Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

APROXIMACIONES DÉBILES DE PROCESOS DE RIESGO CON RECLAMOS DE COLA PESADA

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Probabilidad y Estadística

Presenta

Lic. José Daniel Maldonado Núñez

Directores de Tesis:

Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska

Dr. Ehyter Matías Martín González

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto., Noviembre de 2020.

A mis padres y hermano

Agradecimientos

Agradezco al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), por la oportunidad de pertencer a esta institución y el apoyo que siempre me brindó. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico con una beca de maestría. A mis asesores de tesis, Dra. Ekaterina Todorova y Dr. Ehyter Martín, por todo el aprendizaje y experiencia que me compartieron durante la elaboración de este trabajo, por ser unos excelentes guías y sobre todo por mostrarme la gran calidad de persona y profesionista que son. A mis sinodales, Dr. Antonio Murillo y Dr. José Luis Perez por sus comentarios y observaciones que fueron de gran aporte. A mi familia, Pedro Maldonado, Maximina Nuñez y Alfredo Maldonado por ser mi principal motivación para cumplir este objetivo. Por último, a mis amigos, que volvieron más agradable mi estancia y tiempo en la maestría.

Resumen

En este trabajo se aborda el problema de la probabilidad de ruina para un proceso de riesgo de renovación con reclamos con cola de variación regular. Este problema ha sido ampliamente estudiado en el caso que se tiene un horizonte infinito, es decir la probabilidad de que acurra la ruina en algún momento, además bajo el supuesto de que los reclamos llegan de acuerdo a una variable aleatoria Poisson. Los resultados presentados en este trabajo se enfocan en estudiar aproximaciones de la probabilidad de ruina en un horizonte finito, que en general es más complicada de calcular. También se presentan resultados importantes de Teoría de Valores Extremos, los cuales permiten determinar en qué casos es posible aplicar las aproximaciones estudiadas, utilizando bases de datos. Por último se muestran ejemplos en los cuales se aplica a detalle la metodología estudiada.

Palabras Clave

Teoría de riesgo, proceso de riesgo, proceso α-estable, convergencia débil, espacio de Skorohod, dominios de atracción estable, probabilidad de ruina.

Índice

Introducción

Pensemos en una empresa que se dedica al aseguramiento de bienes. Los asegurados pagan primas por los seguros en ciertos periodos de tiempo y a su vez la empresa recibe reclamos de forma aleatoria. Suponemos que las reclamaciones se producen según un proceso puntual $N = (N(t) : t > 0)$, también que las reclamaciones $(Y_k : k \in \mathbb{N})$ forman una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas con $E[Y_k] = \mu > 0$, y además que el capital inicial de la empresa es $u > 0$ y que los asegurados pagan una prima de riesgo $c > 0$ por unidad de tiempo. Así que el capital de la empresa a través del tiempo como modelo matemático, se puede plantear como el proceso de riesgo $R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, para todo $t \geq 0$.

Ahora, definimos el tiempo de ruina del proceso $R(t)$ como la primera vez que la empresa tiene una reserva de riesgo negativa, es decir, $T := inf\{t > 0 : R(t) < 0\}$. Uno de los problemas importantes de la teoría del riesgo hace referencia al cálculo de la probabilidad de ruina $\phi(u) = P[T < \infty | R(0) = u]$, es decir, la probabilidad de que el proceso de riesgo llegue a ser negativo. Por otro lado, una compañía de seguros normalmente esta interesada en conocer la probabilidad de que la ruina ocurra antes del tiempo t. La probabilidad de ruina de tiempo finito $\phi(u,t)$ se define por $\phi(u,t) = P[T \leq t | R(0) = u]$. Muchos de los resultados de estas distribuciones son expresiones complicadas que se han obtenido utilizando métodos analíticos. Una metodología interesante para dar una aproximación de las probabilidades de ruina, es el estudiar bajo que condiciones estos procesos de riesgo convergen débilmente a procesos α-estables, dado que para ellos se conocen resultados asintóticos relacionados con funcionales de ruina.

Este trabajo tiene como finalidad presentar a detalle resultados que permiten aproximar débilmente procesos de riesgo a procesos α-estables, y que a su vez sus respectivos tiempos de ruina también converjan débilmente al tiempo de ruina de un proceso de riesgo α-estable, esto con el objetivo de poder establecer aproximaciones para la probabilidades de ruina de dichos procesos.

En el Capítulo 1 se estudian los resultados necesarios sobre convergencia débil en espacios métricos para el desarrollo de la tesis. Se presentan resultados sobre el espacio de Skorohod $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E)$, donde E es un espacio métrico, debido a que los procesos aproximantes al proceso de riesgo tienen trayectorias en este espacio. Luego, se exponen los resultados principales sobre convergencia débil en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E)$. También se muestran resultados importantes acerca de variables y procesos α-estables que son de gran utilidad para los capítulos posteriores del trabajo. En el Capítulo 2 se exponen los resultados más importantes del artículo Furrer et al. (1997), los cuáles están enfocados en dar condiciones suficientes bajo las cuáles una sucesión de procesos de riesgo convergen débilmente a un proceso α-estable con deriva, además de mostrar como esto implica que también hay convergencia débil entre sus tiempos ruina. Para concluir este capítulo se presenta una relación asintótica para la probabilidad de ruina de procesos α-estables con deriva, que en conjunto con los resultados anteriores permitirá dar aproximaciones de la probabilidad de ruina de dichos procesos de riesgo. En el tercer capítulo se presentan resultados relevantes de la teoría de valores extremos. También se estudian resultados que permiten caracterizar los dominios de atracción maximales, esto con la justificación de que si conocemos el dominio de atracción maximal de la distribución de los montos por reclamos en una sucesión de procesos de riesgo, bajo ciertas condiciones, es posible conocer el tipo de proceso α-estable con deriva al que convergen débilmente estos procesos sin la necesidad de conocer la distribución original de los reclamos. Por último en el

Capítulo 4 se muestra como utilizar los resultados de los Capítulos 2 y 3 para dar aproximaciones de la probabilidad de ruina de ciertos procesos de riesgo en el caso que no se conoce la distribución de los montos por reclamo. También para ciertos procesos de riesgo específicos se compara la aproximación de la probabilidad de ruina presentada en el Capítulo 2 con una aproximación obtenida mediante simulaciones.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo se presentan resultados acerca de la convergencia débil de procesos estocásticos en la topología de Skorohod. En la primera sección se estudian conceptos preliminares de convergencia débil, asi como su definición y distintas caracterizaciones de ella. Posteriormente, se estudia la métrica de Skorohod que está definida sobre el espacio $\mathcal{D}$ el cuál corresponde a la clase de las funciones cádlág, es decir, la clase de las funciones continuas por la derecha y con límites por la izquierda. Con base en esto se introduce la noción y resultados importantes de convergencia débil de procesos estocásticos con trayectorias en el espacio $\mathcal{D}$. Estos resultados se pueden consultar en Billingsley (2013). Por último se presenta el concepto de proceso α-estable y algunos resultados que serán de utilidad en el siguiente capítulo.

1.1. Convergencia débil en es espacios métricos

Denotemos por (S,d) un espacio métrico, donde d corresponde a la métrica, además denotemos por $\mathcal{S}$ la clase de subconjuntos de Borel de S. También denotemos por $\mathcal{P}(S)$ el conjunto de medidas de probabilidad sobre S.

El siguiente resultado indica que todas las medidas de probabilidad en $\mathcal{P}(S)$ pueden ser caracterizadas por sus valores en conjuntos cerrados, es decir si P y Q son medidas de probabilidad en $(S, \mathcal{S})$ y para cualquier abierto $A \in \mathcal{S}$ se cumple que $P(A) = Q(A)$, entonces $P(E) = Q(E)$ para todo $E \in \mathbb{S}$.

Teorema 1.1.1. *Cualquier medida de probabilidad en $(S, \mathcal{S})$ es regular, es decir, para cualquier subconjunto $A \subset S$ y cualquier $\epsilon > 0$ existe un conjunto cerrado F y un abierto G tal que $F \subset A \subset G$ y $\mathbb{P}(G - F) < \epsilon$.*

Otra forma distinta de caracterizar las medidas de probabilidad es a través de funciones uniformemente continuas como se presenta en el siguiente resultado.

Teorema 1.1.2. *Sean P y Q medidas de probabilidad en $\mathcal{S}$, estas coinciden si $\int f dP = \int f dQ$ para toda función real f acotada y uniformemente continua.*

Un concepto que resulta relevante en nuestro estudio es el de tensión en un espacio de probabilidad $(S, \mathcal{S})$. La importancia de este concepto se centra en proveer un criterio para probar convergencia débil de procesos estocásticos. Intuitivamente, una medida es tensa si ella se concentra en algún conjunto compacto, es decir, que la medida de su complemento resulta ser muy cercana a cero.

Definición 1.1.1. *Una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ en $(S, \mathcal{S})$ es $tensa$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto K_ϵ tal que $\mathbb{P}(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$.*

En de nuestro interés conocer bajo que condiciones se tiene tensión. Para ello, es importante recordar el siguiente par de conceptos, los cuáles tienen relevancia en dar un criterio suficiente para probar tensión.

Definición 1.1.2. *Sea (E, r) un espacio métrico, decimos que es separable si existe un conjunto $A \subset E$ denso y numerable.*

Definición 1.1.3. *Sea (E, r) un espacio métrico, decimos que E es completo si toda sucesión de Cauchy de elementos de E converge en E.*

El siguiente teorema nos da condiciones para las cuales una medida de probabilidad es tensa.

Teorema 1.1.3. *Si (S, r) es espacio métrico separable y completo, entonces toda medida de probabilidad en $(S, \mathcal{S})$ es tensa.*

En ocasiones resulta de gran utilidad caracterizar una medida probabilidad en estructuras más pequeñas que la sigma algebra generada, por ello se presenta la siguiente definición y un teorema que nos permite caracterizar en espacios más pequeños las medidas de probabilidad.

Definición 1.1.4. *Sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}$ una clase de subconjuntos de S, se llama separante si para cualesquiera probabilidades P y Q tal que $P(A) = Q(A)$ para todo $A \in \mathcal{G}$, se tiene que $P = Q$.*

Teorema 1.1.4. *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ espacio medible y sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ un π-sistema tal que $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{F}$. P y Q son probabilidades en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que $P(A) = Q(A)$ para todo $A \in \mathcal{G}$, entonces $P = Q$.*

Recordando que la finalidad de este trabajo es presentar herramientas mediante las cuáles sea posible aproximar a un proceso α-estable por medio de ciertos procesos de riesgo, introducimos el concepto de convergencia débil el cuál sera el tipo de convergencia entre los procesos de riesgo y el proceso α-estable que se presenta en el siguiente capítulo.

Definición 1.1.5. *Sea $(S, \mathcal{S})$espacio métrico y P_n, P probabilidades en $(S, \mathcal{S})$. Decimos que P_n converge débilmente a P (denotado por $P_n \Rightarrow P$) si para toda $f \in C_b(S)$ se cumple que $P_n f := \int f dP_n \to Pf := \int f dP$.*

A continuación se presenta uno de los teoremas más importantes de la teoría de convergencia débil. Este resultado toma relevancia porque brinda distintas formas de probar dicha convergencia.

Teorema 1.1.5. ***(de Portmanteau).*** *Sea $(S, \mathcal{S})$espacio métrico y P_n, P probabilidades en $(S, \mathcal{S})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $P_n \Rightarrow P$.

2. $P_n f \to P f$ *para toda* $f \in C_b(S)$ *uniformemente continua.*

3. $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F)$ *para todo* $F \in \mathcal{S}$ *cerrado.*

4. $\liminf P_n(G) \geq P(G)$ *para todo* $G \in \mathcal{S}$ *abierto.*

5. $P_n(A) \to P(A)$ *para todo* $A \in \mathcal{S}$ *tal que* $P(\partial A) = 0$*, donde* $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

Es posible determinar convergencia débil a partir de clases de conjuntos más simples. El siguiente resultado nos da noción de esta idea.

Teorema 1.1.6. *Sea $\mathcal{A}_P \subset \mathcal{S}$ un π-sistema tal que que cualquier abierto en $\mathcal{S}$ es unión de una familia contable de conjuntos en $\mathcal{A}_P$. Si $P_n(A) \to P(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}_P$, entonces $P_n \Rightarrow P$.*

Hemos visto que otra forma de probar convergencia débil, es mostrar que $P_n(A) \to P(A)$ para cierta clase de conjuntos. Análogamente a la definición de clase separante, se tiene un concepto para la clase de conjuntos que determinan la convergencia débil de una sucesión de medidas de probabilidad.

Definición 1.1.6. *Se dice que una clase de subconjuntos de $\mathcal{S}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ determina convergencia débil si para cualesquiera probabilidades P_n, P en $(S, \mathcal{S})$, tal que $P_n(A) \to P(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}$ tal que $P(\partial A) = 0$, se sigue que $P_n \Rightarrow P$.*

Una observación importante es que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ determina convergencia, entonces $\mathcal{A}$ es clase separante.

El siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes para que haya convergencia débil de una sucesión de medidas de probabilidad.

Teorema 1.1.7. *$P_n \Rightarrow P$ si, y sólo sí, cada subsucesión de $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, contiene una subsucesón que converge débilmente a P.*

A continuación se presentara el teorema del mapeo continuo y un resultado similar, que son importantes en este contexto porque permiten introducir la definición de convergencia débil de procesos estocásticos a partir de la definición de convergencia débil de variables aleatorias. Además, el siguiente par de resultados tienen relevancia en nuestro estudio ya que son herramienta importante en las demostraciones del siguiente capítulo, en particular en el Teorema 2.0.2, ya que nos permitiran demostrar que para X_n, X procesos estocásticos se cumple que $X_n(T(X_n)) \Rightarrow X(T(X))$ donde $T(X)$ es el tiempo de ruina del proceso X.

Teorema 1.1.8. *(del Mapeo continuo). Sean* (S, d) *y* (S', d') *espacios métricos. Sea* $h : (S, d) \to (S', d')$ *función medible y continua, y además* $P_n \Rightarrow P$ *en* S*. Entonces* $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$ *en* S'*.*

Teorema 1.1.9. *Sea* $h : (S, d) \to (S', d')$ *una función medible y denotemos por* D_h *el conjunto de puntos de discontinuidad de h, es decir,*

$$D_h = \left\{ t : \textit{ existe una sucesión } s_n \to t \textit{ tal que } \lim_{n\to\infty} h(s_n) \neq h(t) \right\}.$$

Si $P_n \Rightarrow P$ *en* S *y* $P(D_h = 0)$*, entonces* $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$*.*

Si $P_n \Rightarrow P$ en el espacio $\mathcal{C}$, es decir, el espacio de funciones continuas, entonces se tiene la convergencia de las distribuciones finito dimensionales, sin embargo, el recíproco no es cierto, es decir, convergencia de las distribuciones finito dimensionales no necesariamente implica convergencia débil. Ahora introduciremos el concepto de compacidad relativa, el cúal va de la mano con resultados donde hay convergencia débil en espacios más generales.

La siguiente caracteristica resulta interesante dado que a partir de ella es posible conocer si hay convergencia débil.

Definición 1.1.7. *Una familia* $\Pi \subset \mathcal{P}(S) = \{P : P \textit{ es medida de probabilidad sobre } S\}$ *es relativamente compacta, si para cada sucesión* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* Π*, existe una subsucesión* $\{P_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *y una medida* $Q \in \mathcal{P}(S)$ *tal que* $P_{n_k} \Rightarrow Q$*.*

Ahora se presenta el concepto de tensión en la familia de medidas de probabilidad.

Definición 1.1.8. *Una familia* $\Pi \in \mathcal{P}(S)$ *se dice tensa si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $K \subset S$ *compacto tal que*

$$\inf_{P \in \Pi} P(K) \geq 1 - \epsilon.$$

A continuación se presenta el teorema de Prohorov, este resultado de condiciones para determinar si una familia de medidas de probabilidad es tensa o relativamente compacta.

Teorema 1.1.10. *(Teorema de Prohorov). Sea* (S, d) *un espacio métrico y* $\Pi \subset \mathcal{P}(S)$ *una clase de medidas de probabilidad en* $(S, \mathcal{S})$.

