Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

Teoría del Riesgo en Ambientes Aleatorios

T E S I S

Que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias
con especialidad en
Probabilidad y Estadística

P r e s e n t a:
César Adrián Delgado Díaz

Director de tesis:
Dr. José Luis Pérez Garmendia

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto. 11, Octubre de 2019

Agradecimientos

Comienzo agradeciendo a mi asesor de tesis el Doctor José Luis Pérez Garmendia por su apoyo, paciencia y confianza. Gracias al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), por el apoyo académico y personal brindado durante mis años de estudio y agradezco también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico con una beca de maestría.

Doy gracias a mi madre Lilia Díaz Albarran cuyo apoyo ha sido el principal cimiento en mi formación, a mi hermana Rebeca Yadira Delgado Díaz y a mis hermanos por elección Carlos Bruno Rodríguez Martínez y Salvador Jaime García Cid.

Extiendo mis agradecimiento a amigos, compañeros y profesores. En especial a mi profesor y amigo Miguel Ángel Chávez García que con sus enseñanzas, guia y apoyo avivaron mi amor por el estudio y me motivaron a continuar con este bonito reto.

Índice general

Capítulo 1

Introdución

El término riesgo tiene muchas acepciones dependiendo del área de estudio que se trate, y en términos imprecisos puede definirse como la posibilidad de experimentar ciertos eventos de interés y las consecuencias derivadas de dichos eventos. Los riesgos pueden tener un sentido positivo o negativo, pero en general tienen una connotación de pérdida. El objetivo es identificar los riesgos, ponderarlos con base en sus consecuencias, decidir la aceptación o no de los mismos, y tomar provecho de su existencia. Dentro del área de las matemáticas, la rama que se encarga de esta tarea es la teoría de riesgo.

La noción de riesgo es un concepto importante en las compañías aseguradoras, debido a que es necesario contar con estrategias y métodos para el buen manejo de su capital. Específicamente, la teoría de riesgo se ha centrado en estudiar las fluctuaciones de las reservas de una compañía aseguradora y de estimar las posibilidades de ruina de dicha aseguradora, es decir la probabilidad de que la reserva puede ser negativa en algún momento. Esto se hace estudiando la dependencia de la ruina de los parámetros del proceso, tales como capital inicial, el número de reclamos y el tamaño de los reclamos, con el propósito de ponderar las consecuencias del riesgo de interés.

De manera general una compañía de seguros opera de la siguiente manera: un grupo de personas que está expuesto a un tipo determinado de evento, tales como choques de automóviles, robos, supervivencia, etc., contrata un seguro donde cada una de estas personas paga una cantidad fija de dinero a la compañía aseguradora por unidad de tiempo, llamada prima. Ésta a su vez tiene la obligación de pagar al asegurado el un monto fijado desde el inicio del contrato, en el momento en que este evento ocurre. Por lo tanto aunque no se conozca con certeza cuántas personas requerirán del pago de la compañía, ni el tamaño total de los montos que la compañía pagará, el capital obtenido de las primas colectadas más el capital inicial de la compañía deben ser suficientes para solventar los gastos que se presenten.

El modelo de Cramér-Lundberg ilustra de manera muy general cómo opera una compañía de seguros opera, tiene sus orígenes en la tesis doctoral de Filip Lundberg defendida en el año de 1903. En este trabajo, Lundberg analiza el reaseguro de riesgos colectivos y presenta el proceso de Poisson compuesto. En 1930 Harald Cramér retoma las ideas originales de Lundberg, y las pone en el contexto de los procesos estocásticos, en ese entonces de reciente creación. Este modelo es el proceso estocástico a tiempo continuo $P := \{P_t\}_{t\geq 0}$ definido como

$$P_t = y + pt - \sum_{i=1}^{N_t} S_i,$$

en donde y y p son constantes positivas, $N := \{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso Poisson con intensidad λ, $S := \{S_i\}_{i\leq 1}$ variables aleatorias positivas independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.), que además son independientes de las variables $\{N_t\}_{t\geq 0}$.
La variable P_t representa el balance más sencillo de ingresos menos egresos de una compañía aseguradora. Al proceso $P := \{P_t\}_{t\geq 0}$ se le llama nuevamente proceso de riesgo (*risk process*), proceso de superávit (*surplus process*), ó proceso de excedentes.

Nuestro modelo de interés para este trabajo, propuesto por Jostein Paulsen (1993) [1], estará particularmente centrado en el estudio la ruina tomando en cuenta factores externos que afectan el proceso de riesgo, como lo son las tasas de interés y la tasa de retorno de la inversión.

En la primera parte de este trabajo presentaremos un modelo bastante general y luego analizaremos en detalle una versión más restringida. Introduciremos un modelo general para describir el excedente de una compañía aseguradora en un ambiente aleatorio. Este modelo permite una tasa de rendimiento aleatorios de las inversiones, así como un nivel de inflación aleatorio, permite elegir entre el seguro y el riesgo de inversión.

En la segunda parte se plantea el problema de encontrar la probabilidad de una eventual ruina, siguiendo las ideas de Harrison (1977) [7], desarrollaremos algunas ecuaciones integro-diferenciales que pueden ser útiles en el cálculo de la probabilidad de eventual ruina. Se encuentran condiciones que nos permitan usar estas ecuaciones, podemos encontrar valores exactos de la probabilidad de ruina eventual en los casos especiales cuando el proceso de riesgo no inflado sigue un movimiento browniano o un proceso de Poisson compuesto con reclamaciones distribuidas exponencialmente. De lo contrario solo se obtienen desigualdades.

Por último presenta un ejemplo donde se utilizan los resultados obtenidos en las secciones previas.

Capítulo 2

Preliminares

Definición 2.0.1. Un *espacio de probabilidad filtrado* es un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ equipado con una filtración $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. En este caso, una filtración significa una familia creciente y continua por la derecha de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ (en otras palabras, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para $s \leq t$ y $\mathcal{F}_t = \bigcup_{s>t} \mathcal{F}_s$).

Definición 2.0.2. El espacio de probabilidad filtrado, tambien llamado base, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbb{P})$ se denomina *completa*, o se dice que, de manera equivalente, *satisface las condiciones usuales* si el σ-álgebra $\mathcal{F}$ es $\mathbb{P}$-completo y si cada $\mathcal{F}_t$ contiene todos los conjuntos $\mathbb{P}$-nulos de $\mathcal{F}$.

Definición 2.0.3. Si g es una función de la variable real, su *variación* en el intervalo $[a, b]$ se define como

$$V_g\left([a,b]\right) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left| g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n) \right|,$$

donde $a = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n = b$ es una partición y

$$\delta_n = \max_{1\leq i\leq n} (t_i^n - t_{i-1}^n).$$

Definición 2.0.4. Una *semimartingala* es un proceso X de la forma $X = X_0 + M + A$ donde X_0 es finito-valuada y $\mathcal{F}_0$-medible, M es una martingala local con $M_0 = 0$, y A es un proceso adaptado de variación finita con $A_0 = 0$.

Definición 2.0.5. Sean X, Y semimartingalas la *covariación cuadrática* de X, Y se define como

$$\langle X, Y\rangle_t = X_t Y_t - \int_0^t X_{s-} dY_s - \int_0^t Y_{s-} dX_s.$$

Definición 2.0.6. Sean X, Y semimartingalas, el proceso $\langle X,Y\rangle^c$ de define como la *parte continua (trayectoria-a-trayectoria)* de $\langle X,Y\rangle$ y se escribe

$$\begin{aligned}\langle X,Y\rangle_t &= \langle X,Y\rangle_t^c + X_0Y_0 + \sum_{0<s\le t}\Delta X_s\Delta Y_s \\ &= \langle X,Y\rangle_t^c + \sum_{0\le s\le t}\Delta X_s\Delta Y_s.\end{aligned}$$

Definición 2.0.7. Un proceso $X(t)$ en un intervalo de tiempo $[0,T]$, donde T puede ser infinito, es *cuadrado integrable* si $\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left[X^2(t)\right]<\infty$ $\left(\sup_{t\ge 0}\mathbb{E}\left[X^2(t)\right]<\infty\right)$, es decir, los segundos momentos están acotados.

Definición 2.0.8. Un proceso X_t de Markov es *estocásticamente continuo*, si

$$\lim_{t\to 0}\mathbb{P}^x\left[X_t\in E\setminus V_x\right]=0,$$

para todo $x\in E$ y con V_x una vecindad abierta de x.

Lema 2.0.1. *(Desigualdad de Jessen) Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Si g es una función real $\mathbb{P}$-integrable y φ una función convexa en el eje real, entonces:*

$$\varphi\left(\int_\Omega g d\mathbb{P}\right)\le\int_\Omega\varphi\circ g d\mathbb{P},$$

usando la notación habitual en teoría de la probabilidad, puede reescribirse así:

$$\varphi\left(\mathbb{E}[X]\right)\le\mathbb{E}[\varphi(X)],$$

donde φ es una función convexa.

Proposición 2.0.1 (W. Feller [11])**.** *Sea H una función de distribución con función característica φ, sea $h>0$ arbitrario pero fijo. Entonces*

$$\frac{H(z+h)-H(z)}{h}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(u)\frac{e^{-iuz}-e^{-iu(z+h)}}{iuh}du.$$

Siempre que el integrando es integrable.
En el caso en que $\int_{\mathbb{R}}|\varphi(u)|du<\infty$, H tiene función de densidad continua y acotada f_H dada por

$$f_H(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(u)e^{-iuz}du.$$

Teorema 2.0.1. *(Teorema de Fubini) Sean X, Y espacios de medida σ-finita, y suponga que $X \times Y$ genera la medida producto (en este caso es única ya que X y Y son σ-finitas). Si $f(x,y)$ es $X \times Y$-integrable, lo que significa que $f(x,y)$ es una función medible y*

$$\int_{X\times Y} |f(x,y)|\, d(x,y) < \infty,$$

entonces se cumple que

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)dx \right) dy = \int_{X\times Y} f(x,y)d(x,y).$$

Teorema 2.0.2 (Cambio de Variable)**.** *Sea X un proceso de variación finita con trayectorias continuas por la derecha, y sea una función f con primera derivada continua. Entonces $\{f(X_t)\}_{t\geq 0}$ es proceso de variación finita con trayectorias continuas por la derecha y*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_{0+}^{t} f'(X_{s-})dX_s + \sum_{0<s\leq t} \left[f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s \right].$$

Teorema 2.0.3 (Fórmula de Itô)**.** *Sea $X = (X^1, \ldots X^n)$ una n-tupla de semimartingalas, y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Entonces $\{f(X_t)\}_{t\geq 0}$ es una semimartingala y*

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} \int_{0+}^{t} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-})dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{1\leq i,j\leq n} \int_{0+}^{t} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-})d\langle X^i, X^j\rangle_s^c \\ &\quad + \sum_{0<s\leq t} \left[f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-})\Delta X_s^i \right]. \end{aligned}$$

Teorema 2.0.4 (P. Protter [9])**.** *Sea X una semimartingala real y Z un proceso adaptado càdlàg. Entonces la ecuación diferencial estocástica*

$$dZ = Z_{-}dX \ \textit{con} \ Z_0 = 1,$$

tiene una y solo una solución (salvo por indistinguibilidad) adaptada càdlàg. Esta solución es una semimartingala, se denota por $\mathcal{E}(X)$, y está dada por

$$\mathcal{E}(X)_t = \exp\left\{ X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t \right\} \prod_{s\leq t} (1 + \Delta X_s) \exp\{-\Delta X_s\},$$

donde el (posible) producto infinito es absolutamente convergente. Donde $\langle X^c, X^c\rangle$ es la variación cuadrática de la parte continua de X.

Demostración: Tenemos que el proceso $X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t$ es una semimartingala y $\exp\{x\}$ es una función dos veces diferenciable continua, por lo cual

$$\exp\left\{X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t\right\},$$

es semimartingala.
Ahora el proceso

$$\prod_{s\leq t}(1+\Delta X_s)\exp\{-\Delta X_s\},$$

es adaptado y càdlàg. Por lo que solo queda ver que sea de variación finita, para que sea una semimartingala y probar que sea absolutamente convergente.
Ya que X es càdlàg, solo hay un número finito de s tales que $|\Delta X_s| \geq \frac{1}{2}$ en cada intervalo finito para un ω fijo.
Por lo cual basta probar que

$$V_t = \prod_{0<s\leq t}\left(1+\Delta X_s \mathbb{1}_{\{|\Delta X_s|<\frac{1}{2}\}}\right)\exp\left\{-\Delta X_s \mathbb{1}_{\{|\Delta X_s|<\frac{1}{2}\}}\right\},$$

es de variación finita y converge.
Sea $U_s = \Delta X_s \mathbb{1}_{\{|\Delta X_s|\geq\frac{1}{2}\}}$ entonces

$$\begin{aligned}
|\log(V_t)| &= \sum_{0<s\leq t}|\log(1+U_s) - U_s| \\
&\leq \sum_{0<s\leq t} U_s^2 \\
&\leq \langle X, X\rangle_t < \infty \quad \text{c.s.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\log(V_t)$ es absolutamente convergente casi seguramente ya que $|\log(1+x) - x| \leq x^2$ cuando $|x| < \frac{1}{2}$.
Entonces $\log(V_t)$ tiene trayectorias de variación finita, y por lo tanto V_t también cuenta con trayectorias de variación finita.

Ahora para mostrar que $\mathcal{E}(X)$ es solución, definimos

$$\begin{aligned}
K_t &= X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t, \\
S_t &= \prod_{s\leq t}(1+\Delta X_s)\exp\{-\Delta X_s\}.
\end{aligned}$$

Sea $f(x,y)=ye^x$, entonces $Z_t=\mathcal{E}(X)_t=f(K_t,S_t)$ y por fórmula 2.0.3 (Teorema de Itô)

$$\begin{aligned}
Z_t-Z_0 &= \int_{0+}^t \frac{\partial f}{\partial x}(K_{s-},S_{s-})dK_s+\int_{0+}^t \frac{\partial f}{\partial y}(K_{s-},S_{s-})dS_s+\frac{1}{2}\int_{0+}^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(K_{s-},S_{s-})d\langle K,K\rangle_s^c \\
&+\int_{0+}^t \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(K_{s-},S_{s-})d\langle K,S\rangle_s^c+\frac{1}{2}\int_{0+}^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(K_{s-},S_{s-})d\langle S,S\rangle_s^c \\
&+\sum_{0<s\le t}\left[f(K_s,S_s)-f(K_{s-},S_{s-})-\frac{\partial f}{\partial x}(K_{s-},S_{s-})\Delta K_s-\frac{\partial f}{\partial y}(K_{s-},S_{s-})\Delta S_s\right].
\end{aligned}$$

Ya que S es un proceso de saltos puros tenemos:

- $\langle K,S\rangle^c=\langle S,S\rangle^c=0$,
- $Z_s=Z_{s-}(1+\Delta X_s)$,
- $Z_{s-}\Delta K_s=Z_{s-}\Delta X_s$,
- $\int_{0+}^t Z_{s-}dS_s=\sum_{0<s\le t} Z_{s-}\Delta S_s$.

Por lo cual la fórmula anterior se convierte en

$$\begin{aligned}
Z_t-Z_0 &= \int_{0+}^t Z_{s-}dK_s+\int_{0+}^t e^{K_{s-}}dS_s+\frac{1}{2}\int_{0+}^t Z_{s-}d\langle K,K\rangle_s^c \\
&+\sum_{0<s\le t}\left[Z_s-Z_{s-}-Z_{s-}\Delta K_s-e^{K_{s-}}\Delta S_s\right] \\
&= \int_{0+}^t Z_{s-}dK_s+\int_{0+}^t e^{K_{s-}}dS_s+\frac{1}{2}\int_{0+}^t Z_{s-}d\langle K,K\rangle_s^c+\sum_{0<s\le t}-e^{K_{s-}}\Delta S_s \\
&= \int_{0+}^t Z_{s-}dK_s+\frac{1}{2}\int_{0+}^t Z_{s-}d\langle K,K\rangle_s^c \\
&= \int_{0+}^t Z_{s-}dX_s,
\end{aligned}$$

por lo cual $\mathcal{E}(X)$ es solución.

Para demostrar la unicidad, sea $f(x,z)=ze^{-x}$ y $Y=f(K,Z)=Ze^{-K}$ y de nuevo por fórmula de Itô

$$\begin{aligned}
Y_t-Y_0 &= -\int_{0+}^t Z_{s-}e^{-K_{s-}}dK_s+\int_{0+}^t e^{-K_{s-}}dZ_s+\frac{1}{2}\int_{0+}^t Z_{s-}e^{-K_{s-}}d\langle K,K\rangle_s^c \\
&-\int_{0+}^t e^{-K_{s-}}d\langle K,Z\rangle_s^c+\sum_{0<s\le t}\left[\Delta(Z_se^{-K_s})+Z_{s-}e^{-K_{s-}}\Delta K_s-e^{-K_{s-}}\Delta Z_s\right].
\end{aligned}$$

Tenemos que:

- $\langle K, K\rangle_s^c = \langle X, X\rangle_s^c$, $\langle K, Z\rangle_s^c = \langle X, Z\rangle_s^c$,
- $\Delta K_s = \Delta X_s$, $\Delta Z_s = Z_s \Delta X_s$.

Por lo que la fórmula anterior se convierte en:

$$\begin{aligned}
Y_t - Y_0 &= -\int_{0+}^t Y_{s-} dK_s + \int_{0+}^t Y_{s-} dX_s + \frac{1}{2}\int_{0+}^t Y_{s-} d\langle X, X\rangle_s^c \\
&\quad - \int_{0+}^t e^{-K_{s-}} d\langle X, Z\rangle_s^c + \sum_{0<s\leq t} \left[\Delta Y_s + Y_{s-}\Delta X_s - Y_{s-}\Delta X_s\right] \\
&= -\int_{0+}^t Y_{s-} dX_s + \frac{1}{2}\int_{0+}^t Y_{s-} d\langle X, X\rangle_s^c + \int_{0+}^t Y_{s-} dX_s + \frac{1}{2}\int_{0+}^t Y_{s-} d\langle X, X\rangle_s^c \\
&\quad - \int_{0+}^t Y_{s-} d\langle X, X\rangle_s^c + \sum_{0<s\leq t} \Delta Y_s \\
&= \sum_{0<s\leq t} \Delta Y_s.
\end{aligned}$$

Por lo tanto Y es un proceso de saltos puros de variación localmente finita. Por lo cual

$$\begin{aligned}
\Delta Y_t &= Z_t e^{-K_t} - Z_{t-} e^{-K_{t-}} \\
&= (Z_{t-} + \Delta Z_t) \exp\{-K_{t-} - \Delta K_t\} - Z_{t-} e^{-K_{t-}} \\
&= (Z_{t-} + Z_{t-}\Delta X_t) \exp\{-K_{t-} - \Delta X_t\} - Y_{t-} \\
&= Y_{t-}\left[(1 + \Delta X_t)\exp\{\Delta X_t\} - 1\right],
\end{aligned}$$

y tenemos que

$$Y_t = 1 + \sum_{0<s\leq t} Y_{s-}\Delta A_s,$$

donde $A_t = \sum_{0<s\leq t} [(1 + \Delta X_s)\exp\{\Delta X_s\} - 1]$.
Por lo que queda demostrar que

$$Y_t = \sum_{0<s\leq t} Y_{s-}\Delta A_s,$$

tiene una única solución cuando $Y_0 = 0$.
Sea $R_t = \int_{0+}^{\infty} |dA|$, por fórmula de Itô y la convexidad de $f(x) = x^n$

$$\begin{aligned}
R_t^n &= \int_0^t n R_{s-}^{n-1} dR_s + \sum_{0<s\leq t} \left(\Delta R_t^n - n R_{s-}^{n-1}\Delta R_s\right) \\
&\geq \int_0^t n R_{s-}^{n-1} dR_s.
\end{aligned}$$

Sea $Y_t^* = \sup_{s\leq t}|Y_s|$, entonces por inducción tenemos que

$$Y_t^* \leq Y_t^* \frac{R_t^n}{n!},$$

para $t \geq 0$ y $n > 0$.
Supongamos que esto último se cumple para $n-1$, entonces tenemos que

$$Y_t^* = \left(\sum Y_- \Delta A\right)_t^* \leq \frac{Y_t^* \left(\int_0^t nR_{s-}^{n-1} dR_s\right)}{(n-1)!} \leq \frac{Y_t^* R_{t-}^n}{n!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

por lo tanto $Y_t = 0$ para todo $t > 0$.
Si existen procesos $Y^{(1)}$ y $Y^{(2)}$ tales que

$$\begin{aligned} Y_t^{(1)} &= 1 + \sum_{0<s\leq t} Y_{s-}^{(1)} \Delta A_s, \\ Y_t^{(2)} &= 1 + \sum_{0<s\leq t} Y_{s-}^{(2)} \Delta A_s. \end{aligned}$$

Entonces

$$Y_t^{(1)} - Y_t^{(2)} = \sum_{0<s\leq t} \left(Y_{s-}^{(1)} - Y_{s-}^{(2)}\right) \Delta A_s = 0,$$

por lo cual la solución es única.

■

Teorema 2.0.5 (J. Jacod [12]). *Sean X, H semimartingalas, $T_0 = 0$ y $T_{n+1} = \text{ínf}\{t > T_n : \Delta X_t = -1\}$. Entonces la ecuación*

$$Z = H + \int Z_- dX \tag{2.0.1}$$

admite una y solo una solución Z semimartingala, dada por

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n\geq 0} Z^{(n)} \mathbb{1}_{[T_n, T_{n+1}[}, \\ Z^{(n)} &= U^{(n)} \left\{ \Delta H_{T_n} + \int \left(\frac{1}{U^{(n)}}\right)_- d\left(H^{T_{n+1}} - H^{T_n}\right) \right. \\ & \quad \left. - \int \left(\frac{1}{U^{(n)}}\right) \mathbb{1}_{[0,T_{n+1})} d\langle H, X^{T_{n+1}} - X^{T_n}\rangle \right\}, \qquad (2.0.2) \\ U^{(n)} &= \mathcal{E}\left(X^{T_{n+1}} - X^{T_n}\right). \end{aligned}$$

Donde $\langle H, X^{T_{n+1}} - X^{T_n}\rangle$ es la covariación cuadrática de H y $X^{T_{n+1}} - X^{T_n}$, y definiremos como $X_t^{T_n} := X_{t\wedge T_n}$ y $H_t^{T_n} := H_{t\wedge T_n}$.

