de un espacio topológico.

Definición 1.4.3 (Genericidad). Dado un espacio topológico X , una propiedad se dice genérica si se cumple para un conjunto residual de la topología.

En el caso de espacios de difeomorfismos o campos vectoriales de variedades compactas, contamos con una estructura topológica que permite caracterizar fácilmente los conjuntos densos G_δ . Esta estructura se denomina espacio de Baire y se explica a continuación.

Definición 1.4.4 (Espacio de Baire). Un espacio topológico es un espacio de Baire si toda intersección contable de conjuntos abiertos densos es densa.

Teorema 1.4.1 (Baire). *Un espacio topológico completamente metrizable es un espacio de Baire.*

Considerando que si M es compacta, los conjuntos $C^r(M, M)$ y $C^r(M, \mathbb{R}^l)$ ($l \geq 1$) son metrizablees con la topología C^s , para todo $1 \leq s \leq r$, entonces $\text{Diff}^r(M)$ y $\mathfrak{X}^r(M)$ son espacios de Baire para esas topologías. Así, podemos definir rigurosamente cuándo una propiedad es genérica con respecto a una clase dada de diferenciabilidad. Este concepto ha sido fundamental en la teoría de sistemas dinámicos diferenciables.

Definición 1.4.5 (C^s -genericidad). Considere los conjuntos $\text{Diff}^r(M)$, $\mathfrak{X}^r(M)$, y $1 \leq s \leq r$. Una propiedad se dice C^s -genérica si se cumple para un conjunto residual de la topología C^s .

Capítulo 2

Estabilidad local

Queremos seguir tratando el problema de la estructura topológica de las órbitas de difeomorfismos y flujos en variedades, para lo cual introducimos la noción de estabilidad, que a su vez es la más importante de este trabajo. En términos generales, la estabilidad se encarga de analizar el comportamiento de la estructura de las órbitas ante perturbaciones del sistema. Así, un sistema será considerado estable si la estructura se mantiene (en cierto sentido adecuado) tras ser perturbado [KH95]. Note que esto implica que podríamos definir tantas formas de estabilidad como equivalencias entre estructuras de órbitas [Sma67]. Sin embargo, solo usaremos las equivalencias provistas en la sección 1.3.

El concepto de estabilidad será desarrollado a lo largo de este y el siguiente capítulo, lo que nos permite dividir su exposición entre el caso local (capítulo 2) y el caso global (capítulo 3). Los resultados más importantes de este capítulo son el Teorema de la variedad estable de Hadamard-Perron y el Teorema de linealización topológica de Hartman-Grobman, a los cuales llegaremos después de analizar los sistemas lineales y extender estas técnicas para sistemas más generales.

2.1. Sistemas lineales

Los sistemas lineales surgen de las transformaciones continuas que preservan la estructura de un espacio vectorial normado. En particular, nos interesa estudiar el caso de \mathbb{R}^n , ya que también posee una estructura de variedad diferenciable. Además, retomando la guía del capítulo 1, abordamos el caso lineal tanto de campos vectoriales como de difeomorfismos.

Definición 2.1.1 (Operadores lineales). Denotamos como $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ al espacio vectorial de mapas lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n . Este es un espacio normado con la norma del operador, dada por,

$$\|L\| = \sup\{\|Lv\| : \|v\| = 1\},$$

para todo $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, con la norma usual en \mathbb{R}^n .

Notemos que \mathbb{R}^n es una variedad y, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $T_x\mathbb{R}^n$ se puede identificar canónicamente con \mathbb{R}^n . Además, cada $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es de clase C^∞ . Luego, tenemos una inclusión canónica $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^n)$, para todo $r \geq 1$. De ahora en adelante, nos referimos como campos vectoriales lineales de \mathbb{R}^n al conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ visto como subconjunto de $\mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^n)$.

Asimismo, tenemos que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, para todo $r \geq 0$. Sin embargo, no todos los operadores lineales son invertibles y no dan lugar a difeomorfismos. A continuación, nos restringimos a un subconjunto de los operadores lineales que sí permite hacer esa construcción.

Definición 2.1.2 (Operadores lineales invertibles). Denotamos como $GL(\mathbb{R}^n)$ al subconjunto de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de operadores lineales invertibles. Este conjunto es un grupo con la composición (grupo lineal de dimensión n).

De esta manera, tenemos que $GL(\mathbb{R}^n) \subset \text{Diff}^r(\mathbb{R}^n)$, para todo $r \geq 1$. Así, podemos obtener sistemas discretos lineales sobre \mathbb{R}^n . A este tipo de difeomorfismos también los denominamos isomorfismos lineales de \mathbb{R}^n . Además, haciendo uso de la función determinante, es fácil ver que $GL(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto abierto y denso de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ con la topología de la norma.

Estamos interesados en desarrollar un estudio de la dinámica que resulte análogo entre campos vectoriales lineales e isomorfismos lineales de \mathbb{R}^n . Para este objetivo introducimos la función exponencial y un resultado relacionado, cuya prueba se puede encontrar en [PdM82].

Definición 2.1.3 (Función exponencial). La función $\text{Exp} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ definida como

$$\text{Exp}(L) = e^L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} L^k,$$

es llamada función exponencial.

Note que la función exponencial es continua en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Además, tal como se discutió en el ejemplo 1.1.2, si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es un campo vectorial lineal, entonces el mapa $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido como $\Phi(t, x) = e^{tL}x$ es el flujo del campo L .

Lema 2.1.1. Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ son los valores propios de L , entonces los valores propios de e^L son exactamente $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_k}$, con la misma multiplicidad.

El lema 2.1.1 relaciona el espectro de un operador lineal con el espectro de su operador exponencial asociado. Incluso podemos concluir que $e^L \in GL(\mathbb{R}^n)$ para todo $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

donde

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad \lambda_i < 0,$$

$$B_j = \begin{pmatrix} M_j & & & 0 \\ I & M_j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I & M_j \end{pmatrix}, \quad \text{con } M_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y } \alpha_j < 0,$$

$$C_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & 0 \\ 1 & \lambda_k & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad \lambda_k > 0,$$

y

$$D_l = \begin{pmatrix} M_l & & & 0 \\ I & M_l & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I & M_l \end{pmatrix}, \quad \text{con } M_l = \begin{pmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ -\beta_l & \alpha_l \end{pmatrix} \quad \text{y } \alpha_l > 0.$$

Tomamos E^s como el subespacio generado por $\{e_1, \dots, e_s\}$, donde e_1, \dots, e_s corresponden a vectores de la base de los subespacios invariantes asociados a $A_1, \dots, A_{s'}, B_1, \dots, B_{s''}$. Asimismo, tomamos E^u como el subespacio generado por $\{e_{s+1}, \dots, e_n\}$, donde e_{s+1}, \dots, e_n corresponden a vectores de la base de los subespacios invariantes asociados a $C_1, \dots, C_{u'}, D_1, \dots, D_{u''}$. Es claro que $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ y tanto E^s como E^u son invariantes para L . Además, los valores propios de L_s tienen parte real negativa ($\lambda_i, \alpha_j < 0$) y los valores propios de L_u tienen parte real positiva ($\lambda_k, \alpha_l > 0$). La unicidad de la descomposición viene dada por la unicidad de la forma canónica real salvo orden. Concluimos que esta es la descomposición requerida. \square

El resultado anterior demuestra que un campo vectorial lineal hiperbólico induce una separación del espacio ambiente entre los subespacios invariantes E^s (estable) y E^u (inestable). El mecanismo de generar descomposiciones transversales invariantes a partir de hiperbolicidad será extendido en las siguientes secciones a campos vectoriales generales y es un factor esencial para obtener estabilidad. A continuación, enunciamos también el resultado para isomorfismos lineales.

Proposición 2.1.3. *Si $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo lineal hiperbólico entonces existe una única descomposición de \mathbb{R}^n como suma directa $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, donde E^s y E^u son invariantes para A y los valores propios de $A^s = A|_{E^s}$ y $A^u = A|_{E^u}$ son los valores propios de A de módulo menor a 1 y mayor a 1, respectivamente.*

Demostración. Tal como en la prueba de la proposición 2.1.2, podemos elegir una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n para la cual la matriz de A esté en la forma real canónica y ordenada tal que los vectores e_1, \dots, e_s correspondan a subespacios invariantes asociados a valores propios de módulo menor a 1 y los vectores e_{s+1}, \dots, e_n correspondan a subespacios invariantes asociados a valores propios de módulo mayor a 1. Así, tomamos E^s como el subespacio generado por $\{e_1, \dots, e_s\}$ y E^u como el subespacio generado por $\{e_{s+1}, \dots, e_n\}$. Por razones análogas al caso anterior, concluimos que $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, los espacios son invariantes y la descomposición es única. \square

Queremos ahora establecer que la hiperbolicidad es una propiedad abierta y densa tanto para campos como para isomorfismos lineales. Para esto recordamos un hecho (su prueba se consigna en [PdM82]) sobre el espectro de un operador lineal.

Lema 2.1.4. *Los valores propios de un operador $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dependen de forma continua de L .*

Proposición 2.1.5. *El conjunto $H(\mathbb{R}^n)$ de isomorfismos lineales hiperbólicos en \mathbb{R}^n es abierto y denso en $GL(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea $A \in H(\mathbb{R}^n)$. Tomamos $\varepsilon = \min\{1 - |\lambda_k|\}$, donde $\lambda_k \in \mathbb{C}$ recorre sobre todos los valores propios de A . Como A es hiperbólico, $\varepsilon > 0$. Luego, teniendo en cuenta que $GL(\mathbb{R}^n)$ es abierto en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y el lema 2.1.4, existe $\delta > 0$ tal que si $\|A - B\| < \delta$, entonces $B \in GL(\mathbb{R}^n)$ y para todo valor propio de B , $\mu_j \in \mathbb{C}$, existe un valor propio λ_k de A tal que $|\mu_j - \lambda_k| < \varepsilon$, i.e., $\mu_j \notin \mathbb{S}^1$. Concluimos que $B \in H(\mathbb{R}^n)$ para todo $\|A - B\| < \delta$, entonces $H(\mathbb{R}^n)$ es abierto.

Por otro lado, sea $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ los valores propios de A que no pertenecen a \mathbb{S}^1 . Consideramos

$$\delta_1 = \min\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\},$$

$$\delta_2 = \min\{|1 - |\lambda_{i_1}||, \dots, |1 - |\lambda_{i_k}||\}$$
 y

$$\delta_3 = \min\{|\alpha| : \alpha + i\beta \text{ es valor propio de } A \text{ con } \alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ y } \alpha \neq 0\}.$$

Luego, $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ y si $0 < \mu < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ y λ_i es valor propio de A , entonces $\lambda_i + \mu \notin \mathbb{S}^1$, i.e., $B = A + \mu I$ es hiperbólico. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\mu < \min\{\varepsilon, \delta\}$; luego, B es hiperbólico y $\|B - A\| = \|\mu I\| < \varepsilon$. Entonces $H(\mathbb{R}^n)$ es denso en $GL(\mathbb{R}^n)$. \square

Proposición 2.1.6. *El conjunto $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ de campos vectoriales lineales hiperbólicos en \mathbb{R}^n es abierto y denso en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Tenemos que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = \text{Exp}^{-1}(H(\mathbb{R}^n))$, por el lema 2.1.1. Como la función Exp es continua y $H(\mathbb{R}^n)$ es abierto por la proposición 2.1.5, resulta que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ es abierto en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Por otro lado, sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $\delta_1 = \min\{|\alpha| : \alpha + i\beta \text{ es valor propio de } L \text{ y } \alpha \neq 0\}$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta < \min\{\varepsilon, \delta_1\}$. Luego, $T = L + \delta I$ es hiperbólico y $\|T - L\| < \varepsilon$. Entonces $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. \square

Una consecuencia inmediata de las proposiciones 2.1.5 y 2.1.6 es que, en particular, la hiperbolicidad es una propiedad genérica para campos vectoriales e isomorfismos lineales teniendo en cuenta la topología de la norma.

En este punto, podemos abordar el problema de clasificación topológica de campos vectoriales lineales hiperbólicos mediante conjugación. De nuevo, vamos a utilizar sin demostración dos lemas disponibles en [PdM82], que nos permitirán construir una conjugación usando un invariante algebraico como lo es el índice.

Lema 2.1.7. *Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un campo vectorial lineal hiperbólico en \mathbb{R}^n con índice n . Existe una norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n tal que, si $S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$, entonces el vector $L(x) \notin T_x S^{n-1}$ para todo $x \in S^{n-1}$.*

La conclusión del lema 2.1.7 se puede interpretar geoméricamente diciendo que el flujo es transversal a la esfera. Nuevamente, es evidente la importancia de este concepto, que será formalmente definido en la sección 2.3.

Lema 2.1.8. *Si $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo lineal hiperbólico, entonces existe una norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n tal que $\|A^s\| < 1$ y $\|(A^u)^{-1}\| < 1$, es decir, los mapas A^s y $(A^u)^{-1}$ de la proposición 2.1.3 son contractivos.*

Proposición 2.1.9. *Sean $L, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ campos vectoriales lineales en \mathbb{R}^n de índice n , entonces existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $hL^t = T^t h$, para todo $t \in \mathbb{R}$, donde L^t y T^t son los flujos de L y T , respectivamente.*

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ la norma euclidiana y $\|\cdot\|_L, \|\cdot\|_T$ las normas dadas por el lema 2.1.7, tales que las esferas $S_L^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\|_L = 1\}$ y $S_T^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\|_T = 1\}$ son transversales a los campos vectoriales L y T , respectivamente.

Sea $\tilde{h} : S_L^{n-1} \rightarrow S_T^{n-1}$ un homeomorfismo (por ejemplo, $\tilde{h}(x) = x/\|x\|_T$). Vamos a ver que se puede extender a \mathbb{R}^n . Definimos $h(0) = 0$. Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, existe un único $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $L^{-t_0}(x) \in S_L^{n-1}$. Hacemos $h(x) = T^{t_0}(\tilde{h}(L^{-t_0}(x)))$. Es claro que $hL^t = T^t h$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y que h tiene una inversa. Veamos que h es un homeomorfismo.

Tomamos $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y una sucesión $x_k \rightarrow x$. Sea $t_k \in \mathbb{R}$ tal que $L^{-t_k}(x_k) \in S_L^{n-1}$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $L^{-t_0}(x) \in S_L^{n-1}$. Por la continuidad del flujo, tenemos que $t_k \rightarrow t_0$ y $L^{-t_k}(x_k) \rightarrow L^{-t_0}(x)$. Así, $h(x_k) = T^{t_k}(\tilde{h}(L^{-t_k}(x_k))) \rightarrow T^{t_0}(\tilde{h}(L^{-t_0}(x))) = h(x)$, luego h es continua en x . Vamos a ver que h es continua en el origen. Por el lema 2.1.8, tenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} T^t(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En particular, para todo $x \in S_T^{n-1}$. Como S_T^{n-1} es compacto, esto implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_\varepsilon > 0$ tal que $\|T^t(y)\| < \varepsilon$ para todo $t > t_\varepsilon$ y todo $y \in S_T^{n-1}$. Por otro lado como $L(0) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$ y $L^{-t}(x) \in S_L^{n-1}$ entonces $t > t_\varepsilon$. Por lo tanto, $\|h(x)\| < \varepsilon$ si $\|x\| < \delta$, lo cual muestra la continuidad de h en el origen. De manera análoga se puede demostrar que h^{-1} es continua. Luego, h es un homeomorfismo que cumple lo buscado. \square

Proposición 2.1.10. *Sean $L, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ campos vectoriales lineales hiperbólicos. Entonces L y T son topológicamente conjugados si, y solo si, tienen el mismo índice.*

Demostración. Suponga que L y T tienen el mismo índice. Sean $E^s, E^{s'}$ los subespacios estables de L y T , respectivamente. Entonces $\dim E^s = \dim E^{s'}$. Por la proposición 2.1.9, hay un homeomorfismo $h_s : E^s \rightarrow E^{s'}$ que conjugua L_s y T_s , es decir, $h_s L_s^t = T_s^t h_s$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Similarmente, hay un homeomorfismo $h_u : E^u \rightarrow E^{u'}$ que conjugua L_u y T_u . Definimos $h : E^s \oplus E^u \rightarrow E^{s'} \oplus E^{u'}$ como $h(x) = h(x^s + x^u) = h_s(x^s) + h_u(x^u)$. Es claro que h es un homeomorfismo que conjugua L^t y T^t .