1. *Si* Π *es tensa, entonces es relativamente compacta.*

2. *Si* S *es separable y completo, y* Π *es relativamente compacta, entonces* Π *es tensa.*

1.2. El espacio $\mathcal{D}$

Los procesos que se abordan en el siguiente capítulo son procesos estocásticos con trayectorias en el espacio $\mathcal{D}$, por ello es necesario proveer de una métrica este espacio, dicha métrica induce una topología la cuál es conocida como la topología de Skorohod.

Sea (E, r) un espacio métrico, denotemos por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E)$ al espacio de las funciones cadlag con valores en E, es decir,

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E) = \{f : \mathbb{R}^+ \to E : \lim_{s \downarrow t} f(s) = f(t), \forall t \geq 0, \lim_{s \uparrow t} f(s) = f(t-) \text{ existe}\}.$$

Denotemos por $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, E)$ el subespacio de funciones positivas continuas en E, es decir,

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, E) := \left\{f : \mathbb{R}^+ \to E : f \text{ es continua}\right\}.$$

Sean

$$\Lambda' = \{\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : \lambda \text{ es estrictamente creciente}\}$$

$$\Lambda = \{\lambda \in \Lambda' : \lambda \text{ es Lipschitz y } \gamma(\lambda) < \infty\},$$

donde

$$\gamma(\lambda) := esssup_{s > t \geq 0} \left| log \frac{\lambda(s - \lambda(t))}{s - t} \right|,$$

y donde $esssup$ denota el supremo escencial de una función, es decir, $esssup(f) = \text{ínf}\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) > a\}) = 0\}$, donde μ es la medida de Lebesgue.

Es posible definir una métrica en $D(\mathbb{R}^+, E)$ de tal forma que el espacio sea separable y completo.

Sean $x, y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E)$, definimos

$$d(x, y) := \inf_{\lambda\in\Lambda} \left\{ \gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty e^{-u} d'(x, y, \lambda, u) du \right\},$$

donde

$$d'(x, y, \lambda, u) := \sup_{t\geq 0} q\big(x(t \wedge u), y(\lambda(t) \wedge u)\big), \text{ con } q(s, t) = r(s, t) \wedge 1.$$

El siguiente resultado hace referencia a que tipo de propiedades hereda el espacio de Skorohod del espacio métrico del que es inducido.

Teorema 1.2.1. *Sea (E, r) espacio métrico y $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E)$ el espacio de Skorohod correspondiente.*

1. *Si E es separable, entonces $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E)$ es separable.*
2. *d es una métrica en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E)$.*
3. *Si (E, r) es completo y separable entonces $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E), d)$ también es completo y separable.*

La topología que induce la métrica d en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E)$ se denomina la topología de Skorohod.

Se tiene el próximo teorema que da equivalencias para convergencia de funciones en el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E)$ con la métrica de Skorohod definida anteriormente.

Teorema 1.2.2. *Sean $x_n, x \in \mathcal{D}([0, \infty), E)$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones*

a) $\text{lím}_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

b) Existe $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\leq T} r(x(\lambda_n(t)), x_n(t)) = 0$$

para todo $t > 0$.

c) *Para todo* $T > 0$*, existe* $\{\lambda_n\} \subset \Lambda'$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\leq T} |\lambda_n(t) - t| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\leq T} r(x(\lambda_n(t)), x_n(t)) = 0.$$

d) *Para toda sucesión* $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, tal que* $\lim t_n = t$ *se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} ([r(x_n(t_n), x(t))] \wedge [r(x_n(t_n), x(t-))]) = 0,$$

Una observación importante, es que en general no existe necesariamente una relación entre convergencia puntual y convergencia en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E)$.

Proposición 1.2.1. *Sean* $x_n \in \mathcal{D}([0,\infty), E)$ *una sucesión,* $x \in \mathcal{C}([0,\infty), E)$*. Si* $x_n \to x$*, entonces* $\sup_{t\geq 0} |x_n(t) - x(t)| \to 0$*, cuando* $n \to \infty$*.*

La definición y teoremas previos nos dan herramientas para caracterizar la convergencia débil de procesos estocásticoscon trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, E)$.

Definición 1.2.1. *Sea* $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *un procesos estocástico con valores en un espacio métrico* (E, r)*.Diremos que* X *tiene trayectorias en* $D(\mathbb{R}^+, E)$ *si*

$$P[X(\cdot) \in D(\mathbb{R}^+, E)] = 1.$$

Si X toma valores en $D(\mathbb{R}^+, E)$ es posible definir su distribución sobre E como $P = \mathbb{P}X^{-1}(\cdot)$. Así, el estudio de convergencia débil de procesos estocásticos se reduce a estudiar la convergencia de sus respectivas distribuciones. El siguiente concepto es una extención de la definición de tensión de medidas de probabilidad. Su importancia radica en determinar un criterio para saber si hay o no convergencia débil de procesos estocásticos.

Definición 1.2.2. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de procesos con trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, E)$. Diremos que $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es tensa si la correspondiente familia de distribuciones*

$$\{P_\alpha(\cdot) := \mathbb{P}_\alpha(X_\alpha^{-1}(\cdot))\}_{\alpha\in I}$$

es tensa en $\mathcal{P}(D(\mathbb{R}^+, E))$.

El siguiente resultado establece condiciones bajo las cuáles una familia de procesos estocásticos es tensa.

Teorema 1.2.3. *Sea $(S, \mathcal{S})$un espacio métrico separable y completo. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de procesos con trayectorias en $D(\mathbb{R}^+, E)$. Entonces $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es relativamente compacta, si, y sólo si,*

- *Para cada $\eta > 0$ y $t \in \mathbb{Q}^+$, existe un compacto $\Gamma_{n,t} \subset E$, tal que*

  $$\inf_\alpha \mathbb{P}_\alpha[X_\alpha(t) \in \Gamma_{\eta,t}^\eta] \leq 1 - \eta,$$

  donde

  $$\Gamma_{\eta,t}^\eta := \{x \in E : \inf_{y\in\Gamma_{\eta,t}} r(x, y) < \eta\}.$$

- *Para cada $\eta > 0$ y $T > 0$, existe $\delta > 0$, tal que*

  $$\sup_\alpha \mathbb{P}[w'(X_\alpha, \delta, T) \geq \eta] \leq \eta,$$

dado $\delta > 0$ y $T > 0$ denota $w'(x, \delta, T)$ el módulo de continuidad de x, es decir,

$$w'(x, \delta, T) := \inf_{\{t_i\}} \max_i \sup_{s,t\in[t_{i-1},t_i)} r(x_s, x_t),$$

con $\{t_i\}$ tales que

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < T \leq t_n,\ y\ \min_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1}) > \delta, n \in \mathbb{N}.$$

Definición 1.2.3. *Sea $\left\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$, X procesos estocásticos con trayectorias en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E)$. Decimos que $\left\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ converge débilmente a X si para cualquier función f continua y acotada en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E)$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[f\left(X^{(n)}\right)\right] = E[f(X)].$$

Sean $\{X_n\}$, X procesos estocásticos, si X_n converge débilmente a X lo denotaremos por $X_n \Rightarrow X$. En el caso que $\{X_n\}$, X sean variables aleatorias la notación $X_n \Rightarrow X$ representa convergencia es distribución.

El siguiente resultado da una caracterización importante de convergencia débil de procesos estocásticos. Establece que si tenemos que la familia de procesos estocásticos es tensa y además sus distribuciones finito dimensionales convergen a las distribuciones finito dimensionales de cierto proceso, entonces hay convergencia débil entre estos procesos.

Teorema 1.2.4. *Sean $(S, \mathcal{S})$separable, X y X_n procesos con trayectorias en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E)$ y sea $Cont(X) = \{t \geq 0 : \mathbb{P}[X_t = X_{t-}] = 1\}$.*

- *Si $X_n \Rightarrow X$, entonces $(X^n_{t_1}, ..., X^n_{t_k}) \Rightarrow (X_{t_1}, ..., X_{t_k})$, para todo conjunto finito $\{t_1, ..., t_k\} \subset Cont(X)$. Además, para cada conjunto finito $\{t_1, ..., t_k\} \subset [0, \infty)$, existen sucesiones*

  $$\{t^k_1\} \subset [t_1, \infty), ..., \{t^k_n\} \subset [t_n, \infty), t^k_i \in Cont(X)$$

  tales que $t^k_i \to t_i$ cuando $k \to \infty$ y

  $$(X^n_{t_1}, ..., X^n_{t_k}) \Rightarrow (X_{t_1}, ..., X_{t_k}).$$

- *Si $\{X^n\}_n$ es relativamente compacta en $\mathcal{P}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E))$ y existe $B \subset \mathbb{R}^+$ denso tal que*

  $$(X^n_{t_1}, ..., X^n_{t_n}) \Rightarrow (X_{t_1}, ..., X_{t_n})$$

  para todo subconjunto finito $\{t_1, ..., t_n\} \subset B$, entonces $X_n \Rightarrow X$ en $D(\mathbb{R}^+, E)$.

1.3. El proceso α-estable

En el estudio del comportamiento de capital de compañías de seguros se ha encontrado que los reclamos o pérdidas que sufren en muchas ocasiones siguen una distribución de cola pesada. El proceso α-estable tiene utilidad porque se obtiene como límite de procesos de riesgo cuyos reclamos tienen colas de variación regular. Como veremos en el Capítulo 2, tener al proceso α-estable como límite permite obtener expresiones asintóticas para la probabilidad de ruina que en general resultan complicadas de calcular aún utilizando métodos numéricos. Más aún, como veremos más adelante es posible, mediante este tipo de resultados asintóticos, encontrar aproximaciones para la probabilidad de ruina en horizonte finito, para la cuál son pocos los resultados y expresiones que se conocen en la teoría de riesgo.

Empecemos por definir una variable aleatoria estable.

Definición 1.3.1. *Decimos que una variable aleatoria X es estable si para X_1, X_2 copias independientes de X, y $a_1 > 0$, y $a_2 > 0$ constantes, existen constantes c y $d > 0$ tales que $c + dX \stackrel{D}{=} a_1X_1 + a_2X_2$.*

La notación $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ indica que la variable aleatoria X tiene una distribución estable, la cuál depende de cuatro parámetros, $0 < \alpha \leq 2$ (parámetro de estabilidad), $\sigma > 0$ (parámetro de escala), $-1 \leq \beta \leq 1$ (parámetro de simetría) y $\mu \in \mathbb{R}$ (parámetro de localización). Una variable aleatoria X es estable si su función caracteriztica puede escribirse como

$$\varphi(t; \alpha, \beta, \gamma, \mu) := E\left[e^{itx}\right] = \exp\left[\, it\mu - |\gamma t|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(t)\Phi\right)\,\right] \tag{1.1}$$

donde $sgn(t)$ es la función signo de t y Φ viene dada por $\Phi = \tan(\pi\alpha/2)$ para todo α, excepto $\alpha = 1$, en cuyo caso: $\Phi = -\dfrac{2}{\pi}\log|t|$.

Las variables aleatorias estables tienen densidad, sin embargo, existen pocos casos en los cuales es posible conocer de forma explícita la función de densidad. Estos casos son cuando $\alpha = 1/2$ (distribución de Lévy), $\alpha = 1$ (distribución Cauchy) y $\alpha = 2$ (distribución normal). Una caracteriztica importante del índice de estabilidad es que cuanto más pequeño, más pesadas son las colas de la distribución. Además, una variable aleatoria estable X con índice $\alpha < 2$, cumple que $E[|X|^\delta] = \infty$ para cualquier $\delta \geq \alpha$ y $E[|X|^\delta] < \infty$ para $0 < \delta < \alpha$.

La siguiente proposición es relevante en nuestro estudio ya que determina la rapidez con la cual decaen las colas de una distribución estable. En partícular las de una distribución estable son de variación regular.

Proposición 1.3.1. *Sea $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$, con $1 < \alpha < 2$. Entonces*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^\alpha P(X>\lambda) = C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha, \ \textit{donde}\ C_\alpha = \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)cos(\frac{\pi\alpha}{2})}.$$

La demostración de este resultado se puede encontrar en Samorodnitsky et al. (1994).

Sean $\{X_n\}$ una sucesión de v.a.i.i.d. F, y sea $S_n = X_1 + ... + X_n$. Sea U una distribución estable, decimos que F pertenece al dominio de atracción estable de U si y sólo si existen constantes $a_n = n^{1/\alpha}$ y b_n tal que la distribución de $a_n^{-1}(S_n - b_n)$ tiende a la distribución U.

El siguiente teorema muestra la relación que hay entre las distribuciones con cola de variación regular y las distribuciones que pertenecen al dominio de atracción estable.

Teorema 1.3.1. *Una distribución F pertenece al dominio de atracción estable de una distribución estable $S_\alpha(1,1,0)$, con índice de variación $0 < \alpha < 2$ si y sólo si la cola de la distribución varía regularmente con exponente α.*

La demostración de este resultado se puede consultar en Feller (2008).

A continuación se presenta la definición de un proceso α-estable. Este concepto toma relevancia dado que en el siguiente capítulo se establece de que forma y bajo que condiciones el monto total por reclamos o perdidas de cierto proceso de riesgo converge débilmente a un proceso α-estable.

Definición 1.3.2. *Un proceso estocástico $Z_\alpha = (Z_\alpha(t) : t \geq 0)$ con trayectorias en D es llamado α-estable estandar si*

1. $Z_\alpha(0) = 0$ *casi seguramente.*
2. Z_α *tiene incrementos independientes.*
3. $Z_\alpha(t) - Z_\alpha(s) \sim S_\alpha((t-s)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, 0)$ *para cualquier* $0 \leq s < t < \infty$ *y para algunas constantes* $0 < \alpha \leq 2$, $|\beta| \leq 1$.

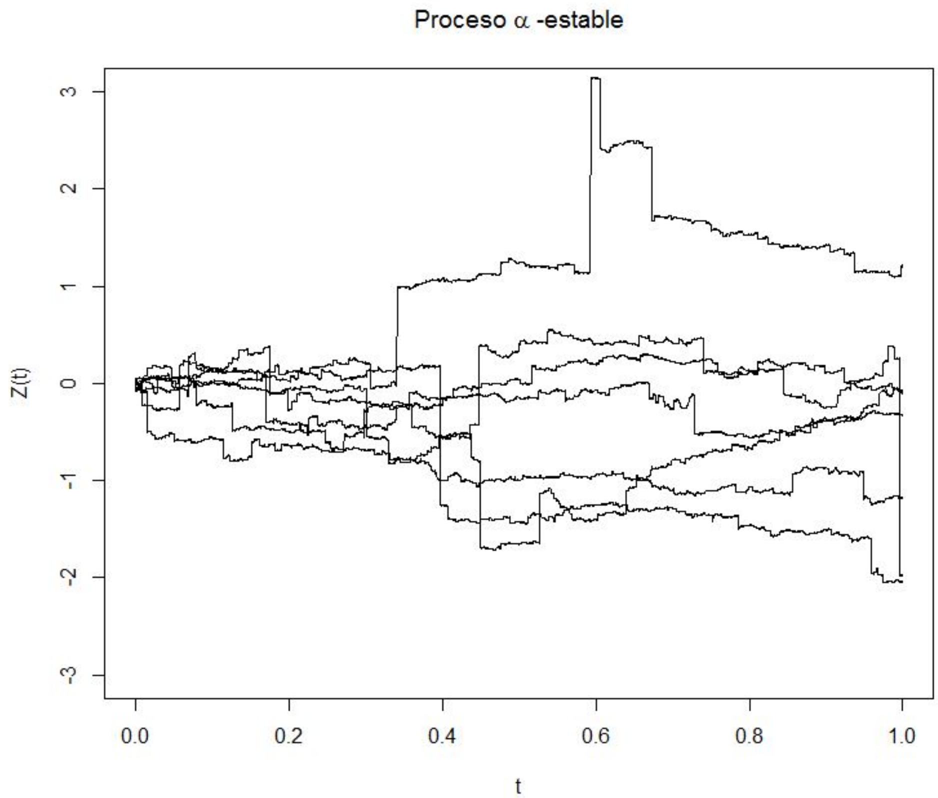


Figura 1.1: Se ilustra la simulación de un proceso α-estable, con parámetros $\alpha = 1.2$ y $\beta = 0$.