Demostración: La unicidad se deriva del hecho de que si Z y Z' son soluciones, entonces $Z-Z'=0+\int(Z-Z')_-dX$, entonces $Z-Z'=0$ por el Teorema 2.0.4. Mostremos ahora que la semimartingala Z definida por la fórmula (2.0.2) es solución de (2.0.1). Para simplificar la notación, definiremos

$$X^{(n)}=X^{T_{n+1}}-X^{T_n} \quad , \quad H^{(n)}=H^{T_{n+1}}-H^{T_n}.$$

Definimos $U^{(n)}=\mathcal{E}\left(X^{(n)}\right)$, $Z^{(n)}$ y Z como en (2.0.2), y definiremos

$$K^{(n)}=\Delta H_{T_n}\mathbb{1}_{[T_n,\infty[}+\int\left(\frac{1}{U^{(n)}}\right)_-dH^{(n)}-\int\left(\frac{1}{U^{(n)}}\right)\mathbb{1}_{[0,T_{n+1}[}d\langle H,X^{(n)}\rangle.$$

Si $\widetilde{Z}^{(n)}=U^{(n)}K^{(n)}$ tenemos que $\widetilde{Z}^{(n)}=Z^{(n)}=Z$ en $[T_n,T_{n+1}[$ y $\widetilde{Z}^{(n)}_-=Z^{(n)}_-=Z_-$ en $]T_n,T_{n+1}]$. Por la fórmula de integración por partes se tiene

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}^{(n)} &= \int K^{(n)}dU^{(n)}+\int U^{(n)}dK^{(n)}+\langle K^{(n)},U^{(n)}\rangle\\ &= \int K^{(n)}_-dU^{(n)}+\Delta H_{T_n}\mathbb{1}_{[T_n,\infty[}+H^{(n)}-\int\left(\frac{U^{(n)}_-}{U^{(n)}}\right)\mathbb{1}_{[0,T_{n+1}[}d\langle H,X^{(n)}\rangle\\ &\quad +\int\left(\frac{1}{U^{(n)}}\right)_-d\langle H^{(n)},U^{(n)}\rangle-\int\left(\frac{1}{U^{(n)}}\right)\mathbb{1}_{[0,T_{n+1}[}d\langle U^{(n)},\langle H,X^{(n)}\rangle\rangle,\end{aligned}$$

con $U^{(n)}=1$ en $[0,T_n]$.

Pero $\langle U^{(n)},\langle H,X^{(n)}\rangle\rangle=\int\Delta U^{(n)}d\langle H,X^{(n)}\rangle$ y $U^{(n)}=1+\int U^{(n)}_-dX^{(n)}$ por lo tanto $\langle H^{(n)},U^{(n)}\rangle=\int U^{(n)}_-d\langle H^{(n)},X^{(n)}\rangle$. Al simplificar la expresión anterior, obtenemos:

$$\widetilde{Z}^{(n)}=\int\widetilde{Z}^{(n)}_-dX^{(n)}+\Delta H_{T_n}\mathbb{1}_{[T_n,\infty[}+H^{(n)}+\int\mathbb{1}_{\{T_{n+1}\}}d\langle H,X^{(n)}\rangle$$

Como $\widetilde{Z}^{(n)}_-=Z_-$ en $]T_n,T_{n+1}]$ tenemos $\int\widetilde{Z}^{(n)}_-dX^{(n)}=\int Z_-dX^{(n)}$ como $\Delta X^{(n)}_{T_{n+1}}=-1$ en $\{T_{n+1}<\infty\}$ se sigue

$$\widetilde{Z}^{(n)}=\int\widetilde{Z}_-dX^{(n)}+\Delta H_{T_n}\mathbb{1}_{[T_n,\infty[}+H^{(n)}-\Delta H_{T_{n+1}}\mathbb{1}_{[T_{n+1},\infty[}$$

Además tenemos por construcción que $Z_{T_n}=\Delta H_{T_n}$ en $\{T_n<\infty\}$, $Z_{(n)}=0$ en $[0,T_n[$, $Z=\widetilde{Z}^{(n)}=\widetilde{Z}^{(n)}=\left(\widetilde{Z}^{(n)}\right)^{T_{n+1}}$ en $[T_n,T_{n+1}[$, finalmente $Z_{T_{n+1}}=\Delta H_{T_{n+1}}$ y $\widetilde{Z}^{(n)}_{T_{n+1}}=U^{(n)}_{T_{n+1}}=0$ en $\{T_{n+1}<\infty\}$ esto nos lleva a

$$\begin{aligned}Z^{(T_{n+1})}-Z^{(T_n)} &= Z^{(n)}-\Delta H_{T_n}\mathbb{1}_{[T_n,\infty[}+\Delta H_{T_{n+1}}\mathbb{1}_{[T_{n+1},\infty[}\\ &= H^{(T_{n+1})}-H^{(T_n)}+\int_- d\left(X^{T_{n+1}}-X^{T_n}\right).\end{aligned}$$

Queda ahora para agregar las siguientes igualdades: como $\lim_{n\uparrow\infty} T_n = \infty$, tenemos una suma finita para todo t. Obtenemos que Z satisface (2.0.2).

Tenga en cuenta que $\mathcal{E}_H(X) = H\mathcal{E}(X)$ es la única solución de (2.0.1). Tenemos por supuesto $\mathcal{E}_1(X) = \mathcal{E}(X)$ además, en (2.0.2), si $H = 1$, entonces $Z^{(n)} = 0$ para $n \geq 1$ mientras que $Z^{(0)} = U^{(0)} = \mathcal{E}(X)$.

■

Teorema 2.0.6 (Desigualdad de Burkholder-Gundy-Davis)**.** *Existen constantes c_p y C_p que dependen solo de p, de manera que para cualquier martingala local M_t, nula a cero $M_0 = 0$,*

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\leq T}|M_t|\right)^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^{p/2}\right],$$

para $1 < p < \infty$. Si además, M_t es continua, entonces el resultado se mantiene también para $0 < p \leq 1$.

Teorema 2.0.7. *Sea M_t una martingala local, nula en cero tal que $\sup_{t<\infty}\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_t\right] < \infty$, entonces M_t es una martingala cuadrado integrable.*

Teorema 2.0.8. *Sea M_t una martingala local tal que $\mathbb{E}\left[M_\infty^*\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t}|M_t|\right] < \infty$, entonces M_t es una martingala uniformemente integrable.*

Teorema 2.0.9. *Sea X una semimartingala y Y un proceso adaptado cadlag.*
Entonces

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} Y_{t\delta_k^{(n)}}\left(X_{t\delta_{k+1}^{(n)}} - X_{t\delta_k^{(n)}}\right) \xrightarrow{P} \int_0^t Y_{s-}dX_s \quad \textit{cuando} \quad n\to\infty$$

Donde $\delta_k^{(n)} = k2^{-n}, \quad k = 0, 1, \ldots$

Capítulo 3

Modelo

En este capítulo presentaremos un modelo general para para describir el proceso de riesgo de una compañía de seguros, el cual consta de un proceso que representa el balance más sencillo de ingresos menos egresos a tiempo continuo de dicha compañía y los procesos de inflación y de retorno de inversión los cuales suponen tasas fijas. Posteriormente modificaremos dicho modelo, suponiendo a todos los procesos como semimartingalas, permitiéndonos agregar aleatoriedad a los procesos de inflación y de retorno de inversión.
Supondremos un proceso vectorial, que conste de los tres procesos, el cual tendrá incrementos estacionarios e independientes y, por lo tanto, una semimartingala.
Finalmente se supondrán algunas restricciones adicionales en estos procesos para facilitar su manejo y de esta forma obtendremos el modelo con el que trabajaremos a lo largo del documento.

3.1. Modelo Clásico de Riesgo

Si denotamos el proceso de riesgo medido en unidades reales por $Y := \{Y_t\}_{t\geq 0}$, entonces Y se obtiene a través de los siguientes pasos:

1. Proceso de excedentes $P := \{P_t\}_{t\geq 0}$ definido como

$$P_t = y + pt - \sum_{i=1}^{N_t} S_i,$$

donde $N := \{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso Poisson con intensidad λ, $S := \{S_i\}_{i\geq 0}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.), que además son independientes de las variables $\{N_t\}_{t\geq 0}$.

Este proceso describe el excedente de una compañía aseguradora, tomando en cuenta que dicha compañía tiene un capital inicial y, recibe una cantidad p de primas a tiempo t y esta sujeto a una cantidad aleatoria de reclamaciones $\sum_{i=1}^{N_t} S_i$.

2. Proceso de inflación $I := \{I_t\}_{t\geq 0}$, con tasa $\bar{i}$, que se define como $I_t = \bar{i}t$ para todo $t \geq 0$. El nivel de inflación se define como $\bar{I} := \{\bar{I}_t\}_{t\geq 0}$ que es la solución de

$$d\bar{I}_t = \bar{I}_{t-} dI_t, \tag{3.1.1}$$

dónde $\bar{I}_0 = 1$. Por lo cual $\bar{I}_t = e^{\bar{i}t}$.

3. Ya que las primas y reclamaciones del proceso de excedentes son afectados por la inflación, obtenemos el proceso de excedentes afectado por inflación $\bar{P} := \{\bar{P}_t\}_{t\geq 0}$ definido como

$$\bar{P}_t = y + \int_0^t \bar{I}_{s-} dP_s. \tag{3.1.2}$$

Este proceso ahora expresa el efecto de la inflación sobre el proceso de excedentes P.

4. Proceso de retorno de la inversión $R := \{R_t\}_{t\geq 0}$, con tasa r, que se define como $R_t = rt$. Se define el proceso $\bar{R} := \{\bar{R}_t\}_{t\geq 0}$ que es la solución de

$$d\bar{R}_t = \bar{R}_{t-} dR_t, \tag{3.1.3}$$

dónde $\bar{R}_0 = 1$. Por lo cual $\bar{R}_t = e^{rt}$.

5. Definimos $\bar{Y} := \{\bar{Y}_t\}_{t\geq 0}$ como la solución a

$$\begin{aligned} d\bar{Y}_t &= d\bar{P}_t + \bar{Y}_{t-} dR_t \\ &= \bar{I}_{t-} dP_t + r\bar{Y}_{t-} dt \\ &= e^{\bar{i}t} dP_t + r\bar{Y}_{t-} dt, \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

dónde $\bar{Y}_0 = y$.

Por lo tanto podemos escribir (3.1.4) como

$$\bar{Y}_t = e^{rt}\left(y + \int_0^t e^{-(r-\bar{i})s} dP_s\right).$$

6. Para terminar se define el proceso de riesgo $Y := \{Y_t\}_{t\geq 0}$ es

$$Y_t = \bar{I}_t^{-1} \bar{Y}_t. \tag{3.1.5}$$

Lo cual deriva en la fórmula

$$\begin{aligned} Y_t &= e^{(r-\bar{i})t}\left(y + \int_0^t e^{-(r-\bar{i})s} dP_s\right) \\ &= e^{(r-\bar{i})t} y + \left(\int_0^t e^{(r-\bar{i})(t-s)} dP_s\right). \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Observación 3.1.1. Si consideramos el proceso de generación de interés real $R-I$ y hacemos los cálculos en términos de unidades reales, podemos definir $d\widetilde{Y}_t = dP_t + \widetilde{Y}_t d(R-I)_t$. Es fácil ver que en este caso $\widetilde{Y} = Y$. La razón por la que se distingue entre $\widetilde{Y}$ y Y es que normalmente no son iguales cuando R e I son semimartingalas generales, como se explicará en la Observación 3.3.1.

Un inconveniente importante de este modelo es que la única fuente de incertidumbre permitida es el número y la gravedad de las reclamaciones. La tasa de rendimiento de las inversiones y el nivel de inflación se suponen conocidas. Pero la razón por la que las compañías de seguros se enfrentan a problemas financieros se debe con frecuencia a un bajo o incluso negativo retorno de las inversiones, y esto, por supuesto, es imprevisible. Los niveles inesperados de inflación también pueden tener un impacto en la solidez de una compañía de seguros.

3.2. Modelo con Tasas Aleatorias

Nos permitimos agregar aleatoriedad a los procesos de inflación y de retorno de inversión. Comenzamos con un modelo muy general en el que el proceso de generación de excedentes P, el proceso de generación de inflación I y el proceso de generación de retorno de inversión R, todos son semimartingalas. Este nivel de generalidad nos permite obtener la solución Y de (3.1.5), pero no mucho más.

Suponemos que todos los procesos y variables aleatorias están en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbb{P})$ que satisfaga las condiciones usuales. Supondremos que cada semimartingala será $\mathcal{F}_t$ adaptada. Ahora presentaremos el modelo con tasas aleatorias:

1. El proceso generador de excedentes $P := \{P_t\}_{t\geq 0}$ es una semimartingala con $P_0 = y$ y está definido como

$$P_t = y + pt - \sum_{i=1}^{N_t} S_i.$$

   Donde $N := \{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso Poisson con intensidad λ, $S := \{S_i\}_{i\geq 1}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.), que además son independientes de las variables $\{N_t\}_{t\geq 0}$.

2. Proceso generador de inflación $I := \{I_t\}_{t\geq 0}$, es una semimartingala con $I_0 = 0$. Por lo cual por el Teorema 2.0.4 la solución de (3.1.1) ahora es

$$\bar{I}_t = \exp\left\{I_t - \frac{1}{2}\langle I^c, I^c\rangle_t\right\} \prod_{s\leq t} (1+\Delta I_s)\exp\{-\Delta I_s\}. \qquad (3.2.1)$$

3. Proceso generador de excedentes afectado por inflación $\bar{P} := \{\bar{P}_t\}_{t\geq 0}$ definido como en (3.1.2).

$$\bar{P}_t = y + \int_0^t \bar{I}_{s-} dP_s, \tag{3.2.2}$$

con $\bar{I}_{0-} = 0$.

4. Proceso generador de retorno de la inversión $R := \{R_t\}_{t\geq 0}$ es una semimartingala con $R_0 = 0$. Por lo cual, al igual que el proceso I, por el Teorema 2.0.4 la solución de (3.1.3) ahora es

$$\bar{R}_t \;=\; \exp\left\{R_t - \frac{1}{2}\langle R^c, R^c\rangle_t\right\} \prod_{s\leq t} (1 + \Delta R_s) \exp\{-\Delta R_s\}.$$

5. Por lo que (3.1.4) se convierte en

$$\bar{Y}_t = \bar{P}_t + \int_0^t \bar{Y}_{s-} dR_s, \tag{3.2.3}$$

con $\bar{Y}_{0-} = 0$.

6. Para terminar se define el proceso de riesgo $Y := \{Y_t\}_{0\leq t}$, al igual que (3.1.5), es

$$Y_t \;=\; \bar{I}_t^{-1} \bar{Y}_t. \tag{3.2.4}$$

Se supone que $0 < \bar{I}_t$ para todo $t \geq 0$.

Por notación escribiremos como $X_t^{T_n} := X_{t\wedge T_n}$.

Por el Teorema 2.0.5 haciendo $Z = \bar{Y}$, $H = \bar{P}$ y $X = R$ la ecuación (3.2.3), por (2.0.2), tiene una única solución dada por:

$$\begin{aligned}
\bar{Y} &= \sum_{n\geq 0} \bar{Y}^{(n)} \mathbb{1}_{[T_n, T_{n+1}[}, \\
\bar{Y}^{(n)} &= U^{(n)} \left\{ \Delta \bar{P}_{T_n} + \int \left(\frac{1}{U^{(n)}}\right)_- d\left(\bar{P}^{T_{n+1}} - \bar{P}^{T_n}\right) \right. \\
&\quad \left. - \int \left(\frac{1}{U^{(n)}}\right) \mathbb{1}_{[0, T_{n+1}[} d\langle \bar{P}, R^{T_{n+1}} - R^{T_n}\rangle \right\}, \\
U^{(n)} &= \mathcal{E}\left(R^{T_{n+1}} - R^{T_n}\right).
\end{aligned}$$

Ahora haciendo $U^{(n)} = \bar{R}^{(n)}$ y por la ecuación (3.2.4) entonces Y tiene una única solución dada por

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{n\geq 0} Y^{(n)} \mathbb{1}_{[T_n, T_{n+1}[}, \\ Y^{(n)} &= \bar{I}_t^{-1} \bar{R}^{(n)} \left\{ \Delta \bar{P}_{T_n} + \int \left(\frac{1}{\bar{R}^{(n)}} \right)_- d\left(\bar{P}^{T_{n+1}} - \bar{P}^{T_n} \right) \right. \\ & \quad \left. - \int \left(\frac{1}{\bar{R}^{(n)}} \right) \mathbb{1}_{[0,T_{n+1}[} d\langle \bar{P}, R^{T_{n+1}} - R^{T_n} \rangle \right\} \qquad (3.2.5) \\ \bar{R}^{(n)} &= \mathcal{E}\left(R^{T_{n+1}} - R^{T_n} \right). \end{aligned}$$

Por (3.2.2), tenemos

$$\begin{aligned} &\Delta \bar{P}_0 = y, \\ &\Delta \bar{P}_{T_n} = \bar{I}_{T_n -} \Delta P_{T_n} \text{ para } n \geq 1, \\ &\bar{P}^{T_{n+1}} - \bar{P}^{T_n} = \int \bar{I}_- d(P^{T_{n+1}} - P^{T_n}), \\ &\langle \bar{P}, R^{T_{n+1}} - R^{T_n} \rangle = \int \bar{I}_- d\langle P, R^{T_{n+1}} - R^{T_n} \rangle. \end{aligned}$$

Por lo cual definiremos

$$\widetilde{I}_{0-} = 1, \quad \widetilde{I}_{T_n -} = \bar{I}_{T_n -},$$

para $n \geq 1$, entonces

$$\Delta \bar{P}_{T_n} = \widetilde{I}_{T_n -} \Delta P_{T_n}.$$

Ya que $(\bar{I}/\bar{R}^{(n)})_-$ es localmente acotado, utilizando la propiedad asociativa de la integral estocástica en (3.2.5) tenemos que

$$\begin{aligned} Y^{(n)} &= \bar{I}_t^{-1} \bar{R}^{(n)} \left\{ \widetilde{I}_{T_n -} \Delta P_{T_n} + \int \left(\frac{1}{\bar{R}^{(n)}} \right)_- d\left(\int \bar{I}_- d(P^{T_{n+1}} - P^{T_n}) \right) \right. \\ & \quad \left. - \int \left(\frac{1}{\bar{R}^{(n)}} \right) \mathbb{1}_{[0,T_{n+1}[} d\left(\int \bar{I}_- d\langle P, R^{T_{n+1}} - R^{T_n} \rangle \right) \right\} \\ &= \bar{I}_t^{-1} \bar{R}^{(n)} \left\{ \widetilde{I}_{T_n -} \Delta P_{T_n} + \int \left(\frac{\bar{I}}{\bar{R}^{(n)}} \right)_- d\left(P^{T_{n+1}} - P^{T_n} \right) \right. \\ & \quad \left. - \int \left(\frac{\bar{I}_-}{\bar{R}^{(n)}} \right) \mathbb{1}_{[0,T_{n+1}[} d\langle P, R^{T_{n+1}} - R^{T_n} \rangle \right\}. \qquad (3.2.6) \end{aligned}$$

Esta expresión es bastante complicada, así que haremos suposiciones que faciliten su manejo.

3.3. Modelo bajo Suposiciones Adicionales

Primero, supondremos que el proceso de generación de excedentes P y el proceso de generación de retorno de inversión R son independientes. Dado que estos procesos modelan diferentes aspectos de la actividad económica, este supuesto es bastante razonable. Esto implica que $\langle P, R^{T_{n+1}} - R^{T_n}\rangle$ es indistinguible del proceso cero, por lo que (3.2.6) toma una forma mas sencilla:

$$Y^{(n)} = \bar{I}_t^{-1}\bar{R}^{(n)}\left\{\widetilde{I}_{T_n-}\Delta P_{T_n} + \int\left(\frac{\bar{I}}{\bar{R}^{(n)}}\right)_- d\left(P^{T_{n+1}} - P^{T_n}\right)\right\}. \tag{3.3.1}$$

A continuación, supondremos que es imposible que todos los activos de la compañía de seguros pierdan su valor de una sola vez debido al rendimiento negativo de la inversión. Este es quizás un supuesto más fuerte. Para expresarlo matemáticamente, recordamos que $T_1 = \inf\{t > 0 : \Delta R_t = -1\}$, por lo que suponemos que $\mathbb{P}[T_1 < \infty] = 0$. Luego, utilizando (3.3.1) en Y en (3.2.5) tenemos:

$$\begin{aligned}
Y &= \sum_{n\geq 0}\bar{I}_t^{-1}\bar{R}^{(n)}\left\{\widetilde{I}_{T_n-}\Delta P_{T_n} + \int\left(\frac{\bar{I}}{\bar{R}^{(n)}}\right)_- d\left(P^{T_{n+1}} - P^{T_n}\right)\right\}\mathbb{1}_{[T_n,T_{n+1}[}\\
&= \bar{I}_t^{-1}\bar{R}^{(0)}\left\{\widetilde{I}_{0-}\Delta P_0 + \int\left(\frac{\bar{I}}{\bar{R}^{(0)}}\right)_- d\left(P^{T_1} - P^0\right)\right\}\mathbb{1}_{[0,T_1[}\\
&\quad + \sum_{n\geq 1}\bar{I}_t^{-1}\bar{R}^{(n)}\left\{\widetilde{I}_{T_n-}\Delta P_{T_n} + \int\left(\frac{\bar{I}}{\bar{R}^{(n)}}\right)_- d\left(P^{T_{n+1}} - P^{T_n}\right)\right\}\mathbb{1}_{[T_n,T_{n+1}[}.
\end{aligned}$$

Por lo cual Y en (3.2.5), con $U = \bar{I}\bar{R}^{-1}$ y $\bar{R} = \mathcal{E}(R)$, toma la siguiente forma:

$$Y = U^{-1}\left(y + \int U_- dP\right). \tag{3.3.2}$$

Observación 3.3.1. El proceso $U^{-1} = \bar{R}\bar{I}^{-1} = \mathcal{E}(R)/\mathcal{E}(I)$ es una medida de retorno sobre inversión. En la Observación 3.1.1 consideramos el proceso $\widetilde{Y}$ dada por

$$\widetilde{Y} = P + \int \widetilde{Y}_- d(R - I).$$

Bajo los mismos supuestos anteriores, se deduce que la solución única está dada por

$$\widetilde{Y} = \widetilde{U}^{-1}\left(y + \int \widetilde{U}_- dP\right),$$

donde $\widetilde{U} = (\mathcal{E}(R - I))^{-1}$ también es una medida del rendimiento de la inversión, pero generalmente es diferente de U. De hecho, se tiene que por integración por partes (Definición

2.0.5)

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(R-I)\mathcal{E}(I) &= \mathcal{E}(R-I)_0\mathcal{E}(I)_0 + \int \mathcal{E}(R-I)_- d\mathcal{E}(I) \\
&\quad + \int \mathcal{E}(I)_- d\mathcal{E}(R-I) + \langle \mathcal{E}(R-I), \mathcal{E}(I)\rangle \\
&= \mathcal{E}(R-I)_0\mathcal{E}(I)_0 + \int \mathcal{E}(R-I)_-\mathcal{E}(I)_- dI + \int \mathcal{E}(R-I)_-\mathcal{E}(I)_- d(R-I) \\
&\quad + \int \mathcal{E}(R-I)_-\mathcal{E}(I)_- d\langle (R-I), (I)\rangle \\
&= \mathcal{E}(R-I)_0\mathcal{E}(I)_0 + \int \mathcal{E}(R-I)_-\mathcal{E}(I)_- d(I + (R-I) + \langle (R-I), (I)\rangle) \\
&= \mathcal{E}(R + \langle R-I, I\rangle),
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\widetilde{U} = U\mathcal{E}(R)(\mathcal{E}(R + \langle R-I, I\rangle))^{-1}.$$

Esto implica que $\widetilde{U} = U$ y por lo tanto $\widetilde{Y} = Y$ si y sólo si $\langle R-I, I\rangle = 0$. Una condición suficiente para esto es $R-I$ ó I sea un proceso determinístico continuo.

