Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

Función característica del modelo rugoso de Heston

T E S I S

Que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias
con Especialidad en
Probabilidad y Estadística

P r e s e n t a:
Victor Manuel González Ruiz

Directores de tesis:
Dr. José Luis Ángel Pérez Garmendia
Dr. Ehyter Matías Martín González

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto. , 19 de noviembre de 2020

Acta No.: 170

Libro No.: 002

Foja No.: 170

En la Ciudad de Guanajuato, Gto., siendo las 11:00 horas del día 19 de noviembre del año 2020, se reunieron los miembros del jurado integrado por los señores:

DRA. EKATERINA TODOROVA KOLKOVSKA (CIMAT)
DR. HAROLD ANDRÉS MORENO FRANCO (HSE-MOSCÚ)
DR. JOSÉ LUIS ÁNGEL PÉREZ GARMENDIA (CIMAT)

Bajo la presidencia del primero y con carácter de secretario el segundo, para proceder a efectuar el examen que para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Sustenta

VICTOR MANUEL GONZALEZ RUIZ

En cumplimiento con lo establecido en los reglamentos y lineamientos de estudios de posgrado del Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., mediante la presentación de la tesis

"FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DEL MODELO RUGOSO DE HESTON"

Los miembros del jurado examinaron alternadamente al (la) sustentante y después de deliberar entre sí resolvieron declararlo (a)

Aprobado

DRA. EKATERINA TODOROVA KOLKOVSKA
Presidente

DR. HAROLD ANDRÉS MORENO FRANCO
Secretario

DR. JOSÉ LUIS ÁNGEL PÉREZ GARMENDIA
Vocal

CIMAT
DIRECCIÓN GENERAL

Dr. Víctor Manuel Rivero Mercado
Director General

000000

ACTA PROVISIONAL

A mi novia Yeny y a mi familia.

Agradecimientos

Agradezco de manera especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la financiación total de mis estudios, al Centro de Investigación en Matemáticas A. C. (CIMAT) por la oportunidad de realizar con ellos la Maestría en Ciencias con Especialidad en Probabilidad y Estadística, a mis asesores Dr. José Luis Ángel Pérez Garmendia y Dr. Ehyter Matías Matín González por su acompañamiento en la realización de la tesis y a todos los profesores que aportaron a mi desarrollo académico. Finalmente, toda la gratitud para mi familia y amigos por su apoyo incondicional siempre.

Resumen

La función característica del modelo rugoso de Heston, se resume en dar una forma semi cerrada de la función característica del log-precio de un activo bajo tal modelo, usando aproximaciones por medio de procesos de Hawkes. Este modelo rugoso al igual que el modelo usual de Heston [11], describe el precio de un activo considerando que la volatilidad sea estocástica y negativamente correlacionada al precio del activo. La diferencia entre estos dos modelos radica en que el modelo rugoso adopta en la ecuación diferencial estocástica de la volatilidad un comportamiento más "escabroso", reflejando una dinámica más apegada a la realidad actual del mercado financiero [20]. Al final de este trabajo se da una expresión de la función característica del modelo rugoso de Heston en términos de un ecuación diferencial fraccionaria de Riccati, que puede ser solucionada numéricamente.

Palabras Claves

Modelo de Heston, procesos de Hawkes, densidad Mittag-Leffler, convergencia débil, función característica, Teorema de P. Lévy.

Índice

Introducción

La volatilidad de un activo siempre ha sido un talón de Aquiles en la modelación del precio del activo, y ha pasado de ser una constante (como es el caso del modelo de Black-Scholes), a ser una variable aleatoria que sigue su propia dinámica (como es el caso del modelo de Heston). Claramente es más realista considerar que la volatilidad sea estocástica, haciendo que las predicciones que se hagan bajo este supuesto sean más precisas, tanto para el precio del activo en sí, como de los derivados financieros que dependen del precio; pero esto conlleva a plantearnos nuevos retos, sujeto a que tan errante queremos que sea la volatilidad.

En el modelo usual de Heston propuesto en 1993 [11], se considera que el precio S_t de un activo y su volatilidad V_t tiene la siguiente dinámica

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t\sqrt{V_t}dW_t, \\ dV_t &= \gamma(\theta - V_t)dt + \gamma v\sqrt{V_t}dB_t, \end{aligned} \tag{1}$$

donde los parámetros γ, θ y v son positivos, y juegan un papel en la forma que toma la superficie de la volatilidad implícita. Además los procesos estocásticos $\{W_t\}$ y $\{B_t\}$ son movimientos brownianos con coeficiente de correlación ρ. La volatilidad en este caso es efectivamente estocástica y es dirigida por un movimiento browniano.

En estudios recientes como *the volatility is rough* [20], se observó que un movimiento browniano fraccionario con un parámetro de Hurst igual a 0.1, modela mejor las series de tiempo de las log-volatilidades para una amplia gama de activos, que si lo modeláramos con el movimiento browniano usual. La representación de Mandelbrot-van Ness del movimiento browniano fraccionario (MBF) tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} W_t^H &= \frac{1}{\Gamma(H+1/2)}\int_{-\infty}^{0}\left((t-s)^{H-1/2}-(-s)^{H-1/2}\right)dW_s \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma(H+1/2)}\int_0^t (t-s)^{H-1/2}dW_s, \end{aligned} \tag{2}$$

donde H es el parámetro de Hurst que esta en el intervalo $(0,1/2)$ y $\{W_t\}$ es un movimiento browniano estándar. Una forma de considerar las propiedades trayectoriales del MBF en el modelo usual de Heston, es considerando su kernel $(t-s)^{H-1/2}$ dado en (2) y acoplarlo a este modelo; como resultado obtenemos así el modelo *rugoso de Heston*, el cual tiene la siguiente dinámica para el precio S_t con volatilidad V_t

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t\sqrt{V_t}dW_t, \\ V_t &= V_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\gamma(\theta-V_s)ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\gamma v\sqrt{V_s}dB_s, \end{aligned} \tag{3}$$

donde los parámetros γ, θ, V_0 y v son positivos, e igualmente como en el modelo usual, juegan un papel en la forma que toma la superficie de la volatilidad implícita. Además los procesos estocásticos $\{W_t\}$ y $\{B_t\}$ son movimientos brownianos con coeficiente de correlación ρ; y el parámetro α pertenece al intervalo $(1/2,1)$, que en términos del parámetro de Hurst es igual a $H+1/2$.

Aunque existen modelos menos complicados que el modelo rugoso de Heston, tanto en un sentido analítico (son Markovianos y semimartingalas), como en un sentido numérico (la calibración de los parámetros es más eficientes usando técnicas tradicionales), se tiene que estos no consideran características del mercado en el contexto de high frequency trading, como en el modelo de Heston usual, o no emergen de forma natural de un estudio micro estructural

[25]. Por estas razones se han invertido esfuerzos en el estudio de este modelo, y más aún, en el estudio de modelos de volatilidad rugosa, creando grupos de investigación alrededor de este tema y desarrollando nueva técnicas computacionales para que la implementación de estos modelos en la industria sea factible [21, 31].

Por otro parte, la función característica ha sido de gran importancia a la hora de estudiar el comportamiento distribucional de variables aleatorias y en el contexto financiero, es posible usar técnicas en las que se requiere conocer las funciones características de las variables aleatorias que describen los log-precios de activos, para la valuación de derivados financieros como lo son las opciones Call y Put [17, 24].

Este trabajo se basara ampliamente en el articulo *The characteristic function of rough Heston model* realizado por Omar El Euch y Mathieu Rosenbaun [18], y consistirá principalmente en deducir de forma detallada una expresión semi cerrada de la función característica del log-precio de un activo bajo el modelo rugoso de Heston.

El problema para realizar este cálculo, es que aunque la función característica de una variable aleatoria siempre existe, hay casos donde no se puede encontrar una expresión de ella que al menos nos permita implementarla numéricamente. No existe un método universal para hacer esto, pero se pueden explorar diferentes técnicas para hallarla, como por ejemplo: considerar el hecho de que la convergencia débil de una sucesión de variables aleatorias implica la convergencia de su sucesión de funciones características (Teorema 6.3.1 de [5]).

La forma en que pretendemos resolver este problema se fundamenta en el articulo *The microstructural foundations of leverage effect and rough volatility* [19]. En este articulo se estudia la forma que debe tener los parámetros de una sucesión de procesos estocásticos bajo un modelo *tick-by-tick* del precio de un activo, que buscan codificar características de un mercado electrónico en un contexto de transacciones de alta frecuencia, y que en el límite emerjan propiedades macroscópicas de la volatilidad, como lo son el efecto de *leverage*[1] y un comportamiento rugoso.

[1]El *leverage* hace referencia a la correlación negativa entre el rendimiento de los precios y la volatilidad.

En aras de alcanzar nuestro objetivo principal, que recordemos se reduce en llegar a una forma semi cerrada de la función característica del log-precio de un activo bajo el modelo rugoso de Heston, dividiremos este trabajo en cuatro capítulos. El capítulo 1 asienta el marco teórico necesario, donde daremos una breve introducción y exhibiremos resultados de las nociones que serán de utilidad en los capítulos posteriores. En estos preliminares se encuentra la definición y propiedades de procesos de Hawkes, convergencia débil en la topología de Skorohod y la densidad Mittag-Leffler. Aquí encontraremos resultados tan importantes como la representación basada en cluster Poisson de los procesos de Hawkes, la función característica de un proceso de Hawkes multidimensional y el teorema que nos permitirá demostrar la tensión de nuestra sucesión de procesos reescalados.

El capítulo 2 versa sobre la construcción de una sucesión de procesos, que buscan modelar el comportamiento micro-estructural *tick-by-tick* del precio de un activo. Este modelo será el pilar fundamental de nuestra demostración, dado que en el límite coincide en ley con nuestro modelo rugoso de Heston [19]. Además de que se observa como los procesos de Hawkes permiten naturalmente codificar cuatro características de un mercado electrónico en el contexto de (High Frequency Trading) HFT, como lo son la alta endogeneidad del mercado, la prevención del arbitraje estadístico, asimetría entre órdenes de compra y venta, y un alto volumen de transacciones.

En el capítulo 3 se demuestra efectivamente la convergencia en ley entre nuestra sucesión de procesos bajo el modelo micro-estructural del log-precio, y el proceso del log-precio bajo el modelo rugoso de Heston, usando en gran medida resultados de convergencia débil en la topología de Skorohod. Al final de este capítulo se presenta éste resultado como un corolario, que resulta ser una consecuencia casi inmediata del teorema principal del capítulo.

Finalmente, se presentará en el capítulo 4 el resultado principal de la tesis, mostrando una expresión semi cerrada de la función característica del log-precio de un activo bajo el modelo rugoso de Heston, como una solución de una ecuación diferencia fraccionaria de Riccati. Gran parte de este capítulo se encamina a corroborar que la sucesión de funciones características que provienen de nuestra sucesión de procesos que modelan el comportamiento micro-estructural del log-precio, cumplen las condiciones necesarias para aplicar el Teorema de convergencia dominada.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo se presentará las herramientas indispensables para entender y desarrollar este trabajo. Los conceptos teóricos fundamentales que nos permitirán alcanzar nuestros objetivos serán los procesos de Hawkes, convergencia débil en el espacio de Skorohod y la densidad Mittag Leffler. En los tres casos daremos una breve introducción de estas nociones, de tal forma que podamos visualizar un panorama general de las teorías y a la vez ser capaces de introducir resultados puntuales necesarios.

La primera sección de este capítulo será el referente a los procesos de Hawkes, que es el pilar fundamental de la construcción del modelo micro-estructural del precio de un activo, el cual supondremos estará en un mercado electrónico de alta frecuencia. El segundo capítulo es el concerniente al concepto de convergencia débil en el topología de Skorohod, el cual contiene las nociones necesarias para entender la convergencia del modelo micro-estructural al modelo rugoso de Heston. En la sección final se presentará la densidad Mittag Leffler con su distribución asociada, donde encontraremos propiedades de gran interés y utilidad para efectos de definir el modelo micro-estructural.

1.1. Procesos de Hawkes

Esta sección se divide en cuatro partes, las cuales dan: una introducción al lector de los procesos de conteo de forma general, la noción de los proceso de Hawkes, la representación cluster Poisson de los proceso de Hawkes d-dimensionales y la función característica de las variables que definen a los proceso de Hawkes d-dimensionales. A través de las dos primeras subsecciónes se darán definiciones con poca construcción y resultados sin pruebas, buscando con esto que la lectura resulte ágil y se pueda llegar a resultados de mayor valor para el trabajo en las siguientes dos subsecciones.

1.1.1. Introducción a procesos de conteo

Este apartado se basará en resultados de [15, 28, 30], por lo que el lector podrá encontrar más detalles al dirigirse a estas tres referencias. Para efectos de facilitar la lectura, se considerará que las variables aleatorias en esta subsección están definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$, que no necesariamente será el mismo para todas las definiciones y enunciados.

La idea de un proceso puntual simple en $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, es la de un proceso que mide el instante de tiempo en que ocurre un tipo de evento, por ejemplo, la llegada de autobuses a una estación de transporte o las veces en las que el precio de un activo cruza cierta barrera. A continuación se presenta una definición formal de esta idea.

Definición 1.1.1 (Proceso puntual)**.** *Un sucesión de variables aleatorias* $T = \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *que toman valores en* $[0, \infty)$*, se dice que es un proceso puntual si:*

i) $\mathbb{P}(0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots) = 1.$

ii) $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} T_n = \infty) = 1.$

La condición (i) nos dice que el proceso es creciente, mientras que la condición (ii) nos dice que el número de eventos que ocurre en un tiempo acotado es finito, es decir que el proceso no explota. Adicionalmente, diremos que el proceso puntual es *simple* si la probabilidad de que ocurran dos o más eventos en un mismo tiempo es cero.

Ahora definiremos un proceso asociado al proceso puntual simple, el cual cuenta el número de eventos que han ocurrido hasta un cierto tiempo finito $t \geq 0$, en vez de medir el instante en los que ocurren estos.

Definición 1.1.2 (Proceso de conteo)**.** *Una sucesión de variables $N = \{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ que toma valores en $\mathbb{N}$, se dice que es un proceso de conteo si $N_0 = 0$, es finito c.s, y sus trayectorias son funciones escalonadas, continuas por la derecha y con incrementos de a lo más tamaño uno.*

En la definición anterior no se evidencia de forma clara la relación que se tienen entre los procesos de conteo y puntual simple, por lo que consideramos la siguiente proposición para ver tal relación.

Proposición 1.1.1. *La relación entre un proceso puntual simple y de conteo es la siguiente:*

i) *Sea $T = \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un proceso puntual simple. Si definimos $N_0 := 0$ y*

$$N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{T_n \in (0,t]\}},$$

para $t > 0$, se tiene que $N = \{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ es un proceso de conteo, el cual diremos que esta asociado al proceso puntual T.

ii) *Sea $N = \{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ un proceso de conteo, luego si definimos:*

$$T_n := \text{ínf}\{t \geq 0 : N_t \geq n\},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que el proceso $T = \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un proceso puntual simple, el cual diremos que esta asociado al proceso de conteo N.

De la primera parte de la anterior proposición, se observa el porqué del nombre de proceso de conteo, dado que la suma esta indicando que efectivamente se esta realizando un conteo. Para lo que resta de este trabajo nos enfocaremos en los procesos de conteo, retornando un par de veces a la noción de un proceso puntual. La idea de haber introducido los procesos puntuales nace por la relevancia que tienen a la hora de demostrar propiedades de los procesos de conteo y de extender la idea de un proceso de conteo a espacios más generales.

Sea $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ una filtración que cumple las condiciones usuales y además permita que N sea adaptada, es decir, para todo $t > 0$

$$\sigma(\{N_s : 0 \leq s \leq t\}) \subseteq \mathcal{H}_t.$$

Esta filtración $\mathcal{H}$ sera la que usaremos de ahora en adelante a menos de que se indique los contrario.

Un proceso estocástico que esta asociado a un proceso de conteo, y que en general se puede definir para una clase más grande de procesos estocásticos, es el compensador. Este proceso surge de aplicar el conocido Teorema de descomposición de Doob-Meyer y será de gran importancia para el desarrollo de la tesis. A continuación presentamos un teorema-definición para introducir el compensador de un proceso de conteo.

Teorema 1.1.1 (Compensador)**.** *Sea N un proceso de conteo arbitrario, entonces existen un único proceso creciente, continuo por la derecha y predecible Λ_t, tal que $\Lambda_0 = 0$ c.s, $\Lambda_t < \infty$ c.s para todo t, y el proceso*

$$M_t := N_t - \Lambda_t,$$

es una martingala local.

Este proceso ha sido un objeto de gran estudio en la teoría de procesos puntuales, dada la estrecha relación que tiene con N, permitiéndonos derivar propiedades de este último. El primer resultado que es de nuestro interés, provee una nueva forma de definir el compensador (ver detalles en el Teorema 3, pg 33 de [34]).

Teorema 1.1.2. *La condición de que $M = N - \Lambda$ sea una martingala local en 1.1.1, es equivalente a que*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty H(s)dN_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty H(s)d\Lambda_s\right),$$

para todo proceso no negativo y predecible H[1].

Notemos que la función indicadora de $[0,t]$ para todo $t \geq 0$ es no negativa y predecible, por lo que

$$\mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \mathbb{I}_{[0,t]}(s)dN_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \mathbb{I}_{[0,t]}(s)d\Lambda_s\right) = \mathbb{E}(\Lambda_t).$$

Ahora, se presenta una condición bajo la cual se puede demostrar que la martingala local M asociada a N es una martingala.

Lema 1.1.1. *Si $\mathbb{E}(\Lambda_t) < \infty$ para todo t, entonces $M_t := N_t - \Lambda_t$ es una martingala.*

Un resultado que será de utilidad en el capitulo de la convergencia débil del modelo micro-estructural al modelo rugoso de Heston, utiliza la noción de la variación cuadrática predecible o también conocido como *Bracket process* en ingles de una semi martingala, el cual se define como el compensador de la variación cuadrática, donde se supone que la semi martingala tiene variación cuadrática integrable o localmente integrable[2].

Teorema 1.1.3. *Sea N un proceso de conteo en $[0,\infty)$ con $\mathbb{E}(N_t) < \infty$ para todo $t \geq 0$, y sea Λ su compensador. Supongamos que Λ es continuo casi seguramente, y que $\mathbb{E}(M^2) < \infty$ para todo t, donde $M := N - \Lambda$. Entonces $\langle M, M\rangle = \Lambda$, es decir que $M^2 - \Lambda$ es una martingala continua por la derecha.*

También será de utilidad extender el resultado anterior al caso multivariado, por lo que daremos una definición que aumenta la dimensión de un proceso de conteo.

Definición 1.1.3. *Un proceso d-dimensional $(N_1, N_2, \ldots, N_d)$ es llamado un proceso de conteo d-dimensional si:*

1. *Cada N_j, con $j = 1, 2, \ldots, d$, es un proceso de conteo.*
2. *Cualquiera dos componentes del proceso de conteo multivariado no saltan al mismo tiempo.*

[1] Notemos que las integrales están bien definidas, donde N como Λ son proceso de variación finita.

[2] Se denota como $\langle M, M\rangle$ al *Bracket process* de M y como $[M, M]$ a su variación cuadrática.

Ahora presentaremos un resultado análogo al Teoremas 1.1.3, que es un poco más general y además trabaja con la definición anterior.

Teorema 1.1.4. *Sea* $(N^1, N^2, \ldots, N^d)$ *un proceso de conteo multivariado, donde para cada* j *el proceso* Λ^j *es el compensador de* N^j*. Supongamos que* Λ^j *es un proceso continuo, entonces:*

1. $\langle M^j, M^j \rangle = \Lambda^j$*, es decir,* Λ^j *es el único proceso creciente, predecible y continuo por la derecha con* $\Lambda_0^j = 0$ *c.s, y* $\Lambda_t^j < \infty$ *c.s para todo* t*, tal que* $(M^j)^2 - \Lambda^j$ *es una martingala local para todo* $j = 1, 2, \ldots, d$*.*
2. *Si* $i \neq j$*,* $\langle M_i, M_j \rangle_t = 0$ *c.s, por lo que* $M^j M^i$ *es una martingala local.*

Ya que dimos una breve introducción a procesos de conteo y presentamos algunos resultados generales, vamos a enfocarnos en un tipo de procesos de conteo en especifico en la siguiente subsección.

1.1.2. Introducción a procesos de Hawkes

Como se mencionó antes, el compensador de una proceso de conteo proviene de aplicar el teorema de descomposición de Doob al proceso de conteo, y aunque este teorema nos garantiza la existencia y unicidad c.s de este proceso, no nos ofrece una forma explicita para éste. Para ciertos casos sí es posible dar una forma del compensador, como el que presentamos a continuación.

Teorema 1.1.5. *Sea* N *un proceso de conteo, asociado a un proceso puntual* T*. Denotamos los tiempos interarribos de los eventos por* $U_n = T_{n+1} - T_n$*, con* $T_0 = 0$*. Sea* $F_n(t) = \mathbb{P}(U_{n+1} \leq t | T_1, \ldots, T_n)$ *la distribución condicional regular de* U_{n+1} *para* $n \geq 1$ *y* $F_0(t) = \mathbb{P}(T_1 \leq t)$*. Entonces el compensador está dado por*

$$\Lambda_t = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{t \wedge T_{i+1} - t \wedge T_i} \frac{dF_i(s)}{1 - F_i(s-)}.$$

Notemos que en el caso que cada distribucion F_i tengan densidad f_i, se sigue que el compensador se puede expresar en términos de las integrales de $f_i/(1-F_i)$, que en la literatura se conocen como funciones Hazard. Esta forma de presentar el compensador como la integral de Riemann de una función continua por la izquierda no es siempre posible como mostramos antes, y parte del hecho de que no necesariamente existe la densidad de F_i. La existencia de tales integrandos hacen que los procesos de conteo con esta característica ocupen un puesto importante, tanto en el estudio de esta teoría, como en su aplicación. A continuación presentamos una definición más formal de esta noción.