Cuando $\alpha = 2$, el proceso Z_α es un movimiento browniano. Los procesos α-estable son $1/\alpha$-similares (a menos que $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$), es decir, para todos $c > 0$, $(Z_\alpha(ct) : t \geq 0)$ y $(c^{1/\alpha} Z_\alpha(t) : t \geq 0)$ tienen la mismas distribuciones finito-dimensionales. Además, la función característica de $Z_\alpha(t)$ es de la forma

$$E[e^{i\theta Z_\alpha(t)}] = e^{t\psi(\theta)}$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ y

$$\psi(\theta) = \int_{\mathbb{R}} (e^{i\theta y} - 1 - \frac{i\theta y}{1 + y^2})\Pi(dy)$$

con

$$\Pi(dy) = \frac{p}{y^{1+\alpha}} 1_{(0,\infty)}(y)dy + \frac{q}{|y|^{1+\alpha}} 1_{(-\infty,0)}(y)dy,$$

para dos constantes p, q tales que $p, q > 0$.

Se demuestra que $\beta = \frac{(p-q)}{(p+q)}$. Por lo tanto, si por ejemplo, $\beta = -1$, es decir, $p = 0$, la medida Π no atribuye masa a la media línea positiva y, en consecuencia no hay saltos positivos del proceso Z_α.

Ahora, el siguiente resultado da una manera de construir procesos α-estables.

Proposición 1.3.2. *Sea Z_α un proceso α-estable, con $1 < \alpha < 2$. Entonces se tiene la representación*

$$Z_{\alpha(t)} = C_\alpha^{1/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} (\gamma_i \Gamma_i^{-1/\alpha} 1(\tau_i \leq t) - \beta t b_i^{(\alpha)}),$$

donde $0 \leq t \leq 1$ y $(\gamma_i : i \in \mathbb{N})$ es una sucesión de v.a.i.i.d. que satisfacen

$$P(\gamma_i = 1) = 1 - P(\gamma_i = -1) = \frac{1}{2}(1 + \beta).$$

Además $(\Gamma_i : i \in \mathbb{N})$ es la sucesión de los tiempos de llegadas de un proceso Poisson con tasa unitaria entre llegadas y $(\tau_i : i \in \mathbb{N})$ es una sucesión de v.a.i.i.d. uniforme en $[0, 1]$. Las sucesiones $\{\tau_i\}$, $\{\Gamma_i\}$ son independientes y $C_\alpha^{1/\alpha}$, $b_i^{(\alpha)}$ son constantes.

La demostración de este resultado se puede encontrar en Samorodnitsky et al. (1994).

CAPÍTULO 2

Convergencia débil al proceso α-estable.

En este capítulo expondremos los resultados del artículo Furrer et al. (1997). Como primer primer resultado importante se presentara las condiciones bajo las cuáles una sucesión de procesos de riesgo converge débilmente a un procesos α-estable con deriva. Posteriormente se presenta la prueba del resultado que establece que si cierta sucesión de procesos de riesgo converge débilmente a un procesos α-estable con deriva entonces los tiempos de ruina de estos procesos también convergen débilmente. Como último resultado relevante se presenta una relación asíntotica para la probabilidad de ruina del proceso α-estable con deriva.

Comencemos por definir un proceso de riesgo. Consideremos el proceso estocástico $R = \{R(t), t \geq 0\}$ dado por

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k,\ t \geq 0, \tag{2.1}$$

donde u, c con constantes positivas, $N(t) = \max \{n : \sum_{k=1}^{n} T_k \leq t\}$ es un proceso de renovación con tiempos entre llegadas T_k y Y_k son variables aleatorias independientes con la misma distribución F con media μ. En la teoría de riesgo resulta comun modelar el capital de una compañía de seguros a tráves del tiempo mediante este proceso. Podemos interpretar a u

como el capital inicial de la compañía, el valor de c como una prima por unidad de tiempo que recibe la compañía como pago de los asegurados, $N(t)$ el número de reclamos que ha recibido la compañía hasta el tiempo t y Y_k el monto que se paga por el k-ésimo reclamo.

Una de las preguntas de mayor interés para una compañía aseguradora es la siguiente: ¿Hasta qué punto la compañía aseguradora puede solventarse? Es decir, interesa conocer cuál es la probabilidad de que la compañía se arruine en tiempo finito o en un intervalo de tiempo dado.

Consideremos el proceso R definido en 2.1. Para conceptualizar la probabilidad de ruina del proceso R definamos la variable aleatoria T como el primer momento en que el proceso R es menor que cero, es decir,

$$T(R) = \begin{cases} \infty, & R(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \\ inf\{t > 0 : R(t) < 0\} & \text{otro caso} \end{cases} \tag{2.2}$$

Con la finalidad de evitar que el proceso llegue a la ruina casi seguramente suponemos $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]/t > 0$.

Sea $(Q^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ una sucesión de procesos de riesgo dada de la siguiente manera. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $u^{(n)} > 0$ denota el capital inicial, $c^{(n)} > 0$ la prima que se recibe por unidad de tiempo y $N^{(n)}$ el proceso puntual mediante el cuál llegan las reclamaciones $(Y_k^{(n)} : k \in \mathbb{N})$. Asi que

$$Q^{(n)}(t) = u^{(n)} + c^{(n)}t - \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Y_k^{(n)}, t \geq 0, \tag{2.3}$$

Además supondremos las siguientes afirmaciones. $Y_k^{(n)} = Y_k/\phi(n)$, donde $(Y_k : k \in \mathbb{N})$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con función de distribución común F y media μ tal que

$$\frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{n} (Y_k - \mu) \Rightarrow Z_\alpha(1), n \to \infty, \tag{2.4}$$

y la función ϕ está dada por $\phi(n) = n^{1/\alpha}L(n)$, donde L es una función de variación lenta. En otras palabras, decimos que F está en el dominio de atracción de $Z_\alpha(1)$ (ver capítulo 1).

De aquí en adelante supondremos que el parámetro de estabilidad es $1 < \alpha < 2$. Esta condición la suponemos para que $E[Z_\alpha(t)] < \infty$, para todo $t \geq 0$.

Sea $Q = (Q(t) : t > 0)$ un proceso estocástico dado por

$$Q(t) = u + ct - \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_\alpha(t),\ t \geq 0, \tag{2.5}$$

donde u y c son constantes positivas y $(Z_\alpha(t) : t > 0)$ es un proceso α-estable estandar con $\beta = 1$.

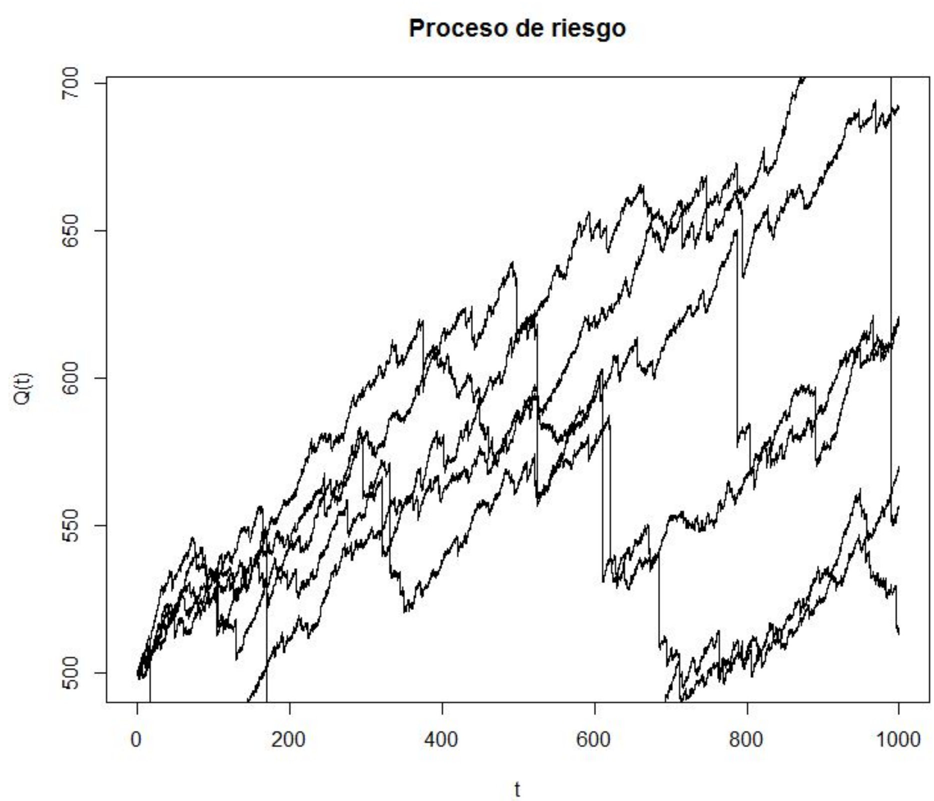


Figura 2.1: Se ilustran simulaciones del proceso riesgo $Q(t) = u + ct - \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_\alpha(t)$ en función del tiempo, donde $u = 500$, $c = 3$, $\lambda = 0.5$, y $\alpha = 1.501$.

Denotemos $\mathcal{D} = \mathcal{D}([0, \infty), \mathbb{R})$. Usaremos el siguiente resultado, cuya demostración se puede consultar en Whitt (1980).

Proposición 2.0.1. *Sea $(Z_n : n \in \mathbb{N})$, Z un proceso con trayectorias en $\mathcal{D}$ tal que $Z_n \Rightarrow Z$. Sea $(N_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión de procesos con trayectorias no decrecientes que inician* *en* 0*, tal que* $N_n \Rightarrow \lambda I$*, donde* $\lambda > 0$ *e* I *denonta el mapeo identidad de* $[0, \infty)$ *en* $[0, \infty)$*. Supongamos que para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* Z_n *y* N_n *que son definidos en el mismo espacio de probabilidad. Entonces*

$$Z_n(N_n) \Rightarrow Z(\lambda I),$$

cuando $n \to \infty$*.*

El siguiente resultado muestra condiciones bajo las cuales $Q^{(n)}(t) \Rightarrow Q(t)$.

Teorema 2.0.1. *Sea* $\{Y_k : k \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión de v.a.i.i.d. con distribución* F*, y sea* $\{N^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión de procesos puntuales tal que*

$$\frac{N^{(n)}(t) - \lambda n t}{\phi(n)} \to 0,$$

en probabilidad en la topología de Skorohod, donde λ *es una constante positiva. Supongamos también que*

$$\lim_{n\to\infty} \left(c^{(n)} - \lambda n \frac{\mu}{\phi(n)} \right) = c\,, \ \lim_{n\to\infty} u^{(n)} = u. \tag{2.6}$$

Entonces, cuando $n \to \infty$

$$u^{(n)} + c^{(n)} t - \frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Y_k \Rightarrow u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t),$$

en el espacio $\mathcal{D}$ *con la topología de Skorohod.*

Demostración. Sea

$$Q^{(n)}(t) = u^{(n)} + c^{(n)} t - \frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Y_k \tag{2.7}$$

$$= u^{(n)} + t \left(c^{(n)} - \lambda n \frac{\mu}{\phi(n)} \right) - \mu \left(\frac{N^{(n)}(t) - \lambda n t}{\phi(n)} \right) - \frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} (Y_k - \mu) \tag{2.8}$$

Ahora, por hipótesis

$$\mu \left(\frac{N^{(n)}(t) - \lambda n t}{\phi(n)} \right) \to 0,$$

cuando $n \to \infty$ en probabilidad en la topología de Skorohod.

Por hipótesis

$$\frac{1}{\phi(n)}\sum_{k=1}^{n}(Y_k-\mu)\Rightarrow Z_\alpha(1), n\to\infty,$$

y como $\phi(n) = n^{1/\alpha}$ se sigue que F es variación regular. Luego por el corolario 7.1 en Resnick (2007) se tiene que

$$\frac{1}{\phi(n)}\sum_{k=1}^{[nt]}(Y_k-\mu)\Rightarrow Z_\alpha(t), n\to\infty, \tag{2.9}$$

en el espacio $\mathcal{D}$ con la topología de Skorohod.

Ahora, por hipotesis

$$\frac{N^{(n)}(t)-\lambda nt}{\phi(n)} = n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\left[\frac{N^{(n)}(t)}{n}-\lambda t\right]\Rightarrow 0, \text{ , cuando } n\to\infty,$$

en el espacio de Skorohod, como $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = \infty$, se sigue que

$$\left[\frac{N^{(n)}(t)}{n}-\lambda t\right]\Rightarrow 0, \text{ , cuando } n\Rightarrow\infty,$$

en el espacio de Skorohod, por lo que $\frac{N^{(n)}(t)}{n}\Rightarrow\lambda t$, cuando $n\to\infty$.

De lo anterior y la Proposición 1 se obtiene que

$$\frac{1}{\phi(n)}\sum_{k=1}^{\left[n\frac{N^{(n)}(t)}{n}\right]}(Y_k-\mu) = \frac{1}{\phi(n)}\sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)}(Y_k-\mu)\Rightarrow Z_\alpha(\lambda t)\overset{\mathcal{D}}{=}\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(t), \tag{2.10}$$

en la topología de Skorohod. Ahora, como

$$u^{(n)}+t\left(c^{(n)}-\lambda n\frac{\mu}{\phi(n)}\right)-\mu\left(\frac{N^{(n)}(t)-\lambda nt}{\phi(n)}\right)\Rightarrow u+ct \text{ en } \mathcal{D},$$

se cumple el resultado por el Teorema de Slutsky.

□

Definimos

$$N^{(n)}(t) = N(nt),$$

para $N(t)$ en (2.1); aquí suponemos que los tiempos entre llegadas son variables aleatorias positivas independientes. El proceso N se llama proceso de renovación.

Sea $B = (B(t) : t\geq 0)$ un movimiento Browniano unidimensional.

Proposición 2.0.2. *Sea* $(N(t) : t \geq 0)$ *un proceso de renovación con tiempos entre llegadas denotados por* $\{T_k : n \in \mathbb{N}\}$ *y suponemos que existen una constante positiva* $\lambda > 0$ *y una función de variación lenta* L *tales que cuando* $n \to \infty$*,*

$$\frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{[nt]} \left(T_k - \frac{1}{\lambda} \right) \Rightarrow B(t),$$

en la topología de Skorohod, donde $\phi(n) = \sqrt{n}L(n)$*. Entonces para* $1 < \alpha < 2$*, se tiene que cuando* $n \to \infty$*,*

$$\frac{N(nt) - \lambda nt}{n^{1/\alpha}} \to 0,$$

en probabilidad en el espacio de Skorohod $\mathcal{D}$*.*

Demostración.

De la suposición para $1 < \alpha < 2$ observemos que

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{[nu]} \left(T_k - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{n^{1/2}}{n^{1/\alpha}} \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{k=1}^{[nu]} \left(T_k - \frac{1}{\lambda} \right).$$

Usando que $\frac{n^{1/2}}{n^{1/\alpha}} \to 0$ y $\frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{[nt]} \left(T_k - \frac{1}{\lambda} \right) \Rightarrow B(t)$ en la topología de Skorohod, obtenemos

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{[nu]} \left(T_k - \frac{1}{\lambda} \right) \to 0 \tag{2.11}$$

en probabilidad en la topología de Skorohod, por lo tanto converge en distribución también.

Por otro lado, dado que la trayectoria que para todo t es cero es función continua, entonces por la proposición 1.2.1 es suficiente probar que para todo t fijo

$$P\{A\} \to 0, \text{ cuando } n \to \infty,$$

donde $A = \left\{ \omega : \sup_{0 \leq s \leq t} \frac{|N(ns) - \lambda ns|}{n^{1/\alpha}} > \epsilon \right\}$.

