CIMAT Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

ALGUNOS TEOREMAS LIMITES PARA LA CAMINATA ALEATORIA RAMIFICANTE

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con especialidad en

Probabilidad y Estadística

Presenta

José Antonio Rosas Aguirre

Director de Tesis:

Dr. Juan Carlos Pardo Millán

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto., marzo de 2021

Agradecimientos

Agradezco a mi madre y a mi hermana por todo su apoyo y confianza.

A mi asesor, el Dr. Juan Carlos Pardo le agradezco por su guía, su paciencia y por el tiempo dedicado durante la realización de este trabajo.

Al CIMAT, agradezco por todas las facilidades brindadas durante la duración de mis estudios.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca que se me otorgó durante los dos años que cursé la maestría, apoyo que fue fundamental para realizar mis estudios.

Índice general

Introducción

La teoría de procesos de ramificación es un área importante dentro de la teoría de procesos estocásticos. Esta familia de procesos modelan la dinámica de una población, y el ejemplo más simple es la cadena de Bienaymé-Galton-Watson (BGW). Este modelo fue propuesto en el año 1874 por Francis Galton y Henry William Watson en [12], con el objetivo de estudiar la probabilidad de que ciertos apellidos de aristócratas británicos desaparezcan. No obstante, años después se descubrió que dicho modelo había sido estudiado años antes por Irénée-Jules Bienaymé de forma independiente al trabajo de Galton y Watson. Este es uno de los modelos clásicos en el área de procesos estocásticos, y es usado en la actualidad para modelar fenómenos biológicos, epidemiológicos, físicos, químicos, entre otros.

Por otro lado, la caminata aleatoria ramificante (CAR) es una generalización del Modelo de BGW, no solo cuenta la cantidad de individuos presentes en la población en cada generación, sino además añade una componente espacial. En otras palabras, además de saber cuantos individuos hay en cada generación, podemos saber cual es la posición de cada uno de ellos. Esto permite modelar de mejor manera poblaciones que se mueven en cierta región y así estudiar fenómenos más complejos, que involucran la dispersión de la población.

El objetivo principal de este trabajo, es dar una breve introducción al estudio de la CAR, así como algunas propiedades asintóticas importantes del modelo. En particular, nos enfocamos en el comportamiento asintótico de la partícula o individuo más a la izquierda de una población que se desarrolla en la recta real. Para lo cual primero se estudiará una martingala asociada al proceso, que permite estudiar el crecimiento espacial de la CAR. En particular, conocer a dicha martingala nos permite estudiar el comportamiento de la partícula más a la izquierda.

La principal referencia en el desarrollo de este trabajo ha sido el extenso estudio que Zhan Shi ha tenido sobre el tema, principalmente en [3] [10] y [11] además del articulo de Kyprianou [5]. Por otro lado, también se estudiaron diversos artículos como Lyons [6], Neveu [7] y Kingman [4] para conocer más a fondo algunas de los resultados presentados.

En el Capítulo 1 se introduce a los procesos de BGW, así como la definición de árboles asociados a dichos procesos. Además, vamos a introducir a los árboles de tamaño sesgado, que se usaran, vía un cambio de medida, para después probar el Teorema de Kesten-Stigum, el cual nos permite estudiar la probabilidad de extinción del árbol por medio de una martingala.

En el Capítulo 2 se introduce a la caminata aleatoria ramificante y a la martingala aditiva asociada a esta. El resultado principal de este capitulo es el Teorema de convergencia de martingalas de Biggins, que es una generalización del Teorema de Kesten-Stigum, en el contexto de la CAR. Para esto hacemos uso de un cambio de medida, el cual se deriva de la martingala aditiva, así como de la descomposición de la espina de la CAR.

En el Capítulo 3 se presentan los dos resultados principales del trabajo, los cuales tratan sobre la convergencia de la posición del individuo más a la izquierda en el árbol bajo ciertas normalizaciones. El primero es una ley fuerte de los grandes números, mientras que el segundo es un teorema del tipo límite central.

Capítulo 1

Árboles de Bienaymé-Galton-Watson

En este capítulo vamos a introducir el concepto de árboles de Bienaymé-Galton-Watson (BGW). Estamos interesados en estudiar el comportamiento de dichos árboles para tiempos largos. Para esto veremos un par de propiedades clásicas de los procesos de BGW e introducimos los árboles de tamaño sesgado, para así probar el Teorema de Kesten-Stigum. Este último nos da una interpretación del crecimiento del árbol de BGW.

1.1. Árboles de Bienaymé-Galton-Watson y sus probabilidades de extinción.

Estamos interesados en árboles con raíz. El árbol con raíz más sencillo es el árbol l-regular con raíz, donde se inicia con un individuo, llamado raíz y cada vértice tiene un número fijo $l \geq 1$, de descendientes. En este caso podemos definir a Z_n como el número de vértices que están a una altura n. A lo largo de este trabajo también interpretaremos a los vertices del árbol como partículas o individuos. En particular $Z_n = l^n$, para todo $n \geq 0$.

Dado que el caso anterior puede estudiarse de forma clara sin dificultad, no será de nuestro interés. Para muchas aplicaciones es mejor pensar en árboles en los que el número de descendientes de cada vértice es aleatorio. El caso más sencillo es cuando este número aleatorio está dado por una colección de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Este árbol es conocido como el árbol de Bienaymé-Galton-Watson.

En general, vamos asumir que un árbol de Bienaymé-Galton-Watson inicia con un número determinista de individuos. Cada uno de dichos individuos producen un cierto número de descendientes, de acuerdo a una distribución de probabilidad fija, y de forma independiente con respecto a los otros individuos presentes en la población. A los descendientes de la población inicial se le conoce como la primera generación. Después, cada uno de los individuos en la primera generación produce nuevos individuos de acuerdo a la misma distribución de probabilidad que sus padres. De igual manera, lo hacen de forma independiente entre cada uno de ellos. Este procedimiento se realiza de forma iterativa para poder producir el árbol.

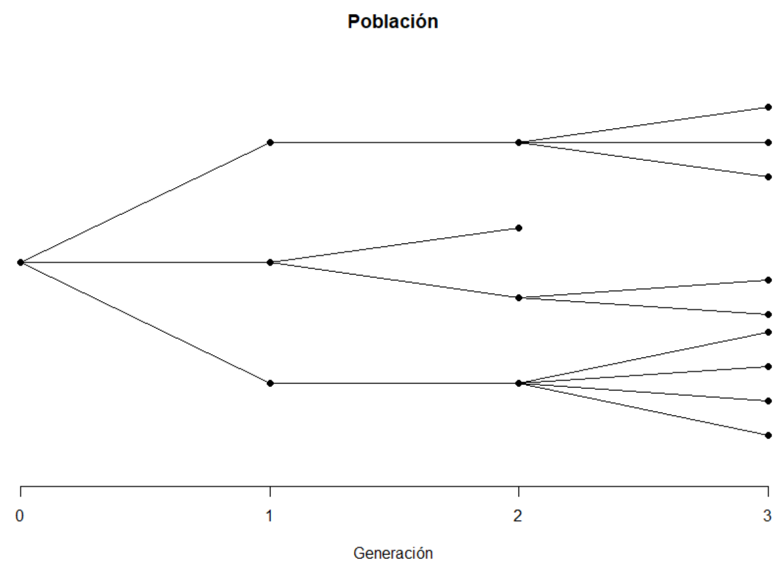

Figura 1.1: Realización de una población de BGW.

Como en el caso l-regular, vamos a denotar por Z_n al número de individuos en la n-ésima generación. Notemos que en este caso Z_n es una variable aleatoria. Por construcción, es claro que si $Z_n = 0$ para algún n, entonces $Z_k = 0$ para todo $n \leq k$.

Además se cumple la propiedad de ramificación, la cual nos dice que al considerar un árbol con a individuos iniciales es igual que considerar a árboles independientes, cada uno con un solo individuo inicial. En términos del tamaño del árbol, lo podemos escribir como sigue: si $Z_0 = a + b$, con $a, b \in \mathbb{N}$, entonces

$$Z_m \stackrel{d}{=} Z_m^{(a)} + Z_m^{(b)},$$

donde $\left(Z_n^{(a)} : n \geq 1\right)$ y $\left(Z_n^{(b)} : n \geq 1\right)$ corresponden a árboles de BGW independientes, tales que $Z_0^{(a)} = a$ y $Z_0^{(b)} = b$.

Por simplicidad consideraremos $Z_0 = 1$. A este individuo lo llamaremos ancestro común o raíz. La propiedad de ramificación justifica dicha suposición.

Sea ξ la variable aleatoria con valores en $\{0, 1, 2, ...\}$, que caracteriza la ley de reproducción de los individuos del árbol. Vamos a denotar

$$p_i := \mathbb{P}(\xi = i),$$

la probabilidad de que un individuo tenga i descendientes. También usaremos

$$m := \mathbb{E}[\xi] = \sum_{k \geq 0} k p_k,$$

el número esperado de descendientes por individuo. Por construcción, se cumple la siguiente relación de recurrencia

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} \xi_k^{(n)}, \quad Z_0 = 1, \tag{1.1}$$

donde $\left\{\xi_k^{(n)} : k = 1, 2, \dots ; n = 0, 1, 2, \dots\right\}$ es una colección de v.a. independientes con la misma distribución común de ξ.

Una de las primeras preguntas que nos gustaría responder, es ¿Cuál es la probabilidad de extinción del árbol? En otras palabras, nos interesa el valor de

$$\mathbb{P}(Z_n = 0 \ \text{ para algún } n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right)$$

la cual denotaremos por q.

Un primer indicador del crecimiento del árbol lo podemos encontrar en el valor esperado de Z_n. Tomando en cuenta la ecuación (1.1) y la independencia de las v.a. ξ, tenemos que Z_n es independiente de $\xi_k^{(m)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$m \leq n$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1}] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Z_{n+1}|Z_n]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{Z_n} \xi_k^{(n)} \middle| Z_n\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{Z_n} \mathbb{E}\left[\xi_k^{(n)} \middle| Z_n\right]\right] \\ &= \mathbb{E}[\xi]\mathbb{E}[Z_n] \\ &= m\mathbb{E}[Z_n]\end{aligned}$$

usando la condición inicial $Z_0 = 1$, resolviendo la recurrencia anterior encontramos que

$$\mathbb{E}[Z_n] = m^n, \text{ para } n \geq 0.$$

Entonces, de la igualdad anterior podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_n] = \begin{cases} 0, & \textit{para } m < 1, \\ 1, & \textit{para } m = 1, \\ \infty, & \textit{para } m > 1. \end{cases}$$

En otras palabras, tenemos una transición de fase en $m = 1$, en el comportamiento a largo plazo del proceso Z, esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.1. Consideremos el proceso $(Z_n : n \geq 1)$ descrito anteriormente y m la esperanza de la ley de reproducción asociada. Decimos que el proceso es **sub-crítico** cuando $m < 1$; **crítico**, cuando $m = 1$; y **super-crítico**, cuando $m > 1$.

Por construcción, el proceso $(Z_n : n \geq 0)$ corresponde a un proceso de BGW, el cual se ha estudiado desde hace más de un siglo. El siguiente resultado es clásico y presentamos su prueba para desarrollar técnicas que nos serán de utilidad en lo subsecuente.

Teorema 1.1. *La probabilidad de extinción q es la raíz más pequeña de la ecuación $f(s) = s$ para $s \in [0, 1]$, donde*

$$f(s) = \mathbb{E}\left[s^{\xi}\right] = \sum_{k\geq 0} s^k p_k$$

es la función generadora de probabilidad de ξ. En particular, $q = 1$ si y solo si $m \leq 1$.

Demostración.
Comencemos recordando que al ser f una función generadora de probabilidad cumple que $f(0) = \mathbb{P}(\xi = 0)$, $f(1) = 1$, $f'(1) = \mathbb{E}[\xi]$ y que, al ser una serie de potencias con coeficientes positivos, es estrictamente continua y estrictamente convexa. Más aún, estas propiedades las cumple cualquier función generadora de probabilidad.

Luego, condicionando al valor de Z_n, usando la ecuación (1.1) tenemos que

$$\mathbb{E}\left[s^{Z_{n+1}}|Z_n\right] = \left(\mathbb{E}[s^{\xi}]\right)^{Z_n} = f(s)^{Z_n}.$$

Por lo que, si denotamos por h_n a la función generadora de probabilidad de Z_n,

$$h_{n+1}(s) = \mathbb{E}\left[s^{Z_{n+1}}\right] = \mathbb{E}\left[f(s)^{Z_n}\right] = h_n(f(s)).$$

En particular, como $Z_1 \stackrel{d}{=} \xi$, tenemos que $h_2(s) = f(f(s))$. Más aún, podemos concluir que h_n en realidad es igual a la n-ésima convolución de f consigo misma, por lo que también se cumple la relación

$$h_{n+1}(s) = f(h_n(s)).$$

También, se tiene que $\mathbb{P}(Z_n = 0) = h_n(0)$.

Por otro lado, como $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$, se cumple que

$$q = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} h_n(0),$$

y por definición de h_n tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} h_n(0) = f\left(\lim_{n\to\infty} h_{n-1}(0)\right) = f(q),$$

al ser f es continua. Esto es, q es solución de la ecuación

$$f(s) = s.$$

Ahora, consideremos la función

$$g(s) = f(s) - s, \quad \text{para } s \in [0,1].$$

Supongamos que $m \leq 1$. Usando la observación inicial, tenemos que la función g es tal que $g(0) = p_0 \geq 0$, $g(1) = 0$. Además cumple $g'(s)$ es estrictamente negativa en $[0,1)$, ya que g' estrictamente creciente (por serlo f') y además $g'(1) = m - 1 \leq 0$. Entonces, g es estrictamente decreciente en $[0,1)$ y como $g(1) = 0$, podemos concluir que

$$f(s) > s \text{ para } s \in [0,1).$$

Esto es, no existe ninguna raíz de la ecuación $f(s) = s$ en $[0,1)$, lo que implica que

$$q = 1.$$

Ahora consideremos el caso $m > 1$. De nuevo usando que $f'(1) = m$, tenemos que

$$g'(1) = m - 1 > 0.$$

Entonces, por la continuidad de g', podemos encontrar un $s_0 < 1$ tal que para todo $s_0 \leq s \leq 1$ se cumple que $g'(s) > 0$. Así, del teorema del valor medio, existe un $s_1 \in (s_0, 1)$ tal que

$$\frac{g(1) - g(s_0)}{1 - s_0} = g'(s_1) > 0,$$

y lo que implica que

$$g(s_0) < 0,$$

ya que $g(1) = 0$. Entonces, como $g(0) = p_0 > 0$ y $g(s_0) < 0$, por la continuidad de g existe un $s_2 \in (0, s_0)$ tal que

$$g(s_2) = 0,$$

esto es

$$f(s_2) = s_2.$$

Además, de la convexidad estricta de f podemos afirmar que s_2 es la única raíz de dicha ecuación en $(0,1)$. Ahora bien, al ser s_2 punto fijo de f es fácil deducir que también lo es de h_n, ya que

$$h_n(s_2) = h_{n-1}(f(s_2)) = h_{n-1}(s_2).$$

También tenemos que al ser f_n monótona creciente

$$h_n(0) \leq h_n(s_2) = s_2$$

y por tanto tenemos que

$$q = \lim_{n\to\infty} f_n(0) \leq s_2,$$

de donde tenemos que $q = s_2$, al ser s_2 el único punto fijo de f en $(0,1)$. En particular se cumple que $q < 1$. Con esto termina la prueba. $\square$

El resultado anterior nos dice que, tanto en el caso crítico, como en el subcrítico el proceso de BGW muere con probabilidad 1. Mientras que en el caso supercrítico existe probabilidad positiva de que el árbol sobreviva. Como estamos interesados en el comportamiento a largo plazo de los árboles de BGW, el caso más interesante para nosotros es el caso supercrítico, i.e. $m > 1$.

A continuación, presentamos un objeto que será de mucha ayuda para el análisis siguiente. Definimos

$$W_n := \frac{Z_n}{m^n}, \quad n \geq 0,$$

el cual está bien definido siempre que $m < \infty$. El fácil ver que $(W_n : n \geq 0)$ es una martingala de media 1, con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ generada por $(Z_n : n \geq 0)$. En efecto, usando la ecuación (1.1), gracias a la independencia vemos que

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = mZ_n,$$

de donde se sigue que

$$\mathbb{E}[W_n] = 1 \quad y \quad \mathbb{E}\left[W_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = W_n,$$

como se buscaba.

Por otro lado, como $(W_n : n \geq 0)$ es una martingala no negativa, tenemos que

$$W_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} W_\infty, \quad c.s.$$

para alguna variable aleatoria no negativa W_∞.

Del Lema de Fatou, podemos afirmar que

$$0 \leq \mathbb{E}[W_\infty] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[W_n] = 1,$$

sin embargo puede ocurrir que $W_\infty = 0$ con probabilidad 1, por lo que es importante saber cuando W_∞ es estrictamente positivo, ya que de ser el caso, tiene sentido escribir

$$Z_n \sim m^n W_\infty,$$

para n suficientemente grande. Esto es, cuando n crece, el árbol de BGW se comporta casi del mismo modo que el árbol m-regular. Sin embargo, esta interpretación se pierde cuando W_∞ toma el valor cero.

Dado que $Z_n = 0$ implica que $W_\infty = 0$, se sigue que $q \leq \mathbb{P}(W_\infty = 0)$, por lo que es natural preguntarse ¿Estas cantidades son iguales?, ¿Qué tan diferentes son? Cuando $m \leq 1$, $q = 1$ por lo que $\mathbb{P}(W_\infty = 0) = 1$. Así, el caso interesante es nuevamente el caso supercrítico, es decir cuando $m > 1$. El siguiente resultado responde la pregunta anterior, dando una clara relación entre la probabilidad de extinción y $\mathbb{P}(W_\infty = 0)$.

Proposición 1.1. *Supongamos que $m < \infty$. Entonces $\mathbb{P}(W_\infty = 0)$ es igual a q o 1.*

Demostración. Si $m \leq 1$, el resultado ya fue discutido anteriormente. Consideremos el caso $1 < m < \infty$.

Por la propiedad de ramificación, sabemos

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_1} Z_n^{(k)},$$

donde $Z_n^{(k)}$, $k \geq 1$ son copias de Z_n, independientes entre si y de Z_1. Ahora, como $m < \infty$, Z_1 es finito con probabilidad 1, por lo que, dividiendo por m^n y haciendo $n \to \infty$, tenemos que

$$mW_\infty = \sum_{k=1}^{Z_1} W_\infty^{(k)},$$

donde $W_\infty^{(k)}, k \geq 1$ son copias de W_∞ independientes entre si y de Z_1. Así

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_\infty = 0) &= \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{Z_1} W_\infty^{(k)} = 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(W_\infty^{(k)} = 0, k = 1, \ldots, Z_1\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{\left\{W_\infty^{(k)}=0, k=1,\ldots,Z_1\right\}} \middle| Z_1\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{\left\{W_\infty^{(1)}=0\right\}} \cdots 1_{\left\{W_\infty^{(Z_1)}=0\right\}} \middle| Z_1\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{\{W_\infty=0\}}\right]^{Z_1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(W_\infty = 0)^{Z_1}\right] \\
&= f(\mathbb{P}(W_\infty = 0))
\end{aligned}$$

esto es, $\mathbb{P}(W_\infty = 0)$ es raíz de $f(s) = s$ en $[0, 1]$, de donde se sigue el resultado. $\square$

Terminamos esta sección presentando un resultado que nos da una condición suficiente para encontrar el valor de $\mathbb{P}(W_\infty = 0)$.

Proposición 1.2. *Si* $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$ *y* $m > 1$, *entonces*

$$\mathbb{E}[W_\infty] = 1 \quad y \quad \mathbb{P}(W_\infty = 0) = q.$$

Demostración.
Comencemos probando que $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[W_n^2\right] < \infty$.