Definición 1.1.4 (Función de intensidad)**.** *Si existe un proceso $\lambda = \{\lambda_t\}_{t\in[0,\infty)}$ tal que es no negativo, $\mathcal{F}$-predecible, continuo por la izquierda , y que además*

$$\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds, \quad t \in [0,\infty),$$

se le conocerá como la función de intensidad del proceso N.

Un ejemplo sencillo de esta función de intensidad seria la tasa λ de un proceso de Poisson homogéneo, que en este caso seria una función constante. Notemos que el compensador de este proceso Poisson efectivamente esta totalmente determinado, puesto que para todo $t \geq 0$ el compensador es igual a λt. A los procesos de conteo cuya función de intensidad existe como en la Definición 1.1.4, se les conoce como procesos de conteo regulares; además de que sus incrementos infinitesimales cumplen con las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_{(t+h)-} - N_{t-} = 0|\mathcal{F}_{t-}) &= 1 - \lambda_t h + o(h),\\
\mathbb{P}(N_{(t+h)-} - N_{t-} = 1|\mathcal{F}_{t-}) &= \lambda_t h + o(h),\\
\mathbb{P}(N_{(t+h)-} - N_{t-} = m|\mathcal{F}_{t-}) &= o(h), \quad m > 1.
\end{aligned}$$

La propiedad anterior nos indica que la estructura probabilística de los procesos de conteo regulares está totalmente determinada por la función de intensidad. Por lo tanto esta función, cuando existe, ayuda a caracterizar los procesos de conteo y dan paso a describir un mundo nuevo de estos procesos, entre los cuales se encuentra el que nos compete en esta sección y se le conoce como proceso de Hawkes.

Los procesos de Hawkes fueron desarrollados por Alan G. Hawkes en el articulo *Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes* de 1971 [10]. Estos procesos se caracterizan porque se autoexcitan, es decir, que la llegada de un nuevo evento dependerá de arribos previos. Ejemplos en la naturaleza de este tipo de procesos son los terremotos, donde típicamente los sismos son seguidos por las replicas. Otro ejemplo es en el mercado financiero, donde la compra o venta de cierto activo, produce que aumente o disminuya así mismo el número de transacciones de este activo. La forma en que Hawkes formalizo esta idea, fue haciendo que la función de intensidad de un proceso de conteo regular dependiera del mismo proceso de conteo en sí.

Definición 1.1.5 (Proceso de Hawkes)**.** *Sea $N = \{N_t\}_{t\in[0,\tau]}$ un proceso de conteo regular. Lo llamaremos proceso de Hawkes, si su función de intensidad para todo $t \in [0, \infty)$ es igual a*

$$\lambda_t = \mu + \int_0^t \phi(t-s)dN_s,$$

donde $\mu > 0$ y $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una función integrable; estos parámetros además son conocidos respectivamente como la tasa exógena y función de excitación (o tasa endógena) del proceso de Hawkes.

A partir de la definición anterior vemos que el comportamiento de un proceso de Hawkes dependerá de la elección de la tasa exógena y de la función de excitación, por lo que hay una amplia gama de procesos de Hawkes. Además es claro que la función de intensidad al tiempo t depende de los eventos ocurridos hasta este tiempo, por lo que efectivamente podemos ver la idea de auto-excitación. Un ejemplo de una función de excitación es la de decaimiento exponencial, la cual esta dada por $\phi(t) = \alpha \exp(-\beta t)$ para todo $t \geq 0$ y con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$; luego, si consideramos como $\{t_1, t_2, \dots\}$ a los tiempos de llegada de los eventos a modelar, se sigue que la función de intensidad con decaimiento exponencial toma la forma

$$\lambda_t = \mu + \int_0^t \alpha \exp(-\beta s)dN_s = \mu + \sum_{t_i<t} \alpha \exp(-\beta t_i),$$

donde notemos que hemos usado que el proceso de conteo va contando de uno en uno.

Por la forma que tiene la función de intensidad, y posteriormente la forma que toma el compensador, pareciera intuitivo que hay una relación entre los procesos de Hawkes y los proceso Poisson no-homogéneos; esta relación se dará con detalle en la siguiente parte del trabajo.

Una extensión que podemos hacer a la definición que dimos de proceso de Hawkes, es al considerar que la tasa endógena del proceso es dependiente de t, es decir que consideramos a μ como una función de t que va de $[0,\infty)$ a $[0,\infty)$. Luego bajo ciertas condiciones de μ y ϕ, se puede mostrar que el compensador del proceso de Hawkes tiene primer momento finito, donde estas condiciones surgen de querer utilizar el Teorema que describe la solución de una ecuación de renovación 4.0.2.

Teorema 1.1.6. *Sea*

$$\lambda_t = \mu(t) + \int_0^t \phi(t-s)dN_s,$$

donde $\mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *es una función medible localmente acotada y* $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *es una función integrable cuya norma en* L_1 *es menor que uno. Entonces para todo* $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \lambda_s ds\right] < \infty.$$

Demostración. Aplicando esperanza a λ_t y usando el Teorema 1.1.2, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\lambda_t] &= \mu(t) + \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi(t-s)dN_s\right] \\
&= \mu(t) + \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi(t-s)d\left(\int_0^s \lambda_u du\right)\right] \\
&= \mu(t) + \int_0^t \phi(t-s)\mathbb{E}[\lambda_s]ds,
\end{aligned}$$

donde esta ultima igualdad se sigue del hecho de que ϕ y λ son no negativas, y por lo tanto se puede utilizar el Teorema de Fubini-Tonelli. Luego como la anterior ecuación cumple las condiciones de una ecuación de renovación, se sigue que $\mathbb{E}[\lambda_s]$ es localmente acotada para todo $s \geq 0$ y por lo tanto del Teorema de Fubini-Tonelli se sigue que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \lambda_s ds\right] = \int_0^t \mathbb{E}[\lambda_s]ds < \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

□

Ahora presentaremos el último resultado de este apartado, seguido de una observación que será de utilidad en lo que resta del trabajo. El siguiente corolario es consecuencia inmediata del Lema 1.1.1 y el resultado anterior.

Corolario 1.1.1. *Sea N un proceso de Hawkes con función de intensidad como en el Teorema anterior. Se sigue que el proceso M definido como*

$$M_t := N_t - \int_0^t \lambda_s ds, \quad t \in [0, \infty),$$

es una martingala con respecto a la filtración natural de N.

A partir de la definición de M, se observa que es la diferencia entre dos proceso finitos *c.s* y que además tienen trayectorias crecientes, por lo que resulta ser de variación acotada y consecuentemente integrar con respecto a ella en el sentido de Riemann-Stieltjes es factible. Luego, dado que para toda función integrable y no negativa f se tiene

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b f(s)d\left(\int_0^s \lambda_u du\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_a^b f(s)\lambda_s ds\right] = \int_a^b f(s)\mathbb{E}\left[\lambda_s\right] ds < \infty,$$

concluyendo que

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b f(t)dM_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_a^b f(t)dN_t - \int_a^b f(t)\lambda_t dt\right] = 0.$$

1.1.3. Representación basada en clúster

La representación de un proceso de Hawkes unidimensional por medio de un proceso de Poisson ramificado fue dada por Hawkes y Oakes en [27]. En este articulo, ellos se refieren a los procesos de Poisson ramificados como procesos de cluster Poisson, y afirman que bajo ciertas condiciones de la intensidad exógena y función de excitación, existe un proceso puntual estacionario que se autoexcita (proceso de Hawkes) y que además éste tiene una representación por medio de un proceso cluster Poisson (esta representación se refiere a que son iguales en ley). En esta parte del trabajo, buscamos extender la representación al caso de un proceso de Hawkes multidimensional y para tal efecto, presentamos formalmente la definición de un proceso de Hawkes d-dimensional[3].

Definición 1.1.6 (Proceso de Hawkes d-dimensional)**.** *Sea $N_t = (N_t^1, \cdots, N_t^d)$ un proceso de conteo d-dimensional, tal que para cada k en $\{1, \ldots, d\}$*

$$\mathbb{P}(N_{t+h}^k - N_t^k = m|\mathcal{H}(t)) = \begin{cases} 1 - \lambda_t^k h + o(h) & m = 0 \\ \lambda_t^k h + o(h) & m = 1 \\ o(h) & m > 1, \end{cases}$$

donde

$$\lambda_t^k = \mu^k(t) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \phi_{k,j}(t-s) \cdot dN_s^j,$$

o escrito en forma matricial

$$\lambda_t = \begin{pmatrix} \lambda_t^1 \\ \vdots \\ \lambda_t^d \end{pmatrix} = \mu(t) + \int_0^t \phi(t-s) \cdot dN_s, \tag{1.1}$$

donde $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^d$ es localmente acotada, $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{M}^d(\mathbb{R}_+)$[4] tiene componentes integrables y tal que el radio espectral[5] de ϕ es menor que uno, es decir

$$\mathcal{S}\left(\int_0^\infty \phi(s)ds\right) < 1.$$

Para hacer el análogo de la representación en el caso multidimensional, vamos a recordar que los procesos cluster Poisson consisten en la modelación de una población de migrantes y descendientes, como la superposición indistinguible de procesos Poisson (los cluster). Hay uno que es considerado como el principal y representará los migrantes en la población; los demás procesos serán secundarios y fungirán como los modelos de las descendencias de otros descendientes o migrantes.

[3]Notemos que los últimos resultados que se vieron en la subsección anterior son aplicables en este caso, dado que se tienen las condiciones del Teorema que da la solución de una ecuación de renovación 4.0.2.

[4]$\mathcal{M}^d(\mathbb{R}_+)$ representa el conjunto de matrices $d \times d$ con entradas en los reales positivos.

[5]El radio espectral de una matriz cuadrada, se define como el valor máximo en valor absoluto de los valores propios.

Ahora, para visualizar la anterior idea en los procesos de Hawkes, consideramos que este proceso estaría modelando el número de migrantes y de descendientes de una población, que en el caso d-dimensional consistiría de d diferentes clases, especies, razas o tipos. Si nos fijamos en la forma de la función de intensidad de estos procesos, podemos observar que la tasa exógena se puede ver como la intensidad de un proceso de Poisson no homogéneo, y que su integral estaría representando la tasa con la que llega migrantes a la población; para ver esto de forma más clara, consideremos por un instante a ϕ como cero, por lo que el proceso de Hawkes pasaría a ser un proceso de Poisson no-homogéneo con tasa igual a $\int_0^t \mu(s)ds$. En el caso multidimensional, cada componente μ_k de μ, estaría representando la tasa de migración del migrante de tipo k.

Por otro lado, la función de excitación ϕ estaría desempeñando el papel de la función de intensidad de los procesos Poisson no-homogéneos que modelan la descendencia de los migrantes u otros descendientes; esta idea es razonable dado a que ϕ esta asociada con la historia desde cero hasta t del proceso de conteo N, de tal forma que los valores que toma esta función dependerán de los tiempos en los que ocurren los eventos (llegada de migrantes o descendientes) hasta el tiempo t. Para el caso multidimensional, la fila k-esima de la matriz ϕ corresponde a las diferentes tasas con las que son generados descendientes de tipo k, a partir de los migrantes u otros descendientes de tipo j con $j \in \{1, \ldots, d\}$. Para verlo con más claridad y de forma más precisa estas relaciones, describiremos en tres puntos los diferentes cluster que conformarían las d diferentes clases de un proceso de Hawkes d-dimensional:

- Para cada $k \in \{1, \ldots, d\}$, μ_k denotará la intensidad de un proceso de Poisson no-homogéneo, que describirá la llegada de migrantes a la población.

- Para cada $k \in \{1, \ldots, d\}$, $\phi_{k,j}$ denotará la intensidad de un proceso Poisson no-homogéneo, que describirá el número de descendientes de tipo k que tiene un migrante de tipo j con $j \in \{1, \ldots, d\}$.

- Para cada $k \in \{1, \ldots, d\}$, $\phi_{k,j}$ también denotará la intensidad de un proceso Poisson no-homogéneo, que describirá el número de descendientes de tipo k que tienen los descendientes de tipo j con $j \in \{1, \ldots, d\}$.

Luego la representación por medio de procesos cluster Poisson, significara que la superposición indistinguible de los procesos descritos en los puntos de arriba, va a ser igual en ley a N^k para cada $k \in \{1, \ldots, d\}$, por lo que N_t^k estaría denotando todo los migrantes y descendientes de tipo k hasta el tiempo t.

Esta representación es de relevancia para la tesis, ya que a partir de esta representación será posible calcular la función característica del proceso de Hawkes multidimensional, que eventualmente nos permitirá calcular la función característica del log-pecio de un activo bajo el modelo rugoso de Heston.

1.1.4. Función característica del proceso de Hawkes

Dado que el modelo micro-estructural del log-precio estará descrito por medio de un proceso de Hawkes bidimensional, es importancia investigar qué forma va a toma la función característica de las variables N_t de un proceso de Hawkes d-dimensional. A continuación presentamos un teorema en el que se específica esta función característica.

Teorema 1.1.7. *Sea N un proceso de Hawkes d-dimensional cuya función de intensidad está dada por* (1.1). *Denotamos para todo $t \geq 0$ y $a \in \mathbb{R}^d$ su función característica como*

$$L(a,t) := \mathbb{E}\left[\exp(ia \cdot N_t)\right].$$

Luego se sigue que

$$L(a,t) = \exp\left(\int_0^t (\boldsymbol{C}(a, t-s) - \boldsymbol{1}) \cdot \mu(s) ds\right),$$

donde $\boldsymbol{C} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^d$ es la solución de la siguiente ecuación integral

$$\boldsymbol{C}(a,t) = \exp\left(ia + \int_0^t (\boldsymbol{C}(a, t-s) - \boldsymbol{1}) \phi(s) ds\right).$$

Demostración. Como se ha mencionado, esta demostración se basará en la representación por medio de procesos de cluster Poisson del proceso de Hawkes d-dimensional. Lo primero que consideraremos es la construcción de d nuevos procesos cluster Poisson d-dimensionales $(\tilde{N}^{k,j})_{1\leq j\leq d}$ con $k \in \{1,\ldots,d\}$, de tal forma que para cada $k \in \{1,\cdots,d\}$ estos están conformados de la siguiente forma:

- Migrantes de tipo $j \in \{1,\ldots,d\}$ que arriban siguiendo un proceso Poisson no-homogéneo con intensidad $\phi_{j,k}$.

- Descendientes de tipo $l \in \{1,\ldots,d\}$, que proceden de migrantes de tipo $j \in \{1,\ldots,d\}$ y que arriban siguiendo un proceso Poisson no-homogéneo con intensidad $\phi_{l,j}$.

- Descendientes de tipo $l \in \{1,\ldots,d\}$, que proceden de otros descendientes de tipo $j \in \{1,\ldots,d\}$ y que arriban siguiendo un proceso Poisson no-homogéneo con intensidad $\phi_{l,j}$.

Luego, para cada $j \in \{1,\ldots,d\}$, $\tilde{N}_t^{k,j}$ representará el número de migrantes y descendientes de tipo j hasta el tiempo t. Podemos observar que la diferencia de esta representación para los d-diferentes procesos $(\tilde{N}^{k,j})_{1\leq j\leq d}$, con la dada en el apartado anterior para nuestro proceso de Hawkes d-dimensional original $(N^j)_{1\leq j\leq d}$, es que las intensidades de migración corresponden a las columnas de ϕ en vez de μ. Por otra parte, podemos observar que las intensidades de descendencia para los diferentes d procesos $(\tilde{N}^{k,j})_{1\leq j\leq d}$ es igual a la matriz ϕ, que corresponde a la que tiene el proceso N.

Consideremos ahora como $(N^{0,j})_{1\leq j\leq d}$ al vector de procesos Poisson no-homogéneos con intensidad μ, que coincide con los arribos de los migrantes en la representación por cluster Poisson del proceso de Hawkes N, es decir: cada $N_t^{0,k}$ corresponderá al número de migrantes de tipo k que han llegado hasta el tiempo t, y cuya distribución será Poisson con tasa $\int_0^t \mu_k(s)ds$. Algo que debemos considerar adicionalmente es que los procesos $\{N^{0,j}\}_{1\leq j\leq d}$ son independientes entre si, puesto que no hay relac ión entre la llegada de los diferentes migrantes.

Para cada $k \in \{1,\ldots,d\}$ denotaremos como $T_1^k \leq \cdots \leq T^k_{N_t^{0,k}}$, a los tiempos de llegada de los migrantes de tipo k hasta el tiempo t. Usando estos tiempos y la representación de N como un proceso cluster Poisson, se puede encontrar una relación con los d procesos $(\tilde{N}_t^{k,j})_{1\leq j\leq d}$, los cuales se pueden considerar adicionalmente independientes de N. Esta relación es como sigue para todo k: dado que llega un migrante de tipo k al tiempo T_u^k, el número de descendientes de las diferentes d clases que tiene este migrante hasta el tiempo $t \geq T_u^k$, es igual en ley que el proceso $(\tilde{N}_{t-T_u^k}^{k,j})_{1\leq j\leq d}$, dado que a partir del tiempo T_u^k, este migrante comienza a tener descendencia y por lo visto en el apartado anterior, su descendencia se comporta como un procesos Poisson no-homogéneos de tasa $\int_0^t \phi_{j,k}(s)ds$ para cada tipo j. Usando la notación anterior y las relaciones expuestas, se llega a que

$$N_t^k \stackrel{ley}{=} N_t^{0,k} + \sum_{1\leq j\leq d} \sum_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} \tilde{N}_{t-T_l^j}^{j,k,(l)}, \tag{1.2}$$

donde para todo $j \in \{1,\ldots,d\}$ y $l \in \mathbb{N}$, $(\tilde{N}_t^{j,k,(l)})_{1\leq k\leq d}$ serán copias independientes de $(\tilde{N}^{j,k})_{1\leq k\leq d}$ para $j \in \{1,\ldots,d\}$ e independientes de $(N^{0,k})_{0\leq k\leq d}$.

Recordemos que el término de la izquierda de la ecuación (1.2) en palabras de cluster Poisson, representa el número de migrantes y descendientes de tipo k que hay hasta el tiempo t; de la misma forma, la expresión derecha de la igualdad (1.2) también representa el número de individuos de tipo k hasta el tiempo t, puesto que el primer termino de éste lado de la igualdad cuenta el número de migrantes de tipo k hasta el tiempo t, mientras que el segundo va sumando el número de descendientes de tipo k que tienen los $N_t^{0,j}$ migrantes de la clase j con j en $\{1,\ldots,d\}$.

Usando la anterior igualdad en ley y denotando la función característica de estos d procesos cluster Poisson como

$$L_k(a,t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(ia\cdot(\tilde{N}_t^{k,j})_{1\leq j\leq d}\right)\right], \quad t\geq 0, \quad a\in\mathbb{R}^d,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\exp\left(ia\cdot N_t\right)|N_t^0\right] \\ =\ &\mathbb{E}\left[\exp\left(ia\cdot\left(N_t^{0,k} + \sum_{1\leq j\leq d}\sum_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} \tilde{N}_{t-T_l^j}^{j,k,(l)}\right)_{1\leq k\leq d}\right)\middle| N_t^0\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(ia\cdot\left(N_t^{0,k}\right)_{1\leq k\leq d} + \sum_{1\leq j\leq d}\sum_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} ia\cdot\left(\tilde{N}^{j,k,(l)}_{t-T_l^j}\right)_{1\leq k\leq d}\right)\middle| N_t^0\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(ia\cdot\left(N_t^{0,k}\right)_{1\leq k\leq d}\right)\prod_{1\leq j\leq d}\prod_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} \exp\left(ia\cdot\left(\tilde{N}^{j,k,(l)}_{t-T_l^j}\right)_{1\leq k\leq d}\right)\middle| N_t^0\right] \\
&= \exp\left(ia\cdot\left(N_t^{0,k}\right)_{1\leq k\leq d}\right)\prod_{1\leq j\leq d}\prod_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} \mathbb{E}\left[\exp\left(ia\cdot\left(\tilde{N}^{j,k,(l)}_{t-T_l^j}\right)_{1\leq k\leq d}\right)\middle| N_t^0\right] \\
&= \exp\left(ia\cdot\left(N_t^{0,k}\right)_{1\leq k\leq d}\right)\prod_{1\leq j\leq d}\prod_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} L_j\left(a, t-T_l^j\right), \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

donde las dos últimas igualdades se sigue de la independencia entre los procesos $\left(\tilde{N}^{j,k,(l)}_{t-T_l^j}\right)_{1\leq k\leq d}$ y $N_t^0 = \left(N_t^{0,k}\right)_{1\leq k\leq d}$. Adicionalmente en la última igualdad se ha usado que las variables T_u^j son medibles con respecto a la σ-álgebra que genera N_t^0, puesto que estos son los tiempos en los que arriban los migrantes.