Por otro lado, sea h una equivalencia topológica entre L y T . Como el origen es la única singularidad de L y T , entonces $h(0) = 0$. Así mismo, si $x \in E^s$, $\omega_L(x) = 0$, luego $\omega_T(h(x)) = h(\omega_L(x)) = h(0) = 0$. Por tanto, $h(x) \in E^{s'}$ y $h(E^s) \subset E^{s'}$. Similarmente, $h^{-1}(E^{s'}) \subset E^s$. De aquí se tiene que $h_s = h|_{E^s}$ es un homeomorfismo entre E^s y $E^{s'}$. Finalmente, por el Teorema de invariancia del dominio, concluimos que $\dim E^s = \dim E^{s'}$, es decir, L y T tienen el mismo índice. \square

Finalmente, y aprovechando la clasificación topológica obtenida, procedemos a introducir el concepto de estabilidad estructural para campos vectoriales lineales. La estabilidad de diversos sistemas dinámicos es el eje de este trabajo, por lo que la siguiente definición es un punto de partida para desarrollos posteriores.

Definición 2.1.6 (Campo vectorial lineal estructuralmente estable). Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Decimos que L es estructuralmente estable si existe una vecindad $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, con la topología de la norma, tal que todo $T \in \mathcal{V}$ es topológicamente equivalente a L .

El resultado que concluye esta sección nos dice que, en el caso de los campos vectoriales lineales, la estabilidad estructural es equivalente a la hiperbolicidad. En consecuencia, es una propiedad genérica; más aún, es una propiedad abierta y densa.

Proposición 2.1.11. *Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un campo vectorial lineal. Entonces, L es estructuralmente estable en el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ si, y solo si, L es hiperbólico.*

Demostración. Primero, supongamos que $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es un campo vectorial lineal hiperbólico. Note que, por el lema 2.1.4 y la proposición 2.1.6, existe una vecindad $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que todo $T \in \mathcal{V}$ tiene el mismo índice que L . Luego, por la proposición 2.1.10, todo $T \in \mathcal{V}$ es topológicamente equivalente a L y L es estructuralmente estable.

Paralelamente, supongamos que $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es un campo lineal no hiperbólico. Sea $\delta = \min\{|\alpha| : \alpha + i\beta \text{ es valor propio de } L \text{ y } \alpha \neq 0\}$. Si $0 < t < \delta$ entonces $L + tI$ y $L - tI$ son campos lineales hiperbólicos con diferentes índices y no pueden ser topológicamente equivalentes por la proposición 2.1.10. Luego, para toda vecindad de L , existen dos campos lineales que no son topológicamente equivalentes y por tanto L no es estructuralmente estable. \square

2.2. Hiperbolicidad

La noción de hiperbolicidad es el fundamento analítico del estudio de la estabilidad estructural. La principal característica de este fenómeno es la contracción local uniforme en una dirección y la expansión local uniforme en la dirección complementaria [Wen16]. Si bien esta propiedad da lugar a inestabilidad local de las órbitas de un sistema dinámico, también –sorprendentemente– genera estabilidad global en la estructura topológica de la colección de todas sus órbitas [BS02].

En esta sección extendemos el concepto de punto fijo hiperbólico a campos vectoriales y difeomorfismos, con base en las definiciones para sus contrapartes lineales de la sección anterior (definiciones 2.1.4 y 2.1.5, respectivamente). Más aún, se generaliza la noción de hiperbolicidad a diversos elementos de interés para la dinámica topológica, tales como puntos periódicos y conjuntos cerrados invariantes.

Definición 2.2.1 (Punto fijo hiperbólico). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $p \in M$ un punto fijo de f . Decimos que p es un punto fijo hiperbólico si $Df_p : T_pM \rightarrow T_pM$ es un isomorfismo lineal hiperbólico. Es decir, Df_p no tiene valores propios en el círculo unitario.

Definición 2.2.2 (Singularidad hiperbólica). Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ una singularidad de X . Decimos que p es una singularidad hiperbólica si $DX_p : T_pM \rightarrow T_pM$ es un campo vectorial lineal hiperbólico, es decir, DX_p no tiene valores propios en el eje imaginario.

Definición 2.2.3 (Punto periódico hiperbólico). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $p \in M$ un punto periódico de f de período $k \in \mathbb{Z}^+$, i.e., $f^k(p) = p$. Decimos que p es un punto periódico hiperbólico si es punto fijo hiperbólico del difeomorfismo $f^k \in \text{Diff}^r(M)$.

Podemos extender esta definición para órbitas periódicas de flujos. Para esto usamos el mapa de Poincaré. Teniendo en cuenta la definición 1.2.17, si $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $p \in M$ es un punto periódico de X de período $t_0 > 0$, y $\Sigma \subset M$ es una sección local para X en p , entonces, se puede restringir el mapa de Poincaré como $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$. Lo anterior, sumado con el siguiente resultado (ver [PdM82]), nos permite establecer la definición deseada.

Lema 2.2.1. *Sea γ una órbita cerrada de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y sea $\Sigma \subset M$ una sección local para X en algún punto $p \in \gamma$. Si $P_\Sigma : U \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$ es el mapa de Poincaré entonces P_Σ es un difeomorfismo C^r de una vecindad $V \subset U$ de p sobre un conjunto abierto de Σ .*

Definición 2.2.4 (Órbita cerrada hiperbólica). Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $p \in \gamma$, donde $\gamma \subset M$ es una órbita cerrada de X y $\Sigma \subset M$ una sección local para X en p . Decimos que γ es una órbita cerrada hiperbólica de X si p es un punto fijo hiperbólico del mapa de Poincaré $P : V \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$, donde V es la vecindad del lema 2.2.1.

Observación. La definición no depende del punto $p \in \gamma$ ni de la sección local $\Sigma \subset M$.

Finalmente, establecemos la noción más general de conjunto hiperbólico. La siguiente definición depura los elementos geométricos y analíticos ya evidentes desde la proposición 2.1.3 y el lema 2.1.8. Estos elementos son: separación del espacio tangente en subespacios complementarios invariantes y contracción-expansión uniforme en los subespacios respectivos.

Definición 2.2.5 (Conjunto hiperbólico). Sea M una variedad Riemanniana compacta sin frontera y $f \in \text{Diff}^r(M)$. Un subconjunto $\Lambda \subset M$ compacto, f -invariante (i.e., $f(\Lambda) = \Lambda$), se dice hiperbólico si existen constantes $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ y familias de subespacios $E^s(x) \subset T_x M$ y $E^u(x) \subset T_x M$, $x \in \Lambda$, tal que para todo $x \in \Lambda$ se tiene que

- (i) $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$,
- (ii) $\|Df_x^n v^s\| \leq C\lambda^n \|v^s\|$ para todo $v^s \in E^s(x)$ y $n \geq 0$,
- (iii) $\|Df_x^{-n} v^u\| \leq C\lambda^n \|v^u\|$ para todo $v^u \in E^u(x)$ y $n \geq 0$,
- (iv) $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$ y $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$.

Dado $x \in \Lambda$, el subespacio $E^s(x)$ (respectivamente, $E^u(x)$) es llamado subespacio estable (respectivamente, inestable) en x .

Cualquier par de métricas Riemannianas en una variedad compacta son equivalentes. Por lo tanto, la noción de conjunto hiperbólico no depende de la elección de la métrica Riemanniana. La constante C depende de la métrica, pero la tasa de contracción-expansión, λ , no. Además, es posible elegir una métrica tal que $C = 1$ usando un λ ligeramente mayor, la cual se denomina métrica adaptada o métrica de Lyapunov [BS02].

2.3. Transversalidad

La transversalidad es un concepto geométrico que surge inicialmente del estudio de mapas entre variedades. En el caso de sistemas dinámicos, es una noción clave para el análisis de la estabilidad y las propiedades genéricas. En esta sección introducimos la definición de transversalidad, restringiéndonos al caso de subvariedades, y usamos este concepto para precisar algunas ideas previas.

Definición 2.3.1 (Intersección transversal). Sea M una variedad y $S_1, S_2 \subset M$ dos subvariedades. Dado $p \in S_1$, decimos que S_1 y S_2 se intersectan transversalmente en el punto p si $p \notin S_2$ o $T_p S_1 + T_p S_2 = T_p M$. Además, decimos que S_1 y S_2 tienen intersección transversal (o son transversales) si se intersectan transversalmente para todo $p \in S_1$, en cuyo caso se denota $S_1 \pitchfork S_2$.

Note que en la definición anterior la descomposición no necesariamente debe ser una suma directa. Cuando lo es, tenemos que $\dim S_1 = \text{codim } S_2$.

Usando la transversalidad, podemos hacer más precisas algunas nociones previamente enunciadas. En particular, note que la denominación de sección transversal en la definición 1.2.14 está justificada, pues las líneas de flujo son localmente subvariedades transversales a la sección.

A continuación, señalamos dos ejemplos muy importantes, basados en resultados anteriores de sistemas lineales hiperbólicos. Al complementar estos resultados con la noción de transversalidad, obtenemos un panorama para la generalización en sistemas no lineales.

Ejemplo 2.3.1 (Flujo transversal a esferas). En el lema 2.1.7, se puede concluir que las líneas de flujo del campo L son transversales a la esfera S^{n-1} . Además, la subvariedad S^{n-1} es una sección transversal para L para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Ejemplo 2.3.2 (Variedades invariantes transversales). Las proposiciones 2.1.2 y 2.1.3 demuestran la existencia de subespacios invariantes $E^s, E^u \subset \mathbb{R}^n$ (espacio estable e inestable, respectivamente) para sistemas lineales hiperbólicos. Es claro que E^s y E^u son subvariedades de \mathbb{R}^n . Además, considerando que $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, concluimos que E^s y E^u se intersectan transversalmente en el origen (punto fijo hiperbólico) y más aún $E^s \pitchfork E^u$.

2.4. Variedades invariantes

Hasta el momento hemos ampliado algunos conceptos introducidos en la sección 2.1 para sistemas no lineales, tales como los conjuntos hiperbólicos y la transversalidad. En esta sección continuamos con este objetivo y señalamos la generalización del ejemplo 2.3.2 sobre la existencia de variedades transversales invariantes alrededor de puntos fijos hiperbólicos. Este resultado es el Teorema de la variedad estable, que consiste en partir de la definición de hiperbolicidad en términos de objetos infinitesimales: una familia de subespacios lineales invariantes por la diferencial de un difeomorfismo (o flujo), para construir los correspondientes objetos integrales: las variedades estable e inestable [BS02].

Definición 2.4.1 (Variedades locales estable e inestable). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$, $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f y $U \subset M$ una vecindad de p . Los conjuntos

$$W^s(p, U) = \{q \in U : f^k(q) \in U, \text{ para todo } k \geq 0 \text{ y } f^k(q) \rightarrow p \text{ cuando } k \rightarrow \infty\},$$

$$W^u(p, U) = \{q \in U : f^{-k}(q) \in U, \text{ para todo } k \geq 0 \text{ y } f^{-k}(q) \rightarrow p \text{ cuando } k \rightarrow \infty\}$$

son llamados variedad local estable e inestable, respectivamente, de p en U . Se usa la notación $W_{\text{loc}}^s(p)$ y $W_{\text{loc}}^u(p)$ para indicar la variedad estable e inestable, respectivamente, de p en una vecindad U suficientemente pequeña pero no especificada. Asimismo, se denota como $W_\varepsilon^s(p)$ y $W_\varepsilon^u(p)$ a la variedad estable e inestable, respectivamente, de p cuando $U = B(p, \varepsilon)$.

Con la definición anterior podemos enunciar el Teorema de la variedad estable. Este teorema dice que las variedades locales estable e inestable en un punto fijo hiperbólico son subvariedades encajadas de clase C^r , tangentes en el punto fijo a los subespacios estable e inestable, respectivamente. Más aún, pueden ser representadas como la gráfica de una función C^r de un disco de uno de los subespacios invariantes sobre el otro subespacio invariante [Rob95].

Es claro que, al tratarse de un resultado local, podemos restringirnos al caso en el que f es un difeomorfismo de clase C^r definido sobre una vecindad del origen $V \subset \mathbb{R}^m$, donde $0 \in V$ es un punto fijo hiperbólico.

Teorema 2.4.1 (Teorema de la variedad estable). Sea $V \subset \mathbb{R}^m$ una vecindad del origen y $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase C^r que es difeomorfismo sobre su imagen, tal que 0 es un punto fijo hiperbólico de f . Entonces,

- (i) existe una vecindad de 0 , $U \subset V$, tal que $W^s(0, U)$ y $W^u(0, U)$ son discos encajados de clase C^r de la dimensión correspondiente, tangentes en 0 a E^s y E^u , respectivamente.
- (ii) existe $\beta > 0$ tal que $W_{\text{loc}}^s(0)$ es la gráfica de una función C^r , $\varphi^s : B_\beta^s \rightarrow E^u$, con $\varphi^s(0) = 0$ y $D\varphi_0^s = 0$ y $W_{\text{loc}}^u(0)$ es la gráfica de una función C^r , $\varphi^u : B_\beta^u \rightarrow E^s$, con $\varphi^u(0) = 0$ y $D\varphi_0^u = 0$. Aquí usamos la notación $B_\beta = B(0, \beta) \subset \mathbb{R}^m$, $B_\beta^s = B_\beta \cap E^s$ y $B_\beta^u = B_\beta \cap E^u$.

Idea de la demostración. Aunque no incluimos aquí la demostración completa de este resultado, vamos a describir las herramientas usadas más frecuentemente en su prueba y a sugerir algunas fuentes de consulta. Estas herramientas incluyen el Teorema del punto fijo de Banach o el Teorema de la función implícita.

El Teorema de la variedad estable también es conocido como Teorema de Hadamard-Perron, debido a los dos tipos básicos de prueba: el Método de la transformada gráfica (Hadamard) y el Método de variación de parámetros (Perron). Ambos hacen uso del Teorema del punto fijo de Banach sobre espacios adecuados de funciones. A continuación, damos un bosquejo de cada uno de estos métodos.

1. Método de la transformada gráfica de Hadamard

Este método consiste en tomar una función de prueba $\sigma : B_\beta^s \rightarrow B_\beta^u$ del espacio

$$\Sigma(\beta, L) = \{\sigma : B_\beta^s \rightarrow B_\beta^u : \sigma \text{ es continua Lipschitz, } \sigma(0) = 0, \text{Lip}(\sigma) \leq L\}.$$

Se define un operador $\Gamma : \Sigma(\beta, L) \rightarrow \Sigma(\beta, L)$ tal que para cada $\sigma \in \Sigma(\beta, L)$, $\Gamma(\sigma)$ es la única función tal que

$$\text{gráfica}(\Gamma(\sigma)) = f(\text{gráfica}(\sigma)) \cap (B_\beta^s \times B_\beta^u).$$

Además de probar que Γ es un operador bien definido (denominado la *transformada gráfica*), es posible probar que es una contracción en la topología C^0 . Por lo tanto, existe una función σ^s que es punto fijo, i.e., $\Gamma(\sigma^s) = \sigma^s$, y que da la variedad local estable como la gráfica de una función Lipschitz, $\text{gráfica}(\sigma^s) = W_\beta^s(0)$. Sin embargo, esta función σ^s no necesariamente es C^1 . Para probar diferenciabilidad C^1 se recurre al método de conos invariantes, lo cual es posible gracias a la hipótesis de hiperbolicidad. Finalmente, se verifica que la función σ^s (y por lo tanto la variedad local estable $W_\beta^s(0)$) es de clase C^r por inducción sobre r . La existencia de la variedad local inestable $W_\beta^u(0)$ se garantiza por que f es un difeomorfismo sobre su imagen.