Finalmente, supondremos que el proceso vectorial $\bar{X} = (P, I, R)$ es un proceso con incrementos estacionarios e independientes con un número finito de saltos en cada intervalo finito. Luego $\bar{X}$ (Gihman y Skorohod [13]) tiene la representación

$$\bar{X}_t = \bar{X}_0 + \bar{a}t + \bar{C}\bar{W}_t + \bar{V}_t, \qquad \text{dónde } \bar{X}_0 = (y, 0, 0)^T. \tag{3.3.3}$$

Donde $\bar{W}$ un movimiento browniano tri-dimensional y $\bar{V}$ es un proceso de Poisson compuesto tri-dimensional independiente de $\bar{W}$, $\bar{a}$ es un vector constante y $\bar{C}$ es una matriz de 3×3 con la propiedad

$$\bar{C}\bar{C}^T = \begin{bmatrix} \sigma_P^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_I^2 & \rho\sigma_I\sigma_R \\ 0 & \rho\sigma_I\sigma_R & \sigma_R^2 \end{bmatrix}, \tag{3.3.4}$$

donde $|\rho| \leq 1$. Supondremos que el primer componente de $\bar{V}$ es independiente de los otros dos, por lo que (3.3.4) implica que P y (I, R) son independientes. En cuanto a los componentes de $\bar{X}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
P_t &= y + pt + W_{P,t} - \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i}, && (3.3.5)\\
I_t &= \bar{i}t + W_{I,t} + \sum_{i=1}^{N_{I,t}} \widetilde{S}_{I,i}, && (3.3.6)\\
R_t &= rt + W_{R,t} + \sum_{i=1}^{N_{R,t}} \widetilde{S}_{R,i}, && (3.3.7)
\end{aligned}
$$

donde $(W_P, W_I, W_R)^T = \bar{C}\bar{W}$, N_P, N_I y N_R son tres procesos de Poisson con intensidades λ_P, λ_I y λ_R respectivamente, y N_P es independiente de (N_I, N_R).
También los sumandos en cada suma son v.a.i.i.d. y $S_{P,i}$ y $(\widetilde{S}_{I,j}, \widetilde{S}_{R,j})$ son independientes para todo i, j.
Denotamos por

$$
S_P := \{S_{P,i}\}_{i\geq 0}, \quad \widetilde{S}_I := \{\widetilde{S}_{I,i}\}_{i\geq 0} \quad \text{y} \quad \widetilde{S}_R := \{\widetilde{S}_{R,i}\}_{i\geq 0}.
$$

Definimos

$$
F_P(s) = \mathbb{P}[S_{P,1} \leq s], \quad F_I(s) = \mathbb{P}[1 + \widetilde{S}_{I,1} \leq s], \quad F_R(s) = \mathbb{P}[1 + \widetilde{S}_{R,1} \leq s], \qquad (3.3.8)
$$

con $F_I(0) = F_R(0) = 0$.

Observación 3.3.2. El supuesto $F_I(0) = 0$ excluye la posibilidad de que la inflación sea de -100 % o más, es decir, es imposible que todos los activos en la economía pierdan su valor o tengan un valor negativo. Entonces, desde un punto de vista práctico, este supuesto no es una restricción en absoluto. De manera similar, el supuesto de que $F_R(0) = 0$ excluye la posibilidad de que todos los activos de la compañía de seguros pierdan su valor o tengan un valor negativo debido al rendimiento negativo de las inversiones. Como las instituciones financieras a menudo se comprometen con responsabilidades financieras mucho mayores que sus propios activos, este es un supuesto mucho más estricto. Sin embargo, el siguiente argumento justifica al menos por qué nosotros, en el contexto de la teoría de la ruina en un intervalo de tiempo infinito, podemos suponer que $F_R(0-) = 0$. Sea $T = \text{ínf}\{t : \Delta R_t < -1\}$. Dado que P y R se suponen procesos de Lévy independientes, vemos en (3.2.3) que $\Delta \bar{Y}_T, = \bar{Y}_{T-}\Delta R_T$, por lo tanto, $\bar{Y}_T < 0$. Por lo tanto, la ruina ocurre en el momento T (ó antes de T). Pero $\Delta R_T = \widetilde{S}_{R,N_{R,T}}$, entonces

$$
M_t = \sum_{i=0}^{N_{R,t}} \widetilde{S}_{R,i} \mathbb{1}_{\{\widetilde{S}_{R,i} < -1\}},
$$

es un proceso de Poisson compuesto con intensidad $\lambda_R F_R(0-)$ y $T = \text{ínf}\{t : M_t \neq 0\}$. Por lo tanto, $F_R(0-) > 0$ implica que $\mathbb{P}[T < \infty] = 1$, es decir, la ruina ocurre con probabilidad uno. Este argumento también muestra que $F_R(0) = 0$ implica que $\mathbb{P}[T_1 < \infty] = 0$, esto implica el paso de (3.3.1) a (3.3.2).

Observación 3.3.3. Aunque pasar de (3.2.5) a nuestro modelo actual implica muchas suposiciones, todavía estamos en un nivel de generalidad que incluye muchos modelos en la teoría de las finanzas, incluida la muy celebrada fórmula de precios de opción de Black and Scholes (1973). En este caso, se supone que el activo subyacente S sigue un movimiento browniano geométrico, es decir, S es la solución de $dS_t = S_{t-}dR_t$, donde R, es como en (3.3.7) con $\lambda_R = 0$. Por lo tanto, es un caso especial de nuestro modelo (3.2.3) con $\bar{P}_t = S_0$, una constante. También en la fórmula de valoración de la opción de difusión de salto más general de Merton (1976), S es la solución de la misma ecuación, pero ahora $\lambda_R > 0$ y $1+\widetilde{S}_R$, se supone que está distribuida como lognormal, por lo tanto, $F_R(0) = 0$. Por otro lado, en la fórmula de precios de opciones de elasticidad constante de varianza de Cox y Ross (1976), el activo subyacente es la solución de $dS_t = rS_{t-}dt + S_{t-}^{1/2}dW_{R,t}$ por lo tanto no es un caso especial de (3.2.3) y (3.3.7).

Ahora procedemos a calcular Y, de (3.3.6) tenemos

$$\begin{aligned}
\langle I^c, I^c\rangle_t = \langle W_I, W_I\rangle_t &= \mathbb{E}[W_{I,t}^2] = \sigma_I^2 t,\\
\prod_{0\le s\le t}(1+\Delta I_s)e^{-\Delta I_s} &= \prod_{i=1}^{N_{I,t}}(1+\widetilde{S}_{I,i})\exp\left\{-\sum_{j=1}^{N_{I,t}}\widetilde{S}_{I,j}\right\},
\end{aligned}$$

por lo cual de (3.2.1) sustituyendo (3.3.6) obtenemos

$$\begin{aligned}
\bar{I}_t &= \exp\left\{I_t - \frac{1}{2}\langle I^c, I^c\rangle_t\right\}\prod_{s\le t}(1+\Delta I_s)\exp\{-\Delta I_s\}\\
&= \exp\left\{\bar{i}t + W_{I,t} + \sum_{i=1}^{N_{I,t}}\widetilde{S}_{I,i} - \frac{1}{2}\sigma_I^2 t\right\}\prod_{s\le t}(1+\Delta I_s)\exp\{-\Delta I_s\}\\
&= \exp\left\{\left(\bar{i} - \frac{1}{2}\sigma_I^2\right)t + W_{I,t}\right\}\prod_{i=1}^{N_{I,t}}(1+\widetilde{S}_{I,i}). \qquad (3.3.9)
\end{aligned}$$

De la misma forma para R tenemos

$$\begin{aligned}
\langle R^c, R^c\rangle_t = \langle W_R, W_R\rangle_t &= \mathbb{E}[W_{R,t}^2] = \sigma_R^2 t,\\
\prod_{0\le s\le t}(1+\Delta R_s)e^{-\Delta R_s} &= \prod_{i=1}^{N_{R,t}}(1+\widetilde{S}_{R,i})\exp\left\{-\sum_{j=1}^{N_{R,t}}\widetilde{S}_{R,j}\right\},
\end{aligned}$$

por lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}
\bar{R}_t &= \exp\left\{R_t - \frac{1}{2}\langle R^c, R^c\rangle_t\right\}\prod_{s\leq t}(1+\Delta R_s)\exp\{-\Delta R_s\} \\
&= \exp\left\{r + W_{R,t} + \sum_{i=1}^{N_{R,t}}\widetilde{S}_{R,i} - \frac{1}{2}\sigma_R^2 t\right\}\prod_{s\leq t}(1+\Delta R_s)\exp\{-\Delta R_s\} \\
&= \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_R^2\right)t + W_{R,t}\right\}\prod_{i=1}^{N_{R,t}}(1+\widetilde{S}_{R,i}). \qquad (3.3.10)
\end{aligned}$$

Dado que $U = \bar{R}^{-1}\bar{I}$, tenemos

$$\begin{aligned}
U_t &= \exp\left\{-\left(r - \frac{1}{2}\sigma_R^2\right)t - W_{R,t} + \left(\bar{i} - \frac{1}{2}\sigma_I^2\right)t + W_{I,t}\right\}\prod_{i=1}^{N_{R,t}}(1+\widetilde{S}_{R,i})^{-1}\prod_{i=1}^{N_{I,t}}(1+\widetilde{S}_{I,i}) \\
&= \exp\left\{-\left(r - \bar{i} - \frac{1}{2}(\sigma_R^2 - \sigma_I^2)\right)t + W_{I,t} - W_{R,t}\right\}\prod_{i=1}^{N_{R,t}}(1+\widetilde{S}_{R,i})^{-1}\prod_{i=1}^{N_{I,t}}(1+\widetilde{S}_{I,i}).
\end{aligned}$$

Sea W_U movimiento browniano, σ_U tal que $\sigma_U W_U = W_I - W_R$, entonces

$$\alpha_U = r - \bar{i} - \frac{1}{2}(\sigma_R^2 - \sigma_I^2) \quad , \quad \sigma_U^2 = \sigma_I^2 - 2\rho\sigma_I\sigma_R + \sigma_R^2. \qquad (3.3.11)$$

Por lo que la ecuación anterior queda de la forma

$$U_t = \exp\{-\alpha_U t + \sigma_U W_{U,t}\}\prod_{i=1}^{N_{R,t}}(1+\widetilde{S}_{R,i})^{-1}\prod_{i=1}^{N_{I,t}}(1+\widetilde{S}_{I,i}). \qquad (3.3.12)$$

El problema con esta fórmula es que $\prod_{i=1}^{N_{R,t}}(1+\widetilde{S}_{R,i})^{-1}$ y $\prod_{i=1}^{N_{I,t}}(1+\widetilde{S}_{I,i})$ no son independientes normalmente. De (3.3.6) y (3.3.7) podemos representar a R y I como

$$\begin{aligned}
R_t &= rt + W_{R,t} + \sum_{i=1}^{N_{U,t}} S_{R,i}, \\
I_t &= \bar{i}t + W_{I,t} + \sum_{i=1}^{N_{U,t}} S_{I,i},
\end{aligned}$$

donde N_U es un proceso de Poisson con intensidad λ_U, independiente de N_P, y los vectores $(S_{I,i}, S_{R,i})$ son i.i.d, independientes de los $S_{P,i}$. Siguiendo los pasos que llevaron a la ecuación (3.3.12), podemos obtener U de la forma

$$U_t = \exp\{-\alpha_U t + \sigma_U W_{U,t}\}\prod_{i=1}^{N_{U,t}} S_{U,i}, \qquad (3.3.13)$$

donde ambos productos son independientes y $S_{U,i} = (1 + S_{R,i})^{-1}(1 + S_{I,i})$. Si hacemos

$$F_U(s) = \mathbb{P}[S_{U,1} \leq s], \tag{3.3.14}$$

ya que $F_I(0) = F_R(0) = 0$ entonces $F_U(0) = 0$ y $F_U(\infty) = 1$. En el caso en que $\prod_{i=1}^{N_{R,t}}(1 + \widetilde{S}_{R,i})^{-1}$ y $\prod_{i=1}^{N_{I,t}}(1 + \widetilde{S}_{I,i})$ sean independientes se sigue el Lemma 3.3.1.

Lema 3.3.1. *Sean $\sum_{i=1}^{N_{I,t}} \widetilde{S}_{I,i}$ como en (3.3.6) y $\sum_{i=1}^{N_{R,t}} \widetilde{S}_{R,i}$ como en (3.3.7) independientes. Sea*

$$V_t = \prod_{i=1}^{N_{R,t}}(1 + \widetilde{S}_{R,i})^{-1} \prod_{i=1}^{N_{I,t}}(1 + \widetilde{S}_{I,i}).$$

Entonces V se puede escribir como

$$V = \prod_{i=1}^{N_{V,t}} S_{V,i},$$

donde $N_V := \{N_{V,t}\}_{t\geq 0}$ es un proceso Poisson con intensidad $\lambda_V = \lambda_I + \lambda_R$, los $S_{V,i}$ son v.a.i.i.d. independientes de N_V y $S_{V,i}$ se distribuye como

$$F_V(s) = \frac{\lambda_I}{\lambda_V} F_I(s) + \frac{\lambda_R}{\lambda_V}\left(1 - F_R\left(\frac{1}{s-}\right)\right).$$

Demostración: Tenemos que

$$\log V_t = \sum_{i=1}^{N_{I,t}} \log(1 + \widetilde{S}_{I,i}) - \sum_{i=1}^{N_{R,t}} \log(1 + \widetilde{S}_{R,i}).$$

Por lo cual definimos

$$\psi_I(u) = \mathbb{E}\left[\exp\{iu\log(1 + \widetilde{S}_I)\}\right] \quad \text{y} \quad \psi_R(u) = \mathbb{E}\left[\exp\{-iu\log(1 + \widetilde{S}_R)\}\right].$$

Para el caso de proceso Poisson Compuesto ($Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{iuY_t}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{iu\sum_{i=1}^{N_t} X_i}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[N_t = n\right] \mathbb{E}\left[e^{iu\sum_{i=1}^{N_t} X_i} \mid N_t = n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[N_t = n\right] \prod_{i=0}^{n} \mathbb{E}\left[e^{iuX_i}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \mathbb{E}\left[e^{iuX_i}\right]^n \\
&= e^{-\lambda t + \lambda t \mathbb{E}\left[e^{iuX_i}\right]}.
\end{aligned}$$

Por lo cual

$$\varphi = e^{-\lambda t + \lambda t \psi} = e^{\lambda t(\psi - 1)},$$

donde φ es la función característica de Y_t, ψ es la función característica de X_i y λ la intensidad de N_t.

Por la fórmula anterior y por independencia tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\{iu \log V_t\}\right] &= \exp\{\lambda_I t(\psi_I(u) - 1) + \lambda_R t(\psi_R(u) - 1)\} \\
&= \exp\{\lambda_V t(\psi_V(u) - 1)\},
\end{aligned}$$

donde

$$\psi_V(u) = \frac{\lambda_I}{\lambda_V}\psi_I(u) + \frac{\lambda_R}{\lambda_V}\psi_R(u),$$

es la función característica de la mezcla

$$G_V(s) = \frac{\lambda_I}{\lambda_V}G_I(s) + \frac{\lambda_R}{\lambda_V}G_R(s), \quad G_I(s) = \mathbb{P}\left[\log(1 + \widetilde{S}_I) \leq s\right],$$

y

$$G_R(s) = \mathbb{P}\left[-\log(1 + \widetilde{S}_R) \leq s\right].$$

Esto significa que V_t es un proceso Poisson con intensidad λ_V i.e.

$$\log V_t = \sum_{i=1}^{N_{V,t}} \log S_{V,i}.$$

Donde $\log S_V$ tiene distribución G_V, por lo tanto S_V tiene distribución

$$F_V(s) = \frac{\lambda_I}{\lambda_V}\mathbb{P}\left[1 + \widetilde{S}_I \leq s\right] + \frac{\lambda_R}{\lambda_V}\mathbb{P}\left[\frac{1}{1 + \widetilde{S}_R} \leq s\right].$$

■

Capítulo 4

Teoría de la Ruina

En este capítulo encontraremos la probabilidad de ruina eventual de la compañía de seguros. Para ello obtendremos el proceso de ingreso de tiempo infinito y su función de distribución, así como su función característica.
Se harán varios supuestos para poder encontrar dichas funciones de manera explícita y posteriormente daremos supuestos más fuertes con los cuales podamos encontrar la función de distribución y en algunos casos la función de densidad.
Terminaremos el capítulo con un ejemplo donde se aplicaran los resultados obtenidos a lo largo de este capítulo.

4.1. Existencia

En esta sección nos dedicaremos a fundamentar las condiciones para poder garantizar la existencia de una función que nos pueda proporcionar la probabilidad de ruina eventual de nuestra compañía de seguros, la cual se obtendrá en función de la función de distribución.

Seguiremos con el supuesto de que $Y = U^{-1}\left(y + \int U_{-}dP\right)$, igual que en la sección anterior, donde U y P son como en (3.3.13) y (3.3.5).
De aquí en adelante, salvo que haya ambigüedad, usaremos la siguiente notación

$$S_P := S_{P,i}, \quad S_U := S_{U,i},$$

para hacer referencia a una sola v.a.