Como $N_t^{0,k}$ es un proceso de Poisson no-homogéneo con tasa $\mu_k(t)$, se sigue por la propiedad de los estadísticos de orden que el vector $\left(T_1^k, \ldots, T^k_{N_t^{0,k}}\right)$ condicionado a $N_t^{0,k}$, se distribuye como los estadísticos de orden de las variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\left(X_1, \ldots, X_{N_t^{0,k}}\right)$ y donde su densidad es igual a $\mu_k(s)/\int_0^t \mu_k(r)dr$, para todo $s \leq t$. Usando esta última propiedad se sigue que para todo $m \in \mathbb{N}$ y $j \in \{1, \ldots, d\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\prod_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} L_j\left(a, t-T_l^j\right)\middle| N_t^{0,j} = m\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{1\leq l\leq m} L_j\left(a, t-X_l\right)\right] \\
&= \prod_{1\leq l\leq m} \mathbb{E}\left[L_j\left(a, t-X_l\right)\right] \\
&= \prod_{1\leq l\leq m} \int_0^t L_j(a, t-s)\frac{\mu_j(s)}{\int_0^t \mu_j(s)ds}ds \\
&= \left(\int_0^t L_j(a, t-s)\frac{\mu_j(s)}{\int_0^t \mu_j(s)ds}ds\right)^m,
\end{aligned}$$

por lo que

$$\mathbb{E}\left[\prod_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} L_j\left(a, t-T_l^j\right)|N_t^{0,j}\right] = \left(\int_0^t L_j(a, t-s)\frac{\mu_j(s)}{\int_0^t \mu_j(s)ds}ds\right)^{N_t^{0,j}}.$$

De la anterior igualdad y la ecuación (1.3), se sigue que para todo $a \in \mathbb{R}^d$ y $t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
L(a,t) &= \mathbb{E}\left[\exp(ia \cdot N_t)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left(ia \cdot N_t\right) | N_t^0\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(ia \cdot \left(N_t^{0,j}\right)_{1\leq j\leq d}\right) \prod_{1\leq j\leq d} \prod_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} L_j\left(a, t - T_l^j\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{d} ia_j N_t^{0,j}\right) \prod_{1\leq j\leq d} \prod_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} L_j\left(a, t - T_l^j\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{1\leq j\leq d} \exp\left(ia_j N_t^{0,j}\right) \prod_{1\leq j\leq d} \prod_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} L_j\left(a, t - T_l^j\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{1\leq j\leq d} \left(\exp\left(ia_j N_t^{0,j}\right) \prod_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} L_j\left(a, t - T_l^j\right)\right)\right] \\
&= \prod_{1\leq j\leq d} \mathbb{E}\left[\exp\left(ia_j N_t^{0,j}\right) \prod_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} L_j\left(a, t - T_l^j\right)\right] \\
&= \prod_{1\leq j\leq d} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left(ia_j N_t^{0,j}\right) \prod_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} L_j\left(a, t - T_l^j\right)\middle| N_t^{0,j}\right]\right] \\
&= \prod_{1\leq j\leq d} \mathbb{E}\left[\exp\left(ia_j N_t^{0,j}\right) \mathbb{E}\left[\prod_{1\leq l\leq N_t^{0,j}} L_j\left(a, t - T_l^j\right)\middle| N_t^{0,j}\right]\right] \\
&= \prod_{1\leq j\leq d} \mathbb{E}\left[\exp\left(ia_j N_t^{0,j}\right) \left(\int_0^t L_j(a, t-s) \frac{\mu_j(s)}{\int_0^t \mu_j(s) ds} ds\right)^{N_t^{0,j}}\right] \\
&= \prod_{1\leq j\leq d} \mathbb{E}\left[\left(\exp(ia_j) \int_0^t L_j(a, t-s) \frac{\mu_j(s)}{\int_0^t \mu_j(s) ds} ds\right)^{N_t^{0,j}}\right].
\end{aligned}
$$

Recordando que la función generadora de probabilidades de una variable aleatoria Poisson con tasa λ y al tiempo s, es igual a $\exp(\lambda(s-1))$, se sigue que

$$
L(a,t) = \prod_{1\leq j\leq d} \exp\left(\int_0^t \mu_j(s) ds \left(\int_0^t e^{ia_j} L_j(a, t-s) \frac{\mu_j(s)}{\int_0^t \mu_j(s) ds} ds - 1\right)\right)
$$

$$= \exp\left(\sum_{1\leq j\leq d}\left(\int_0^t e^{ia_j}L_j(a,t-s)\mu_j(s)ds - \int_0^t \mu_j(s)ds\right)\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{1\leq j\leq d}\int_0^t \left(e^{ia_j}L_j(a,t-s)-1\right)\mu_j(s)ds\right). \tag{1.4}$$

Observando que el análisis anterior también aplica para cada $(\tilde{N}^{k,j})_{1\leq j\leq d}$, pero que a diferencia de N, su tasa de migración es $(\phi_{j,k})_{1\leq j\leq d}$, se obtiene que para todo $k \in \{1,\ldots,d\}$

$$L_k(a,t) = \exp\left(\sum_{1\leq j\leq d}\int_0^t \left(e^{ia_j}L_j(a,t-s)-1\right)\phi_{j,k}(s)ds\right).$$

Finalmente, si denotamos como

$$\mathbf{C}(a,t) = \left(e^{ia_j}L_j(a,t)\right)_{1\leq j\leq d}, \tag{1.5}$$

se deduce de la ecuación (1.4) y de su equivalente para $L_k(a,t)$, que

$$L(a,t) = \exp\left(\int_0^t (\mathbf{C}(a,t-s)-\mathbf{1})\cdot\mu(s)ds\right),$$

donde **C** es la solución de la siguiente ecuación integral

$$\mathbf{C}(a,t) = \exp\left(ia + \int_0^t (\mathbf{C}(a,t-s)-\mathbf{1})\phi(s)ds\right).$$

□

1.2. Convergencia débil

Esta primera parte se basara en el primer capítulo del libro [4], por lo que teoremas y resultados se pueden encontrar con más detalle en esta referencia.

Consideraremos a (S,d) como un espacio métrico, no necesariamente separable o completo. Definimos $\mathbb{S}$ como la σ-álgebra de Borel inducida por las métrica d en S. También definimos como $\mathcal{P}(S,d)$ al espacio de todas las medidas de probabilidad definidas en la σ-álgebra $\mathbb{S}$.

Denotamos la integral con respecto a una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ en $\mathcal{P}(S,d)$, de una función integrable real f y que toma valore en S como $\mathbb{P}f$, es decir

$$\mathbb{P}f = \int f(s)d\mathbb{P}(s).$$

Haciendo uso de la notación anterior, procedemos a enunciar el primer resultado de interés.

Teorema 1.2.1. *Si* $\mathbb{P}f = \mathbb{Q}f$ *para toda función* f *acotada y uniformemente continua (u.c) entonces* $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.

El anterior teorema nos muestra como las funciones acotadas y *u.c* empiezan a ser relevantes para el estudio de las medidas de probabilidad en $\mathcal{P}(S, d)$, dado que nos permite identificar equivalencia entre medidas. A continuación presentaremos un término que iremos desarrollando y que es un pilar fundamental en esta teoría.

Definición 1.2.1. *Una medida de probabilidad* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S, d)$ *es tensa, si para cada* $\epsilon > 0$, *existe un conjunto compacto* K *en la topología inducida por* d *en* S, *tal que* $\mathbb{P}(K) > 1 - \epsilon$.

El término de *tensión* nos dice que la masa de probabilidad la podemos hacer tan insignificante como queramos fuera de un cierto compacto y concentrándola en este. Dotando ahora al espacio (S, d) con ciertas características, se pueden obtener propiedades relacionadas con la última definición.

Teorema 1.2.2. *Si* (S, d) *es separable y completo, entonces cada medida de probabilidad en* $\mathcal{P}(S, d)$ *es tensa.*

Ahora presentaremos un ejemplo que iremos desarrollando en el transcurso de este apartado, que nos permitirá ejemplificar la importancia de estos términos.

Ejemplo 1.2.1. *Sea* $C = C[0, 1]$ *el conjunto de funciones continuas* $x = x(\cdot)$ *en* $[0, 1]$. *Se define la norma en* C *como la norma supremo, es decir* $\|x\|_\infty = \sup_t |x(t)|$ *y la respectiva métrica que induce* $\rho(x, y) = \|x - y\|_\infty$. *Se puede demostrar que* (C, ρ) *es separable y completo, por lo que cada medida de probabilidad en* $\mathcal{P}(C, \rho)$ *es tensa.*

Adicionalmente definimos las proyecciones naturales $\pi_{t_1,\ldots,t_k}$ *de* C *a* $\mathbb{R}^k$ *para todo* $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$ *como* $\pi_{t_1,\ldots,t_k}(x) = (x(t_1), \ldots, x(t_k))$. *Luego la colección* C_f *de conjuntos de la forma* $\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k} H$ *donde* $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ *para todo* k, *es nombrado como el conjunto finito-dimensional y es una clase separante, es decir, que si dos medidas de probabilidad coinciden en ella entonces coinciden en toda la sigma álgebra.*

A continuación daremos la definición de convergencia débil, la cual por el Teorema de Portmanteau se es posible definir de diferentes formas.

Definición 1.2.2. *Una sucesión de medidas de probabilidad* $\mathbb{P}_n$ *en* $\mathcal{P}(S,d)$ *converge débilmente a* $\mathbb{P}$ *si* $\mathbb{P}_n f \to \mathbb{P} f$ *para cada función real continua y acotada* f *en* S*. Esta convergencia la denotaremos como* $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$*.*

Por el Teorema 1.2.1 se sigue que una sucesión de medidas de probabilidad no puede converger débilmente a dos límites diferentes, por lo que el límite es único[6].

Teorema 1.2.3 (Portmanteau)**.** *Sean* $\mathbb{P}_n$ *y* $\mathbb{P}$ *medidas de probabilidad en* $\mathcal{P}(S,d)$*, la siguientes cinco condiciones son equivalentes:*

i) $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$.

ii) $\mathbb{P}_n f \to \mathbb{P} f$ *para cada función acotada y u.c* f *en* S*.*

iii) $\limsup_n \mathbb{P}_n(F) \leq \mathbb{P}(F)$ *para todo conjunto cerrado F.*

iv) $\liminf_n \mathbb{P}_n(G) \geq \mathbb{P}(G)$ *para todo conjunto abierto G.*

v) $\mathbb{P}_n(A) \to \mathbb{P}(A)$ *para todo conjunto* A *tal que* $\mathbb{P}(\partial A) = 0$*, donde* ∂A *es la frontera de* A[7].

Ahora daremos un resultado que proporciona una herramienta para demostrar la convergencia débil.

Teorema 1.2.4. *Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión de medidas de probabilidad* $\{\mathbb{P}_n\}$ *en* $\mathcal{P}(S,d)$ *converja débilmente a* $\mathbb{P}$*, es que cada subsucesión* $\{\mathbb{P}_{n_i}\}$ *contenga una subsucesión* $\left\{\mathbb{P}_{n_{i(m)}}\right\}$ *que converge débilmente* $(m \to \infty)$ *a* $\mathbb{P}$*.*

Una noción de gran importancia en la teoría de convergencia débil es que una sucesión de

[6]Esta propiedad es de gran importancia, puesto que nos sugiere que esta convergencia pueda ser consecuencia de dotar con una métrica al espació $\mathcal{P}(S,d)$, y consecuentemente topologizarlo. Efectivamente a este espacio de medidas de probabilidad se le puede dotar con una métrica llamada métrica de Prohorov.

[7]A estos conjuntos se les conoce como conjuntos de $\mathbb{P}$-continuidad.

medidas de probabilidad sea relativamente compacta, la cual guarda una estrecha relación con el anterior teorema y que bajo otros criterios nos ayudará a probar que una sucesión converja débilmente.

Definición 1.2.3. *Sea* Π *una familia de medidas de probabilidad en* $(S, \mathbb{S})$*. Nosotros decimos que* Π *es relativamente compacta si toda sucesión de* Π *contiene una subsucesión que converge débilmente, es decir que para todo* $\{\mathbb{P}_n\}$ *en* Π*, existe* $\{\mathbb{P}_{n_i}\}$ *y una medida de probabilidad* $\mathbb{Q}$ *sobre* $(S, \mathbb{S})$ *tal que* $\mathbb{P}_{n_i} \Rightarrow_i \mathbb{Q}$*.*

Ya que vimos una noción de convergencia débil de medidas de probabilidad en un espacio métrico (S, d), vamos a fijar nuestra atención en unas medidas en particular, que son las inducidas por elementos aleatorios y que se conocen como sus distribuciones. Primero que todo, recordemos que una función $X : (\Omega, \Im, \mathbb{P}_\Omega) \to (S, \mathbb{S})$ donde $(\Omega, \Im, \mathbb{P}_\Omega)$ es un espacio de probabilidad, es un elemento aleatorio en S si es $\Im/\mathbb{S}$-medible. Si $S = \mathbb{R}$, a X se le conoce como variable aleatoria real, si $S = \mathbb{R}^k$, se le conoce como vector aleatorio y si $S = \mathbb{R}^\infty$, se le conoce como sucesión aleatoria. La distribución de un elemento aleatorio X denotado por $\mathbb{P}X^{-1}$ esta definido como sigue

$$\mathbb{P}X^{-1}(A) := \mathbb{P}_\Omega(X^{-1}A) = \mathbb{P}_\Omega(\{\omega : X(\omega) \in A\}) =: \mathbb{P}_\Omega(X \in A),$$

donde A es un elemento de $\mathbb{S}$. Nosotros diremos que una sucesión $\{X_n\}$ de elementos aleatorios converge en distribución (o en ley) al elemento aleatorio X, si la sucesión de distribuciones $\{\mathbb{P}X_n^{-1}\}$, converge débilmente a la distribución $\mathbb{P}X^{-1}$. Adicionalmente, diremos que una sucesión $\{X_n\}$ de elementos aleatorios será relativamente compacta, si su sucesión de distribuciones asociadas es relativamente compacta.

Cuando consideramos medidas de probabilidad en un espacio métrico, no es claro que estas sean inducidas por elementos aleatorios. Más aún, cuando tenemos una sucesión de medidas de probabilidad que son inducidas y que además convergen débilmente, en general no podemos decir mucho sobre la convergencia puntual o *c.s* de los elementos aleatorios que generan estas medidas, puesto que en un principio no tienen que estar en el mismo espacio de probabilidad. A pesar de lo anterior, es posible construir un espació de probabilidad en el que la convergencia débil implique la convergencia puntual de una cierta sucesión de elementos aleatorio en este espacio. El anterior resultado se le conoce como teorema de representación de Skorohod y el cual enunciaremos formalmente a continuación.

Teorema 1.2.5. *Suponga que $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ y $\mathbb{P}$ tiene soporte separable. Entonces existen elementos aleatorios X_n y X, definidos en un espacio de probabilidad en común $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$, tal que $\mathbb{P}X_n^{-1} = \mathbb{P}_n$ y $\mathbb{P}X^{-1} = \mathbb{P}$, y $X_n(\omega) \to X(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.*

Una aplicación del anterior resultado, es referente a la preservación de la convergencia débil ante transformaciones con propiedades más débiles a la continuidad.

Teorema 1.2.6 (Teorema del mapeo continuo)**.** *Sea h una función medible del espacio métrico (S, d) a otro espacio métrico (S', d'), y sea D_h el conjunto de los puntos de discontinuidad de h. Luego si $\mathbb{P}(D_h) = 0$ y si $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$, entonces $\mathbb{P}_n h^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}h^{-1}$.*

Notemos que al ser h una función $\mathbb{S}/\mathbb{S}'$ -medible, se tiene que $\mathbb{P}_n h^{-1}$ y $\mathbb{P}h^{-1}$ son distribuciones en $\mathcal{P}(S', d')$.

Continuaremos con nuestro ejemplo en el espacio de funciones continuas en $[0, 1]$, mostrando el papel que juegan estos nuevos conceptos.

Ejemplo 1.2.2 (Continuación ejemplo 1.2.1)**.** *Supongamos que las distribuciones finito-dimensionales de las medidas de probabilidad $\mathbb{P}_n$ en $\mathcal{P}(C, \rho)$ convergen débilmente a las de la medida $\mathbb{P}$, es decir que para todo k y $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq 1$, se tiene que $\mathbb{P}_n \pi_{t_1,\ldots,t_k}^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}\pi_{t_1,\ldots,t_k}^{-1}$. Adicionalmente supongamos que $\{\mathbb{P}_n\}$ es relativamente compacto, por lo que cada $\{\mathbb{P}_{n_i}\}$ contiene un subsucesión $\left\{\mathbb{P}_{n_{i(m)}}\right\}$ que converge débilmente a algún $\mathbb{Q}$. Como las proyecciones naturales son funciones continuas[8], se sigue por el teorema de mapeo continuo que $\mathbb{P}_{n_{i(m)}} \pi_{t_1,\ldots,t_k}^{-1} \Rightarrow_m \mathbb{Q}\pi_{t_1,\ldots,t_k}^{-1}$, pero como $\mathbb{P}_n \pi_{t_1,\ldots,t_k}^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}\pi_{t_1,\ldots,t_k}^{-1}$, se sigue por el Teorema 1.2.1 que $\mathbb{Q}\pi_{t_1,\ldots,t_k}^{-1} = \mathbb{P}\pi_{t_1,\ldots,t_k}^{-1}$. Luego como habíamos mencionado antes que el conjunto finito-dimensional C_f es una clase separante, se sigue que $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$. Por la hipótesis de que la*

[8] Recordemos que si una función es continua entonces es medible y más aun, el conjunto de discontinuidades es vació, por lo que es $\mathbb{P}$-continuo.

sucesión de medidas de probabilidad $\{\mathbb{P}_n\}$ es relativamente compacta, y puesto que demostramos que todos los límites subsecuenciales son iguales a $\mathbb{P}$, se sigue del Teorema 1.2.4 que la sucesión convergen débilmente a $\mathbb{P}$, es decir que $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$.

Lo anterior nos muestra que las hipótesis de ser relativamente compacto y que las distribuciones finito-dimensionales converjan, serán herramientas poderosas para demostrar la convergencia débil. Dado que demostrar que una sucesión de medidas de probabilidad es relativamente compacta no es tan sencillo, en los términos en que se presentó su definición, sería de interés buscar un herramienta que sea equivalente y de más fácil aplicación. Esta herramienta cosiste en una generalización del concepto de *tensión* presentado antes, pero esta vez considerando a una familia de medidas de probabilidad.

Definición 1.2.4 (Tensión)**.** *Una familia Π de medidas de probabilidad en $\mathcal{P}(S,d)$, es tensa si para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto K tal que $\mathbb{P}(K) > 1-\epsilon$ para todo $\mathbb{P} \in \Pi$.*

Este término de *tensión*, al igual que el presentado antes, indica que uno puede hacer la masa de probabilidad tan insignificante como uno quiera fuera de un compacto dado K, pero ésta vez no sólo con respecto a una sola medida de probabilidad, si no a toda una colección. Ahora presentaremos el Teorema de Prohorov, el cual expone la relación existente entre tensión y ser relativamente compacto.

Teorema 1.2.7 (Prohorov)**.** *Sea Π una colección de medidas de probabilidad en un espacio métrico (S,d). Si Π es tensa, entonces esta es relativamente compacta. Además, si (S,d) es separable y completo, y si Π es relativamente compacta entonces es tensa.*

Observemos que la equivalencia entre los términos de tensión y de relativamente compacto de una sucesión de medidas de probabilidad, se dan cuando el espacio (S,d) es separable y completo, aunque para los efectos de aplicación, la primera implicación que no está sujeta a ninguna restricción del espacio (S,d) es la de mayor interés. A continuación se presenta un resultado que se basa en lo expuesto en el ejemplo 1.2.2 y el Teorema de Prohorov

Corolario 1.2.1. *Si $\{\mathbb{P}_n\}$ es tensa, y si cada subsucesión que converge débilmente en efecto* *converge a $\mathbb{P}$, entonces toda la sucesión converge débilmente a $\mathbb{P}$.*

El resultado anterior nos muestra una forma práctica de demostrar que una sucesión de medidas de probabilidad converge débilmente. A diferencia del ejemplo 1.2.2, que se tenia la hipótesis de la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales, tenemos que toda sucesión converge. Es de importancia fijarnos que no siempre se puede proceder como en el ejemplo, puesto que en este caso el espacio métrico a trabajar es el de las funciones continuas en $[0, 1]$ con la métrica del supremo, el cual es un espacio donde las proyecciones canónicas son continuas y es aplicable el teorema del mapeo continuo. El espacio en el que estamos interesados es el de las funciones *càdlàg*, que son funciones continuas por la derecha y cuyos límites por la izquierda existen; en este caso las proyecciones canónicas son medibles, pero son continuas solo bajo ciertas condiciones.

A continuación se estudiara este espacio de funciones *càdlàg*, dotándolo de una métrica adecuada y construyendo así la famosa topología de Skorohod. Este espacio de funciones es de gran importancia para nosotros, porque los modelos que desarrollaremos para estudiar el log-precio de un activo, estarán expresados por procesos estocásticos cuyas trayectorias estarán en este espacio de funciones.

1.2.1. Construcción del espacio $D_E[0, \infty)$

Esta parte de la sección se basará en el capítulo dos de [16], por lo que nos podremos remitir a esta referencia para ver detalles y pruebas.

Denotemos a (E, r) como un espacio métrico y como $D_E[0, \infty)$ al espacio de funciones *cadlag* E-valuadas con dominio en $[0, \infty)$, es decir

$$D_E[0, \infty) = \left\{ x : [0, \infty) \to E : \forall t, \lim_{s \to t^+} x(s) = x(t) \quad \text{y} \quad \lim_{s \to t^-} x(s) \quad \text{existe} \right\}.$$

Antes de dotar con una métrica a $D_E[0, \infty)$, vamos a definir algunos conjuntos y funciones relevantes. Sea

$$\Lambda' := \{\lambda : [0, \infty) \to [0, \infty) : \lambda \text{ es estrictamente creciente}\},$$

$$\Lambda := \{\lambda \in \Lambda' : \lambda \text{ es Lipschitz continua y } \gamma(\lambda) < +\infty\},$$

donde

$$\gamma(\lambda) := \sup_{s>t\geq 0} \left| \log \frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t} \right|.$$

Para $\lambda \in \Lambda$, $x, y \in D_E[0,\infty)$ y $u \in [0,\infty)$ definimos $q = 1 \wedge r$ (que resulta ser otra métrica para E) y

$$d'(x,y,\lambda,u) := \sup_{t\geq 0} \{q(x(\lambda(t)\wedge u), y(t\wedge u))\}.$$

Con las definiciones anteriores, procedemos a definir la siguiente función en $D_E[0,\infty) \times D_E[0,\infty)$

$$d(x,y) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \left\{ \gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty e^{-u} d'(x,y,\lambda,u)du \right\}.$$

Esta función d resulta ser una métrica en el espacio $D_E[0,\infty)$, y más aún, si (E,r) es separable y completo, entonces $(D_E[0,\infty), d)$ también lo es.