2. Método de variación de parámetros de Perron

Esta alternativa funciona tanto para difeomorfismos como para flujos, pero para esta explicación usamos el último caso. Consideremos una ecuación diferencial $x' = f(x) = Ax + g(x)$ en \mathbb{R}^m , donde $f(0) = 0$, $A = Df_0$, $g(0) = 0$, y $Dg_0 = 0$. Si suponemos que A es un isomorfismo hiperbólico, tenemos una separación $x = (x^s, x^u)$ dada por la proposición 2.1.3. Usando la solución del ejemplo 1.1.2 y variación de parámetros obtenemos la solución

$$x(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}g(x(\tau))d\tau.$$

Usando los límites adecuados en cada caso y poniendo la condición inicial $x^s(0) = a^s \in B_\beta^s$, podemos obtener las componentes estable e inestable,

$$x^s(t) = e^{A^s t}a^s + \int_0^t e^{A^s(t-\tau)}g^s(x(\tau))d\tau \quad \text{y} \quad x^u(t) = \int_\infty^t e^{A^u(t-\tau)}g^u(x(\tau))d\tau,$$

respectivamente. Combinando estas dos componentes obtenemos una transformación sobre las soluciones de prueba para la variedad estable. Más precisamente, sea \mathcal{F} el espacio de funciones que consiste de las soluciones de prueba $x(t, a^s)$ para cada $a^s \in E^s$. Definimos el operador $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ como

$$T(x)(t, a^s) = e^{A^s t}a^s + \int_0^t e^{A^s(t-\tau)}g^s(x(\tau, a^s))d\tau + \int_\infty^t e^{A^u(t-\tau)}g^u(x(\tau, a^s))d\tau.$$

Nuevamente, se puede demostrar que es T es una contracción, luego, tiene un punto fijo que da la variedad estable.

Este resumen de los métodos de demostración se tomó de [Rob95]. En la misma referencia se encuentra una prueba completa basada en el método de Hadamard. Otras pruebas detalladas que usan el método de la transformada gráfica están en [HPS77] y [KH95]. Por otro lado, en [Per06] se incluye una demostración usando el método de Perron. Finalmente, y aunque dicho método no se incluyó en la discusión previa, se puede encontrar una prueba en [PdM82] que emplea el Teorema de la función implícita en espacios de Banach. \square

Es claro que las variedades locales estable e inestable obtenidas a partir del teorema 2.4.1 no son únicas. En cambio, a partir de ellas, podemos construir las variedades (globales) estable e inestable de un punto hiperbólico, que sí resultan ser únicas.

Definición 2.4.2 (Variedades globales estable e inestable). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f . Los conjuntos

$$W^s(p) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^+} f^{-j}(W_{\text{loc}}^s(p)) \quad \text{y} \quad W^u(p) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^+} f^j(W_{\text{loc}}^u(p))$$

son llamados la variedad estable e inestable, respectivamente, de f en p . Aquí, $W_{\text{loc}}^s(p)$ y $W_{\text{loc}}^u(p)$ son las variedades locales obtenidas del teorema 2.4.1.

Note que, con esta definición, podemos concluir que las variedades estable e inestable son conjuntos invariantes bajo la dinámica. No obstante, es importante resaltar que las inmersiones de estas variedades pueden ser mucho más complicadas que las de las variedades locales. Aun así, podemos caracterizar topológicamente las variedades estable e inestable como indica el siguiente corolario.

Corolario 2.4.1.1. *Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f . Entonces,*

$$W^s(p) = \{x \in M : f^k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p\} \quad \text{y} \quad W^u(p) = \{x \in M : f^{-k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p\}.$$

En otras palabras, $W^s(p) = \{x \in M : \omega(x) = p\}$ y $W^u(p) = \{x \in M : \alpha(x) = p\}$.

Los conceptos y resultados de esta sección se pueden extender a conjuntos más generales. En particular, el teorema 2.4.1 aplica para cada punto de un conjunto hiperbólico (ver [KH95] o [BS02]). Sin embargo, solo nos interesa el caso de puntos fijos y periódicos hiperbólicos de difeomorfismos y flujos. Por lo tanto, cerramos esta sección introduciendo estas definiciones.

Definición 2.4.3 (Variedades invariantes de puntos periódicos hiperbólicos). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $p \in M$ un punto periódico hiperbólico de f de período $k \in \mathbb{Z}^+$. Luego, las variedades estable e inestable de p con respecto a f , $W^s(p)$ y $W^u(p)$, son las variedades estable e inestable de p visto como punto fijo hiperbólico de f^k .

Definición 2.4.4 (Variedades invariantes de singularidades hiperbólicas). Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, X^t , $t \in \mathbb{R}$, el flujo de X y $p \in M$ una singularidad hiperbólica de X . Luego, las variedades estable e inestable de p con respecto a X , $W^s(p)$ y $W^u(p)$, son las variedades estable e inestable de p visto como punto fijo hiperbólico del difeomorfismo inducido en tiempo uno, X^1 .

Definición 2.4.5 (Variedades invariantes de órbitas cerradas hiperbólicas). Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $\gamma \subset M$ una órbita cerrada hiperbólica de X . Luego, las variedades estable e inestable de γ con respecto a X son $W^s(\gamma) = \{y \in M : \omega(y) = \gamma\}$ y $W^u(\gamma) = \{y \in M : \alpha(y) = \gamma\}$, respectivamente.

2.5. Lema de inclinación (λ -lema)

En esta sección continuamos con métodos locales aplicados en vecindades de elementos críticos hiperbólicos. Más específicamente, vamos a estudiar el Lema de inclinación, un resultado de Palis (también conocido como λ -lema, se puede consultar en [Pal69] y [PdM82]), que explica geoméricamente que las imágenes sucesivas de un disco transversal a la variedad estable de un punto fijo hiperbólico se acumulan en la variedad inestable del punto. Este lema es de utilidad para varios resultados en sistemas dinámicos; por ejemplo, para dar una prueba geométrica del Teorema de Hartman-Grobman, como se verá en la sección 2.6, y para demostrar la estabilidad estructural de sistemas Morse-Smale, que se hará en la sección 3.3.

Considere f como en el teorema 2.4.1. Luego, $A = Df_0$ es un isomorfismo hiperbólico e induce una partición invariante $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$ por la proposición 2.1.3. Usando los mapas φ^s y φ^u dados por el teorema 2.4.1-(ii), podemos construir el mapa

$$\varphi : B_\beta^s \oplus B_\beta^u \rightarrow E^s \oplus E^u, \quad \varphi(x^s, x^u) = (x^s - \varphi^u(x^u), x^u - \varphi^s(x^s)).$$

Luego, φ es de clase C^r y $D\varphi_0$ es la identidad. Entonces, φ es un difeomorfismo en una vecindad del origen. Más aún, el difeomorfismo $\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ satisface $\tilde{f}(0) = 0$ y $D\tilde{f}_0 = A$. Además, la variedad estable local de \tilde{f} es una vecindad del origen en E^s y la variedad inestable local es una vecindad del origen en E^u . Esto implica que siempre podemos suponer que las variedades invariantes locales de un punto fijo hiperbólico de un difeomorfismo f son vecindades del origen de los subespacios invariantes correspondientes de la parte lineal de f . En el enunciado del siguiente lema, suponemos f de la forma aquí discutida.

Lema 2.5.1 (Lema de inclinación para difeomorfismos). *Sea $B^s \subset E^s$ una bola contenida en $W_{\text{loc}}^s(0)$, $B^u \subset E^u$ una bola contenida en $W_{\text{loc}}^u(0)$ y $V = B^s \times B^u$. Sea $q \in W^s(0) \setminus 0$ y un disco D^u de dimensión $n^u = \dim E^u$ tal que $q \in D^u$ y D^u es transversal a $W_{\text{loc}}^s(0)$ en q . Sea D_k^u la componente conexa de $f^k(D^u) \cap V$ que contiene a $f^k(q)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq k_0$, entonces D_k^u está ε C^1 -cerca de B^u .*

Demostración. La expresión de f en la vecindad V de 0 es

$$f(x^s, x^u) = (A^s x^s + \varphi^s(x^s, x^u), A^u x^u + \varphi^u(x^s, x^u)),$$

donde $x^s \in B^s$, $x^u \in B^u$ y $Df_0 = (A^s + D\varphi_0^s, A^u + D\varphi_0^u) = (A^s, A^u)$, por lo dicho anteriormente. Además, como 0 es punto fijo hiperbólico, por el lema 2.1.8, existe una norma y un número $0 < a < 1$, tal que $\|A^s\| \leq a < 1$ y $\|(A^u)^{-1}\| \leq a < 1$.

Podemos entonces construir los siguientes estimados. Como $a < 1 < a^{-1}$, existen $0 < \eta_1, \eta_2 < 1$ tales que $a + \eta_1 < 1$ y $a^{-1} - \eta_2 > 1$. Sea $\tilde{b} = a^{-1} - \eta_2$, luego, existe $0 < \eta_3 < 1$ tal que $\eta_3 < (\tilde{b} - 1)^2/4$. Haciendo $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ y $b = a^{-1} - \eta$, obtenemos que

$$\begin{aligned} a + \eta &\leq a + \eta_1 < 1, \\ b = a^{-1} - \eta &\geq a^{-1} - \eta_2 = \tilde{b} > 1, \\ \eta &\leq \eta_3 < \frac{(\tilde{b} - 1)^2}{4} \leq \frac{(b - 1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\left. \frac{\partial \varphi^s}{\partial x^u} \right|_{B^u} = \left. \frac{\partial \varphi^u}{\partial x^s} \right|_{B^s} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(0, 0) = 0,$$

para $i, j = s, u$. Así, por continuidad de las derivadas parciales, tenemos que existe una vecindad $V' \subset V$ de 0 tal que

$$\eta \geq \max_{V'} \left\| \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \right\|, \quad \text{con } i, j = s, u.$$

Como $q \in W^s(0) = \omega(0)$, entonces podemos suponer que $q \in V'$ y $B^u \subset V'$. Sea $v_0 \in T_q D^u$ tal que $\|v_0\| = 1$. Se puede escribir $v_0 = (v_0^s, v_0^u)$, ya que $V = B^s \times B^u$. Llamamos λ_0 a la pendiente de v_0 , i.e., $\lambda_0 = \|v_0^s\|/\|v_0^u\|$. Note que λ_0 está bien definido pues $\|v_0^u\| \neq 0$ debido a que D^u es transversal a B^s en q . Hacemos $q_0 = q$ y definimos recursivamente

$$q_k = f^k(q), \quad v_k = Df_{q_{k-1}}(v_{k-1}),$$

para todo $k \geq 1$. Como $q_0 = q \in B^s \cap V'$, luego $q_k \in B^s \cap V'$, para todo $k \geq 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} v_k = Df_{q_{k-1}}(v_{k-1}) &= \begin{pmatrix} A^s + \partial \varphi^s / \partial x^s(q_{k-1}) & \partial \varphi^s / \partial x^u(q_{k-1}) \\ 0 & A^u + \partial \varphi^u / \partial x^u(q_{k-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{k-1}^s \\ v_{k-1}^u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^s v_{k-1}^s + \partial \varphi^s / \partial x^s(q_{k-1}) v_{k-1}^s + \partial \varphi^s / \partial x^u(q_{k-1}) v_{k-1}^u \\ A^u v_{k-1}^u + \partial \varphi^u / \partial x^u(q_{k-1}) v_{k-1}^u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_k^s \\ v_k^u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\lambda_k = \frac{\|v_k^s\|}{\|v_k^u\|} = \frac{\|A^s v_{k-1}^s + \partial\varphi^s/\partial x^s(q_{k-1})v_{k-1}^s + \partial\varphi^s/\partial x^u(q_{k-1})v_{k-1}^u\|}{\|A^u v_{k-1}^u + \partial\varphi^u/\partial x^u(q_{k-1})v_{k-1}^u\|}.$$

Además, podemos acotar superiormente el numerador por

$$\|A^s v_{k-1}^s\| + \|\partial\varphi^s/\partial x^s(q_{k-1})v_{k-1}^s\| + \|\partial\varphi^s/\partial x^u(q_{k-1})v_{k-1}^u\| \leq a\|v_{k-1}^s\| + \eta\|v_{k-1}^s\| + \eta\|v_{k-1}^u\|$$

e inferiormente el denominador por

$$\|A^u v_{k-1}^u\| - \|\partial\varphi^u/\partial x^u(q_{k-1})v_{k-1}^u\| \geq a^{-1}\|v_{k-1}^u\| - \eta\|v_{k-1}^u\|.$$

Entonces,

$$\lambda_k = \frac{\|v_k^s\|}{\|v_k^u\|} \leq \frac{a\|v_{k-1}^s\| + \eta\|v_{k-1}^s\| + \eta\|v_{k-1}^u\|}{a^{-1}\|v_{k-1}^u\| - \eta\|v_{k-1}^u\|} = \frac{a\lambda_{k-1} + \eta\lambda_{k-1} + \eta}{a^{-1} - \eta} \leq \frac{\lambda_{k-1} + \eta}{b}.$$

En particular,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \frac{\lambda_0 + \eta}{b} = \frac{\lambda_0}{b} + \frac{\eta}{b}, \\ \lambda_2 &\leq \frac{\lambda_1 + \eta}{b} \leq \frac{\lambda_0}{b^2} + \eta \sum_{i=1}^2 \frac{1}{b^i}, \\ \lambda_k &\leq \frac{\lambda_{k-1} + \eta}{b} \leq \frac{\lambda_0}{b^k} + \eta \sum_{i=1}^k \frac{1}{b^i} \leq \frac{\lambda_0}{b^k} + \frac{\eta}{b-1}. \end{aligned}$$

Como $\lambda_0/b^k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ y $\eta/(b-1) < (b-1)/4$, entonces existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k_1$, se tiene que $\lambda_k \leq (b-1)/4$. Sea $0 < \eta' < \min\{\varepsilon, \eta\}$. Como $\partial\varphi^s/\partial x^u|_{B^u} = 0$ y B^u es compacto, por el lema del tubo (se puede consultar en [Mun00]) existe $\delta < \varepsilon$ tal que, para $V_1 = \delta B^s \times B^u \subset V$ se tiene que

$$\max_{V_1} \left\| \frac{\partial\varphi^s}{\partial x^u} \right\| \leq \eta',$$

donde δB^s es la bola cuyo radio es δ veces el radio de B^s .

Ahora, note que $T_q^1 D^u = \{v \in T_q D^u : \|v\| = 1\}$ es compacto, entonces el vector v_0 anterior se puede elegir tal que la pendiente λ_0 toma el valor máximo. Por esto, podemos suponer que, para todo $k \geq k_1$, todos los vectores no nulos de $T_{q_k} D_k^u$ tienen pendiente $\lambda_k \leq (b-1)/4$ y $q_{k_1} \in V_1$. En consecuencia, por la continuidad del plano tangente de $D_{k_1}^u$, existe un disco \tilde{D}^u encajado en $D_{k_1}^u$ con centro en q_{k_1} y tal que la pendiente λ de cualquier vector unitario en $T_p \tilde{D}^u$, para todo $p \in \tilde{D}^u$, satisface $\lambda \leq (b-1)/2$.