Si $\omega \in A$, entonces

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \frac{|N(ns)(\omega) - \lambda ns|}{n^{1/\alpha}} > \epsilon.$$

Luego, existe $s := s(\omega) \in [0, t]$ tal que $N(ns) - \lambda ns > \epsilon n^{1/\alpha}$ ó $N(ns) - \lambda ns < -\epsilon n^{1/\alpha}$. En el primer caso se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{[\lambda ns + \epsilon n^{1/\alpha}]} T_k < ns.$$

Definimos u tal que $nu = \lambda ns + \epsilon n^{1/\alpha}$, por lo que $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{nu}\left(ns + \frac{\epsilon n^{1/\alpha}}{\lambda}\right)$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{[nu]}\left(T_k - \frac{1}{\lambda}\right) < -\frac{\epsilon n^{1/\alpha}}{\lambda}, \tag{2.12}$$

luego, para $u = \lambda s + \epsilon n^{1/\alpha - 1}$, para todo $\omega \in A$

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}}\left|\sum_{k=1}^{[nu]}\left(T_k - \frac{1}{\lambda}\right)\right| > \frac{\epsilon}{\lambda}.$$

De la desigualdad anterior, tomando el supremo en ambos lados sobre u en $[0, \lambda t + \epsilon n^{1/\alpha-1}]$, se sigue que para todo $\omega \in A$ se cumple en este caso

$$A \subset \left\{\sup_{0\le u\le \lambda t + \epsilon n^{1/\alpha-1}} \frac{1}{n^{1/\alpha}}\left|\sum_{k=1}^{[nu]}\left(T_k - \frac{1}{\lambda}\right)\right| > \frac{\epsilon}{\lambda}\right\}.$$

Análogamente, en el caso $N(ns) - \lambda ns < -\epsilon n^{1/\alpha}$ se obtiene que para todo $\omega \in A$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^{[\lambda ns + \epsilon n^{1/\alpha}]} T_k > ns.$$

Definimos u tal que $nu = \lambda ns - \epsilon n^{1/\alpha}$. Entonces obtenemos de forma similar a (2.12) que

$$\sum_{k=1}^{[nu]}\left(T_k - \frac{1}{\lambda}\right) > \frac{\epsilon n^{1/\alpha}}{\lambda}.$$

Luego, tomando el supremo sobre u en $[0, \lambda t - \epsilon n^{1/\alpha-1}]$, se sigue que

$$A \subset \left\{\sup_{0\le u\le \lambda t + \epsilon n^{1/\alpha-1}} \frac{1}{n^{1/\alpha}}\left|\sum_{k=1}^{[nu]}\left(T_k - \frac{1}{\lambda}\right)\right| > \frac{\epsilon}{\lambda}\right\}.$$

De (2.11), se sigue que

$$P\left\{\sup_{0\le u\le \lambda t + \epsilon n^{1/\alpha-1}} \frac{1}{n^{1/\alpha}}\left|\sum_{k=1}^{[nu]}\left(T_k - \frac{1}{\lambda}\right)\right| > \frac{\epsilon}{\lambda}\right\} \to 0 \text{ , cuando } n \to \infty,$$

obtenemos por lo tanto

$$P(A) \to 0 \text{ , cuando } n \to \infty,$$

obteniendo el resultado. □

Definición 2.0.1. *Sea X un proceso con trayectorias en $\mathcal{D}$. Definimos el funcional de tiempo de ruina de X como $T(X) = \inf\{t > 0 : X(t) < 0\}$, si el conjunto $\{t > 0 : X(t) < 0\}$ es no vacío y $T(X) = +\infty$ en otro caso.*

Definido el tiempo de ruina de un proceso estocástico, se probará que si $Q^{(n)} \Rightarrow Q$, entonces $T(Q^{(n)}) \Rightarrow T(Q)$, para esto requerimos los siguientes resultados.

Lema 2.0.1. *Sea $(X(t) : t \geq 0)$ un proceso cadlag. Definimos el proceso de saltos de X como $\Delta X = (\Delta X(t) : t \geq 0)$ donde $\Delta X(t) = X(t) - X(t-)$. Entonces*

$$\{\Delta X \neq 0\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{(\omega, t); t \geq 0, t = T_n(\omega)\},$$

donde T_n son tiempos de paro respecto a X.

La demostración de este resultado se puede consultar en Jacod, Shiryaev (1987).

Lema 2.0.2. *Sea $Q = (Q(t) : t \geq 0)$, $Q(t) = u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t)$ para todo $t \geq 0$ y sea (τ_n) la sucesión de los tiempos de saltos de Q. Entonces*

$$P\{\cup_{n=1}^{\infty}\{Q(\tau_n-) = 0\}\} = 0.$$

Demostración. Usando de la proposición 1.3.2 podemos reescribir $Q(t)$ de la forma

$$Q(t) = u + ct - \lambda^{1/\alpha} C_\alpha^{1/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\gamma_i \Gamma_i^{-1/\alpha} 1(\tau_i \leq t) - \beta t b_i^{(\alpha)}\right), t \geq 0.$$

Utilizando independencia y que τ_k tiene distribución uniforme en $[0,1]$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
P(Q(\tau_k-)=0) =& P(\Delta Q(\tau_k)=Q(\tau_k)) \\
=& P\Big\{u + c\tau_k + \lambda^{1/\alpha}C_\alpha^{1/\alpha}\beta\tau_k b_k^{(\alpha)} \\
& - \lambda^{1/\alpha}C_\alpha^{1/\alpha}\sum_{i=1, i\neq k}^{\infty}\Big(\gamma_i\Gamma_i^{-1/\alpha}1(\tau_i\leq\tau_k) - \beta\tau_k b_i^{(\alpha)}\Big) = 0\Big\} \\
=& \int_0^1 P\Big\{u + c\tau_k + \lambda^{1/\alpha}C_\alpha^{1/\alpha}\beta\tau_k b_k^{(\alpha)} \\
& - \lambda^{1/\alpha}C_\alpha^{1/\alpha}\sum_{i=1, i\neq k}^{\infty}\Big(\gamma_i\Gamma_i^{-1/\alpha}1(\tau_i\leq\tau_k) - \beta\tau_k b_i^{(\alpha)}\Big) = 0|\tau_k = t\Big\}dt \\
=& \int_0^1 P\Big\{u + ct_k + \lambda^{1/\alpha}C_\alpha^{1/\alpha}\beta t_k b_k^{(\alpha)} \\
& - \lambda^{1/\alpha}C_\alpha^{1/\alpha}\sum_{i=1, i\neq k}^{\infty}\Big(\gamma_i\Gamma_i^{-1/\alpha}1(\tau_i\leq t_k) - \beta t_k b_i^{(\alpha)}\Big) = 0\Big\}dt \\
=& \int_0^1 P(u + ct - \lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(t) = 0|\tau_k > t)dt \\
=& 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema 2.0.2. *Sea T el funcional de ruina. Si $Q^{(n)} \Rightarrow Q$, donde $Q^{(n)}$ y Q dados en 2.3 y 2.5 respectivamente, entonces $T(Q^{(n)}) \Rightarrow T(Q)$.*

Demostración. Sean x_n y x trayectorias de X_n y X, es decir, funciones cadlag tales que $x_n \to x$ en la topología de Skorohod.

Supongamos que $T(x_n)$ no converge a $T(x)$, entonces existe una subsucesión de $T(x_n)$ que converge a $t_0 \neq T(x)$.

Analicemos el caso cuando $t_0 > T(x)$. Tenemos que $x(T(x)) \leq 0$, entonces para $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $T(x) + \delta < t_0$, y $T(x) + \delta$ es punto de continuidad de x. Sea $\epsilon < -x(T(x)+\delta)$. Entonces para n suficientemente grande se tiene que $x_n(T(x)+\delta) < \epsilon + x(T(x)+\delta) < 0$, por lo que $T(x_n) \leq T(x) + \delta$ y esto implica que $\lim_{n\to\infty} T(x_n) \leq T(x) + \delta < t_0$, lo cuál contradice la suposición de que $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = t_0$.

Ahora supongamos que $t_0 < T(x)$, se tiene que $x_n(T(x_n)) \leq 0$ y $x_n(T(x_n)) \to x(t_0)$ ó $x_n(T(x_n)) \to x(t_0-)$, esto implica por teorema 1.2.2 d) que $x(t_0) \leq 0$ ó $x(t_0-) \leq 0$. Ahora, si $x(t_0) \leq 0$, también tenemos que $x(t_0) \geq 0$, por lo que $x(t_0) = 0$, entonces por la ley de logaritmo iterado para procesos α- estables, se sigue que el proceso X toma el valor de cero una infinidad de veces, por lo que existe un $\delta > 0$ tal que $t_0 + \delta < T(x)$ y $x(t_0 + \delta) < 0$ lo cuál es una contradicción.

Si $x(t_0-) \leq 0$, y como $t_0 < T(x)$ tenemos que $x(t_0-) \geq 0$, por lo cual $x(t_0-) = 0$. Si t_0 es un tiempo de salto de x por el Lema 2.3.1 $P(X(t_0-) = 0) = 0$, y si t_0 es punto de continuidad de x, obtenemos que x oscila alrededor de 0 en t_0, lo que contradice que $t_0 < T(x)$. Por lo tanto $T(X_n) \Rightarrow T(X)$. □

El siguiente resultado nos da una aproximación asintotica de $P\{T(Q) \leq t\}$ cuando el capital $u \to \infty$, es decir, una aproximación para la probabilidad de que el proceso Q se encuentre por debajo de cero antes del tiempo t cuando el capital inicial es suficientemente grande.

Proposición 2.0.3. *Sea Z_α un proceso $\alpha -$ estable con parámetro de asimetría $-1 < \beta \leq 1$. Entonces*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P\{T(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)) \leq t\}}{\Psi(u,t)} = 1,$$

donde $\Psi(u,t) := C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \lambda t(u+ct)^{-\alpha}$, y $C_\alpha := \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha) cos(\frac{1}{2}\pi\alpha)}$.

Demostración. De la Proposición 1.3.1 $Z_\alpha(t)$ tiene cola de variación regular. Entonces para $s \leq t$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P\left(T(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s) \leq t)\right)}{P\left(u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t) < 0\right)} = 1$$

(ver Willikens (1987)). Por último usando de nuevo la proposición 1.3.1, se tiene que

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P\left(u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t) < 0\right)}{C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \lambda t(u+ct)^{-\alpha}} = \lim_{u\to\infty} \frac{P\left(\frac{u+ct}{\lambda^{1/\alpha}} < Z_\alpha(t)\right)}{C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \lambda t(u+ct)^{-\alpha}} = 1,$$

lo cual concluye la prueba. □

CAPÍTULO 3

Teoría de valores extremos

Este capítulo tiene como objetivo presentar herramientas de teoría de valores extremos que permitan caracterizar dominios de atracción maximales de las distribuciones univariadas de valores extremos. Estos resultados toman relevancia en nuestro estudio porque al conocer el dominio de atracción de una función de distribución F es posible saber si pertenece ó no al dominio de atracción estable. En el caso que F pertenezca al dominio de atracción estable y a su vez corresponde a la distribución de los montos por reclamos en un proceso de riesgo, es posible utilizar los resultados del capítulo anterior y así dar aproximaciones de la probabilidad de ruina del proceso de riesgo correspondiente. Las demostraciones de los resultados en este capítulo se pueden encontrar en Resnick (1999), Leadbetter et al. (2012).

3.1. Preliminares de teoría de valores extremos

Esta sección tiene como objetivo presentar un resultado que de condiciones suficientes para la existencia de constantes normalizadoras para que el máximo normalizado de una sucesión de v.a.i.i.d., tenga distribución límite. Dicho resultado es el teorema de Fisher-Tippett, el cuál sera de gran utilidad en la continuación del capítulo.

Para dar inicio a esta sección presentamos las tres familias de distribuciones que llamaremos distribuciones de valores extremos (para máximos).

Definición 3.1.1. *Consideremos las siguientes familias de funciones de distirbución:*

Distribución Gumbel

$$\phi_{Gumbel}(x) = e^{-e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})}},\ x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

Distribución Fréchet

$$\phi_{Frechet}(x) = e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^{-\alpha}},\ x > \mu, \mu \in \mathbb{R}, \alpha, \sigma > 0.$$

Distribución Weibull

$$\phi_{Weibull}(x) = e^{-(-\frac{x-\mu}{\sigma})^{\alpha}},\ x < \mu, \mu \in \mathbb{R}, \alpha, \sigma > 0.$$

Las distribuciones de extremos están relacionadas con las distribuciones máx estables. Una función de distribución G no degenerada es máx-estable si, para cada $n \in N$, existen constantes $a_n > 0$ y b_n tales que $G^n(a_n x + b_n) = G(x)$ (o equivalentemente $G(a_n x + b_n) = G^{1/n}(x)$).

Se puede probar que todas las distribuciones máx-extables son distribuciones de extremos y todas las distribuciones de extremos son máx-estables (ver, por ejemplo, Leadbetter).

Definición 3.1.2. *Sea G una función de distribución no degenerada. Denotaremos por $D(G)$ al conjunto de funciones de distribución*

$$\left\{ F : \lim_{n \to \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x), a_n > 0, b_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Al conjunto $D(G)$ lo llamaremos dominio de atracción maximal de la distribución G.

A continuación se presenta el teorema Fisher-Tippett el cuál garantiza que solo existen tres posibles dominios de atracción maximal, los cuáles corresponden a las tres distribuciones de la familia de extremos.

Teorema 3.1.1. *(Teorema de Fisher-Tippett). Sea* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión de variables aleatorias i.i.d. y sea* $M_n = \max_{1 \leq j}\{X_j\}$*. Supongamos que existen constantes* $a_n > 0$ *y* b_n *tales que*

$$\mathbb{P}\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right] \to G(x),$$

donde G es una distribución no degenerada. Entonces G es una de las distribuciones de extremos dadas en la definición 3.1.1.

Observese que el Teorema de Fisher-Tippett no da condiciones para determinar cuando se puede normalizar el máximo para que converja en distribución a una variable aleatoria no degenerada. Una primera opción para estudiar este probable surge del siguiente par de resultados, donde ambas pruebas pueden encontrarse en Leadbetter et al. (2012).

Teorema 3.1.2. *(Aproximación de Poisson). Sea* F *una función de distribución. Sea* $\tau \in [0, \infty]$ *y sea* $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión de numeros reales. Los siguientes límites son equivalentes:*

$$\lim_{n \to \infty} n\bar{F}(u_n) = \tau, \tag{3.1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[M_n \leq u_n] = e^{-\tau} \tag{3.2}$$

Este resultado indica que la convergencia del máximo a un límite es una propiedad que se puede estudiar analizando solamente la cola de la distribución de las variables sobre las que se toma el máximo.

Teorema 3.1.3. *Sean* $X_1, X_2, ...$ *v.a.i.i.d. con distribución* F*. Entonces para* $0 < \tau < \infty$*, existe una sucesión* $\{u_n\}$ *tal que 3.1 se cumple si y solo si* $\lim_{x \to \omega_F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-)} = 1$*, donde* $\omega_F = \inf\{x \geq 0 : F(x) = 1\}$.

Nótese que el Teorema anterior no implica que los términos de la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son de la forma $a_n x + b_n$. Consideremos la función de distribución $F(x) = 1 - e^{-x-sen(x)}$ para $x > 0$ y cero en otro caso (ver De Haan, Ferreira (2007)). Se puede probar que esta función de distribución cumple las condiciones del teorema anterior pero no pertenece a algún dominio de atracción maximal.

La utilidad de este Teorema radica en que permite conocer en qué casos no se puede normalizar el máximo para que converga en distribución a un límite no degenerado. Por ejemplo, si se tiene una colección de variables aleatorias i.i.d. con distribución Poisson, no existe una sucesión $\{u_n\}$ tal que (3.2) se satisfaga para $\tau \in (0, \infty)$.

Para dar solución al problema de determinar el dominio de atracción maximal en la siguiente sección veremos resultados que permiten establecer condiciones para que una distribución pertenezca a algún dominio de atracción maximal.

3.1.1. Dominios de atracción

A continuación se presentaran resultados que permitiran caracterizar y diferenciar los distintos dominios de atracción maximales.

Sea F una función de distribución. Denotemos por $\omega_F = \text{ínf}\{x \geq 0 : F(x) = 1\}$. El siguiente concepto define una relación de equivalencia entre funciones de distribución.

Definición 3.1.3. *Se dice que dos funciones de distribución F y G tienen colas, denotadas por $\bar{F}$ y $\bar{G}$, asintóticamente proporcionales si tienen el mismo extremo derecho, es decir, si $\omega_F = \omega_G$, y*

$$\lim_{x \to \omega_F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = c > 0.$$

Esta relación la denotaremos por $\bar{F}(x) \approx \bar{G}(x)$, cuando $x \to \infty$. Si $c = 1$, diremos que $\bar{F}$ y $\bar{G}$ son asintóticamnete equivalentes. El caso $c = 0$ lo denotaremos como $\bar{F}(x) = o(\bar{G}(x))$.