Al espacio topológico que genera la métrica d definida en $D_E[0,\infty)$, se le conoce como *topología de Skorohod*. Esta topología es de gran importancia en el estudio de procesos estocásticos, y principalmente cuando queremos probar la convergencia débil de estos, al verlos como elementos aleatorios de un espacio de probabilidad, al espacio $D_E[0,\infty)$. Como vimos en la primera parte de este apartado, nosotros ya tenemos teoría que nos ayuda a estudiar la convergencia débil de elementos aleatorios en el espacio métrico $(D_E[0,\infty), d)$, y más aún, podríamos hacer uso del Corolario 1.2.1, el cual se apoya del concepto de tensión.

Dado a que hay una relación entre tensión y la completez relativa en el sentido topológico del espacio métrico a trabajar (ver Teoremas 7.2,7.3 y 12.3 de [4]), nuestro próximo propósito será la identificación de estos últimos, basándonos en el Teorema de *Arzelá-Ascoli* y que será la base de nuestra caracterización. A continuación, se presenta el modulo de continuidad, que va ser de utilidad en nuestra tarea de precisar los conjuntos relativamente compactos en la topología de Skorohod: sea $\delta, T > 0$, $x \in D_E[0,\infty)$ y definimos el módulo de continuidad en $D_E[0,\infty)$ como

$$w'(x,\delta,T) = \inf_{\{t_i\}} \max_i \sup_{s,t\in[t_{i-1},t_i)} q(x(s),x(t)),$$

donde $\{t_i\}$ son particiones de la forma $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$ con la condición que $\text{mín}_i(t_i - t_{i-1}) > \delta$. Recordando que un conjunto A es relativamente compacto si su cerradura $\overline{A}$ es compacta, se enuncia nuestra teorema de caracterización.

Teorema 1.2.8. *Sea (E, r) completo y separable. Entonces la cerradura de $A \subset D_E[0, \infty)$ es compacta si y solo si*

a) Para todo racional $t \geq 0$ existe un conjunto compacto $\Gamma_t \subset E$ tal que $x(t) \in \Gamma_t$ para todo $x \in A$.

b) Para todo $T > 0$,

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sup_{x \in A} w'(x, \delta, T) = 0.$$

Dado que ya mostramos de forma resumida como esta constituido el espacio métrico D_E, concluiremos esta sección enunciando un teorema que nos permite verificar si la sucesión de distribuciones asociada a una sucesión de elementos aleatorios definidos en D_E, es relativamente compacta en el sentido de medidas de probabilidad. En la demostración se hace uso de los resultados y conceptos vistos, y para ver detalles de esta prueba nos podemos remitir al Teorema 2.7 de [16].

Teorema 1.2.9. *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de procesos estocásticos con trayectorias en $D_E[0, \infty)$, y sea E completo y separable. Sea $\mathcal{F}_t^n = \sigma(X_n(s) : s \leq t)$ y M_T^n la colección de $\mathcal{F}_t^n$- tiempos de paro τ, tal que $\tau \leq T$ c.s. Supongamos que para todo $\epsilon > 0$ y racional $t \geq 0$, existe un conjunto compacto $\Gamma_{t,\epsilon} \subset E$ tal que $\inf_n \mathbb{P}\left(X_n(t) \in \Gamma_{t,\epsilon}\right) > 1 - \epsilon$. Entonces para algún $\beta > 0$ la siguientes condiciones implican que $\{X_n\}$ es relativamente compacto:*

a) Para $T, \delta > 0$ existe una variable aleatoria $\gamma_n^T(\delta) \geq 0$ tal que

$$\mathbb{E}\left[q^\beta(X_n(t+\delta), X_n(t)) | \mathcal{F}_t^n\right] \leq \mathbb{E}\left[\gamma_n^T(\delta) | \mathcal{F}_t^n\right], \quad 0 \leq t \leq T,$$

y $\lim_{\delta \to 0} \overline{\lim}_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\gamma_n(\delta)\right] = 0$.

b) Para todo $T > 0$, $\lim_{\delta \to 0} \overline{\lim}_{n \to \infty} \sup_{\tau \in M_T^n} \mathbb{E}\left[q^\beta(X_n(\tau + \delta), X(\tau))\right] = 0$.

1.3. Densidad Mittag-Leffler

La función Mittag-Leffler fue introducida en 1903 por el matemático sueco Gösta Mittag-Leffler y posteriormente investigada por otros autores por su importante aplicación en áreas como la física, biología e ingeniería [33]. Esta función en su forma original tiene la siguiente estructura

$$E_\alpha(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

donde $z \in \mathbb{C}$ y $\alpha > 0$. Como se observa, esta función es una generalización de la serie de potencias de la función exponencial, donde si consideramos $\alpha = 1$ se sigue que la función Mittag-Leffler es igual a la función exponencial. Una generalización de esta función Mittag-Leffler y a la cual nos referiremos de ahora en adelante será

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

donde $\beta > 0$. Los parámetros α y β pueden ser también complejos, pero con la condición que $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$, aunque para los efectos de este trabajo bastara con considerarlos reales no negativos.

La relevancia de la función Mittag-Leffler para este trabajo será cuando hagamos el estudio micro-estructural del precio, por lo que conocer algunas de sus propiedades es de interés. Una de las propiedades importantes de esta función es que es entera y por lo tanto infinitamente derivable [8]. Otra propiedad importante es que existe la transformada de Laplace al evaluarla en $-\gamma x^\alpha$, con $0 < \alpha \leq 1$, $\beta = 1$ y $\gamma > 0$, la cual es dada en [9] y es igual a

$$\frac{s^{\alpha-1}}{\gamma + s^\alpha}.$$

La forma con la que trabajaremos la función Mittag-Leffler será a partir de su densidad de probabilidad asociada; aunque para dar su expresión definiremos primero la distribución de probabilidad Mittag-Leffler

$$F^{\alpha,\gamma}(x) = 1 - E_{\alpha,1}(-\gamma x^\alpha), \quad x \geq 0, \alpha \in (0,1), \gamma > 0.$$

Luego derivándola, se llega a que su función de densidad toma la forma

$$\begin{aligned} f^{\alpha,\gamma}(x) = \frac{d}{dx}F^{\alpha,\gamma}(x) &= -\frac{d}{dx}E_{\alpha,1}(-\gamma x^{\alpha}) \\ &= -\frac{d}{dx}\sum_{k\geq 0}\frac{(-\gamma x^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \\ &= -\sum_{k\geq 1}\frac{-k(-\gamma x^{\alpha})^{k-1}\alpha\gamma x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k+1)} \\ &= \gamma x^{\alpha-1}\sum_{k\geq 1}\frac{k\alpha(-\gamma x^{\alpha})^{k-1}}{\Gamma(\alpha k+1)} \\ &= \gamma x^{\alpha-1}\sum_{k\geq 0}\frac{\alpha(k+1)(-\gamma x^{\alpha})^{k}}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)} \\ &= \gamma x^{\alpha-1}\sum_{k\geq 0}\frac{(-\gamma x^{\alpha})^{k}}{\Gamma(\alpha(k+1))} = \gamma x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\gamma x^{\alpha}), \end{aligned}$$

y por lo tanto la densidad Mittag-Leffler se define como

$$f^{\alpha,\gamma}(x) = \gamma x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\gamma x^{\alpha}).$$

Una de las características importantes de la distribución Mittag-Leffler es la forma de la transformada de Laplace de su cola $\overline{F}^{\alpha,\gamma}$, la cual toma la forma

$$\begin{aligned} \widehat{\overline{F}^{\alpha,\gamma}}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\overline{F}^{\alpha,\gamma}(x)dx &= \int_0^{\infty} e^{-sx}(1-F^{\alpha,\gamma}(x))dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx}E_{\alpha,1}(-\gamma x^{\alpha})dx = \frac{s^{\alpha-1}}{\gamma+s^{\alpha}}. \end{aligned}$$

De la transformada de Laplace $\widehat{\overline{F}^{\alpha,\gamma}}$ se puede derivar varias propiedades asintóticas, como la siguiente

$$\lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s^{-(1-\alpha)}}\widehat{\overline{F}^{\alpha,\gamma}}(s) = \lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s^{-(1-\alpha)}}\frac{s^{\alpha-1}}{\gamma+s^{\alpha}} = \frac{1}{\gamma}.$$

Luego utilizando el Teorema Tauberiano de Karamata [9] se sigue que

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\int_x^{\infty} f^{\alpha,\gamma}(t)dt = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{-\alpha}}\overline{F}^{\alpha,\gamma}(x) = \frac{1}{\gamma\Gamma(1-\alpha)}. \tag{1.6}$$

Ahora, usando la relación entre las transformadas de Laplace de la cola de una distribución y la de su densidad, se obtiene

$$\hat{f}^{\alpha,\gamma}(s) = 1 - s\widehat{\overline{F}^{\alpha,\gamma}}(s) = \frac{\gamma}{\gamma+s^{\alpha}}.$$

Dado que

$$\lim_{s\to\infty} s^{\alpha}\frac{\gamma}{\gamma+s^{\alpha}} = \lim_{s\to\infty} s^{\alpha}\hat{f}^{\alpha,\gamma}(s) = \gamma,$$

se sigue de nuevo por el Teorema Tauberiano de Karamata el siguiente límite

$$\lim_{x\downarrow 0} x^{1-\alpha} f^{\alpha,\gamma}(x) = \frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)}, \tag{1.7}$$

donde notemos que este límite esta describiendo el comportamiento cerca al cero de la densidad Mittag-Leffler. Por otro lado, al aplicarle la regla de L'Hôpital a (1.6), se obtiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{-\alpha x^{-\alpha-1}}(-f^{\alpha,\gamma}(x)) = \frac{1}{\gamma\Gamma(1-\alpha)},$$

y por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1} f^{\alpha,\gamma}(x) = \frac{\alpha}{\gamma\Gamma(1-\alpha)}. \tag{1.8}$$

A partir de los dos resultados asintóticos (1.7) y (1.8), se deriva que la densidad Mittag-Leffler es cuadrado integrable bajo la condición adicional de que $\alpha \in (1/2, 1)$. Lo anterior se debe a que para todo $\varepsilon > 0$, existen $t_0, T > 0$ tal que

$$\int_0^{t_0} \left[f^{\alpha,\gamma}(t)\right]^2 dt = \int_0^{t_0} t^{2(\alpha-1)} \left[\frac{f^{\alpha,\gamma}(t)}{t^{\alpha-1}}\right]^2 dt \leq \left[\varepsilon + \frac{\gamma^2}{\Gamma(\alpha)^2}\right] \int_0^{t_0} t^{2(\alpha-1)} dt < \infty,$$

$$\int_T^{\infty} \left[f^{\alpha,\gamma}(t)\right]^2 dt = \int_T^{\infty} t^{-2(\alpha+1)} \left[\frac{f^{\alpha,\gamma}(t)}{t^{-(\alpha+1)}}\right]^2 dt \leq \left[\varepsilon + \frac{\alpha^2}{\gamma^2\Gamma(1-\alpha)^2}\right] \int_T^{\infty} t^{-2(\alpha+1)} dt < \infty,$$

donde notemos que $0 < 2(\alpha-1) < 1$ y $-4 < -2(\alpha+1) < -3$. Además como la densidad Mittag-Leffler es continua en $(0,\infty)$, se sigue que es acotada en compactos, concluyendo que

$$\int_0^{\infty} \left[f^{\alpha,\gamma}(t)\right]^2 dt = \int_0^{t_0} \left[f^{\alpha,\gamma}(t)\right]^2 dt + \int_{t_0}^{T} \left[f^{\alpha,\gamma}(t)\right]^2 dt + \int_T^{\infty} \left[f^{\alpha,\gamma}(t)\right]^2 dt < \infty.$$

Para terminar esta sección, mostraremos otra propiedad que será utilizada más adelante, la cual indica que la distribución Mittag Leffler no tiene primer momento finito. Para demostrar esto notemos que haciendo uso de la trasformada de Laplace de la cola de la distribución Mittag-Leffler, y usando el teorema de la convergencia monótona en la primera igualdad, se obtiene que

$$\int_0^{\infty} [1 - F^{\alpha,\gamma}(x) dx] \;=\; \int_0^{\infty} e^{-sx}(1 - F^{\alpha,\gamma}(x))dx\Big|_{s=0} = \frac{s^{\alpha-1}}{\gamma+s^{\alpha}}\Big|_{s=0} = \infty,$$

concluyendo que la distribución Mittag-Leffler no tiene primer momento finito.

CAPÍTULO 2

Modelo micro-estructural

A trevés de la historia del los mercados financieros, se puede observar que algunas de las características que han marcado su evolución han sido el aumento del número de transacciones diarias y la velocidad con que se ejercen. Estos cambios son consecuencia de la alta conectividad que permiten los desarrollos tecnológicos, haciendo posible la extracción, manipulación y análisis de una gran cantidad de datos de forma casi instantánea. Transacciones de alta frecuencia o *high frequency trading* (HFT) en inglés, es el tipo de operaciones que se pueden encontrar en un mercado electrónico actual, los cuales con ayuda de algoritmos altamente eficientes son capaces de hacer miles de millones de transacciones por día [3]. El estudio micro-estructural que realizaremos en este capitulo será para precios de activos que se encuentren en un mercado electrónico regido por un marco de transacciones de alta frecuencia, por lo que deberemos considerar en la dinámica micro-estructural del precio, características relevantes de este tipo de mercado como lo son la alta endogeneidad de operaciones, la prevención del arbitraje estadístico, la asimetría entre las operaciones de compra y venta, y grandes volúmenes de transacciones [19]. Adicionalmente se tendrán en cuenta que los activos a considerar son de un tick[1] grande, en el sentido que el tick del activo tiene un valor casi igual a la diferencia entre la oferta y la demanda [1].

En este capítulo construiremos una sucesión de procesos que irán describiendo la dinámica micro-estructural del precio de un activo bajo el contexto presentado antes y que, además, sea capaz de converger al modelo rugoso de Heston[2]. Lo anterior lo desarrollaremos en dos secciones: en la primera consideraremos un modelo *tick-by-tick* basado en un proceso de Hawkes bidimensional y que codificará en su función de excitación varias características que conforman un mercado electrónico con transacciones de alta frecuencia. En la segunda sección trabajaremos con la tasa exógena del proceso de Hawkes, de tal forma que nos permita obtener el límite en ley que deseamos.

2.1. Modelo tick-by-tick

Esta sección se basará principalmente en el artículo [19] y en sus referencias, por lo que el lector podrá dirigirse a éstas para consultar más detalles sobre las ideas expuestas en esta sección.

Antes de presentar la forma que toma el modelo *tyck-by-tick* de nuestro estudio micro-estructural, primero consideraremos cuatro características que debemos tener en cuenta y deseamos codificar, para que podamos considerar nuestro modelo en un mercado electrónico bajo el contexto de HFT:

i) Evita el arbitraje estadístico, donde el concepto de arbitraje estadístico lo podemos dividir en dos partes: la primera es la noción usual de arbitraje y que recordemos consiste en hacer una serie de estrategias que resulten en una ganancia, a partir de una inversión igual a cero y sin correr ningún riesgo. La otra parte es que debido a la cantidad

[1]Un tick es una medida del movimiento mínimo hacia arriba o hacia abajo del valor de un precio.

[2]Aunque en realidad nos debería importaría la forma micro-estructural del log-precio, estudiar un modelo para el precio nos dará la intuición de la forma que debe tomar el log-precio, el cual se vera en el capitulo 3.

de información disponible de los movimientos de los precios, es posible utilizar técnicas estadísticas para poder llevar a cabo este tipo de estrategias, como por ejemplo la implementación de la ley de grandes números.

ii) Asimetría entre las operaciones de compra y venta, que significa que la razón con la que sube el precio de un activo después de haber ejecutado un pedido de compra (el generador de mercado hace un venta del activo) es menor que la razón con la que baja el precio seguido de un pedido de venta (el generador de mercado hace una compra del activo).

iii) Alta presencia de transacciones endógenas en el mercado, es decir, que varias de las operaciones que se realizan en un mercado electrónico son respuestas de otras operaciones producidas por algoritmos diseñados para hacer frente a transacciones de alta frecuencia.

iv) Altos volúmenes de transacciones que son consecuencia de grandes pedidos en el mercado, que aunque no son ejecutadas en un mismo ínstante de tiempo, son distribuidas en pequeños intervalos de tiempo y ejecutadas por algoritmos.

Es claro que tanto la tercera como la cuarta característica que deseamos codificar hacen parte de un marco de HFT, mientras que las otras dos son parte de un mercado no necesariamente en éste contexto. Las evidencias empíricas de estas cualidades se encuentran bien documentadas en las referencias del artículo que se mencionó al inicio.

Ahora, recordando que un análisis micro-estructural es "el estudio del proceso y los resultados del intercambio de activos bajo reglas comerciales explícitas" (O'Hara 1995)[26], procederemos a realizar nuestro estudio micro-estructural del preció de un activo, al describir una sucesión de modelos *tick-by-tick* bajo las reglas descritas antes.

Sea P_t^T una sucesión de procesos estocásticos indexado por T[3], que describirá el comporta-

[3]En lo que resta del trabajo, consideraremos que T es una variable discreta.

miento del precio de un activo y el cual definimos como

$$P_t^T := N_t^{T,+} - N_t^{T,-},$$

donde $N^T = (N_t^{T,+}, N_t^{T,-})$ es una sucesión de procesos de Hawkes bidimensionales cuya función de intensidad está dada por

$$\lambda_t^T = \begin{pmatrix} \lambda_t^{T,+} \\ \lambda_t^{T,-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_T^+(t) \\ \mu_T^-(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \phi^T(t-s) \cdot dN_s^T,$$

la cual cumple las condiciones dadas en 1.1.6 y donde

$$\phi^T(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^T(t) & \varphi_3^T(t) \\ \varphi_2^T(t) & \varphi_4^T(t) \end{pmatrix}.$$

La idea de definir de esta forma a P_t^T nace del hecho de que el precio de un activo en un mercado electrónico esta dispuesto en una rejilla, donde la distancia entre precios será considerada como un tick. Además consideramos que el proceso de Hawkes $N^{T,+}$ representa el número de veces que sube el precio del activo en esta rejilla y en cambio $N^{T,-}$ representa el número de veces que el precio baja.

En este punto es importante recordar la representación basada en cluster de un proceso de Hawkes multidimensional, donde recordemos que podemos ver a N^T como un modelo poblacional y a cada una de sus componentes como el proceso que cuenta el número de individuos de un cierto tipo, clase o raza. También se vio que cada componente de la función de excitación puede representar la intensidad de un proceso Poisson no homogéneo, que modela la descendencia de los migrantes de la población y hasta de otros descendientes. En este caso, nuestra población consistirá de dos tipos: el primero será las subidas del precio del activo, mientras que la otra clase consistirá en las bajadas del precio de éste.

Lo anterior nos permitiría dar la siguiente interpretación de las componentes de ϕ^T: dado que φ_1^T y φ_3^T son las componentes que aparecen en $\lambda^{T,+}$ y están asociadas respectivamente a $N^{T,+}$ y $N^{T,-}$, se sigue que $\int_0^t \varphi_1^T(s)ds$ es la tasa en la que sube el precio en reacción del histórico de subidas al tiempo t y $\int_0^t \varphi_3^T(s)ds$ es la tasa en la que sube el precio en reacción del histórico de las bajadas al tiempo t. De forma análoga se sigue que $\int_0^t \varphi_2^T(s)ds$ es la tasa en la que baja el precio en reacción del histórico de subidas al tiempo t y $\int_0^t \varphi_4^T(s)ds$ es la tasa en la que baja el precio en reacción del histórico de bajadas al tiempo t.

A partir de esta interpretación inicial podemos comenzar a codificar las características que deseamos en la función de excitación ϕ^T:

i) Como se mencionó antes, el arbitraje estadístico usa técnicas estadísticas para aprovecharse de condiciones del mercado y obtener ganancias sin correr ningún riesgo (claro está que estas ganancias deben superar a las obtenidas con una renta fija). Un ejemplo de estas estrategias se conoce como transacción a pares, la cual consiste en hallar dos activos cuyos precios históricos se encuentren altamente correlacionados; luego cuando los precios comiencen a presentar una discrepancia, se puede vender en corto el activo que se está sobrevalorando y comprar en largo el activo cuyo valor se esta subvalorando. El beneficio se obtiene cuando los precios vuelven a converger, obteniendo como ganancia la diferencia entre los precios cuando se realizó la estrategia. El hecho de que haya una gran cantidad de datos nos ayuda a garantizar estadísticamente que estos precios están positivamente correlacionados, por lo que la componente estadística está.

   Para realizar arbitraje estadístico se debe tener en cuenta el tipo de mercado en que se está operando, dado que en un mercado bajo el contexto de HFT es más difícil hacer este tipo de estrategias por el ritmo con el que se hace las transacciones. En HFT se maneja un gran volumen de transacciones en cuestión de milisegundos, por lo que los precios pueden variar rápidamente, haciendo que sacar provecho de un estado del mercado sea casi imposible, al menos para los agentes que no poseen algoritmos eficientes y competitivos para hacer transacciones. Por esta razón impondremos una condición en la función de excitación, con la que buscamos exhibir esta condición del mercado.