Podemos reutilizar la idea anterior para estimar las pendientes de los vectores tangentes bajo la diferencial, ya no solamente en un punto sino en todo el disco. Así, dado $p \in \tilde{D}^u$, tomamos $v \in T_p \tilde{D}^u$. Usando la descomposición $v = (v^s, v^u)$, vemos que

v tiene pendiente $\lambda_{k_1} = \|v^s\|/\|v^u\|$. En este caso, el punto p no necesariamente está contenido en B^s , así que al aplicar la diferencial se obtiene

$$\begin{aligned} Df_p(v) &= \begin{pmatrix} A^s + \partial\varphi^s/\partial x^s(p) & \partial\varphi^s/\partial x^u(p) \\ \partial\varphi^u/\partial x^s(p) & A^u + \partial\varphi^u/\partial x^u(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^s \\ v^u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^s v^s + \partial\varphi^s/\partial x^s(p)v^s + \partial\varphi^s/\partial x^u(p)v^u \\ \partial\varphi^u/\partial x^s(p)v^s + A^u v^u + \partial\varphi^u/\partial x^u(p)v^u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que la pendiente es

$$\lambda_{k_1+1} = \frac{\|A^s v^s + \partial\varphi^s/\partial x^s(p)v^s + \partial\varphi^s/\partial x^u(p)v^u\|}{\|\partial\varphi^u/\partial x^s(p)v^s + A^u v^u + \partial\varphi^u/\partial x^u(p)v^u\|}.$$

Nuevamente, podemos acotar el numerador por

$$\|A^s v^s\| + \|\partial\varphi^s/\partial x^s(p)v^s\| + \|\partial\varphi^s/\partial x^u(p)v^u\| \leq a\|v^s\| + \eta\|v^s\| + \eta'\|v^u\|$$

y el denominador por

$$\|A^u v^u\| - \|\partial\varphi^u/\partial x^u(p)v^u\| - \|\partial\varphi^u/\partial x^s(p)v^s\| \geq a^{-1}\|v^u\| - \eta\|v^u\| - \eta\|v^s\|.$$

Luego,

$$\lambda_{k_1+1} \leq \frac{a\|v^s\| + \eta\|v^s\| + \eta'\|v^u\|}{a^{-1}\|v^u\| - \eta\|v^u\| - \eta\|v^s\|} = \frac{a\lambda_{k_1} + \eta\lambda_{k_1} + \eta'}{a^{-1} - \eta - \eta\lambda_{k_1}} \leq \frac{\lambda_{k_1} + \eta'}{b - \eta\lambda_{k_1}}.$$

Recordemos que $\lambda_{k_1} \leq (b-1)/2$, entonces,

$$\lambda_{k_1+1} \leq \frac{\lambda_{k_1} + \eta'}{b - \frac{1}{2}\eta(b-1)} \leq \frac{\lambda_{k_1} + \eta'}{b - \frac{1}{2}(b-1)} = \frac{\lambda_{k_1} + \eta'}{\frac{1}{2}(b+1)}.$$

Sea $b_1 = \frac{1}{2}(b+1)$. Como $b > 1$, entonces $b_1 > 1$. Retomando el razonamiento previo, podemos concluir que

$$\lambda_{k+k_1} \leq \frac{\lambda_{k_1}}{b_1^k} + \frac{\eta'}{b_1 - 1}.$$

Como $\lambda_{k_1}/b_1^k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ y $\eta' < \varepsilon$, entonces existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq k_2$,

$$\lambda_{k+k_1} \leq \varepsilon \left(1 + \frac{1}{b_1 - 1} \right).$$

Puesto que pudimos haber considerado a v de forma tal que λ_{k_1} es la pendiente máxima posible entre todos los vectores unitarios tangentes a \tilde{D}^u , entonces, para todo $k \geq k_2$, cualquier vector no nulo tangente a $f^k(\tilde{D}^u) \cap V_1$ tiene pendiente menor a $\varepsilon(1 + (b_1 - 1)^{-1})$. Es más, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que, para todo $k \geq k_2$, todos los vectores no nulos tangentes a $f^k(\tilde{D}^u) \cap V_1$ tienen pendiente menor a ε .

Ahora queremos ver que los iterados del disco \tilde{D}^u aumentan su tamaño. Para esto vamos a comparar las normas de los vectores tangentes. Sea $v_k = (v_k^s, v_k^u)$ un vector

tangente a $f^k(\tilde{D}^u) \cap V_1$ y $v_{k+1} = (v_{k+1}^s, v_{k+1}^u)$ su imagen por la diferencial de f , i.e., $(v_{k+1}^s, v_{k+1}^u) = Df(v_k^s, v_k^u)$, luego la relación de sus normas es

$$\frac{\|v_{k+1}\|}{\|v_k\|} = \frac{\sqrt{\|v_{k+1}^s\|^2 + \|v_{k+1}^u\|^2}}{\sqrt{\|v_k^s\|^2 + \|v_k^u\|^2}} = \frac{\|v_{k+1}^u\|}{\|v_k^u\|} \sqrt{\frac{1 + \lambda_{k+1}^2}{1 + \lambda_k^2}}.$$

Como $\|v_{k+1}^u\| \leq a^{-1}\|v_k^u\| - \eta\|v_k^u\| - \eta\|v_k^s\|$, entonces

$$\frac{\|v_{k+1}\|}{\|v_k\|} \geq (a^{-1} - \eta - \eta\lambda_k) \sqrt{\frac{1 + \lambda_{k+1}^2}{1 + \lambda_k^2}}.$$

Como $\lambda_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces las normas de los iterados de vectores no nulos tangentes a $f^k(\tilde{D}^u) \cap V_1$ crecen a una tasa que se aproxima a $b = a^{-1} - \eta > 1$. Por lo tanto, el diámetro de $f^k(\tilde{D}^u) \cap V_1$ se incrementa, que era lo que queríamos probar. Finalmente, uniendo esto con el hecho de que, como vimos previamente, los espacios tangentes tienen pendiente uniformemente pequeña, podemos suponer que, para todo $k \geq k_2$, $f^k(\tilde{D}^u) \cap V_1$ está ε C^1 -cerca de B^u mediante la proyección canónica sobre B^u . Haciendo $k_0 = k_1 + k_2$ obtenemos que, si $k \geq k_0$, entonces D_k^u está ε C^1 -cerca de B^u . \square

Note que, a pesar de que el lema está enunciado para difeomorfismos en una vecindad del origen de \mathbb{R}^m , el mismo resultado se puede extender a puntos fijos hiperbólicos de difeomorfismos en una variedad mediante el uso de cartas locales. A continuación, vemos algunas consecuencias del lema anterior, las cuales serán de gran utilidad en secciones posteriores.

Corolario 2.5.1.1. *Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $p_1, p_2, p_3 \in M$ puntos fijos hiperbólicos de f . Si $W^u(p_1)$ tiene un punto de intersección transversal con $W^s(p_2)$ y $W^u(p_2)$ tiene un punto de intersección transversal con $W^s(p_3)$, entonces $W^u(p_1)$ tiene un punto de intersección transversal con $W^s(p_3)$.*

Demostración. Sea $q_2 \in M$ un punto de intersección transversal de $W^u(p_2)$ y $W^s(p_3)$. Consideramos un disco cerrado $D \subset W^u(p_2)$ tal que $p_2, q_2 \in D$. Como D tiene un punto de intersección transversal con $W^s(p_3)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si \tilde{D} es un disco ε C^1 -cerca de D , entonces \tilde{D} también tiene un punto de intersección transversal con $W^s(p_3)$. Asimismo, sea $q_1 \in M$ un punto de intersección transversal de $W^u(p_1)$ con $W^s(p_2)$ y $D^u \subset W^u(p_1)$ un disco tal que $q_1 \in D^u$ y que tiene la misma dimensión que $W^u(p_2)$. Por el Lema de inclinación, existe un entero k_0 tal que $f^{k_0}(D^u)$ contiene un disco \tilde{D} que está ε C^1 -cerca de D . Entonces, existe un punto $\tilde{q} \in \tilde{D} \cap W^s(p_3)$. Como $W^u(p_1)$ es invariante, entonces $f^{k_0}(D^u) \subset W^u(p_1)$, por lo que \tilde{q} es un punto de intersección transversal entre $W^u(p_1)$ y $W^s(p_3)$. \square

Corolario 2.5.1.2. *Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $p \in M$ punto periódico hiperbólico de f . Si $W^u(p) \cap W^s(p) \neq \mathcal{O}(p)$, entonces $\Omega(f)$ no es finito.*

Demostración. Notemos que $W^u(p) \cap W^s(p) \subset \Omega(f)$. Luego, si $q \in W^u(p) \cap W^s(p)$ y $q \notin \mathcal{O}(p)$, entonces $q \notin \text{Per}(f)$ y $\mathcal{O}(q)$ es un conjunto infinito. Pero como $\Omega(f)$ es invariante y $q \in \Omega(f)$, entonces $\mathcal{O}(p) \subset \Omega(f)$. Así, $\Omega(f)$ no puede ser finito. \square

Queremos enunciar un último corolario importante del Lema de inclinación. No obstante, debemos introducir algunas definiciones previas.

Definición 2.5.1 (Dominio fundamental). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f . Sea $B^s \subset W_{\text{loc}}^s(p)$ una bola abierta que contiene a p tal que $f(\partial B^s) \subset B^s$, cuya existencia está garantizada porque $f|_{W_{\text{loc}}^s(p)}$ es una contracción. El anillo $G^s(p) = \overline{B^s} \setminus f(B^s)$ se denomina dominio fundamental $G^s(p)$ de $W^s(p)$. Análogamente, podemos definir un dominio fundamental $G^u(p)$ de $W^u(p)$.

Definición 2.5.2 (Vecindad fundamental). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$, $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f y $G^s(p)$, $G^u(p)$ dominios fundamentales de $W^s(p)$ y $W^u(p)$, respectivamente. Cualquier vecindad $N^s(p) \subset M$ de $G^s(p)$, disjunta de $W^u(p)$, es llamada vecindad fundamental asociada a $W^s(p)$. Similarmente, una vecindad $N^u(p) \subset M$ de $G^u(p)$, disjunta de $W^s(p)$, es llamada vecindad fundamental asociada a $W^u(p)$.

Corolario 2.5.1.3. *Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$, $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f y $N^s(p)$ una vecindad fundamental asociada a $W^s(p)$. Luego, $\bigcup_{k \geq 0} f^k(N^s(p)) \supset U \setminus W_{\text{loc}}^u(p)$ para alguna vecindad $U \subset M$ de p .*

Para finalizar esta sección, presentamos el enunciado y la prueba del Lema de inclinación para campos vectoriales.

Lema 2.5.2 (Lema de inclinación para campos vectoriales). *Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $p \in M$ una singularidad hiperbólica de X y $W_{\text{loc}}^s(p)$, $W_{\text{loc}}^u(p)$ las variedades locales estable e inestable de p , respectivamente. Sea $B^s \subset W_{\text{loc}}^s(p)$ un disco con $p \in B^s$, $B^u \subset W_{\text{loc}}^u(p)$ un disco con $p \in B^u$ y $V = B^s \times B^u$. Sea $q \in W_{\text{loc}}^s(p)$ y un disco D^u de dimensión $n^u = \dim W_{\text{loc}}^u(p)$ tal que $q \in D^u$ y D^u es transversal a $W_{\text{loc}}^s(p)$ en q . Sea D_t^u la componente conexa de $X^t(D^u) \cap V$ que contiene a $X^t(q)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que, si $t \geq t_0$, entonces D_t^u está ε C^1 -cerca de B^u .*

Demostración. Sea K el conjunto compacto $K = \{X^t(q) : t \in [0, 1]\}$ y, para cada punto $X^t(q) \in K$, considere el disco $D^u(X^t(q)) = X^t(D^u)$ que contiene al punto $X^t(q)$ y es transversal a $W_{\text{loc}}^s(p)$ porque X^t es un difeomorfismo y $W_{\text{loc}}^s(p)$ es invariante bajo

el flujo X^t . Sea $f = X^1$ el difeomorfismo a tiempo 1 de X . Entonces, p es un punto fijo hiperbólico de f y las variedades estable e inestable de p bajo f coinciden con las variedades estable e inestable de p bajo el campo vectorial X . Luego, por el Lema de inclinación para difeomorfismos 2.5.1, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq k_0$, entonces $D_k^u(x)$ está ε C^1 -cerca de B^u , donde $D_k^u(x)$ es la componente conexa de $f^k(D^u(x)) \cap V$ que contiene a $f^k(x)$ y $x \in K$. Esto concluye el resultado para el campo X . \square

Asimismo, podemos extender las definiciones de dominio y vecindad fundamental, de forma tal que sean aplicables a campos vectoriales.

Definición 2.5.3 (Dominio fundamental). Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ una singularidad hiperbólica de X . Sea $B^s \subset W_{\text{loc}}^s(p)$ un disco encajado que contiene a p tal que ∂B^s es transversal al campo X en $W^s(p)$. La esfera $G^s(p) = \partial B^s$ se denomina dominio fundamental $G^s(p)$ de $W^s(p)$. Análogamente, podemos definir un dominio fundamental $G^u(p)$ de $W^u(p)$.

Definición 2.5.4 (Vecindad fundamental). Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $p \in M$ una singularidad hiperbólica de X y $G^s(p)$, $G^u(p)$ dominios fundamentales de $W^s(p)$ y $W^u(p)$, respectivamente. Cualquier vecindad $N^s(p) \subset M$ de $G^s(p)$, disjunta de $W^u(p)$, es llamada vecindad fundamental asociada a $W^s(p)$. Similarmente, una vecindad $N^u(p) \subset M$ de $G^u(p)$, disjunta de $W^s(p)$, es llamada vecindad fundamental asociada a $W^u(p)$.

Con las dos definiciones anteriores, los corolarios 2.5.1.1 y 2.5.1.3 son igualmente aplicables para campos vectoriales y sus pruebas son similares a las de difeomorfismos.

2.6. Estabilidad local y linealización

Desde cálculo básico se reconoce la importancia de representar funciones localmente para reducir el análisis a su parte lineal. Una idea similar pero más elaborada desempeña un papel principal en el estudio de sistemas dinámicos diferenciables. Así, en lugar de trabajar sobre los iterados de un mapa (o el flujo de un campo), podemos analizar los iterados de su diferencial (o el flujo generado por este, respectivamente), que es una aplicación lineal. El objetivo es poder recuperar la estructura de las órbitas, al menos localmente, cerca del punto donde hemos calculado la diferencial. Bajo ciertas condiciones y controlando el efecto de fenómenos no lineales, dicha aproximación puede representar adecuadamente el comportamiento asintótico de las órbitas de forma local. Esta estrategia se denomina linealización y el marco ideal para implementarla es el análisis cerca de un conjunto hiperbólico [KH95].

Una vez se tiene información local sobre la estructura de las órbitas, es posible retomar la pregunta acerca del comportamiento ante perturbaciones. Más precisamente, queremos identificar si los conjuntos hiperbólicos permanecen y si el comportamiento local de las órbitas es topológicamente comparable tras perturbaciones del sistema. Esta es la noción de estabilidad local.

En esta sección formalizamos el concepto estabilidad local. Además, probamos el Teorema de Hartman-Grobman usando el Lema de inclinación de la sección 2.5. Este resultado dice que la estructura de las órbitas de un sistema cerca de un punto fijo hiperbólico es la misma que la de su parte lineal (el mapa diferencial), obteniendo como consecuencia la estabilidad local.

Definición 2.6.1 (Conjugación local). Sean $f, g \in \text{Diff}^r(M)$ y $p, q \in M$ puntos fijos de f y g respectivamente. Decimos que f y g son localmente topológicamente conjugados en p y q , si existen vecindades $U_p \subset M$ de p y $V_q \subset M$ de q y un homeomorfismo $h : U_p \rightarrow V_q$, con $h(p) = q$, tal que $h \circ f = g \circ h$ en U_p .

Note que el homeomorfismo h no es propiamente una conjugación topológica porque $f|_{U_p}$ y $g|_{V_q}$ no necesariamente definen sistemas dinámicos.

Por otro lado, aunque la definición 2.6.1 se puede adaptar para conjugación de flujos, esta no será utilizada. En su lugar, y siguiendo la idea de la sección 1.3, damos la definición correspondiente para equivalencia topológica.

Definición 2.6.2 (Equivalencia topológica local). Sean $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p, q \in M$. Decimos que X y Y son localmente topológicamente equivalentes en p y q , si existen vecindades $U_p \subset M$ de p y $V_q \subset M$ de q y un homeomorfismo $h : U_p \rightarrow V_q$, tal que $h(p) = q$ y h lleva localmente órbitas de X en órbitas de Y preservando orientación.

Con estas dos nociones, podemos definir estabilidad local.

Definición 2.6.3 (Estabilidad local). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $p \in M$ un punto fijo de f . Decimos que f localmente estable en p si para cualquier vecindad $U \subset M$ de p existe una vecindad $\mathcal{V} \subset \text{Diff}^r(M)$ de f tal que, para todo $g \in \mathcal{V}$, f en p es localmente topológicamente conjugado a g en q , para un $q \in U$. Análogamente, sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$. Decimos que X localmente estable en p si para cualquier vecindad $U \subset M$ de p existe una vecindad $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}^r(M)$ de X tal que, para todo $Y \in \mathcal{V}$, X en p es localmente topológicamente equivalente a Y en q , para un $q \in U$.

Como se mencionó previamente, el objetivo de esta sección es demostrar el Teorema de Hartman-Grobman sobre estabilidad local cerca de puntos fijos

hiperbólicos. Antes de dicha prueba, enunciaremos un resultado sobre la persistencia de puntos fijos hiperbólicos, cuya demostración se puede consultar en [Wen16].