Definición 3.1.4. *Una función medible $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, es de variación regular en ∞ con indice $\alpha \in \mathbb{R}$ (denotado por $U \in VR_\alpha$) si para toda $x > 0$*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\alpha$$

Si $\alpha = 0$ decimos que U es de variación lenta, y en general denotaremos estas funciones con la letra L.

El primer resultado de esta subsección da condiciones necesarias y suficientes para que una distribución pertenezca al dominio de atracción Fréchet.

Teorema 3.1.4. *$F \in D(\phi_{Frechet})$ si y sólo si $\bar{F} \in VR_{-\alpha}$, para $\alpha > 0$.*

Si F es absolutamente continua con densidad f, se tiene una condición suficiente para que $F \in D(\phi_{Frechet})$.

Teorema 3.1.5. *Sea F absolutamente continua con densidad positiva f en alguna vecindad de ∞. Si para algún $\alpha > 0$,*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha$$

entonces $F \in D(\phi_{Frechet})$. En este caso podemos escoger a_n de modo que $a_n f(a_n) \approx \alpha/n$, cuando $n \to \infty$.

En vista de la Definición 3.1.4, resulta interesante determinar qué ocurre con el dominio de atracción maximal al que pertenecen dos funciones de distribución cuando estas son asintóticamente proporcionales.

Teorema 3.1.6. *Sean F y G funciones de distribución y supongamos que $F \in D(\phi_{Frechet})$ con constantes de normalización $a_n > 0$, es decir*

$$\lim_{n \to \infty} F^n(a_n x) = \phi_{Frechet}(x)$$

Entonces

$$\lim_{n \to \infty} G^n(a_n x) = \phi_{Frechet}(ax)$$

para algún $a > 0$ si y sólo si $\bar{F}(x) \approx a^{\alpha}\bar{G}(x)$, cuando $x \to \infty$.

Al dominio de atracción Weibull lo podemos relacionar directamente con el dominio de atracción Fréchet bajo cierta transformación, lo cuál se presenta a continuación.

Teorema 3.1.7. *$F \in D(\phi_{Weibull})$ si y sólo si $\omega_F < \infty$ y $\bar{F}\left(\omega_F - x^{-1}\right) \in VR_{-\alpha}$ cuando $x \to \infty$. En este caso podemos definir*

$$a_n = \left(\frac{1}{\bar{F}}\right)^{-1}(n)$$

y tenemos

$$F^n(\omega_F + (\omega_F - a_n)x) \to \phi_{Weibull}(x).$$

En este caso también es posible dar una condición suficiente y más fácil de probar en el caso que existe la densidad de la distribución.

Teorema 3.1.8. *Sea F una función de distribución con extremo derecho $\omega_F < \infty$ absolutamente continua con densidad f estrictamente positiva en algún intervalo finito (a, ω_F). Si*

$$\lim_{x \to \omega_F} \frac{(\omega_F - x) f(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha > 0,$$

entonces $F \in D(\phi_{Weibull})$.

Al igual que en el dominio de atracción Fréchet, se tiene que este dominio de atracción maximal es cerrado bajo proporcionalidad asintótica.

Teorema 3.1.9. *Sean F y G f.d. con $\omega_F = \omega_G < \infty$ y supongamos que $F \in D(\phi_{Weibull})$ con constantes de normalización $a_n > 0$, es decir*

$$\lim_{n \to \infty} F^n(a_n x + \omega_F) = \phi_{Weibull}(x)$$

Entonces

$$\lim_{n \to \infty} G^n(a_n x + \omega_G) = \phi_{Weibull}(x)$$

para algún $a > 0$ si y sólo si F y G son asintóticamente equivalentes con

$$\lim_{x \to \omega_F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = a^{-\alpha}.$$

Ahora, para dar una caracterización del dominio de atracción Gumbel es necesario introducir la siguiente definición.

Definición 3.1.5. *Sea F una f.d. con extremo $\omega_F \leq \infty$. Supongamos que existe $z < \omega_F$ tal que F tiene representación*

$$\bar{F}(x) = c exp\left\{ -\int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}$$

donde c es una constante positiva, $a(\cdot)$ es una función positiva y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, con densidad a' y $\lim_{x\to\omega_F} a'(x) = 0$. Entonces decimos que F es una función de Von Mises y que a es la función auxiliar de F.

Una caracteriztica importante de las distribuciones de von Mises que utilizaremos como herramienta más delante es el siguiente resultado.

Proposición 3.1.1. *Sea F una distribución de von Mises, entonces F es absolutamente continua con derivada f. Si $\omega_F = \infty$, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} = \infty$.*

Una observación importante es que todas las funciones de distribución que son de von Mises pertenecen al dominio de atracción maximal Gumbel. Más aún, si F es una función de von Mises las constantes normalizadoras para el máximo pueden escogerse de la forma

$$b_n = Q(1 - n^{-1}) \text{ y } a_n = a(b_n),$$

donde a es la función auxiliar de F, y Q es la función cuantil, es decir, $Q(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : p \leq F(x)\}$.

Ahora, una forma de caracterizar al dominio de atracción Gumbel se da en el siguiente resultado.

Teorema 3.1.10. *La f.d. F con extremo derecho $\omega_F \leq \infty$ pertence al dominio de atracción G si y sólo si existe algún $z < \omega_F$ tal que F tenga representación*

$$\bar{F}(x) = c(x) exp\left\{-\int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt\right\} \tag{3.3}$$

donde c y g son funciones medibles que satisfacen $c(x) \to c$ y $g(x) \to 1$ cuando $x \to \omega_F$, y $a(.)$ es una función positiva y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, con densidad a' y $\lim_{x\to\omega_F} a'(x) = 0$.

En este caso se puede tomar

$$a(x) = \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^{\omega_F} \bar{F}(t) dt.$$

El Teorema hace mención a que todas las funciones de distribución que son al menos asintóticamente proporcionales a una función de von Mises, están también en el dominio de atracción Gumbel. Por otro lado, en ocasiones resulta complicado demostrar que la cola de una distribución es de la forma (3.3), aún con la elección de $a(x)$ dada en el teorema. El siguiente resultado provee una condición más sencilla para caracterizar el dominio de atracción maximal Gumbel.

Teorema 3.1.11. *La f.d. F pertenece al dominio de atracción Gumbel si y sólo si existe alguna función positiva $\bar{a}$ tal que*

$$\lim_{x \to \omega_F} \frac{\bar{F}(x + t\bar{a}(x))}{\bar{F}(x)} = e^{-t}, \ t \geq 0.$$

Una posible selección de esta función es $\bar{a}(x) = \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^{\omega_F} \bar{F}(t)dt$.

Al igual que en los casos anteriores, el dominio de atracción maximal Gumbel también posee la propiedad cerradura respecto a proporcionalidad asintótica, como indica el siguiente teorema.

Teorema 3.1.12. *Sean F y G f.d. con igual extremo derecho $\omega_F = \omega_G$ y supongamos que F pertenece al dominio de atracción Gumbel con constantes normalizadoras $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$, es decir,*

$$\lim_{n \to \infty} F^n(a_n x + b_n) = \phi_{Gumbel}(x)$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} G^n(a_n x + b_n) = \phi_{Gumbel}(x + b)$$

si y sólo si F y G son asintóticamente equivalentes con

$$\lim_{x \to \omega_F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = e^b.$$

3.2. Función media de excesos

La finalidad de esta sección es presentar el concepto de la función media de excesos y a la vez estudiar resultados que usan como herramienta este concepto para la detección de un posible dominio de atracción maximal.

Definición 3.2.1. *Sea X una variable aleatoria positiva en Ω. Para $u \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P}(X > u) > 0$, definimos el exceso de u como la variable aleatoria $X - u$ condicionada al evento $X > u$.*

Si X tiene distribución F, definimos la función media de excesos como

$$e_F(u) = \mathbb{E}[X - u \mid X > u]. \tag{3.4}$$

En el caso que $\bar{F}(u) \neq 0$, se tiene que

$$e_F(u) = \frac{\int_u^\infty \bar{F}(y)dy}{\bar{F}(u)}. \tag{3.5}$$

Si X tiene distribución F y denotamos por $F^{[u]}(x)$ la distribución de excesos de X sobre u. Se puede probar que

$$\bar{F}^{[u]}(x) = \frac{\bar{F}(x+u)}{\bar{F}(u)}.$$

Observemos que si F es continua,

$$e_F(u) = \int_0^\infty \bar{F}^{[u]}(x)dx. \tag{3.6}$$

A continuación se analizará como determinar el tipo de cola de una distribución a través de la función media de excesos. Para ello definiremos la distribución de cola integrada. Esta distribución caracteriza a la distribución original, en este contexto si ella es de cola pesada, la distribución original también lo sera

Definición 3.2.2. *Sea F una distribución con media finita μ y $F(0) = 0$. Definimos la distribución de cola integrada F_I asociada a F como $F_I(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^u \bar{F}(y)dy$ para $u \geq 0$, $F_I(u) = 0$ si $u \leq 0$.*

Sea F una función de distribución, denotemos por m_F a la función generadora de momentos de F, es decir $m_F(r) = \int_{-\infty}^\infty e^{rx}dF(x)$.

Ahora definimos a las distribuciones de cola pesada.

Definición 3.2.3. *Sea F una función de distribución. Diremos que F es de cola pesada si $m_F(r) = \infty$, para todo $r > 0$. En el caso que F no se a de cola pesada diremos que es de cola ligera.*

El teorema que a continuación se presenta muestra como podemos determinar el tipo de cola de una distribución a través de saber el tipo de cola correspondiente distribución a la de cola integrada.

Teorema 3.2.1. *. Sea F una función de distribución con media finita μ y $F(0) = 0$. F_I es de cola pesada si y solo si F es de cola pesada.*

Demostración. Primero observemos que si $m_F(r) < \infty$, entonces

$$\begin{aligned} m_F(r) = \int_0^\infty e^{rx} F(dx) &= \int_0^\infty \left(\int_0^x r e^{ry} dy + 1 \right) F(dx) \\ &= r \int_0^\infty e^{ry} \left[\int_y^\infty F(dx) \right] dy + 1 \\ &= r \int_0^\infty e^{ry} \bar{F}(y) dy + 1 \end{aligned}$$

Ahora, de la igualdad anterior y de que F_I tiene densidad $\frac{\bar{F}}{\mu}$, se sigue que $m_{F_I}(r) = \int_0^\infty e^{rx} \frac{\bar{F}(x)}{\mu} dx = \frac{m_F(r)-1}{\mu r} dx$. Dado que $\mu < \infty$ se sigue que $m_F(r) < \infty$ si y sólo si $m_{F_I}(r) < \infty$, lo cual completa la prueba. $\square$

El siguiente resultado permite conocer el comportamiento de la cola de la distribución a partir de la correspondiente función media de excesos.

Teorema 3.2.2. *Sea F una función de distribución de una variable aleatoria X no negativa, con $E[X] = \mu < \infty$, y definimos $r_e(x) = [e_F(x)]^{-1}$, entonces*

1. $\lim_{x\to\infty} r_e(x) = 0$ *implica que F es de cola pesada.*

2. $\liminf_{x\to\infty} r_e(x) > 0$ *implica que F es de cola ligera.*

Demostración. (1) Sea $\epsilon > 0$, existe $x_0 > 0$ tal que

$$r_e(x) = \frac{\bar{F}(x)}{\int_x^\infty \bar{F}(u) du} < \epsilon, \ \forall x \geq x_0,$$

y

$$\int_{x_0}^{x} r_e(u)du = \int_{x_0}^{x} \frac{\bar{F}(u)}{\int_u^\infty \bar{F}(r)dr} du \tag{3.7}$$
$$= log\left(\frac{1}{\mu}\int_x^\infty \bar{F}(r)dr\right) - log\left(\frac{1}{\mu}\int_{x_0}^\infty \bar{F}(r)dr\right) \tag{3.8}$$
$$\leq \epsilon(x - x_0) \leq \epsilon x, \tag{3.9}$$

entonces

$$\frac{log\left(\frac{1}{\mu}\int_x^\infty \bar{F}(r)dr\right) - log\left(\frac{1}{\mu}\int_{x_0}^\infty \bar{F}(r)dr\right)}{x} \leq \epsilon,\, x \geq x_0,$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{log\left(\frac{1}{\mu}\int_x^\infty \bar{F}(r)dr\right)}{x} = 0.$$

Por lo anterior y del Teorema 2.3.1 en Rolski et al. (2009) se sigue que $F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{F}(r)dr$ es de cola pesada, y por el Teorema 3.2.1 F es de cola pesada.

(2) Supongamos que $b := \liminf_{x\to\infty} r_e(x) > 0$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $x_0 > 0$ tal que para todo $x > x_0$ se cumple que

$$r_e(x) > b - \epsilon,$$

entonces

$$\int_0^x \frac{r_e(u)}{x} du = \int_0^{x_0} \frac{r_e(u)}{x} du + \int_{x_0}^x \frac{r_e(u)}{x} du > \int_0^{x_0} \frac{r_e(u)}{x} du + (b - \epsilon)\frac{x - x_0}{x}, \tag{3.10}$$

para todo $x > x_0$. Ahora, de (3.8) se tiene que

$$\int_0^x r_e(u)du = log\left(\frac{1}{\mu}\int_x^\infty \bar{F}(r)dr\right) = log\left(\bar{F}_I(x)\right)$$

Por lo tanto, tomando $\liminf$ en (3.10) y haciendo $\epsilon \to 0$ se sigue que

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{log\left(\bar{F}_I(x)\right)}{x} = \liminf_{x\to\infty} \int_0^x \frac{r_e(u)}{x} du \geq b > 0.$$

Por el Teorema 2.3.1 en Rolski et al. (2009) se tiene que F_I es de cola ligera, por lo tanto, del Teorema 3.2.1 F es de cola ligera.

□

Observación 3.2.1. *Se puede demostrar que si F es una distribución con cola de variación regular, entonces F es una distribución con cola pesada.*

Denotemos por

$$H_{\xi,\mu,\sigma}(x) = exp\left\{ -\left[1 + \xi \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right]_{+}^{-1/\xi} \right\},$$

donde $y_{+} := \max\{y, 0\}$. Se puede probar que $H_{\xi,\mu,\sigma}$ es una función de distribución. Para $\xi > 0$ coincide con la distribución Fréchet, para $\xi < 0$ tenemos la distribución Weibull y la distribución Gumbel aparece como límite cuando $\xi \to 0$. A esta distribución se le conoce como la Distribución Generalizada de Extremos (para máximos). En adelante denotaremos por $D(H_{\xi,\mu,\sigma})$ al dominio de atracción máximal de $H_{\xi,\mu,\sigma}$.

Sean $b, a, \xi \in \mathbb{R}$ y consideremos la siguiente distribución:

Si $\xi \neq 0$

$$P_{\xi,a,b}(x) = 1 - \left(1 + \xi \left(\frac{x-b}{a} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}},$$

si $\xi = 0$

$$P_{\xi,a,b}(x) = 1 - e^{-(\frac{x-b}{a}))},$$

tal que $x \geq 0$ si $\xi \geq 0$ y $0 \leq x \leq -\frac{a}{\xi} + b$ si $\xi < 0$. Se puede demostrar que P es una función de distribución. A la distribución P se le conoce como la Distribución Generalizada de Pareto.

El siguiente teorema indica que si una función de distribución pertenece a algún dominio de atracción maximal, entonces es posible aproximar la cola de la distribución mediante una distribución generalizada de Pareto.

Teorema 3.2.3. *Sea F una función de distribución. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $F \in D(H_{\xi,a,b})$.

b) Existe una función medible positiva a tal que, para $1 + \xi s > 0$, se cumple que

$$\lim_{x \to \omega_F} \frac{\bar{F}(x + sa(x))}{\bar{F}(x)} = \begin{cases} (1+\xi s)^{-1/\xi} & si\ \xi \neq 0 \\ e^{-s} & si\ \xi = 0 \end{cases}$$

Teorema 3.2.4. *(Pickands-Balkema-de Hann). Sea F una función de distribución, entonces $F \in D(\phi_{\cdot})$ si y solo si*

$$\lim_{u \to w_F} \sup_{0<x<w_F-u} \left| \frac{\bar{F}(x+u)}{\bar{F}(u)} - \bar{P}_{\xi,a(u),0}(x) \right| = 0$$

para alguna función medible y positiva $a(u)$.