Definimos

$$m_{P,k} = \mathbb{E}[S_P^k] \quad , \quad m_{U,k} = \mathbb{E}[S_U^k],$$

entonces supondremos que $m_{P,2}$ y $m_{U,2}$ ambos existen y son finitos.
Sea

$$T_R = \begin{cases} \inf\{t : Y_t < 0\} = \inf\{t : \bar{Y}_t < 0\}, & \\ \infty & \text{si} \quad Y_t \geq 0 \text{ para todo } t. \end{cases}$$

Entonces T_R es el tiempo de la ruina, y definiremos como $R(y) := \mathbb{P}[T_R < \infty]$, la probabilidad de eventual ruina empezando en $y > 0$. Si definimos la semimartingala Z por $Z = \int U_- dP$, luego ya que $U_t > 0$ para todo t (recordando $F_I(0) = 0 = F_R(0)$),

$$
\begin{aligned}
T_R &= \inf\{t : Y_t < 0\} \\
&= \inf\{t : U_t^{-1}(y + U_- \cdot P)_t < 0\} \\
&= \inf\{t : U_t^{-1}(y + Z_t) < 0\} \\
&= \inf\{t : Z_t < -y\}. \qquad (4.1.1)
\end{aligned}
$$

Por independencia tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[U_t^k\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-k\alpha_U t + k\sigma_U W_{U,t}\right\} \prod_{i=1}^{N_{U,t}} S_{U,i}^k\right] \\
&= \exp\{-k\alpha_U t\}\mathbb{E}\left[\exp\left\{k\sigma_U W_{U,t}\right\}\right] \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{N_{U,t}} S_{U,i}^k\right],
\end{aligned}
$$

como $k\sigma_U W_{U,t} \sim N(0, k^2\sigma_U^2 t)$ entonces $\mathbb{E}[\exp\{k\sigma_U W_{U,t}\}] = \exp\{(k^2\sigma_U^2 t)/2\}$.
Condicionando con respecto a $N_{U,t}$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[m_{U,k}^{N_{U,t}}\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{N_{U,t}} S_{U,i}^k\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{N_{U,t}} S_{U,i}^k \mid N_{U,t} = n\right] \mathbb{P}\left[N_{U,t} = n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[S_{U,i}^k\right] \mathbb{P}\left[N_{U,t} = n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} m_{U,k}^n \frac{(\lambda_U t)^n}{n!} e^{-\lambda_U t} \\
&= \exp\left\{(m_{U,k} - 1)\lambda_U t\right\}.
\end{aligned}
$$

Por lo cual tenemos

$$
\mathbb{E}\left[U_t^k\right] = \exp\left\{-\left(k\alpha_U - \frac{1}{2}k^2\sigma_U^2 - \lambda_U[m_{U,k} - 1]\right) t\right\} =: \exp\{-\mu_k t\}. \qquad (4.1.2)
$$

De tal forma

$$
\mu_k = k\alpha_U - \frac{1}{2}k^2\sigma_U^2 - \lambda_U[m_{U,k} - 1], \qquad (4.1.3)
$$

de donde se supone que $\mathbb{E}\left[U_t^k\right]$ existe. Entonces para $0 < l \leq k$ y $t > 0$, y ya que $\varphi(x) = x^{(k/l)}$ es convexa para $1 \leq k/l$. Entonces si $\mu_k > 0$, por la desigualdad de Jensen (Lema 2.0.1) para $\mathbb{E}\left[U_t^l\right]^{(k/l)} \leq \mathbb{E}\left[U_t^k\right]$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[U_t^l\right]^{1/l} &\leq \mathbb{E}\left[U_t^k\right]^{1/k} \\
\exp\left\{\frac{-\mu_l t}{l}\right\} &\leq \exp\left\{\frac{-\mu_k t}{k}\right\} < 1 \\
\frac{-\mu_l t}{l} &< 0 \\
\mu_l &> 0.
\end{aligned}
$$

Por lo cual si $\mu_k > 0$, entonces $\mu_l > 0$ para $l \leq k$.
Entonces por (3.3.11) y (4.1.3) podemos obtener

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &= \alpha_U - \frac{1}{2}\sigma_U^2 - \lambda_U[m_{U,1} - 1] \\
&= r - \bar{i} - \frac{1}{2}(\sigma_R^2 - \sigma_I^2) - \frac{1}{2}\left(\sigma_I^2 - 2\rho\sigma_I\sigma_R + \sigma_R^2\right) - \lambda_U[m_{U,1} - 1] \\
&= r - \bar{i} - \sigma_R^2 + \rho\sigma_I\sigma_R - \lambda_U[m_{U,1} - 1], \\
\mu_2 &= 2\alpha_U - \frac{1}{2}2^2\sigma_U^2 - \lambda_U[m_{U,2} - 1] \qquad (4.1.4) \\
&= 2\left(r - \bar{i} - \frac{1}{2}(\sigma_R^2 - \sigma_I^2)\right) - \frac{1}{2}4\left(\sigma_I^2 - 2\rho\sigma_I\sigma_R + \sigma_R^2\right) - \lambda_U[m_{U,2} - 1] \\
&= 2(r - \bar{i}) - \sigma_R^2 + \sigma_I^2 - 2\sigma_I^2 + 4\rho\sigma_I\sigma_R - 2\sigma_R^2 - \lambda_U[m_{U,2} - 1] \\
&= 2(r - \bar{i}) - 3\sigma_R^2 - \sigma_I^2 + 4\rho\sigma_I\sigma_R - \lambda_U[m_{U,2} - 1].
\end{aligned}
$$

Tomando en cuenta que la medida de Lebesgue (l) del conjunto $\{s : U_{s-} \neq U_s\}$ es cero (i.e. $l(\{s : U_{s-} \neq U_s\}) = 0$). Entonces por el Teorema de Fubini (Teorema 2.0.1) y (4.1.2), podemos definir

$$
\begin{aligned}
m_1(t) &:= \mathbb{E}\left[\int_0^t U_{s-} ds\right] \\
&= \int_0^t \mathbb{E}\left[U_s\right] ds \\
&= \int_0^t \exp\{-\mu_1 s\} ds \\
&= \frac{1}{\mu_1}(1 - \exp\{-\mu_1 t\}). \qquad (4.1.5)
\end{aligned}
$$

Se puede observar por (3.3.13) que si $s \geq t$, entonces U_t y U_s/U_t son independientes y U_s/U_t tiene la misma distribución que U_{s-t}
(basta considerar $\log U_t$ y $\log(U_s/U_t) = \log U_s - \log U_t$).

$$\begin{aligned} \frac{U_s}{U_t} &= \frac{\exp\{-\alpha_U s + \sigma_U W_{U,s}\}\prod_{i=1}^{N_{U,s}} S_{U,i}}{\exp\{-\alpha_U t + \sigma_U W_{U,t}\}\prod_{i=1}^{N_{U,t}} S_{U,i}}, \\ U_{s-t} &= \exp\{-\alpha_U(s-t) + \sigma_U W_{U,s-t}\}\prod_{i=1}^{N_{U,s-t}} S_{U,i}. \end{aligned}$$

Por lo cual $\frac{U_s}{U_t} \stackrel{d}{=} U_{s-t}$. Entonces por (4.1.2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[U_s U_t\right] &= \mathbb{E}\left[(U_t U_{s-t})U_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[U_t^2 U_{s-t}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[U_t^2\right]\mathbb{E}\left[U_{s-t}\right] \\ &= \exp\{-\mu_2 t\}\exp\{-\mu_1(s-t)\} \\ &= \exp\{-\mu_1 s\}\exp\{-(\mu_2-\mu_1)t\}. \end{aligned}$$

Y de la misma manera en que definimos (4.1.5) podemos definir

$$m_2(t) := \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t U_{s-} ds\right)^2\right].$$

Para facilitar su manejo definiremos $V_x = \int_0^x U_{u-} du$ para $0 \leq x \leq t$, usando cambio de variable

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t U_{s-} ds\right)^2 &= V_t^2 - V_0^2 \\ &= \left[V_s^2\right]_0^t \\ &= \int_0^t 2V_s dV_s \\ &= 2\int_0^t V_s U_s ds \\ &= 2\int_0^t \left(\int_0^s U_u du\right) U_s ds \\ &= 2\int_0^t \left(\int_0^s U_s U_u du\right) ds. \end{aligned}$$

Entonces $m_2(t)$ es

$$\begin{aligned}
m_2(t) &:= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t U_{s-}ds\right)^2\right] \\
&= 2\int_0^t\left(\int_0^s \mathbb{E}\left[U_sU_u\right]du\right)ds \\
&= 2\int_0^t \exp\{-\mu_1 s\}\left(\int_0^s \exp\{-(\mu_2-\mu_1)u\}du\right)ds \\
&= 2\int_0^t \exp\{-\mu_1 s\}\left(\frac{1}{(\mu_2-\mu_1)}(1-\exp\{-(\mu_2-\mu_1)s\})\right)ds \\
&= \frac{2}{(\mu_2-\mu_1)}\int_0^t\left(\exp\{-\mu_1 s\}-\exp\{-\mu_2 s\}\right)ds \\
&= \frac{2}{(\mu_2-\mu_1)}\left(\frac{1}{\mu_1}(1-\exp\{-\mu_1 s\})-\frac{1}{\mu_2}(1-\exp\{-\mu_2 s\})\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{\mu_1\mu_2}-\frac{1}{\mu_1(\mu_2-\mu_1)}\exp\{-\mu_1 t\}+\frac{1}{\mu_2(\mu_2-\mu_1)}\exp\{-\mu_2 t\}\right). \quad (4.1.6)
\end{aligned}$$

Ya que si $\mu_2>0$, se tiene que $\mu_1>0$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} m_2(t) &= 2\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\mu_1\mu_2}-\frac{1}{\mu_1(\mu_2-\mu_1)}\exp\{-\mu_1 t\}+\frac{1}{\mu_2(\mu_2-\mu_1)}\exp\{-\mu_2 t\}\right) \\
&= 2\frac{1}{\mu_1\mu_2}-\frac{2}{\mu_1(\mu_2-\mu_1)}\lim_{t\to\infty}\exp\{-\mu_1 t\}+\frac{2}{\mu_2(\mu_2-\mu_1)}\lim_{t\to\infty}\exp\{-\mu_2 t\} \\
&= 2\frac{1}{\mu_1\mu_2}. \quad (4.1.7)
\end{aligned}$$

Se establecerá el siguiente teorema

Teorema 4.1.1. *Sea $\beta_P = p-\lambda_P m_{P,1}$. Entonces $Z_t=\int_0^t U_{s-}dP_s$ es*

- *supermartingala si $\beta_P<0$,*
- *martingala si $\beta_P=0$,*
- *submartingala si $\beta_P>0$.*

Si se supone que $\mu_1>0$. Entonces $\lim_{t\to\infty} Z_t = Z_\infty$ existe y converge casi seguramente y en L^1. La esperanza de Z_∞, es

$$\mathbb{E}\left[Z_\infty\right]=\frac{\beta_P}{\mu_1}.$$

Finalmente si $\mu_2>0$ entonces $\mathbb{E}\left[Z_\infty^2\right]<\infty$.

Demostración: Recordando que la semimartingala P está dada:

$$P_t = y + pt + W_{P,t} - \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i}$$

Descomponemos la semimartingala P en un proceso de la forma $P_t = y + M_t + \beta_P t$ donde $M_t = W_{P,t} - \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i} + \lambda_P m_{P,1} t$ es una martingala local con $M_0 = 0$, y $\beta_P t$ es un proceso adaptado de variación finita con $\beta_P 0 = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} Z_t &= \int_0^t U_{s-} d(y + M_s + \beta_P s) \\ &= \int_0^t U_{s-} dM_s + \beta_P \int_0^t U_{s-} ds \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Por (4.1.6), si volvemos a definir el proceso creciente $V_t = \int_0^t U_{s-} ds$, entonces el proceso V es cuadrado integrable y por (4.1.5) y (4.1.7)

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[V_\infty] < \infty && \text{si } \mu_1 > 0 \\ &\mathbb{E}[V_\infty^2] < \infty && \text{si } \mu_2 > 0 \end{aligned}$$

Ahora consideramos la martingala local $N_t = \int_0^t U_{s-} dM_s$. Sea $N_t^* = \sup_{0 \le s \le t} |N_s|$ y $N_\infty^* = \sup_{0 \le t} |N_t|$.

Por la desigualdad de Burkholder-Gundy-Davis (Teorema 2.0.6)

$$\mathbb{E}\left[(N_t^*)^p\right] = \mathbb{E}\left[(\sup_{0 \le s \le t} |N_s|)^p\right] \le C_p \mathbb{E}\left[\langle N, N\rangle_t^{p/2}\right], \quad 0 \le t \le \infty \tag{4.1.9}$$

para $p \ge 1$ y alguna constante $C_p > 0$.

Dado que $N_t = \int_0^t U_{s-} dM_s$, por Definición 2.0.5 tenemos

$$\langle N, N\rangle = \left\langle \int U_- dM, \int U_- dM \right\rangle = \int U_-^2 d\langle M, M\rangle .$$

También por definición del proceso de variación cuadrática, podemos ver que que

$$\begin{aligned} \langle M, M\rangle_t &= \langle M^c, M^c\rangle_t + M_0^2 + \sum_{0 < s \le t} (\Delta M_t)^2 \\ &= \langle W_P, W_P\rangle_t + \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i}^2 \\ &= \sigma_P^2 t + \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i}^2. \end{aligned}$$

Sean $T_1 < T_2 < \cdots$ los tiempos de saltos de N_P. Ya que N_P y N_U son independientes (no saltan al mismo tiempo), tenemos $U_{T_i-} = U_{T_i}$ c.s. Por lo tanto tenemos que se cumple la siguiente igualdad c.s.

$$\begin{aligned}
\langle N, N \rangle_t &= \int_0^t U_{s-}^2 d\langle M, M \rangle_s \\
&= \int_0^t U_{s-}^2 d\left(\sigma_P^2 s + \sum_{i=1}^{N_{P,s}} S_{P,i}^2\right) \\
&= \sigma_P^2 \int_0^t U_s^2 ds + \sum_{i=1}^{N_{P,t}} U_{T_i}^2 S_{P,i}^2,
\end{aligned}$$

y

$$\langle N, N \rangle_\infty = \sigma_P^2 \int_0^\infty U_s^2 ds + \sum_{i=1}^{\infty} U_{T_i}^2 S_{P,i}^2, \tag{4.1.10}$$

$$\langle N, N \rangle_\infty^{1/2} \leq \sigma_P \left(\int_0^\infty U_s^2 ds\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{\infty} U_{T_i} |S_{P,i}|. \tag{4.1.11}$$

Al condicionar en N_P, usando (4.1.2) y (4.1.5) y dado que U y S_P son independientes, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_{P,t}} U_{T_i}^2 S_{P,i}^2\right] &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_{P,t}} U_{T_i}^2 S_{P,i}^2 \mid N_{P,t} = m\right] \mathbb{P}\left[N_{P,t} = m\right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m} U_{T_i}^2 S_{P,i}^2 \mid N_{P,t} = m\right] \mathbb{P}\left[N_{P,t} = m\right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[S_P^2\right] \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}\left[U_{T_i}^2 \mid N_{P,t} = m\right] \mathbb{P}\left[N_{P,t} = m\right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[S_P^2\right] \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}\left[e^{-\mu_2 T_i} \mid N_{P,t} = m\right] \mathbb{P}\left[N_{P,t} = m\right].
\end{aligned}$$

Recordando la función generadora de momentos de la v.a. X que tiene distribución uniforme en $[a, b]$

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \begin{cases} \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Si condicionamos $N_{P,t} = m$, entonces $T_1, \cdots, T_m$ tienen la misma distribución que m variables aleatorias ordenadas distribuidas uniformemente en $[0, t]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_{P,t}} U_{T_i}^2 S_{P,i}^2\right] &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[S_P^2\right] \mathbb{P}\left[N_{P,t} = m\right] \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}\left[e^{-\mu_2 T_i} \mid N_{P,t} = m\right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[S_P^2\right] \mathbb{P}\left[N_{P,t} = m\right] \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{e^{-\mu_2 t} - 1}{-\mu_2 t}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[S_P^2\right] \left(\frac{1 - e^{-\mu_2 t}}{\mu_2 t}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[N_{P,t} = m\right] m \\
&= \mathbb{E}\left[S_P^2\right] \left(\frac{1 - e^{-\mu_2 t}}{\mu_2 t}\right) \mathbb{E}\left[N_{P,t}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[S_P^2\right] \left(\frac{1 - e^{-\mu_2 t}}{\mu_2 t}\right) \lambda_P t.
\end{aligned}$$

Por lo que al final se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\langle N, N\rangle_t\right] &= \mathbb{E}\left[\sigma_P^2 \int_0^t U_s^2 ds + \sum_{i=1}^{N_{P,t}} U_{T_i}^2 S_{P,i}^2\right] \\
&= \sigma_P^2 \int_0^t \mathbb{E}\left[U_s^2\right] ds + \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_{P,t}} U_{T_i}^2 S_{P,i}^2\right] \\
&= \sigma_P^2 \frac{1}{\mu_2}\left(1 - e^{-\mu_2 t}\right) + \mathbb{E}\left[S_P^2\right] \left(\frac{1 - e^{-\mu_2 t}}{\mu_2}\right) \lambda_P \\
&= \frac{1}{\mu_2}\left(\sigma_P^2 + \lambda_P \mathbb{E}\left[S_P^2\right]\right)\left(1 - e^{-\mu_2 t}\right).
\end{aligned}$$

Por lo cual, se sigue de Teorema 2.0.7 que N, es una martingala cuadrado integrable. Esto termina la primera parte del teorema.

Sabiendo que si $X \sim \Gamma(a, b)$ entonces

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \left(\frac{b}{b - t}\right)^a \text{ para } t < b.$$

Usando (4.1.2) y el hecho de que cada T_i, por ser los tiempos de salto del proceso Poisson

N_P, se distribuye Gamma con parámetros (i, λ_P), para $k = 1, 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} U_{T_i}^k |S_{P,i}|^k\right] &= \mathbb{E}\left[|S_P|^k\right] \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[U_{T_i}^k\right] \\ &= \mathbb{E}\left[|S_P|^k\right] \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{-\mu_k T_i}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[|S_P|^k\right] \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_P}{\lambda_P + \mu_k}\right)^i < \infty, \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

si y solo si $\mu_k > 0$. Más aún

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t U_s^2 ds\right)^{1/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{n \leq s < n+1} U_s^2\right)^{1/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{n \leq s < n+1} U_s\right].$$

Ahora para $s > u$, U_u y U_s/U_u son independientes, y U_s/U_u tienen la misma distribución que U_{s-u}. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{n \leq s < n+1} U_s\right] &= \mathbb{E}\left[U_n\right] \mathbb{E}\left[\sup_{n \leq s < n+1} U_{s-n}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[U_n\right] \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s < 1} U_s\right]. \end{aligned}$$

Por (3.3.13) tenemos

$$\sup_{0 \leq s < 1} U_s \leq e^{\sigma_U B_1} \prod_{i=1}^{N_{U,1}} \left(S_{U,i} \vee 1\right).$$

Donde $B_t = \max_{0 \leq s < t} W_{U,s}$ y como $\mathbb{E}\left[e^{\sigma_U B_1}\right] < \infty$, por lo tanto, por independencia,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s < 1} U_s\right] = a < \infty. \tag{4.1.13}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\infty} U_s^2 ds\right)^{1/2}\right] \leq a \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu_1 n} < \infty, \quad \text{si y solo si} \quad \mu_1 > 0. \tag{4.1.14}$$

Combinando (4.1.9), (4.1.11), (4.1.12) y (4.1.14) se obtiene que $\mu_1 > 0$ implica $\mathbb{E}\left[N_\infty^*\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t} |N_t|\right] < \infty$, y por el Teorema 2.0.8 N es una martingala uniformemente integrable. Tenemos que $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty U_{s-}^2 ds\right]$ es finito ya que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} U_{s-}^2 ds\right] = \int_0^{\infty} e^{-\mu_2 s} ds < \infty.$$

De (4.1.2), (4.1.9), (4.1.10) y (4.1.12) vemos que $\mu_2 > 0$ implica $\mathbb{E}\left[V_\infty^2\right] < \infty$ y $\mathbb{E}\left[(N_\infty^*)^2\right] < \infty$. Esto termina la prueba del teorema.

■

Observación 4.1.1. Con la excepción de la aseveración final, el Teorema 4.1.1 se cumple bajo las condiciones más débiles $\mathbb{E}\left[|S_P|\right] < \infty$ y $\mathbb{E}\left[|S_U|\right] < \infty$.

Observación 4.1.2. De (4.1.2) vemos que si $\sigma_U^2 > 0$, entonces para k suficientemente grande el término $k\sigma_U^2$, será dominante en μ_k, por lo tanto $\mu_k < 0$ para todo $k \geq K$. Por (4.1.8) y cálculos similares a (4.1.6), esto implica que $\mathbb{E}\left[|Z_t|^k\right] \to \infty$ cuando $t \to \infty$, por lo tanto Z_∞, en el Teorema 4.1.1, solo puede tener un número finito de momentos finitos. El mismo argumento se aplica si $\lambda_U > 0$ dado que S_U tiene una probabilidad positiva de tomar valores mayores que uno.

En el resto del documento, siempre se supondrá $\mu_1 > 0$, sin indicarlo explícitamente todo el tiempo. También se supondrá que el modelo no está totalmente degenerado, es decir, supondremos que

1) σ_U^2 ó $\lambda_U > 0$ (Si $\lambda_U > 0$ entonces $F_U(\{1\}) = F_U(1) - F_U(1-) < 1$.)

   ó

2) σ_P^2 ó $\lambda_P > 0$ (Si $\lambda_P > 0$ entonces $F_P(\{1\}) = F_P(1) - F_P(1-) < 1$.)

Si ninguna de las condiciones anteriores se cumple, entonces te pierde toda la aleatoriedad en el modelo y estaríamos el caso del primer modelo propuesto (3.1.6), con la diferencia de que también se pierde lo aleatorio en el proceso P, por lo cual

$$Z_\infty = \int_0^\infty e^{-(r-\bar{i})s} dP_s = p\int_0^\infty e^{-(r-\bar{i})s} ds = \frac{p}{(r-\bar{i})}$$

En los documentos que tratan el problema clásico de la ruina, se cumple el supuesto 2), mientras que el supuesto 1) no se cumple.

Teorema 4.1.2. *Sea H la función de distribución de Z_∞, donde Z_∞, se da en el Teorema 4.1.1. Entonces H es continua y la probabilidad de ruina eventual está dada por*

$$R(y) = \frac{H(-y)}{\mathbb{E}\left[H(-Y_{T_R}) \mid T_R < \infty\right]}$$

Demostración: Por supuestos 1) y 2), el modelo no está totalmente degenerado, es fácil ver que H no está concentrado en un punto. Sea

$$V_t = U_{t-}^{-1} \int_t^\infty U_{s-} dP_s = \int_t^\infty \left(\frac{U_s}{U_t}\right)_- dP_s = \int_0^\infty \widetilde{U}_{s-} d\widetilde{P}_s \tag{4.1.15}$$

donde $\widetilde{U}_s = U_{s+t}/U_t \sim U_s$ y $\widetilde{P}_s = P_{t+s} - P_t \sim P_s$. Dado que $\bar{X} = (P, I, R)$ es un proceso de incrementos estacionarios e independientes, se deduce que tanto $\widetilde{U}_s$ como $\widetilde{P}_s$ son independientes de $\mathcal{F}_t$, por lo tanto V_t, es independiente de $\mathcal{F}_t$ y V_{T_R}, es independiente de $\mathcal{F}_{T_R}$ donde T_R es cualquier $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro. También se desprende de (4.1.15) que $V_t \sim Z_\infty$ y, por lo tanto, que $V_{T_R} \sim Z_\infty$. para cualquier $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro T_R.

Ahora, sea p la mayor probabilidad de cualquier punto de masa de Z_∞. Suponga que $\mathbb{P}\left[Z_\infty = c_i\right] = p$, $i = 1, \ldots, K$ y sea G_t la distribución de $U_{t-}^{-1}(c_1 - Z_t)$. Entonces como $Z_\infty = Z_t + U_{t-}V_t$ y ya que poner que V_t es independiente de $\mathcal{F}_t$

$$p = \mathbb{P}\left[Z_\infty = c_1\right] = \mathbb{P}\left[Z_t + U_{t-}V_t = c_1\right] = \mathbb{P}\left[V_t = U_{t-}^{-1}(c_1 - Z_t)\right] = \int_{\mathbb{R}} H(\{z\})dG_t(z),$$

lo que implica que $G_t(\{c_1, \ldots, c_K\}) = 1$ para todo t. Pero $Z_t \to Z_\infty$ c.s. y $U_t \to 0$ c.s. cuando $t \to \infty$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} H(\{c_1\}) = \mathbb{P}\left[Z_\infty = c_1\right] &= \mathbb{P}\left[Z_n + U_{n-}V_n = c_1\right] \\ &\geq \mathbb{P}\left[\limsup_n \left\{ Z_n = c_1 - U_{n-} \bigcup_{i=1}^{K} c_i \right\}\right] \\ &\geq \limsup_n \left\{ \mathbb{P}\left[Z_n = c_1 - U_{n-} \bigcup_{i=1}^{K} c_i \right] \right\} = 1, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, ya que H no está concentrado en un punto. Por lo tanto $p = 0$ y H es continua.