Lema 2.6.1 (Persistencia de puntos fijos hiperbólicos). *Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f . Entonces, existen vecindades $\mathcal{V} \subset \text{Diff}^r(M)$ de f y $U \subset M$ de p y una función continua $\rho : \mathcal{V} \rightarrow U$ tal que a cada mapa $g \in \mathcal{V}$ le asocia la única singularidad de g en U y su índice es el mismo de p con respecto a f .*

El resultado previo se puede extender a puntos periódicos hiperbólicos de difeomorfismos, y también a singularidades hiperbólicas y órbitas cerradas hiperbólicas de campos vectoriales. Su significado se puede resumir en que los elementos críticos hiperbólicos se preservan localmente bajo perturbaciones. Por esta razón, este hecho será utilizado varias veces en argumentos posteriores.

A continuación, enunciaremos el Teorema de Hartman-Grobman para campos vectoriales y difeomorfismos. Existen varias pruebas y extensiones de este resultado, que usan una diversidad de herramientas (ver [PdM82], [KH95], [Rob95] y [Per06]). En nuestro caso, solo incluimos la prueba para campos vectoriales usando el Lema de inclinación 2.5.2 y el siguiente resultado.

Lema 2.6.2. *Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ una singularidad hiperbólica de X . Existe una vecindad $U \subset M$ de p y un mapa continuo $\pi_s : U \rightarrow B^s$, donde $B^s = U \cap W_{\text{loc}}^s(p)$ es un disco que contiene a p , con las siguientes propiedades:*

- (i) $\pi_s^{-1}(p) = B^u = U \cap W_{\text{loc}}^u(p)$ es un disco que contiene a p ;
- (ii) si $x \in B^s$, $\pi_s^{-1}(x)$ es una subvariedad C^r de M transversal a $W_{\text{loc}}^s(p)$ en x ;
- (iii) π_s es de clase C^r excepto a lo más en los puntos de B^u ;
- (iv) la fibrición definida por π_s es invariante por el flujo, es decir, si $t \geq 0$, entonces $X^t(\pi_s^{-1}(x)) \supset \pi_s^{-1}(X^t(x))$.

Demostración. Podemos suponer que X es un campo vectorial en una vecindad V del origen en $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$ y 0 es una singularidad hiperbólica de X . También podemos suponer que $W_{\text{loc}}^s(p) \subset E^s$ y $W_{\text{loc}}^u(p) \subset E^u$ son abiertos que contienen al origen. Sea $G^s(0)$ un dominio fundamental para $W^s(0)$, luego $G^s(0)$ es una esfera contenida en E^s y transversal al campo vectorial X en E^s . Sea $B^u \subset E^u$ un disco que contiene a 0 . Se puede tomar B^u suficientemente pequeño tal que el cilindro $G^s(0) \times B^u$ es transversal al campo vectorial. En $G^s(0) \times B^u$ tenemos un mapa C^r , $\pi_s : G^s(0) \times B^u \rightarrow W_{\text{loc}}^s(0)$ que es la proyección sobre la primera componente, por lo que las fibras $\pi_s^{-1}(x)$ a través de puntos $x \in G^s(0)$ son discos transversales a $W_{\text{loc}}^s(0)$. Por el corolario 2.5.1.3, tenemos que $\bigcup_{t \geq 0} X^t(G^s(0) \times B^u) \supset U \setminus E^u$, para alguna vecindad $U \subset M$ de p . Si $x \in U \cap E^u$, definimos $\pi_s(x) = p$. Si $x \in U \setminus E^u$, definimos $\pi_s(x) = X^t(\pi_s(X^{-t}(x)))$, para el único $t > 0$ tal que $X^{-t}(x) \in G^s(0) \times B^u$. Así, π_s es C^r en $U \setminus E^u$ y la continuidad de π_s en los puntos de E^u se sigue del Lema de inclinación 2.5.2. \square

Es importante resaltar que, aunque el lema anterior está enunciado para la variedad estable, existe un resultado completamente análogo para la variedad inestable (basta con tomar el campo vectorial $-X$). Estos dos resultados son claves para la demostración del Teorema de Hartman-Grobman. Además, una generalización de esta idea de fibración –conocida como *familia tubular*– será utilizada en el siguiente capítulo para probar la estabilidad estructural de campos Morse-Smale (ver teoremas 3.3.4 y 3.3.9).

Teorema 2.6.3 (Teorema de Hartman-Grobman para campos vectoriales). *Considere $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ una singularidad hiperbólica de X . Sea $DX_p : T_pM \rightarrow T_pM$ la diferencial de X en p . Entonces, existen vecindades $U \subset M$ de p y $V \subset T_pM$ de 0 y un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ que lleva órbitas de X en órbitas del flujo inducido por DX_p preservando orientación. En particular, X es localmente estable en p .*

Demostración. Por el lema 2.6.1, podemos elegir $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}^r(M)$ tal que para todo $Y \in \mathcal{V}$ tiene una única singularidad p_Y cerca de p del mismo índice. Construimos homeomorfismos $h^s : W_{\text{loc}}^s(p) \rightarrow W_{\text{loc}}^s(p_Y)$ y $h^u : W_{\text{loc}}^u(p) \rightarrow W_{\text{loc}}^u(p_Y)$ que conjuguen los flujos de X y Y , definiéndolos en dominios fundamentales y extendiéndolos como en la proposición 2.1.9 a $W_{\text{loc}}^s(p)$ y $W_{\text{loc}}^u(p)$ usando los flujos X y Y . Consideramos las fibraciones $\pi_s^X : U_p \rightarrow W_{\text{loc}}^s(p)$, $\pi_u^X : U_p \rightarrow W_{\text{loc}}^u(p)$, $\pi_s^Y : V_{p_Y} \rightarrow W_{\text{loc}}^s(p_Y)$ y $\pi_u^Y : V_{p_Y} \rightarrow W_{\text{loc}}^u(p_Y)$ dadas por el lema 2.6.2.

Ahora, definimos $h : U_p \rightarrow V_{p_Y}$, dada por $q \mapsto h(q)$, donde $h(q)$ es el único punto que satisface $\pi_s^Y(h(q)) = h^s(\pi_s^X(q))$ y $\pi_u^Y(h(q)) = h^u(\pi_u^X(q))$. Luego, h está bien definida y es un homeomorfismo que conjugua localmente los flujos de X y Y . Concluimos que X es localmente estable en p . \square

La prueba del Teorema de Hartman-Grobman para difeomorfismos usando el Lema de inclinación es análoga a la dada para campos vectoriales y se puede encontrar en [Pal69].

Teorema 2.6.4 (Teorema de Hartman-Grobman para difeomorfismos). *Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f . Sea $Df_p : T_pM \rightarrow T_pM$ la diferencial de f en p . Entonces, existen vecindades $U \subset M$ de p y $V \subset T_pM$ de 0 y un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ tal que $h \circ f = Df_p \circ h$. En particular, f es localmente estable en p .*

Capítulo 3

Estabilidad estructural

La noción de estabilidad estructural fue inicialmente introducida por Andronov y Pontryagin, en 1937, y surge de la necesidad de considerar la validez de un modelo matemático teniendo en cuenta que estos solo se pueden plantear de manera aproximada. Por ejemplo, en el estudio de ecuaciones diferenciales, es de interés conocer la sensibilidad de las soluciones ante mínimas variaciones del campo vectorial que define la ecuación [ALS88]. Esto justifica el énfasis dado al análisis de la estructura topológica de las órbitas de un sistema. De hecho, un sistema será estructuralmente estable si todos los sistemas cercanos tienen estructuras orbitales topológicamente indistinguibles [Wen16].

En este capítulo usamos las herramientas de los capítulos previos para formalizar el concepto de estabilidad estructural, que acabamos de dar de forma cualitativa. Además, introducimos los sistemas Morse-Smale, los cuales tienen el conjunto no-errante más simple posible y a la vez son estructuralmente estables.

3.1. Definición

Hemos establecido que la estabilidad de un sistema tiene que ver con el comportamiento de la estructura de las órbitas de sistemas cercanos. Formalmente, definimos la cercanía entre dos sistemas diferenciables usando la topología C^r y comparamos la estructura de las órbitas usando las relaciones de equivalencia de la sección 1.3, i.e., conjugación topológica para difeomorfismos y equivalencia topológica para campos vectoriales. Esto se resume en la siguiente definición.

Definición 3.1.1 (Estabilidad estructural). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$. Decimos que f estructuralmente estable si existe una vecindad $\mathcal{V} \subset \text{Diff}^r(M)$ de f tal que todo mapa $g \in \mathcal{V}$ es topológicamente conjugado a f . Análogamente, sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Decimos que X es estructuralmente estable si existe una vecindad $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}^r(M)$ de X tal que todo campo $Y \in \mathcal{V}$ es topológicamente equivalente a X .

3.2. Sistemas dinámicos Morse-Smale

Después de definir estabilidad estructural, vamos a introducir un tipo de sistemas que satisfacen esta cualidad y son los de tipo Morse-Smale. Esta clase de sistemas se caracteriza por tener un número finito de elementos críticos (puntos fijos y periódicos), hiperbólicos y con intersección transversal de las variedades invariantes. Las dos últimas características son las que garantizan que las propiedades dinámicas persistan ante perturbaciones [PdM82].

Definición 3.2.1 (Difeomorfismo Morse-Smale). Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$. Decimos que f es Morse-Smale si

- (i) $\Omega(f)$ es finito (esto implica $\Omega(f) = \text{Per}(f)$ por la proposición 1.2.4),
- (ii) todos los puntos en $\text{Per}(f)$ son hiperbólicos,
- (iii) para cualquier par de puntos $x, y \in \text{Per}(f)$, las variedades estable e inestable, $W^s(x)$ y $W^u(y)$, tienen intersección transversal.

Definición 3.2.2 (Campo vectorial Morse-Smale). Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Decimos que X es Morse-Smale si

- (i) $\Omega(X)$ es la unión de un número finito de elementos críticos, singularidades x_1, \dots, x_I y órbitas cerradas $\gamma_1, \dots, \gamma_J$ de X ,
- (ii) todos los elementos críticos x_i, γ_j son hiperbólicos,
- (iii) para cualquier par de elementos críticos, las variedades estable e inestable correspondientes tienen intersección transversal.

Teorema 3.2.1. *El conjunto de difeomorfismos Morse-Smale es abierto en $\text{Diff}^r(M)$. Análogamente, el conjunto de campos vectoriales Morse-Smale es abierto en $\mathfrak{X}^r(M)$.*

3.3. Estabilidad estructural de sistemas dinámicos Morse-Smale

En esta sección vamos a ver que los sistemas Morse-Smale sobre una variedad m -dimensional, compacta y sin frontera M son estructuralmente estables. Para esto usamos resultados presentados en los capítulos 2 y 3 y seguimos la exposición del artículo original de Palis-Smale [PS70].

La idea de la demostración de la estabilidad de sistemas Morse-Smale se puede esbozar en los siguientes pasos:

1. establecer un orden parcial (*diagrama de fase*) entre los elementos críticos del sistema con el Lema de inclinación 2.5.1;
2. encontrar una vecindad del sistema original en la que todos los sistemas tengan exactamente el mismo tipo de elementos críticos y el mismo diagrama de fase, usando el teorema 3.2.1 y que los elementos críticos hiperbólicos persisten ante perturbaciones por el lema 2.6.1;
3. construir sistemas de coordenadas locales (familias tubulares) para los elementos críticos de forma tal que cualesquiera dos sistemas de la vecindad del paso anterior sean localmente equivalentes;
4. extender las equivalencias locales a una equivalencia global usando la compacidad de la variedad.

Iniciamos con un resultado que garantiza la existencia del orden postulado en el paso 1. Si $f \in \text{Diff}^r(M)$ es de tipo Morse-Smale, entonces $\Omega(f)$ es la unión de finitas órbitas periódicas Ω_j , con $1 \leq j \leq J$. De ahora en adelante, usamos la notación $W^s(\Omega_j) = \bigcup_{p \in \Omega_j} W^s(p)$ y $W^u(\Omega_j) = \bigcup_{p \in \Omega_j} W^u(p)$.

Proposición 3.3.1 (Diagrama de fase). *Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ de tipo Morse-Smale. Las órbitas periódicas $\Omega_j \subset \Omega(f)$ están parcialmente ordenadas por la relación $\Omega_i \preceq \Omega_j$ si y solo si $W^s(\Omega_i) \cap W^u(\Omega_j) \neq \emptyset$. El grafo inducido por este orden sobre $\Omega(f)$ se denomina diagrama de fase.*

Demostración. Para ver la reflexividad de \preceq fijamos $\Omega_i \subset \Omega(f)$ y $p \in \Omega_i$; entonces, $p \in W^s(\Omega_i) \cap W^u(\Omega_i)$ y $\Omega_i \preceq \Omega_i$. La transitividad se tiene del corolario 2.5.1.1 y la antisimetría por el corolario 2.5.1.2. Luego, \preceq es un orden parcial bien definido. \square

Observación. De ahora en adelante, consideramos un orden simple $\Omega_1 \leq \dots \leq \Omega_J$, consistente con el orden parcial. Así, Ω_1 es un atractor y Ω_J un repulsor.

Continuamos con el paso 2, para esto recordemos que el conjunto de difeomorfismos de tipo Morse-Smale es abierto y los puntos periódicos hiperbólicos se preservan ante perturbaciones. Esto permite enunciar el siguiente resultado, cuya prueba se puede encontrar en [Pal69].

Lema 3.3.2. *Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ de tipo Morse-Smale. Entonces, existe una vecindad $\mathcal{V} \subset \text{Diff}^r(M)$ tal que, para todo $g \in \mathcal{V}$, g es de tipo Morse-Smale, y existe un mapa $\rho : \text{Per}(f) \rightarrow \text{Per}(g)$ que preserva el índice y el orden dado por la proposición 3.3.1.*

Finalmente, desarrollamos los pasos 3 y 4, donde los resultados más importantes son el Teorema de existencia de familias tubulares 3.3.4 y el Teorema de Palis-Smale 3.3.8, respectivamente.

Definición 3.3.1 (Familia tubular). Una familia tubular T de $W^s(p) = T_0$ es una colección de subvariedades C^r disjuntas $\{T_y\}$ de M indexadas por $y \in N$, donde $N \subset W^u(p)$ es una vecindad de p , que cumple las siguientes propiedades

- (i) $V = V(T_0) = \bigcup_{y \in N} T_y$ es un abierto de M que contiene a T_0 ,
- (ii) $T_0 = T_p$,
- (iii) T_y interseca N transversalmente en el único punto y ,
- (iv) el mapa $\pi : V \rightarrow N$ que envía a T_y en y es continuo y la sección $\sigma : V \rightarrow \mathcal{G}(V)$ que envía $x \in T_y$ al espacio tangente de T_y en x es un mapa continuo de V en el fibrado Grasmanniano $\mathcal{G}(V)$.

Lema 3.3.3. *Sea $T = \{T_x\}$ una familia tubular para $W^s(\Omega_j)$ y $T_0 = \bigcup_{x \in \Omega_j} T_x$. Sea W una subvariedad C^r de M que interseca transversalmente a T_0 y $A \subset W$ un conjunto compacto de W . Suponga que $r_0 : U_0 \rightarrow W$ es una retracción continua de una vecindad U_0 de $\partial T_0 \cap A$ y cumple que*

- (i) *es C^r en cada T_x ,*
- (ii) *si $y \in T_x \cap W \cap U$, entonces $r_0^{-1}(y) \subset T_x$ y*
- (iii) *la familia $\{r_0^{-1}(y)\}$ satisface la condición (iv) de la definición 3.3.1.*

Entonces existe una retracción continua $r : U \rightarrow W$, donde U es una vecindad de $\bar{T}_0 \cap A$ tal que r satisface (i), (ii) y (iii) y r restringida a alguna vecindad de $\partial T_0 \cap A$ es r_0 .

Teorema 3.3.4 (Existencia de familias tubulares). *Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ de tipo Morse-Smale y sea $\Omega(f) = \bigcup \Omega_j$, donde Ω_j son las órbitas periódicas de $\Omega(f)$ simplemente ordenadas como se explicó antes. Entonces, existe un sistema invariante y compatible de familias tubulares $\{T^j\}$, donde cada T^j es una familia tubular de $W^s(\Omega_j)$. Así, $T_0^j = W^s(\Omega_j)$.*

Además, el mapa $\pi : \bigcup_{x \in N_j} T_x^j \rightarrow W^u(\Omega_j)$, definido como $\pi(T_x^j) = x = T_x^j \cap W^u(\Omega_j)$ es C^r en T_x^i , para todo x y $1 \leq i \leq j$.