Observación. Si F es una distribución con cola de variación regular de índice α, entonces el parámetro ξ en la aproximación del Teorema 3.2.4 es de la forma $\xi = \frac{1}{\alpha}$, por lo tanto en la práctica es posible utilizar el método de excesos sobre un umbral para estimar α.

El siguiente resultado indica que todas las funciones de distribución que pertenecen al dominio de atracción maximal Fréchet son tales que su función media de excesos crece de manera lineal y tiende a infinito.

Teorema 3.2.5. *Si F es una función de distribución tal que $\bar{F}(x) \approx x^{-\alpha}L(x)$ con $\alpha > 1$, donde L es de variación lenta en infinito y localmente acotada en $[x_0, \infty)$, para algún $x_0 > 0$, entonces $e_F(u) \approx \frac{u}{\alpha-1}$ cuando $u \to \infty$ y por lo tanto $\lim_{u\to\infty} e_F(u) = \infty$.*

Demostración. Por (3.6) tenemos

$$e_F(u) = [\bar{F}(u)]^{-1} \int_0^{\infty} \bar{F}(x+u)dx = [\bar{F}(u)]^{-1} \int_u^{\infty} \bar{F}(x).$$

Por otro lado, como $\bar{F}(x) \approx x^{-\alpha}$ cuando $x \to \infty$, para $\epsilon > 0$ y u suficientemente grande, tenemos

$$(1-\epsilon) \int_u^{\infty} x^{-\alpha}L(x)dx \leq \int_u^{\infty} \bar{F}(x)dx \leq (1+\epsilon) \int_u^{\infty} x^{-\alpha}L(x)dx,$$

entonces por el Teorema de Karamata

$$(1-\epsilon)u^{1-\alpha}L_2(u) \leq \int_u^{\infty} \bar{F}(x)dx \leq (1+\epsilon)u^{1-\alpha}L_2(u) \tag{3.11}$$

donde L_2 es una función de variación lenta en infinito tal que $L(x) \approx (\alpha - 1)L_2(x)$, $x \to \infty$. Se sigue que

$$(1-\epsilon)\frac{u^{1-\alpha}L_2(u)}{u^{-\alpha}L(u)}\frac{u^{-\alpha}L(u)}{\bar{F}(u)} \leq e_F(u) \leq (1+\epsilon)\frac{u^{1-\alpha}L_2(u)}{u^{-\alpha}L(u)}\frac{u^{-\alpha}L(u)}{\bar{F}(u)}, \tag{3.12}$$

y para u suficientemente grande

$$(1-\epsilon)\frac{1}{\alpha-1} < \frac{L_2(x)}{L(x)} < (\epsilon+1)\frac{1}{\alpha-1}. \tag{3.13}$$

Usando la hipótesis $\bar{F}(x) \approx x^{-\alpha}L(x)$, obtenemos que para u suficientemente grande

$$\frac{1}{1+\epsilon} < \frac{u^{-\alpha}L(u)}{\bar{F}(u)} < \frac{1}{1-\epsilon}. \tag{3.14}$$

Luego de (3.12), (3.13) y (3.14) se tiene que

$$\frac{1-\epsilon}{(1+\epsilon)}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)u \leq e_F(u) \leq \frac{1+\epsilon}{(1-\epsilon)}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)u \tag{3.15}$$

Por lo tanto la prueba se concluye haciendo $\epsilon \to 0$ y tomando $\liminf$ y $\limsup$ cuando $u \to \infty$ en (3.15). □

El siguiente resultado presenta el comportamiento de $\frac{e_F(u)}{u}$ cuando $u \to \omega_F$ y F pertenece al dominio de atracción maximal Gumbel.

Teorema 3.2.6. *Sea $F \in D(\phi_{Gumbel})$ con $\omega_F = \infty$ y función media de excesos e_F tal que $\lim_{x\to\infty} e_F(x)$ existe. Se cumple que $e_F(x) = o(x)$ cuando $x \to \infty$.*

Demostración. Por el Ejercicio 1.1.1 en Resnick (1999), si $F \in D(\phi_G)$, entonces

$$\int_0^\infty x^k F(dx) < \infty, \; \forall k > 0, \tag{3.16}$$

de esto se sigue que e_F es finita.

Si F es de cola ligera. Por la hipótesis de que $\lim_{x\to\infty} e_F(x)$ existe y el Teorema 3.2.2 se tiene que $e_F(x) \to c \in [0, \infty)$, por lo que $\frac{e_F(x)}{x} \to 0$, cuando $x \to \infty$.

Supongamos que F es de cola pesada, entonces por el Teorema 3.2.2 se sigue que $\lim_{x\to\infty} e_F(x) = \infty$.

Como $F \in D(\phi_{Gumbel})$, entonces F es una distribución como en el Teorema 3.1.10, es decir, es de von Mises al menos asíntoticamente.

Ahora supongamos que F es exactamente una distribución de von Mises. Entonces por la Proposición 3.1.1 F es absolutamente continua con derivada f, tal que $\frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} \to \infty$, cuando $x \to \infty$. Por (3.16) se tiene que $x^k f(x) \to 0$, $x \to \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto, por regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} x\bar{F}(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{-2}} = 0.$$

De lo anterior y utilizando de nuevo regla de L'Hôpital se sigue que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e_F(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^\infty \bar{F}(y)dy}{x\bar{F}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\bar{F}(x)}{\bar{F}(x) - xf(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{1 - \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)}} = 0.$$

Si $\bar{F}(x) = c(x)\bar{G}(x)$ con G distribución de von Mises y $c(x) \to c \in (0, \infty)$, para $\epsilon > 0$ y x suficientemente grande se cumplen las siguientes desigualdades:

$$(c - \epsilon)e_G(x) < e_F(x) < (c + \epsilon)e_G(x).$$

La prueba se concluye dividiendo entre x y usando lo demostrado para el caso cuando F es una distribución de von Mises. $\square$

CAPÍTULO 4

Aproximaciones númericas de la probabilidad de ruina

En este capítulo presentamos dos secciones dedicadas a la aplicación de los resultados previos. En la primer sección se presenta una comparación entre las aproximaciones de la probabilidad de ruina para un proceso de riesgo obtenidas en la Proposición 2.0.3 y por simulación. En la segunda sección se muestra como utilizar los resultados del Capítulo 3 para poder detectar el dominio de atracción maximal y de esta forma poder utilizar la aproximación en la Proposición 2.0.3.

4.1. Comparación de aproximaciones de la probabilidad de ruina

Consideremos el proceso de riesgo clásico $R(t) := u+cs-\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, donde los reclamos $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ son independiente y tienen distribución Pareto

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\nu}{x}\right)^{\alpha},$$

donde, $E(Y_k) = \frac{\alpha\nu}{\alpha-1}$, $\alpha > 1$. Supongamos que los reclamos llegan de acuerdo a un proceso Poisson $(N(t), t \geq 0)$ con intensidad λ.

Sean $N^{(n)}(t) = N(nt)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, utilizando la transformada de Laplace se prueba que

$$\frac{N^{(n)}(t) - \lambda nt}{n^{1/\alpha}} \Rightarrow 0.$$

Sea $c > 0$. Definamos $c^{(n)} := c + \frac{\lambda n\mu}{n^{1/\alpha}}$, por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \left(c^{(n)} - \frac{\lambda n\mu}{n^{1/\alpha}} \right) = c.$$

Consideremos $u^{(n)} := u > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si definimos

$$Q^{(n)}(t) := u^{(n)} + c^{(n)}t - \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{N(n)(t)} Y_k.$$

Por el Teorema 2.0.1

$$Q^{(n)}(t) \Rightarrow Q(t) := u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t),$$

donde $Z_\alpha(t)$ es un proceso α-estable.

Por lo tanto del Teorema 2.0.2 y la Proposición 2.0.3 para n suficientemente grande

$$P(T(Q^{(n)}(t)) \leq t) \approx \psi_{apr}(u,t) := P(T(Q(t)) \leq t) = C_\alpha \lambda t(u + ct)^{-\alpha},$$

donde $C_\alpha = \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)cos(\frac{1}{2}\pi\alpha)}$.

Lo anterior permite dar una estimación de $P\{T(R) < t\}$, bajo los supuestos de que $u = 500, 1000, 5000, 1000, 20000$, $c = 1.575$, $t = 1000$, $\alpha = 1.5$, $\lambda = 1$. Dicha estimación (denotada por $\psi_{MC}(u,t)$) se realizó simulando $N = 50000$ veces el proceso $u + cs - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$ y obteniendo la proporción de ocasiones que el proceso estuvo por debajo de cero, con un intervalo de confianza del 95 % de confianza para dicho estimador. Las estimaciones se comparan con la aproximación que se obtiene en la Proposición 2.0.3, lo cual denotamos por $\psi_{apr}(u,t) := C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \lambda t(u + ct)^{-\alpha}$.

Recordemos que el resultado que tenemos para la aproximación de la probabilidad de ruina es asintotico con respecto al capital, lo cuál se ve reflejado en la tabla anterior. A partir de que aumenta el capital inicial, la aproximación y la estimación de la probabilidad de ruina se van aproximando cada vez más.

u	$\psi_{MC}(u,t)$	Intervalo de confianza	$\psi_{apr}(u,t)$
500	0.02640	$(0.02499472, 0.0278052815)$	0.0042206847
1000	0.01020	$(0.009319266, 0.0110807342)$	0.0030531224
5000	0.00094	$(0.0006713847, 0.0012086153)$	0.0007482839
10000	0.00028	$(0.0001333476, 0.0004266524)$	0.0003203528
20000	0.00012	$(0.00002398576, 0.0002160142)$	0.0001258879

Tabla 4.1: Estimación de la probabilidad de ruina del proceso $u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$.

4.2. Aproximación de la probabilidad de ruina para datos reales

En el capítulo anterior estudiamos resultados que permiten detectar el dominio de atarcción maximal de cierta función de distribución F a partir de analizar el comportamiento asintótico de su correspondiente función media de excesos. Esto sugiere que si tenemos datos de una función de distribución desconocida, es conveniente estimar la función media de excesos y en base a su comportamiento poder detectar el dominio de atracción maximal.

A continuación presentamos la función media de excesos empírica.

Definición 4.2.1. *Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución F y sea $\Delta_n(u) = \{k : X_k > u\}$. La función media de excesos empírica está dada por*

$$e_{n,F}(u)\frac{1}{card\Delta_n(u)} \sum_{k\in\Delta_n(u)} (X_k - u),$$

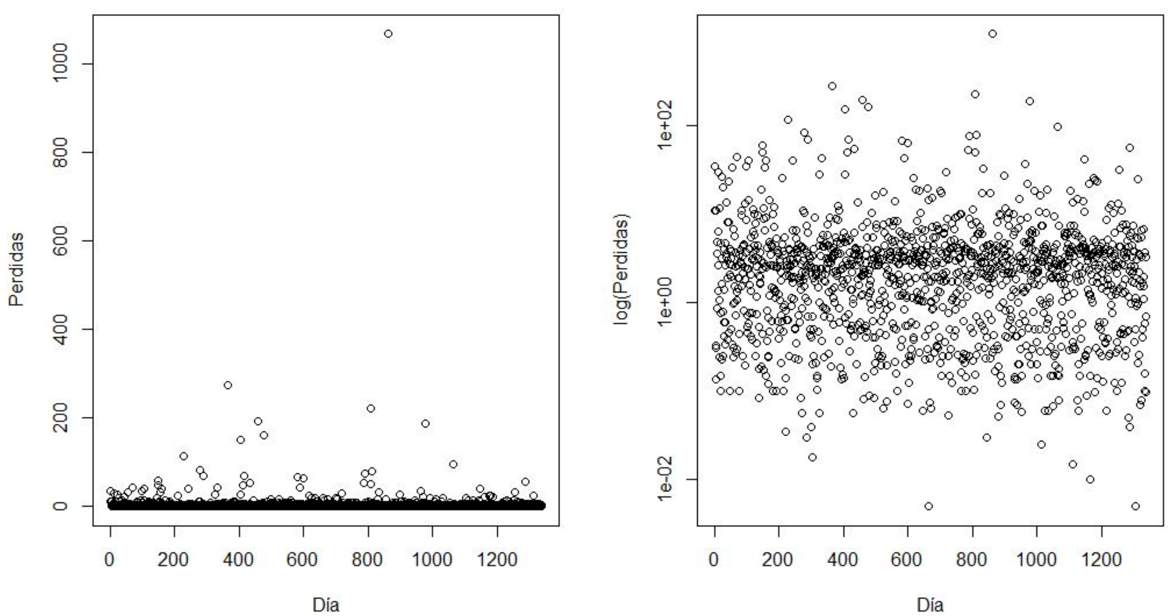
bajo la convención de que si $card\Delta_n(u) = 0$, entonces $e_{n,F}(u) = 0$, $u \geq 0$.

Yang (1978) establece que $e_{n,F}$ es un estimador consistente fuerte de e_F en intervalos compactos, es decir, para cualquier $b > 0$

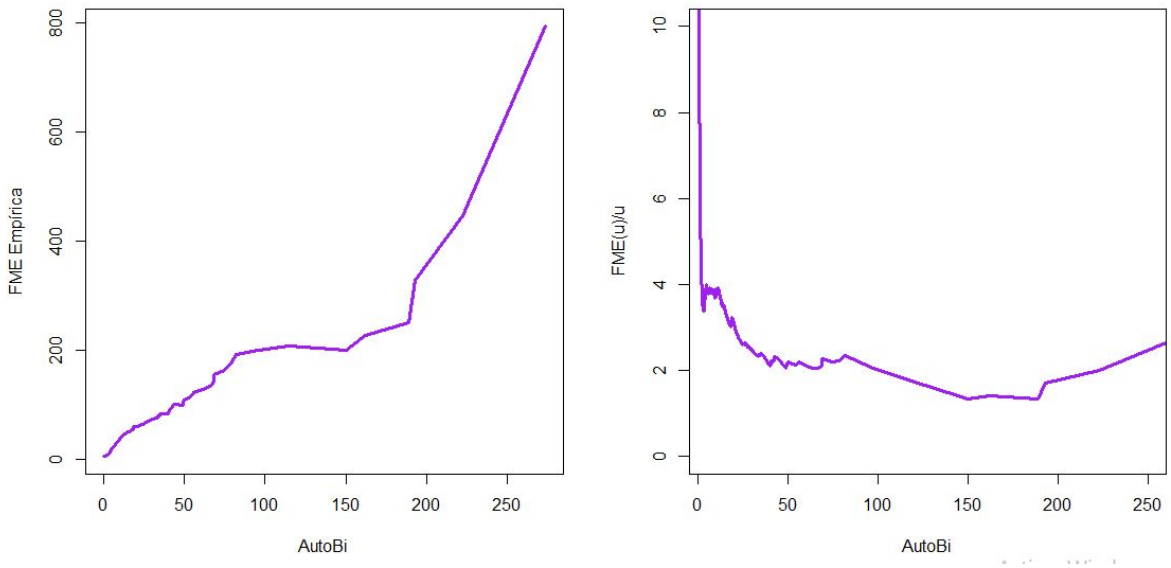
$$P\left[\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq u\leq b} |e_{n,F}(u) - e_F(u)| = 0\right] = 1$$

El siguiente ejemplo ilustra un caso en el que es posible detectar el dominio de atracción de un conjunto de datos, además de como utilizar la teoría estudiada para dar una aproximación asintótica de la probabilidad de ruina para el proceso de riesgo que tiene como reclamos al conjunto de datos.