Tenemos $Y = U^{-1}\left(y + \int U_- dP\right)$, por lo cual $Y = U^{-1}(y + Z)$. Recordando que

$$T_R = \begin{cases} \inf\{t : Y_t < 0\} = \inf\{t : \bar{Y}_t < 0\}, & \\ \infty & \text{si} \quad Y_t \geq 0 \text{ para todo } t. \end{cases}$$

entonces en $\{T_R < \infty\}$ lo siguiente se cumple c.s.

$$\begin{aligned} y + Z_\infty &= y + Z_{T_R} + U_{T_R-}V_{T_R} \\ &= U_{T_R-}\left[U_{T_R-}^{-1}(y + Z_{T_R}) + V_{T_R}\right] \\ &= U_{T_R}\left[Y_{T_R} + V_{T_R}\right] \end{aligned}$$

ya que $\bar{I}_{T_R} = \bar{I}_{T_R-}$ y $\bar{R}_{T_R} = \bar{R}_{T_R-}$ c.s. Esto se debe a que $F_U(0) = 0$, por lo tanto, la ruina se producirá como resultado del comportamiento de P en el momento T_R, y se ha supuesto que P y (I, R) son independientes. Por lo tanto, por continuidad de H y por (4.1.1),

$$\begin{aligned} H(-y) &= \mathbb{P}\left[y + Z_\infty < 0\right] \\ &= \mathbb{P}\left[T_R < \infty, U_{T_R}\left[Y_{T_R} + V_{T_R}\right] < 0\right] \\ &= \mathbb{P}\left[T_R < \infty, V_{T_R} < -Y_{T_R}\right] \\ &= \int_{\{T_R<\infty\}} \mathbb{P}\left[V_{T_R} < -Y_{T_R} \mid \mathcal{F}_{T_R}\right] dP \\ &= \int_{\{T_R<\infty\}} H(-Y_{T_R}) dP \\ &= \mathbb{E}\left[H(-Y_{T_R}) \mid T_R < \infty\right] \mathbb{P}\left[T_R < \infty\right] \end{aligned}$$

La tercera igualdad se sigue ya que $U_t > 0$ para todo t, y la cuarta es solo la definición de probabilidad condicional. Tenga en cuenta que T_R es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro. La quinta igualdad sigue ya que V_{T_R}, es independiente de $\mathcal{F}_{T_R}$ y tiene la misma distribución que Z_∞ y Y_{T_R} es $\mathcal{F}_{T_R}$-medible.

■

Observación 4.1.3. En las Proposiciones 4.4.2 y 4.4.3 daremos las condiciones suficientes para garantizar que H es dos veces diferenciable continua, fortaleciendo así la primera parte del Teorema 4.1.2.

Definición 4.1.1. Decimos que S_P tiene *tasa de fracaso creciente* si

$$\mathbb{P}\left[S_P > t + s \mid S_P > t\right] \leq \mathbb{P}\left[S_P > s\right],$$

para todo $t, s > 0$.

Decimos que S_P tiene *tasa de fracaso decreciente* si

$$\mathbb{P}\left[S_P > t + s \mid S_P > t\right] \geq \mathbb{P}\left[S_P > s\right],$$

para todo $t, s > 0$.

Corolario 4.1.1. *Siempre se tiene que*

$$R(y) \leq \frac{H(-y)}{H(0)}$$

y la igualdad se da cuando $\lambda_P = 0$.

Si S_P *tiene tasa de fracaso creciente, entonces*

$$R(y) \geq \frac{H(-y)}{\mathbb{E}\left[H(S_P)\right]}$$

Si $\sigma_P^2 = 0$ y S_P tiene tasa de fracaso decreciente, entonces

$$R(y) \leq \frac{H(-y)}{\mathbb{E}\left[H(S_P)\right]}$$

con igualdad si S_P se distribuye exponencialmente.

Demostración:

- Primero supongamos que la ruina es causada por un reclamo $S_{P,N_{P,T_R}}$ y no por el término de deriva en $W_{P,t}$. Entonces por (3.2.3) y (3.2.4) tenemos c.s.

$$\begin{aligned} Y_t &= \bar{I}_t^{-1}\left(\bar{P}_t + \int_0^t \bar{Y}_{s-} dR_s\right) \\ &= \bar{I}_t^{-1}\bar{P}_t + \bar{I}_t^{-1}\left(\int_0^t \bar{Y}_{s-} dR_s\right) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \Delta Y_{T_R} &= \bar{I}_{T_R-}^{-1}\Delta \bar{P}_{T_R} \\ &= \Delta P_{T_R} \\ &= -S_{P,N_{P,T_R}} \end{aligned}$$

Supongamos S_P distribuido exponencialmente. Por definición de T_R

$$T_R = \begin{cases} \inf\{t : Y_t < 0\} = \inf\{t : \bar{Y}_t < 0\}, & \\ \infty & \text{si} \quad Y_t \geq 0 \text{ para todo } t. \end{cases}$$

entonces $Y_{T_R-} \geq 0$ y $Y_{T_R} < 0$, entonces tenemos que $S_{P,N_{P,T_R}} > Y_{T_R-}$. Pero entonces la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial implica que $-Y_{T_R}$ tiene la misma distribución que S_P, ya que

$$\mathbb{P}\left[-Y_{T_R} > s\right] = \mathbb{P}\left[S_P > s + Y_{T_R-} \mid S_P > Y_{T_R-}\right] = \mathbb{P}\left[S_P > s\right].$$

- Ahora, si S_p tiene tasa de fracaso creciente,

$$\mathbb{P}\left[S_P > t + s \mid S_P > t\right] \leq \mathbb{P}\left[S_P > s\right],$$

para todo $t, s > 0$, entonces

$$\mathbb{E}\left[H(-Y_{T_R}) \mid T_R < \infty\right] \leq \mathbb{E}\left[H(S_P)\right],$$

por lo cual

$$R(y) \geq \frac{H(-y)}{\mathbb{E}\left[H(S_P)\right]}.$$

• Ahora, si S_p tiene tasa de fracaso decreciente, es decir,

$$\mathbb{P}\left[S_P > t+s \mid S_P > t\right] \geq \mathbb{P}\left[S_P > s\right],$$

para todo $t, s > 0$, entonces

$$\mathbb{E}\left[H(-Y_{T_R}) \mid T_R < \infty\right] \geq \mathbb{E}\left[H(S_P)\right],$$

por lo cual

$$R(y) \leq \frac{H(-y)}{\mathbb{E}\left[H(S_P)\right]}.$$

Tenga en cuenta que una mezcla de tasas de fracaso decrecientes es nuevamente una tasa de fracaso decreciente.

• Si la ruina es causada por el término de deriva en $W_{P,t}$, entonces $-Y_{T_R} = 0$, entonces en este caso

$$R(y) = \frac{H(-y)}{H(0)}.$$

■

4.2. Función Característica

Tenemos que Z_∞ es solo un proceso de ingreso de tiempo infinito descontado aleatoriamente tal que $\mathbb{E}\left[Z_\infty\right] = \beta_P/\mu_1$ pueda considerarse como valor presente neto. Ahora se busca encontrar expresiones para H que es la distribución de Z_∞, para ello en esta sección primero obtendremos la forma de su función característica φ para que posteriormente podamos obtener una función explícita de H.

Definimos

$$\nu(u) = iup - \frac{1}{2}u^2\sigma_P^2 - \lambda_P[1 - \phi(-u)], \tag{4.2.1}$$

donde

$$\phi(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuS_P}\right]. \tag{4.2.2}$$

Esto implica que

$$\mathbb{E}\left[e^{iuP_t}\right] = e^{\nu(u)t}. \tag{4.2.3}$$

Definimos

$$\varphi(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuZ_\infty}\right]. \tag{4.2.4}$$

Proposición 4.2.1. *Usando lo anterior tenemos*

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^\infty \nu(uU_s)ds\right\}\right] \\ &= \mathbb{E}^u\left[\exp\left\{\int_0^\infty \nu(U_s)ds\right\}\right].\end{aligned}$$

Donde el la primera esperanza $U_0 = 1$, mientras que en la segunda $U_0 = u$.

Demostración: La igualdad de las dos esperanzas se deriva del hecho de que

$$U_s = U_0\left(\frac{U_s}{U_0}\right) = U_0\widetilde{U}_s,$$

donde $\widetilde{U}_0 = 1$ y $\widetilde{U}_s$ es independiente de U_0. Para probar la primera igualdad, sea $\mathcal{G} = \sigma\{U_s : s \geq 0\}$. Tenemos que las σ-álgebras $\mathcal{G}$ y $\sigma\{P_s : s \geq 0\}$ son independientes, ya que P es independiente de (I, R). Sea

$$\delta_k^{(n)} = k2^{-n}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1, \qquad t_k = t\delta_k^{(n)}, \qquad U_k = U_{t_k} \quad \text{y} \quad P_k = P_{t_k}.$$

Entonces por el Teorema 2.0.9

$$Z_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{2^n-1} U_k\left(P_{k+1} - P_k\right) \xrightarrow{P} Z_t \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

usando lo anterior y ya que $Z_t \to Z_\infty$ c.s. cuando $t \to \infty$, entonces

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{iuZ_t^{(n)}}\right] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{iuZ_t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{iuZ_\infty}\right] = \varphi(u).$$

Ahora

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left\{iuZ_t^{(n)}\right\}\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{iu\sum_{k=0}^{2^n-1} U_k\left(P_{k+1} - P_k\right)\right\}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left\{iu\sum_{k=0}^{2^n-1} U_k\left(P_{k+1} - P_k\right)\right\}\right] \mid \mathcal{G}\right].\end{aligned}$$

Por independencia entre U y P, y por (4.2.3)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left\{iuZ_t^{(n)}\right\}\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{k=0}^{2^n-1}\mathbb{E}\left[\exp\left\{iuU_k\left(P_{k+1}-P_k\right)\right\}\mid\mathcal{G}\right]\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{k=0}^{2^n-1}\exp\left\{\nu(uU_k)\left(t_{k+1}-t_k\right)\right\}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sum_{k=0}^{2^n-1}\nu(uU_k)\left(t_{k+1}-t_k\right)\right\}\right].\end{aligned}$$

Por (4.2.1) y (4.2.2) se tiene que $\mathrm{Re}(\nu(uU_k))\leq 0$, y como ν es continua, por el Teorema de convergencia dominada y, de nuevo, por el Teorema 2.0.9 tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\exp\left\{iuZ_t^{(n)}\right\}\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1}\nu(uU_k)\left(t_{k+1}-t_k\right)\right\}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^t\nu(uU_k)ds\right\}\right].\end{aligned}$$

Dejando $t\to\infty$ y por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\begin{aligned}\varphi(u)=\lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\exp\left\{iuZ_t^{(n)}\right\}\right] &= \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^t\nu(uU_k)ds\right\}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\lim_{t\to\infty}\int_0^t\nu(uU_k)ds\right\}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^\infty\nu(uU_k)ds\right\}\right]\\ &= \mathbb{E}^u\left[\exp\left\{\int_0^\infty\nu(U_s)ds\right\}\right].\end{aligned}$$

∎

De ahora en adelante, siempre supondremos que $\mu_2>0$.
Un problema con $\nu(u)$ es que no es acotada. Por eso definimos

$$\begin{aligned}u_n^+ &= \min\{u\geq 0:|\nu(u)|=n\},\\ u_n^- &= \max\{u\leq 0:|\nu(u)|=n\}\\ \nu_n(u) &= \nu([u\wedge u_n^+]\vee u_n^-).\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

Entonces $|\nu_n(u)|\leq n$ y $\nu_n(u)\to\nu(u)$ cuando $n\to\infty$. Definimos

$$\varphi_n(u)=\mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^\infty\nu_n(uU_s)ds\right\}\right].\tag{4.2.6}$$

Por simplicidad, definimos

$$\varphi^{(k)}(u) = \frac{d^k\varphi(u)}{du^k}, \qquad \text{con} \qquad \varphi^{(0)}(u) = \varphi(u),$$

$$\varphi_n^{(k)}(u) = \frac{d^k\varphi_n(u)}{du^k}, \qquad \text{con} \qquad \varphi_n^{(0)}(u) = \varphi(u).$$

Observación 4.2.1. Según el Teorema 4.1.1, si $\mu_2 > 0$ implica que $\mathbb{E}\left[Z_\infty^2\right] < \infty$. Por lo tanto, dado que φ es la función característica de Z_∞, el hecho de que φ tenga las siguientes propiedades se deriva de resultados estándar de las funciones características. Pero esto no se aplica a φ_n, por lo que el siguiente Lema es necesario. Algunos de los resultados obtenidos durante la prueba también se necesitarán más adelante.

Lema 4.2.1. *Sean φ , φ_n definidas como antes. Entonces $\varphi, \varphi_n \in \mathcal{C}^2$ (i.e. tienen segunda derivada continua), y existen constantes M_k, $k = 0, 1, 2$ de modo que $\forall u, n$*

$$|\varphi^{(k)}(u)| \vee |\varphi_n^{(k)}(u)| \leq M_k,$$

para $k = 0, 1, 2$.
También

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(k)}(u) = \varphi^{(k)}(u),$$

para $k = 0, 1, 2$.

Demostración: Usando que $|e^{-ix} - 1| \leq |x|$ tenemos por independencia de S_P y U_s, y por (4.2.2) que

$$\begin{aligned} |\phi(-uU_s) - 1| &= |\mathbb{E}\left[\exp\{-iuU_sS_P\} - 1 \mid U_s\right]| \\ &\leq |u|U_s\mathbb{E}\left[|S_P|\right] \end{aligned}$$

Y de manera similar

$$\left|\frac{d}{du}(\phi(-uU_s) - 1)\right| \leq U_s\mathbb{E}\left[|S_P|\right] \quad \text{y} \quad \left|\frac{d^2}{du^2}(\phi(-uU_s) - 1)\right| \leq U_s^2\mathbb{E}\left[|S_P^2|\right]$$

Entonces por lo anterior existe una constante $K > 0$ tal que por (4.2.1) se tiene

$$|\nu(uU_s)| \leq K|u|U_s + \frac{1}{2}\sigma_P^2u^2U_s^2, \tag{4.2.7}$$

$$\left|\frac{d}{du}\nu(uU_s)\right| \leq KU_s + \sigma_P^2|u|U_s^2, \tag{4.2.8}$$

$$\left|\frac{d^2}{du^2}\nu(uU_s)\right| \leq KU_s^2. \tag{4.2.9}$$

Por el supuesto de que $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty U_s^k ds\right] < \infty$, tenemos que $\int_0^\infty U_s^k ds < \infty$ c.s. para $k = 1, 2$, obtenemos por Billingsley (tercera edición, Teorema 16.8, p. 212),

$$\frac{d^k}{du^k}\int_0^\infty \nu(uU_s)ds = \int_0^\infty \frac{d^k}{du^k}\nu(uU_s)ds, \quad k = 1, 2. \tag{4.2.10}$$

Se puede probar que $\nu_n(uUs)$ es dos veces continuamente diferenciable en el conjunto $[u_n^-, u_n^+]$ (J. Paulsen, 1993). Entonces, si definimos

$$\frac{d}{du}\nu_n(uU_s) = \frac{d^2}{du^2}\nu_n(uU_s) = 0,$$

cuando $s \in N_u$, tenemos

$$|\nu_n(uU_s)| \leq \left(K|u|U_s + \frac{1}{2}\sigma_P^2 u^2 U_s^2\right) \wedge n, \tag{4.2.11}$$

$$\left|\frac{d}{du}\nu_n(uU_s)\right| \leq \left(KU_s + \sigma_P^2|u|U_s^2\right) \mathbb{1}_{[u_n^-, u_n^+]}(uU_s), \tag{4.2.12}$$

$$\left|\frac{d^2}{du^2}\nu_n(uU_s)\right| \leq \left(KU_s^2\right) \mathbb{1}_{[u_n^-, u_n^+]}(uU_s). \tag{4.2.13}$$

Sea $g_n(u) = \int_0^\infty \nu_n(uU_s)ds$. Entonces

$$\frac{g_n(u+h) - g_n(u)}{h} = \int_0^\infty \frac{\nu_n((u+h)U_s) - \nu_n(uU_s)}{h}ds, \tag{4.2.14}$$

y dado que $|\nu_n((u+h)U_s) - \nu_n(uU_s)| \leq |\nu((u+h)U_s) - \nu(uU_s)|$, tenemos por el teorema de convergencia dominada (como en Billingsley tercera edición, Teorema 16.8), el hecho de que $v_n(uU_s)$ es diferenciable en N_u^c y que $l(N_u) = 0$, que el límite cuando $h \to 0$ en el lado derecho de (4.2.14) existe y es el mismo si h se aproxima a cero desde abajo o arriba. Por lo tanto, $g_n'(u)$ existe, y (4.2.10) se aplica a ν_n, cuando $k = 1$. Del mismo modo, podemos probar que (4.2.10) se aplica a ν_n cuando $k = 2$.

Sea

$$X(u) = \exp\left\{\int_0^\infty \nu(uU_s)ds\right\}, \quad X_n(u) = \exp\left\{\int_0^\infty \nu_n(uU_s)ds\right\}. \tag{4.2.15}$$

Dado que $\mathrm{Re}(1 - \phi(-uU_s)) \geq 0$, tenemos

$$|X(u)| \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_P^2 u^2 \int_0^\infty U_s^2 ds\right\}, \tag{4.2.16}$$

y ya que por (4.2.5) tenemos que $\nu_n(uU_s) = \nu([uU_s \wedge u_n^+] \vee u_n^-)$

$$|X_n(u)| \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_P^2 u^2 \int_0^\infty U_s^2 \mathbb{1}_{[u_n^-, u_n^+]}(uU_s)ds\right\}, \tag{4.2.17}$$

por (4.2.10)

$$\begin{aligned} X'(u) &= \frac{d}{du}\exp\left\{\int_0^\infty \nu(uU_s)ds\right\} \\ &= X(u)\frac{d}{du}\int_0^\infty \nu(uU_s)ds \\ &= X(u)\int_0^\infty \frac{d}{du}\nu(uU_s)ds, \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

por (4.2.8) y (4.2.16) tenemos

$$\begin{aligned} |X'(u)| &\leq \int_0^\infty \left(KU_s + \sigma_P^2|u|U_s^2\right) ds \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_P^2 u^2 \int_0^\infty U_s^2 ds\right\} \\ &= K\int_0^\infty U_s ds \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_P^2 u^2 \int_0^\infty U_s^2 ds\right\} \\ &\quad + \int_0^\infty \sigma_P^2|u|U_s^2 ds \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_P^2 u^2 \int_0^\infty U_s^2 ds\right\} \\ &\leq K\int_0^\infty U_s ds + \int_0^\infty \sigma_P^2|u|U_s^2 ds \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_P^2 u^2 \int_0^\infty U_s^2 ds\right\} \\ &\leq K\int_0^\infty U_s ds + \sigma_P^2|u|\int_0^\infty U_s^2 ds \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_P^2 u^2 \int_0^\infty U_s^2 ds\right\}. \end{aligned}$$

Y dado que para $a > 0$ y $u \in \mathbb{R}$ se cumple la siguiente desigualdad

$$a|u|e^{-au^2} \leq e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{a}{2}}, \tag{4.2.19}$$

se obtiene por último

$$|X'(u)| \leq K\int_0^\infty U_s ds + e^{-\frac{1}{2}}\sigma_P\left(\int_0^\infty U_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2.20}$$

Utilizando (4.2.12) y (4.2.17), vemos que (4.2.20) es valido tambien para $|X_n'(u)|$ (remplazando U_s por $U_s\mathbb{1}_{[u_n^-, u_n^+]}(uU_s)$). Ya que $\varphi(u) = \mathbb{E}[X(u)]$ y $\varphi_n(u) = \mathbb{E}[X_n(u)]$, tenemos por el Teorema de convergencia dominada y por (4.2.20),

$$|\varphi'(u)| = \left|\frac{d}{du}\mathbb{E}[X(u)]\right| = |\mathbb{E}[X'(u)]| \leq \mathbb{E}[|X'(u)|] \leq M_1, \quad |\varphi_n'(u)| \leq M_1, \tag{4.2.21}$$

donde M_1 es alguna constante.