   Una forma de considerar que no es posible el arbitraje en nuestro modelo es suponer que para todo tiempo t, el número de veces que en promedio sube el activo es igual al número de veces que en promedio baja, prohibiéndonos sacar provecho de alguna tendencia que presente el activo. Por lo tanto, nos interesaría que

$$\mathbb{E}[N_t^{T,+}] = \mathbb{E}[N_t^{T,-}].$$

o equivalentemente

$$\int_0^t \mathbb{E}[\lambda_s^{T,+}]ds = \int_0^t \mathbb{E}[\lambda_s^{T,-}]ds.$$

Considerando el Teorema 1.1.2 se observa que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\lambda_t^{T,+}] &= \mathbb{E}\left[\mu_T^+(t) + \int_0^t \varphi_1^T(t-s)dN_s^{T,+} + \int_0^t \varphi_3^T(t-s)dN_s^{T,-}\right] \\
&= \mu_T^+(t) + \int_0^t \varphi_1^T(t-s)\mathbb{E}(\lambda_s^{T,+})ds + \int_0^t \varphi_3^T(t-s)\mathbb{E}(\lambda_s^{T,-})ds,
\end{aligned}$$

y análogamente

$$\mathbb{E}(\lambda_t^{T,-}) = \mu_T^-(t) + \int_0^t \varphi_2^T(t-s)\mathbb{E}(\lambda_s^{T,+})ds + \int_0^t \varphi_4^T(t-s)\mathbb{E}(\lambda_s^{T,-})ds.$$

Una forma para hacer que las esperanzas coincidan de forma natural, es mediante las siguientes igualdades

$$\mu_T := \mu_T^+ = \mu_T^- \quad \text{y} \quad \varphi_1^T + \varphi_3^T = \varphi_2^T + \varphi_4^T. \tag{2.1}$$

Por lo tanto tenemos nuestra primera condición para los elementos que conforman la función de intensidad del proceso de Hawkes bidimensional N^T.

ii) La asimetría entre las operaciones de compra y venta la codificamos de forma sencilla usando la noción que tenemos de las φ_i^T. Recordando que la idea de la asimetría en el mercado consiste en que el precio sube a una razón menor después de haber ejecutado una orden de compra, que lo que baja después de haber ejecutado una orden de venta, se sigue que esto se puede codificar, al considerar $\varphi_1^T < \varphi_4^T$, o equivalentemente $\varphi_3^T > \varphi_2^T$ (al considerar la condición (2.1)). Por lo tanto una forma de simplificar la condición anterior es tomando $\beta > 1$ y definir $\varphi_3^T = \beta\varphi_2^T$.

De lo anterior y de la condición (2.1) se concluye hasta ahora que la función de excitación toma la siguiente forma:

$$\phi^T(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^T(t) & \beta\varphi_2^T(t) \\ \varphi_2^T(t) & \varphi_1^T(t) + (\beta - 1)\varphi_2^T(t) \end{pmatrix}.$$

iii) Para codificar la presencia de una alta endogeneidad, lo primero que haremos es una analogía con un proceso de Hawkes unidimensional N con función de intensidad

$$\lambda_t = \mu + \int_0^t \varphi(t-s)ds,$$

donde $\mu > 0$ y φ es una función positiva e integrable. Considerando a N como un modelo poblacional, se sigue nuevamente que μ representa la intensidad con la que llegan los migrantes de la población y φ la intensidad con la que se produce la descendencia de los migrantes u otros descendientes. Ahora, recordando que la media de un proceso Poisson no homogéneo al tiempo t es igual a la integral de su intensidad hasta el tiempo t, se sigue que en promedio el número de descendientes que tiene un migrante u otro descendiente es $\|\varphi\|_1$. Por lo tanto, el número de descendientes en toda la población a partir de un solo migrante es igual a

$$\sum_{k\geq 1} \|\varphi\|_1{}^k = \frac{\|\varphi\|_1}{1 - \|\varphi\|_1},$$

donde hemos considerado $\|\varphi\|_1 < 1$ [4]. Notemos que en un contexto financiero, estos descendientes estarían ejemplificando las operaciones internas (o sintéticas) que son una respuesta a una operación producida de forma externa o de otra operación ya generada internamente. En este caso, buscaríamos que el número total de operaciones internas aumentara en comparación con las externas, por lo que hacer $\|\varphi\|_1$ cercano a uno seria una opción (considerando así una condición cercana a la inestabilidad). Además podríamos considerar hacer la intensidad μ cercana a cero, haciendo que las operaciones internas representen la mayor parte de las operaciones.

[4] $\|\cdot\|_1$ es la norma en L_1.

Esta última idea es la que nos gustaría preservar en el caso de un proceso de Hawkes bidimensional. Para ello nos basaremos en la información dada por

$$\mathcal{S}\left(\int_0^\infty \phi^T(s)ds\right) = \mathcal{S}\begin{pmatrix} \|\varphi_1^T\|_1 & \beta\|\varphi_2^T\|_1 \\ \|\varphi_2^T\|_1 & \|\varphi_1^T\|_1 + (\beta-1)\|\varphi_2^T\|_1 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{S}$ es el radio espectral de una matriz. Recordando que el radio espectral consiste en escoger el valor propio más grande en valor absoluto, se podría interpretar éste como nuestra medida de endogeneidad. Como el polinomio característico de nuestra matriz de interés toma la forma

$$P(\lambda) \;=\; [\lambda - (\|\varphi_1^T\|_1 - \|\varphi_2^T\|_1)][\lambda - (\|\varphi_1^T\|_1 + \beta\|\varphi_2^T\|_1)],$$

se sigue que el radio espectral es $\|\varphi_1^T\|_1 + \beta\|\varphi_2^T\|_1$, donde hemos considerando que $\beta > 1$ y por lo tanto

$$\mathcal{S}\left(\int_0^\infty \phi^T(s)ds\right) = \|\varphi_1^T\|_1 + \beta\|\varphi_2^T\|_1.$$

Ahora nos gustaría que nuestro radio espectral se acercara a la condición de inestabilidad, es decir que se acercara a uno. Una forma de hacer esto es considerando una sucesión a_T de reales positivos que converja a uno por la izquierda, junto con un par de funciones φ_1 y φ_2, tales que

$$\|\varphi_1\|_1 + \beta\|\varphi_2\|_1 = 1, \quad \varphi_1^T = a_T\varphi_1, \quad \varphi_2^T = a_T\varphi_2.$$

Por lo tanto, de la condición anterior se sigue que nuestra función de excitación toma la forma

$$\phi^T(t) = a_T\phi(t) = a_T\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \beta\varphi_2(t) \\ \varphi_2(t) & \varphi_1(t) + (\beta-1)\varphi_2 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\mathcal{S}\left(\int_0^\infty \phi^T(s)ds\right) = a_T\mathcal{S}\left(\int_0^\infty \phi(s)ds\right) = a_T(\|\varphi_1\|_1 + \beta\|\varphi_2\|_1) = a_T \leq 1.$$

Finalmente podemos considerar que el número de operaciones debidas a factores externos es baja si imponemos la condición

$$\mu_T(t) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall t \geq 0.$$

iv) Un flujo alto de transacciones se codifica al considerar que las funciones φ_1 y φ_2 son de cola pesada y una forma de considerar esto es tomando $\alpha \in (1/2, 1)$, tal que

$$\alpha x^{\alpha} \int_x^{\infty} (\varphi_1(s) + \beta\varphi_2(s))ds \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} C,$$

para alguna constante $C > 0$. El parámetro α puede ser considerado alrededor de 0.6 en la práctica [14], y para una α fijo se ha demostrado en [22] que para obtener un límite no degenerado, el comportamiento asintótico de a_T y μ^T debe cumplir

$$(1 - a_T)T^{\alpha} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} c_1 \quad \text{y} \quad \mu_T(t)T^{1-\alpha} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} c_2,$$

para constantes positivas c_1 y c_2.

Bajo las condiciones que ya hemos impuesto en los parámetros de la función de intensidad, se puede demostrar que las distribuciones finito dimensionales de P_t reescalado definida como sigue

$$\sqrt{\frac{1 - a_T}{c_1 T^{\alpha}}} P^T_{tT}, \quad t \in [0, 1],$$

convergerán débilmente cuando T tiende a infinito al siguiente comportamiento macroscópico del precio:

$$P_t = \frac{\sqrt{2}}{1 - \int_0^t (\varphi_1(s) - \varphi_2(s))ds} \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \gamma(1 - \sigma_s^2)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \gamma\nu \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sigma_s dB_s, \tag{2.2}$$

donde (W, B) es un movimiento Browniano bidimensional con correlación

$$\rho = \frac{1 - \beta}{\sqrt{2(1 + \beta^2)}},$$

y

$$\nu = \sqrt{\frac{2(1 + \beta^2)}{c_1 c_2 (1 + \beta)^2}}, \quad \gamma = c_1 \frac{\alpha}{C\Gamma(1 - \alpha)}.$$

Notemos que esta convergencia se asemeja a la que nos gustaría probar entre la sucesión de procesos que modelan el comportamiento *tick-by-tick* del precio y el proceso que describe el modelo rugoso de Heston, con la diferencia de que la convergencia que queremos probar es más fuerte y la volatilidad inicial del modelo rugoso de Heston toma un valor inicial diferente de cero, por lo que consideramos este resultado como un caso degenerado. Para poder llegar a un límite no degenerado tendremos que hacer unas consideraciones adicionales. En [19] se observa que el hecho de escoger $\varphi_1 = \varphi_2$ hace que la convergencia en el resultado anterior sea la convergencia débil en la topología de Skorohod, por lo que supondremos esta condición. Ciertas consideraciones adicionales sobre $\mu_T(t)$ harán que obtengamos un límite no degenerado, las cuales serán estudiadas en la siguiente sección.

Antes de estudiar con más detalle la función $\mu_T(t)$, haremos algunas observaciones con respecto a ϕ^T y exhibiremos una representación de $\lambda_t^{T,+}$ que será de gran importancia para este trabajo. Una forma de simplificar el trabajo, será escogiendo tanto a φ_1 y φ_2 como la densidad Mittag-Leffler $f^{\alpha,1}$ con parámetros $\alpha \in (1/2, 1)$ y $\gamma > 0$, que por (1.6) se sigue que es una candidata razonable, aparte de otras propiedades que la hacen de fácil manipulación. Con base a lo anterior, procederemos a definir la función de excitación de nuestro proceso de Hawkes bidimensional N^T en su versión final.

Definición 2.1.1. *Sea $\beta \geq 0$, $\alpha \in (1/2, 1)$ y $\gamma > 0$ tal que*

$$a_T = 1 - \gamma T^{-\alpha}, \quad \phi^T = \varphi^T \phi,$$

donde

$$\phi = \frac{1}{1+\beta} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad \varphi^T = a_T \varphi, \quad \varphi = f^{\alpha,1},$$

con $f^{\alpha,1}$ la función de densidad Mittag-Leffler.

Notemos que ϕ^T definida de esta forma cumple todas la propiedades que buscamos codificar de un mercado electrónico bajo el contexto de HFT.

Antes de reescribir nuestro proceso λ_t^T, notemos que de la igualdad $\varphi_1 = \varphi_2$ se sigue que $\lambda^{T,+} = \lambda^{T,-}$, por lo que bastará reescribir una de ellas. Para proceder será necesario definir la siguiente función:

$$\psi^T = \sum_{k \geq 1} (\varphi^T)^{*k},$$

donde $(\varphi^T)^{*1}(t) = \varphi^T(t)$, y para $k > 1$

$$(\varphi^T)^{*k}(t) = \int_0^t \varphi^T(s)(\varphi^T)^{*(k-1)}(t-s)ds.$$

Esta función será ampliamente usada a lo largo de este trabajo, ya que aparecerá como un elemento en la expresión con la que reescribiremos $\lambda_t^{T,+}$. Por esta razón se dará tres propiedades que nos permitirán trabajar con ésta función.

Proposición 2.1.1. *La función ψ^T definida anteriormente cumple las siguientes propiedades:*

i) $\psi^T * \varphi^T = \psi^T - \varphi^T$.

ii) $\int_0^\infty \psi^T(x)dx = \frac{T^\alpha}{\gamma} - 1$ *para* $0 < \gamma < 2T^\alpha$.

iii) $T(1-a_T)\psi^T(T\cdot) = a_T f^{\alpha,\gamma}$*, donde* $f^{\alpha,\gamma}$ *es la densidad Mittag-Leffler con parámetros* $0 < \alpha < 1$ *y* $\gamma > 0$.

Demostración.

i) Notemos que al ser $(\varphi^T)^{*k}$ no negativa para todo $k \geq 1$, se sigue del Teorema de Fubini-Tonelli que

$$\begin{aligned}
\left(\psi^T * \varphi^T\right)(t) &= \int_0^t \sum_{k\geq 1}(\varphi^T)^{*k}(s)\varphi^T(t-s)ds, \\
&= \sum_{k\geq 1}\int_0^t (\varphi^T)^{*k}(s)\varphi^T(t-s)ds, \\
&= \sum_{k\geq 1}(\varphi^T)^{*(k+1)}(t), \\
&= \psi^T(t) - \varphi^T(t),
\end{aligned}$$

concluyendo así la primera propiedad.

ii) De la definición de ψ^T se sigue que

$$1 + \int_0^\infty \psi^T(x)dx = 1 + \int_0^\infty \sum_{k\geq 1}(\varphi^T)^{*k}(x)dx,$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{k\geq 1} \int_0^\infty (\varphi^T)^{*k}(x)dx, \\
&= 1 + \sum_{k\geq 1} \left(\int_0^\infty \varphi^T(x)dx \right)^k,
\end{aligned}
$$

donde se ha usado el Teorema de Fubini-Tonelli y el hecho de que la integral de una convolución es el producto de las integrales. Por lo tanto, usando la definición de φ^T se sigue que

$$1 + \int_0^\infty \psi^T(x)dx = \sum_{k\geq 0} \left(\int_0^\infty a_T\varphi(x)dx \right)^k = \sum_{k\geq 0} a_T^k \left(\int_0^\infty \varphi(x)dx \right)^k = \sum_{k\geq 0} a_T^k.$$

Finalmente, de la definición de a_T obtenemos que para $0 < \gamma < 2T^\alpha$

$$1 + \int_0^\infty \psi^T(x)dx = \sum_{k\geq 0} a_T^k = \sum_{k\geq 0} (1 - \gamma T^{-\alpha})^k = \frac{T^\alpha}{\gamma}.$$

iii) Para verificar la igualdad vamos a observar que la transformada de Laplace de

$$\frac{T(1-a_T)\psi^T(T\cdot)}{a_T},$$

coincide con la de $f^{\alpha,\gamma}$. Recordemos que en la sección 1.3 se vio que la transformada de Laplace de la densidad Mittag-Lefflee es igual a

$$\frac{\gamma}{\gamma + z^\alpha}, \quad z \geq 0,$$

y notemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{T(1-a_T)\psi^T(Ts)}{a_T} \exp(-zs)ds &= \frac{1-a_T}{a_T} \int_0^\infty T \left(\sum_{k\geq 1} (a_T\varphi)^{*k}(Ts) \right) \exp(-zs)ds \\
&= \frac{1-a_T}{a_T} \int_0^\infty \left(\sum_{k\geq 1} (a_T\varphi)^{*k}(s) \right) \exp(-(z/T)s)ds \\
&= \frac{1-a_T}{a_T} \sum_{k\geq 1} \int_0^\infty (a_T\varphi)^{*k}(s) \exp(-(z/T)s)ds.
\end{aligned}
$$

Usando que la transformada de Laplace de una convolución es el producto de las transformadas, se sigue

$$\int_0^\infty \frac{T(1-a_T)\psi^T(T\cdot)}{a_T} \exp(-zs)ds = \frac{1-a_T}{a_T} \sum_{k\geq 1} \prod_{i=1}^{k} \left(\int_0^\infty a_T\varphi(s) \exp(-(z/T)s)ds \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-a_T}{a_T}\sum_{k\geq 1}\left(\int_0^\infty a_T\varphi(s)\exp(-(z/T)s)ds\right)^k \\
&= \frac{1-a_T}{a_T}\sum_{k\geq 1}\left(\frac{a_T}{1+(z/T)^\alpha}\right)^k \\
&= \frac{1-a_T}{a_T}\sum_{k\geq 1}\left(\frac{T^\alpha-\gamma}{T^\alpha+z^\alpha}\right)^k,
\end{aligned}
$$

donde se ha usado que $\varphi = f^{\alpha,1}$, por lo que la segunda igualdad se obtiene al considerar la transformada de Laplace de $f^{\alpha,1}$. Como la anterior serie converge para $z^\alpha > -\gamma$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1-a_T}{a_T}T\psi^T(Ts)\exp(-zs)ds &= \frac{1-a_T}{a_T}\left[\sum_{k\geq 0}\left(\frac{T^\alpha-\gamma}{T^\alpha+z^\alpha}\right)^k - 1\right] \\
&= \frac{\gamma T^{-\alpha}}{1-\gamma T^{-\alpha}}\left[\frac{T^\alpha+z^\alpha}{\gamma+z^\alpha}-1\right] \\
&= \frac{\gamma T^{-\alpha}}{1-\gamma T^{-\alpha}}\frac{T^\alpha-\gamma}{\gamma+z^\alpha} \\
&= \frac{\gamma}{\gamma+z^\alpha},
\end{aligned}
$$

por lo que efectivamente las transformadas de Laplace coinciden.

□

Procederemos a reescribir la función de intensidad $\lambda_t^{T,+}$, que por la Definición 2.1.1 toma la forma

$$
\lambda_t^{T,+} = \mu_T(t) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \varphi^T(t-s)dN_s^{T,+} + \frac{\beta}{1+\beta}\int_0^t \varphi^T(t-s)dN_s^{T,-}.
$$

Definimos $M_t^T = (M_t^{T,+}, M_t^{T,-})$ como

$$
M_t^T := N_t^T - \int_0^t \lambda_s^T ds,
$$

el cual por el Teorema 1.1.1 es una martingala. Luego considerando que

$$
dN^{T,+} = \lambda_s^{T,+}ds + dM_s^{T,+} \quad \text{y} \quad dN^{T,-} = \lambda_s^{T,-}ds + dM_s^{T,-},
$$

obtenemos la expresión

$$
\lambda_t^{T,+} = \mu_T(t) + \int_0^t \varphi^T(t-s)\lambda_s^{T,+}ds + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \varphi^T(t-s)(dM_s^{T,+} + \beta dM_s^{T,-}). \quad (2.3)
$$

Si definimos la función

$$g(t) = \mu_T(t) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \varphi^T(t-s)(dM_s^{T,+} + \beta dM_s^{T,-}),$$

se observa que la integral con respecto a $M_s^{T,+} + \beta M_s^{T,-}$ existe por ser un proceso de variación finita y φ^T una función continua. Más aun, como esta martingala se expresa como la diferencia entre dos procesos que son finitos *c.s* para todo $t \geq 0$ y que además tienen trayectorias crecientes, se sigue que la integral de φ^T con respecto a $M_s^{T,+} + \beta M_s^{T,-}$ es también de variación finita. Luego, como una función de variación finita en un intervalo cerrado es acotada, se sigue que g es acotada localmente. Por lo anterior y el Lema 4.0.2 en el apéndice obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lambda_t^{T,+} &= \mu_T(t) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \varphi^T(t-s)(dM_s^{T,+} + \beta dM_s^{T,-}) \\
&\quad + \int_0^t \psi^T(t-s)\left[\mu_T(s) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^s \varphi^T(s-u)(dM_u^{T,+} + \beta dM_u^{T,-})\right] ds \\
&= \mu_T(t) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \varphi^T(t-s)(dM_s^{T,+} + \beta dM_s^{T,-}) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-s)\mu_T(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-s)\int_0^s \varphi^T(s-u)\left(dM_u^{T,+} + \beta dM_u^{T,-}\right) ds \\
&= \mu_T(t) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \varphi^T(t-s)(dM_s^{T,+} + \beta dM_s^{T,-}) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-s)\mu_T(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \int_u^t \psi^T(t-s)\varphi^T(s-u)ds\left(dM_u^{T,+} + \beta dM_u^{T,-}\right) \\
&= \mu_T(t) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \varphi^T(t-s)(dM_s^{T,+} + \beta dM_s^{T,-}) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-s)\mu_T(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \int_0^{t-u} \psi^T(t-u-s)\varphi^T(s)ds\left(dM_u^{T,+} + \beta dM_u^{T,-}\right) \\
&= \mu_T(t) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \varphi^T(t-s)(dM_s^{T,+} + \beta dM_s^{T,-}) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-s)\mu_T(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \left(\psi^T * \varphi^T\right)(t-u)\left(dM_u^{T,+} + \beta dM_u^{T,-}\right) \\
&= \mu_T(t) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \varphi^T(t-s)(dM_s^{T,+} + \beta dM_s^{T,-}) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-s)\mu_T(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-y) - \varphi^T(t-u)\left(dM_u^{T,+} + \beta dM_u^{T,-}\right)
\end{aligned}$$

$$= \quad \mu_T(t) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-s)\mu_T(s)ds + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-y)\left(dM_u^{T,+} + \beta dM_u^{T,-}\right),$$

es decir que la función $\lambda^{T,+}$ se puede reescribir como

$$\mu_T(t) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-s)\mu_T(s)ds + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-y)\left(dM_u^{T,+} + \beta dM_u^{T,-}\right). \quad (2.4)$$

Notemos que en el cálculo anterior se ha usado el teorema de Fubini-Tonelli para el caso de Riemann-Stieltjes, el cual es aplicable por ser el producto entre ψ^T y φ^T una función continua y no negativa.

Esta ultima expresión de $\lambda^{T,+}$ será la más utilizada en los capítulos 3 y 4. Su importancia radica en que nos permitirá demostrar propiedades como la tensión de una sucesión de procesos, los cuales demostrarán la convergencia débil entre nuestra sucesión de procesos bajo el modelo *tick-by-tick* del log-precio y el proceso que describe el log-precio bajo el modelo rugoso de Heston.

2.2. Modificación de la tasa exógena

En este capitulo incluiremos una pieza clave que nos permitirá demostrar la convergencia débil en el espacio de Skorohod, y que a diferencia de lo mostrado en la sección anterior, no tendrá un límite degenerado.