Demostración. Denotamos como $T^j = \bigcup_{x \in N_j} T_x^j$, aun de ser necesaria una restricción de N_j . Procedemos por inducción definiendo T^1 como $T^1 = \{W^u(p) : p \in \Omega_1\}$. Ahora, suponemos que T^1, \dots, T^{j-1} construidos como indica el enunciado del teorema. Vamos a construir T^j . Dado $p \in \Omega_j$ de período n , elegimos un dominio fundamental D con $\partial D = S_E \cup S_I$. Queremos definir una retracción continua $\pi : U(D) \rightarrow W^u(p)$

usando un segundo proceso de inducción en $T^i \cap U(D)$ para $i = j - 1, \dots, 1$, tal que $\pi f^{-n} = f^{-n} \pi$ en una vecindad de S_E , las condiciones (i) y (ii) del lema 3.3.3 se cumplen para cada T^i , con $1 \leq i \leq j - 1$ y $\{\pi^{-1}(y)\}$ satisface la condición (iii) del mismo lema previo.

Después de construir la retracción, la familia tubular T^j se obtiene de la siguiente manera. Sea $N \subset W^u(p)$ una vecindad de $p \in \Omega_j$, con $\partial N = S_E$. Para cada $x \in N$ hay un único punto $y \in D \setminus S_E$ y un entero $k \geq 0$ tal que $x = f^{nk}(y)$. Luego, hacemos $T_x^j = f^{nk}(\pi^{-1}(y))$ y $T_p^j = W^s(p)$. Entonces, $\{T_x^j\}_{x \in N}$ es una familia tubular de $W^s(p)$. Esto es una consecuencia del Lema de inclinación 2.5.1. El hecho de que $\bigcup_{x \in N} T_x^j$ es abierto y cumple la condición (iv) de la definición 3.3.1 se sigue del Teorema de Hartman-Grobman 2.6.4.

Ahora, vamos a dar la idea de construcción de la retracción $\pi : U(D) \rightarrow W^u(p)$. Partiendo de $U(\partial T_0^{j-1} \cap S_E)$, se extiende a $U(T_0^{j-1} \cap S_E)$. Luego, aplicando f^{-n} , se induce una retracción en $U(T_0^{j-1} \cap S_I)$, la cual se puede extender del conjunto $U(T_0^{j-1} \cap S_E) \cup U(T_0^{j-1} \cap S_I)$ a $U(T_0^{j-1} \cap D)$. Luego, extendemos de $U(\partial T_0^{j-2} \cap S_E)$ a $U(T_0^{j-2} \cap S_E)$. Esto induce la retracción en $U(T_0^{j-2} \cap S_I)$ y la podemos extender desde $U(T_D^{j-1}) \cup U(T_0^{j-2} \cap S_E) \cup U(T_0^{j-2} \cap S_I)$ a $U(T^{j-2} \cap D)$. Este proceso se repite sucesivamente para T^i con $1 \leq i \leq j - 3$.

Formalmente, sea $\pi : T^{j-1} \cap U(S_E) \rightarrow W^u(p)$ dado por el lema 3.3.3, tomando $A = S_E$, $W = W^u(p)$, $T = T^{j-1}$, usando que $T^{j-1} \cap D$ es compacto y $\partial T_0 \cap A = \emptyset$. Dado que T^{j-1} es invariante y $f^{-n}(S_E) = S_I$, la composición $f^{-n} \pi$ define una retracción de $T^{j-1} \cap U(S_I)$ en $W^u(p)$, que también denotamos como π . Aquí, $U(S_I) = f^{-n}(U(S_E))$. Ahora, aplicamos nuevamente el lema 3.3.3 con $A = D$ para extender π a la retracción deseada de $T^{j-1} \cap U(D)$ en $T^{j-1} \cap D$.

Procedemos de manera análoga para extender π a $T^{j-2} \cap U(D)$ usando nuevamente el lema 3.3.3 y el hecho de que $\partial T_0^{j-2} \cap D \subset (T_0^{j-1} \cup T_0^j) \cap D$. Continuando este proceso con T^{j-2}, \dots, T^1 obtenemos la retracción π requerida. \square

Observación. Iterando f , el sistema $\{T^j\}$ obtenido en el teorema 3.3.4 puede extenderse para que sea f invariante. Dicho sistema se denota como $\{T^{j,s}\}$, mientras $\{T^{j,u}\}$ va a denotar un sistema análogo de familias tubulares para $W^u(\Omega_j)$. Por su parte, $T^{j,s}(x)$, $T^{j,u}(x)$ van a representar el elemento de las familias $\{T^{j,s}\}$, $\{T^{j,u}\}$, respectivamente, que contienen al punto x .

Observación. Sean $\{T^{j,s}\}$, $\{T^{j,u}\}$ para f como arriba. Por el teorema 3.2.1, existe una vecindad $\mathcal{V} \subset \text{Diff}^r(M)$ de f tal que para cada $g \in \mathcal{V}$ podemos construir sistemas compatibles e invariantes de familias tubulares $\{T_g^{j,s}\}$, $\{T_g^{j,u}\}$ para $W^s(\Omega_j(g))$, $W^u(\Omega_j(g))$. Usamos la convención $\{T_f^{j,s}\} = \{T^{j,s}\}$, $\{T_f^{j,u}\} = \{T^{j,u}\}$. Además, podemos asumir que los mapas $\phi_s(g) = S_g^{j,s}$ y $\phi_u(g) = S_g^{j,u}$, $g \in \mathcal{V}$, son continuos en f en subconjuntos compactos de $T^{j,s}$, $T^{j,u}$, donde $S_g^{j,s}$, $S_g^{j,u}$ son las secciones sobre el fibrado Grasmanniano del ítem (iv) de la definición 3.3.1 definidas por $\{T_g^{j,s}\}$ y $\{T_g^{j,u}\}$, respectivamente.

Lema 3.3.5. Sea $\{U_j : 1 \leq j \leq J\}$ una cubierta abierta de M y $\mathcal{V} \subset \text{Diff}^r(M)$ una vecindad de la función identidad, $id \in \text{Diff}^r(M)$. Entonces, existe una vecindad $\mathcal{V}' \subset \text{Diff}^r(M)$ de id tal que si $f \in \mathcal{V}'$ entonces existe una factorización de f de la forma $f = f_J \circ \cdots \circ f_1$, donde $f_j \in \mathcal{V}$ y $\text{supp } f_j \subset U_j$, para todo $1 \leq j \leq J$.

Proposición 3.3.6. Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$ de tipo Morse-Smale. Entonces, existen vecindades $\mathcal{V} \subset \text{Diff}^r(M)$ de f , $U_j(\Omega_j) \subset M$ y $K > 0$ tales que

- (i) $\{f^k(U_j)\}_{1 \leq j \leq J, 0 \leq k \leq K}$ es una cubierta de M ,
- (ii) para cada $g \in \mathcal{V}$, $1 \leq j \leq J$ y $0 \leq k \leq K$, $f^k(U_j) \subset T_f^{j,s} \cap T_f^{j,u} \cap T_g^{j,s} \cap T_g^{j,u}$,
- (iii) $T^{j,s}(x)$ y $T^{j,u}(y)$ se intersectan transversalmente en un único punto para cada $x, y \in f^k(U_j)$.

Demostración. Las colecciones $T_f^{j,s}$ y $T_f^{j,u}$ son familias tubulares de $W^s(\Omega_j)$ y $W^u(\Omega_j)$, respectivamente. Entonces, para cada $1 \leq j \leq J$, podemos elegir $U_j = U_j(\Omega_j)$ tales que (ii) y (iii) se cumplen para $k = 0$, \bar{U}_j , $T_f^{j,s}$ y $T_f^{j,u}$. Como $\Omega(f) = \bigcup \Omega_j$ y M es compacta, existe $K > 0$ tal que $\{f^k(U_j)\}_{1 \leq j \leq J, 0 \leq k \leq K}$ es una cubierta de M . Como $T_f^{j,s}$ y $T_f^{j,u}$ son invariantes, (i) y (ii) se cumplen para $0 \leq k \leq K$, $f^k(\bar{U}_j)$, $T_f^{j,s}$ y $T_f^{j,u}$. Finalmente, como $\bigcup_{0 \leq k \leq K} f^k(\bar{U}_j)$ es compacto, podemos utilizar la segunda observación del teorema 3.3.4 para obtener que existe una vecindad $\mathcal{V} \subset \text{Diff}^r(M)$ de f que satisface la proposición. \square

Proposición 3.3.7. Sea $\{f^k(U_j)\}$ la cubierta de M y $\mathcal{V} \subset \text{Diff}^r(M)$ la vecindad de f dadas por la proposición 3.3.6. Si $g \in \mathcal{V}$ y $\text{supp } gf^{-1} \subset f^k(U_j)$, para algunos j, k fijos, entonces existen homeomorfismos $\eta^s, \eta^u : M \rightarrow M$ tales que para todo $1 \leq i \leq J$ y $x \in M$

- (i) $\eta^s(T_f^{i,s}(x)) = T_f^{i,s}(x)$ y $\eta^s = id$ en $M \setminus U$,
- (ii) $\eta^u(T_g^{i,u}(x)) = T_g^{i,u}(x)$ y $\eta^u = id$ en $M \setminus U$,
- (iii) $\eta^u \circ \eta^s \circ f(x) = g(x)$,

donde, $U = f^k(U_j) \cup f^{k+1}(U_j)$.

Demostración. Como los sistemas de familias tubulares considerados son compatibles, basta con probar que existen homeomorfismos η^s, η^u que satisfacen las condiciones para $i = j$. En este caso, por la proposición 3.3.6, el mapa $\eta^s : U \rightarrow U$, definido como $\eta^s(x) = T_f^{j,s}(x) \cap g(T_g^{j,u}(f^{-1}(x)))$, está bien definido y es un homeomorfismo. De la misma manera, esto se cumple también para el mapa $\eta^u : U \rightarrow U$, dado por $\eta^u(x) = g(T_f^{j,s}(f^{-1}(x))) \cap T_g^{j,u}(x)$. Dado que $\text{supp } g \circ f^{-1} = \bar{V} \subset f^k(U_j)$, entonces $g = f$ y $g^{-1} = f^{-1}$ en $M \setminus W$, donde $W = V \cup f(V)$. Esto implica que $\eta^s = \eta^u = id$ en $U \setminus W$ y, por lo tanto, pueden extenderse a la identidad en $M \setminus U$.

A partir de las definiciones anteriores de η^s y η^u , es claro que $\eta^s(T_f^{j,s}(x)) = T_f^{j,s}(x)$ y

$\eta^u(T_g^{j,u}(x)) = T_g^{j,u}(x)$, para todo $x \in M$. De la misma manera, si $x \in U$, tenemos que $\eta^u \circ \eta^s \circ f(x) = g(T_f^{j,s}(x) \cap T_g^{j,u}(x)) = g(x)$ y, si $x \notin U$, esto se cumple trivialmente. Luego, $\eta^u \circ \eta^s \circ f = g$ en M . \square

Teorema 3.3.8 (Teorema de Palis-Smale para difeomorfismos). *Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$. Si f es Morse-Smale, entonces f es estructuralmente estable.*

Demostración. Sea $\{f^k(U_j)\}$ la cubierta dada por la proposición 3.3.6. Si $g \in \text{Diff}^r(M)$ está cerca de f , entonces, por el lema 3.3.5, $g \circ f^{-1}$ se puede factorizar como $g \circ f^{-1} = f_L \circ \cdots \circ f_1$, donde cada f_l está cerca de la identidad id y, para todo $1 \leq l \leq L$, se cumple $\text{supp} f_l \subset f^k(U_j)$ para algunos j, k , donde $1 \leq j \leq J$, $1 \leq k \leq K$. De esta manera, como el conjunto de difeomorfismos Morse-Smale es abierto en $\text{Diff}^r(M)$, entonces $f_l \circ \cdots \circ f_1 \circ f$ también es Morse-Smale, para todo $1 \leq l \leq L$. Note entonces que, para obtener el resultado principal, basta con probar que existe una conjugación entre $f_l \circ \cdots \circ f_1 \circ f$ y $f_{l-1} \circ \cdots \circ f_1 \circ f$. Por lo tanto, podemos suponer que g se puede escribir como $g = f_l \circ f$. Pero si g tiene esa forma, podemos escribirlo como $g = \eta^u \circ \eta^s \circ f$, donde η^s y η^u son los homeomorfismos dados por la proposición 3.3.7. Puesto que η^s y η^u preservan los elementos de las familias tubulares $\{T_f^{j,s}\}$ y $\{T_g^{j,u}\}$, respectivamente, es suficiente ver que existe una conjugación entre $\eta^s \circ f$ y f .

Sea $d = \eta^s \circ f$. Queremos construir una conjugación h entre f y d . Para esto, vamos a definir $h : M \rightarrow M$ de la siguiente manera, dado $x \in M$,

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d^n \circ f^{-n}(x).$$

Esta definición equivale a los siguientes casos

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in M \setminus \bigcup_{i \geq 0} f^i(U_j), \\ d^n \circ f^{-n}(x) & \text{si } x \in \bigcup_{i \geq 0} f^i(U_j) \text{ y } f^{-n}(x) \in M \setminus \bigcup_{i \geq 0} f^i(U_j), \\ T^{j,s}(x) \cap W^u(\Omega_j(g)) & \text{si } x \in W^u(\Omega_j). \end{cases}$$

Los dos primeros casos se dan directamente de la definición de η^s . Luego, para obtener la equivalencia, solo resta ver que $h(x) = T^{j,s}(x) \cap W^u(\Omega_j(g))$ para $x \in W^u(\Omega_j) \cap U_j$. Como $d = \eta^s \circ f$ y $\eta^s(T^{j,s}(x)) = T^{j,s}(x)$, $d^n \circ f^{-n}(T^{j,s}(x)) = T^{j,s}(x)$ y por tanto $h(T^{j,s}(x)) = T^{j,s}(x)$. Por otro lado, como $d = (\eta^u)^{-1} \circ g$, el conjunto de puntos límite de las sucesiones $\{d^n(y) : y \in U_j\}$ está contenido en $\bigcup_{i \leq j} W^u(\Omega_i(g))$. Luego, el conjunto de puntos límite de las sucesiones $\{d^n(f^{-n}(y)) : y \in U_j\}$ está contenido en $\bigcup_{i \leq j} W^u(\Omega_i(g)) \cap U_j = W^u(\Omega_j(g)) \cap U_j$. Esto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d^n \circ f^{-n}(x) = T^{j,s}(x) \cap W^u(\Omega_j(g)),$$

como queríamos probar.

Ahora, veamos que h está bien definida, $h \circ f = d \circ h$ y es un homeomorfismo.

Es claro que h está bien definida, pues está bien definida en $M \setminus W^u(\Omega_j)$ y para

$x \in W^u(\Omega_j)$ existe un único punto de intersección $T^{j,s}(x) \cap W^u(\Omega_j(g))$.

Además, para todo $x \in M$, $d \circ h \circ f^{-1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d^{n+1} \circ f^{-(n+1)}(x) = h(x)$. Luego, $h \circ f = d \circ h$.

La continuidad de h se sigue de la continuidad en los conjuntos $W^u(\Omega_i)$, $i \leq j$. Veamos que h es continua en $W^u(\Omega_j)$. De hecho, basta probarlo en $W^u(\Omega_j) \cap U_j$. Sea $x_m \in U_j$ una sucesión tal que $x_m \rightarrow x \in W^u(\Omega_j) \cap U_j$. Por un argumento previo, $h(T^{j,s}(x_m)) = T^{j,s}(x_m)$. Consideramos ahora los siguientes casos. Si $x_m \in W^u(\Omega_j)$, entonces $f^{-n}(x_m) \in U_j$ para todo $n \geq 0$. Si $x_m \notin W^u(\Omega_j)$, existe $y_m \in f^{-1}(U_j) \setminus U_j$, $n_m \geq 0$ tal que $f^{-n_m}(x_m) = y_m$. Así, $n_m \rightarrow \infty$ cuando $m \rightarrow \infty$ y $h(x_m) = d^{n_m}(y_m)$. Por un razonamiento similar al de antes, el conjunto de puntos límite de las sucesiones $\{d^n(y) : y \in U_j \cup f^{-1}(U_j)\}$ está contenido en $\bigcup_{i \leq j} W^u(\Omega_i(g))$. Por tanto, y combinando estos dos casos de ser necesario, el conjunto de puntos límite de $h(x_m)$ está contenido en $\bigcup_{i \leq j} W^u(\Omega_i(g)) \cap U_j = W^u(\Omega_j(g)) \cap U_j$. Entonces, $h(x_m) \rightarrow T^{j,s}(x) \cap W^u(\Omega_j(g))$, i.e., $h(x_m) \rightarrow h(x)$, luego h es continua en $W^u(\Omega_j)$.