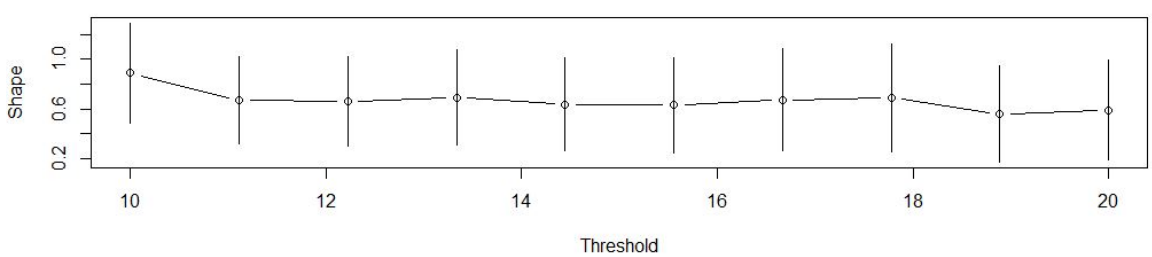
Ejemplo 4.2.1. *Analizamos la base da datos AutoBi de la librería insuranceData en R, la cuál contiene información colectada por el Insurance Research Council sobre pérdidas de aseguradoras.*



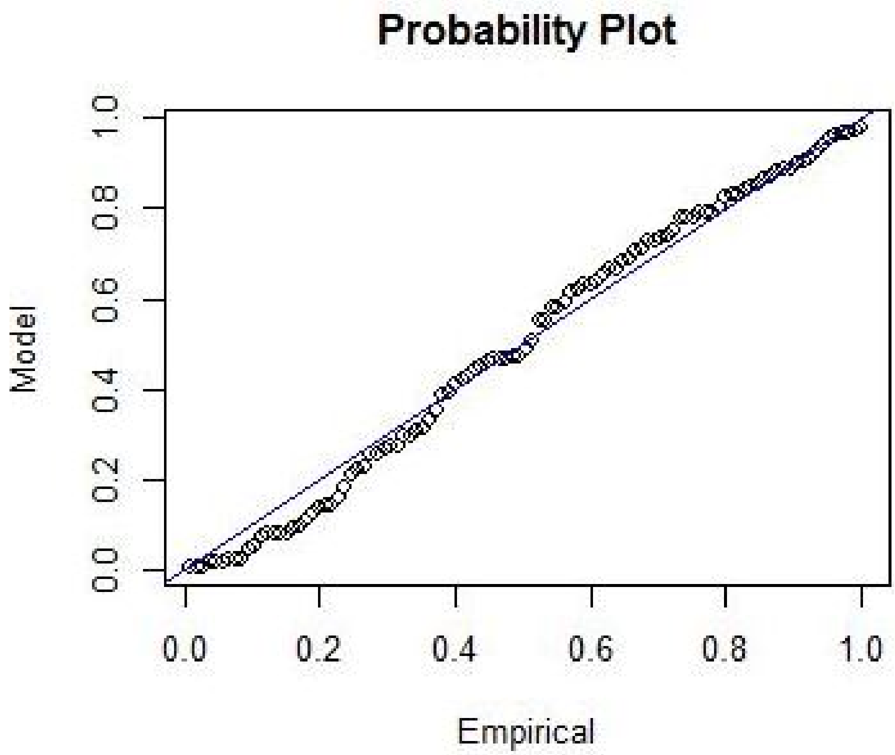
En estas gráficas se visualizan los datos correspondientes a las perdidas y la función logaritmo de estas respectivamente. Podemos observar que no se muestra ningún patron sobre estas gráficas, por lo cuál no podemos rechazar el supuesto de que provienen de una muestra independiente. Ahora analicemos el comportamiento de la función media de excesos empírica y el cociente $\frac{e_F(u)}{u}$.

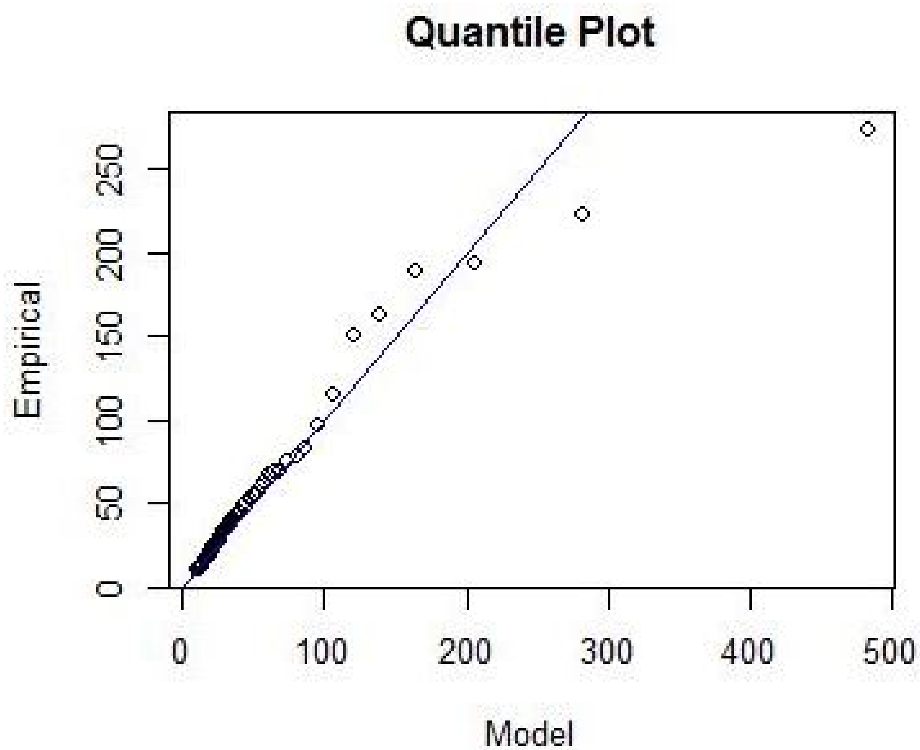


Primero observemos de las gráficas anteriores que el límite de la función media de excesos empírica tiende a infinito, entonces por el Teorema 3.2.2 hay evidencia en contra de que la distribución original de los datos sea de cola ligera, por lo que dicha distribución no puede pertenecer al dominio atracción Weibull. También notemos que empíricamente $\lim_{u\to\infty} \frac{e_F(u)}{u} > 0$,*, entonces por el Teorema 3.2.6 descartamos los datos provienen de una f.d en el el dominio de atracción maximal Gumbel.*



De la gráfica anterior, elegimos umbral $u = 16$*. Los estimadores de los parámetros de la DGP son* $\hat{\sigma} = 0.05$ *y* $\hat{\alpha} = 1.501$.


Probability Plot
Model
Empirical
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



Notemos que los datos se ajustan bien a una distribución perteneciente al dominio de atracción Fréchet. En este caso es posible dar una aproximación a las probabilidades de ruina para un proceso tal que la distribución de los montos por reclamo sea igual a la distribucón de la cuál provinen los datos de la base AutoBi. En esta caso la estimación del parámetro de forma α *es* $\hat{\alpha} = 1.501$.

Dado el análisis anterior procedemos a visualizar las probabilidades de los tiempos de ruina a horizonte con respecto al tiempo y distintos capitales iniciales, utilizando la aproximación asintotica presentada en la Proposición 2.0.3.

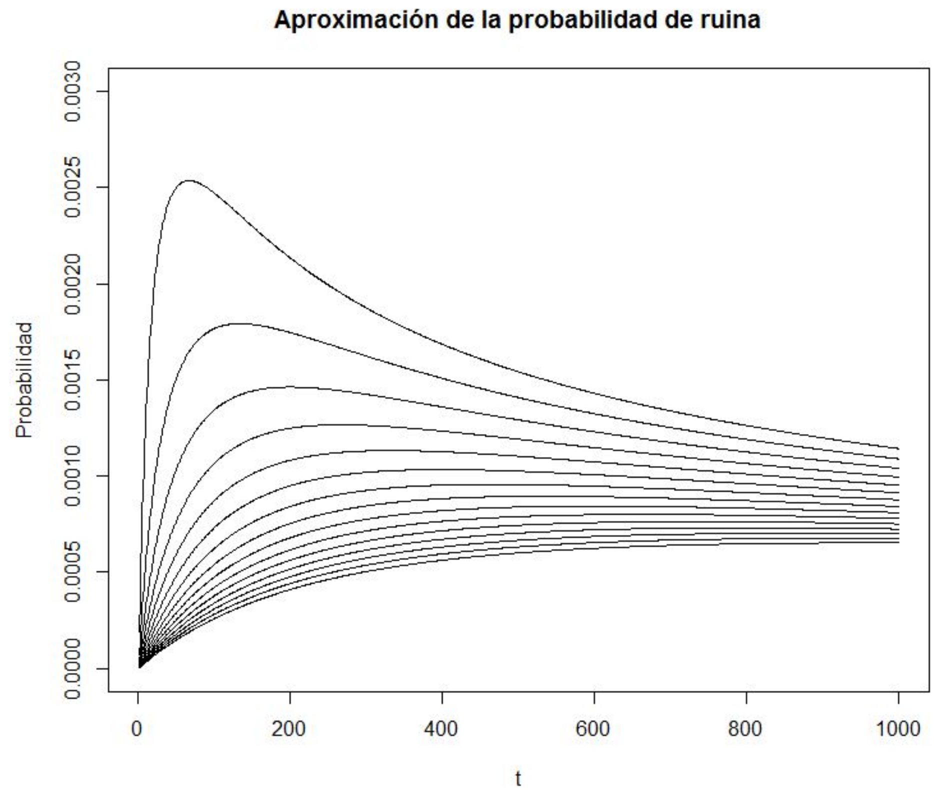
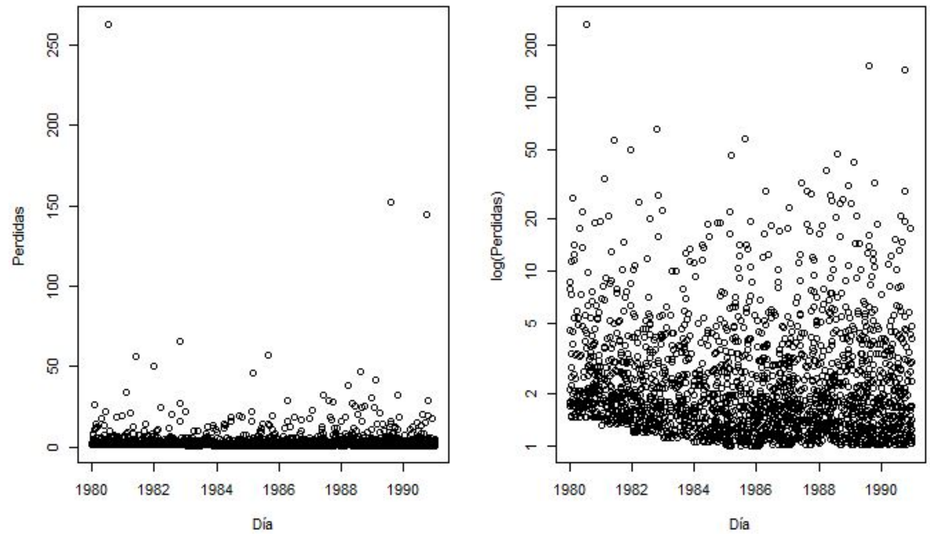


Figura 4.1: Se ilustran las aproximaciones de la probabilidad de ruina para el modelo $Q(t) = u + ct - \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_\alpha(t)$ en función del tiempo obtenidas a partir del teorema 3, donde $u = 100, 200, ..., 1500$, $c = 3$, $\lambda = 0.5$, $\mu = 5.95$ y $\alpha = 1.501$.

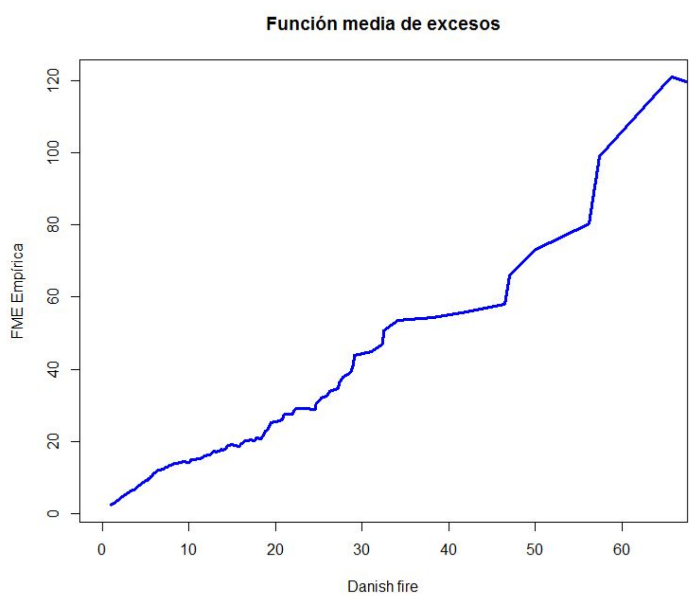
En el ejemplo anterior es posible detectar el dominio de atración maximal de los datos y dar una aproximación asintótica para la probabilidad de ruina, sin embargo, esto no siempre es posible. El siguiente ejemplo muestra un caso en el que se detecta el dominio de atracción maximal pero no es posible dar una aproximación de la probabilidad de ruina con el método utilizado anteriormente.

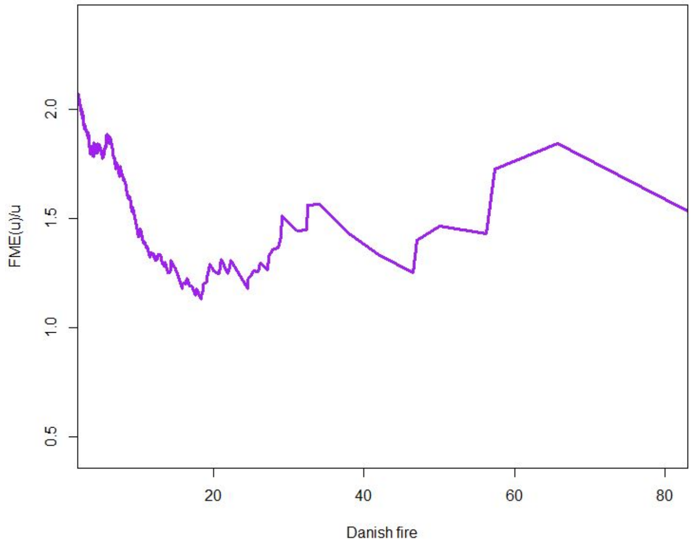
Ejemplo 4.2.2. *Consideremos la base datos DanishFire. El conjunto de datos univariable se colectó en el Reaseguro de Copenhague y comprende 2167 pérdidas por incendio durante el período 1980 a 1990, los cuales se expresan en millones de coronas danesas.*



En las gráficas anteriores se visualizan los datos correspondientes a las perdidas y la función logaritmo de estas respectivamente. Podemos observar que no muestra ningún patrón sobre estas gráficas, por lo cuál no podemos rechazar el supuesto de que provienen de una muestra independiente.

Procedemos a determinar el dominio de atracción.