Recordemos a la función generadora de probabilidad de Z_n, la cual denotamos anteriormente por f_n, por lo que

$$f_n^{''}(1) = \mathbb{E}[Z_n(Z_n - 1)] = \mathbb{E}[Z_n^2] - \mathbb{E}[Z_n].$$

También, como $f_n(s) = f(f_{n-1}(s))$, tenemos que $f_n'(s) = f'(f_{n-1}(s))f_{n-1}'(s)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} f_n^{''}(1) &= f''(f_{n-1}(1))f_{n-1}'(1)^2 + f'(f_{n-1}(1))f_{n-1}^{''}(1) \\ &= f''(1)f_{n-1}'(1)^2 + f'(1)f_{n-1}^{''}(1), \end{aligned}$$

ya que $f_n(1) = 1$ para todo $n \geq 1$. Luego, como $f_n'(1) = \mathbb{E}[Z_n] = m^n$ para $n \geq 1$ se obtiene que

$$f_n^{''}(1) = f''(1)m^{2(n-1)} + mf_{n-1}^{''}(1).$$

Resolviendo la relación de recurrencia anterior, encontramos que

$$f_n^{''}(1) = f''(1)(m^{n-1} + ... + m^{2(n-1)}),$$

donde $f''(1) = \mathbb{E}[\xi^2] - \mathbb{E}[\xi]$ es una constante finita por hipótesis. Entonces

$$\mathbb{E}\left[Z_n^2\right] = f_n^{''}(1) + \mathbb{E}[Z_n] = f''(1)(m^{n-1} + ... + m^{2(n-1)}) + m^n,$$

por lo que

$$\mathbb{E}\left[W_n^2\right] = \frac{\mathbb{E}\left[Z_n^2\right]}{m^{2n}} = f''(1)(m^{-1} + ... + m^{-(n+1)}) + m^{-n},$$

de donde podemos concluir que $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[W_n^2] < \infty$, al ser $m > 1$.

Ahora, dado que $\sup_n \mathbb{E}[W_n^2] < \infty$ entonces $(Z_n : n \geq 0)$ es uniformemente integrable, lo cual, sumado a la convergencia c.s. hacia W_∞, implica que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[W_n] = \mathbb{E}[W_\infty].$$

Como $\mathbb{E}[W_n] = 1$ para todo $n \geq 1$, entonces $\mathbb{E}[W_\infty] = 1$.

Por último, como $\mathbb{E}[W_\infty] = 1$, de la proposición anterior se sigue que $\mathbb{P}(W_\infty = 0) = q$. □

1.2. Árboles de tamaño sesgado.

Si bien el teorema anterior nos dio una condición suficiente para encontrar el valor de $\mathbb{P}(W_\infty = 0)$, el pedir que ξ tenga segundo momento finito puede ser una condición bastante restrictiva. Para poder debilitar dicha condición es necesario introducir el concepto de árboles de BGW de tamaño sesgado, para esto, necesitamos ver a los árboles como elementos aleatorios en un cierto espacio de probabilidad.

Sea $\mathcal{U} = \{\varnothing\} \cup \left(\cup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^k\right)$, donde $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$. Un elemento distinto de $\varnothing$ en $\mathcal{U}$ es de la forma $u = i_1 \cdots 1_n$, para algún $n \geq 1$, donde $i_k \in \mathbb{N}^*$ para todo $k = 1, .., n$.

Definición 1.2. Si $u, v \in \mathcal{U}$, denotamos por uv el elemento concatenado, donde $\varnothing u = u\varnothing = u$.

Definición 1.3. Un árbol T es un subconjunto de $\mathcal{U}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\varnothing \in T$.
2. Si uj pertenece a T para algún $j \in \mathbb{N}^*$, entonces $u \in T$.
3. Si $u \in T$, entonces $uj \in T$ si y solo si $1 \leq j \leq N_u(T)$, para algún entero no negativo $N_u(T)$.

En otras palabras, si $u \in T$, entonces u es un vértice del árbol, el cual tiene $N_u(T)$ descendientes (y denotamos $N = N_\varnothing$). Los vértices de T están etiquetados por su línea genealógica, si $u = u_1 \cdots u_n \in T$, entonces u pertenece a la n-ésima generación, es el u_n-ésimo descendiente del vértice $u_1 \cdots u_{n-1}$, que a su vez es el u_{n-1}-ésimo descendiente de $u_1 \cdots u_{n-2}$, y así sucesivamente hasta llegar al ancestro común o raíz $\varnothing$. Denotamos por $|u|$ a la generación en la que vive u, por lo que $|u| = n$ si $u = u_1 \cdots u_n$.

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los árboles. Ahora lo dotaremos de una σ-álgebra. Para cada $u \in \mathcal{U}$, sea $\mathcal{T}_u = \{T \in \mathcal{T} : u \in T\}$, el espacio de los árboles que contienen a u como vértice. (en particular, $\mathcal{T}_\varnothing = \mathcal{T}$). Así, la σ-álgebra que buscamos para $\mathcal{T}$, está dada por

$$\mathcal{F} = \sigma\{\mathcal{T}_u, u \in \mathcal{U}\}.$$

Además vamos a considerar

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{\mathcal{T}_u : u \in \mathcal{U}, |u| \leq n\}.$$

Se cumple que $(\mathcal{F}_n : n \geq 1)$ es una filtración en $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ ya que

$$\{\mathcal{T}_u : u \in \mathcal{U}, |u| \leq n\} \subset \{\mathcal{T}_u : u \in \mathcal{U}, |u| \leq n+1\}$$

y por tanto $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. Además, por construcción se tiene que $\mathcal{F}$ es la mínima σ-álgebra que contiene a todos los $\mathcal{F}_n$.

Para cada $u \in \mathcal{U}$ y $T \in \mathcal{T}_u$, definimos el conjunto

$$\mathbb{T}_u(T) = \{v \in \mathcal{U} : uv \in T\}.$$

Es fácil ver que dicho conjunto es un árbol, por lo que el mapeo $\mathbb{T}_u : \mathcal{T}_u \mapsto \mathcal{T}$ está bien definido para cada $u \in \mathcal{U}$. En particular, si $u = \varnothing$ entonces $\mathbb{T} = \mathbb{T}_\varnothing$ es la función identidad en el espacio de los árboles.

Para cualquier árbol $T \in \mathcal{T}$, sea $Z_n(T)$ el número de individuos en la n-ésima generación del árbol. Afirmamos que Z_n es una variable aleatoria que toma valores en $\mathbb{N}$.

A continuación presentamos el teorema que nos asegura la existencia de una medida en el espacio de los arboles, tal que se cumplen las propiedades que buscamos.

Teorema 1.2 (Neveu). *Para toda $\mathcal{P} = (p_k : k \geq 0)$ medida de probabilidad en $\mathbb{N}$ existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}$ sobre el espacio $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de arboles, que dota a la variable N la ley $\mathcal{P}$, y para la cual, condicionada al evento $\{N = j\}$, las variables aleatorias con valores en $\mathcal{T}$, $\mathbb{T}_i, 1 \leq i \leq j$, que corresponden a los sub-arboles con raíz en los individuos de la primera generación, son independientes e idénticamente distribuidas bajo $\mathbb{P}$, con la misma distribución que $\mathbb{T}$.*

Más generalmente, para toda $n \in \mathbb{N}^*$, condicionadas a $\mathcal{F}_n$, las variables aleatorias $\{\mathbb{T}_u : |u| = n\}$, son independientes y siguen la misma ley $\mathbb{P}$, lo que significa que para cualesquiera funciones medibles positivas $f_u : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}, u \in \mathcal{U}$

$$\mathbb{E}\left[\prod_{|u|=n} f_u(\mathbb{T}_u) \middle| \mathcal{F}_n\right] = \prod_{|u|=n} \mathbb{E}[f_u].$$

Por otro lado, la sucesión de variables aleatoria $(Z_n : n \geq 0)$ definida sobre $(\mathcal{T}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ forma un proceso de BGW, con ley de reproducción $\mathcal{P}$ y estado inicial $Z_0 = 1$.

La prueba se puede encontrar en [7].

Tomemos una probabilidad $(p_k, k \geq 0)$ y definamos $m = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$. El Teorema 1.2 nos asegura la existencia de una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ en $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ bajo la cual $(Z_n : n \geq 1)$ es un proceso de BGW con ley de reproducción dada por $(p_k, k \geq 0)$.

Al igual que en la sección anterior definimos $W_n = \frac{Z_n}{m^n}$, para $n \geq 1$. Por otro lado, para cada $n = 1, 2, ...$ y $A \in \mathcal{F}_n$, definimos

$$\widehat{\mathbb{P}}(A) = \int_A W_n d\mathbb{P}.$$

Dado que $(W_n : n \geq 0)$ es una martingala de media 1, se sigue que $\widehat{\mathbb{P}}$ es una medida de probabilidad en $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$. Además, notemos que

$$\widehat{\mathbb{P}}(Z_n > 0) = \mathbb{E}[1_{\{Z_n > 0\}} W_n] = \mathbb{E}[W_n] = 1,$$

por lo tanto, $\widehat{\mathbb{P}}(Z_n > 0, n \geq 1) = 1$. En otras palabras, bajo $\widehat{\mathbb{P}}$, la probabilidad de extinción del árbol de BGW $\mathbb{T}$ es cero. El árbol de BGW $\mathbb{T}$ bajo $\widehat{\mathbb{P}}$ se conoce como el árbol de BGW de tamaño sesgado.

Sea $N = N_\varnothing$ el número de descendientes de la raíz. Sean $\mathbb{T}_1$,$\mathbb{T}_2$,...,$\mathbb{T}_N$ los sub-árboles que tienen como raíz a los individuos en la primera generación.

Proposición 1.3. *Para $k \geq 1$, $A_1, ..., A_k \in \mathcal{F}$, se cumple que*

$$\widehat{\mathbb{P}}(N = k, \mathbb{T}_1 \in A_1, ..., \mathbb{T}_k \in A_k) = \frac{kp_k}{m} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_{j-1}) \widehat{\mathbb{P}}(A_j) \mathbb{P}(A_{j+1}) \cdots \mathbb{P}(A_k). \tag{1.2}$$

Demostración.
Primero, consideremos que $A_1, ..., A_k \in \mathcal{F}_n$ para algún $n \geq 1$. Entonces

$$\widehat{\mathbb{P}}(N = k, \mathbb{T}_1 \in A_1, ..., \mathbb{T}_k \in A_k) = \mathbb{E}\left[\frac{Z_n}{m^n} 1_{\{N=k, \mathbb{T}_1 \in A_1, ..., \mathbb{T}_k \in A_k\}}\right].$$

Por la propiedad de ramificación, tenemos que, cuando $N = k$,

$$Z_n = \sum_{j=1}^{k} Z_{n-1}^{(j)} \circ \mathbb{T}_j,$$

donde $Z_{n-1}^{(j)}$, $j = 1, 2, ..., k$ son copias independientes de Z_{n-1}, tal que $Z_{n-1}^{(j)} \circ \mathbb{T}_j$ denota el número de individuos en la generación $n-1$ del sub-árbol $\mathbb{T}_j$. Sustituyendo en la expresión anterior vemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{P}}(N = k, \mathbb{T}_1 \in A_1, ..., \mathbb{T}_k \in A_k) &= \frac{1}{m^n} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}[(Z_{n-1}^{(j)} \circ \mathbb{T}_j) 1_{\{N=k, \mathbb{T}_1 \in A_1, ..., \mathbb{T}_k \in A_k\}}] \\
&= \frac{1}{m^n} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}[(Z_{n-1}^{(j)} \circ \mathbb{T}_j) 1_{\{\mathbb{T}_1 \in A_1, ..., \mathbb{T}_k \in A_k\}} | N = k] \mathbb{P}(N = k) \\
&= \frac{p_k}{m^n} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}[(Z_{n-1}^{(j)} \circ \mathbb{T}_j) 1_{\{\mathbb{T}_1 \in A_1, ..., \mathbb{T}_k \in A_k\}} | N = k]
\end{aligned}$$

Ya que $\mathbb{P}(N = k) = p_k$. Luego, del Teorema 1.2, tenemos que para cada $j = 1, .., k$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Z_{n-1}^{(j)} \circ \mathbb{T}_j) 1_{\{\mathbb{T}_1 \in A_1, ..., \mathbb{T}_k \in A_k\}}] &= \mathbb{E}[Z_{n-1} 1_{\{\mathbb{T} \in A_j\}}] \prod_{i \neq j} \mathbb{P}(\mathbb{T} \in A_i) \\
&= m^{n-1} \widehat{\mathbb{P}}(A_j) \prod_{i \neq j} \mathbb{P}(A_i),
\end{aligned}$$

ya que dado $N = k$, $\mathbb{T}_1, ..., \mathbb{T}_k$ son independientes e idénticamente distribuidos, con la misma distribución que $\mathbb{T}$.

Entonces, sustituyendo la expresión anterior obtenemos lo buscado

$$\widehat{\mathbb{P}}(N = k, \mathbb{T}_1 \in A_1, ..., \mathbb{T}_k \in A_k) = \frac{kp_k}{m} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \widehat{\mathbb{P}}(A_j) \prod_{i \neq j} \mathbb{P}(A_i).$$

Ahora probemos el caso general, lo cual haremos de forma iterativa. Tomemos $k \geq 1$ y $A_2, ..., A_k$ tal que pertenecen a $\mathcal{F}_n$ para algún n. Consideremos la siguiente colección

$$\mathcal{A}_1 = \{A_1 \in \mathcal{F} : A_1, ..., A_k \text{ cumplen la ecuación (1.2)}\}$$

De lo probado anteriormente y del hecho que $(\mathcal{F}_n : n \geq 1)$ es una filtración, tenemos que

$$\mathcal{F}_m \subset \mathcal{A}_1, \quad \text{para todo } m \geq 1.$$

En efecto, si tomamos $A_1 \in \mathcal{F}_m$, siempre se cumple que $A_1, A_2, ..., A_k$ pertenecen todos a $\mathcal{F}_{n \vee m}$ y se puede aplicar el caso ya probado. No es difícil ver $\mathcal{A}_1$ es una σ-álgebra, lo que implicará que

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_1,$$

al ser $\mathcal{F}$ la σ-álgebra generada por toda la filtración.

Por ejemplo, probemos que si $A \in \mathcal{A}_1$ entonces $A^c \in \mathcal{A}_1$. Primero notemos que

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{P}}(N = k, \mathbb{T}_1 \in A^c, ..., \mathbb{T}_k \in A_k) = & \widehat{\mathbb{P}}(N = k, \mathbb{T}_1 \in \mathcal{T}, ..., \mathbb{T}_k \in A_k) \\ & - \widehat{\mathbb{P}}(N = k, \mathbb{T}_1 \in A, ..., \mathbb{T}_k \in A_k),\end{aligned}$$

y como $A, \mathcal{T} \in \mathcal{A}_1$, entonces

$$\widehat{\mathbb{P}}(N = k, \mathbb{T}_1 \in A^c, ..., \mathbb{T}_k \in A_k) = \frac{kp_k}{m^n} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \left(\widehat{\mathbb{P}}(B_j) \prod_{i \neq j} \mathbb{P}(B_i) - \widehat{\mathbb{P}}(C_j) \prod_{i \neq j} \mathbb{P}(C_i) \right)$$

donde $B_1 = \mathcal{T}$, $C_1 = A$ y $B_i = C_i = A_i$ para $i \neq 1$. Desarrollando la expresión anterior obtenemos que A^c cumple la ecuación (1.2) y por tanto pertenece a $\mathcal{A}_1$.

Entonces, podemos concluir que

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_1,$$

y por tanto si tomamos $k \geq 1$, $A_1 \in \mathcal{F}$ y $A_2, ..., A_k \in \mathcal{F}_n$ para algún n, entonces se cumple el resultado.

Ahora, sea $k \geq 1$, $A_1 \in \mathcal{F}$ y $A_3, ..., A_k \in \mathcal{F}_n$ para algún n. Consideremos la colección

$$\mathcal{A}_2 = \{A_2 \in \mathcal{F} : A_1, A_2, ..., A_k \text{ cumplen la ecuación (1.2) } \}$$

de forma análoga con $\mathcal{A}_1$, se cumple que

$$\mathcal{F}_m \subset \mathcal{A}_2, \quad \text{para todo } m \geq 1.$$

y de igual forma se cumple que

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_2.$$

Repitiendo este procedimiento iterativamente se obtiene el resultado buscado. □

De la expresión anterior podemos deducir dos cosas principalmente. La primera es que, bajo $\widehat{\mathbb{P}}$, la variable aleatoria N tiene una distribución sesgada, dada por

$$\widehat{\mathbb{P}}(N = k) = \frac{kp_k}{m}, \quad \text{para } k \geq 1.$$

En la segunda, vemos que de los individuos en la primera generación, uno es elegido al azar de manera uniforme, tal que el sub-árbol que crece de dicho vértice es un árbol de tamaño sesgado, mientras que los otros sub-árboles son árboles de BGW usuales, independientes entre si. Una consecuencia directa es que obtenemos una descomposición del árbol de BGW de tamaño sesgado en una espina infinita y en copias independientes del árbol de BGW usual. La raíz $\varnothing = u_0$, tiene descendientes de acuerdo a la distribución sesgada. Entre los hijos de la raíz, un individuo se elije al azar, de forma uniforme, como u_1, el elemento de la espina en la primera generación. En los individuos no elegidos inician sub-arboles de BGW independientes, mientras que u_1 tiene hijos de acuerdo a la distribución sesgada. Este procedimiento se repite de forma infinita, lo que nos da la descomposición mencionada anteriormente.

Por último, veamos que existe una relación entre el árbol de BGW de tamaño sesgado y el proceso de BGW con inmigración, la cual nos será de gran ayuda para lo que sigue. Recordemos que un proceso de BGW con inmigración que inicia con cero individuos está caracterizado por una ley de reproducción y una ley de inmigración. Durante la generación n, cada uno de los individuos presentes tienen descendencia de forma independiente de acuerdo a una ley de reproducción fija, mientras que de forma independiente, llega una cierta cantidad de individuos que se incorpora a la población.

Si E_n representa el número de individuos en la generación n, podemos describir la dinámica de la población mediante la relación de recurrencia:

$$E_{n+1} = \xi_1^{(n)} + ... + \xi_{E_n}^{(n)} + Y_{n+1}, \quad E_0 = 0, \tag{1.3}$$

donde $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de v.a.i.i.d. que representan los individuos que llegan a la población, y $\{\xi_k^{(n)} : k = 1, 2, ...; n = 0, 1, 2, ...\}$ es la colección de v.a. idénticamente distribuidas, independientes entre si y de la sucesión $\{Y_n\}_{n\geq 1}$, que representan a la dinámica de reproducción que ocurre por parte de cada individuo.

Entonces, podemos describir al árbol de tamaño sesgado de la siguiente forma, bajo $\widehat{\mathbb{P}}$ el proceso $(Z_n - 1, n \geq 0)$ es un proceso de BGW con inmigración, donde la ley de inmigración esta dada por la ley de $N - 1$, donde $\widehat{\mathbb{P}}(N = k) = \frac{kp_k}{m}$, para $k \geq 1$.

Más aun, sustituyendo en la relación anterior, tenemos que

$$Z_{n+1} = \xi_1^{(n)} + ... + \xi_{Z_n - 1}^{(n)} + N_{n+1},$$

donde $\{N_n\}_{n\geq 1}$ son copias independientes de N. Esta relación concuerda con la explicación dada anteriormente. De los Z_n individuos en la generación n, uno de ellos (elegido al azar) genera descendientes según la distribución sesgada, mientras que los restantes siguen la ley de reproducción usual.

1.3. El Teorema de Kesten–Stigum.

A continuación, presentamos el Teorema de Kesten-Stigum, el cual nos da una condiciones necesarias y suficientes para determinar el valor de $\mathbb{P}(W_\infty = 0)$, que son menos restrictivas que la condición de segundo momento $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$ de la Proposición 1.2. En lo siguiente vamos a denotar $\log^+(x) = \log(\max\{1, x\})$.

Teorema 1.3 (Kesten-Stigum)**.** *Supongamos que* $1 < m < \infty$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[W_\infty] = 1 \iff \mathbb{P}(W_\infty = 0) = q \iff \mathbb{E}[\xi \log^+(\xi)] < \infty.$$

Para probar el Teorema de Kesten-Stigum haremos uso de la representación del árbol de tamaño sesgado por medio de un proceso de BGW con inmigración como en la sección anterior. Por esta razón primero probaremos el Teorema de Seneta, el cual es un resultado importante para nuestro propósito.

Teorema 1.4 (Seneta)**.** *Sea* $(E_n : n \geq 1)$ *un proceso de BGW con inmigración* $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ *y ley de reproducción* ξ. *Sea* $m = \mathbb{E}[\xi]$ *tal que* $1 < m < \infty$. *Entonces:*

1. *Si* $\mathbb{E}[\log^+(Y_1)] < \infty$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{E_n}{m^n}$ *existe y es finito,* $\mathbb{P}$*-c.s.*

2. *Si* $\mathbb{E}[\log^+(Y_1)] = \infty$,*entonces* $\limsup_{n\to\infty} \frac{E_n}{m^n} = \infty$, $\mathbb{P}$*-c.s.*

Demostración.
Recordemos que el proceso $(E_n : n \geq 1)$ cumple la relación de recurrencia dada por la ecuación (1.3).