En la sección anterior se mostró que μ_T debe comportarse asintoticamente como $T^{\alpha-1}$ con $\alpha \in (1/2, 1)$, por lo que una posible elección seria escoger $\mu_T(t) = \mu T^{\alpha-1}$ con $\mu > 0$. En [19] se muestra que esta elección de μ_T hace que el modelo *tick-by-tick* converja al modelo 2.2, el cual recordemos tiene la desventaja de que considera una volatilidad igual a cero. Una forma de solventar este problema es sumándole una constante $\xi > 0$ a la dinámica de la volatilidad, y luego hacer el procedimiento inverso al que se hizo para obtener la convergencia en ley, de tal forma que podamos llegar a la expresión que debe tomar la función de intensidad exógena de nuestro proceso de Hawkes.

Procediendo de esta forma se llega a que la función cumple una ecuación integral, la cual se presenta en el siguiente lema.

Lema 2.2.1. *Sea* $\mu_T = \mu T^{\alpha-1}$ *y* $\xi > 0$. *L3a ecuación*

$$\hat{\mu}_T(t) + \int_0^t \psi^T(t-s)\hat{\mu}_T(s)ds = \mu_T + \xi\mu_T\frac{1}{1-a_T} + \mu_T(1-\xi)\int_0^t \psi^T(t-s)ds \tag{2.5}$$

con $\hat{\mu}_T(t)$ *como incógnita, tiene como única solución a*

$$\hat{\mu}_T(t) = \mu_T + \xi\mu_T\frac{1}{1-a_T}\left(1 - \int_0^t \varphi^T(t-s)ds\right) - \mu_T\xi\int_0^t \varphi^T(t-s)ds. \tag{2.6}$$

Demostración. Observemos que la expresión en (2.5) es una ecuación de renovación, por lo que bajo ciertas condiciones tiene una única solución. Efectivamente notemos que (2.5) toma la forma

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_T(t) &= \left(\mu_T + \xi\mu_T\frac{1}{1-a_T} + \mu_T(1-\xi)\int_0^t \psi^T(t-s)ds\right) - \int_0^t \psi^T(t-s)\hat{\mu}_T(s)ds\\ &= g_T(t) - \int_0^t \psi^T(t-s)\hat{\mu}_T(s)ds,\end{aligned}$$

donde

$$g_T(t) = \left(\mu_T + \xi\mu_T\frac{1}{1-a_T} + \mu_T(1-\xi)\int_0^t \psi^T(t-s)ds\right).$$

Es claro que g_T es una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ continua, acotada en compactos y medible, por lo que se sigue del Lema 4.0.2 que la ecuación (2.5) tiene una única solución.

Ahora vamos a calcular esta solución por un camino diferente al ofrecido por el lema antes mencionado. Primero consideremos la convolución de φ^T con el termino izquierdo de la ecuación (2.5)

$$\begin{aligned}&\left(\left[\hat{\mu}_T(\cdot) + \int_0^{\cdot} \psi^T(\cdot-u)\hat{\mu}_T(u)du\right] * \varphi^T(\cdot)\right)(t)\\ =& \int_0^t \hat{\mu}_T(s)\varphi^T(t-s)ds + \int_0^t\int_0^s \psi^T(s-u)\hat{\mu}_T(u)du\varphi^T(t-s)ds\\ =& \int_0^t \hat{\mu}_T(s)\varphi^T(t-s)ds + \int_0^t\int_0^{t-u} \psi^T(s)\varphi^T(t-u-s)ds\hat{\mu}_T(u)du,\\ =& \int_0^t \hat{\mu}_T(s)\varphi^T(t-s)ds + \int_0^t (\psi^T * \varphi^T)(t-u)\hat{\mu}_T(u)du,\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se ha usado el Teorema de Fubini-Tonelli y un cambio de variable. Usando que $\psi^T * \varphi^T = \psi^T - \varphi^T$, se sigue

$$
\begin{aligned}
&\left(\left[\hat{\mu}_T(\cdot) + \int_0^{\cdot} \psi^T(\cdot - u)\hat{\mu}_T(u)du\right] * \varphi^T(\cdot)\right)(t) \\
= \;& \int_0^t \hat{\mu}_T(s)\varphi^T(t-s)ds + \int_0^t (\psi^T(t-u) - \varphi^T(t-u))\hat{\mu}_T(u)du, \\
= \;& \int_0^t \psi^T(t-u)\hat{\mu}_T(u)du,
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\left(\left[\hat{\mu}_T(\cdot) + \int_0^{\cdot} \psi^T(\cdot - s)\hat{\mu}_T(s)ds\right] * \varphi^T(\cdot)\right)(t) = \int_0^t \psi^T(t-u)\hat{\mu}_T(u)du. \tag{2.7}
$$

Por otro lado, si hacemos la convolución de φ^T con el termino derecho de la ecuación (2.5), hacemos un cambio de variable y utilizamos las propiedades de la convolución, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&\left(\left[\mu_T + \xi\mu_T\frac{1}{1-a_T} + \mu_T(1-\xi)\int_0^{\cdot} \psi^T(\cdot - u)du\right] * \varphi^T(\cdot)\right)(t) \\
= \;& \int_0^t \varphi^T(t-s)\left(\mu_T + \xi\mu_T\frac{1}{1-a_T}\right)ds + \mu_T(1-\xi)\int_0^t\int_0^s \psi^T(s-u)du\varphi^T(t-s)ds \\
= \;& \mu_T\left(1+\xi\frac{1}{1-a_T}\right)\int_0^t \varphi^T(t-s)ds + \mu_T(1-\xi)\int_0^t\int_0^{t-u} \psi^T(s)\varphi^T(t-u-s)dsdu \\
= \;& \mu_T\left(1+\xi\frac{1}{1-a_T}\right)\int_0^t \varphi^T(t-s)ds + \mu_T(1-\xi)\int_0^t (\psi^T * \varphi^T)(t-u)du \\
= \;& \mu_T\left(1+\xi\frac{1}{1-a_T}\right)\int_0^t \varphi^T(t-s)ds + \mu_T(1-\xi)\int_0^t (\psi^T(t-u) - \varphi^T(t-u))du \\
= \;& \left(\mu_T\left(1+\xi\frac{1}{1-a_T}\right) - \mu_T(1-\xi)\right)\int_0^t \varphi^T(t-s)ds + \mu_T(1-\xi)\int_0^t \psi^T(t-u)du \\
= \;& \mu_T\xi\left(1+\frac{1}{1-a_T}\right)\int_0^t \varphi^T(t-s)ds + \mu_T(1-\xi)\int_0^t \psi^T(t-u)du,
\end{aligned}
$$

es decir que

$$
\begin{aligned}
&\left(\left[\mu_T + \xi\mu_T\frac{1}{1-a_T} + \mu_T(1-\xi)\int_0^{\cdot} \psi^T(\cdot - u)du\right] * \varphi^T(\cdot)\right)(t) \\
&= \mu_T\xi\left(1+\frac{1}{1-a_T}\right)\int_0^t \varphi^T(t-s)ds + \mu_T(1-\xi)\int_0^t \psi^T(t-u)du.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Luego, como las ecuaciones (2.7) y (2.8) partieron de hacer la convolución de los términos de la ecuación (2.5) con φ^T, se obtiene la siguiente igualdad

$$\int_0^t \psi^T(t-u)\hat{\mu}_T(u)du = \mu_T\xi\left(1+\frac{1}{1-a_T}\right)\int_0^t \varphi^T(t-s)ds + \mu_T(1-\xi)\int_0^t \psi^T(t-u)du.$$

Al remplazar esta ultima igualdad en la ecuación (2.5), se sigue que

$$\begin{aligned}
&\hat{\mu}_T(t) + \mu_T\xi\left(1+\frac{1}{1-a_T}\right)\int_0^t \varphi^T(t-s)ds + \mu_T(1-\xi)\int_0^t \psi^T(t-s)ds \\
&= \mu_T + \xi\mu_T\frac{1}{1-a_T} + \mu_T(1-\xi)\int_0^t \psi^T(t-s)ds,
\end{aligned}$$

y si ahora de esta ultima se despeja $\hat{\mu}_T(t)$, se llega a la solución de la ecuación (2.5), la cual es

$$\hat{\mu}_T(t) = \mu_T + \mu_T\xi\frac{1}{1-a_T}\left(1-\int_0^t \varphi^T(t-s)ds\right) - \mu_T\xi\int_0^t \varphi^T(t-s)ds.$$

□

Al igual que con el termino $\lambda^{T,+}$, hay una forma de reescribir $\hat{\mu}_T$ de utilidad, verificando que es una función positiva y garantizando la adecuada definición de $\lambda^{T,+}$. Recordando la igualdad $a_T = 1-\gamma T^{-\alpha}$, se sigue

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_T(t) &= \mu_T + \mu_T\xi\frac{1}{1-a_T}\left(1-\int_0^t \varphi^T(t-s)ds\right) - \mu_T\xi\int_0^t \varphi^T(t-s)ds \\
&= \mu_T + \mu_T\xi\left[\frac{1}{\gamma T^{-\alpha}}\left(1-(1-\gamma T^{-\alpha})\int_0^t \varphi(t-s)ds\right) - (1-\gamma T^{-\alpha})\int_0^t \varphi(t-s)ds\right] \\
&= \mu_T + \mu_T\xi\left[\frac{1}{\gamma T^{-\alpha}}\left(1-\int_0^t \varphi(t-s)ds\right) + \gamma T^{-\alpha}\int_0^t \varphi(t-s)ds\right] \\
&= \mu_T + \mu_T\xi\left[\frac{1}{\gamma T^{-\alpha}}\int_t^\infty \varphi(t-s)ds + \gamma T^{-\alpha}\int_0^t \varphi(t-s)ds\right],
\end{aligned}$$

por lo que obtenemos la siguiente forma de expresar $\hat{\mu}_T(t)$, la cual muestra que es positiva:

$$\hat{\mu}_T(t) = \mu_T + \mu_T\xi\left[\frac{1}{\gamma T^{-\alpha}}\int_t^\infty \varphi(t-s)ds + \gamma T^{-\alpha}\int_0^t \varphi(t-s)ds\right]. \qquad (2.9)$$

Para finalizar esta sección, notemos que la función $\hat{\mu}_T(t)$ es decreciente para T suficientemente grande, puesto que al hacer el cambio de variable $u = t-s$ en la solucion de (2.5) obtenemos

$$\hat{\mu}_T(t) = \mu_T + \mu_T \xi \frac{1}{1-a_T}\left(1 - \int_0^t \varphi^T(u)du\right) - \mu_T \xi \int_0^t \varphi^T(u)du.$$

Luego derivando con respecto a t obtenemos

$$\frac{d}{dt}\hat{\mu}_T(t) = -\mu_T \xi \frac{1}{1-a_T}\varphi^T(t) - \mu_T \xi \varphi^T(t).$$

Como para T suficientemente grande, cada termino de la ecuación anterior es negativo, se sigue que la derivada de $\hat{\mu}_T(t)$ es negativa para todo $t > 0$, concluyendo así que $\hat{\mu}_T$ es decreciente para T suficientemente grande.

CAPÍTULO 3

Del modelo micro-estructural al modelo rugoso de Heston

En los dos capítulos anteriores ya hemos presentado tanto herramientas de convergencia débil en el espacio de Skorohod, como una sucesión de procesos estocásticos que promete converger en ley al proceso que describe el modelo rugoso de Heston (3). En este capítulo efectivamente presentaremos la convergencia débil, considerando un reescalamiento de la sucesión de procesos presentada en el capítulo 2. Para llegar a este resultado, se considerara 6 lemas y una proposición que nos ayudaran a construir el teorema principal del capítulo, aunque el resultado que utilizaremos para derivar la función característica, será una consecuencia de este teorema y será presentado como un corolario al final.

Varios resultados de convergencia débil que se utilizaran requieren una construcción más elaborada que la que presentamos en el capítulo 1. Por esta razón se le sugiere al lector que se dirija principalmente a [2] para ver con más detalles los resultados que se utilizan.

El primer lema que consideraremos proporciona una cota para la esperanza de la integral de la función de intensidad, que será de utilidad a la hora de probar la tensión del reescalamiento del modelo *tick-by-tick*.

Lema 3.0.1. *Existe una constante $k > 0$ tal que para todo $t \geq 0$, $0 < \delta \leq 1$ y T suficientemente grande*

$$\frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\mathbb{E}\left[\int_{Tt}^{T(t+\delta)} \lambda_s^{T,+} ds\right] \leq \frac{k}{\delta^{\alpha-1}} \tag{3.1}$$

Demostración. Recordemos que la función de intensidad de nuestro proceso de Hawkes bidimensional dado por (2.4) cumple que

$$\lambda_t^{T,+} = \lambda_t^{T,-} = \hat{\mu}_T(t) + \int_0^t \psi^T(t-s)\hat{\mu}_T(s)ds + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-s)(dM_s^{T,+} + \beta dM_s^{T,-}).$$

Como además la función de intensidad es no negativa, notemos que para todo $t \geq 0$ el valor esperado de la integral de $\lambda_t^{T,+}$ entre Tt y $T(t+\delta)$ para $0 < \delta \leq 1$ es

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\int_{Tt}^{T(t+\delta)} \lambda_s^{T,+} ds] \\
= & \int_{Tt}^{T(t+\delta)} \mathbb{E}\left[\lambda_s^{T,+}\right] ds \\
= & \int_{Tt}^{T(t+\delta)} \mathbb{E}\left[\hat{\mu}_T(s) + \int_0^s \psi^T(s-r)\hat{\mu}_T(r)dr + \frac{1}{1+\beta}\int_0^s \psi^T(s-r)(dM_r^{T,+} + \beta dM_r^{T,-})\right] ds \\
= & \int_{Tt}^{T(t+\delta)} \hat{\mu}_T(s)ds + \int_{Tt}^{T(t+\delta)} \int_0^s \psi^T(s-r)\hat{\mu}_T(r)drds \\
& + \frac{1}{1+\beta}\int_{Tt}^{T(t+\delta)} \mathbb{E}\left[\int_0^s \psi^T(s-r)(dM_r^{T,+} + \beta dM_r^{T,-})\right] ds \\
= & \int_{Tt}^{T(t+\delta)} \hat{\mu}_T(s)ds + \int_0^{T(t+\delta)} (\psi^T * \hat{\mu}_T)(s)ds - \int_0^{Tt} (\psi^T * \hat{\mu}_T)(s)ds \\
= & \int_{Tt}^{T(t+\delta)} \hat{\mu}_T(s)ds + \left(\left[\int_0^{\cdot} \psi^T(r)dr\right] * \hat{\mu}_T\right)(T(t+\delta)) - \left(\left[\int_0^{\cdot} \psi^T(r)dr\right] * \hat{\mu}_T\right)(Tt) \\
= & \int_{Tt}^{T(t+\delta)} \hat{\mu}_T(s)ds + \int_0^{T(t+\delta)} \hat{\mu}_T(T(t+\delta)-s)\int_0^s \psi^T(r)drds \\
& - \int_0^{Tt} \hat{\mu}_T(Tt-s)\int_0^s \psi^T(r)drds,
\end{aligned}$$

donde hemos usando que $\int_0^{\cdot}(f*g) = \left(\int_0^{\cdot} f\right) * g$ y que la integral

$$\int_0^s \psi^T(s-r)(dM_r^{T,+} + \beta dM_r^{T,-}),$$

tiene media cero, por la observación que se hizo después del Corolario 1.1.1.

Ahora usando que la función $\hat{\mu}_T$ es decreciente, se obtiene que

$$\int_{Tt}^{T(t+\delta)} \hat{\mu}_T(s)ds \leq \int_0^{T\delta} \hat{\mu}_T(s)ds,$$

y

$$-\hat{\mu}_T(Tt-s) \leq -\hat{\mu}_T(T(t+\delta)-s) \quad \forall s \in [0, Tt],$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_{Tt}^{T(t+\delta)} \lambda_s^{T,+} ds\right] &\leq \int_{Tt}^{T(t+\delta)} \hat{\mu}_T(s)ds + \int_0^{T(t+\delta)} \hat{\mu}_T(T(t+\delta)-s) \int_0^s \psi^T(r)drds \\
&\quad - \int_0^{Tt} \hat{\mu}_T(T(t+\delta)-s) \int_0^s \psi^T(r)drds \\
&\leq \int_0^{T\delta} \hat{\mu}_T(s)ds + \int_{Tt}^{T(t+\delta)} \hat{\mu}_T(T(t+\delta)-s) \int_0^s \psi^T(r)drds \\
&\leq \int_0^{T\delta} \hat{\mu}_T(s)ds + \int_0^{T\delta} \hat{\mu}_T(u) \int_0^\infty \psi^T(r)drdsu \\
&= \int_0^{T\delta} \hat{\mu}_T(s)ds \left(1 + \int_0^\infty \psi^T(r)dr\right) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Usando la propiedad (ii) de la proposición 2.1.1 en (3.2) obtenemos

$$\mathbb{E}\left[\int_{Tt}^{T(t+\delta)} \lambda_s^{T,+} ds\right] \leq \frac{T^\alpha}{\gamma} \int_0^{T\delta} \hat{\mu}_T(s)ds = \frac{T^{\alpha+1}\delta}{\gamma} \int_0^1 \hat{\mu}_T(T\delta r)dr. \qquad (3.3)$$

Para seguir nuestra demostración, vamos a hallar una cota para la integral de la ultima ecuación. Para ello consideremos la cola de la distribución Mittag-Leffler $\overline{F}^{\alpha,1}$ y el hecho de que $\varphi = f^{\alpha,1}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} T^\alpha \int_0^1 \int_{T\delta s}^\infty \varphi(r)drds &= \lim_{T\to\infty} T^\alpha \int_0^1 \overline{F}^{\alpha,1}(T\delta s)ds \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{T^{\alpha-1}}{\delta} \int_0^{T\delta} \overline{F}^{\alpha,1}(s)ds \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^{1-\alpha}\delta} \int_0^{T\delta} \overline{F}^{\alpha,1}(s)ds \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{(1-\alpha)T^{-\alpha}} \overline{F}^{\alpha,1}(T\delta)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{(T\delta)^\alpha}{(1-\alpha)\delta^\alpha} \int_{T\delta}^{\infty} \varphi(r)dr = \frac{1}{\gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\delta^\alpha},$$

donde la penúltima igualdad se sigue de aplicar la regla de L'Hôpital ($\overline{F}^{\alpha,1}$ no es integrable por lo visto en el Capítulo 1) y la ultima igualdad se obtuvo al considerar el límite (1.6). De lo anterior se sigue que para $\varepsilon > 0$ existe T_0 tal que para $T > T_0$

$$\left| T^\alpha \int_0^1 \int_{T\delta s}^{\infty} \varphi(r)drds - \frac{1}{\gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\delta^\alpha} \right| < \varepsilon.$$

Luego usando la forma en la que se reescribió $\hat{\mu}_T$ en (2.9) y el hecho de que φ es una densidad, se deduce

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \hat{\mu}_T(T\delta s)ds &= \int_0^1 \left[\mu_T + \xi\mu_T \left(\frac{T^\alpha}{\gamma} \int_{T\delta s}^{\infty} \varphi(r)dr + \gamma T^{-\alpha} \int_0^{T\delta s} \varphi(r)dr \right) \right] ds \\
&= \mu_T \left(1 + \xi \left[\frac{T^\alpha}{\gamma} \int_0^1 \int_{T\delta s}^{\infty} \varphi(r)drds + \gamma T^{-\alpha} \int_0^1 \int_0^{T\delta s} \varphi(r)drds \right] \right) \\
&\leq \mu_T \left(1 + \xi \left[\frac{\varepsilon}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\delta^\alpha} + \gamma T^{-\alpha} \int_0^1 \int_0^{\infty} \varphi(r)drds \right] \right) \\
&= \mu T^{\alpha-1} \left(1 + \xi \left[\frac{\varepsilon}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\delta^\alpha} + \gamma T^{-\alpha} \right] \right),
\end{aligned}$$

para $T > T_0$. Por lo tanto como estamos considerando $\delta \leq 1$, existe una constante $c > 0$ independiente de δ tal que para T suficientemente grande

$$\int_0^1 \hat{\mu}_T(T\delta s)ds \leq \frac{\gamma}{\delta^\alpha} c T^{\alpha-1}.$$

Usando esta ultima desigualdad en la desigualdad (3.3), se obtiene la siguiente cota

$$\mathbb{E}\left[\int_{Tt}^{T(t+\delta)} \lambda_s^{T,+} ds \right] \leq \frac{c}{\delta^{\alpha-1}} T^{2\alpha}.$$

Por lo tanto, multiplicando la ultima desigualdad por $(1-a_T)/(T^\alpha\mu) = \gamma/(T^{2\alpha}\mu)$, obtenemos

$$\frac{1-a_T}{T^\alpha\mu} \mathbb{E}\left[\int_{Tt}^{T(t+\delta)} \lambda_s^{T,+} ds \right] \leq \frac{k}{\delta^{\alpha-1}}$$

donde k es una constante positiva que no depende ni de δ, ni de T. □

Ahora, a partir de la sucesión de procesos de Hawkes N^T visto en el capítulo anterior, definimos un reescalamiento de ésta sucesión y de sus procesos asociados λ^T y M^T. Para todo $t \in [0,1]$ sea

$$X_t^T = \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu} N_{tT}^T, \quad \Lambda_t^T = \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu} \int_0^{tT} \lambda_s^T ds,$$

$$Z_t^T = \sqrt{\frac{T^\alpha \mu}{1-a_T}} \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu} M_t^T = \sqrt{\frac{T^\alpha \mu}{1-a_T}} (X_t^T - \Lambda_t^T). \tag{3.4}$$

Esta sucesión de procesos serán utilizados para definir el reescalamiento de los procesos que modelan el comportamiento *tick-by-tick* del log-precio del activo a considerar. Dado que ha estos procesos le demostraremos su convergencia en ley, necesitaremos varias propiedades de ellos, como por ejemplo la C-tensión[1], la cual presentamos en los siguientes dos lemas.