La prueba de la continuidad de h en $W^u(\Omega_i)$, $i < j$, es similar. Teniendo en cuenta la compatibilidad de $\{T^{i,s}\}_{1 \leq i \leq J}$, podemos ver que $h(T^{i,s}(x)) = T^{i,s}(x)$ para $i \leq j$, pues se cumple para $T^{j,s}$. De la misma manera, si $x_m \rightarrow x \in W^u(\Omega_i)$, entonces el conjunto de puntos límite de $h(x_m)$ está contenido en $W^u(\Omega_i(g))$. Con estas dos condiciones, es posible concluir que h es continua en $W^u(\Omega_i)$, para todo $i < j$. En consecuencia, h es continua en M .

Finalmente, para ver que h es un homeomorfismo, consideramos el mapa $\tilde{h} : M \rightarrow M$, dado por $\tilde{h}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n \circ d^{-n}(x)$, para cada $x \in M$. Por una prueba completamente análoga a la anterior, \tilde{h} está bien definida y es continua. Además, desde las definiciones de h y \tilde{h} , es fácil verificar que $\tilde{h} \circ h = id = h \circ \tilde{h}$. Luego, h es un homeomorfismo de M . En conclusión, h es una conjugación entre d y f , que era lo que queríamos obtener. \square

Para finalizar esta sección, vamos a enunciar el teorema de estabilidad estructural para campos vectoriales Morse-Smale. Así mismo, explicamos cómo se adapta a este caso la prueba dada para difeomorfismos de este mismo resultado.

Teorema 3.3.9 (Teorema de Palis-Smale para campos vectoriales). *Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Si X es Morse-Smale, entonces X es estructuralmente estable.*

Demostración. Note que los pasos 1-4 mencionados antes siguen aplicando similarmente. La única diferencia con el caso de difeomorfismos es que debemos extender la definición de familias tubulares a órbitas cerradas de un flujo. Como de costumbre, esto se hace mediante el mapa de Poincaré, que reduce el problema a encontrar una familia tubular para un punto fijo de un difeomorfismo.

En todo lo demás, la prueba es completamente análoga a la expuesta para difeomorfismos. \square

Capítulo 4

De lo global a lo local: linealización de flujos holomorfos

En el último capítulo de este trabajo seguimos tratando el problema de la descripción cualitativa de las órbitas de sistemas dinámicos. Más específicamente, queremos introducir un tipo de sistema que no se ha discutido hasta el momento: los flujos holomorfos (sección 4.1). Este es un tipo de sistema dinámico diferenciable, sobre el cual queremos extender algunas herramientas usadas en capítulos anteriores para difeomorfismos y campos vectoriales en variedades reales, con el objetivo de obtener información sobre la estructura de sus órbitas. Dentro de estas técnicas, resulta nuevamente de gran utilidad contar con una noción de hiperbolicidad (sección 4.2) y de linealización (sección 4.3). Uniendo estos conceptos, explicamos en la sección 4.4 la prueba del Teorema de Guckenheimer, un resultado muy relevante con respecto a la estructura de las órbitas de un flujo holomorfo y su estabilidad. Este es un análogo al Teorema de Hartman-Grobman para flujos holomorfos.

4.1. Flujos holomorfos

En esta sección introducimos el concepto de flujo holomorfo con base en la definición 1.1.5. En este caso, tendremos una acción holomorfa del grupo \mathbb{C} sobre una variedad compleja M . Asimismo, relacionamos los flujos holomorfos con las ecuaciones diferenciales y las foliaciones holomorfas. Finalmente, mostramos que existen flujos reales contenidos en flujos holomorfos.

Definición 4.1.1 (Flujo holomorfo). Un flujo holomorfo es una tripleta (M, \mathbb{C}, Φ) , donde M es una variedad compleja conexa de dimensión compleja m y $\Phi : \mathbb{C} \times M \rightarrow M$ es una función holomorfa que satisface

(i) $\Phi(0, z) = z$, para todo $z \in M$.

(ii) $\Phi(w_1, \Phi(w_2, z)) = \Phi(w_1 + w_2, z)$, para todo $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $z \in M$.

Podemos enunciar un caso análogo al dado para flujos reales en el ejemplo 1.1.2.

Ejemplo 4.1.1 (Flujo holomorfo lineal). Tomamos $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ una matriz compleja de tamaño $n \times n$. Definimos la función $\Phi : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por $\Phi(w, z) = e^{wA}z$. De aquí podemos concluir que $\Phi(0, z) = z$, para todo $z \in \mathbb{C}^n$ y $\Phi(w_1 + w_2, z) = e^{(w_1+w_2)A}z = e^{w_1A}e^{w_2A}z = e^{w_1A}\Phi(w_2, z) = \Phi(w_1, \Phi(w_2, z))$, para todo $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}^n$. Luego, Φ define un flujo holomorfo en \mathbb{C}^n .

Tal como se discutió en el contexto real (ver ejemplo 1.1.2), el caso anterior está relacionado con la ecuación diferencial $z' = Az$ en \mathbb{C}^n y es fundamental para el desarrollo de este capítulo. Además, motiva a relacionar las ecuaciones diferenciales holomorfas con flujos holomorfos, para obtener un análogo de la proposición 1.1.1 y el teorema 1.1.2. Este proceso se discute a continuación.

Proposición 4.1.1. *Sea M una variedad compleja m -dimensional y Φ un flujo holomorfo en M . Entonces, existe un campo vectorial holomorfo X en M tal que las funciones $\Phi(\cdot, z) : \mathbb{C} \rightarrow M$ son superficies integrales de X a través de z , para todo $z \in M$.*

Demostración. Fijando $z \in M$, obtenemos una superficie de Riemann parametrizada en M , dada por $\Phi(\cdot, z) : \mathbb{C} \rightarrow M$. Sea $X(z)$ el vector tangente a esta superficie en $w = 0$, es decir,

$$X(z) = \left. \frac{d}{dw} \right|_{w=0} \Phi(w, z).$$

Luego, X es un campo vectorial holomorfo en M . Si $X(z) = 0$, entonces $\Phi(w, z) = z$, para todo $w \in \mathbb{C}$ y, como en el caso real, decimos que z es una singularidad del campo. Si $X(z) \neq 0$, la superficie a través de z , u órbita de z bajo el flujo Φ , tiene dimensión compleja 1 (dimensión real 2). \square

Por otro lado, si X es un campo vectorial holomorfo en una variedad compleja conexa M , entonces podemos asociar la ecuación diferencial holomorfa $z' = X(z(w))$, $z \in M$, $w \in B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{C}$. Las respectivas soluciones definen un flujo holomorfo local en M . Si podemos extender las soluciones locales de X a todo $w \in \mathbb{C}$, es posible obtener un flujo holomorfo. En tal caso, el campo X se denomina completo. El siguiente resultado es análogo al teorema 1.1.2 y muestra un escenario donde la condición anterior se puede garantizar.

Teorema 4.1.2. *Sea M una variedad compleja conexa y compacta, y X un campo vectorial holomorfo en M . Entonces, X es completo. En particular, es posible definir el flujo holomorfo $\Phi : \mathbb{C} \times M \rightarrow M$ asociado a X . Es decir, $\Phi(0, z) = z$ y $\frac{\partial}{\partial w} \Phi(w, z) = X(\Phi(w, z))$, para todo $z \in M$, $w \in \mathbb{C}$.*

Si X es un campo vectorial completo, las superficies integrales son conocidas.

Teorema 4.1.3. *Sea M una variedad compleja conexa y X un campo vectorial holomorfo completo en M . Las órbitas no singulares de X son biholomorfas a \mathbb{C} , $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ o $\mathbb{T} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$.*

Note que, cuando un campo vectorial X es completo y este no se anula en M , las trayectorias solución resultan ser curvas analíticas parametrizadas por \mathbb{C} (superficies de Riemann), que son subvariedades de M . Estas curvas son disjuntas a pares y por cada punto $p \in M$ pasa una única trayectoria de X . Aunque, en general, una variedad compleja M puede no admitir campos vectoriales holomorfos globales y, aun si admite, estos podrían no ser completos, el objetivo de descomponer la variedad en una unión disjunta de subvariedades de la misma dimensión –que se ven localmente como la solución de una ecuación diferencial– puede implementarse mediante el concepto de foliación [LS97]. Si bien no vamos a profundizar en este concepto, lo introducimos como herramienta de lenguaje.

Definición 4.1.2 (Foliación holomorfa por curvas). Sea M una variedad compleja conexa m -dimensional. Una foliación holomorfa por curvas \mathcal{F} de M es una descomposición en subvariedades complejas conexas disjuntas $\{\mathcal{L}\}_{\alpha \in A}$, llamadas *hojas* de la foliación \mathcal{F} , inmersas en M , tales que

- (i) Para todo $p \in M$, existe una única subvariedad \mathcal{L}_p de la descomposición que contiene a p (llamada *hoja por p*).
- (ii) Para todo $p \in M$, existe una carta holomorfa de M (llamada *carta distinguida de \mathcal{F}*), (φ, U_p) , $p \in U_p$, $\varphi : U_p \rightarrow \varphi(U_p) \subset \mathbb{C}^m$, tal que, $\varphi(U_p) = P \times Q$, donde P y Q son polidiscos abiertos de \mathbb{C} y \mathbb{C}^{m-1} , respectivamente.

Definición 4.1.3 (Foliación holomorfa singular por curvas). Sea M una variedad compleja conexa. Una foliación holomorfa singular por curvas \mathcal{F} de M es una foliación holomorfa por curvas de $M \setminus V$, donde V es una subvariedad analítica de M de codimensión mayor que uno.

Cerramos esta sección señalando una construcción importante sobre flujos holomorfos que será utilizada a lo largo del capítulo. Esta consiste en encontrar flujos reales que estén contenidos en un flujo holomorfo dado.

Ejemplo 4.1.2. Sea M una variedad compleja conexa y $\Phi : \mathbb{C} \times M \rightarrow M$ un flujo holomorfo. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, podemos definir la función $\Phi_\alpha : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, dada por $\Phi_\alpha(t, z) = \Phi(t\alpha, z)$, para cada $t \in \mathbb{R}$ y $z \in M$. Es claro que la función Φ_α satisface las condiciones de la definición 1.1.3 y, por lo tanto, es un flujo real contenido en el flujo holomorfo Φ .

4.2. Hiperbolicidad

En vista de la utilidad del concepto de hiperbolicidad para el análisis de la estabilidad de flujos reales, que se explicó ampliamente en los capítulos anteriores, nos gustaría tener un análogo para flujos holomorfos. En esta sección, haciendo un paralelo con el caso real, partimos de flujos holomorfos lineales para construir una definición adecuada de singularidad hiperbólica que luego pueda extenderse a flujos holomorfos en general.

Consideramos la ecuación diferencial $z' = Az$, con $z \in \mathbb{C}^n$, del ejemplo 4.1.1. Vamos a suponer que A es diagonal e invertible, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Esta suposición no implica una restricción muy fuerte y será justificada más adelante. Denotamos como Φ al flujo inducido por la ecuación diferencial. Ahora, usando el ejemplo 4.1.2, consideramos los números $\alpha_j = 2\pi i/\lambda_j$ y sus flujos reales asociados $\Phi_{\alpha_j} : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, con $1 \leq j \leq n$, que están dados por $(t, (z_1, \dots, z_n)) \mapsto \Phi_{\alpha_j}(t, (z_1, \dots, z_n)) = (e^{t\lambda_1\alpha_j} z_1, \dots, e^{t2\pi i} z_j, \dots, e^{t\lambda_n\alpha_j} z_n)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Luego, para cada $1 \leq j \leq n$, el flujo real asociado Φ_{α_j} deja invariante al cilindro $\Gamma_j = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| = 1\}$. Más aún, el círculo $\gamma_j = (0, \dots, z_j, \dots, 0) \cap \Gamma_j$, con $z_j \in \mathbb{C}$, es una órbita cerrada de período 1 del flujo real Φ_{α_j} . Por lo tanto, podemos asociar a la órbita γ_j su mapa de Poincaré, que está dado por

$$(z_1, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_n) \mapsto (e^{\lambda_1\alpha_j} z_1, \dots, \hat{z}_j, \dots, e^{\lambda_n\alpha_j} z_n),$$

donde la notación \hat{z}_j indica que la componente z_j no se incluye. Note que el mapa de Poincaré tiene valores propios $\{e^{\lambda_1\alpha_j}, \dots, e^{\lambda_n\alpha_j}\} = \{e^{2\pi i\lambda_1/\lambda_j}, \dots, e^{2\pi i\lambda_n/\lambda_j}\}$. Para que γ_j sea una órbita cerrada hiperbólica, según la definición 2.2.4, debe ocurrir que ninguno de estos valores propios esté en el círculo unitario. Haciendo este mismo proceso para cada eje z_j , con $1 \leq j \leq n$, podemos obtener una definición de hiperbolicidad para la singularidad $0 \in \mathbb{C}^n$ de Φ , que además es la única, pues todos los λ_j son distintos de cero.

Definición 4.2.1 (Flujo lineal holomorfo hiperbólico). Sea Φ el flujo lineal holomorfo inducido por la ecuación $z' = Az$, donde $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ es una matriz diagonal como en (4.1), tal que $\lambda_j \neq 0$, para todo $1 \leq j \leq n$. Decimos que Φ es hiperbólico si $\lambda_j/\lambda_k \notin \mathbb{R}$ para todo $j \neq k$.

Observación. Note que si la matriz A induce un flujo lineal holomorfo hiperbólico, entonces todos los valores propios son \mathbb{R} -linealmente independientes dos a dos; en particular, son no nulos y distintos entre sí. Esto justifica la suposición de que A es diagonalizable e invertible.

Bajo un razonamiento análogo al desarrollado en la sección 2.2, podemos extender esta definición a singularidades de campos vectoriales holomorfos.

Definición 4.2.2 (Singularidad hiperbólica de un campo vectorial holomorfo). Sea M una variedad compleja conexa, X un campo vectorial holomorfo en M y $p \in M$ una singularidad de X , i.e., $X(p) = 0$. Decimos que p es una singularidad hiperbólica si la diferencial $DX_p : T_pM \rightarrow T_pM$ induce un flujo lineal holomorfo hiperbólico. Es decir, si los valores propios de DX_p son \mathbb{R} -linealmente independientes dos a dos.

4.3. Linealización

En esta y la siguiente sección buscamos un análogo para flujos holomorfos de los enfoques y resultados discutidos en la sección 2.6 sobre campos vectoriales reales. Más específicamente, queremos adaptar la estrategia de linealización a un campo vectorial holomorfo cerca de una singularidad. Note que, al ser un problema local, podemos restringirnos a campos vectoriales holomorfos en \mathbb{C}^n con una singularidad aislada en el origen.

Tomemos entonces X un campo vectorial holomorfo en \mathbb{C}^n con una singularidad aislada en el origen. Por otro lado, supongamos que $h : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un biholomorfismo, entonces h actúa en el espacio de campos vectoriales holomorfos por la conjugación γ_h , dada por $\gamma_h(X)(x) = Dh_{h^{-1}(x)}X(h^{-1}(x))$. Si existe h definido en una vecindad del origen tal que $\gamma_h(X)$ induce un flujo holomorfo lineal diagonal, decimos que h es una linealización del campo X .

Vamos a enunciar dos resultados clásicos sobre linealización, que son los teoremas de Poincaré y Siegel. Pero antes, debemos introducir algunas definiciones.