Para n suficientemente grande, $\nu_n(uU_s) = \nu(uU_s)$, entonces

$$\frac{d}{du}\nu_n(uU_s) \longrightarrow \frac{d}{du}\nu(uU_s) \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Por lo cual, por (4.2.12), (4.2.13), (4.2.18) (lo que es válido para X_n también), y por el Teorema de convergencia dominada

$$X_n(u) \longrightarrow X(u) \quad \text{y} \quad X_n'(u) \longrightarrow X'(u) \quad \text{c.s. cuando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Por (4.2.20) y teorema de convergencia dominada, esto implica

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \varphi_n'(u) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n'(u)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n'(u)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X'(u)\right] \\
&= \frac{d}{du}\mathbb{E}\left[X(u)\right] \\
&= \varphi'(u). \qquad (4.2.22)
\end{aligned}$$

Ahora por (4.2.10) y (4.2.18),

$$X''(u) = X(u)\left[\int_0^\infty \frac{d^2}{du^2}\nu(uU_s)ds + \left(\int_0^\infty \frac{d}{du}\nu(uU_s)ds\right)^2\right]. \qquad (4.2.23)$$

Así por (4.2.8), (4.2.9) y (4.2.16),

$$|X''(u)| \leq K\int_0^\infty U_s^2 ds + \left(K\int_0^\infty U_s ds + \sigma_P^2|u|\int_0^\infty U_s^2 ds\right)^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_P^2 u^2\int_0^\infty U_s^2 ds\right\}.$$

Dado que para $a, b > 0$ y $u \in \mathbb{R}$ se cumple la siguiente desigualdad por (4.2.19)

$$(a + 2b|u|)^2 e^{-bu^2} \leq a^2 + 2\sqrt{2b}e^{-\frac{1}{2}}a + 4b.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
|X''(u)| \;\leq\; & (K + 2\sigma_P^2)\int_0^\infty U_s^2 ds + K^2\left(\int_0^\infty U_s ds\right)^2 \\
& + 2e^{-\frac{1}{2}}K\sigma_P\left(\int_0^\infty U_s ds\right)\left(\int_0^\infty U_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.2.24)
\end{aligned}$$

por (4.2.24)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X''(u)|\right] &\leq \mathbb{E}\Bigg[(K-2\sigma_P^2)\int_0^\infty U_s^2 ds + K^2\left(\int_0^\infty U_s ds\right)^2 \\ &\quad +2e^{-\frac{1}{2}}K\sigma_P\left(\int_0^\infty U_s ds\right)\left(\int_0^\infty U_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg] \\ &= (K-2\sigma_P^2)\mathbb{E}\left[\int_0^\infty U_s^2 ds\right] + K^2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty U_s ds\right)^2\right] \\ &\quad +2e^{-\frac{1}{2}}K\sigma_P\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty U_s ds\right)\left(\int_0^\infty U_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right],\end{aligned}$$

aplicando desigualdad de Cauchy-Schwarz ($|\mathbb{E}[XY]|^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]$) en la última suma

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X''(u)|\right] &\leq (K-2\sigma_P^2)\mathbb{E}\left[\int_0^\infty U_s^2 ds\right] + K^2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty U_s ds\right)^2\right] \\ &\quad +2e^{-\frac{1}{2}}K\sigma_P\sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty U_s ds\right)^2\right]\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty U_s^2 ds\right)\right]} \\ &\leq (K-2\sigma_P^2)\int_0^\infty \mathbb{E}\left[U_s^2\right] ds + K^2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty U_s ds\right)^2\right] \\ &\quad +2e^{-\frac{1}{2}}K\sigma_P\sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty U_s ds\right)^2\right]\left(\int_0^\infty \mathbb{E}\left[U_s^2\right] ds\right)}.\end{aligned}$$

Entonces

$$|\varphi''(u)| = \left|\frac{d^2}{du^2}\mathbb{E}\left[X(u)\right]\right| = \left|\mathbb{E}\left[\frac{d^2}{du^2}X(u)\right]\right| \leq \mathbb{E}\left[|X''(u)|\right].$$

Ahora por (4.1.2), (4.1.6) la esperanza de todos los términos a la derecha son finitos, por lo tanto, para una constante M_2,

$$|\varphi''(u)| \leq M_2 \tag{4.2.25}$$

Al usar (4.2.11), (4.2.12),(4.2.13) y (4.2.17), vemos que (4.2.24) y por lo tanto (4.2.25) también son válidos para X_n. El hecho de que $\lim_{n\to\infty}\varphi_n''(u)(u) = \varphi''(u)$ sigue como en (4.2.22). Finalmente, de (4.2.23), (4.2.24) y teorema de convergencia dominada se desprende que $\varphi''(u)$ es continua.

■

Lema 4.2.2. *Sean ν_n y φ_n como en (4.2.5) y (4.2.6), y sea A el generador débil de U. Entonces $\varphi_n \in \mathscr{D}_A$ y es la solución de*

$$A\varphi_n = -\nu_n \varphi_n.$$

Demostración: Es fácil ver que U es un proceso estocásticamente continuo, conservativo de Feller por lo que, según Dynkin (1965, p. 58), el dominio $\mathscr{D}_A$ del generador débil A que consiste en todas las funciones la forma

$$R_\alpha g(u) = \mathbb{E}^u \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} g(U_t) dt \right],$$

donde $\alpha > 0$ y g es una función continua y acotada.
Sea $\alpha > 0$ y definimos

$$\begin{aligned} z(u) &= \mathbb{E}^u \left[\int_0^\infty \nu_n(U_t) \exp\left\{ -\alpha t - \int_0^t -(\alpha + \nu_n(U_s)) ds \right\} dt \right] \\ &= \mathbb{E}^u \left[\int_0^\infty \frac{d}{dt} \exp\left\{ \int_0^t \nu_n(U_s) ds \right\} dt \right] \\ &= \varphi_n(u) - 1. \end{aligned}$$

De lo cual por Lema 4.2.1, z es acotada.
Por (4.2.11) y $\mathrm{Re}(\nu_n(U_t)) > 0$,

$$\mathbb{E}^u \left[\int_0^\infty \int_0^t \left| e^{-\alpha t} \nu_n(U_t)(-\alpha - \nu_n(U_s)) \exp\left\{ - \int_s^t -(\alpha + \nu_n(U_u)) du \right\} \right| ds dt \right]$$
$$\leq (n+\alpha) \mathbb{E}^u \left[\int_0^\infty \int_0^t |\nu_n(U_t) e^{-\alpha s}| ds dt \right] \leq \frac{(n+\alpha)}{\alpha} \int_0^\infty \mathbb{E}^u \left[|\nu_n(U_t)| \right] dt < \infty.$$

Tenemos

$$
\begin{aligned}
& R_\alpha(-(\alpha+\nu_n)z)(u) \\
= \; & \mathbb{E}^u\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s}(-(\alpha+\nu_n)z)(U_s)ds\right] \\
= \; & \mathbb{E}^u\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s}(-(\alpha+\nu_n(U_s))z(U_s)ds\right] \\
= \; & \mathbb{E}^u\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s}(-(\alpha+\nu_n(U_s))\right. \\
& \quad \left.\mathbb{E}^{U_s}\left[\int_0^\infty \nu_n(U_t)\exp\left\{-\alpha t-\int_0^t -(\alpha+\nu_n(U_y))dy\right\}dt\right]ds\right] \\
= \; & \mathbb{E}^u\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s}(-(\alpha+\nu_n(U_s))\right. \\
& \quad \left.\mathbb{E}^{u}\left[\int_0^\infty \nu_n(U_{s+t})\exp\left\{-\alpha t-\int_0^t -(\alpha+\nu_n(U_{s+y}))dy\right\}dt \mid \mathcal{F}_s\right]ds\right] \\
= \; & \int_0^\infty \mathbb{E}^u\left[e^{-\alpha s}(-(\alpha+\nu_n(U_s))\int_0^\infty \nu_n(U_{s+t})\exp\left\{-\alpha t-\int_0^t -(\alpha+\nu_n(U_{s+y}))dy\right\}dt\right]ds \\
= \; & \int_0^\infty \mathbb{E}^u\left[(-(\alpha+\nu_n(U_s))\int_s^\infty \nu_n(U_t)\exp\left\{-\alpha t-\int_s^t -(\alpha+\nu_n(U_y))dy\right\}dt\right]ds \\
= \; & \mathbb{E}^u\left[\int_0^\infty (-(\alpha+\nu_n(U_s))\int_s^\infty \nu_n(U_t)\exp\left\{-\alpha t-\int_s^t -(\alpha+\nu_n(U_y))dy\right\}dtds\right] \\
= \; & \mathbb{E}^u\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\nu_n(U_t)\int_0^t (-(\alpha+\nu_n(U_s))\exp\left\{-\int_s^t -(\alpha+\nu_n(U_y))dy\right\}dsdt\right] \\
= \; & \mathbb{E}^u\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\nu_n(U_t)\left(1-\exp\left\{-\int_0^t -(\alpha+\nu_n(U_s))ds\right\}\right)dt\right] \\
= \; & \mathbb{E}^u\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\nu_n(U_t)dt\right]-\mathbb{E}^u\left[\int_0^\infty \nu_n(U_t)\exp\left\{-\alpha t-\int_0^t -(\alpha+\nu_n(U_s))ds\right\}dt\right] \\
= \; & R_\alpha\nu_n(u)-z(u).
\end{aligned}
$$

Por tanto, obtenemos

$$R_\alpha(-(\alpha+\nu_n)z)=R_\alpha\nu_n-z. \tag{4.2.26}$$

Al utilizar la fórmula de inversión (Dynkin [14], Teorema 1.7, pág. 40),

$$(\alpha-A)R_\alpha g=g$$

con $g=\nu_n$ y $g=-(\alpha+\nu_n)z$.

Usando que $g=-(\alpha+\nu_n)z$ en (4.2.26) y finalmente restando las dos expresiones, obtenemos

$$A(\varphi_n-1)=(\alpha-(\alpha+\nu_n))(\varphi_n-1)-\nu_n.$$

Usando que $A1 = 0$ da el resultado deseado.

■

Denotaremos por $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones acotadas dos veces continuamente diferenciables con una primera y segunda derivadas acotadas. Para tales funciones tenemos:

Lema 4.2.3. *El operador integro-diferencial L definido por*

$$Lf(u) = \frac{1}{2}\sigma_U^2 u^2 f''(u) - \left(\alpha_U - \frac{1}{2}\sigma_U^2\right) uf'(u) + \lambda_U \int_0^\infty (f(us) - f(u))dF_U(s), \quad (4.2.27)$$

es igual al generador débil A de U en $\mathscr{D}_A \cap \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$. Aquí α_U y σ_U^2 son como en (3.3.11)

$$\alpha_U = r - \bar{i} - \frac{1}{2}(\sigma_R^2 - \sigma_I^2), \quad \sigma_U^2 = \sigma_I^2 - 2\rho\sigma_I\sigma_R + \sigma_R^2.$$

Demostración: Como en (3.1.1) y (3.3.9) tenemos que U (ver (3.3.13)) es la solución de

$$dU_t = U_{t-}dS_t \quad \text{donde} \quad U_0 = u. \quad (4.2.28)$$

Aquí

$$S_t = a_U t + \sigma_U W_{U,t} + \sum_{i=1}^{N_{U,t}} (S_{U,i} - 1),$$

donde $a_U = -\left(\alpha_U - \frac{1}{2}\sigma_U^2\right)$ y $W_{U,t}$ es un movimiento Browniano. Por la Fórmula de Itô 2.0.3 y (4.2.28) tenemos

$$\begin{aligned}
f(U_t) - f(u) &= \int_0^t f'(U_{s-})dU_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(U_{s-})d\langle U^c, U^c\rangle_s \\
&\quad + \sum_{0\le s\le t} [f(U_s) - f(U_{s-}) - f'(U_{s-})\Delta U_s] \\
&= \int_0^t f'(U_{s-})U_{s-}dS_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(U_{s-})\sigma_U^2 U_{s-}^2 ds \\
&\quad + \sum_{0\le s\le t} [f(U_s) - f(U_{s-}) - f'(U_{s-})\Delta U_s] \\
&= \int_0^t f'(U_{s-})U_{s-}a_U ds + \int_0^t f'(U_{s-})U_{s-}\sigma_U dW_{U,s} + \sum_{0\le s\le t} f'(U_{s-})U_{s-}\Delta S_s \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f''(U_{s-})\sigma_U^2 U_{s-}^2 ds + \sum_{0\le s\le t} [f(U_s) - f(U_{s-}) - f'(U_{s-})\Delta U_s] \\
&= \int_0^t \left(f'(U_{s-})U_{s-}a_U + \frac{1}{2}f''(U_{s-})\sigma_U^2 U_{s-}^2\right) ds + \int_0^t f'(U_{s-})U_{s-}\sigma_U dW_{U,s} \\
&\quad + \sum_{0\le s\le t} f'(U_{s-})\Delta U_s + \sum_{0\le s\le t} [f(U_s) - f(U_{s-}) - f'(U_{s-})\Delta U_s].
\end{aligned}$$

Por lo cual tenemos

$$\begin{aligned} f(U_t)-f(u) &= \int_0^t \left(f'(U_{s-})U_{s-}a_U + \frac{1}{2}f''(U_{s-})\sigma_U^2 U_{s-}^2 \right) ds + \int_0^t f'(U_{s-})U_{s-}\sigma_U dW_{U,s} \\ &\quad + \sum_{0\le s\le t} \left[f(U_s) - f(U_{s-}) \right]. \end{aligned} \tag{4.2.29}$$

Ya que f' es acotada y $\mathbb{E}\left[\int_0^t U_s^2 ds\right] < \infty$, tenemos que $\int_0^t f'(U_{s-})U_{s-}dW_{U,s}$ es martingala y por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t f'(U_{s-})U_{s-}dW_{U,s}\right] = 0. \tag{4.2.30}$$

Ahora sea c una constante tal que $|a_u f'(x)| + \left|\frac{1}{2}\sigma_U^2 f''(x)\right| \le c$ para toda x. Sea $r > 0$ dado, entonces

$$\sup_{0\le t\le r}\left| \frac{1}{t}\int_0^t \left(f'(U_{s-})U_{s-}a_U + \frac{1}{2}f''(U_{s-})\sigma_U^2 U_{s-}^2 \right) ds \right| \le c \sup_{0\le t\le r}(U_t + U_t^2).$$

De manera similar a como se hizo para (4.1.13) tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le r} U_t^2\right] < \infty.$$

Por lo cual por el Teorema de convergencia dominada, la continuidad de f' y f'', continuidad estocástica de U_t, (4.2.29) y (4.2.30),

$$\begin{aligned} Af(u) &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}^u\left[\frac{1}{t}\left(f(U_t) - f(u)\right)\right] \\ &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}^u\left[\frac{1}{t}\left(\int_0^t \left(f'(U_{s-})U_{s-}a_U + \frac{1}{2}f''(U_{s-})\sigma_U^2 U_{s-}^2 \right) ds \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \int_0^t f'(U_{s-})U_{s-}\sigma_U dW_{U,s} + \sum_{0\le s\le t}\left[f(U_s) - f(U_{s-})\right]\right)\right] \\ &= \mathbb{E}^u\left[\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left(\int_0^t \left(f'(U_{s-})U_{s-}a_U + \frac{1}{2}f''(U_{s-})\sigma_U^2 U_{s-}^2 \right) ds\right)\right] \\ &\quad + \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}^u\left[\frac{1}{t}\left(\sum_{0\le s\le t}\left[f(U_s) - f(U_{s-})\right]\right)\right] \\ &= \mathbb{E}^u\left[f'(u)ua_U + \frac{1}{2}f''(u)\sigma_U^2 u^2\right] + \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}^u\left[\frac{1}{t}\sum_{0\le s\le t}\left[f(U_s) - f(U_{s-})\right]\right] \\ &= \frac{1}{2}\sigma_U^2 u^2 f''(u) - \left(\alpha_U - \frac{1}{2}\sigma_U^2\right) uf'(u) + \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}^u\left[\frac{1}{t}\sum_{0\le s\le t}\left[f(U_s) - f(U_{s-})\right]\right]. \end{aligned}$$

Para terminar, ya que $\mathbb{P}\left[N_{U,t} \geq 2\right] = \mathrm{o}(t)$ y f es acotada, se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}^u \left[\frac{1}{t} \sum_{0\leq s\leq t} [f(U_s) - f(U_{s-})]\right] &= \lambda_U \mathbb{E}\left[f(uS_U) - f(u)\right] \\ &= \lambda_U \int_0^\infty [f(us) - f(u)] dF_U(s). \end{aligned}$$

lo cual termina la demostración.

■

Observación 4.2.2. Si $\sum_{i=1}^{N_{R,t}} \widetilde{S}_{R,i}$ y $\sum_{i=1}^{N_{I,t}} \widetilde{S}_{I,i}$ son independientes, utilizando Lema 3.3.1 y un cambio de variable en la integral en (4.2.27), se verifica fácilmente que Lf puede escribirse alternativamente como

$$\begin{aligned} Lf(u) &= \frac{1}{2}\sigma_U^2 u^2 f''(u) - \left(\alpha_U - \frac{1}{2}\sigma_U^2\right) uf'(u) + \lambda_U \int_0^\infty (f(us) - f(u)) dF_U(s) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_U^2 u^2 f''(u) - \left(\alpha_U - \frac{1}{2}\sigma_U^2\right) uf'(u) \\ &\quad + \lambda_I \int_0^\infty (f(us) - f(u)) dF_I(s) + \lambda_R \int_0^\infty \left(f\left(\frac{u}{s}\right) - f(u)\right) dF_R(s). \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Teorema 4.2.1. *Sea ν y φ como en (4.2.1) y (4.2.4) respectivamente. Entonces φ es la solución de*

$$L\varphi(u) = -\nu(u)\varphi(u), \tag{4.2.32}$$

donde L está dado por (4.2.27) (ó (4.2.31) cuando aplique). Con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 1, \\ \varphi'(0) &= i\mathbb{E}\left[Z_\infty\right] = i\frac{\beta_P}{\mu_1}. \end{aligned}$$

Demostración: Por el Lema 4.2.1, tanto φ_n como φ pertenecen $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$. Por Lema 4.2.2 $\varphi_n \in \mathscr{D}_A$ y por Lema 4.2.3 $A\varphi_n = L\varphi_n$ donde $L\varphi_n$ es dada en (4.2.27) (ó (4.2.31) cuando aplique) con f reemplazada por φ_n.
Entonces por Lema 4.2.1 y el teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\begin{aligned} L\varphi_n(u) \to L\varphi(u) \qquad &\text{cuando} \quad n \to \infty, \\ \nu_n(u)\varphi_n(u) \to \nu(u)\varphi(u) \qquad &\text{cuando} \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

por lo cual por Lema 4.2.2

$$L\varphi(u) = -\nu(u)\varphi(u).$$

Ahora por el Teorema 4.1.1 y teorema de convergencia dominada

$$\varphi'(u) = \frac{d}{du}\mathbb{E}\left[e^{iuZ_\infty}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{du}e^{iuZ_\infty}\right] = \mathbb{E}\left[iuZ_\infty e^{iuZ_\infty}\right].$$

Por lo cual, por el Teorema 4.1.1

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \mathbb{E}\left[e^{i(0)Z_\infty}\right] = 1\\ \varphi'(0) &= \mathbb{E}\left[iZ_\infty e^{i(0)Z_\infty}\right] = i\frac{\beta_P}{\mu_1}.\end{aligned}$$

■

4.3. Ecuación para Función de Distribución

El Teorema 4.2.1 nos da una ecuación para la función característica φ de Z_∞. Pero como queremos usar el Teorema 4.1.2 y el Corolario 4.1.1, estamos más interesados en la función de distribución H de Z_∞. El siguiente teorema nos da una ecuación para obtener H.

Teorema 4.3.1. *Supongamos:*

(A1) *Si* $\sigma_U^2 > 0$ *ó* $\sigma_P^2 > 0$, *entonces* $\int_{\mathbb{R}} |u\varphi(u)|du < \infty$.

De lo contrario es suficiente que

$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(u)|du < \infty$.

(A2) $\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(u)|du < \infty$.

(A3) $\mathbb{E}\left[|\log(S_U)|\right] < \infty$.

Entonces la función de distribución H *de* Z_∞, *es dos veces continuamente diferenciable y es la solución de*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\sigma_U^2 z^2 + \sigma_P^2)H''(z) + \left(\left(\alpha_U + \frac{1}{2}\sigma_U^2\right)z - p\right)H'(z) - (\lambda_U + \lambda_P)H(z)&\\ +\lambda_U\int_0^\infty H\left(\frac{z}{s}\right)dF_U(s) + \lambda_P\int_{\mathbb{R}} H(z+s)dF_P(s) &= 0. \quad (4.3.1)\end{aligned}$$

Con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned}H(-\infty) &= 0,\\ H(\infty) &= 1.\end{aligned}$$

También se tiene que

$$\int_{-\infty}^{0} H(z)dz + \int_{0}^{\infty}(1 - H(z))dz = \frac{\beta_P}{\mu_1}. \tag{4.3.2}$$

Si $\sigma_U^2 = \sigma_P^2 = 0$ la versión más débil de (A1) es suficiente, y en ese caso H es la solución, una vez continuamente diferenciable de (4.3.1).

Demostración: Por ahora supondremos que en el caso en que $\sigma_U^2 > 0$, entonces (A1), (A2), y (A3) implican que

$$\int_{\mathbb{R}} |u\varphi''(u)|du < \infty. \tag{4.3.3}$$

Ya que por (A1) y Proposición 2.0.1, con $a = z + h$

$$H(z) - H(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi(u)\frac{e^{-iua} - e^{-iuz}}{iu}du. \tag{4.3.4}$$

Por lo que si hacemos $a \to -\infty$ tenemos

$$H(z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}} \varphi(u)\frac{e^{-iua} - e^{-iuz}}{iu}du. \tag{4.3.5}$$

Entonces por el Lema de Riemann-Lebesgue (Feller, [11]) y (4.3.5)

$$H(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi(u)\frac{e^{-iuz}}{-iu}du = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{z}^{\infty} e^{-iut}dt\varphi(u)du.$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dz}H(z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-iuz}\varphi(u)du.$$

Ahora de (4.2.32) desarrollamos

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{e^{-iua} - e^{-iuz}}{2\pi iu}\right)L\varphi(u)du = -\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{e^{-iua} - e^{-iuz}}{2\pi iu}\right)\nu(u)\varphi(u)du. \tag{4.3.6}$$

Por lo cual de (4.2.27) el lado izquierdo de (4.3.6) es igual a

$$\begin{aligned}\lim_{a\to-\infty} \quad & \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{e^{-iua} - e^{-iuz}}{2\pi iu}\right) \\ & \times\left[\frac{1}{2}\sigma_U^2u^2\varphi''(u) - \left(\alpha_U - \frac{1}{2}\sigma_U^2\right)u\varphi'(u)\right. \\ & \qquad \left. + \lambda_U\int_0^{\infty}(\varphi(us) - \varphi(u))dF_U(s)\right]du. \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Desarrollaremos el límite de cada sumando de (4.3.7), para el primero tenemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{2\pi iu}\right)\left[\frac{1}{2}\sigma_U^2u^2\varphi''(u)\right]du &= \frac{\sigma_U^2}{4\pi}\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{iu}\right)\left[u^2\varphi''(u)\right]du\\
&= \frac{\sigma_U^2}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}i^2\left(\frac{e^{-iuz}}{i}\right)u\varphi''(u)du\\
&= \frac{\sigma_U^2}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(-\frac{d}{dz}e^{-iuz}\right)\varphi''(u)du\\
&= -\frac{\sigma_U^2}{4\pi}i\frac{d}{dz}\left(z\int_{\mathbb{R}}e^{-iuz}\varphi'(u)du\right)\\
&= \frac{\sigma_U^2}{4\pi}\frac{d}{dz}\left(z^2\int_{\mathbb{R}}e^{-iuz}\varphi(u)du\right)\\
&= \frac{\sigma_U^2}{4\pi}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{d}{dz}(2\pi H(z))\right)\\
&= \frac{\sigma_U^2}{4\pi}\left(2\pi\left(z^2H''(z)+2zH'(z)\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\sigma_U^2z^2H''(z)+\sigma_U^2zH'(z). \qquad (4.3.8)
\end{aligned}
$$

La primera igualdad se sigue del Lema Riemann-Lebesgue (Feller, [11]) y (4.3.3). Para la 4ta y 5ta igualdad se utilizó integración por partes.