Lema 3.0.2. *La sucesión de procesos* $\{X^T\}_T$ *y* $\{\Lambda^T\}_T$ *son* C*-tensos*

Demostración. Utilizaremos el Teorema VI-3.26 de [2], cuya aplicación requiere que primero probemos que la sucesión de procesos $\{X^T\}_T$ y $\{\Lambda^T\}_T$ sean relativamente compactos en la topología de Skorohod y posteriormente su continuidad en el límite.

Para probar la compacidad relativa, vamos a utilizar el inciso (a) del Teorema 1.2.9, y para ello encontraremos una sucesión de procesos γ_n^T que cumpla las condiciones del teorema. Inicialmente, notemos que al ser λ_t^T la función de intensidad de N^T se sigue del Teorema 1.1.2 que

$$\mathbb{E}\left[N_t^T\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \lambda_s^T ds\right],$$

y por lo tanto, de la definición de X^T y Λ^T

$$\mathbb{E}\left[X_1^T\right] = \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu} \mathbb{E}\left[N_T^T\right] = \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu} \mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda_s^T ds\right] = \mathbb{E}\left[\Lambda_1^T\right].$$

Usando el Lema 3.0.1 y considerando $t = 0$ y $\delta = 1$, se llega a

$$\mathbb{E}\left[X_1^T\right] = \mathbb{E}\left[\Lambda_1^T\right] = \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu} \mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda_s^T ds\right] \leq k,$$

[1]La C-tensión consiste de dos partes, la primera es que efectivamente la colección de medidas sea tensas y la segunda es que su límite solo tenga masa en el conjunto de funciones continuas.

donde k es una constante que no depende de T. La anterior desigualdad es válida para cada componente de los procesos X_1^T y Λ_1^T, dado que para $\lambda^{T,-}$ la desigualdad (3.1) también se cumple[2]. Por lo tanto como X^T y Λ^T son procesos cuyas componentes son crecientes y no negativas, tenemos que para todo $t \in [0,1]$ y $\eta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente grande tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left\|X_t^T\right\| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\left\|X_t^T\right\|\right] &\leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\mathbb{E}\left[\left|X_t^{T,+}\right|\right] + \mathbb{E}\left[\left|X_t^{T,-}\right|\right]\right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\mathbb{E}\left[\left|X_1^{T,+}\right|\right] + \mathbb{E}\left[\left|X_1^{T,-}\right|\right]\right) \leq \frac{2}{\varepsilon}k < \eta, \end{aligned}$$

y análogamente

$$\mathbb{P}\left(\left\|\Lambda_t^T\right\| > \varepsilon\right) < \eta.$$

De lo anterior se deduce que para todo $t \in [0,1]$

$$\sup_{T>0}\mathbb{P}\left(\left\|X_t^T\right\| > \varepsilon\right) < \eta, \quad \text{y} \quad \sup_{T>0}\mathbb{P}\left(\left\|\Lambda_t^T\right\| > \varepsilon\right) < \eta, \tag{3.5}$$

es decir que para t fijo, las sucesiones $\left\{X_t^T\right\}$ y $\left\{\Lambda_t^T\right\}$ son tensas.

Por otro lado, notemos que si usamos la definición de $q(x,y)$ de la sección 1.2.1, se tiene que para $0 < \delta \leq 1$ y $T > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[q(X_{t+\delta}^T, X_t^T) \mid \mathcal{F}_t^T\right] \\ = \; & \mathbb{E}\left[1 \wedge \left\|X_{t+\delta}^T - X_t^T\right\| \middle| \mathcal{F}_t^T\right] \\ \leq \; & \mathbb{E}\left[\left\|X_{t+\delta}^T - X_t^T\right\| \middle| \mathcal{F}_t^T\right] \\ \leq \; & \mathbb{E}\left[\left|X_{t+\delta}^{T,+} - X_t^{T,+}\right| \middle| \mathcal{F}_t^T\right] + \mathbb{E}\left[\left|X_{t+\delta}^{T,-} - X_t^{T,-}\right| \middle| \mathcal{F}_t^T\right] \\ = \; & \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\left(\mathbb{E}\left[N_{T(t+\delta)}^{T,+} - N_{Tt}^{T,+} \middle| \mathcal{F}_t^T\right] + \mathbb{E}\left[N_{T(t+\delta)}^{T,-} - N_{Tt}^{T,-} \middle| \mathcal{F}_t^T\right]\right) \\ = \; & \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\left(\mathbb{E}\left[\int_0^{T(t+\delta)} \lambda_s^{T,+} ds - \int_0^{Tt} \lambda_s^{T,+} ds \middle| \mathcal{F}_t^T\right]\right. \\ & \left. + \mathbb{E}\left[\int_0^{T(t+\delta)} \lambda_s^{T,-} ds - \int_0^{Tt} \lambda_s^{T,-} ds \middle| \mathcal{F}_t^T\right]\right) \end{aligned}$$

[2]Recordemos que $\lambda^{T,-} = \lambda^{T,+}$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\left(\mathbb{E}\left[\int_{Tt}^{T(t+\delta)} \lambda_s^{T,+} ds \middle| \mathcal{F}_t^T\right] + \mathbb{E}\left[\int_{Tt}^{T(t+\delta)} \lambda_s^{T,-} ds \middle| \mathcal{F}_t^T\right]\right) \\
&= 2\frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\mathbb{E}\left[\int_{Tt}^{T(t+\delta)} \lambda_s^{T,+} ds \middle| \mathcal{F}_t^T\right]. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

De forma análoga

$$\mathbb{E}\left[q(\Lambda_{t+\delta}^T, \Lambda_t^T)|\mathcal{F}_t^T\right] \leq 2\frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\mathbb{E}\left[\int_{Tt}^{T(t+\delta)} \lambda_s^{T,+} ds|\mathcal{F}_t^T\right]. \qquad (3.7)$$

Por lo demostrado en el Lema 3.0.1, se sigue que

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{T\to\infty}}\, 2\frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\mathbb{E}\left[\int_{Tt}^{T(t+\delta)} \lambda_s^{T,+} ds\right] = 0,$$

concluyendo del Teorema 1.2.9 y de (3.5), (3.6) y (3.7), que la sucesión de procesos $\left\{X^T\right\}_T$ y $\left\{\Lambda^T\right\}_T$ son relativamente compactos en la topología de Skorohod.

Ya probamos que la sucesión de procesos $\left\{X^T\right\}_T$ y $\left\{\Lambda^T\right\}_T$ son relativamente compactos, por lo que solo faltaría probar que en el límite los saltos ocurren con probabilidad cero para poder concluir la C-tensión. Notemos que para todo $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned}
\sup_{t\leq N}\left|\triangle X_t^T(\omega)\right| &= \sup_{t\leq N}\left|X_t^T(\omega) - X_{t-}^T(\omega)\right| \\
&= \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\sup_{t\leq N}\left|N_{tT}^T(\omega) - N_{tT-}^T(\omega)\right| \\
&\overset{c.s}{=} \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu} = \frac{\gamma}{T^{2\alpha}\mu},
\end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que los procesos de conteo $N^{T,+}$ y $N^{T,-}$ son simples, por lo que los saltos son a lo más de tamaño uno. Por otro lado notemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\leq N}\left|\triangle \Lambda_t^T(\omega)\right| &= \sup_{t\leq N}\left|\Lambda_t^T(\omega) - \Lambda_{t-}^T(\omega)\right| \\
&= \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\sup_{t\leq N}\left|\int_0^{tT} \lambda_s^T(\omega) ds - \int_0^{tT-} \lambda_s^T(\omega) ds\right| \\
&\overset{c.s}{=} \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}(0) = 0,
\end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que la integral de Riemann es continua. Luego para todo $\varepsilon > 0$ existe $T_0 > 0$ tal que si $T > T_0$ se tiene que $\gamma/(T^{2\alpha}\mu) < \varepsilon$ y por lo tanto

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq N}\left|\triangle X_t^T(\omega)\right| > \varepsilon\right) = 0, \quad \forall T > T_0,$$

y

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq N}\left|\triangle \Lambda_t^T(\omega)\right| > \varepsilon\right) = 0, \quad \forall T > T_0.$$

Finalmente usando el Teorema VI-3.26 de [2], se sigue que la sucesión de procesos $\left\{X^T\right\}_T$ y $\left\{\Lambda^T\right\}_T$ son C-tensos. $\square$

Ahora probaremos la C-tensión de la sucesión $\left\{Z^T\right\}_T$.

Lema 3.0.3. *La sucesión de procesos $\left\{Z^T\right\}_T$ es C-tenso.*

Demostración. Recordemos que por definición, tenemos que

$$Z_t^T = \sqrt{\frac{T^\alpha\mu}{1-a_T}\frac{1-a_T}{T^\alpha\mu}}M_{tT}^T.$$

Luego como N^T es un proceso de conteo bidimensional cuyo compensador es continuo, se tiene del Teorema 1.1.4

$$\langle M^{T,+}, M^{T,+}\rangle_{tT} = \int_0^{tT}\lambda_s^{T,+}ds, \quad \langle M^{T,-}, M^{T,-}\rangle_{tT} = \int_0^{tT}\lambda_s^{T,-}ds,$$

y

$$\langle M^{T,+}, M^{T,-}\rangle_{tT} = \langle M^{T,-}, M^{T,+}\rangle_{tT} = 0.$$

Por lo tanto

$$\langle Z^T, Z^T\rangle_t = \left(\sqrt{\frac{T^\alpha\mu}{1-a_T}\frac{1-a_T}{T^\alpha\mu}}\right)^2\langle M^T, M^T\rangle_{tT} = \frac{1-a_T}{T^\alpha\mu}\begin{pmatrix}\int_0^{tT}\lambda_s^{T,+}ds & 0\\ 0 & \int_0^{tT}\lambda_s^{T,-}ds\end{pmatrix},$$

es decir

$$\langle Z^T, Z^T\rangle_t = diag(\Lambda^T).$$

Ahora usaremos el resultado anterior y el Teorema VI-3.26 de [2] para demostrar que la sucesión $\left\{Z^T\right\}$ es C-tensa. Para ello notemos:

- La sucesión de procesos $\left\{Z_0^T\right\}_T$ es tensa, puesto que Z_0^T es constante y se observa de

$$Z_0^T = \sqrt{\frac{T^\alpha \mu}{1-a_T}} \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\left(N_{(0)T}^T - \int_0^{(0)T} \lambda_s^T ds\right) = \sqrt{\frac{T^\alpha \mu}{1-a_T}} \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}(0) = 0.$$

- Definimos la sucesión de procesos $\left\{G_t^T\right\}_T$ como

$$G_t^T = \langle Z^{T,+}, Z^{T,+}\rangle_t + \langle Z^{T,-}, Z^{T,-}\rangle_t.$$

  Por lo demostrado antes, podemos notar lo siguiente

$$\begin{aligned} G_t^T &= \langle Z^{T,+}, Z^{T,+}\rangle_t + \langle Z^{T,-}, Z^{T,-}\rangle_t \\ &= \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\int_0^{tT} \lambda_s^{T,+} ds + \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\int_0^{tT} \lambda_s^{T,-} ds \\ &= 2\frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\int_0^{tT} \lambda_s^{T,+} ds \\ &= 2\Lambda_t^{T,+}, \end{aligned}$$

  es decir que $G^T = 2\Lambda^{T,+}$. Al ser la sucesión Λ^T C-tensa, se tiene que cada una de sus componentes lo es, y consecuentemente G^T también.

Por lo tanto, del Teorema VI-4.13 de [2] se sigue que la sucesión $\left\{Z^T\right\}_T$ es tensa en la topología de Skorohod.

Ahora probaremos que el tamaño de los saltos de Z^T tienden a cero con probabilidad uno cuando T tiende a infinito. Para ello notemos que para todo $N > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \sup_{t \le N}\left|\triangle Z_t^T(\omega)\right| &= \sqrt{\frac{T^\alpha \mu}{1-a_T}} \sup_{t \le N}\left|\triangle (X_t^T - \Lambda_t^T)(\omega)\right| \\ &\le \sqrt{\frac{T^\alpha \mu}{1-a_T}}\left(\sup_{t \le N}\left|\triangle X_t^T(\omega)\right| + \sup_{t \le N}\left|\triangle \Lambda_t^T(\omega)\right|\right) \\ &\overset{c.s}{=} \sqrt{\frac{T^\alpha \mu}{1-a_T}} \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu} \\ &= \sqrt{\frac{T^{2\alpha} \mu}{\gamma}} \frac{\gamma}{T^{2\alpha} \mu} \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{\mu}} \frac{1}{T^\alpha}. \end{aligned}$$

Luego para todo $\varepsilon > 0$ existe $T_0 > 0$ tal que si $T > T_0$

$$\sup_{t \leq N} \left| \triangle Z_t^T(\omega) \right| \overset{c.s}{\leq} \sqrt{\frac{\gamma}{\mu}} \frac{1}{T^\alpha} < \varepsilon, \tag{3.8}$$

y por lo tanto

$$\mathbb{P}(\sup_{t \leq N} \left| \triangle Z_t^T \right| > \varepsilon) = 0, \quad \forall T > T_0.$$

Finalmente, como $\{Z^T\}_T$ es tensa en la topología de Skorohod y su límite con probabilidad uno no tiene saltos, al aplicar el Teorema VI-3.26 de [2], se deduce que es C-tensa. $\square$

Acontinuación mostraremos que las sucesiones X^T y Λ^T, en el límite tendrán la misma ley, permitiéndonos trabajar más adelante solo con Λ^T en ves de X^T.

Lema 3.0.4. *La sucesión* $\left\{ \sup_{t \in [0,1]} \left| X_t^T - \Lambda_t^T \right| \right\}_T$ *converge en probabilidad a cero.*

Demostración. Por la definición de M^T, se sigue que

$$X_t^T - \Lambda_t^T = \frac{1 - a_T}{T^\alpha \mu} M_{tT}^T,$$

donde recordemos que cada componente de M^T es una martingala cuadrado integrable. Por lo tanto, para cada componente se tiene al aplicar la desigualdad máxima de Doob que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,1]} \left| X_t^T - \Lambda_t^T \right|^2 \right] &= \mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{1 - a_T}{T^\alpha \mu} M_{tT}^T \right|^2 \right] \\
&= \frac{\gamma^2}{T^{4\alpha} \mu^2} \mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,1]} \left| M_{tT}^T \right|^2 \right] \leq 4 \frac{\gamma^2}{\mu^2} T^{-4\alpha} \mathbb{E}[(M_T^T)^2].
\end{aligned}$$

Al considerar la forma que tiene $\langle M^T, M^T \rangle$, se obtiene de la definición de *bracket processes* que

$$\mathbb{E}[(M_t^T)^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \lambda_t^T dt \right], \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

y consecuentemente usando la anterior desigualdad y el Lema 3.0.1

$$\mathbb{E}[\sup_{t \in [0,1]} \left| X_t^T - \Lambda_t^T \right|^2] \leq 4 \frac{\gamma^2}{\mu^2} T^{-4\alpha} \mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda_s^T ds \right] \leq k T^{-2\alpha},$$

donde k es una constante que no depende de T. Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$ existe $T_0 > 0$ tal que si $T > T_0$ entonces $k/(\varepsilon T^{2\alpha}) \leq \eta$ y por consiguiente

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,1]} \left|\Lambda_t^T - X_t^T\right| > \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]} \left|\Lambda_t^T - X_t^T\right|^2\right] \leq \frac{k}{\varepsilon T^{2\alpha}} \leq \eta.$$

Finalmente, se sigue que la sucesión de procesos $\left\{\sup_{t\in[0,1]} \left|X_t^T - \Lambda_t^T\right|\right\}_T$ converge a cero en probabilidad cuando T tiende a infinito. □

Notemos que el lema anterior nos permite utilizar el Teorema de Slutsky, para concluir que si X^T converge débilmente a un proceso X, entonces Λ^T también converge débilmente a X.

Una consecuencia del resultado anterior, indica que al ser $\Lambda_t^{T,+} = \Lambda_t^{T,-}$, se sigue que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,1]} \left|X_t^{T,+} - X_t^{T,-}\right| &= \sup_{t\in[0,1]} \left|X_t^{T,+} - \Lambda_t^{T,+} - (X_t^{T,-} - \Lambda_t^{T,-})\right| \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} \left|X_t^{T,+} - \Lambda_t^{T,+}\right| + \sup_{t\in[0,1]} \left|X_t^{T,-} - \Lambda_t^{T,-}\right|.\end{aligned}$$

Por lo tanto como la convergencia en probabilidad a cero de $\sup_{t\in[0,1]} \left|X_t^T - \Lambda_t^T\right|$ es para cada uno de sus componentes, se concluye

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|X_t^{T,+} - X_t^{T,-}\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

y consecuentemente, si una subsucesión de $X^{T,+}$ converge en ley a un X, se sigue que la subsucesión asociada de $X^{T,-}$ también converge en ley a esta X.

De los procesos límites hasta ahora sabemos muy poco, pero con el siguiente lema daremos a conoceremos otras propiedades del proceso al que converge en ley la sucesión Z^T.

Lema 3.0.5. *El proceso Z^T converge en ley a una martingala Z tal que $[Z, Z] = diag(X)$.*

Demostración. Supongamos que (X^T, Z^T) converge en ley a (X, Z). De lo visto antes, sabemos que (X, Z) es continua y más aún, por la desigualdad (3.8) se sigue del Teorema IX-1.19 de [2] que cada componente de Z es una martingala local. Ahora de la definición (3.4) y del hecho de que la variación cuadrática es bilineal, obtenemos

$$
\begin{aligned}
[Z^T, Z^T]_t &= \left[\sqrt{\frac{T^\alpha \mu}{1-a_T}}\frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}(N_{tT}^T - \int_0^{tT} \lambda_s^T ds), \sqrt{\frac{T^\alpha \mu}{1-a_T}}\frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}(N_{tT}^T - \int_0^{tT} \lambda_s^T ds)\right] \\
&= \left(\sqrt{\frac{T^\alpha \mu}{1-a_T}}\frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\right)^2 \left[N_{tT}^T - \int_0^{tT} \lambda_s^T ds, N_{tT}^T - \int_0^{tT} \lambda_s^T ds\right] \\
&= \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\left(\left[N_{tT}^T, N_{tT}^T\right] - 2\left[N_{tT}^T, \int_0^{tT} \lambda_s^T ds\right] + \left[\int_0^{tT} \lambda_s^T ds, \int_0^{tT} \lambda_s^T ds\right]\right) \quad (3.9)
\end{aligned}
$$

Luego notemos que para todo $T > 0$:

- Cada componente de N_{tT}^T tiene trayectorias càdlàg, es creciente y de variación finita para $t \in [0, 1]$. Al aplicar el Teorema II.6-26 de [29]

$$
\begin{aligned}
\left[N_{tT}^{T,+}, N_{tT}^{T,+}\right] &= \sum_{0\le s\le t} \left(\triangle N_{sT}^{T,+}\right)^2 = \sum_{0\le s\le t} \triangle N_{sT}^{T,+} = N_{tT}^{T,+}, \\
\left[N_{tT}^{T,-}, N_{tT}^{T,-}\right] &= \sum_{0\le s\le t} \left(\triangle N_{sT}^{T,-}\right)^2 = \sum_{0\le s\le t} \triangle N_{sT}^{T,-} = N_{tT}^{T,-}, \\
\left[N_{tT}^{T,+}, N_{tT}^{T,-}\right] &= \sum_{0\le s\le t} \triangle N_{sT}^{T,+} \triangle N_{sT}^{T,-} = 0,
\end{aligned}
$$

  donde la segunda igualdad de la primera y segunda ecuación se han obtenido al considerar que $\triangle N_{sT}^{T,+}$ y $\triangle N_{sT}^{T,-}$ son iguales a 0 o 1. Por otro lado, la ultima igualdad de la ultima ecuación se ha conseguido al tener en cuenta que los procesos de conteo de un proceso de Hawkes multivariado saltan en diferentes tiempos, por lo que cuando $\triangle N_{sT}^{T,+}$ toma el valor de 1, $\triangle N_{sT}^{T,-}$ toma el valor de 0, y viceversa. De lo anterior se deduce

$$
[N_{tT}^T, N_{tT}^T] = \begin{pmatrix} N_{tT}^{T,+} & 0 \\ 0 & N_{tT}^{T,-} \end{pmatrix}.
$$

- Puesto que cada componente de $\int_0^{tT} \lambda_s^T ds$ tiene trayectorias continuas, es creciente y tiene variación finita para $t \in [0, 1]$, se concluye del Teorema II.6-26 de [29]

$$
\left[\int_0^{tT} \lambda_s^T ds, \int_0^{tT} \lambda_s^T ds\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

- De las propiedades anteriores y del Teorema II.6-28 de [29] obtenemos

$$\left[N^T_{tT}, \int_0^{tT} \lambda^T_s ds\right] = \sum_{0\leq s\leq t} \left(\triangle N^T_{sT}\right)\left(\triangle \int_0^{sT} \lambda^T_r dr\right) = \sum_{0\leq s\leq t} \left(\triangle N^T_{sT}\right)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, retomando (3.9) se concluye

$$\left[Z^T, Z^T\right]_t = \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu} \begin{pmatrix} N^{T,+}_{tT} & 0 \\ 0 & N^{T,-}_{tT} \end{pmatrix} = diag(X^T_t).$$

Ahora usando la Proposición VI-6.13 de [2], por (3.8) (Z^T es acotada c.s) y por el Lema 3.0.2, se deduce que la sucesión es P-UT (Predictably Uniformly Tight) y del Teorema VI-6.26 de [2] se obtiene que $\left[Z^T, Z^T\right]$ converge en ley a $[Z,Z] = diag(X)$. Luego por lo visto en el Lema 3.0.2 se tiene que para todo $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[([Z^T, Z^T]_t)_{11}] &= \mathbb{E}[X^{T,+}_t] \leq \mathbb{E}[X^{T,+}_1] \leq k, \\
\mathbb{E}[([Z^T, Z^T]_t)_{22}] &= \mathbb{E}[X^{T,-}_t] \leq \mathbb{E}[X^{T,-}_1] \leq k, \\
\mathbb{E}[([Z^T, Z^T]_t)_{12}] &= \mathbb{E}[([Z^T, Z^T]_t)_{21}] = \mathbb{E}[0] = 0.
\end{aligned}$$

Al aplicar el Lema de Fatou a cada componente de $[Z,Z]$ obtenemos

$$\mathbb{E}\left[[Z,Z]_t\right] = \mathbb{E}\left[\liminf \left[Z^T, Z^T\right]_t\right] \leq \liminf \mathbb{E}\left[\left[Z^T, Z^T\right]_t\right] \leq \liminf k = k,$$

por lo que el valor esperado de $[Z,Z]$ es finito y como Z es una martingala local, se sigue del Corolario 3 del Teorema II-6.27 de [29] que cada componente de Z es una martingala. □

Ahora presentaremos una proposición que nos deja a puertas de enunciar el resultado principal de este capítulo, puesto que al haber probado la C-tensión de nuestra sucesión de procesos reescalados, restaría con probar que toda subsucesión que converge débilmente en la topología de Skorohod lo hace al mismo proceso límite, para así poder concluir la convergencia en ley en este espacio.