Primero, supongamos que $\mathbb{E}[\log^+(Y_1)] = \infty$. Entonces, usando la Proposición A.1 tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(Y_n)}{n} = \infty.$$

Ahora, sabemos que $Y_n \leq E_n$, por lo que también

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(E_n)}{n} = \infty$$

y se cumple que para todo $c > 0$

$$\log(E_n)/n > c, \text{ infinitas veces}, \qquad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Entonces, para todo $c > 0$, se cumple que

$$\frac{E_n}{m^n} > c, \quad \text{infinitas veces}, \qquad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Así, se sigue que $\limsup_{n\to\infty} \frac{E_n}{m^n} = \infty$, $\mathbb{P}$-c.s.

Ahora tomemos que $\mathbb{E}[\log^+(Y_1)] < \infty$. Primero veamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{m^n} < \infty, \qquad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Como $\mathbb{E}[\log^+(Y_1)] < \infty$, de la Proposición A.1 se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^+(Y_n)}{n} = 0.$$

Luego, tomemos $0 < \epsilon < \log(m)$. Así, para casi todo ω, existe $N = N(\omega)$ tal que para todo $n \geq N$

$$0 \leq \frac{\log^+(Y_n)}{n} < \epsilon,$$

esto es

$$Y_n < (e^{\epsilon})^n.$$

Por otro lado, como $0 < \epsilon < \log(m)$, entonces $0 < \frac{e^{\epsilon}}{m} < 1$ y por tanto

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{Y_n}{m^n} < \infty,$$

ya que para $n \geq N$

$$\frac{Y_n}{m^n} \leq \left(\frac{e^{\epsilon}}{m}\right)^n.$$

Entonces, se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{m^n} < \infty, \qquad \mathbb{P}\text{-c.s}$$

como buscabamos.

Ahora, sea $\mathcal{G}$ la σ-álgebra generada por la sucesión $\{Y_n\}_{n\geq 1}$, y sea $\mathcal{H}_n = \sigma(E_1, \ldots, E_n)$. Luego

$$\mathbb{E}[E_{n+1}|\mathcal{H}_n, \mathcal{G}] = mE_n + Y_{n+1},$$

entonces
$$\mathbb{E}[E_{n+1}|\mathcal{H}_n, \mathcal{G}] \geq mE_n$$
de donde se sigue que $\left(\frac{E_n}{m^n} : n \geq 0\right)$ condicionado a $\mathcal{G}$ es una sub-martingala. También se tiene que para $n \geq 1$

$$\mathbb{E}[E_{n+1}|\mathcal{G}] = m\mathbb{E}[E_n|\mathcal{G}] + Y_{n+1},$$

por lo que
$$\mathbb{E}\left[\frac{E_n}{m^n}\middle|\mathcal{G}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{m^k},$$
ya que $E_1 = Y_1$.

En particular, bajo el conjunto $A = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{m^n} < \infty\}$,

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[\frac{E_n}{m^n}\middle|\mathcal{G}\right] < \infty$$

y como $\mathbb{P}(A) = 1$, se sigue que $\lim_{n\to\infty} \frac{E_n}{m^n}$ existe $\mathbb{P}$-c.s., al ser una submartingala no negativa acotada en L_1, lo que prueba lo buscado. □

Para proceder a la prueba del Teorema de Kesten-Stigum, recordemos que bajo $\widehat{\mathbb{P}}$, $(Z_n - 1, \geq 1)$ es un proceso de BGW con inmigración, donde la inmigración sigue la ley de $N - 1$ y la reproducción sigue la ley de ξ. También haremos uso del Lema A.2 mostrado en el Apéndice, tomando $W_n = \xi_n$, y $W_\infty = \xi$.

Prueba del Teorema de Kesten-Stigum.
Primero, observemos que

$$\widehat{\mathbb{E}}[\log^+(N)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kp_k}{m} \log(k) = \frac{1}{m}\mathbb{E}[\xi \log^+(\xi)],$$

De donde podemos afirmar que

$$\widehat{\mathbb{E}}[\log^+(N)] < \infty \iff \mathbb{E}[\xi \log^+(\xi)] < \infty.$$

Ahora, supongamos que $\mathbb{E}[\xi \log^+(\xi)] < \infty$. Entonces, de la observación inicial tenemos que
$$\widehat{\mathbb{E}}[\log^+(N)] < \infty,$$
y por lo tanto, también
$$\widehat{\mathbb{E}}[\log^+(N-1)] < \infty.$$

Del Teorema de Seneta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n - 1}{m^n} \text{ existe y es finito } \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.},$$

por lo que $W_n = \frac{Z_n}{m^n}$ también converge a un limite finito W_∞, $\widehat{\mathbb{P}}$-c.s.

Del Lema A.2,

$$\mathbb{E}[W_\infty] = 1,$$

y en particular $\mathbb{P}(W_\infty = 0) < 1$, por lo que

$$\mathbb{P}(W_\infty = 0) = q.$$

Ahora, si $\mathbb{E}[\xi \log^+ \xi] = \infty$, entonces

$$\widehat{\mathbb{E}}[\log^+ N] = \infty$$

y del Teorema de Seneta

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Z_n}{m^n} \text{ es infinito } \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.}.$$

Del Lema A.2 se sigue que

$$\mathbb{E}[W_\infty] = 0,$$

entonces

$$\mathbb{P}(W_\infty = 0) = 1,$$

al ser una v.a. no negativa. Esto prueba el resultado.

□

Capítulo 2

La caminata aleatoria ramificante

En este capítulo vamos a introducir al objeto principal de este trabajo, la caminata aleatoria ramificante (CAR) y su respectiva martingala aditiva. El resultado principal de este capítulo es el Teorema de convergencia de martingalas de Biggins, el cual es una generalización del Teorema de Kesten-Stigum, en el contexto de la CAR. Para probar dicho teorema haremos uso de un cambio de medida, el cual se deriva de la martingala aditiva, así como de la descomposición de la espina de la CAR.

2.1. La caminata aleatoria ramificante y la martingala aditiva

De manera intuitiva, la caminata aleatoria ramificante es una generalización del proceso de Bienaymé-Galton-Watson (BGW), en el sentido de que no solo describe la dinámica de una población dada, sino que también considera la posición de cada uno de los individuos en el espacio.

Recordemos que un proceso de BGW está caracterizado por una ley de reproducción. En la CAR además de dicha ley de reproducción, vamos a añadir una componente espacial la cual vamos a representar por una variable aleatoria. Esto es, si denotamos por ξ el número de descendientes de un individuo arbitrario, les podemos asignar posiciones $\zeta_1, ..., \zeta_\xi$ a cada uno de ellos. Dichas posiciones se eligen con respecto a la posición de su ancestro directo. Podemos pensar a la colección de variables aleatorias $\{\zeta_1, ..., \zeta_\xi\}$ como el soporte de la medida atómica aleatoria o proceso puntual

$$\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^{\xi} \delta_{\zeta_i}.$$

Este objeto caracteriza por completo a la caminata aleatoria ramificante, ya que combina la componente reproductiva con la componente espacial de la población.

De aquí en adelante vamos a considerar que el espacio donde viven los individuos es la recta real, por lo que las posiciones $\zeta_1, ..., \zeta_\xi$ son variables aleatorias independientes real valuadas, mientras que la medida aleatoria $\mathcal{Z}$ definida anteriormente es una medida sobre los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$, denotados por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definición 2.1. Definimos la siguiente operación, para funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que el lado derecho esté bien definido:

$$\langle f, \mathcal{Z} \rangle = \sum_{i=1}^{\xi} f(\zeta_i).$$

Para cada individuo u, vamos a denotar por $V(u)$ su posición con respecto al origen. Entonces se cumple

$$V(u) = \sum_{\nu \preceq u} \zeta_\nu,$$

donde $\nu \preceq u$ indica todos los ancestros ν del individuo u, incluido el mismo u. De igual forma, $\nu \prec u$ indica todos los ancestros ν de u, pero sin incluir a u.

La caminata aleatoria ramificante se puede entender como sigue: comenzamos con un ancestro común situado en el origen de la recta real. Dicho ancestro genera descendientes de acuerdo al proceso puntual $\mathcal{Z}$ descrito anteriormente. Cada uno de estos individuos conforman la primera generación y cada uno de ellos generan nuevos individuos cuyas posiciones son determinadas de acuerdo al mismo proceso puntual $\mathcal{Z}$ considerando la posición de su ancestro directo, y así sucesivamente. Como en el caso del proceso de BGW, suponemos que cada individuo se reproduce de forma independiente a los demás.

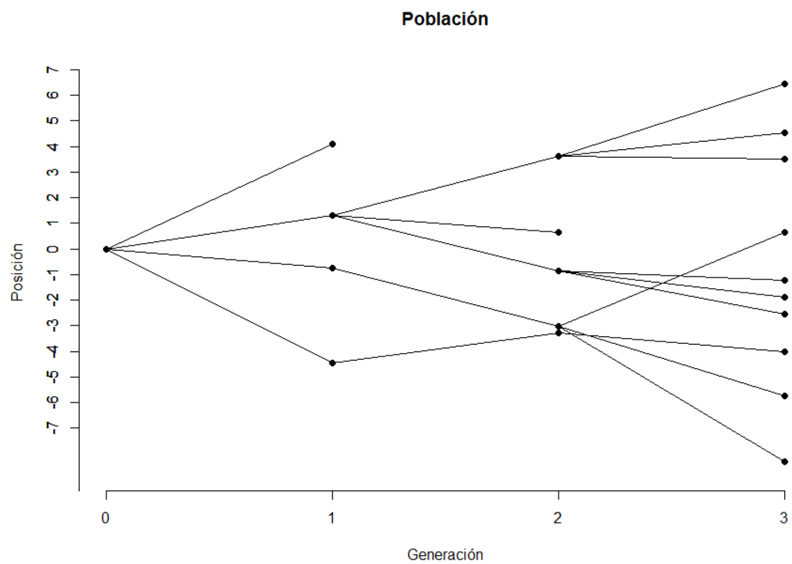

Figura 2.1: Realización de una CAR.

Para formalizar lo enunciado anteriormente, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2. Representamos a la caminata aleatoria ramificante por medio de la siguiente colección de medidas atómicas aleatorias $(\mathcal{Z}_n(\cdot) : n \geq 0)$ dadas por

$$\mathcal{Z}_n(A) = \sum_{i=1}^{Z_n} \delta_{V(u_i^{(n)})}(A),$$

donde $Z_n = \mathcal{Z}_n(\mathbb{R})$ no es mas que el número de individuos en la n-ésima generación y $u_1^{(n)}, ..., u_{Z_n}^{(n)}$ son dichos individuos. Por simplicidad, supondremos que iniciamos con un solo individuo situado en el origen, por lo que $\mathcal{Z}_0 = \delta_0$.

Observación. *Al igual que en el proceso de BGW, tenemos una relación del proceso entre dos generaciones consecutivas. Dicha dependencia distribucional entre generaciones está dada por la siguiente relación*

$$\mathcal{Z}_{n+1}(A) = \sum_{i=1}^{Z_n} \mathcal{Z}_i^{(n)}(A - V(u_i^{(n)})),$$

donde $\mathcal{Z}_i^{(n)}$, $i = 1, 2, ..., Z_n$, *son copias independientes de* $\mathcal{Z}$, $V(u_i^{(n)})$ *para* $i = 1, ..., Z_n$ *denotan las posiciones de los individuos en la* n*-ésima generación, y* $A - x = \{y \in \mathbb{R} : y + x \in A\}$.

Notemos que al tomar $A = \mathbb{R}$ en la igualdad anterior, tenemos que el proceso definido por $Z_n = \mathcal{Z}_n(\mathbb{R})$ tiene el mismo comportamiento descrito en la ecuación (1.1). En otras palabras, el proceso $(Z_n : n \geq 0)$ que denota la cantidad de individuos en cada de generación de la CAR es un proceso de BGW. De acuerdo a lo estudiado en el capítulo anterior, el comportamiento a largo plazo de la CAR está relacionado con el valor de $m = \mathbb{E}[\xi]$. En particular, la probabilidad de extinción o supervivencia de la CAR es la misma que la del proceso de BGW asociado.

Al igual que en el capítulo anterior, y como en muchos otros casos en la teoría de probabilidad para estudiar el comportamiento a largo plazo es necesario encontrar una martingala adecuada. A continuación procedemos a deducirla. Primero, sea

$$m(\theta) = \mathbb{E}[\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}\rangle] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\xi} e^{-\theta\zeta_k}\right], \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Notemos que el lado derecho puede ser infinito, y que $m(0) = m$.

Definición 2.3. Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $m(\theta) < \infty$, definimos al proceso $(W_n(\theta) : n \geq 0)$ como

$$W_n(\theta) = \frac{\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}_n\rangle}{m(\theta)^n} = \sum_{k=1}^{Z_n} \frac{e^{-\theta V(u_k^{(n)})}}{m(\theta)^n},$$

donde $u_k^{(n)}$, para $k = 1, ...Z_n$, denotan a los individuos en la n-ésima generación.

Podemos observar que al tomar $\theta = 0$, el proceso definido anteriormente se reduce a la martingala estudiada en el capítulo anterior.

Proposición 2.1. *El proceso $(W_n(\theta) : n \geq 0)$ es una $\mathbb{P}$-martingala.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}_n = \sigma\left(\left\{V\left(u_k^{(m)}\right) : k = 1, 2, \ldots, Z_m, m \leq n\right\}\right)$, la σ-álgebra que contiene la información de las primeras n generaciones en la CAR.

Ahora notemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}_{n+1}\rangle|\mathcal{H}_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{Z_n}\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}_k^{(n)}(\cdot - V(u_k^{(n)}))\rangle\middle|\mathcal{H}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{Z_n}\langle e^{-\theta(\cdot+V(u_k^{(n)}))}, \mathcal{Z}_k^{(n)}\rangle\middle|\mathcal{H}_n\right] \\
&= \sum_{k=1}^{Z_n} e^{-\theta V(u_k^{(n)})}\mathbb{E}\left[\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}_k^{(n)}\rangle\middle|\mathcal{H}_n\right] \\
&= \sum_{k=1}^{Z_n} e^{-\theta V(u_k^{(n)})}m(\theta) \\
&= \langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}_n\rangle m(\theta).
\end{aligned}$$

Al tomar esperanza a ambos lados, obtenemos que

$$\mathbb{E}[\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}_{n+1}\rangle] = \mathbb{E}[\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}_n\rangle]m(\theta),$$

de donde se sigue

$$\mathbb{E}[\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}_n\rangle] = m(\theta)^n.$$

Entonces, se cumple

$$\mathbb{E}[|W_n(\theta)|] = \mathbb{E}[W_n(\theta)] = 1 \ y \ \mathbb{E}[W_{n+1}(\theta)|\mathcal{F}_n] = W_n(\theta),$$

lo que prueba el resultado.

□

Al proceso $(W_n(\theta) : n \geq 0)$ lo conocemos como la martingala aditiva. Al igual que en el capítulo anterior, al ser $(W_n(\theta) : n \geq 0)$ una martingala no negativa tenemos que

$$W_n(\theta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} W_\infty(\theta), \qquad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

para alguna variable aleatoria no negativa $W_\infty(\theta)$, la cual cumple que

$$\mathbb{E}[W_\infty(\theta)] \leq 1.$$

Más adelante veremos que existe una relación entre dicha variable límite y la probabilidad de extinción de la CAR, gracias al Teorema de Biggins.

2.2. La espina de la CAR

A continuación, vamos a introducir elementos que nos serán de gran ayuda para probar el Teorema de convergencia de martingalas de Biggins, el cual es el resultado principal de este capítulo.

Sea $\mathcal{U} = \{\varnothing\} \cup \left(\cup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^k\right)$, donde $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$. como en la sección 1.2. Un elemento u de $\mathcal{U}$ distinto de $\varnothing$ se escribe de la forma $u = u_1 \cdots u_n$, donde $u_1, ..., u_n \in \mathbb{N}^*$ para algún $n \geq 1$, y decimos que $|u| = n$.

Además, consideremos $\overline{\mathcal{U}} = \{(u, V(u)) : x \in \mathcal{U}, V : \mathcal{U} \to \mathbb{R}\}$, donde $V(u)$ es la posición del vértice u como se definió anteriormente. También, vamos a introducir $\mathcal{T}^*$ el espacio de árboles marcados, que consiste en todos los subconjuntos de $\overline{\mathcal{U}}$ tales que, el conjunto

$$T = \{u \in \mathcal{U} : (u, V(u)) \in T^*\}$$

forma un árbol en el sentido de la Definición 1.3. Recordemos que, dados dos vértices $u, v \in T$, decimos que

$$u \prec v \iff v = uw, \text{par algún } w \in \mathcal{U}, w \neq \varnothing,$$

en otras palabras, $u \prec v$ indica que v es descendiente de u.

Ahora dotaremos a $\mathcal{T}^*$ de una σ-álgebra, de forma análoga a lo hecho en la sección 1.2.

Para cada $u \in \mathcal{U}$, sea $\mathcal{T}_u^* = \{T^* \in \mathcal{T}^* : (u, V(u)) \in T^*\}$, el espacio de los árboles marcados que contienen a u como vértice. Así, la σ-álgebra que buscamos para $\mathcal{T}^*$, está dada por

$$\mathcal{F} = \sigma\{\mathcal{T}_u^*, u \in \mathcal{U}\}.$$

Además vamos a considerar

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{\mathcal{T}_u^*, u \in \mathcal{U}, |u| \leq n\}.$$

Se cumple que $(\mathcal{F}_n : n \geq 1)$ es una filtración en $(\mathcal{T}^*, \mathcal{F})$ ya que

$$\{\mathcal{T}_u^*, u \in \mathcal{U}, |u| \leq n\} \subset \{\mathcal{T}_u^*, u \in \mathcal{U}, |u| \leq n+1\}$$

y por tanto $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. Además, por construcción se tiene que $\mathcal{F}$ es la mínima σ-álgebra que contiene a todos los $\mathcal{F}_n$.

Cada árbol marcado $T^* \in \mathcal{T}^*$ es la realización de una población. En particular, contiene toda la información referente a los individuos que la conforman y cuales son sus posiciones. Por lo tanto, tiene sentido reescribir a la colección de medidas $(\mathcal{Z}_n : n \geq 0)$ considerada en la sección anterior, como sigue

$$\mathcal{Z}_n(A, T^*) = \sum_{|u|=n} 1_{\{u \in T\}} \delta_{V(u)}(A), \quad n \geq 1$$

para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

De acuerdo a Neveu en [7], es posible generalizar el Teorema 1.2 en el contexto de arboles marcados descrito anteriormente y podemos enunciar el siguiente Teorema.

Teorema 2.1. *Dada una probabilidad $\mathcal{P} = (p_k : k \geq 0)$ sobre $\mathbb{N}$, y una distribución ζ en $\mathbb{R}$, existe una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ sobre el espacio $(\mathcal{T}^*, \mathcal{F})$ de árboles marcados, tal que los individuos tienen descendientes según la ley $\mathcal{P}$, los cuales se posicionan en $\mathbb{R}$ de acuerdo a la ley ζ.*

Por lo tanto el proceso de medidas $(\mathcal{Z}_n : n \geq 0)$ se comporta del mismo modo al descrito en la sección anterior.

Entonces, tenemos que el proceso $(Z_n : n \geq 0)$ dado por $Z_n = \mathcal{Z}_n(\mathbb{R})$ es de nuevo un proceso de BGW, donde el mecanismo de reproducción ξ toma la forma

$$\xi(T^*) = \#\{u \in T : |u| = 1\},$$

y tenemos la función $m(\theta)$ de igual forma que en el capítulo anterior,

$$m(\theta) = \mathbb{E}\left[\sum_{|u|=1} e^{-\theta V(u)}\right].$$

De la misma manera podemos reescribir a la martingala aditiva $(W_n(\theta) : n \geq 0)$ como sigue

$$W_n(\theta)(T^*) = \sum_{|u|=n} \frac{e^{-\theta V(u)}}{m(\theta)^n} 1_{\{u \in T\}}.$$

De aquí en adelante obviaremos la dependencia en T^* y el término $1_{\{u \in T\}}$, a menos de que sea necesario.

Luego, para cada $u \in T$ con $|u| = n$ para algún $n \geq 0$, definimos

$$\mathcal{Z}^{(u)} = \sum_{\substack{|x|=n+1 \\ u \prec x}} \delta_{\zeta_x},$$

donde $\zeta_x = V(x) - V(u)$, el desplazamiento de x con respecto de u. Se sigue que bajo $\mathbb{P}$, $\mathcal{Z}^{(u)}$ es igual en distribución a $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1$.
El resultado de Neveu nos garantiza que bajo $\mathbb{P}$, los objetos antes mencionados se comportan del mismo modo que en la sección anterior.