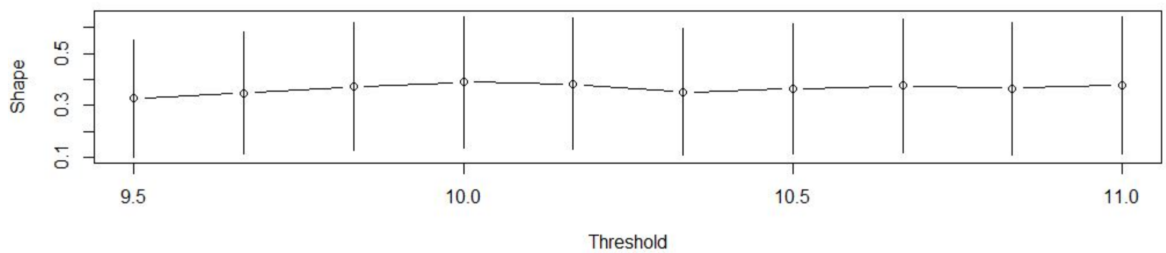




Observemos de las gráficas anteriores que la función media de excesos empírica tiende a infinito. Ahora, por el primer inciso de Teorema 3.2.2 tenemos un indicio de que la distribución de la que provienen los datos es de cola pesada, lo cuál descarta que la distribución original pueda pertenecer al dominio de atracción maximal Weibull, dado que este dominio solo se conforma de distribuciones de cola ligera. También podemos notar que empíricamnete $\lim_{u\to\infty} \frac{e_F(u)}{u} > 0$, *por lo cual del Teorema 3.2.6 podemos descartar que los datos provienen del dominio de atracción maximal Gumbel.*

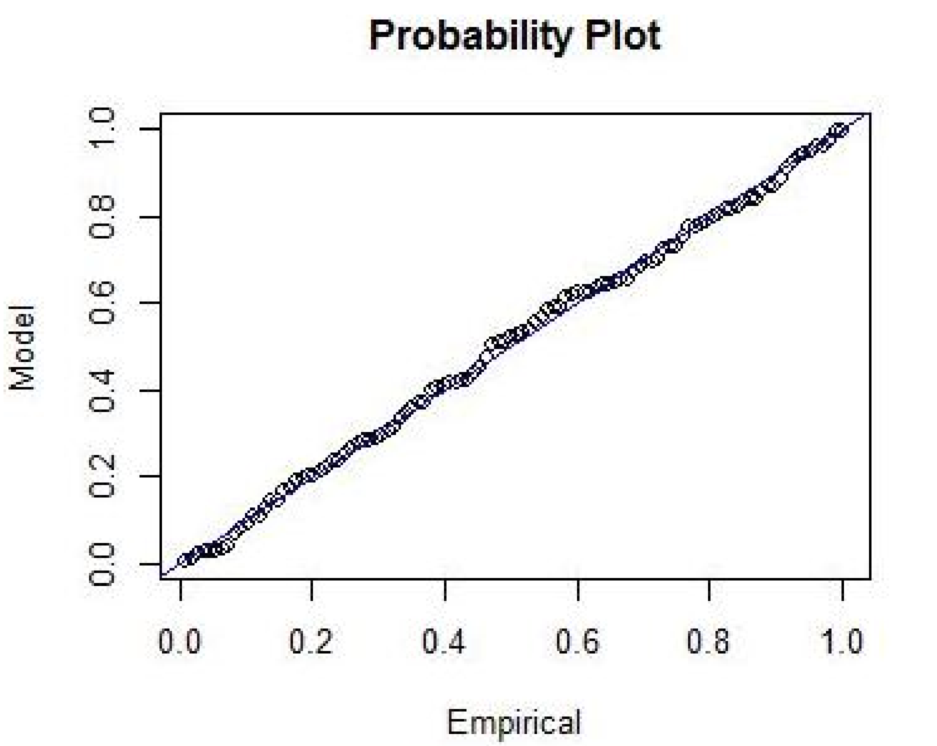
Como se han descartado los dominios de atracción Gumbel y Weibull, si la distribución de la que provienen los datos pertenece a un dominio de atracción máximal este debe ser el Fréchet, dado que para F *en este dominio de atracción cumple que* $\lim_{u\to\infty} e_F(u) = \infty$ *y* $\lim_{u\to\infty} \frac{e_F(u)}{u} > 0$, *por lo cuál las gráficas anteriores no aportan información en contra de que la distribución original pertenece al dominio de atracción maximal Fréchet. Ahora, el Teorema 3.2.4 sugiere que podemos aproximar la distribución de los excesos, esto lo haremos vía el método excesos sobre un umbral, el cual es posible realizar mediante el comando gpd.fit en el software R.*

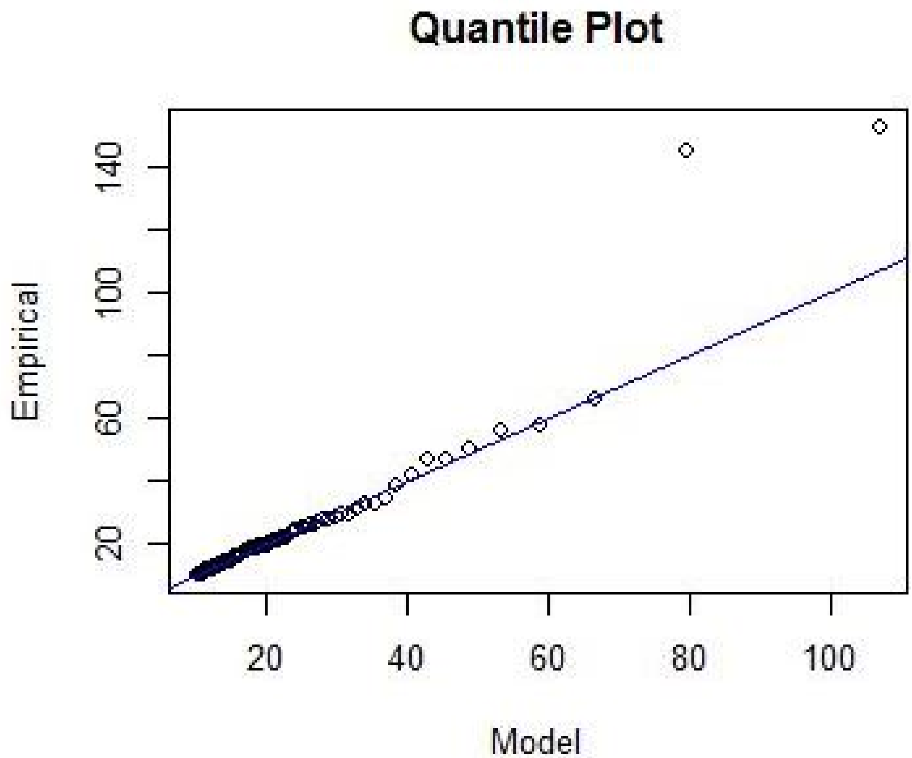
Primero determinamos un umbral adecuado para la aproximación de la cola, es decir, elegimos u *tal que tengamos entre un* 3 *y* $5\,\%$ *de excedencias. Para esto utilizaremos el comando gpd.fitrage de la libreria ISMEV.*



observamos que un umbral adecuado es $u = 10$ *dado que el porcentaje de excedencias a partir de el es menor que* 0.05 *y mayor a* 0.01.

Ahora, estimamos los parámetros de la DGP que aparece en la aproximación de la distribución de los excesos del Teorema 3.2.4. Se obtuvo que los estimadores son $\hat{\sigma} = 0.049$ *y* $\hat{\alpha} = 2.56$.



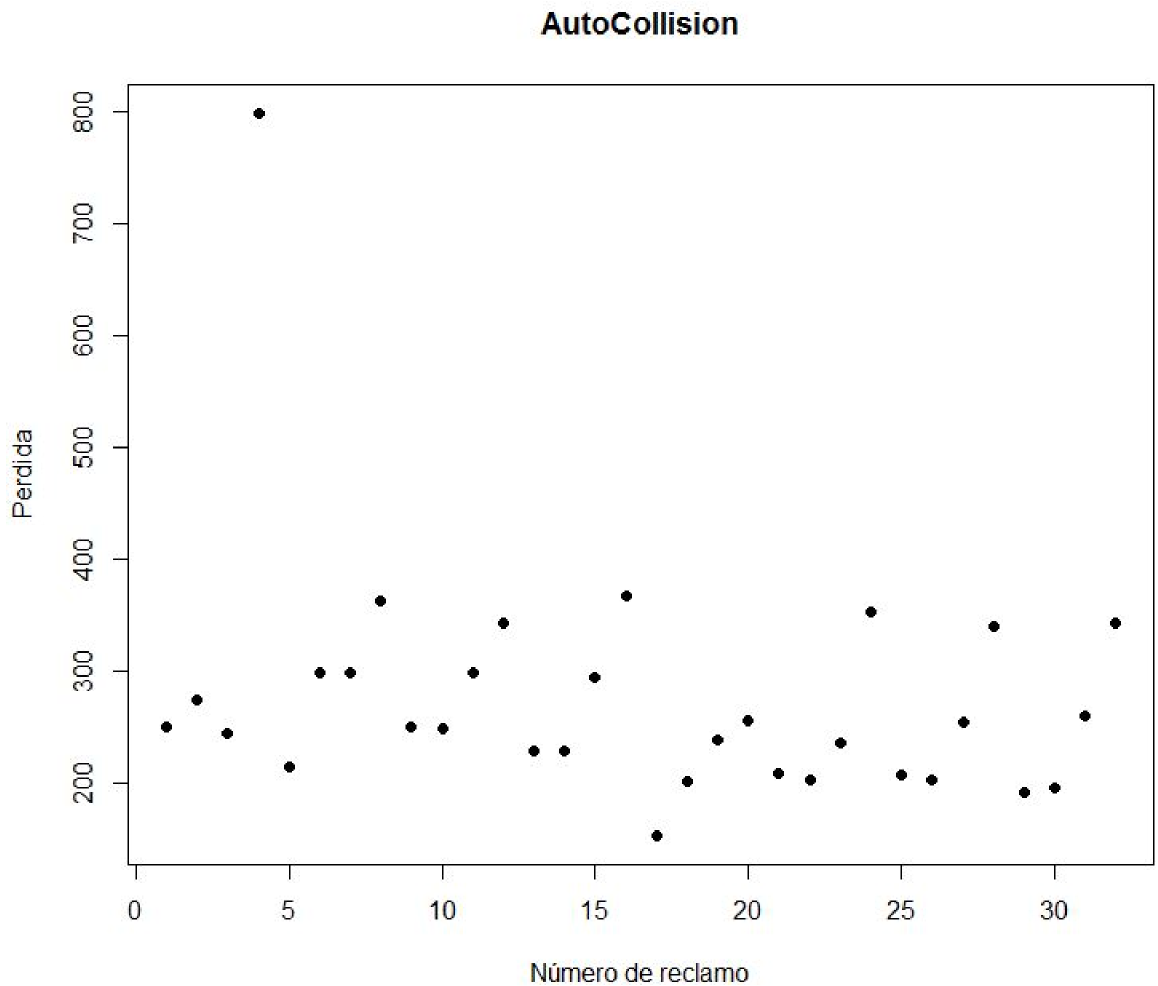


En las gráficas anteriores podemos observar que efectivamente los datos se ajustan bien al dominio de atracción Fréchet.

Por otro lado, a pesar de que los datos provienen de una distribución en el dominio de atracción maximal Fréchet, es decir, de una distrbución de variación regular, no es posible aplicar la aproximación de la Proposición 2.0.3 dado que el estimador de α es $\hat{\alpha} = 2.56$ y el resultado requiere que $\alpha < 2$.

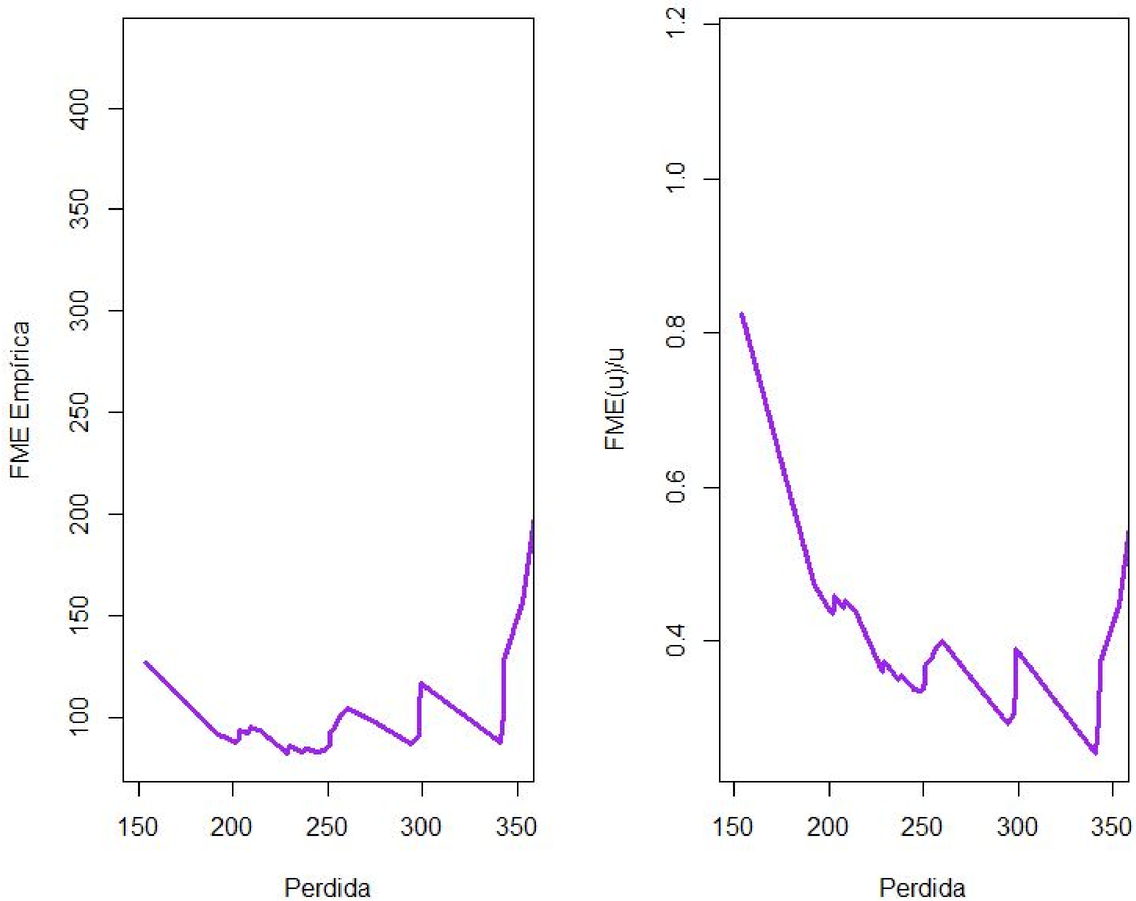
Ahora estudiemos un caso en el que no es posible detectar el dominio de atracción maximal para la distribución de un conjunto de datos.

Ejemplo 4.2.3. *Consideremos la base de datos AutoCollision de la librería InsuranceData, esta base de datos contiene registro de perdidas de polizas de seguros en Reino unido.*



Podemos observar de la gráfica anterior que los datos no presentan algún patrón, por lo cuál no tenemos evidencia en contra de que los datos provienen de una muestra independiente. Ahora notemos que hay datos atípicos, lo que da evidencia en contra de que la distribución original de los datos tenga extremo derecho finito, por lo cual no es posible que la distribución pertenezca al dominio de atracción maximal Weibull.

Por otro lado, a continuación analizamos la función media de excesos empírica y el cociente $\frac{e_F(u)}{u}$.



Observemos de las gráficas anteriores que la función media de excesos empírica es finita, por lo cual del Teorema 3.2.5 la función de distribución original es de cola ligera, por lo cuál descartamos que los datos provienen del dominio de atracción Fréchet. Por otro lado, empíricamente $\frac{e_F(u)}{u}$ el cociente es mayor que cero asintóticamente, entonces por el teorema 3.2.6 esto es evidencia en contra de que los datos pertenezcan al dominio de atracción Gumbel. Por lo tanto, del análisis anterior tenemos evidencia en contra de que la distribución original de los datos pertenezca a algún dominio de atracción maximal.

Faltan conclusiones.

Bibliografía

S.I. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*. Springer, 2013.

Furrer, Hansjörg and Michna, Zbigniew and Weron, Aleksander. *Stable Lévy motion approximation in collective risk theory*. Elsevier, 1997.

Billingsley, Patrick. *Convergence of Probability Measures*. John Wiley & Sons, 2013.

Rolski, Tomasz and Schmidli, Hanspeter and Schmidt, Volker and Teugels, Jozef L. *Stochastic processes for insurance and finance*. Mathematics of Operations Research 5, 67-85, 1980.

Whitt, W. *Some useful functions for functional limit theorems*. John Wiley & Sons, 2009.

Samorodnitsky, G. and Taqqu M.S. *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman & Hall, 1994.

S.I. Resnick. *Heavy-Tail Phenomena*. Springer, 2007.

Leadbetter, M. R., Lindgren, G. and Rootzén, H. *Extremes and related properties of random sequences and processes*. Springer Science & Business Media, 2012.

Feller, W. *An introduction to probability theory and its applications. Volume I*. John Wiley & Sons, 2008.

Yang, G. *Estimation of a biometric function*. The Annals of Statistics 6 (1), 112–116, 1978.

Jacod, J. and A.N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer, 1987.

De Haan, Laurens and Ferreira, Ana. *Extreme value theory: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2007.

Willekens, Eric. *On the supremum of an infinitely divisible process*. Stochastic processes and their applications, 1987.

Su, Chun and Tang, Qi-he. *Characterizations on heavy-tailed distributions by means of hazard rate*. Springer, 2003.