Definición 4.3.1 (Envolvente convexa). Considere $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Definimos la envolvente convexa de z_1, \dots, z_n como el conjunto

$$\text{conv}(z_1, \dots, z_n) = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \sum_{j=1}^n c_j z_j, \text{ donde } c_j \in \mathbb{R}, c_j \geq 0 \text{ y } \sum_{j=1}^n c_j = 1 \right\}.$$

Definición 4.3.2 (Dominios de Poincaré y Siegel). Considerando el conjunto \mathbb{C}^n , definimos el dominio de Poincaré como el conjunto

$$\mathcal{P}(n) = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : 0 \notin \text{conv}(z_1, \dots, z_n)\}.$$

Análogamente, definimos el dominio de Siegel como el conjunto

$$\mathcal{S}(n) = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : 0 \in \text{conv}(z_1, \dots, z_n)\}.$$

Es claro que el complemento del dominio de Poincaré $\mathcal{P}(n)$ en \mathbb{C}^n es el dominio de Siegel $\mathcal{S}(n)$.

Los teoremas de Poincaré y Siegel garantizan la existencia de linealizaciones en singularidades aisladas de campos vectoriales holomorfos, teniendo en cuenta el comportamiento de los valores propios de la parte lineal en la singularidad. La prueba es constructiva y se basa en encontrar la linealización mediante el uso de series formales y luego verificar su convergencia (ver [ALS88]).

Teorema 4.3.1 (Teorema de Poincaré). *Sea X un campo vectorial holomorfo en \mathbb{C}^n con una singularidad hiperbólica en 0 . Sea $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ el conjunto de valores propios de DX_0 y supongamos que Λ pertenece al dominio de Poincaré, $\Lambda \in \mathcal{P}(n)$. Si ninguna de las relaciones (llamadas de resonancia),*

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^n k_j \lambda_j, \quad k_j \in \mathbb{Z}^+, \quad \sum_{j=1}^n k_j \geq 2, \quad k = 1, \dots, n,$$

ocurre, entonces X tiene una linealización en 0 . Más precisamente, X es biholomórficamente equivalente a DX_0 en un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ de 0 .

Teorema 4.3.2 (Teorema de Siegel). *Sea X un campo vectorial holomorfo en \mathbb{C}^n con una singularidad hiperbólica en 0 . Sea $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ el conjunto de valores propios de DX_0 y supongamos que Λ pertenece al dominio de Siegel, $\Lambda \in \mathcal{S}(n)$. Luego, existe un conjunto $T \subset \mathcal{S}(n)$ de medida de Lebesgue cero tal que, si $\Lambda \in \mathcal{S}(n) \setminus T$, entonces X tiene una linealización en 0 . Más precisamente, X es biholomórficamente equivalente a DX_0 en un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ de 0 .*

Los resultados anteriores implican la existencia una equivalencia biholomorfa local en las órbitas del flujo con respecto a las órbitas del flujo de la parte lineal. Teniendo en cuenta esta linealización, nos gustaría desarrollar una noción de estabilidad local de flujos holomorfos. Sin embargo, la equivalencia biholomorfa es muy restrictiva para tratar perturbaciones. Por ejemplo, esta equivalencia exige que los valores propios de las partes lineales de los flujos sean iguales, lo cual no se verifica en ninguna vecindad del flujo. Por lo tanto, debemos considerar en su lugar una equivalencia topológica, tal como la introducida en la definición 1.3.3, y que solo tenga en cuenta la estructura topológica de las órbitas. Este proceso se lleva a cabo en la siguiente sección.

4.4. Estabilidad local: Teorema de Guckenheimer

En esta sección discutimos la prueba del Teorema de Guckenheimer en [Guc72], que es el punto culminante del presente trabajo. Como se mencionó antes, este es un resultado de estabilidad local, análogo al Teorema de Hartman-Grobman 2.6.3, pero para flujos holomorfos.

Más específicamente, el Teorema de Guckenheimer dice que si un flujo holomorfo tiene una singularidad hiperbólica y cuya parte lineal tiene valores propios en el dominio de Poincaré, entonces el flujo es localmente estructuralmente estable. Note que, al ser un resultado local, podemos restringirnos al caso de un flujo lineal holomorfo hiperbólico en \mathbb{C}^n cuyo espectro está en el dominio de Poincaré. Con esto, la prueba se puede bosquejar en los siguientes pasos:

1. mostrar que la foliación por curvas asociada al flujo es transversal a las esferas $S_r = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = r\}$, luego, la intersección de esta foliación con la esfera S_r es una foliación por curvas de dimensión 1 (reales) de S_r , que se puede inducir por un campo vectorial real X_r de S_r ;
2. probar que el campo vectorial X_r en S_r del paso anterior es Morse-Smale y, por lo tanto, estructuralmente estable;
3. extender la equivalencia topológica de S_r a todo \mathbb{C}^n en el caso de perturbaciones lineales o a una vecindad del origen adecuada en el caso de perturbaciones holomorfas (teorema 4.4.3).

Iniciamos con el paso 1, no sin antes anotar que la idea de flujo transversal a las esferas ya había sido usada previamente para flujos lineales reales, como se señaló en el ejemplo 2.3.1.

Lema 4.4.1. *Sea $X(z) = Az$ un campo vectorial lineal holomorfo en \mathbb{C}^n , donde $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ es una matriz diagonal como en (4.1) con valores propios en el dominio de Poincaré, i.e., $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{P}(n)$. Entonces, la foliación por curvas integrales de X es transversal a cada una de las esferas S_r dadas por $S_r = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = r\}$, con $r > 0$.*

Demostración. Fijamos S_r y $z \in S_r$. Si una curva integral de X no es transversal a S_r en z , entonces $\alpha X(z) \in T_z S_r$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Identificando $T_z \mathbb{C}^n$ con \mathbb{C}^n , podemos ver que el producto interno real entre $\alpha X(z)$ y una normal a S_r en z es

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^n \alpha \lambda_j |z_j|^2 \right).$$

Si $\alpha X(z) \in T_z S_r$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^n \alpha \lambda_j |z_j|^2 \right) = 0,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Esto implica que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 = 0.$$

Pero si $z \neq 0$, esta suma es un múltiplo positivo de un elemento en $\text{conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Luego, como $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{P}(n)$, entonces $0 \notin \text{conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 \neq 0.$$

Por lo tanto, S_r es transversal a la foliación por curvas integrales de X . □

Una consecuencia del lema es que la intersección de las curvas integrales de la foliación por curvas de X con una esfera S_r define una foliación orientable 1-dimensional de S_r . Esta foliación queda definida por un campo vectorial real no-nulo X_r en S_r . Vamos a seguir con el paso 2, probando que dicho campo es Morse-Smale.

Lema 4.4.2. *Sea $X(z) = Az$ un campo vectorial lineal holomorfo en \mathbb{C}^n , donde $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ es una matriz diagonal como en (4.1) con valores propios en el dominio de Poincaré, i.e., $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{P}(n)$. Si $0 \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad hiperbólica, entonces el campo vectorial X_r construido antes es Morse-Smale.*

Demostración. Como A es diagonal, entonces la intersección de cada eje coordenado con S_r es una órbita cerrada de X_r . Por otro lado, supongamos que $\gamma \subset S_r$ es una órbita cerrada de X_r que no es la intersección con un eje coordenado. Como $0 \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad hiperbólica, entonces $\lambda_j/\lambda_k \notin \mathbb{R}$, para todo $1 \leq j < k \leq n$; en particular, $\lambda_j/\lambda_k \notin \mathbb{Q}$, para todo $1 \leq j < k \leq n$, y toda curva integral del campo vectorial X que no se encuentra contenida en un eje coordenado es biholomorfa a \mathbb{C} . Por lo tanto, γ es la frontera de un disco D contenido en una curva integral de X . Luego, la función de distancia al origen es constante en $\gamma = \partial D$ y en consecuencia tiene un punto crítico D . Sin embargo, esto contradice que esta curva integral sea transversal a las esferas, como se probó en el lema 4.4.1. Concluimos que las únicas órbitas cerradas de X_r están en los ejes coordenados.

Ahora, vamos a ver cómo es el conjunto no-errante de X_r . Supongamos que $z, \tilde{z} \in S_r$ están en una misma curva integral de X_r que no es una órbita cerrada. Luego, z no está en un eje coordenado y podemos elegir índices k, l tales que $z_k z_l \neq 0$. Además, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $\tilde{z} = e^{wA} z$, i.e., $\tilde{z}_j = e^{w\lambda_j} z_j$. Si z está cerca de \tilde{z} , entonces w está cerca de $2\pi ip/\lambda_k$ y $2\pi iq/\lambda_l$, para algunos $p, q \in \mathbb{Z}$. Como λ_k, λ_l son \mathbb{R} -linealmente independientes, entonces w está cerca de cero. Por lo tanto, dado $z \in S_r$ tal que z no está en una órbita cerrada de X_r , existe una vecindad $U \subset S_r$ de z tal que la curva integral de X_r que pasa por z tiene intersección conexa con U . En otras palabras, z es un punto errante. Así, el conjunto $\Omega(X_r)$ es una unión finita de órbitas cerradas.

Lo siguiente es probar que cada uno de los elementos críticos del campo X_r es hiperbólico. Teniendo en cuenta los resultados previos, los únicos elementos críticos son las órbitas cerradas contenidas en los ejes. Pero, como el origen es una singularidad hiperbólica para el campo holomorfo X y esta definición se construyó en la sección 4.2 precisamente usando los mapas de Poincaré de estas órbitas cerradas, es inmediato que cada una de ellas es hiperbólica.

Finalmente, vamos a ver que las variedades estables e inestables de las órbitas cerradas de X_r tienen intersección transversal. Llamamos γ_j , con $1 \leq j \leq n$ a la órbita cerrada contenida en el eje z_j , respectivamente. Se puede ver que las variedades estable e inestable de una órbita cerrada son subespacios lineales generados de ejes coordenados intersectados con S_r . Dado que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{P}(n)$, podemos suponer –reordenando y normalizando en caso de ser necesario– que los valores propios están ordenados tal que $\pi/2 < \arg(\lambda_1) < \dots < \arg(\lambda_n) < 3\pi/2$. De esta manera,

$$W^s(\gamma_j) = \left(\bigoplus_{l \geq j} e_l \right) \cap S_r \quad \text{y} \quad W^u(\gamma_j) = \left(\bigoplus_{l \leq j} e_l \right) \cap S_r,$$

donde los e_l , con $1 \leq l \leq n$ son los generadores canónicos de \mathbb{C}^n . Esto muestra que $W^s(\gamma_j)$ y $W^u(\gamma_k)$ se intersectan transversalmente para todo $1 \leq j, k \leq n$. Hemos demostrado que el campo X_r satisface (i), (ii) y (iii) de la definición 3.2.2. Luego, X_r es un campo Morse-Smale. \square

Finalmente, procedemos a la prueba del Teorema de Guckenheimer.

Teorema 4.4.3 (Teorema de Guckenheimer). *Sea Φ el flujo holomorfo definido por $X(z) = Az$ en \mathbb{C}^n , donde $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ es una matriz diagonal con valores propios en el dominio de Poincaré, i.e., $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{P}(n)$. Si $0 \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad hiperbólica, entonces el flujo Φ es globalmente estructuralmente estable con respecto a perturbaciones lineales y localmente estructuralmente estable con respecto a perturbaciones holomorfas.*

Demostración. El Teorema de Palis-Smale 3.3.9 implica que el campo X_1 construido previamente es estructuralmente estable. Si \tilde{X} es un campo vectorial lineal holomorfo cerca de X , \tilde{X}_1 estará C^1 cerca de X_1 . Nuevamente, por el teorema 3.3.9, existe una equivalencia topológica $h_1 : S_1 \rightarrow S_1$ entre X_1 y \tilde{X}_1 . Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que todos los valores propios de αA y $\alpha \tilde{A}$ tienen parte real negativa. Considere los flujos reales Φ_α y $\tilde{\Phi}_\alpha$, asociados a los flujos holomorfos Φ y $\tilde{\Phi}$, respectivamente. Para $t \in \mathbb{R}$, definimos $R_t = \Phi_\alpha^t(S_1) = \Phi_\alpha(t, S_1) = \Phi(t\alpha, S_1)$ y $\tilde{R}_t = \tilde{\Phi}_\alpha^t(S_1) = \tilde{\Phi}_\alpha(t, S_1) = \tilde{\Phi}(t\alpha, S_1)$. Luego, R_t y \tilde{R}_t forman familias disjuntas de esferas cuya unión es $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ y que se contraen uniformemente a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Definimos $h : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ como

$$h(0) = 0 \quad \text{y} \quad h|_{R_t} = \tilde{\Phi}_\alpha^t \circ h_1 \circ \Phi_\alpha^{-t} : R_t \rightarrow \tilde{R}_t.$$

Dado que $\Phi_\alpha^{-t}(R_t) = S_1$, h está bien definida. Es claro que h es un homeomorfismo y envía órbitas de Φ en órbitas de $\tilde{\Phi}$. Esto implica que el flujo Φ es globalmente estructuralmente estable ante perturbaciones lineales.

Por otro lado, una perturbación holomorfa \hat{X} de X suficientemente cercana induce una foliación por curvas que también es transversal a las esferas S_r para algún $r > 0$ suficientemente pequeño. Asimismo, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\Phi(t\alpha, S_r)$ y $\hat{\Phi}(t\alpha, S_r)$ se contraen uniformemente a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Luego, es posible aplicar el mismo argumento previo en una vecindad adecuada del origen, iniciando con el campo X_δ , con $0 < \delta < r$ suficientemente pequeño, en lugar de X_1 . Así, Φ es localmente estructuralmente estable bajo perturbaciones holomorfas. \square

Bibliografía

- [ALS88] V.I. Arnold, M. Levi y J. Szücs: *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 250. Springer, 2nd edición, 1988.
- [BS02] Michael Brin y Garrett Stuck: *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [Cal98] Omegaer Calvo: *Sistemas lineales complejos*. En *IV Escuela de Verano de Geometría y Sistemas Dinámicos, CIMAT, Guanajuato, México, 1997*, volumen 21 de *Aportaciones matemáticas: Comunicaciones*, Ciudad de México, 1998. Sociedad Matemática Mexicana.
- [CLN85] Cesar Camacho y Alcides Lins Neto: *Geometric Theory of Foliations*. Birkhäuser Boston, 1ª edición, 1985.
- [GMOB89] Xavier Gómez-Mont y Laura Ortiz-Bobadilla: *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*. Sociedad Matemática Mexicana, Ciudad de México, 1989.
- [Guc72] John Guckenheimer: *Hartman's theorem for complex flows in the Poincaré domain*. *Compositio Mathematica*, 24(1):75–82, 1972.
- [HPS77] M.W. Hirsch, C.C. Pugh y M. Shub: *Invariant manifolds*. Lecture Notes in Mathematics 583. Springer, 1ª edición, 1977.
- [HS74] Morris W. Hirsch y Stephen Smale: *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.
- [HSD13] Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney: *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 3ª edición, 2013.
- [KH95] Anatole Katok y Boris Hasselblatt: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1995.
- [LS97] Alcides Lins Neto y Bruno Scárdua: *Introdução à Teoria das Folheações Algébricas Complexas*. En *Edições 21 CBM*, Rio de Janeiro, 1997. IMPA.

- [Mun00] James Munkres: *Topology*. Prentice Hall, 2ª edición, 2000.
- [Pal69] J. Palis: *On Morse-Smale dynamical systems*. *Topology*, 8(4):385–404, 1969.
- [PdM82] Jacob Palis y Welington de Melo: *Geometric Theory of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1982.
- [Per06] Lawrence Perko: *Differential Equations and Dynamical Systems, Third Edition*. Springer, 3ª edición, 2006.
- [PS70] J. Palis y S. Smale: *Structural stability theorems*. En *Global Analysis*, volumen 14 de *Proc. Symp. in Pure Math.* American Math. Soc., 1970.
- [Rob95] Clark Robinson: *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1995.
- [Sma67] S. Smale: *Differentiable dynamical systems*. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73(6):747–817, 1967.
- [Sot20] J. Sotomayor: *On Maurício M. Peixoto and the arrival of Structural Stability to Rio de Janeiro, 1955*. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 92(1), 2020.
- [Wen16] Lan Wen: *Differentiable Dynamical Systems: An Introduction to Structural Stability and Hyperbolicity*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2016.