Ahora, consideremos a la martingala aditiva $(W_n(\theta) : n \geq 0)$ y para cada $n = 1, 2, ...$ y $A \in \mathcal{F}_n$, definimos la medida $\widehat{\mathbb{P}} = \widehat{\mathbb{P}}_\theta$ como sigue

$$\widehat{\mathbb{P}}(A) = \int_A W_n(\theta) d\mathbb{P}.$$

Dado que $(W_n(\theta) : n \geq 0)$ es una martingala de media 1, se sigue que $\widehat{\mathbb{P}}$ es una medida de probabilidad en $(\mathcal{T}^*, \mathcal{F})$.

A la CAR bajo la medida $\widehat{\mathbb{P}}$ se le conoce como la caminata aleatoria ramificante de tamaño sesgado. Describamos la dinámica de la CAR de tamaño sesgado. El proceso inicia con un individuo posicionado en el origen, a dicho individuo lo etiquetamos como w_0. Después, suponiendo que ya contamos con un individuo etiquetado w_n en la n-ésima generación, el proceso para obtener el siguiente individuo etiquetado w_{n+1} es el siguiente:

- relativo a su posición espacial, el individuo etiquetado, w_n tiene descendientes de acuerdo al proceso puntual $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1$,
- los individuos no etiquetados generan descendientes de forma independiente, de acuerdo a un proceso puntual $\mathcal{Z}^*$, donde la distribución de $\mathcal{Z}^*$ bajo $\widehat{\mathbb{P}}$ es la misma que la de $\mathcal{Z}$ bajo $\mathbb{P}$. Esto mismo se cumple para todos los descendientes subsecuentes. En otras palabras, los individuos no etiquetados actúan como ancestros iniciales para CAR independientes,
- dado ξ, el número de hijos del individuo etiquetado y sus posiciones $\{V(u_1), ..., V(u_\xi)\}$, uno de estos hijos es elegido y etiquetado w_{n+1}, donde cada hijo u tiene probabilidad de ser elegido proporcional a $e^{-\theta V(u)}$.

Notemos que

$$\widehat{\mathbb{P}}(Z_n = 0) = \mathbb{E}[1_{\{Z_n=0\}} W_n(\theta)] = 0,$$

en otras palabras, la CAR de tamaño sesgado nunca se extingue. Por lo tanto, obtenemos una sucesión infinita $(w_n)_{n\geq 0}$ de individuos tales que w_n es padre de w_{n+1}. A esta sucesión la conocemos como la espina de la CAR.

Por construcción, tenemos que bajo $\widehat{\mathbb{P}}$, la colección de medidas aleatorias atómicas $(\mathcal{Z}^{(\omega_n)} : n \geq 0)$ son independientes e idénticamente distribuidas, ya que cada uno de los elementos de la espina $(w_n)_{n\geq 0}$ siguen el mismo método de reproducción. Así, podemos concluir que $\left(\frac{\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}^{(w_n)}\rangle}{m(\theta)} : n \geq 0\right)$ también son independientes e idénticamente distribuidas. Más aun, son copias de $W_1(\theta)$ ya que

$$W_1(\theta) = \frac{1}{m(\theta)} \sum_{|u|=1} e^{-\theta V(u)} = \frac{\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}^{(w_0)}\rangle}{m(\theta)}.$$

Por último, notemos que el proceso $(V(w_n) : n \geq 0)$ es una caminata aleatoria bajo $\widehat{\mathbb{P}}$, ya que las variables aleatorias $V(w_n) - V(w_{n-1})$ son independientes e idénticamente distribuidas por construcción. Más aún, tenemos que para cada u con $|u| = n$,

$$\widehat{\mathbb{P}}(w_n = u|\mathcal{F}_n) = \frac{e^{-\theta V(u)}}{\sum\limits_{|y|=n} e^{-\theta V(y)}},$$

en particular

$$\widehat{\mathbb{P}}(w_1 = u|\mathcal{F}_1) = \frac{e^{-\theta V(u)}}{\sum\limits_{|y|=1} e^{-\theta V(y)}} = \frac{e^{-\theta V(u)}}{m(\theta)W_1(\theta)},$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}[V(w_1)] &= \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{k=1}^{\xi} 1_{\{w_1=u_k\}} V(u_k)\right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{k=1}^{\xi} V(u_k)\widehat{\mathbb{P}}(w_1 = u_k|\mathcal{F}_1)\right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{k=1}^{\xi} V(u_k)\frac{e^{-\theta V(u_k)}}{m(\theta)W_1(\theta)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\xi} V(u_k)\frac{e^{-\theta V(u_k)}}{m(\theta)W_1(\theta)}W_1(\theta)\right] \\
&= \frac{1}{m(\theta)}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\xi} V(u_k)e^{-\theta V(u_k)}\right] \\
&= -\frac{m'(\theta)}{m(\theta)}.
\end{aligned}$$

Entonces $\widehat{\mathbb{E}}[V(w_1)] < \infty$, siempre que exista un $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$m'(\theta) = -\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\xi} V(u_k)e^{-\theta V(u_k)}\right]$$

sea finito.

2.3. El Teorema de Biggins

Ahora, procedemos a probar el Teorema de convergencia de martingalas de Biggins, el cual es una generalización del Teorema de Kesten-Stigum 1.3.

Primero vamos a considerar la siguiente proposición, la cual generaliza la Proposición 1.1 vista en el Capítulo 1, al contexto de la CAR y la martingala aditiva.

Proposición 2.2. *Considere la martingala aditiva* $(W_n(\theta) : n \geq 0)$ *y sea* $W_\infty(\theta) = \lim_{n\to\infty} W_n(\theta)$. *Suponga que* $1 < m < \infty$ *y sea* q *la probabilidad de extinción del proceso de BGW subyacente. Entonces* $\mathbb{P}(W_\infty(\theta) = 0)$ *es igual a* 1 *o* q.

Demostración. Sea f la función generadora de probabilidad de ξ, i.e. $f(s) = \mathbb{E}[s^\xi]$. Notemos que

$$\begin{aligned}
W_{n+1}(\theta) &= \sum_{|x|=n+1} \frac{e^{-\theta V(x)}}{m(\theta)^{n+1}} \\
&= \sum_{|u|=1} \sum_{\substack{|x|=n+1 \\ u\prec x}} \frac{e^{-\theta V(x)}}{m(\theta)^{n+1}} \\
&= \sum_{|u|=1} \frac{e^{-\theta V(u)}}{m(\theta)} \sum_{\substack{|x|=n+1 \\ u\prec x}} \frac{e^{-\theta(V(x)-V(u))}}{m(\theta)^n} \\
&= \sum_{|u|=1} \frac{e^{-\theta V(u)}}{m(\theta)} W_n^{(u)}(\theta),
\end{aligned}$$

donde

$$W_n^{(u)}(\theta) = \sum_{\substack{|x|=n+1 \\ u\prec x}} \frac{e^{-\theta(V(x)-V(u))}}{m(\theta)^n},$$

son copias independientes de $W_n(\theta)$ para cada u con $|u| = 1$, al hacer referencia a sub-arboles independientes, que tienen como raíz a los individuos en la primera generación.

Ahora, procedemos de forma análoga a la demostración de la Proposición 1.1. Como $\mathbb{E}[\xi] < \infty$, entonces $\xi < \infty$ c.s. y como $\xi = \#\{u : |u| = 1\}$, al hacer $n \to \infty$ encontramos que

$$W_\infty(\theta) = \sum_{|u|=1} \frac{e^{-\theta V(u)}}{m(\theta)} W_\infty^{(u)}(\theta),$$

donde $W_\infty^{(u)}$ son copias independientes de $W_\infty(\theta)$. Luego,

$$\mathbb{P}(W_\infty(\theta)=0)=\mathbb{P}\left(W_\infty^{(u)}(\theta)=0, \forall\, u:|u|=1\right)=\mathbb{E}\left[\mathbb{P}(W_\infty(\theta)=0)^\xi\right],$$

de donde podemos concluir que $\mathbb{P}(W_\infty(\theta)=0)$ es solución de $s=f(s)$ en $(0,1]$, de donde se sigue el resultado al usar el Teorema 1.1.

□

Teorema 2.2. *Supongamos que $m>1$ y que existe $\theta\in\mathbb{R}$ tal que $m(\theta)<\infty$ y*

$$-m'(\theta)=\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\xi} V(u_k)e^{-\theta V(u_k)}\right]$$

existe y es finito. Entonces las siguientes son equivalentes:

1. $\mathbb{P}(W_\infty(\theta)=0)=q$.
2. $\mathbb{E}[W_\infty(\theta)]=1$
3. $\mathbb{E}[W_1(\theta)\log^+(W_1(\theta))]<\infty$ *y* $\log(m(\theta))>\theta m'(\theta)/m(\theta)$.

donde q es la probabilidad de extinción del proceso de BGW subyacente.

Demostración. Primero, de la Proposición 2.2, se cumple que

$$\mathbb{P}(W_\infty(\theta)=0)=q \iff \mathbb{P}(W_\infty(\theta)=0)<1,$$

por lo que en lo siguiente, para probar la condición (1) del Teorema consideraremos la desigualdad del lado derecho.

Notemos que al ser $(V(w_n):n\geq 0)$ una caminata aleatoria bajo $\widehat{\mathbb{P}}$,

$$\frac{V(w_n)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\widehat{\mathbb{E}}[V(w_1)]=-\frac{m'(\theta)}{m(\theta)},\qquad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.},$$

y por tanto

$$\frac{-\theta V(w_n)-n\log(m(\theta))}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} f(\theta):=\theta\frac{m'(\theta)}{m(\theta)}-\log(m(\theta)),\qquad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.}$$

Supongamos que se cumple (3). Como $\log(m(\theta))>\theta m'(\theta)/m(\theta)$, entonces $f(\theta)<0$. Luego, tomando $\epsilon>0$, tal que $f(\theta)+\epsilon<0$, $\widehat{\mathbb{P}}$-c.s., existe un $N_1=N_1(\omega)$ tal que para todo $n\geq N_1$

$$-\theta V(w_n)-n\log(m(\theta))<n(f(\theta)+\epsilon)<0,$$

en particular

$$\exp\left(-\theta V(w_n) - n\log(m(\theta))\right) \leq (e^{(f(\theta)+\epsilon)})^n.$$

Por otro lado, como

$$\widehat{\mathbb{E}}[\log^+ W_1(\theta)] = \mathbb{E}[W_1(\theta)\log^+(W_1(\theta))] < \infty,$$

entonces, tomando $(W_{1,n}(\theta) : n \geq 0)$ copias independientes de $W_1(\theta)$ bajo $\widehat{\mathbb{P}}$, de la Proposición A.1 tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^+ W_{1,n}(\theta)}{n} = 0, \qquad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.}$$

En particular, para todo $\epsilon > 0$, tenemos que $\widehat{\mathbb{P}}$-c.s. existe un $N_2 = N_2(\omega)$ tal que para todo $n \geq N_2$

$$W_{1,n}(\theta) \leq e^{n\epsilon}.$$

Combinando ambos resultados, podemos concluir que existen $c_1, c_2 < 0$ tales que, $\widehat{\mathbb{P}}$-c.s., a partir de un k suficientemente grande se cumple que

$$e^{-\theta V(w_k) - k\log m(\theta)} W_{1,k}(\theta) \leq e^{kc_1}, \quad y \quad e^{-\theta V(w_k) - k\log m(\theta)} \leq e^{kc_2},$$

y por tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\theta V(w_k) - k\log m(\theta)} W_{1,k}(\theta) - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\theta V(w_k) - k\log m(\theta)} < \infty, \qquad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.} \tag{2.1}$$

Ahora, descomponiendo $W_n(\theta)$ en las distintas lineas genealógicas generadas a partir de los individuos en la espina $(w_n)_{n\geq 0}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
W_n(\theta) &= \sum_{|y|=n} \frac{e^{-\theta V(y)}}{m(\theta)^n} \\
&= \frac{e^{-\theta V(w_n)}}{m(\theta)^n} + \sum_{\substack{|y|=n \\ y\neq w_n}} \frac{e^{-\theta V(y)}}{m(\theta)^n} \\
&= \frac{e^{-\theta V(w_n)}}{m(\theta)^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{|x|=k+1 \\ w_k \prec x \\ x\neq w_{k+1}}} \sum_{\substack{|y|=n \\ x\prec y}} \frac{e^{-\theta V(y)}}{m(\theta)^n} \\
&= \frac{e^{-\theta V(w_n)}}{m(\theta)^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\theta V(w_k)}}{m(\theta)^k} \sum_{\substack{|x|=k+1 \\ w_k \prec x \\ x\neq w_{k+1}}} \frac{e^{-\theta(V(x)-V(w_k))}}{m(\theta)} \sum_{\substack{|y|=n \\ x\prec y}} \frac{e^{-\theta(V(y)-V(x))}}{m(\theta)^{n-k-1}},
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se obtiene al considerar los hijos de w_k que no son w_{k+1}, y luego contar a los descendientes en la n-ésima generación de cada uno de esos hijos. Luego, tomemos $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{Z}^{(w_n)} : n \geq 0)$, la σ-álgebra que contiene toda la información de $w_n, V(w_n)$ y los hijos de w_n. Tenemos que por construcción, para cada x tal que $w_k \prec x$, con $x \neq w_{k+1}$, dado $\mathcal{G}$, el sub-árbol que inicia tomando a x como raíz no contiene elementos de la espina, por lo que bajo $\widehat{\mathbb{P}}$, condicionado a $\mathcal{G}$,

$$\sum_{\substack{|y|=n \\ x \prec y}} \frac{e^{-\theta(V(y)-V(x))}}{m(\theta)^{n-k-1}}$$

tiene la misma distribución que $W_{n-k-1}(\theta)$ bajo $\mathbb{P}$. Por lo tanto

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{\substack{|y|=n \\ x \prec y}} \frac{e^{-\theta(V(y)-V(x))}}{m(\theta)^{n-k-1}} \middle| \mathcal{G} \right] = 1.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left[W_n(\theta)|\mathcal{G}\right] &= \frac{e^{-\theta V(w_n)}}{m(\theta)^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\theta V(w_k)}}{m(\theta)^k} \sum_{\substack{|x|=k+1 \\ w_k \prec x \\ x \neq w_{k+1}}} \frac{e^{-\theta(V(x)-V(w_k))}}{m(\theta)} \\
&= \frac{e^{-\theta V(w_n)}}{m(\theta)^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\theta V(w_k)}}{m(\theta)^k} \sum_{\substack{|x|=k+1 \\ w_k \prec x}} \frac{e^{-\theta(V(x)-V(w_k))}}{m(\theta)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\theta V(w_{k+1})}}{m(\theta)^{k+1}} \\
&= \frac{e^{-\theta V(w_n)}}{m(\theta)^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\theta V(w_k)}}{m(\theta)^k} \sum_{\substack{|x|=k+1 \\ w_k \prec x}} \frac{e^{-\theta(V(x)-V(w_k))}}{m(\theta)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\theta V(w_k)}}{m(\theta)^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\theta V(w_k)}}{m(\theta)^k} \frac{\langle e^{-\theta \cdot}, \mathcal{Z}^{(w_k)} \rangle}{m(\theta)} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{-\theta V(w_k)}}{m(\theta)^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\theta V(w_k) - k \log m(\theta)} \left(\frac{\langle e^{-\theta \cdot}, \mathcal{Z}^{(w_k)} \rangle}{m(\theta)} \right) - \sum_{k=1}^{n-1} e^{-\theta V(w_k) - k \log m(\theta)},
\end{aligned}$$

Ahora, como $\left(\frac{\langle e^{-\theta \cdot}, \mathcal{Z}^{(w_k)} \rangle}{m(\theta)} : k \geq 0 \right)$ son copias independientes de $W_1(\theta)$ bajo $\widehat{\mathbb{P}}$, de la ecuación (2.1) tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{\mathbb{E}}\left[W_n(\theta)|\mathcal{G}\right] < \infty, \qquad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.}$$

Por tanto, del Lema de Fatou,

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\liminf_{n\to\infty} W_n(\theta)\middle|\mathcal{G}\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \widehat{\mathbb{E}}\left[W_n(\theta)|\mathcal{G}\right] < \infty,$$

en particular,

$$\liminf_{n\to\infty} W_n(\theta) < \infty, \qquad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.} \tag{2.2}$$

Ahora consideremos la sucesión $\left(\frac{1}{W_n(\theta)}; n \geq 1\right)$ bajo la convención de que $\frac{1}{W_n(\theta)} = 0$ si $W_n(\theta) = 0$. Veamos que es una $\widehat{\mathbb{P}}$-supermartingala. En efecto, sean $m \leq n$ y $A \in \mathcal{F}_m$. De la definición de $\widehat{\mathbb{P}}$ y del hecho de que $W_n(\theta) = 0$ implica que $W_{n+1}(\theta) = 0$, tenemos que

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{W_n(\theta)} 1_A\right] = \mathbb{P}(A, W_n(\theta) > 0) \leq \mathbb{P}(A, W_m(\theta) > 0) = \widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{W_m(\theta)} 1_A\right],$$

lo que implica que

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{W_n(\theta)}\middle|\mathcal{F}_m\right] \leq \frac{1}{W_m(\theta)}$$

como se buscaba. Ahora bien, al ser una supermartingala no negativa, converge $\widehat{\mathbb{P}}$-c.s. a un límite. De forma trivial, dicho límite de $\left(\frac{1}{W_n(\theta)}\right)$ es 0 si $W_n = 0$ para algún $n \geq 0$, mientras que, si $W_n(\theta) > 0$ para todo $n \geq 1$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{W_n(\theta)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{W_n(\theta)} = \frac{1}{\liminf_{n\to\infty} W_n(\theta)},$$

por lo tanto, usando la ecuación (2.2), podemos afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{W_n(\theta)} > 0,$$

cuando $W_n(\theta) > 0$ para todo $n \geq 1$, y bajo este caso tenemos que

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{W_n(\theta)} = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{W_n(\theta)} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} W_n(\theta)},$$

lo que implica que

$$\limsup_{n\to\infty} W_n(\theta) < \infty.$$

Entonces, podemos concluir que

$$\limsup_{n\to\infty} W_n(\theta) < \infty, \qquad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.}$$

Así, del lema A.2,

$$\mathbb{E}[W_\infty(\theta)] = 1,$$

Y por tanto

$$\mathbb{P}(W_\infty(\theta) = 0) < 1.$$

Hasta aquí hemos probado las implicaciones (3) $\implies$ (2) $\implies$ (1) del Teorema.

Ahora, supongamos que no se cumple la condición (3). Primero, si $\log(m(\theta)) < \theta m'(\theta)/m(\theta)$, entonces $f(\theta) > 0$ y usando la observación inicial, tenemos que para $\epsilon > 0$ tal que $f(\theta) - \epsilon > 0$, $\widehat{\mathbb{P}}$-c.s. existe un $N = N(\omega)$ tal que para todo $n \geq N$

$$-\theta V(w_n) - n\log(m(\theta)) > n(f(\theta) - \epsilon) > 0$$

En particular

$$\exp\left(-\theta V(w_n) - n\log(m(\theta))\right) \geq (e^{(f(\theta)-\epsilon)})^n,$$

y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\theta V(w_n) - n\log(m(\theta))} = \infty.$$

Luego, si $\log(m(\theta)) = \theta m'(\theta)/m(\theta)$, entonces

$$\theta\widehat{\mathbb{E}}[V(w_k) - V(w_{k-1})] = -\log(m(\theta)),$$

esto es, $(-\theta V(w_n) - n\log(m(\theta)), n \geq 1)$ es una caminata aleatoria de media 0, por lo que

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{-\theta V(w_n) - n\log(m(\theta))\right\} = \infty, \qquad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.}$$

de donde

$$\limsup_{n\to\infty} e^{-\theta V(w_n) - n\log(m(\theta))} = \infty, \qquad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.}$$

Esto es, siempre que $\log(m(\theta)) \leq \theta m'(\theta)/m(\theta)$, tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} e^{-\theta V(w_n) - n\log(m(\theta))} = \infty., \qquad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.}$$

Por otro lado, supongamos que $\mathbb{E}[W_1(\theta)\log^+(W_1(\theta))] = \infty$. Dado que $\left(\frac{\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}^{(w_n)}\rangle}{m(\theta)} : n \geq 0\right)$ son copias independientes de $W_1(\theta)$ bajo $\widehat{\mathbb{P}}$, donde

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\log^+ W_1(\theta)\right] = \mathbb{E}[W_1(\theta)\log^+ W_1(\theta)] = \infty,$$

entonces, de la Proposición A.1 tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log^+\left(\frac{\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}^{(w_n)}\rangle}{m(\theta)}\right)}{n} = \infty, \qquad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.}$$

y por tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \log^+\left(\frac{\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}^{(w_n)}\rangle}{m(\theta)}\right) = \infty, \qquad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.}$$

Así,

$$\limsup_{n\to\infty} \exp\left(\log^+\left(\frac{\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}^{(w_n)}\rangle}{m(\theta)}\right)\right) = \infty, \qquad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.}$$

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}
W_{n+1}(\theta) &= \sum_{|\nu|=n} \frac{e^{-\theta V(\nu)}}{m(\theta)^n} \sum_{\substack{|u|=n+1\\ \nu\prec u}} \frac{e^{-\theta(V(u)-V(\nu))}}{m(\theta)}\\
&\geq e^{-\theta V(w_n)-n\log m(\theta)} \sum_{\substack{|u|=n+1\\ w_n\prec u}} \frac{e^{-\theta(V(u)-V(w_n))}}{m(\theta)}\\
&= e^{-\theta V(w_n)-n\log m(\theta)} \frac{\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}^{(w_n)}\rangle}{m(\theta)}\\
&= e^{-\theta V(w_n)-n\log m(\theta)} \exp\left(\log\left(\frac{\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}^{(w_n)}\rangle}{m(\theta)}\right)\right).
\end{aligned}$$

Entonces, del lado derecho tenemos un producto de dos términos, tales que siempre que la condición (3) del Teorema falla, al menos uno de ellos crece $\widehat{\mathbb{P}}$-c.s. a ∞ cuando $n\to\infty$, por lo que podemos concluir que

$$\limsup_{n\to\infty} W_n(\theta) = \infty, \quad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.}$$

Así, del lema A.2

$$\mathbb{E}[W_\infty(\theta)] = 0,$$

y por tanto

$$\mathbb{P}(W_\infty(\theta) = 0) = 1.$$

Lo que concluye la prueba del Teorema.