Para el segundo sumando de (4.3.7), usando (A1), (A2), (4.3.3)

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{2\pi iu}\right)\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_U^2-\alpha_U\right)u\varphi'(u)\right]du &= \frac{\sigma_U^2-2\alpha_U}{4\pi}\\
&\qquad \lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{iu}\right)u\varphi'(u)du\\
&= \frac{\sigma_U^2-2\alpha_U}{4\pi}i\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-iuz}\right)\varphi'(u)du\\
&= \frac{2\alpha_U-\sigma_U^2}{4\pi}z\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-iuz}\right)\varphi(u)du\\
&= \frac{2\alpha_U-\sigma_U^2}{4\pi}z\left(\frac{d}{dz}(2\pi H(z))\right)\\
&= \frac{2\alpha_U-\sigma_U^2}{4\pi}z\left(2\pi H'(z)\right)\\
&= \alpha_UzH'(z)-\frac{1}{2}\sigma_U^2zH'(z). \qquad (4.3.9)
\end{aligned}
$$

Ahora demostraremos que

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^{\infty}\left|\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{iu}\varphi(us)\right|dF_U(s)du \leq \infty. \tag{4.3.10}$$

Para alguna constante c tenemos que

$$\left|\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{iu}\right| \leq c,$$

para todo u, y dado que $|\varphi(u)| \leq 1$ entonces

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\infty}\left|\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{iu}\varphi(us)\right|dF_U(s)du \leq 2c.$$

Por el Teorema de Fubini 2.0.1 y cambio de variable, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty}\int_0^{\infty}\left|\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{iu}\varphi(us)\right|dF_U(s) &\leq 2\int_0^{\infty}\int_1^{\infty}\left|\frac{\varphi(us)}{u}\right|dudF_U(s)\\
&= 2\int_0^{\infty}\int_s^{\infty}\left|\frac{\varphi(v)}{v}\right|dvdF_U(s)\\
&= 2\int_0^{\infty}\int_0^{v}\left|\frac{\varphi(v)}{v}\right|dF_U(s)dv\\
&\leq 2\int_0^{1}\int_0^{v}\frac{1}{v}dF_U(s)dv + 2\int_1^{\infty}\left|\frac{\varphi(v)}{v}\right|F_U(v)dv\\
&\leq 2\int_0^{1}\int_s^{1}\frac{1}{v}dvdF_U(s) + 2\int_1^{\infty}\left|\frac{\varphi(v)}{v}\right|dv\\
&= 2\mathbb{E}\left[\log(S_U\wedge 1)\right] + 2\int_1^{\infty}\left|\frac{\varphi(v)}{v}\right|dv\\
&< \infty,
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

ya que $\mathbb{E}\left[|\log(S_U\wedge 1)|\right]$ es finita por (A3). La integral de $-\infty$ a -1 en (4.3.10) se desarrolla similar a (4.3.11).

Para el primer sumando de la doble integral de (4.3.7), por (4.3.4) y (4.3.3) tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{iu}\varphi(us)dF_U(s)du &= \lim_{a\to-\infty}\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{iu}\varphi(us)dudF_U(s)\\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{iua}{s}}-e^{-\frac{iuz}{s}}}{iv}\varphi(v)dvdF_U(s)\\
&= 2\pi\lim_{a\to-\infty}\int_0^{\infty}\left(H\left(\frac{z}{s}\right)-H\left(\frac{a}{s}\right)\right)dF_U(s)\\
&= 2\pi\int_0^{\infty}H\left(\frac{z}{s}\right)dF_U(s),
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se da por el Teorema de Fubini 2.0.1 y (4.3.10), la segunda igualdad se obtiene por medio del cambio de variable $v = us$ y la última por convergencia monótona. Por lo cual

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{2\pi iu}\lambda_U\int_0^\infty\varphi(us)dF_U(s)du = \lambda_U\int_0^\infty H\left(\frac{z}{s}\right)dF_U(s). \tag{4.3.12}$$

Ahora, por el desarrollo anterior, tenemos directamente

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{iu}\varphi(u)dF_U(s)du = 2\pi H\left(z\right)\int_0^\infty dF_U(s),$$

por lo cual (ver (3.3.14)) el segundo sumando de la doble integral de (4.3.7) es

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{2\pi iu}\int_0^\infty(-\lambda_U)\varphi(u)dF_U(s)du = -\lambda_U H\left(z\right). \tag{4.3.13}$$

Para finalizar los cálculos del lado izquierdo de (4.3.6), al juntar (4.3.8), (4.3.9), (4.3.12) y (4.3.13), tenemos que (4.3.7) es igual a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sigma_U^2 z^2 H''(z)+\sigma_U^2 zH'(z)+\alpha_U zH'(z)-\frac{1}{2}\sigma_U^2 zH'(z)\\ &\qquad\qquad +\lambda_U\int_0^\infty H\left(\frac{z}{s}\right)dF_U(s)-\lambda_U H\left(z\right)\quad .\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Ahora por (4.2.1) el lado derecho de (4.3.6) es igual a

$$-\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{2\pi iu}\right)\left(iup-\frac{1}{2}u^2\sigma_P^2-\lambda_P[1-\phi(-u)]\right)\varphi(u)du. \tag{4.3.15}$$

De la misma forma que para (4.3.8), para el primer término de (4.3.15) tenemos

$$\begin{aligned}-\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{2\pi iu}\right)[iup\varphi(u)]\,du &= \frac{p}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-iuz}\varphi(u)du\\ &= p\left(\frac{d}{dz}(H(z))\right)\\ &= pH'(z),\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

para el segundo término

$$\begin{aligned}
-\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{2\pi iu}\right)\left[\frac{1}{2}u^2\sigma_P^2\varphi(u)\right]du &= \frac{\sigma_P^2}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} i^2\left(\frac{e^{-iuz}}{i}\right)u\varphi(u)du \\
&= \frac{\sigma_P^2}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(-\frac{d}{dz}e^{-iuz}\right)\varphi(u)du \\
&= -\frac{\sigma_P^2}{4\pi}\frac{d}{dz}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iuz}\varphi(u)du\right) \\
&= -\frac{\sigma_P^2}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dz}(2\pi H(z))\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sigma_P^2 H''(z). \qquad (4.3.17)
\end{aligned}$$

Para el tercer término de (4.3.15)

$$-\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{2\pi iu}(-\lambda_P)\varphi(u)du = \lambda_P H\left(z\right). \qquad (4.3.18)$$

Tambien tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{iu}e^{-ius}\varphi(u)\right|dF_P(s)du < \infty.$$

Por lo tanto, por el Teorema de Fubini 2.0.1, por convergencia monótona y recordando $\phi(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuS_P}\right]$,

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{2\pi iu}\phi(-u)\varphi(u)du &= \lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{2\pi iu}\varphi(u)\int_{\mathbb{R}} e^{-ius}dF_P(s)du \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-iu(a+s)}-e^{-iu(z+s)}}{2\pi iu}\varphi(u)dudF_P(s) \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}(H(z+s)-H(a+s))dF_P(s) \\
&= \int_{\mathbb{R}} H(z+s)dF_P(s),
\end{aligned}$$

por lo que el ultimo termino de (4.3.15) es

$$-\lim_{a\to-\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-iua}-e^{-iuz}}{2\pi iu}\lambda_P\phi(-u)\varphi(u)du = -\lambda_P\int_{\mathbb{R}} H(z+s)dF_P(s). \qquad (4.3.19)$$

Para finalizar con el lado derecho de (4.3.6), al juntar (4.3.16), (4.3.17), (4.3.18) y (4.3.19), tenemos que (4.3.15) es igual a

$$pH'(z) - \frac{1}{2}\sigma_P^2 H''(z) + \lambda_P H\left(z\right) - \lambda_P\int_{\mathbb{R}} H(z+s)dF_P(s). \qquad (4.3.20)$$

Por lo cual si en (4.3.6) sustituimos (4.3.14) y (4.3.20), obtenemos (4.3.1).

La expresión en (4.3.2) es solo $\mathbb{E}[Z_\infty] = \beta_P/\mu_1$.

Sólo queda por demostrar (4.3.3). Entonces dividimos (4.2.32) por $\frac{1}{2}\sigma_U^2|u|$ donde L se define en (4.2.27). Por lo que por el lado izquierdo tenemos

$$\frac{2}{\sigma_U^2|u|}\left[\frac{1}{2}\sigma_U^2 u^2\varphi''(u) - \left(\alpha_U - \frac{1}{2}\sigma_U^2\right)u\varphi'(u) + \lambda_U\int_0^\infty(\varphi(us)-\varphi(u))dF_U(s)\right]$$
$$= u\varphi''(u) - \left(\frac{2\alpha_U}{\sigma_U^2} - 1\right)\varphi'(u) + \frac{2\lambda_U}{\sigma_U^2}\int_0^\infty\left(\frac{\varphi(us)-\varphi(u)}{|u|}\right)dF_U(s),$$

y por el lado derecho

$$-\frac{2}{\sigma_U^2}\frac{\nu(u)}{|u|}\varphi(u).$$

Tomamos valor absoluto, usamos la desigualdad del triángulo e integramos sobre todo $\mathbb{R}$. Entonces para algunas constantes c_1, c_2 y c_3,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|u\varphi''(u)|du &\leq c_1\int_{\mathbb{R}}|\varphi'(u)|du + c_2\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\nu(u)}{u}\right||\varphi(u)|du \\ &\quad + c_3\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty\left|\frac{\varphi(us)-\varphi(u)}{u}\right|dF_U(s)du. \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

La primera integral a la derecha es finita por (A2). Por (4.2.7)

$$\left|\frac{\nu(u)}{u}\right| \leq K + \frac{1}{2}\sigma_U^2|u|,$$

por lo tanto, la segunda integral es finita por (A1).

Para la tercera integral en el lado derecho, de Feller [11], fórmula (4.14), p. 514,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\int_0^\infty\left|\frac{\varphi(us)-\varphi(u)}{u}\right|dF_U(s)du &\leq \frac{\beta_P}{\mu_1}\int_{-1}^1\int_0^\infty|s-1|\,dF_U(s)du \\ &\leq 2\frac{\beta_P}{\mu_1}\left(1+\mathbb{E}[S_U]\right) < \infty.\end{aligned}$$

Más aún

$$\int_1^\infty\int_0^\infty\left|\frac{\varphi(us)-\varphi(u)}{u}\right|dF_U(s)du \leq \int_1^\infty\int_0^\infty\left|\frac{\varphi(us)}{u}\right|dF_U(s)du + \int_1^\infty\left|\frac{\varphi(u)}{u}\right|du.$$

La primera integral de la izquierda es finita por (4.3.11) y la segunda es finita por (A1). La integral de ∞ a -1 es similar, por lo que sigue que la tercera integral a la derecha de (4.3.21) es finita.

■

Observación 4.3.1. Si $\sum_{i=1}^{N_{I,t}} \widetilde{S}_{I,i}$ y $\sum_{i=1}^{N_{R,t}} \widetilde{S}_{R,i}$ son independientes, usando (4.2.31) en lugar de (4.2.27) encontramos que (4.3.1) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\sigma_U^2 z^2 + \sigma_P^2)H''(z) + \left(\left(\alpha_U + \frac{1}{2}\sigma_U^2\right) z - p\right) H'(z) - (\lambda_R + \lambda_I + \lambda_P)\, H(z) & \\ +\lambda_R \int_0^\infty H\,(zs)\, dF_R(s) + \lambda_I \int_0^\infty H\left(\frac{z}{s}\right) dF_I(s) + \lambda_P \int_{\mathbb{R}} H(z+s) dF_P(s) &= 0.\end{aligned}$$

Proposición 4.3.1. *Supongamos:*

(B1) *Si* $\sigma_U^2 > 0$ *ó* $\sigma_P^2 > 0$, *entonces* $\int_{\mathbb{R}} |u^2\varphi(u)|du < \infty$.

De lo contrario es suficiente que

$\int_{\mathbb{R}} |u\varphi(u)|du < \infty.$

(B2) $\int_{\mathbb{R}} |u\varphi'(u)|du < \infty$.

(B3) $\mathbb{E}\left[\frac{1}{S_U}\right] < \infty$.

Entonces Z_∞ *tiene función de densidad* h, *la cual es dos veces continuamente diferenciable y es la solución de*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\sigma_U^2 z^2 + \sigma_P^2)h''(z) + \left(\left(\alpha_U + \frac{3}{2}\sigma_U^2\right) z - p\right) h'(z) + \left(\alpha_U + \frac{1}{2}\sigma_U^2 - \lambda_U - \lambda_P\right) h(z) & \\ +\lambda_U \int_0^\infty h\left(\frac{z}{s}\right) dF_U(s) + \lambda_P \int_{\mathbb{R}} h(z+s) dF_P(s) &= 0.\end{aligned}$$

Con las condiciones

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(z)dz, &= 1,\\ h(z) &\geq 0,\end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{R}$. *También se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}} zh(z)dz = \frac{\beta_P}{\mu_1}.$$

Demostración: Esta prueba se sigue de la misma manera que en el Teorema 4.3.1.

■

4.4. Casos Particulares

En esta sección comenzaremos mostrando un caso en que las reclamaciones se distribuyen de manera exponencial.
Posteriormente nos enfocaremos en encontrar algunas condiciones más fuertes con las cuales (A1) y (A2), del Teorema 4.3.1, se satisfacen. Presentaremos los resultados, de uno bastante general para terminar con un resultado más particular.
Terminaremos la sesión presentando un ejemplo donde aplicaremos las técnicas obtenidas a lo largo de este capítulo.

Proposición 4.4.1. *Supongamos que las reclamaciones se distribuyen exponencialmente con la esperanza μ^{-1}, es decir, $F_P(s) = (1 - e^{-\mu s})\mathbb{1}_{\{0<s\}}$. Supongamos también que $\sigma_P^2 = 0$ y que* (A1) - (A3) *de Teorema 4.3.1 se satisfacen.*
Sea

$$V(\mu) = \mathbb{E}\left[H(Y_{T_R}) \mid T_R < \infty\right] = \mathbb{E}\left[H(S_P)\right] = \int_0^\infty H(z)\mu e^{-\mu z} dz.$$

(Ver Teorema 4.1.2 y Corolario 4.1.1 para notación.)
Entonces $V(\mu)$ es dos veces continuamente diferenciable y es la solución de

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_U^2\mu^2 V''(\mu) - \left(\alpha_U - \frac{1}{2}\sigma_U^2 + \lambda_P\right)\mu V'(\mu) & \\ - \left(p\mu + \lambda_U\right) V(\mu) + \lambda_U \int_0^\infty V\left(\mu s\right) dF_U(s) &= -p\mu H(0). \end{aligned}$$

Con condiciones de frontera $V(0) = 1$ y $V(\infty) = H(0)$.

Demostración: De (4.3.1) y dado que $\sigma_P^2 = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mu e^{-\mu z}\frac{1}{2}\sigma_U^2 z^2 H''(z)dz + \int_0^\infty \mu e^{-\mu z}\left(\left(\alpha_U + \frac{1}{2}\sigma_U^2\right)z - p\right)H'(z)dz & \\ - \int_0^\infty \mu e^{-\mu z}\left(\lambda_U + \lambda_P\right)H(z)dz + \int_0^\infty \mu e^{-\mu z}\lambda_U \int_0^\infty H\left(\frac{z}{s}\right)dF_U(s)dz & \\ + \int_0^\infty \mu e^{-\mu z}\lambda_P \int_{\mathbb{R}} H(z+s)dF_P(s)dz &= 0. \end{aligned}$$

Los cálculos son muy similares a los de la prueba del Teorema 4.3.1 y se omiten.

■

Ahora encontraremos algunas condiciones suficientes para que (Al) y (A2) del Teorema 4.3.1 se cumplan.

Proposición 4.4.2. *Supongamos que* $\sigma_P^2 > 0$ *y que*

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{S_U^2}\right] < \infty.$$

Entonces (A1)-(A3) del Teorema 4.3.1 se satisfacen.

Demostración: Por Proposición 4.2.1 y (4.2.1)

$$|\varphi(u)| \leq \mathbb{E}\left[e^{-\frac{u^2 X}{2}}\right],$$

y por (4.2.20) y (4.2.21),

$$|\varphi'(u)| \leq c_1 \mathbb{E}\left[Y e^{-\frac{u^2 X}{2}}\right] + c_2 |u| \mathbb{E}\left[X e^{-\frac{u^2 X}{2}}\right],$$

donde $X = \sigma_P^2 \int_0^\infty U_s^2 ds$, $Y = \int_0^\infty U_s ds$ y c_1, c_2 son constantes. Por las desigualdades anteriores, de Fubini y de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |u\varphi(u)| du &\leq \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} |u| e^{-\frac{u^2 X}{2}} du\right] = 2\mathbb{E}\left[X^{-1}\right], \\
\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(u)| du &\leq c_1 \mathbb{E}\left[Y \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2 X}{2}} du\right] + c_2 \mathbb{E}\left[X \int_{\mathbb{R}} |u| e^{-\frac{u^2 X}{2}} du\right] \\
&\leq c_1 \mathbb{E}\left[Y^2\right]^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2 X}{2}} du\right)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} + 2c_2 \\
&= c_1 \mathbb{E}\left[Y^2\right]^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{\frac{2\pi}{X}}\right)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} + 2c_2 \\
&= \sqrt{2\pi} c_1 \mathbb{E}\left[Y^2\right]^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left[X^{-1}\right]\right)^{\frac{1}{2}} + 2c_2.
\end{aligned}$$

Por (4.1.6) tenemos que $\mathbb{E}\left[Y^2\right] < \infty$, por lo que solo queda probar $\mathbb{E}\left[X^{-1}\right] < \infty$, es decir

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty U_s^2 ds\right)^{-1} du\right] < \infty.$$

Por (3.3.13)

$$U_t^2 = \exp\left\{-2\alpha_U t + 2\sigma_U W_{U,t}\right\} \prod_{i=1}^{N_{U,t}} S_{U,i}^2,$$

por lo que definimos

$$\begin{aligned} T_1 &= \text{ínf}\left\{t : \exp\left\{-2\alpha_U t + 2\sigma_U W_{U,t}\right\} = \exp\{-2\sigma_U\}\right\}, \\ T_2 &= \text{ínf}\left\{t : N_{U,t} = 2\right\}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^\infty U_s^2 ds \geq \exp\left\{-2\sigma_U\right\}(T_1 \wedge T_2)(1 \wedge S_{U,1}^2).$$

Por independencia entre T_1, T_2 y $S_{U,1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty U_s^2 ds\right)^{-1}\right] &\leq \exp\left\{2\sigma_U\right\}\mathbb{E}\left[\frac{1}{(T_1 \wedge T_2)}\right]\mathbb{E}\left[\frac{1}{(1 \wedge S_U^2)}\right] \\ &\leq \exp\left\{2\sigma_U\right\}\left(\mathbb{E}\left[\frac{1}{T_1}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{T_2}\right]\right)\left(1 + \mathbb{E}\left[\frac{1}{S_U^2}\right]\right). \qquad (4.4.1) \end{aligned}$$

Por hipótesis

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{S_U^2}\right] < \infty.$$

Más aún

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{T_2}\right] = \int_0^\infty \frac{1}{t}\lambda_U^2 t e^{-\lambda_U t} dt = \lambda_U < \infty.$$

Tomemos en cuenta que

$$T_1 = \text{ínf}\left\{t : -\frac{\alpha_U}{\sigma_U} t + W_{U,t} = -1\right\}.$$

Ahora (por Karatzas and Shreve [8], fórmula 5.12, pag. 197)

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{T_1}\right] = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{5}{2}} \exp\left\{-\frac{\left[\left(1 - \frac{\alpha_U}{\sigma_U}\right)t\right]^2}{2t}\right\} dt < \infty.$$

Por lo cual (4.4.1) es finita.

■

Observación 4.4.1. Si el supuesto $\mathbb{E}\left[S_U^{-2}\right] < \infty$ en la Proposición 4.4.2 lo fortalecemos a $\mathbb{E}\left[S_U^{-3}\right] < \infty$, entonces se cumplen los supuestos (Bl) - (B3) de la Proposición 4.3.1.

Ahora consideraremos la tarea más difícil de verificar (Al) y (A2) en el Teorema 4.3.1 cuando $\sigma_P^2 = 0$.

Lema 4.4.1. *Supongamos $\sigma_P^2 = 0$. Sea $k(u) = Re(1-\phi(-u)) \geq 0$ y consideremos la ecuación*

$$Lf = -\alpha k f, \tag{4.4.2}$$

donde L está dado por (4.2.27).

Sea $y(u)$ y $z(u)$ soluciones de (4.4.2) con $\alpha = \lambda_P$ y $\alpha = 2\lambda_P$ respectivamente, y tales que $0 \leq y(u),\ z(u) \leq 1$.
Suponga

(C1) *Si $\sigma_U^2 > 0$ entonces $\int_{\mathbb{R}} |uy(u)|du < \infty$.*

De lo contrario es suficiente que

$\int_{\mathbb{R}} y(u)du < \infty.$

(C2) $\int_{\mathbb{R}} z(u)^{\frac{1}{2}} du < \infty.$

Entonces las condiciones (A1) y (A2) del Teorema 4.3.1 se satisfacen.