$\square$

Capítulo 3

Teoremas límites de la CAR

En este capítulo presentamos los dos resultados principales de este trabajo de tesis, los cuales tratan sobre la convergencia de la posición del individuo más a la izquierda en el árbol bajo ciertas normalizaciones. El primero es una ley fuerte de grandes números, mientras que el segundo es un teorema del tipo límite central.

3.1. La ley fuerte de los grandes números en la CAR

A continuación enunciamos el resultado principal de esta sección, un teorema tipo ley de los grandes números, para la posición del individuo más a la izquierda en la CAR.

Teorema 3.1 (Ley de los grandes números)**.** *Supongamos que $m > 1$, y que existe un $\theta > 0$ tal que $m(\theta) < \infty$. Entonces, bajo el evento de no extinción*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \inf_{|u|=n} V(u) = \gamma, \qquad \mathbb{P}\text{-}c.s.$$

donde $\gamma = \inf\{a : \kappa(a) > 1\}$, con $\kappa(a) = \inf\{e^{\theta a} m(\theta) : \theta \geq 0\}$.

Antes de pasar a la prueba del teorema, necesitamos de algunos lemas auxiliares, los cuales procedemos a enunciar.

Lema 3.1. *Para cada $a \in \mathbb{R}$, la función*

$$m_a(\theta) := e^{\theta a} m(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

es convexa.

Demostración. Primero notemos que

$$m_a(\theta) = e^{\theta a} m(\theta) = e^{a\theta} \mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-\theta V(x)}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-\theta(V(x)-a)}\right].$$

Ahora, dado que la función exponencial es convexa, tenemos que, para $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ y $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{aligned} m_a(t\theta_1 + (1-t)\theta_2) &= \mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-(t\theta_1+(1-t)\theta_2)(V(x)-a)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-t\theta_1(V(x)-a)-(1-t)\theta_2(V(x)-a)}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} te^{-\theta_1(V(x)-a)} + (1-t)e^{\theta_2(V(x)-a)}\right] \\ &= tm_a(\theta_1) + (1-t)m_a(\theta_2). \end{aligned}$$

lo que termina la prueba. ☐

Notemos que, en particular al tomar $a = 0$, tenemos que $m(\theta)$ es una función convexa. Para simplificar la notación, definamos las siguientes funciones

$$\psi(\theta) := \log(m(\theta)) \quad \text{y} \quad J(a) := \log(\kappa(a)).$$

Ahora probemos el siguiente lema.

Lema 3.2. *La función $\psi(\theta)$ es convexa.*

Demostración. La demostración es directa y para ello haremos uso de la desigualdad de Hölder dos veces. Tomemos $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ y $0 < t < 1$. Definamos $p = 1/t$ y $q = 1/(1-t)$, los cuales cumplen que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Primero notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{|x|=1} e^{-(t\theta_1+(1-t)\theta_2)V(x)} &= \sum_{|x|=1} e^{-t\theta_1 V(x)} e^{-(1-t)\theta_2 V(x)} \\ &\leq \left(\sum_{|x|=1} \left(e^{-t\theta_1 V(x)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{|x|=1} \left(e^{-(1-t)\theta_2 V(x)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{|x|=1} e^{-\theta_1 V(x)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{|x|=1} e^{-\theta_2 V(x)}\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Ahora, tomamos esperanza y de nuevo usamos la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-(t\theta_1+(1-t)\theta_2)V(x)}\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{|x|=1} e^{-\theta_1 V(x)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{|x|=1} e^{-\theta_2 V(x)}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-\theta_1 V(x)}\right]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-\theta_2 V(x)}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-\theta_1 V(x)}\right]^{t} \mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-\theta_2 V(x)}\right]^{1-t}.
\end{aligned}$$

Por ultimo,

$$\begin{aligned}
\psi(t\theta_1+(1-t)\theta_2) &= \log\left(\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-(t\theta_1+(1-t)\theta_2)V(x)}\right]\right) \\
&\leq \log\left(\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-\theta_1 V(x)}\right]^{t} \mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-\theta_2 V(x)}\right]^{1-t}\right) \\
&= t\log\left(\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-\theta_1 V(x)}\right]\right) + (1-t)\log\left(\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-\theta_2 V(x)}\right]\right) \\
&= t\psi(\theta_1) + (1-t)\psi(\theta_2).
\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba.

$\square$

La demostración del Teorema 3.1 se realizará en dos partes. Primero probaremos la cota inferior y después la cota superior. Para la cota inferior, haremos uso del siguiente lema.

Lema 3.3. *Suponga que existe un* $\theta > 0$ *tal que* $m(\theta) < \infty$. *Entonces*

$$\gamma = \sup\{a \in \mathbb{R} : \kappa(a) < 1\}.$$

Demostración. Observemos que

$$J(a) = \log(\kappa(a)) = \text{ínf}\{\theta a + \psi(\theta) : \theta \geq 0\}.$$

Notemos que al fijar $\theta \geq 0$, el mapeo $a \mapsto \theta a + \psi(\theta)$ es lineal y por tanto cóncavo, por lo que J sigue siendo cóncava. Además, J es no decreciente, y podemos afirmar que es continua en el interior de $\{a :\in \mathbb{R} : J(a) > -\infty\}$. Más aún, es posible probar[1] que

$$\psi(\theta) = \sup_{a\in\mathbb{R}} [J(a) - a\theta] . \tag{3.1}$$

Ahora, notemos que el conjunto $\{a : J(a) < 0\}$ es no vacío. De lo contrario, tendríamos que para todo $a \in \mathbb{R}$ y $\theta \geq 0$

$$0 \leq J(a) \leq a\theta + \psi(\theta),$$

lo cual implica que $\psi(\theta) = \infty$ para todo $\theta > 0$, lo cual es una contradicción. Así, existe algún $a \in \mathbb{R}$ tal que $J(a) < 0$.

Luego, usando la ecuación (3.1), tenemos que $\sup_{a\in\mathbb{R}} J(a) = \psi(0) > 0$, esto es, existe algún $a \in \mathbb{R}$ tal que $J(a) > 0$. Por lo tanto, de la monotonía y continuidad de J, se sigue que el conjunto

$$A = \{a \in \mathbb{R} : J(a) = 0\}$$

es no vacío y a lo más es un intervalo. Veremos que en realidad A solo consta de un punto, gracias a la concavidad de J.

Supongamos lo contrario. Tomemos $x, y \in A$ tal que $x < y$. Sea b tal que $J(b) > 0$. De la monotonía de J tenemos que $x < y < b$ y podemos tomar un $t \in (0, 1)$ tal que $y = (1 - t)x + tb$. Así, usando la concavidad de J tenemos que

$$0 = J(y) \geq (1 - t)J(x) + tJ(b) = tJ(b),$$

lo cual es una contradicción, ya que $tJ(b) > 0$.

Por lo tanto $A = \{a_0\}$ para algún $a_0 \in \mathbb{R}$. Luego, de la continuidad de J se sigue que

$$\text{ínf}\{a \in \mathbb{R} : J(a) > 0\} = a_0 = \sup\{a \in \mathbb{R} : J(a) < 0\}.$$

Entonces, $a_0 = \gamma$ y por tanto se tiene lo buscado. □

Ahora, procedamos a probar la primer desigualdad del Teorema 3.1.

[1] Esto lo tenemos al ser ψ convexa y al haber una relación directa entre ψ y J por medio de la transformada de Lengendre. Para más información revisar [9], en específico el Teorema 12.2.

Prueba de la cota inferior. Para probar la cota inferior, haremos uso del lema anterior. Tomemos un $a \in \mathbb{R}$ tal que $\kappa(a) < 1$. Sea

$$X_n = \sum_{|u|=n} 1_{\{V(u) \leq na\}}.$$

De la definición de X_n y la desigualdad de Markov

$$\mathbb{P}(X_n > 0) = \mathbb{P}(X_n \geq 1) \leq \mathbb{E}[X_n].$$

Ahora tomemos $\theta \geq 0$. Notemos que $1_{\{V(u) \leq na\}} \leq \exp(\theta na - \theta V(u))$, por lo que

$$\mathbb{P}(X_n > 0) \leq e^{\theta na} \mathbb{E}\left[\sum_{|u|=n} e^{-\theta V(u)}\right] = e^{\theta na} m(\theta)^n$$

ya que $W_n(\theta) = \sum_{|u|=n} \frac{e^{-\theta V(u)}}{m(\theta)^n}$ tiene media 1. Como θ fue arbitrario, entonces

$$\mathbb{P}(X_n > 0) \leq \inf_{\theta \geq 0} \left(e^{\theta a} m(\theta)\right)^n = \left(\inf_{\theta \geq 0} e^{\theta a} m(\theta)\right)^n = \kappa(a)^n.$$

Por hipótesis $\kappa(a) < 1$, lo que implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > 0) < \infty$$

Aplicando el Lema de Borel-Cantelli, tenemos que para todo n suficientemente grande, c.s. se cumple que $X_n = 0$ y por tanto $V(u) > na$, para todo u con $|u| = n$. En particular $\inf_{|u|=n} V(u) > na$. Entonces

$$\liminf_{n \to \infty} \left\{\frac{1}{n} \inf_{|u|=n} V(u)\right\} \geq a, \qquad \text{c.s.}$$

Y como tomamos a arbitrario tal que $\kappa(a) < 1$, se sigue lo buscado. □

Para probar la segunda desigualdad, haremos uso de hipótesis adicionales. Supongamos que $m(\theta) < \infty$ y que $\mathbb{E}[W_1(\theta) \log^+ W_n(\theta)] < \infty$, ambos para todo $\theta \geq 0$. Ahora recordemos que $m = m(0)$ es la esperanza de la ley de reproducción de la CAR. Probemos el siguiente Lema.

Lema 3.4. *Supongamos que $m(\theta) < \infty$ para todo $\theta \geq 0$, y que $m > 1$. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $1 < \kappa(a) < m$. Entonces existe un $\beta > 0$ tal que $m'(\beta) = -am(\beta)$.*

Demostración. Del Lema 3.1 sabemos que $m_a(\theta) = e^{a\theta}m(\theta)$ es una función convexa, y como

$$\kappa(a) = \text{ínf}\{e^{\theta a}m(\theta) : \theta \geq 0\} < m = m(0),$$

se sigue que $m_a(\theta)$ es decreciente en una vecindad a la derecha de 0, por lo que su derivada en el punto $\theta = 0$ no es positiva, i.e.

$$am(0) + m'(0) \leq 0.$$

Ahora, supongamos que

$$am(\beta) + m'(\beta) \neq 0, \quad \text{para todo } \beta > 0,$$

por lo tanto, tenemos que

$$\frac{d}{d\theta}m_a(\theta)\Big|_{\theta=\beta} \neq 0, \quad \text{para todo } \beta > 0,$$

En particular, de la convexidad de $m_a(\theta)$ se sigue que no solo es decreciente en una vecindad a la derecha de 0, si no en todo $(0, \infty)$ y se cumple que

$$\kappa(a) = \lim_{\theta \to \infty} m_a(\theta).$$

Ahora, tomemos $b < a$, suficientemente cerca de a tal que $\kappa(b) > 1$, el cual existe gracias a la continuidad de κ. Como $m(\theta) \geq 0$ para todo $\theta \geq 0$, tenemos que

$$\frac{d}{d\theta}m_b(\theta) \leq \frac{d}{d\theta}m_a(\theta) \leq 0,$$

y al igual que antes podemos concluir que

$$\kappa(b) = \lim_{\theta \to \infty} e^{\theta b}m(\theta).$$

En particular, tenemos que

$$1 < \kappa(b) = \lim_{\theta \to \infty} e^{\theta b}m(\theta) \leq \lim_{\theta \to \infty} e^{\theta a}m(\theta) = \kappa(a) < m.$$

En consecuencia, tenemos que

$$\kappa(a) = \lim_{\theta \to \infty} e^{\theta a}m(\theta) = \lim_{\theta \to \infty} e^{\theta b}m(\theta)e^{\theta(a-b)} \geq \kappa(b) \lim_{\theta \to \infty} e^{\theta(a-b)} = \infty,$$

lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, se sigue que existe un $\beta > 0$ tal que

$$am(\beta) + m'(\beta) = 0$$

y por tanto

$$m'(\beta) = -am(\beta).$$

lo que prueba el resultado.

$\square$

Ahora podemos proceder a probar la segunda desigualdad del Teorema 3.1, pero antes recordemos a la medida auxiliar $\widehat{\mathbb{P}}$ definida en el capítulo anterior, dada por

$$\frac{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}}{d\widehat{\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_n}} = W_n(\theta),\ \theta > 0,$$

donde $\mathcal{F}_n$ es la σ-álgebra generada por la CAR hasta la generación n. Además, recordemos que la espina $\{w_n : n \geq 0\}$ cumple

$$\widehat{\mathbb{P}}(w_n = u|\mathcal{F}_n) = \frac{e^{-\theta V(u)}}{\sum\limits_{|y|=n} e^{-\theta V(y)}} = \frac{e^{-\theta V(u)}}{m(\theta)^n W_n(\theta)}. \tag{3.2}$$

Prueba de la segunda desigualdad. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $1 < \kappa(a) < m$. Del lema anterior, existe $\beta > 0$ tal que $m'(\beta) = -am(\beta)$. En particular, se cumple que

$$0 < \log(\kappa(a)) \leq a\beta + \log m(\beta) = -\beta\frac{m'(\beta)}{m(\beta)} + \log m(\beta). \tag{3.3}$$

Tomemos $\epsilon > 0$ y definamos

$$\Delta_n = \sum_{|u|=n:\ |V(u)-na|>n\epsilon} \frac{e^{-\beta V(u)}}{m(\beta)^n}.$$

Ahora usemos $\widehat{\mathbb{P}}$, tomando $\theta = \beta$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Delta_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{|u|=n} \frac{e^{-\beta V(u)}}{m(\beta)^n} 1_{\{|V(u)-na|>n\epsilon\}}\right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{|u|=n} \frac{e^{-\beta V(u)}}{m(\beta)^n W_n(\beta)} 1_{\{|V(u)-na|>n\epsilon\}}\right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{|u|=n} 1_{\{|V(u)-na|>n\epsilon\}} 1_{\{w_n=u\}}\right],
\end{aligned}$$

donde la última igualdad la obtenemos al usar la ecuación (3.2). Por lo tanto, tenemos que $\mathbb{E}[\Delta_n] = \widehat{\mathbb{P}}(|V(w_n) - an| > n\epsilon)$. Ahora, recordemos que

$$\widehat{\mathbb{E}}[V(w_1)] = -\frac{m'(\beta)}{m(\beta)} = a$$

donde la ultima igualdad se sigue por la hipótesis sobre β. Luego, como $(V(w_n) : n \geq 1)$ es suma de variables aleatorias i.i.d. bajo $\widehat{\mathbb{P}}$, de la Ley fuerte de los grandes números se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V(w_n)}{n} = a, \quad \widehat{\mathbb{P}}\text{-c.s.},$$

por lo tanto se cumple

$$\sum_{n\geq 1} \widehat{\mathbb{P}}(|V(w_n) - an| > n\epsilon) < \infty,$$

lo que implica que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[\Delta_n] < \infty$ y por tanto $\sum_{n\geq 1} \Delta_n < \infty$, $\mathbb{P}$-c.s., al ser $\Delta_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$. En particular, tenemos que $\Delta_n \to 0$, $\mathbb{P}$-c.s., cuando $n \to \infty$.

Por otro lado, por hipótesis, y usando la ecuación (3.3), tenemos que

$$\mathbb{E}[W_1(\theta) \log^+ W_n(\theta)] < \infty, \quad \text{y} \quad 0 < -\beta\frac{m'(\beta)}{m(\beta)} + \log m(\beta),$$

por lo que del Teorema de Martingalas de Biggins, se cumple que bajo el evento de no extinción

$$\lim_{n\to\infty} W_n(\beta) = W_\infty(\beta) > 0, \quad \text{c.s.}$$

Ahora bien, tenemos que

$$\begin{aligned} W_n(\beta) &= \sum_{|u|=n:\ |V(u)-na|\leq n\epsilon} \frac{e^{-\beta V(u)}}{m(\beta)^n} + \Delta_n \\ &\leq \frac{e^{-\beta n(a-\epsilon)}}{m(\beta)^n} \#\{|u| = n : V(u) < n(a+\epsilon)\} + \Delta_n. \end{aligned}$$

Sabemos que $\Delta_n \to 0$, entonces, bajo el evento de no extinción

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{e^{-\beta n(a-\epsilon)}}{m(\beta)^n} \#\{|u| = n : V(u) < n(a+\epsilon)\}, \quad \text{c.s.}$$

En particular, se sigue que para todo n suficientemente grande

$$\#\{|u| = n : V(u) < n(a+\epsilon)\} \geq 1, \quad \text{c.s.}$$

Por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\inf_{|u|=n} V(u)\right\}\leq a+\epsilon.$$

Por último, haciendo $\epsilon\to 0$,

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\inf_{|u|=n} V(u)\right\}\leq a$$

lo que prueba el resultado, al ser $a\in\mathbb{R}$ arbitrario tal que $1<\kappa(a)$.

□

3.2. Teorema de Límite Central en la CAR.

En la sección anterior, encontramos un resultado de tipo ley fuerte de grandes números para la posición del individuo más a la izquierda en la caminata aleatoria ramificante, dada por $\inf_{|x|=n} V(x)$. En esta sección seguimos estudiando el comportamiento de dicho individuo, pero ahora bajo una normalización logarítmica. Esto es, estudiamos el comportamiento de

$$\frac{1}{\log(n)}\inf_{|x|=n} V(x)$$

para tiempos grandes.

A lo largo de esta sección, vamos a suponer que para δ, δ_+, y δ_- estrictamente positivos, se cumple que

$$\mathbb{E}\left[\xi^{1+\delta}\right]<\infty. \tag{3.4}$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-(1+\delta_+)V(x)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{\delta_- V(x)}\right]<\infty. \tag{3.5}$$

Notemos que la condición (3.5) implica que para todo $\theta\in[-\delta_-,1+\delta_+]$, $m(\theta)<\infty$. Además, vamos a suponer que

$$m(0)>1,\qquad \log(m(1))=\frac{m'(1)}{m(1)}=0. \tag{3.6}$$

Recordemos que $m(0)>1$ implica que el proceso de BGW asociado es supercrítico, mientras que la segunda igualdad la podemos reescribir como

$$\psi(1)=\psi'(1)=0,$$

en términos de la función $\psi(\theta) = \log(m(\theta))$ definida en la sección anterior.

La condición (3.6) puede ser un tanto restrictiva. En general mientras exista un $t_0 \in (0, \infty)$ tal que

$$t_0\psi'(t_0) = \psi(t_0), \tag{3.7}$$

es posible recuperar la condición (3.6). Para ello consideramos una CAR auxiliar con posición dada por $\widehat{V}(x) = t_0V(x) + \psi(t_0)|x|$, la cual cumplirá la condición (3.6).

En efecto, consideremos una CAR que cumple la ecuación (3.7) para algún $t_0 > 0$. Denotemos

$$\widehat{\psi}(t) = \log\left(\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-t\widehat{V}(x)}\right]\right),$$

donde $\widehat{V}(x) = t_0V(x) + \psi(t_0)|x|$. Entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(1) &= \log\left(\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-\widehat{V}(x)}\right]\right) \\
&= \log\left(\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-t_0V(x)}e^{-\psi(t_0)|x|}\right]\right) \\
&= \psi(t_0) - \psi(t_0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}'(1) &= -\left(\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-\widehat{V}(x)}\right]\right)^{-1} \mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} \widehat{V}(x)e^{-\widehat{V}(x)}\right] \\
&= -e^{\widehat{\psi}(1)}\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} (t_0V(x) + \psi(t_0))e^{-t_0V(x)}e^{-\psi(t_0)}\right] \\
&= -e^{-\psi(t_0)}t_0\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} V(x)e^{-t_0V(x)}\right] - \psi(t_0)e^{-\psi(t_0)}\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=1} e^{-t_0V(x)}\right] \\
&= t_0\psi'(t_0) - \psi(t_0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así, obtenemos que al cumplirse la condición (3.7) podemos obtener una CAR modificada que cumple la condición (3.6). Por lo tanto de aquí en adelante tomaremos la condición (3.6) como cierta.

Por otro lado, la condición (3.6) nos permite conocer el valor exacto de la constante γ de la ley de los grandes números, lo cual podemos resumir en el siguiente lema.

Lema 3.5. *Supongamos que se cumple la condición* (3.6), *entonces* $\gamma = 0$.

Demostración. Recordemos que la condición (3.6) en términos de la función ψ es $\psi(0) > 0$ y $\psi(1) = \psi'(1) = 0$, lo cual en particular implica que $\psi(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$, al ser ψ una función convexa.

Ahora, notemos que para todo $a \in \mathbb{R}$

$$J(a) = \operatorname*{ínf}_{t \geq 0} \{at + \psi(t)\} \leq a + \psi(1) = a,$$

i.e., $J(a) \leq a$, por lo que

$$(-\infty, 0) \subseteq \{a \in \mathbb{R} : J(a) < 0\}.$$

Nos interesa probar la igualdad de ambos conjuntos, lo cual a su vez implica el resultado buscado, ya que $\gamma = \sup\{a \in \mathbb{R} : J(a) < 0\}$. Notemos que para todo $a \geq 0$ y $t \geq 0$,

$$at + \psi(t) \geq 0.$$

Entonces, $J(a) \geq 0$ para todo $a \geq 0$ y por tanto

$$(-\infty, 0) = \{a \in \mathbb{R} : J(a) < 0\},$$

de donde podemos concluir que $\gamma = 0$. □

Gracias al Lema anterior, la ley de los grandes números nos dice que bajo el evento de no extinción

$$\operatorname*{lím}_{n \to \infty} \frac{1}{n} \operatorname*{ínf}_{|x|=n} V(x) = 0, \text{c.s.}$$

Además, bajo la condición (3.6), el Teorema de Biggins nos dice que

$$\sum_{|x|=n} e^{-V(x)} \longrightarrow 0, \text{ c.s.},$$

lo que implica que

$$\operatorname*{ínf}_{|x|=n} V(x) \to +\infty, \text{ c.s., conforme } n \to \infty.$$

Esto es, bajo el evento de no extinción, la población se traslada hacia la parte positiva de la recta real.

Para lo que resta de esta sección, denotemos

$$Y_n(\theta) = \sum_{|x|=n} e^{-\theta V(x)},$$

para $n = 1, 2, \ldots$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que $W_n(\theta) = \frac{Y_n(\theta)}{m(\theta)^n}$. La condición (3.6) implica que $W_n(1) = Y_n(1)$, lo cual denotaremos simplemente por Y_n.

El resultado principal de esta sección es el Teorema de límite central, que enunciamos a continuación.

Teorema 3.2 (Teorema de límite central)**.** *Suponga* (3.4), (3.5), *y* (3.6). *Entonces, bajo el evento de no extinción, se cumple lo siguiente*

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\log n} \inf_{|u|=n} V(u) \right\} = \frac{3}{2}, \quad \mathbb{P}\text{-}c.s., \tag{3.8}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\log n} \inf_{|u|=n} V(u) \right\} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}\text{-}c.s., \tag{3.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\log n} \inf_{|u|=n} V(u) \right\} = \frac{3}{2}, \quad \textit{en probabilidad.} \tag{3.10}$$

De aquí en adelante consideraremos la condición adicional

$$\sup_{|x|=1} |V(x)| + \xi \leq C, \quad \text{c.s}, \tag{3.11}$$

para alguna constante $C > 0$. Esta condición no es necesaria pero nos ayuda a simplificar los cálculos.

Además, consideraremos $\widehat{\mathbb{P}}$ igual que en el capítulo anterior, pero usando $\theta = 1$, esto es

$$\frac{d\widehat{\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_n}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}} = W_n(1) = Y_n,$$

donde $\mathcal{F}_n$ es la σ-álgebra generada por la CAR hasta la generación n.

Teorema 3.3. *Suponga* (3.4), (3.5), *y* (3.6), *y sea* $\theta > 1$. *Para toda* $0 < r < \frac{1}{\theta}$ *se cumple que*

$$\mathbb{E}[Y_n(\theta)^r] = n^{-\frac{3}{2}\theta r + o(1)}, \quad n \to \infty. \tag{3.12}$$

Demostración. Recordemos que, para u con $|u| = n$,

$$\widehat{\mathbb{P}}(w_n = u|\mathcal{F}_n) = \frac{e^{-V(u)}}{Y_n},$$

por lo que, para cualquier variable aleatoria $X \geq 0$ $\mathcal{F}_n$-medible, tenemos que

$$\mathbb{E}[Y_n(\theta)X] = \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{|u|=n} \frac{e^{-\theta V(u)}}{Y_n} X\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{|u|=n} 1_{\{w_n=u\}} e^{-(\theta-1)V(u)} X\right],$$

lo que implica que

$$\mathbb{E}[Y_n(\theta)X] = \widehat{\mathbb{E}}\left[e^{-(\theta-1)V(w_n)}X\right]. \tag{3.13}$$

Ahora, tomemos $0 < r < \frac{1}{\theta}$ y $\lambda > 0$. Denotemos $s := 1 - r$. Usando la ecuación (3.13), vemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n(\theta)^{1-s}] &\leq n^{-(1-s)\theta\lambda} + \mathbb{E}[Y_n(\theta)^{1-s} 1_{\{Y_n(\theta) > n^{-\theta\lambda}\}}] \\ &= n^{-(1-s)\theta\lambda} + \widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{e^{-(\theta-1)V(w_n)}}{Y_n(\theta)^s} 1_{\{Y_n(\theta) > n^{-\theta\lambda}\}}\right]\end{aligned}$$

Ahora, procedemos a estimar la esperanza del termino a la derecha. Sea $a > 0$, $c > b > 0$, tales que $(\theta - 1)a > s\theta\lambda$, y $(\theta s - (\theta - 1)b) > \frac{3}{2}$. Denotemos $\underline{w_n}$ al individuo $\underline{w_n} \preceq w_n$ tal que $V(\underline{w_n}) = \min_{u \preceq w_n} V(u)$. Consideremos los siguientes eventos

$$\begin{aligned}E_{1,n} &= \{V(w_n) > a \log n\} \cup \{V(w_n) \leq -b \log n\} \\ E_{2,n} &= \{V(\underline{w_n}) < -c \log n,\ V(w_n) > -b \log n\} \\ E_{3,n} &= \{V(\underline{w_n}) \geq -c \log n, -b \log n < \ V(w_n) \leq a \log n\}\end{aligned}$$

Se puede ver claramente que $\mathbb{P}\left(E_{1,n} \cup E_{2,n} \cup E_{3,n}\right) = 1$.

En el evento $E_{1,n} \cap \{Y_n(\theta) > n^{-\theta\lambda}\}$, tenemos que si $V(w_n) > a \log n$, entonces

$$\frac{e^{-(\theta-1)V(w_n)}}{Y_n(\theta)^s} \leq n^{s\theta\lambda-(\theta-1)a}$$

y si $V(w_n) \leq -b \log n$ entonces

$$\frac{e^{-(\theta-1)V(w_n)}}{Y_n(\theta)^s} \leq e^{(\theta s-(\theta-1))V(w_n)} \leq n^{-(\theta s-(\theta-1))b},$$

ya que $s\theta > \theta - 1$ y $Y_n(\theta) \geq e^{-\theta V(w_n)}$. Ahora, como $s\theta\lambda - (\theta-1)a < -\frac{3}{2}$ y $(s\theta - (\theta-1))b > \frac{3}{2}$, podemos concluir que

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{e^{-(\theta-1)V(w_n)}}{Y_n(\theta)^s} 1_{E_{1,n}\cap\{Y_n(\theta)>n^{-\theta\lambda}\}}\right] \leq n^{-3/2}.$$

Ahora, como $s > 0$, tomamos $s_1 > 0$ y $s_2 > 0$ tales que $s = s_1 + s_2$. Entonces, en el evento $E_{2,n} \cap \{Y_n(\theta) > n^{-\theta\lambda}\}$ tenemos que

$$\frac{e^{-(\theta-1)V(w_n)}}{Y_n(\theta)^s} = \frac{e^{\theta s_2 V(\underline{w_n}) - (\theta-1)V(w_n)}}{Y_n(\theta)^{s_1}} \frac{e^{-\theta s_2 V(\underline{w_n})}}{Y_n(\theta)^{s_2}} \leq n^{-\theta s_2 g + (\theta-1)b + \theta\lambda s_1} \frac{e^{-\theta s_2 V(\underline{w_n})}}{Y_n(\theta)^{s_2}}.$$

Afirmamos que para $s_2 > 0$ suficientemente pequeño, existe $K > 0$ tal que

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{e^{-\theta s_2 V(\underline{w_n})}}{Y_n(\theta)^{s_2}}\right] < n^K.$$

La demostración se puede encontrar en la página 27 de [3].

Entonces, tomando c suficientemente grande tal que

$$-\theta s_2 c + (\theta-1)b + \theta\lambda s_1 + K < -\frac{3}{2},$$

tenemos que

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{e^{-(\theta-1)V(w_n)}}{Y_n(\theta)^s} 1_{E_{2,n}\cap\{Y_n(\theta)>n^{-\theta\lambda}\}}\right] \leq n^{-3/2}.$$

Tomamos un número entero $M \geq 2$ y sea $a_i = -b + i\frac{(a+b)}{M}$, $0 \leq i \leq M$. Denotamos

$$E_{3,n,i} = \{V(\underline{w_n}) \geq -c\log n, a_i \log n < \ V(w_n) \leq a_{i+1}\log n\},$$

por lo que $E_{3,n} = \cup_{i=0}^{M-1} E_{3,n,i}$.

Sea $0 \leq i \leq M-1$. Tenemos dos situaciones con respecto a a_i y λ. Si $a_i \leq \lambda$, entonces en el evento $E_{3,n,i}$ tenemos que $Y_n(\theta) \geq e^{-\theta V(w_n)} \geq n^{-\theta a_{i+1}}$ y que $e^{-(\theta-1)V(w_n)} \leq n^{-(\theta-1)a_i}$, por lo que

$$\frac{e^{-(\theta-1)V(w_n)}}{Y_n(\theta)^s} \leq n^{s\theta a_{i+1} - (\theta-1)a_i} \leq n^{(s\theta-(\theta-1))\lambda + s\theta(a+b)/M},$$

ya que $s\theta - (\theta-1) > 0$ y

$$s\theta a_{i+1} - (\theta-1)a_i = s\theta a_i - (\theta-1)a_i + s\theta(a+b)/M \leq (s\theta-(\theta-1))\lambda + s\theta(a+b)/M.$$

Entonces, podemos concluir que

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{e^{-(\theta-1)V(w_n)}}{Y_n(\theta)^s}1_{E_{3,n,i}}\right] \leq n^{(s\theta-(\theta-1))\lambda+s\theta(a+b)/M}\widehat{\mathbb{P}}(E_{3,n,i}).$$

Ahora, veamos el segundo caso, i.e. $a_i > \lambda$. Bajo el evento

$$E_{3,n,i} \cap \{Y_n(\theta) > n^{-\theta\lambda}\}$$

tenemos que

$$\frac{e^{-(\theta-1)V(w_n)}}{Y_n(\theta)^s} \leq n^{s\theta\lambda-(\theta-1)a_i} \leq n^{(s\theta-(\theta-1))\lambda},$$

y por tanto

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{e^{-(\theta-1)V(w_n)}}{Y_n(\theta)^s}1_{E_{3,n,i}\cap\{Y_n(\theta)>n^{-\theta\lambda}\}}\right] \leq n^{(s\theta-(\theta-1))\lambda}\widehat{\mathbb{P}}(E_{3,n,i}).$$

Entonces, hemos probado que

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{e^{-(\theta-1)V(w_n)}}{Y_n(\theta)^s}1_{E_{3,n}\cap\{Y_n(\theta)>n^{-\theta\lambda}\}}\right] &= \sum_{i=0}^{M-1}\widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{e^{-(\theta-1)V(w_n)}}{Y_n(\theta)^s}1_{E_{3,n,i}\cap\{Y_n(\theta)>n^{-\theta\lambda}\}}\right]\\ &\leq n^{(s\theta-(\theta-1))\lambda+s\theta(a+b)/M}\widehat{\mathbb{P}}(E_{3,n}).\end{aligned}$$

Ahora, para estimar $\widehat{\mathbb{P}}(E_{3,n})$, recordemos que bajo $\widehat{\mathbb{P}}$, $(V(w_n) : n \geq 1)$ es una caminata aleatoria, la cual es centrada, ya que debido a la condición (3.6) se tiene que

$$\widehat{\mathbb{E}}[V(w_1)] = -\frac{m'(1)}{m(1)} = 0.$$

Luego, aplicando el Lema A.4 presentado en el Apéndice, vemos que

$$\widehat{\mathbb{P}}(E_{3,n}) = \widehat{\mathbb{P}}\left(V(\underline{w_n}) \geq -c\log n, -b\log n < \ V(w_n) \leq a\log n\right) \leq n^{-3/2+o(1)}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que

$$\mathbb{E}[Y_n(\theta)^{1-s}] \leq 2n^{-(1-s)\theta\lambda} + 2n^{-3/2} + n^{(s\theta-(\theta-1))\lambda+s\theta(a+b)/M-3/2+o(1)}.$$

Ahora, tomando $\lambda = 3/2$ y haciendo $M \to \infty$, tenemos que

$$\mathbb{E}[Y_n(\theta)^r] \leq n^{-3\theta r/2+o(1)}. \tag{3.14}$$

Resta probar una desigualdad, la cota inferior. Dado que $r < 1$, entonces para $a \geq 0$ y $b \geq 0$ tenemos que $(a+b)^r \leq a^r + b^r$. Entonces, para alguna constante $K > 0$ tenemos que

$$Y_n(\theta)^r \leq K \sum_{j=1}^{n} e^{-r\theta V(w_{j-1})} \sum_{u \in \mathbb{B}_j} \left(\sum_{\substack{|x|=n \\ u \prec x}} e^{-\theta(V(x)-V(u))} \right)^r + e^{-r\theta V(w_n)}$$

donde $\mathbb{B}_j$ es el conjunto de hermanos de w_j, esto es, el conjunto de y tales que $w_{j-1} \prec y$, con $y \neq w_j$. Sea $\mathcal{G}_n$ la σ-álgebra generada por la espina hasta la generación n. Ahora bien, de la condición (3.11), sabemos que $\#\mathbb{B}_j$ está acotado por una constante casi seguramente. También, para todo $u \in \mathbb{B}_j$, el sub-árbol que tiene como raíz a u no contiene elementos de la espina, por lo que bajo $\widehat{\mathbb{P}}$, $\sum_{\substack{|x|=n \\ u \prec x}} e^{-\theta(V(x)-V(u))}$ condicionada a $\mathcal{G}_n$ tiene la misma distribución que $Y_{n-j}(\theta)$ bajo $\mathbb{P}$. Entonces, para alguna constante $K_1 > 0$ se cumple que

$$\widehat{\mathbb{E}}[Y_n^r(\theta)|\mathcal{G}_n] \leq K_1 \sum_{j=1}^{n} e^{-r\theta V(w_{j-1})} \mathbb{E}[Y_{n-j}(\theta)^r] + e^{-rV(w_n)}.$$

Sea $\epsilon > 0$ y definamos $t := \frac{3}{2}r\theta - \epsilon$. Usando la cota superior obtenida anteriormente para $\mathbb{E}[Y_{n-j}(\theta)^r]$ (dada por la ecuación (3.14)), tenemos que para algunas constantes positivas K_2, K_3,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}[Y_n^r(\theta)|\mathcal{G}_n] &\leq K_1 \sum_{j=1}^{n} e^{-r\theta V(w_{j-1})} (n-j)^{-t} + e^{-r\theta V(w_n)} \\
&\leq K_2 \sum_{j=1}^{n} e^{-r\theta V(w_{j-1})} (n-j+2)^{-t} + e^{-r\theta V(w_n)} \\
&\leq K_3 \sum_{j=0}^{n} e^{-r\theta V(w_j)} (n-j+1)^{-t}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $V(w_n)$ es $\mathcal{G}_n$ medible, usando la desigualdad de Jensen, tenemos que

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[e^{-(\theta-1)V(w_n)} Y_n(\theta)^{-s}\right] \geq \widehat{\mathbb{E}}\left[e^{-(\theta-1)V(w_n)} \mathbb{E}[Y_n(\theta)^{1-s}|\mathcal{G}_n]^{-\frac{s}{1-s}}\right].$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_n(\theta)^{1-s}] &= \widehat{\mathbb{E}}\left[e^{-(\theta-1)V(w_n)} Y_n(\theta)^{-s}\right] \\
&\geq \widehat{\mathbb{E}}\left[e^{-(\theta-1)V(w_n)} \mathbb{E}[Y_n(\theta)^{1-s}|\mathcal{G}_n]^{-\frac{s}{1-s}}\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[Y_n(\theta)^{1-s}] \geq \frac{1}{K_3^{s/1-s}} \widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{e^{-(\theta-1)V(w_n)}}{(\sum_{j=0}^{n} e^{-(1-s)\theta V(w_j)}(n-j+1)^{-t})^{s/1-s}}\right].$$

Ahora, tomando $V_j = V(w_n) - V(w_{n-j})$ para $0 \leq j \leq n$, tenemos que

$$\mathbb{E}[Y_n(\theta)^{1-s}] \geq \frac{1}{K_3^{s/1-s}} \widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{e^{(\theta s-(\theta-1))V_n}}{(\sum_{j=0}^{n} e^{(1-s)\theta V_j}(j+1)^{-t})^{s/1-s}}\right].$$

Tomemos $K_4 > 0$ constante y definamos los siguientes eventos

$$E_{n,1} = \bigcap_{k=1}^{\lfloor n^{\epsilon}\rfloor-1} \left\{V_k \leq -K_4 k^{1/3}\right\} \cap \left\{-2n^{-\epsilon/2} \leq V_{\lfloor n^{\epsilon}\rfloor} \leq -n^{\epsilon/2}\right\},$$
$$E_{n,2} = \bigcap_{k=\lfloor n^{\epsilon}\rfloor+1}^{n-\lfloor n^{\epsilon}\rfloor-1} \left\{V_k \leq -[k^{1/3} \wedge (n-k)^{1/3}]\right\} \cap \left\{-2n^{-\epsilon/2} \leq V_{n-\lfloor n^{\epsilon}\rfloor} \leq -n^{\epsilon/2}\right\},$$
$$E_{n,3} = \bigcap_{k=n-\lfloor n^{\epsilon}\rfloor+1}^{n-1} \left\{V_k \leq \frac{3}{2}\log(n)\right\} \cap \left\{\frac{3-\epsilon}{2}\log(n) \leq V_n \leq \frac{3}{2}\log(n)\right\}.$$