Demostración: De la misma manera que en (4.2.15), sea

$$X(u) = \exp\left\{\int_0^\infty \nu(uU_s)ds\right\}.$$

Dado que $k(\cdot)$ es real, $\sigma_P^2 = 0$ y por (4.2.1),

$$\begin{aligned}
|\varphi(u)| = |\mathbb{E}\left[X(u)\right]| \leq \mathbb{E}\left[|X(u)|\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\exp\left\{\int_0^\infty (iuU_sp - \lambda_P[1-\phi(-uU_s)])\, ds\right\}\right|\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|\exp\left\{-\int_0^\infty \lambda_P[1-\phi(-uU_s)]ds\right\}\right|\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|\exp\left\{-\lambda_P\int_0^\infty k(uU_s)ds\right\}\right|\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\lambda_P\int_0^\infty k(uU_s)ds\right\}\right].
\end{aligned}$$

Como en el Teorema 4.2.1,

$$y(u) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\lambda_P\int_0^\infty k(uU_s)ds\right\}\right] \leq 1,$$

es la solución de (4.4.2) con $\alpha = \lambda_P$. Entonces (C1) implica (A1).
Más aún por (4.2.8), (4.2.18) y (4.2.21), tenemos

$$\begin{aligned}
|\varphi'(u)| &\leq \mathbb{E}\left[|X'(u)|\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left|X(u)\frac{d}{du}\int_0^\infty \nu(uU_s)ds\right|\right] \\
&\leq K\mathbb{E}\left[\left|X(u)\int_0^\infty U_s ds\right|\right] \\
&\leq K\left(\mathbb{E}\left[|X(u)|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty U_s ds\right)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Por (4.1.6) tenemos que $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty U_s ds\right)^2\right] < \infty$, entonces para alguna constante c,

$$\begin{aligned}
|\varphi'(u)| &\leq K\left(\mathbb{E}\left[|X(u)|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty U_s ds\right)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c\left(\mathbb{E}\left[|X(u)|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c\left(\mathbb{E}\left[\left|\exp\left\{-2\lambda_P\int_0^\infty k(uU_s)ds\right\}\right|\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c(z(u))^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

De nuevo como en el Teorema 4.2.1,

$$z(u) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-2\lambda_P\int_0^\infty k(uU_s)ds\right\}\right] \leq 1,$$

es la solución de (4.4.2) con $\alpha = 2\lambda_P$. Entonces (C2) implica (A2).

■

A continuación usaremos el Lema anterior para demostrar la siguiente proposición:

Proposición 4.4.3. *Supongamos $\sigma_P^2 = \lambda_U = 0$ y que existen constantes positivas K, c y ϵ tales que cuando $|u| \geq K$, entonces $Re(\phi(-u)) \leq cu^{-\epsilon}$.*
Supongamos también

$$\begin{aligned}
-\lambda_P &> 2\alpha_U + 2\sigma_U^2, \\
\alpha_U^2 &> 2\sigma_U^2\lambda_P.
\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Entonces las condiciones (A1) *y* (A2) *del Teorema 4.3.1 se satisfacen.*

Demostración: La ecuación $Ly = -\lambda_P ky$ en Lema 4.4.1, dado que $\sigma_P^2 = \lambda_U = 0$, toma la forma

$$\begin{aligned} Ly(u) &= \frac{1}{2}\sigma_U^2 u^2 y''(u) - \left(\alpha_U - \frac{1}{2}\sigma_U^2\right) uy'(u), \\ -\lambda_P k(u)y(u) &= -\lambda_P \mathrm{Re}(1-\phi(-u))y(u) \\ &= -\lambda_P y(u) + \lambda_P \mathrm{Re}(\phi(-u))y(u). \end{aligned}$$

En este caso $Ly = \lambda_P ky$, toma la forma

$$\widetilde{L}y = ry,$$

donde $r(u) = \lambda_P \mathrm{Re}(\phi(-u))$ y $\widetilde{L}$ es el operador diferencial

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2}\sigma_U^2 u^2 \frac{d^2}{du^2} - \left(\alpha_U - \frac{1}{2}\sigma_U^2\right) u\frac{d}{du} + \lambda_P.$$

Primero resolvemos $\widetilde{L}w = 0$.
Esta es la ecuación de Cauchy-Euler, y dos soluciones independientes están dadas por

$$w_1(u) = |u|^{\beta_1} \quad \text{y} \quad w_2(u) = |u|^{\beta_2},$$

donde β_1, β_2 son soluciones de

$$\frac{1}{2}\sigma_U^2\beta(\beta-1) - (\alpha_U - \frac{1}{2}\sigma_U^2)\beta + \lambda_P = \frac{1}{2}\sigma_U^2\beta^2 - \alpha_U\beta + \lambda_P = 0.$$

Por lo que solución es

$$\beta = \frac{\alpha_U \pm \sqrt{\alpha_U^2 - 2\sigma_U^2\lambda_P}}{\sigma_U^2}. \tag{4.4.4}$$

Usando (4.4.3), obtenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_U^2 - 2\sigma_U^2\lambda_P &> \alpha_U^2 + 2\sigma_U^2\left(2\alpha_U + 2\sigma_U^2\right) \\ &= \alpha_U^2 + 4\sigma_U^2\alpha_U + 4\sigma_U^4 \\ &= \left(\alpha_U + 2\sigma_U^2\right)^2. \end{aligned}$$

Si denotamos a β_1 como la solución negativa en (4.4.4),

$$\begin{aligned} \beta_1 &< \frac{\alpha_U - \sqrt{\left(\alpha_U + 2\sigma_U^2\right)^2}}{\sigma_U^2} \\ &= \frac{\alpha_U - (\alpha_U + 2\sigma_U^2)}{\sigma_U^2} \\ &= -2. \end{aligned}$$

Esto también implica que $\beta_2 > 2$.
Sea $u > K$, por el método de variación de parámetros, se obtiene una solución general como

$$y(u) = a_1 u^{\beta_1} + a_2 u^{\beta_2} + \int_K^u G(u,t) r(t) y(t) dt,$$

donde

$$G(u,t) = -\left(\frac{1}{\beta_2 - \beta_1}\right)\left(\frac{u^{\beta_1}}{t^{\beta_1+1}} - \frac{u^{\beta_2}}{t^{\beta_2+1}}\right),$$

es la función de Green de un sólo lado. Esto nos da

$$\begin{aligned} y(u) = \quad & a_1 u^{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} u^{\beta_1} \int_K^u t^{-(\beta_1+1)} r(t) y(t) dt \\ + \quad & a_2 u^{\beta_2} + \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} u^{\beta_2} \int_K^u t^{-(\beta_2+1)} r(t) y(t) dt, \end{aligned}$$

Por hipótesis $r(t) \leq ct^{-\epsilon}$ cuando $t > K$. También $0 \leq y(u) \leq 1$ por Lema 4.4.1, por lo tanto, para algunas constantes c_1 y M,

$$u^{\beta_1} \int_K^u t^{-(\beta_1+1)} r(t) y(t) dt \leq c u^{\beta_1} \int_K^u t^{-(\beta_1+1+\epsilon)} dt \leq c_1 \left(u^{\beta_1} + u^{-\epsilon}\right) < M. \tag{4.4.5}$$

Por lo tanto, ya que $\beta_2 > 0$ y para que $0 \leq y(u) \leq 1$, debemos tener que

$$a_2 = -\frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_K^\infty t^{-(\beta_2+1)} r(t) y(t) dt,$$

lo que implica

$$\begin{aligned} y(u) &= a_1 u^{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} u^{\beta_1} \int_K^u t^{-(\beta_1+1)} r(t) y(t) dt \\ &\quad - u^{\beta_2} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_K^\infty t^{-(\beta_2+1)} r(t) y(t) dt + \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} u^{\beta_2} \int_K^u t^{-(\beta_2+1)} r(t) y(t) dt \\ &= a_1 u^{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} u^{\beta_1} \int_K^u t^{-(\beta_1+1)} r(t) y(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} u^{\beta_2} \int_u^\infty t^{-(\beta_2+1)} r(t) y(t) dt. \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Usando las cotas superiores de $r(t)$ y $y(t)$, para alguna constante c_2, obtenemos

$$u^{\beta_2} \int_u^\infty t^{-(\beta_2+1)} r(t) y(t) dt \leq c u^{\beta_2} \int_u^\infty t^{-(\beta_2+1+\epsilon)} dt \leq c_2 u^{-\epsilon}. \tag{4.4.7}$$

Juntando (4.4.5) y (4.4.7) en (4.4.6) y usando la desigualdad del triángulo obtenemos para alguna constante c_3

$$\begin{aligned} 0 \leq y(u) &\leq a_1 u^{\beta_1} + c_1\left(u^{\beta_1} + u^{-\epsilon}\right) + c_2 u^{-\epsilon} \\ &\leq c_3\left(u^{\beta_1} + u^{-\epsilon}\right). \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Si $\epsilon > 2$ entonces $\int_K^\infty uy(u)du < \infty$, ya que $\beta_1 < -2$, y podemos detener el argumento. De lo contrario, para (4.4.8), $0 \leq y(u) \leq c_3 u^{-\epsilon}$ para alguna c_4 constante, e insertando esta desigualdad en los lados izquierdos de (4.4.5) y (4.4.7) nos da

$$\begin{aligned} u^{\beta_1}\int_K^u t^{-(\beta_1+1)} r(t)y(t)dt &\leq c_5\left(u^{\beta_1} + u^{-2\epsilon}\right), \\ u^{\beta_2}\int_K^u t^{-(\beta_2+1)} r(t)y(t)dt &\leq c_6 u^{-2\epsilon}, \end{aligned}$$

para algunas constantes c_5 y c_6.
Juntando estas desigualdades en (4.4.6) y usando la desigualdad del triángulo obtenemos para alguna constante c_7

$$\begin{aligned} 0 \leq y(u) &\leq a_1 u^{\beta_1} + c_5\left(u^{\beta_1} + u^{-2\epsilon}\right) + c_6 u^{-2\epsilon} \\ &\leq c_7\left(u^{\beta_1} + u^{-2\epsilon}\right). \end{aligned}$$

Repetimos estos pasos N veces hasta que $N\epsilon > -\beta_1$. Luego, para una constante c_8, $0 \leq y(u) \leq c_8 u^{\beta_1}$. De ahí obtenemos

$$\int_K^\infty uy(u)du < \infty.$$

El caso en que $\int_{-\infty}^{-K} |uy(u)|du < \infty$ se obtiene de la misma forma. Dado que $0 \leq y(u) \leq 1$, por lo cual tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |uy(u)|du < \infty. \tag{4.4.9}$$

Por hipótesis tenemos $\lambda_P > 2\alpha_U + 2\sigma_U^2$ por lo cual

$$2\lambda_P > 2\alpha_U + 2\sigma_U^2,$$

por Lema 4.4.1, cuando $u > K$, entonces $0 \leq y(u) \leq c_9 u^{\beta_1}$ para una constante c_9.
Pero $\beta_1 < -2$ y al igual que 4.4.9, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} z(u)^{\frac{1}{2}} du < \infty. \tag{4.4.10}$$

■

Observación 4.4.2. En la Proposición 4.4.3, si en lugar de (4.4.3) suponemos

$$-\lambda_P > 3\alpha_U + \frac{9}{2}\sigma_U^2 = 3(r - \bar{i}) + 6\sigma_I^2 + 3\sigma_R^2 - 9\rho\sigma_I\sigma_R \tag{4.4.11}$$

entonces $\beta_1 < -3$ (ver (4.4.4)). Se puede demostrar de la misma manera que antes, que esto implica que tanto (B1) como (B2) en la Proposición 4.3.1 se satisfacen.

4.5. Ejemplo

Supongamos $\lambda_P = \lambda_U = 0$ y que $\sigma_P^2 > 0$, por lo cual los procesos P_t y U_t no poseen saltos. Entonces

$$Z_\infty = \int_0^\infty \exp\{-\alpha_U t + \sigma_U W_{U,t}\}\, dP_t, \tag{4.5.1}$$

donde $P_t = pt + \sigma_P W_{P,t}$. Tenemos que W_P y W_U son movimientos Brownianos independientes.

- Si $\sigma_U^2 = 0$, no tenemos aleatoriedad en las tasas, se sigue directamente de (4.5.1)

$$Z_\infty = \int_0^\infty \exp\{-\alpha_U t\}\, dP_t,$$

y las propiedades isométricas de la integral estocástica que Z_∞ se distribuye normal con esperanza $\frac{p}{\alpha_U}$ y varianza $\frac{\sigma_P^2}{2\alpha_U}$.

- Si $\sigma_U^2 > 0$, del Teorema 4.3.1 y la Proposición 4.4.2 se sigue que la distribución H de Z_∞ se da como la solución de

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\sigma_U^2 z^2 + \sigma_P^2)H''(z) + \left(\left(\alpha_U + \frac{1}{2}\sigma_U^2\right) z - p\right) H'(z) - (\lambda_U + \lambda_P)\, H(z)&\\ +\lambda_U \int_0^\infty H\left(\frac{z}{s}\right) dF_U(s) + \lambda_P \int_{\mathbb{R}} H(z+s) dF_P(s) &= 0.\end{aligned}$$

Entonces, dado que $\lambda_P = \lambda_U = 0$, la densidad h de Z_∞ es la solución de

$$\frac{1}{2}(\sigma_U^2 z^2 + \sigma_P^2)h'(z) + \left(\left(\alpha_U + \frac{1}{2}\sigma_U^2\right) z - p\right) h(z) = 0. \tag{4.5.2}$$

La cual tiene solución

$$h(z) = \frac{h_0}{(\sigma_P^2 + \sigma_U^2 z^2)^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha_U}{\sigma_U^2}}} \exp\left\{\frac{2p}{\sigma_U\sigma_P} \arctan\left(\frac{\sigma_U}{\sigma_P} z\right)\right\}, \tag{4.5.3}$$

donde h_0 es una constante normalizadora. Tenemos para $n \in \{1, 2\}$ y alguna c

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} z^n h(z) dz &\simeq \int_{\mathbb{R}} \frac{z^n}{(z^2)^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha_U}{\sigma_U^2}}} \exp\{\arctan(z)\} dz \\ &< \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z^{1+\frac{2\alpha_U}{\sigma_U^2}-n}} (c) dz.\end{aligned}$$

Vemos que $h(z)$ tiene un primer momento finito si y sólo si

$$\frac{1}{2} + \frac{\alpha_U}{\sigma_U^2} > 1,$$

es decir, si y sólo si

$$\alpha_U - \frac{1}{2}\sigma_U^2 = \mu_1 > 0,$$

por (4.1.2).
De la misma forma, $h(z)$ tiene un segundo momento finito si y sólo si

$$\alpha_U - \sigma_U^2 = \frac{1}{2}\mu_2 > 0.$$

Esto de acuerdo con el Teorema 4.1.1.

Solo sabemos que $h(z)$ es la densidad de Z_∞ cuando $\mu_2 > 0$. Para obtener (4.5.3) utilizamos el Teorema 4.2.1, que utiliza la segunda derivada de $\varphi(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuZ_\infty}\right]$, y $\varphi''(0) < \infty$ si y sólo si $\mathbb{E}\left[Z_\infty^2\right] < \infty$.
Por lo tanto, parece difícil verificar si $h(z)$ es la densidad de Z_∞, bajo la suposición más débil $\mu_1 > 0$.
Por Corolario 4.1.1, la probabilidad de una eventual ruina es

$$R(y) = \frac{H(-y)}{H(0)}. \tag{4.5.4}$$

De la integral $H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(z) dz$, hacemos

$$\begin{aligned} u &= \arctan\left(\left(\frac{\sigma_U}{\sigma_P}\right) z\right), \\ z &= \left(\frac{\sigma_P}{\sigma_U}\right) \tan(u), \\ du &= \frac{\sigma_U \sigma_P}{\sigma_U^2 z^2 + \sigma_P^2} dz. \end{aligned}$$

Por lo cual (4.5.3) se convierte

$$
\begin{aligned}
H(x) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan\left(\left(\frac{\sigma_U}{\sigma_P}\right)x\right)} \frac{h_0}{(\sigma_P^2+\sigma_U^2 z^2)^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha_U}{\sigma_U^2}}} \exp\left\{\frac{2p}{\sigma_U\sigma_P}u\right\} \frac{\sigma_U^2 z^2+\sigma_P^2}{\sigma_U\sigma_P} du \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan\left(\left(\frac{\sigma_U}{\sigma_P}\right)x\right)} \frac{h_0}{(\sigma_P^2 \sec^2(u))^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha_U}{\sigma_U^2}}} \exp\left\{\frac{2p}{\sigma_U\sigma_P}u\right\} \frac{1}{\sigma_U\sigma_P} du \\
&= \left(\frac{h_0}{\sigma_U\sigma_P(\sigma_P)^{-1+\frac{2\alpha_U}{\sigma_U^2}}}\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan\left(\left(\frac{\sigma_U}{\sigma_P}\right)x\right)} \cos^{-1+\frac{2\alpha_U}{\sigma_U^2}}(u) \exp\left\{\frac{2p}{\sigma_U\sigma_P}u\right\} du.
\end{aligned}
$$

Cancelando términos en (4.5.4), encontramos que

$$
R(y) = \frac{G\left(-\arctan\left(\left(\frac{\sigma_U}{\sigma_P}\right)y\right)\right)}{G(0)},
$$

donde

$$
G(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \cos^{\alpha}(v) e^{\beta v} dv.
$$

Donde $\alpha = \frac{2\alpha_U}{\sigma_U^2} - 1$ y $\beta = \frac{2p}{\sigma_U\sigma_P}$.

En la siguiente gráfica de $R(y)$ veremos el impacto que ocurre cuando se varían los valores de $\sigma_R = \{.05, .3, .4\}$ con los valores

p	1
r	0.1
$\bar{i}$	0
σ_P	1.5
σ_I	.05

En este caso en específico tenemos que para que la probabilidad de eventual ruina este por debajo de 0.5, cuando $\sigma_R = .3$ se requiere que $y > 3.8$, cuando $\sigma_R = .05$ solo se requiere que $y > 2.8$, mientras que cuando $\sigma_R = .4$ se requiere que $y > 4$.

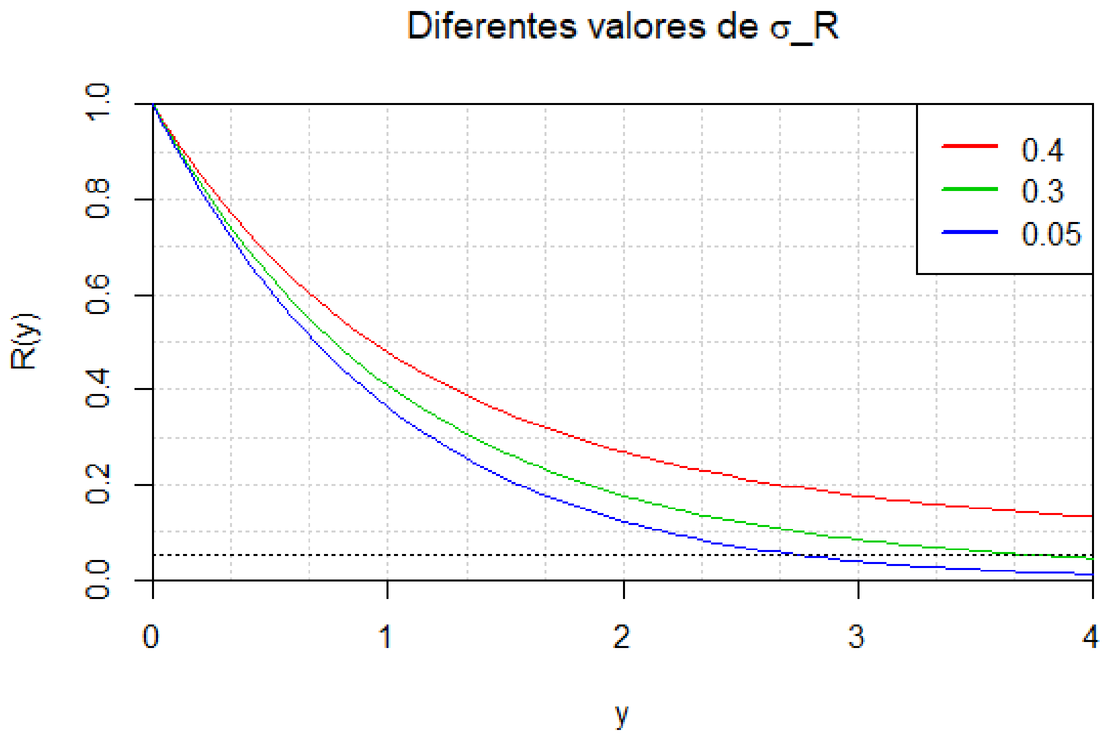

Figura 4.1: Probabilidad de Ruina

Bibliografía

[1] Jostein Paulsen, *Risk Theory in a Stochastic Economic Environment*

Stochastic Processes and their Applications 46 (1993) 327-361

[2] A. Dassios and P. Embrechts, *Martingales and Insurance Risk*

Comm. Statist.-Stochastic Models 5 (1989) 181-217

[3] F. Delbaen and J. Haezendonck, *Classical Risk Theory in an Economic Environment*

Insur. Math. Econom. 6 (1987) 85-116.

[4] Dellacherie and Meyer, *Probabilities and Potential B*

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY (1982).

[5] H.U. Gerber, *Martingales in Risk Theory*

Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 73 (1973) 205-216.

[6] H.U. Gerber, *An Introduction to Mathematical Risk Theory*

Heubner Foundation Monograph Ser. No.8 (Irwin, Homewood, IL, 1979).

[7] J.M. Harrison, *Ruin Problems with Compounding Assets*

Stochastic Process. Appl. 5 (1977) 67-79.

[8] I. Karatzas and SE. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*

Springer, New York, (1988).

[9] P. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*

Springer, Berlin, (2003).

[10] J.M. Harrison, *Probability of Ruin Under Inflationary Conditions or Under Experience Rating*

Astin Bull. 16 (1979) 149-162.

[11] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. II* Wiley, New York, (1971)

[12] J. Jacod, *Calcul Stochastique et Problemes de Martingales* Lecture Notes in Math. No. 714 (Springer, Berlin, 1979)

[13] I.I. Gihman and A.V. Skorohod, *Introduction to the Theory of Random Processes* (Saunders, Philadelphia, 1969)

[14] E.B. Dynkin, *Markov Processes - I* (Springer, Berlin, 1965)

[15] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability* (Springer, Berlin, 2002)