Bajo $\cap_{i=1}^{3} E_{n,i}$, es claro que $e^{(\theta s-(\theta-1))V_n} \geq n^{(3-\epsilon)(\theta s-(\theta-1))/2}$, ya que $\theta s > \theta - 1$. Más aun, afirmamos que $\sum_{j=0}^{n} e^{(1-s)\theta V_j}(j+1)^{-t} \leq K_5 n^{2\epsilon}$, donde $K_5 > 0$ es una constante. Primero observemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\lfloor n^{\epsilon}\rfloor-1} e^{(1-s)\theta V_j}(j+1)^{-t} &= \sum_{j=1}^{\lfloor n^{\epsilon}\rfloor-1} e^{(1-s)\theta V_j}\frac{(j+1)^{\epsilon}}{(j+1)^{3(1-s)\theta/2}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\lfloor n^{\epsilon}\rfloor-1} e^{-(1-s)\theta K_4 k^{1/3}}(j+1)^{\epsilon} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\lfloor n^{\epsilon}\rfloor-1} (j+1)^{\epsilon} \\
&\leq (\lfloor n^{\epsilon}\rfloor - 1)(\lfloor n^{\epsilon}\rfloor)^{\epsilon} \\
&\leq c_0 n^{2\epsilon},
\end{aligned}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

De igual forma, para $k = \lfloor n^\epsilon \rfloor$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 \leq \frac{1}{n^{2\epsilon}} e^{(1-s)\theta V_{\lfloor n^\epsilon \rfloor}} (\lfloor n^\epsilon \rfloor + 1)^{-t} &= \frac{(\lfloor n^\epsilon \rfloor + 1)^\epsilon}{(\lfloor n^\epsilon \rfloor + 1)^{3(1-s)\theta/2}} \frac{1}{n^{2\epsilon}} e^{(1-s)\theta V_{\lfloor n^\epsilon \rfloor}} \\
&\leq \frac{(\lfloor n^\epsilon \rfloor + 1)^\epsilon}{n^{2\epsilon}} e^{-(1-s)\theta n^{\epsilon/2}} \\
&\leq \left(\frac{\lfloor n^\epsilon \rfloor + 1}{n^2} \right)^\epsilon,
\end{aligned}
$$

ahora bien, como $\left(\frac{\lfloor n^\epsilon \rfloor + 1}{n^2} \right)^\epsilon \to 0$ cuando $n \to \infty$, implica que también

$$
\frac{1}{n^{2\epsilon}} e^{(1-s)\theta V_{\lfloor n^\epsilon \rfloor}} (\lfloor n^\epsilon \rfloor + 1)^{-t} \longrightarrow 0,
$$

así, para alguna constante c_1 tenemos que

$$
e^{(1-s)\theta V_{\lfloor n^\epsilon \rfloor}} (\lfloor n^\epsilon \rfloor + 1)^{-t} \leq c_1 n^{2\epsilon}.
$$

De forma similar podemos probar los demás casos. Entonces, tenemos que

$$
\mathbb{E}[Y_n(\theta)^{1-s}] \geq (K_3 K_5)^{-s/(1-s)} n^{-2\epsilon s/(1-s)} n^{(3-\epsilon)(\theta s - (\theta - 1))/2} \widehat{\mathbb{P}} \left(\cap_{i=1}^3 E_{n,i} \right). \tag{3.15}
$$

Por lo que ahora nos interesa acotar $\widehat{\mathbb{P}} (\cap_{i=1}^3 E_{n,i})$. Denotemos $\mathscr{G}_j$ la σ-álgebra generada por $V_1, \ldots, V_j$. Notemos que $E_{n,1}$ y $E_{n,2}$ pertenecen a $\mathscr{G}_{n-\lfloor n^\epsilon \rfloor}$. Por otro lado, al usar la propiedad de Markov, tenemos que bajo el evento $\{V_{n-\lfloor n^\epsilon \rfloor} \in I_n := [-2n^{\epsilon/2}, -n^{\epsilon/2}]\}$, $\widehat{\mathbb{P}}(E_{n,3} | \mathscr{G}_{n-\lfloor n^\epsilon \rfloor})$ es mayor o igual que

$$
\inf_{z \in I_n} \widehat{\mathbb{P}} \begin{pmatrix} V(w_i) \leq \frac{3}{2} \log(n) - z, \forall 1 \leq i \leq \lfloor n^\epsilon \rfloor - 1, \\ \frac{3-\epsilon}{2} \log(n) \leq V_{\lfloor n^\epsilon \rfloor} + z \leq \frac{3}{2} \log(n) \end{pmatrix}. \tag{3.16}
$$

Tanto la probabilidad de arriba como otras usadas más adelante son estimadas en [3]. Para ver las ideas más formales vease el Apéndice A.2 de la monografía de Shi [10], donde estimaciones muy similares se obtienen para caminatas aleatorias entre barreras.

Aquí no haremos estos cálculos, los vamos asumir para mantener este trabajo en un tamaño razonable. Entonces, siguiendo los argumentos en [3], tenemos que la probabilidad en (3.16) es mayor o igual que $\lfloor n^\epsilon \rfloor^{-1/2+o(1)}$. Como consecuencia, tenemos que

$$
\widehat{\mathbb{P}} \left(\cap_{i=1}^3 E_{n,i} \right) \geq \lfloor n^\epsilon \rfloor^{-1/2+o(1)} \widehat{\mathbb{P}}(E_{n,1} \cap E_{n,2}) \geq n^{-\epsilon/2+o(1)} \widehat{\mathbb{P}}(E_{n,1} \cap E_{n,2}).
$$

Ahora, siguiendo la observación anterior, $\widehat{\mathbb{P}}(E_{n,2} | \mathscr{G}_{\lfloor n^\epsilon \rfloor}) \geq n^{-(3-\epsilon)/2+o(1)}$ y como $E_{n,1}$ es $\mathscr{G}_{\lfloor n^\epsilon \rfloor}$-medible, se cumple que

$$
\widehat{\mathbb{P}} \left(\cap_{i=1}^3 E_{n,i} \right) \geq n^{-\epsilon/2+o(1)} n^{-(3-\epsilon)/2+o(1)} \widehat{\mathbb{P}}(E_{n,1}).
$$

De nuevo, de la observación anterior, tenemos que para K_4 suficientemente pequeño se cumple que $\widehat{\mathbb{P}}(E_{n,1}) \geq n^{-\epsilon/2+o(1)}$. Entonces

$$\widehat{\mathbb{P}}\left(\cap_{i=1}^{3} E_{n,i}\right) \geq n^{-\epsilon/2+o(1)} n^{-(3-\epsilon)/2+o(1)} n^{-\epsilon/2+o(1)}.$$

Substituyendo en la ecuación (3.15) y haciendo $\epsilon \to 0$, obtenemos la cota buscada, esto es

$$\mathbb{E}[Y_n(\theta)^{1-s}] \geq n^{-3(1-s)\theta/2+o(1)},$$

lo que termina la prueba. □

Teorema 3.4. *Suponga* (3.4), (3.5), *y* (3.6). *Para todo* $a \in [0,1)$, *se cumple que*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[(n^{1/2}Y_n)^a\right] < \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[(n^{1/2}Y_n)^a\right] < \infty.$$

La prueba de este teorema es similar a la del Teorema 3.3. Se puede encontrar en la página 32 de [3].

Teorema 3.5. *Suponga* (3.4), (3.5), *y* (3.6) *y sea* $\theta > 1$. *En el evento de no extinción tenemos que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Y_n(\theta)}{\log n} = -\frac{\theta}{2}, \quad \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{3.17}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{Y_n(\theta)}{\log n} = -\frac{3}{2}\theta, \quad \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{3.18}$$

$$Y_n(\theta) = n^{-\frac{3\theta}{2}+o(1)}, \quad \textit{en probabilidad.} \tag{3.19}$$

Demostración. A continuación presentamos la prueba de las ecuaciones (3.18) y (3.19). La prueba de la ecuación (3.17) se presentará mas adelante.

Sea $\epsilon > 0$. De la desigualdad de Markov, y al usar un r adecuado en el Teorema 3.3, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y_n(\theta) > n^{-(3\theta/2)+\epsilon}] &= \mathbb{P}[Y_n(\theta)^{2r} > n^{-(3\theta r)+2r\epsilon}] \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[Y_n(\theta)^{2r}]}{n^{-(3\theta r)+2r\epsilon}} \\ &\simeq n^{-(3\theta r)+o(1)-2r\epsilon}\end{aligned}$$

lo cual puede ser tan pequeño como queramos cuando $n \to \infty$, i.e.

$$\mathbb{P}[Y_n(\theta) > n^{-(3\theta/2)+\epsilon}] \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Por lo tanto, $Y_n(\theta) \leq n^{-(3\theta/2)+o(1)}$ en probabilidad, lo que da la cota superior en la ecuación (3.19), que a su vez, implica que existe una subsucesión $\{Y_{n_k}(\theta)\}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log\left(Y_{n_k}(\theta)\right)}{\log(n_k)} \leq -\frac{3}{2}\theta, \quad \mathbb{P}\text{-c.s.},$$

lo que nos da la cota superior en la ecuación (3.18).

Ahora, usemos la desigualdad de Paley-Zygmund[2]y el Teorema 3.3 con un r adecuado

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y_n(\theta) > n^{-(3\theta/2)+o(1)}] &= \mathbb{P}[Y_n(\theta)^r > n^{-(3\theta r/2)+ro(1)}] \\
&\geq \left(1 - \frac{n^{-(3\theta r/2)+ro(1)}}{\mathbb{E}[Y_n(\theta)^r]}\right)^2 \frac{\mathbb{E}[Y_n(\theta)^r]^2}{\mathbb{E}[Y_n(\theta)^{2r}]} \\
&= \left(1 - \frac{n^{-(3\theta r/2)+ro(1)}}{n^{-(3\theta r/2)+o(1)}}\right)^2 \frac{n^{-(3\theta r)+2o(1)}}{n^{-(3\theta r)+o(1)}} \\
&= \left(1 - n^{o(1)(r-1)}\right)^2 n^{o(1)} \\
&\geq n^{o(1)}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Luego, definamos $\tau_n := \inf\{k \geq 1 : \#\{x : |x| = k\} \geq n^{2\epsilon}\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\tau_n < \infty,\ \min_{k\in[n/2,n]} Y_{k+\tau_n}(\theta) \leq n^{-3\theta/2-\epsilon} \exp\left(-\theta \max_{|x|=\tau_n} V(x)\right)\right) \\
&\leq \sum_{k\in[n/2,n]} \mathbb{P}\left(\tau_n < \infty,\ Y_{k+\tau_n}(\theta) \leq n^{-3\theta/2-\epsilon} \exp\left(-\theta \max_{|x|=\tau_n} V(x)\right)\right).
\end{aligned}$$

Ahora, trabajemos con el evento

$$\left\{\tau_n < \infty,\ Y_{k+\tau_n}(\theta) \leq n^{-3\theta/2-\epsilon} \exp\left(-\theta \max_{|x|=\tau_n} V(x)\right)\right\}.$$

Primero, notemos que

$$Y_{k+\tau_n}(\theta) = \sum_{|y|=k+\tau_n} e^{-\theta V(y)} = \sum_{|u|=\tau_n} \sum_{\substack{|y|=k+\tau_n \\ u\prec y}} e^{-\theta V(y)},$$

[2]Sea X v.a. no negativa con segundo momento finito y $0 \leq x \leq 1$, entonces

$$\mathbb{P}(X > x\mathbb{E}[X]) \geq (1-x)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

por lo que, si $Y_{k+\tau_n}(\theta) \leq n^{-3\theta/2-\epsilon} \exp\left(-\theta \max_{|x|=\tau_n} V(x)\right)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{|u|=\tau_n} \sum_{\substack{|y|=k+\tau_n \\ u\prec y}} e^{-\theta(V(y)-V(u))} &\leq \sum_{|u|=\tau_n} \sum_{\substack{|y|=k+\tau_n \\ u\prec y}} e^{-\theta(V(y)-\max_{|x|=\tau_n} V(x))} \\ &= Y_{k+\tau_n}(\theta) \exp\left(\theta \max_{|x|=\tau_n} V(x)\right) \\ &\leq n^{-3\theta/2-\epsilon}.\end{aligned}$$

En particular, para todo u con $|u| = \tau_n$ se cumple que

$$\sum_{\substack{|y|=k+\tau_n \\ u\prec y}} e^{-\theta(V(y)-V(u))} \leq n^{-3\theta/2-\epsilon}.$$

Por otro lado, tenemos que $\sum_{\substack{|y|=k+\tau_n \\ u\prec y}} e^{-\theta(V(y)-V(u))}$ son copias independientes de $Y_k(\theta)$ para cada $|u| = \tau_n$. Por definición, τ_n cumple que $\#\{x : |x| = \tau_n\} \geq \lfloor n^{2\epsilon} \rfloor$ y por tanto podemos concluir que

$$\mathbb{P}\left(\tau_n < \infty,\ Y_{k+\tau_n}(\theta) \leq n^{-3\theta/2-\epsilon} e^{-\theta \max_{|x|=\tau_n} V(x)}\right) \leq \mathbb{P}\left(Y_k(\theta) \leq n^{-3\theta/2-\epsilon}\right)^{\lfloor n^{2\epsilon} \rfloor}$$

al usar la propiedad de ramificación. Así usando la ecuación (3.20), tenemos que para todo n suficientemente grande

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Bigg(\tau_n < \infty,\ &\min_{k\in[n/2,n]} Y_{k+\tau_n}(\theta) \leq n^{-3\theta/2-\epsilon} \exp\left(-\theta \max_{|x|=\tau_n} V(x)\right)\Bigg) \\ &\leq \sum_{k\in[n/2,n]} \mathbb{P}\left(Y_k(\theta) \leq n^{-3\theta/2-\epsilon}\right)^{\lfloor n^{2\epsilon} \rfloor} \\ &\leq \sum_{k\in[n/2,n]} \mathbb{P}\left(Y_k(\theta) \leq k^{-3\theta/2-\epsilon}\right)^{\lfloor n^{2\epsilon} \rfloor} \\ &\leq \sum_{k\in[n/2,n]} \left(1 - k^{-\epsilon}\right)^{\lfloor n^{2\epsilon} \rfloor} \\ &\leq n \exp\left(-n^{-\epsilon} \lfloor n^{2\epsilon} \rfloor\right).\end{aligned}$$

Dado que el término del lado derecho es sumable en n, usando el Lema de Borel-Cantelli, tenemos que casi seguramente, para todo n suficientemente grande se cumple que

$$\tau_n = \infty \quad \text{o} \quad \min_{k\in[n/2,n]} Y_{k+\tau_n}(\theta) > n^{-3\theta/2-\epsilon} \exp\left(-\theta \max_{|x|=\tau_n} V(x)\right).$$

Ahora, del Teorema de Kesten-Stigum, tenemos que bajo el evento de no extinción $\#\{x : |x| = \tau_n\}/m^{\tau_n}$ converge a c.s. a una variable aleatoria positiva. Por otro lado, por definición de τ_n, $\#\{x : |x| = \tau_n\}$ es aproximadamente $n^{2\epsilon}$. Así, bajo el evento de no extinción se tiene que

$$\tau_n \sim \frac{2\epsilon}{\log(m)} \log(n), \text{ para } n \to \infty,$$

y obtenemos que

$$Y_n(\theta) \geq \min_{k \in [n/2, n]} Y_{k+\tau_n}(\theta) > n^{-3\theta/2-\epsilon} \exp\left(-\theta \max_{|x|=\tau_n} V(x)\right).$$

En particular, de la ley de los grandes números, sabemos que bajo el evento de no extinción, $\frac{1}{\tau_n} \max_{|x|=\tau_n} V(x)$ converge casi seguramente a una constante y por tanto podemos concluir que

$$Y_n(\theta) \geq n^{-3\theta/2+o(1)},$$

casi seguramente y por tanto también en probabilidad, lo que implica la cota inferior en (3.19). Por otro lado, la desigualdad anterior implica que

$$\frac{\log(Y_n(\theta))}{\log(n)} \geq -\frac{3}{2}\theta + o(1), \ \mathbb{P}\text{-c.s.},$$

lo que nos da la cota inferior en (3.18). Con esto concluye la prueba.

□

Teorema 3.6. *Suponga* (3.4), (3.5), *y* (3.6). *Bajo el evento de no extinción, se cumple que*

$$Y_n = n^{-1/2+o(1)}, \ \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{3.21}$$

Demostración. Tomemos $a \in (0,1)$. Como $(Y_n : n \geq 1)$ es una martingala positiva, entonces $(Y_n^a : n \geq 1)$ es una supermartingala positiva. Así, usando el Lema A.3 enunciado en el apéndice, obtenemos que para todo $0 < n \leq m$ y $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{n \leq j \leq m} Y_j^a \geq \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}[Y_n^a]}{\lambda} \leq \frac{C}{\lambda n^{a/2}}, \tag{3.22}$$

donde $C > 0$ es una constante que obtenemos al usar el Teorema 3.4.

Ahora, sea $\epsilon > 0$. Definamos $n_k = \lceil k^{(2/\epsilon)} \rceil$, entonces para cada $k \geq 1$, usando la ecuación (3.22) tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\max_{n_k \leq j \leq n_{k+1}} Y_j^a \geq n_k^{-a/2+\epsilon}\right) \leq \frac{C}{n_k^\epsilon} \leq \frac{C}{k^2},$$

por lo tanto
$$\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\left(\max_{n_k\leq j\leq n_{k+1}} Y_j^a \geq n_k^{-a/2+\epsilon}\right) < \infty.$$
Por el lema de Borel-Cantelli, casi seguramente, para todo k suficientemente grande, se cumple que
$$\max_{n_k\leq j\leq n_{k+1}} Y_j^a < n_k^{-a/2+\epsilon}$$
y por tanto
$$\max_{n_k\leq j\leq n_{k+1}} Y_j < n_k^{-1/2+\epsilon/a}.$$
Entonces, como ϵ/a puede ser tan pequeño como queramos, podemos concluir que
$$Y_n \leq n^{-1/2+o(1)}.$$

Ahora, la prueba de la segunda desigualdad es igual a la usada en la segunda parte de la prueba del Teorema 3.5, pero en lugar de la ecuación (3.20), partimos de
$$\mathbb{P}\left(Y_n > n^{-1/2+o(1)}\right) \geq n^{n(1)},$$
la cual obtenemos usando la desigualdad de Paley-Zygmund y el Teorema 3.4. $\square$

Así, podemos proceder a la prueba del Teorema 3.2.

Demostración del Teorema 3.2. Sabemos que
$$Y_n(\theta) = \sum_{|u|=n} e^{-\theta V(u)} \geq e^{-\theta \inf_{|u|=n} V(u)},$$
y también, recordando que $Y_n = Y_n(1)$,
$$Y_n(\theta) = \sum_{|u|=n} e^{-(\theta-1)V(u)}e^{-V(u)} \leq Y_n e^{-(\theta-1)\inf_{|u|=n} V(u)},$$
ya que $\theta > 1$. Por lo tanto
$$-\frac{1}{\theta}\frac{\log(Y_n(\theta))}{\log(n)} \leq \frac{1}{\log(n)}\inf_{|u|=n} V(u) \leq \frac{1}{\theta-1}\left(\frac{\log(Y_n)}{\log(n)} - \frac{\log(Y_n(\theta))}{\log(n)}\right). \quad (3.23)$$

Ahora, usando la ecuación (3.19) y el Teorema 3.6, tenemos que bajo el evento de supervivencia,
$$\frac{3}{2} \leq \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\log(n)}\inf_{|u|=n} V(u)\right\} \leq \frac{\theta}{(\theta-1)}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\theta\right), \text{ en probabilidad.}$$

Como esto se cumple para todo $\theta > 1$, haciendo $\theta \to \infty$ obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\log(n)} \inf_{|u|=n} V(u) \right\} = \frac{3}{2}, \quad \text{en probabilidad,}$$

lo que prueba ecuación (3.10).

De igual forma, partiendo de la ecuación (3.23), pero ahora usando la ecuación (3.18) y el Teorema 3.6, tenemos que bajo el evento de supervivencia,

$$\frac{3}{2} \leq \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\log(n)} \inf_{|u|=n} V(u) \right\} \leq \frac{\theta}{(\theta-1)} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\theta \right), \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Esto se cumple para todo $\theta > 1$, por lo que haciendo $\theta \to \infty$ obtenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\log(n)} \inf_{|u|=n} V(u) \right\} = \frac{3}{2}, \quad \mathbb{P}\text{-c.s.,}$$

lo que prueba ecuación (3.8).

Falta probar ecuación (3.9) para concluir la prueba. Primero, observemos que

$$Y_n \geq \exp\left(-\inf_{|u|=n} V(u) \right),$$

entonces, bajo el evento de no extinción, se cumple que

$$\frac{1}{\log(n)} \inf_{|u|=n} V(u) \geq -\frac{\log(Y_n)}{\log(n)}$$

y por tanto, usando el Teorema 3.6, podemos concluir que

$$\liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\log(n)} \inf_{|u|=n} V(u) \right\} \geq \frac{1}{2}, \ \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Ahora probemos la cota superior. Tomemos $-\infty < a < b < \infty$ y $\epsilon > 0$. Sea $l \geq 1$ un entero y tomemos $n \in \{l, l+1, \ldots, 2l\}$. Tomemos $c > 0$ una constante fija y definamos A_n el conjunto de vertices x tales que $|x| = n$ y satisfacen

$$a\log(l) \leq V(x) \leq b\log(l),$$

$$V(x_k) \geq g_n(k), \quad \forall\ 0 \leq k \leq n,$$

donde $g_n(k) = \min\{ck^{1/3}, c(n-k)^{1/3} + a\log(l)\}$ y x_k es el ancestro de x en la k-ésima generación. Ahora, consideremos el siguiente evento

$$E_l = \bigcup_{n=l}^{2l} A_n.$$

Afirmamos que E_l cumple

$$\frac{\mathbb{E}[(\#E_l)^2]}{\mathbb{E}[\#E_l]^2} \leq l^{b-a+\epsilon} + l^{b-2a+1/2+\epsilon}.$$

Por ejemplo, calculemos el primer momento de $\#E_l$. Notemos que

$$\mathbb{E}[\#E_l] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=l}^{2l}\sum_{|x|=n} 1_{\{x\in A_n\}}\right] = \sum_{n=l}^{2l}\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=n} 1_{\{x\in A_n\}}\right],$$

luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=n} 1_{\{x\in A_n\}}\right] &= \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{|x|=n} \frac{e^{-V(x)}}{Y_n} e^{V(x)} 1_{\{x\in A_n\}}\right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[e^{V(w_n)} 1_{\{w_n\in A_n\}}\right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[e^{V(w_n)} 1_{\{a\log(l)\leq V(w_n)\leq b\log(l),\quad V(w_k)\geq g_n(k),\quad \forall\ 0\leq k\leq n\}}\right] \\
&\geq l^a\ \widehat{\mathbb{P}}\left(a\log(l)\leq V(w_n)\leq b\log(l),\quad V(w_k)\geq g_n(k),\quad \forall\ 0\leq k\leq n\right).
\end{aligned}$$

Ahora bien, afirmamos que la probabilidad que aparece en el lado derecho es $l^{-3/2+o(1)}$. Omitimos los cálculos para mantener el texto en un tamaño razonable, pero las ideas detrás de la demostración se pueden encontrar en el Apéndice A.2 de la monografía de Shi [10]. Entonces

$$\mathbb{E}[\#E_l] \geq \sum_{n=l}^{2l} l^{a-3/2+o(1)} = l^{1+a-3/2+o(1)} + l^{a-3/2+o(1)}.$$

De forma similar, trabajando con el segundo momento de $\#E$, podemos probar[3] la desigualdad buscada

$$\frac{\mathbb{E}[(\#E_l)^2]}{\mathbb{E}[\#E_l]^2} \leq l^{b-a+\epsilon} + l^{b-2a+1/2+\epsilon}.$$

Ahora, usando la desigualdad de Cauchy-Swarchz, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\#E_l)]^2 &= \mathbb{E}[(\#E_l)1_{\{\#E_l\neq 0\}}]^2 \\
&\leq \mathbb{E}[(\#E_l)^2]\mathbb{P}(E_l\neq\emptyset),
\end{aligned}$$

[3]La prueba rigurosa la podemos encontrar en [3], página 16.

por lo que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\min_{l\leq|x|\leq 2l} V(x)\leq b\log(l)\right) &\geq \mathbb{P}(E_l\neq\emptyset)\\ &\geq \frac{\mathbb{E}[\#E_l]^2}{\mathbb{E}[(\#E_l)^2]}.\end{aligned}$$

Luego, para todo $b>1/2$ y $\epsilon>0$, tomando $a>1/2$ suficientemente cerca de b y l suficientemente grande, tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\min_{l\leq|x|\leq 2l} V(x)\leq b\log(l)\right)\geq l^{-\epsilon} \tag{3.24}$$

Ahora, tomemos $n_j=2^j$ y definamos

$$\tau_j := \inf\{k\geq 1 : \#\{x : |x|=k\}\geq n_j^{2\epsilon}\}.$$

Entonces, podemos proceder de forma similar a la demostración del Teorema 3.5, y obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Bigg(\tau_j<\infty, &\min_{\tau_j+n_j\leq|x|\leq\tau_j+n_{j+1}} V(x) > \max_{|x|=\tau_j} V(x)+b\log(n_j)\Bigg)\\ &\leq \mathbb{P}\left(\min_{n_j\leq|x|\leq n_{j+1}} V(x)>b\log(n_j)\right)^{\lfloor n_j^{2\epsilon}\rfloor}\\ &\leq (1-n_j^{-\epsilon})^{\lfloor n_j^{2\epsilon}\rfloor}\end{aligned}$$

donde la primer desigualdad la obtenemos al considerar los sub-árboles que tienen como raíz a los individuos de la generación τ_j, los cuales son independientes, y por definición de τ_j son al menos $\lfloor n_j^{2\epsilon}\rfloor$. La segunda desigualdad la obtenemos de la ecuación (3.24).

Ahora bien, como el lado derecho es sumable, por el Lema de Borel-Cantelli, tenemos que casi seguramente, para todo j suficientemente grande se cumple que

$$\tau_j=\infty \quad \text{o} \quad \min_{\tau_j+n_j\leq|x|\leq\tau_j+n_{j+1}} V(x)\leq \max_{|x|=\tau_j} V(x)+b\log(n_j).$$

Ahora, del Teorema de Kesten-Stigum, tenemos que bajo el evento de no extinción $\tau_j\sim\frac{2\epsilon}{\log(m)}\log(n_j)$. También, de la Ley de los grandes números, sabemos que bajo el evento de no extinción $\frac{1}{\tau_j}\max_{|x|=\tau_j} V(x)$ converge casi seguramente a una constante positiva c, por lo que para j suficientemente grande,

$$\max_{|x|=\tau_j} V(x)\leq c\tau_j\sim\frac{2c\epsilon}{\log(m)}\log(n_j).$$

Por lo tanto,

$$\min_{\tau_j+n_j\leq|x|\leq\tau_j+n_{j+1}} V(x) \leq \left(\frac{2c\epsilon}{\log(m)}+b\right)\log(n_j).$$

Así

$$\frac{1}{\log(n_j)}\min_{n_j\leq|x|\leq 2n_{j+1}} V(x) \leq \left(\frac{2c\epsilon}{\log(m)}+b\right),$$

donde $\frac{2c\epsilon}{\log(m)}+b$ puede ser tan cercano a $1/2$ como queramos. Finalmente concluimos que bajo el evento de no extinción,

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\log(n)}\min_{|x|=n} V(x)\right\} \leq \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

lo que nos permite concluir la prueba. $\square$

Ahora, podemos proceder a probar la ecuación (3.17) del Teorema 3.5.

Demostración de la ecuación ecuación (3.17) *del Teorema 3.5.* Primero, notemos que

$$Y_n(\theta)=\sum_{|x|=n} e^{-\theta V(x)} \leq \left(\sum_{|x|=n} e^{-V(x)}\right)^{\theta} = Y_n^{\theta}.$$

al ser $\theta>1$. Así, del Teorema 3.6 tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{\log(Y_n(\theta))}{\log(n)}\right\} \leq -\frac{\theta}{2}, \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Ahora, dado que

$$Y_n(\theta)=\sum_{|x|=n} e^{-\theta V(x)} \geq \exp\left(-\theta\inf_{|x|=n} V(x)\right).$$

De la ecuación (3.9) en el Teorema de límite central obtenemos la cota inferior, i.e.

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{\log(Y_n(\theta))}{\log(n)}\right\} \geq -\frac{\theta}{2}, \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

$\square$

Conclusiones

En este trabajo, se estudió principalmente a la caminata aleatoria ramificante (CAR) localizada en la recta real, objeto que es una extensión natural de la cadena de Bienaymé-Galton-Watson.

En particular, definimos a la CAR y estudiamos algunas de sus propiedades. En el caso en que no hay movimiento espacial, i.e. el modelo de BGW, se estudió el Teorema de Kesten-Stigum, el cual nos da una condición suficiente para que la población tenga probabilidad positiva de sobrevivir. Por otro lado, generalizamos este resultado para la CAR. Por último, concluimos con el estudio de algunos resultados asintóticos relevantes de los individuos a los extremos de la CAR.

Dentro de nuestro estudio una de las herramientas fundamentales fue la celebre martingala aditiva, la cual nos permite estudiar otro objeto fundamental en este trabajo y que es conocido como la espina. Estos objetos son importantes en nuestro análisis ya que transforman a nuestro problema original en un problema más sencillo que involucra caminatas aleatorias, objetos que han sido ampliamente estudiados.

Los teoremas límites que en esta tesis se presentan, son muy importantes y fueron publicados en revistas de alto impacto en el área de probabilidad. Estos resultados han tenido un gran impacto no solo en el área de procesos de ramificación espaciales sino también en otras áreas de la probabilidad y los procesos estocásticos.

Apéndice A

Resultados Auxiliares

Proposición A.1. *Sean $X_1, X_2, ...$ variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas.*

1. *Si $\mathbb{E}[X_1] < \infty$, entonces $\frac{X_n}{n} \to 0$, c.s.*
2. *Si $\mathbb{E}[X_1] = \infty$, entonces $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \infty$, c.s.*

Demostración. Denotemos $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$. Al ser variables no negativas, sabemos que en ambos casos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[X_1], \qquad \mathbb{P}\text{-c.s.}.$$

Entonces, si $\mathbb{E}[X_1] < \infty$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n-1}}{n} = 0.$$

Luego, si $\mathbb{E}[X_1] = \infty$ entonces para todo $c > 0$ se cumple que

$$\sum_{n=1\geq 1} \mathbb{P}(|X_1| \geq cn) = \infty.$$

Al ser $X_1, X_2, ...$ no negativas e idénticamente distribuidas, esto implica que

$$\sum_{n=1\geq 1} \mathbb{P}(X_n \geq cn) = \infty,$$

por tanto, del Lema de Borel-Cantelli, se sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} > c, \qquad \mathbb{P}\text{-c.s.}.$$

Entonces, como $c > 0$ es arbitrario, se obtiene el resultado buscado. $\square$

Sea $(\mathcal{F}_n)$ una filtración en un espacio Ω. Sean $\mathbb{P}$ y $\widehat{\mathbb{P}}$ medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ tales que para toda $n = 1, 2, ...$, $\widehat{\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_n}$ es absolutamente continua con respecto a $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}$. Sea

$$\xi_n = \frac{\widehat{\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_n}}{\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}}$$

y

$$\xi = \limsup_{n\to\infty} \xi_n.$$

Es claro que $(\xi_n : n \geq 1)$ es una $\mathbb{P}$-martingala, y además $\xi_n \to \xi$ $\mathbb{P}$-c.s., donde $\xi < \infty$ $\mathbb{P}$-c.s.

Además, tenemos los siguientes dos resultados que relacionan $\mathbb{P}$ y $\widehat{\mathbb{P}}$ por medio de ξ.

Lema A.1. *Se cumple que*

$$\widehat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}[\xi 1_A] + \widehat{\mathbb{P}}(A \cap \{\xi = \infty\}), \quad \forall A \in \mathcal{F}_\infty.$$

Demostración. Primero supongamos que $\widehat{\mathbb{P}} << \mathbb{P}$.

Sea $\eta = \frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}$. Tomemos $A \in \mathcal{F}_n$. Notemos que

$$\mathbb{E}[\xi_n 1_A] = \widehat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}[\eta 1_A],$$

lo que implica que $\xi_n = \mathbb{E}[\eta|\mathcal{F}_n]$. Del Teorema de Convergencia de Levy, se sigue que $\xi_n \to \eta$, $\mathbb{P}$-c.s., y en particular $\eta = \xi$ $\mathbb{P}$-c.s. y por tanto también $\widehat{\mathbb{P}}$-c.s., ya que $\widehat{\mathbb{P}} << \mathbb{P}$. Ahora, tomemos $A \in \mathcal{F}_\infty$, notemos que

$$\widehat{\mathbb{P}}(A, \xi < \infty) = \widehat{\mathbb{P}}(A, \eta < \infty) = \widehat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}[\xi 1_A],$$

lo que implica que $\widehat{\mathbb{P}}(A, \xi = \infty) = 0$ y además prueba el resultado.

Ahora, consideremos el caso general y definamos

$$\mathbb{Q} = \frac{1}{2}(\mathbb{P} + \widehat{\mathbb{P}}).$$

Notemos que $\mathbb{P} << \mathbb{Q}$ y $\widehat{\mathbb{P}} << \mathbb{Q}$ y podemos aplicar lo probado anteriormente.

Sean $r_n = \frac{\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}}{\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_n}}$ y $s_n = \frac{\widehat{\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_n}}{\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_n}}$, además definamos $s = \limsup_{n\to\infty} s_n$ y $r = \limsup_{n\to\infty} r_n$.

Usando el caso demostrado anteriormente, tenemos que

$$r_n \to r = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}, \quad y \quad s_n \to s = \frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{Q}},$$

ambos $\mathbb{Q}-c.s.$ Además, de la definición de $\mathbb{Q}$ se sigue que $r_n + s_n = 1$, $\mathbb{Q}-c.s.$, por lo que $\mathbb{Q}(s = r = 0) = 0$. Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{s}{r} = \frac{\text{lím}_{n\to\infty} s_n}{\text{lím}_{n\to\infty} r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi, \quad \mathbb{Q}-c.s,$$

en particular, tenemos que $\{r = 0\} = \{\xi = \infty\}$ y $\{r > 0\} = \{\xi < \infty\}$ $\mathbb{Q}-c.s.$.

Ahora, tomemos $A \in \mathcal{F}_\infty$. Sabemos que

$$\widehat{\mathbb{P}}(A) = \int_A s d\mathbb{Q} = \int_A s 1_{\{r>0\}} d\mathbb{Q} + \int_A s 1_{\{r=0\}} d\mathbb{Q},$$

pero, de acuerdo a lo mostrado anteriormente, se cumple que

$$\int_A s 1_{\{r>0\}} d\mathbb{Q} = \int_A r\xi 1_{\{\xi<\infty\}} d\mathbb{Q} = \mathbb{E}[\xi 1_A 1_{\{\xi<\infty\}}] = \mathbb{E}[\xi 1_A],$$

donde la ultima igualdad se da ya que $\xi < \infty$ $\mathbb{P}$-c.s. Por otro lado

$$\int_A s 1_{\{r=0\}} d\mathbb{Q} = \int_A s 1_{\{\xi=\infty\}} d\mathbb{Q} = \widehat{\mathbb{P}}(A \cap \{\xi = \infty\})$$

lo que prueba el resultado buscado. □

Lema A.2. *Considerando el contexto anterior,*

1. $\widehat{\mathbb{P}} << \mathbb{P} \iff \xi < \infty$, $\widehat{\mathbb{P}}$-*c.s.* $\iff \mathbb{E}[\xi] = 1$,
2. $\widehat{\mathbb{P}} \perp \mathbb{P} \iff \xi = \infty$, $\widehat{\mathbb{P}}$-*c.s.* $\iff \mathbb{E}[\xi] = 0$.

Demostración. Primero probemos (1).
Si $\widehat{\mathbb{P}} << \mathbb{P}$, entonces $\xi < \infty$, $\widehat{\mathbb{P}} - c.s.$ ya que $\xi < \infty$, $\mathbb{P}$-c.s.. Tomando $A = \Omega$ en el Lema A.1, se sigue que $\mathbb{E}[\xi] = 1$.

Recíprocamente, si $\mathbb{E}[\xi] = 1$, tomando $A = \Omega$ en el Lema A.1 tenemos que $\widehat{\mathbb{P}}(\xi = \infty) = 0$, lo que implica que $\xi < \infty$, $\widehat{\mathbb{P}} - c.s.$. Entonces el Lema A.1 implica que $\widehat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}[\xi 1_A]$, para todo $A \in \mathcal{F}_\infty$, y por tanto $\widehat{\mathbb{P}} << \mathbb{P}$.

Ahora, probemos (2). Supongamos que $\widehat{\mathbb{P}} \perp \mathbb{P}$ y sea $E \in \mathcal{F}_\infty$ tal que

$$\widehat{\mathbb{P}}(E^c) = 0 = \mathbb{P}(E),$$

por tanto, del Lema A.1 E cumple que

$$1 = \widehat{\mathbb{P}}(E) = \widehat{\mathbb{P}}(E \cap \{\xi = \infty\}),$$

lo que implica que $\widehat{\mathbb{P}}(\xi = \infty) = 1$, $\xi = \infty$ $\widehat{\mathbb{P}} - c.s.$. En particular, tomando $A = \Omega$ en el Lema, podemos concluir que que $\mathbb{E}[\xi] = 0$.

De forma reciproca, si $\mathbb{E}[\xi] = 0$, tomando $A = \Omega$ en el lema se sigue que $\widehat{\mathbb{P}}(\xi = \infty) = 1$ y por tanto $\xi = \infty$ $\widehat{\mathbb{P}}$-c.s. Así, tomando $E = \{\xi = \infty\}$, se sigue que

$$\widehat{\mathbb{P}}(E^c) = 0 = \mathbb{P}(E),$$

por lo que $\widehat{\mathbb{P}} \perp \mathbb{P}$. □

Lema A.3. *Sea $(X_n : n \geq 1)$ una sub-martingala y $\lambda > 0$, entonces*

$$\lambda \mathbb{P}\left(\min_{0 \leq k \leq n} X_k < -\lambda \right) \leq \mathbb{E}[X_n^+] - \mathbb{E}[X_0]$$

Demostración. Sea $\tau = \min\{n : X_n < -\lambda\}$ y $\Lambda = \{X_{\tau \wedge n} < -\lambda\}$. Ahora, del Teorema de paro opcional

$$\mathbb{E}[X_0] \leq \mathbb{E}[X_{\tau \wedge n}] = \mathbb{E}[1_\Lambda X_{\tau \wedge n}] + \mathbb{E}[1_{\Lambda^c} X_{\tau \wedge n}]. \tag{A.1}$$

Por definición de Λ,

$$\mathbb{E}[1_\Lambda X_{\tau \wedge n}] \leq -\lambda \mathbb{P}(\Lambda).$$

Por otro lado, de la definición de τ tenemos que $X_{\tau \wedge n} \geq -\lambda$ implica que $\tau > n$, por lo que

$$\mathbb{E}[1_{\Lambda^c} X_{\tau \wedge n}] = \mathbb{E}[1_{\Lambda^c} X_n] \leq \mathbb{E}[X_n] \leq \mathbb{E}[X_n^+].$$

Así, sustituyendo en la ecuación (A.1) tenemos que

$$\mathbb{E}[X_0] \leq -\lambda \mathbb{P}(\Lambda) + \mathbb{E}[X_n^+],$$

lo que termina la prueba. □

Sea $(X_n : n \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Lema A.4. *Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $u > 0, a \geq 0, b \geq 0$, y $n \geq 1$,*

$$\mathbb{P}\left(\underline{S_n} \geq -a, b - a \leq S_n \leq b - a + u\right) \leq C\frac{(u+1)(a+1)(b+u+1)}{n^{3/2}}$$

La demostración se puede encontrar en [10], corresponde al Lema A.2 en dicho texto.

Bibliografía

[1] Athreya, K. y Ney, P. *Branching Processes*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1972.

[2] Gut, A. *Probability: A Graduate Course*. Springer-Verlag New York, 2005.

[3] Hu, Y. y Shi, Z. "Minimal Position and Critical Martingale Convergence in Branching Random Walks, and Directed Polymers on Disordered Trees". En: *The Annals of Probability* 37.2 (2009), págs. 742-789.

[4] Kingman, J. F. C. "The First Birth Problem for an Age-dependent Branching Process". En: *The Annals of Probability* 3.5 (1975), págs. 790-801.

[5] Kyprianou, A. E. "An Introduction to Branching Random Walks". En: *Mongolian Mathematical Journal* 21.1 (2017), págs. 3-24.

[6] Lyons, R. "A Simple Path to Biggins' Martingale Convergence for Branching Random Walk". En: *Classical and Modern Branching Processes* (1997).

[7] Neveu, Jacques. "Arbres et processus de Galton-Watson". En: *Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques* 22.2 (1986), págs. 199-207.

[8] Resnick, S. *A Probability Path*. Birkhäuser Basel, 2014.

[9] Rockafellar, R. T. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.

[10] Shi, Z. *Branching Random Walks*. Springer International Publishing, 2015.

[11] Shi, Z. "Random Walks and Trees". En: ().

[12] Watson, H. W. y Galton, F. "On the Probability of the Extinction of Families". En: *The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland* 4 (1874), págs. 138-144.