Proposición 3.0.1. *Si* (X, X, Z^+, Z^-) *es un posible punto límite en ley de* $(X^{T,+}, X^{T,-}, Z^{T,+}, Z^{T,-})$, *entonces* (X_t, Z^+_t, Z^-_t) *puede ser escrito como*

$$X_t = \int_0^t Y_s ds, \quad Z^+_t = \int_0^t \sqrt{Y_s} dB^1_s, \quad Z^-_t = \int_0^t \sqrt{Y_s} dB^2_s,$$

donde (B^1, B^2) *es un movimiento Browniano bidimensional y* Y *es la solución de*

$$Y_t = \xi(1 - F^{\alpha,\gamma}(t)) + F^{\alpha,\gamma}(t) + \sqrt{\frac{1+\beta^2}{\gamma\mu(1+\beta)^2}} \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)\sqrt{Y_s}dB_s, \tag{3.10}$$

con

$$B = \frac{B^1 + \beta B^2}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

Más aún, para $\varepsilon > 0$*,* Y *tiene trayectorias Hölder continuas con exponente* $\alpha - 1/2 - \varepsilon$*.*

Demostración. Lo primero que haremos son las siguientes consideraciones técnicas y de notación: sea (X^{T_n}, Z^{T_n}) una subsucesión de (X^T, Z^T) que converge en ley a (X, Z), y abusando de la notación denotaremos (X^{T_n}, Z^{T_n}) como (X^T, Z^T). Ahora, usado el teorema de representación de Skorohod, podemos construir un espacio de probabilidad y elementos aleatorios $(\tilde{X}^T, \tilde{Z}^T)$ y $(\tilde{X}, \tilde{Z})$ en este espacio, que son iguales en ley a la sucesión de procesos (X^T, Z^T) y a (X, Z) respectivamente, tal que $(\tilde{X}^T, \tilde{Z}^T)$ converge puntualmente a $(\tilde{X}, \tilde{Z})$. Algo que toca destacar, es que por el Lema 3.0.3 sabemos que Z es un proceso continuo *c.s*, y así mismo lo es $\tilde{Z}$, por lo que al estar trabajando bajo la topología de Skorohod se sabe que la convergencia de $\tilde{Z}^T$ a $\tilde{Z}$ es uniforme con respecto a t, es decir que

$$\sup_{t\in[0,1]} \left| \tilde{Z}_t^T - \tilde{Z}_t \right| \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad c.s.$$

Notemos que no hemos mencionado nada sobre la representación de Λ^T, dado que en el Lema 3.0.4 mencionamos que trabajaremos con Λ^T en lugar de X^T. Por tal razón llegaremos a otra expresión de Λ^T que será conveniente para ver su representación en el nuevo espacio de probabilidad.

Por ahora seguiremos trabajando en el espacio de probabilidad que hemos usado hasta antes de la proposición. Luego, recordando la forma en que reescribimos nuestra función de intensidad en (2.4) se sigue

$$\lambda_t^{T,+} = \lambda_t^{T,-} = \hat{\mu}_T(t) + \int_0^t \psi^T(t-s)\hat{\mu}_T(s)ds + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-s)(dM_s^{T,+} + \beta dM_s^{T,-}).$$

Dado que la función $\hat{\mu}_T$ cumple la ecuación (2.5), obtenemos al usar ésta ecuación en $\lambda_t^{T,+}$ que

$$\begin{aligned}\lambda_t^{T,+} &= \mu_T + \mu_T \int_0^t \psi^T(t-s)ds + \xi\mu_T\left(\frac{1}{1-a_T} - \int_0^t \psi^T(t-s)ds\right)\\ &\quad + \frac{1}{\beta+1}\int_0^t \psi^T(t-s)(dM_s^{T,+} + \beta dM_s^{T,-}).\end{aligned}$$

Luego si hacemos la integral de 0 a t de esta ultima ecuación, y posteriormente hacemos cambio de variable

$$\begin{aligned}\int_0^t \lambda_s^{T,+}ds &= \mu_T t + \mu_T \int_0^t\int_0^s \psi^T(s-u)duds + \xi\mu_T\left(\frac{t}{1-a_T} - \int_0^t\int_0^s \psi^T(s-u)duds\right)\\ &\quad + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t\int_0^s \psi^T(s-u)(dM_u^{T,+} + \beta dM_u^{T,-})ds\\ &= \mu_T t + \mu_T \int_0^t\int_0^s \psi^T(u)duds + \xi\mu_T\left(\frac{t}{1-a_T} - \int_0^t\int_0^s \psi^T(u)duds\right)\\ &\quad + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t\int_0^s \psi^T(s-u)(dM_u^{T,+} + \beta dM_u^{T,-})ds.\end{aligned}$$

Ahora usando el Teorema de Fubini-Tonelli estocástico [3] y aplicando de nuevo un cambio de variable

$$\begin{aligned}\int_0^t \lambda_s^{T,+}ds &= \mu_T t + \mu_T \int_0^t\int_u^t \psi^T(u)dsdu + \xi\mu_T\left(\frac{t}{1-a_T} - \int_0^t\int_u^t \psi^T(u)dsdu\right)\\ &\quad + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t\int_u^t \psi^T(s-u)ds(dM_u^{T,+} + \beta dM_u^{T,-})\\ &= \mu_T t + \mu_T \int_0^t \psi^T(t-u)udu + \xi\mu_T\left(\frac{t}{1-a_T} - \int_0^t \psi^T(t-u)udu\right)\\ &\quad + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t\int_0^{t-u} \psi^T(s)ds(dM_u^{T,+} + \beta dM_u^{T,-}).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Para poder continuar necesitamos trabajar un poco más en la ultima integral estocástica de (3.11). Notemos que al aplicar integración por partes, ésta toma la forma

$$\int_0^t\int_0^{t-u} \psi^T(s)ds(dM_u^{T,+} + \beta dM_u^{T,-})$$

[3] Recordemos que la martingala $M_u^{T,+} + \beta M_u^{T,-}$ esta expresada como la diferencia de dos procesos de variación acotada, además de que ψ es una función continua no negativa. Por lo tanto la integral con respecto a la martingala existe.

$$= \left(\int_0^{t-u} \psi^T(s)ds(M_u^{T,+} + \beta M_u^{T,-})\right)\Big|_0^t - \int_0^t (M_u^{T,+} + \beta M_u^{T,-})\frac{d}{du}\left(\int_0^{t-u} \psi^T(s)ds\right).$$

Examinaremos ahora cada elemento del termino de la derecha de la anterior ecuación:

- $$\begin{aligned} & \left(\int_0^{t-u} \psi^T(s)ds(M_u^{T,+} + \beta M_u^{T,-})\right)\Big|_0^t \\ = & \int_0^{t-t} \psi^T(s)ds(M_t^{T,+} + \beta M_t^{T,-}) - \int_0^{t-0} \psi^T(s)ds(M_0^{T,+} + \beta M_0^{T,-}) \\ = & (0)(M_t^{T,+} + \beta M_t^{T,-}) - \int_0^t \psi^T(s)ds(0) \\ = & 0. \end{aligned}$$

- Por el teorema fundamental del calculo se tiene que

  $$\frac{d}{du}\left(\int_0^{t-u} \psi^T(s)ds\right) = -\psi^T(t-u)du,$$

  y consecuentemente

  $$-\int_0^t (M_u^{T,+} + \beta M_u^{T,-})\frac{d}{du}\left(\int_0^{t-u} \psi^T(s)ds\right) = \int_0^t (M_u^{T,+} + \beta M_u^{T,-})\psi^T(t-u)du.$$

De lo anterior se deduce que la ecuación (3.11) toma la forma

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda_s^{T,+}ds = \mu_T t + \mu_T \int_0^t \psi^T(t-s)sds + \xi\mu_T\left(\frac{t}{1-a_T} - \int_0^t \psi^T(t-s)sds\right) \\ + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-s)(M_s^{T,+} + \beta M_s^{T,-})ds, \end{aligned}$$

o equivalentemente, al multiplicar por $(1-a_T)/(T^\alpha\mu)$ y evaluarla en Tt

$$\Lambda_t^{T,+} = \Lambda_t^{T,-} = \frac{1-a_T}{T^\alpha\mu}\int_0^{Tt} \lambda_s^{T,+}ds \quad = T_1 + T_2 + T_3 \tag{3.12}$$

donde

$$T_1 \quad = \quad \frac{1-a_T}{T^\alpha\mu}\mu_T Tt = \frac{1-a_T}{T^\alpha\mu}\mu T^{\alpha-1}Tt = (1-a_T)t,$$

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1-a_T}{T^\alpha \mu}\left[\mu_T \int_0^{Tt} \psi^T(Tt-s)sds + \xi\mu_T\left(\frac{Tt}{1-a_T} - \int_0^{Tt}\psi^T(Tt-s)sds\right)\right] \\
&= \frac{1-a_T}{\mu_T T}\left[\mu_T T^2 \int_0^{t} \psi^T(T(t-s))sds + \xi\mu_T\left(\frac{Tt}{1-a_T} - T^2\int_0^{t}\psi^T(T(t-s))sds\right)\right] \\
&= (1-a_T)T\int_0^t \psi^T(T(t-s))sds + \xi\left(t - T(1-a_T)\int_0^t \psi^T(T(t-s))sds\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_3 &= \frac{1-a_T}{T^\alpha\mu}\frac{1}{1+\beta}\int_0^{Tt}\psi^T(Tt-s)(M_s^{T,+}+\beta M_s^{T,-})ds \\
&= \frac{1-a_T}{T^\alpha\mu}\frac{1}{1+\beta}T\int_0^{t}\psi^T(T(t-s))(M_{Ts}^{T,+}+\beta M_{Ts}^{T,-})ds \\
&= \sqrt{\frac{1-a_T}{T^\alpha\mu}}\frac{1}{1+\beta}T\int_0^{t}\psi^T(T(t-s))\sqrt{\frac{T^\alpha\mu}{1-a_T}}\frac{1-a_T}{T^\alpha\mu}(M_{Ts}^{T,+}+\beta M_{Ts}^{T,-})ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1-a_T)T^\alpha\mu}}\frac{1}{1+\beta}\int_0^{t}T(1-a_T)\psi^T(T(t-s))(Z_s^{T,+}+\beta Z_s^{T,-})ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{\gamma\mu(1+\beta)^2}}\int_0^{t}T(1-a_T)\psi^T(T(t-s))(Z_s^{T,+}+\beta Z_s^{T,-})ds.
\end{aligned}
$$

Hemos llegado a una expresión de Λ^T que podemos dividir en tres términos T_1, T_2 y T_3. Notemos que los dos primeros son deterministas, mientras que el tercero es estocástico, cuya única fuente de aleatoriedad esta en función de Z^T. Un representante de Λ^{T_n} en el nuevo espacio de probabilidad (el cual consideramos al inicio de la demostración), y que denotaremos como $\tilde{\Lambda}^T$, será remplazando en T_3 a Z^T por $\tilde{Z}^T$.

Una primera observación es que esta nueva sucesión $\tilde{\Lambda}^T$ conserva la distribucion, dado que por el teorema de representación de Skorokhod el represéntate de Z^T en el nuevo espacio de probabilidad preserva la ley. También notemos que por el Lema 3.0.5, se sigue que en el espacio original Λ^T converge débilmente a X, y así mismo en el nuevo espacio $\tilde{\Lambda}^T$ converge puntualmente a $\tilde{X}$, el cual recordemos es igual en ley a X.

Mostraremos ahora la forma que toma $\tilde{X}$. Implementando la propiedad (iii) de 2.1.1, y considerando que $a_T f^{\alpha,\gamma}$ converge uniformemente a $f^{\alpha,\gamma}$ cuando T tiende a infinito, se sigue que

$$T_1 \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

y

$$T_2 \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)sds + \xi\left(t - \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)sds\right).$$

Adicionalmente, como $\tilde{Z}^T$ converge a $\tilde{Z}$ uniformemente con respecto a t, obtenemos

$$T_3 \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{\gamma\mu(1+\beta)^2}} \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)(\tilde{Z}_s^+ + \beta\tilde{Z}_s^-)ds.$$

Luego, enviado T a infinito en la ecuación (3.12) y usando las observaciones anteriores, llegamos a

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_t &= \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)sds + \xi\left(t - \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)sds\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\gamma\mu(1+\beta)^2}} \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)(\tilde{Z}_s^+ + \beta\tilde{Z}_s^-)ds.
\end{aligned}$$

Recordando que $f^{\alpha,\gamma}$ es la densidad de la función de distribución $F^{\alpha,\gamma}$, y utilizando nuevamente integración por partes, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_t &= \int_0^t F^{\alpha,\gamma}(s)ds + \xi\left(t - \int_0^t F^{\alpha,\gamma}(s)ds\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\gamma\mu(1+\beta)^2}} \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)(\tilde{Z}_s^+ + \beta\tilde{Z}_s^-)ds \\
&= \int_0^t \left[F^{\alpha,\gamma}(s) + \xi\left(1 - F^{\alpha,\gamma}(s)\right)\right] ds + \frac{1}{\sqrt{\gamma\mu(1+\beta)^2}} \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)(\tilde{Z}_s^+ + \beta\tilde{Z}_s^-)ds.
\end{aligned}$$

Procediendo de forma análoga a la demostración del Teorema 3.2 de [22], es posible representar el integrando $f^{\alpha,\gamma}(t-s)(\tilde{Z}_s^+ + \beta\tilde{Z}_s^-)$ como una integral estocástica utilizando calculo fraccionario, llegando a que se cumple la siguiente ecuación

$$\tilde{X}_t = \int_0^t Y_s ds,$$

donde Y satisface

$$Y_t = F^{\alpha,\gamma}(t) + \xi(1 - F^{\alpha,\gamma}(t)) + \frac{1}{\sqrt{\gamma\mu(1+\beta)^2}} \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)\left(d\tilde{Z}_s^+ + \beta d\tilde{Z}_s^-\right),$$

y además, Y tiene trayectorias Hölder continuas con exponente $\alpha - 1/2 - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. La Hölder continuidad del proceso Y también se deduce del teorema antes mencionado y es de gran relevancia dado a que esto muestra que X es diferenciable.

Recordemos que del Lema (3.0.5)

$$\left[\tilde{Z}, \tilde{Z}\right]_t = \tilde{X}_t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \int_0^t Y_s ds \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que al aplicar el Teorema V-3.9 de [23], existe un movimiento Browniano bidimensional (B^1, B^2) tal que

$$\tilde{Z}_t^+ = \int_0^t \sqrt{Y_s} dB_s^1, \quad \tilde{Z}_t^- = \int_0^t \sqrt{Y_s} dB_s^2.$$

Finalmente, usando el siguiente movimiento Browniano

$$B = \frac{B^1 + \beta B^2}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

en la definición de Y y procediendo de forma análoga al Teorema 3.2 de [22], se concluye

$$Y_t = F^{\alpha,\gamma}(t) + \xi(1 - F^{\alpha,\gamma}(t)) + \sqrt{\frac{1+\beta^2}{\gamma\mu(1+\beta)^2}} \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)\sqrt{Y_s} dB_s.$$

□

Ahora presentaremos el resultado principal de este capítulo, de donde se derivará de forma directa la convergencia débil de un reescalamiento de nuestro modelo *tick-by-tick* del log-precio, al log-precio de nuestro activo bajo el modelo rugoso de Heston.

Teorema 3.0.1. *Cuando $T \to \infty$ y bajo las definiciones 2.1.1 y 2.9, que conforman la función de intensidad, se tiene que la sucesión de procesos $(\Lambda_t^T, X_t^T, Z_t^T)_{t\in[0,1]}$ converge en ley bajo la topología de Skorokhod a (Λ, X, Z) donde*

$$\Lambda_t = X_t = \int_0^t Y_s ds \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Z_t = \int_0^t \sqrt{Y_s} \begin{pmatrix} dB_s^1 \\ dB_s^2 \end{pmatrix},$$

y Y es la única solución de la ecuación diferencial estocástica

$$Y_t = \xi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \gamma(1-Y_s) ds + \gamma \sqrt{\frac{1+\beta^2}{\gamma\mu(1+\beta^2)}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sqrt{Y_s} dB_s, \tag{3.13}$$

donde

$$B = \frac{B^1 + \beta B^2}{\sqrt{1+\beta^2}},$$

y (B^1, B^2) es un movimiento Browniano bidimensional. Más aún, para todo $\varepsilon > 0$, Y es Hölder continua con exponente $\alpha - 1/2 - \varepsilon$.

Demostración. En los Lema 3.0.2 y 3.0.3 ya probamos la C-tensión de (Λ^T, X^T, Z^T). En la Proposición 3.0.1 tambien ya probamos que toda subsucesión de (Λ^T, X^T, Z^T) que converge débilmente lo hace hacia (X, X, Z) donde

$$X_t = \int_0^t Y_s ds, \quad Z_t^+ = \int_0^t \sqrt{Y_s} dB_s^1, \quad Z_t^- = \int_0^t \sqrt{Y_s} dB_s^2,$$

con (B^1, B^2) un movimiento Browniano bidimensional y Y es la solución de

$$Y_t = \xi(1 - F^{\alpha,\gamma}(t)) + F^{\alpha,\gamma}(t) + \sqrt{\frac{1+\beta^2}{\gamma\mu(1+\beta)^2}} \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s) \sqrt{Y_s} dB_s,$$

con

$$B = \frac{B^1 + \beta B^2}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

Más aún, para $\varepsilon > 0$, Y tiene trayectorias Hölder continuas con exponente $\alpha - 1/2 - \varepsilon$.

Por lo tanto utilizando el corolario del Teorema de Prohorov 1.2.1, se concluye la convergencia débil de la sucesión completa (Λ^T, X^T, Z^T) al proceso (X, X, Z) definido como antes.

Para concluir la prueba del teorema, faltaría ver que efectivamente la ecuación (3.10) es equivalente a la ecuación (3.13) del enunciado. Para ver esto,podemos usar la siguiente proposición cuya prueba se presenta en [19].

Proposición 3.0.2. *Sea γ, ν, θ y V_0 constantes positivas, $\alpha \in (1/2, 1)$ y B un movimiento Browniano. El proceso V es solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica frac-*

cionaria

$$V_t = V_0(1 - F^{\alpha,\gamma}(t)) + \theta F^{\alpha,\gamma}(t) + \nu \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)\sqrt{V_s}dB_s$$

si y solo si es también solución de

$$V_t = V_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\gamma(\theta - V_s)ds + \frac{\gamma\nu}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sqrt{V_s}dB_s,$$

y más aun, ambas ecuaciones admiten una única solución fuerte.

□

Dado que estamos interesados es en la función característica de log-precio de un activo bajo el modelo rugosos de Heston, el modelo *tick-by-tick* dado en la sección 2.1 no es aplicable directamente, dado a que este modela el precio en lugar del log-precio. A continuación presentamos nuestro modelo micro-estructural del log-precio de una activo en un mercado electrónico de alta frecuencia:

$$\begin{aligned} Q^T &= \sqrt{\frac{\theta}{2}}\sqrt{\frac{1-a_T}{T^\alpha\mu}}(N^{T,+}_{\cdot T} - N^{T,-}_{\cdot T}) - \frac{\theta}{2}\frac{1-a_T}{T^\alpha\mu}N^{T,+}_{\cdot T} \\ &= \sqrt{\frac{\theta}{2}}(Z^{T,+} - Z^{T.-}) - \frac{\theta}{2}X^{T,+}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Presentaremos ahora el resultado que con ayuda del Teorema de continuidad de P. Lévy, nos permitirá deducir la función característica de nuestro interés.

Corolario 3.0.1. *Cuando $T \to \infty$ y bajo las definiciones de la función de intensidad 2.1.1 y 2.9, la sucesión de procesos $(Q_t^T)_{t\in[0,1]}$ converge en ley bajo la topología de Skorohod a*

$$P_t = \int_0^t \sqrt{V_s}dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t V_s ds,$$

donde V es la única solución de la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} V_t &= \theta\xi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\gamma(\theta - V_s)ds \\ &\quad + \gamma\sqrt{\frac{\theta(1+\beta^2)}{\gamma\mu(1+\beta)^2}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sqrt{V_s}dB_s, \end{aligned}$$

con (W,B) movimientos Brownianos cuya covariación cuadrática satisface

$$d\langle W,B\rangle_t = \frac{1-\beta}{\sqrt{2(1+\beta^2)}}dt$$

Demostración. Por el Teorema 3.0.1 se sigue que el proceso definido en (3.14), converge en ley bajo la topología de Skorokhod a

$$P_t = \sqrt{\frac{\theta}{2}}\int_0^t \sqrt{Y_s}(dB_s^1 - dB_s^2) - \frac{\theta}{2}\int_0^t Y_s ds,$$

donde

$$Y_t = \xi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\gamma(1-Y_s)ds + \gamma\sqrt{\frac{1+\beta^2}{\gamma\mu(1+\beta^2)}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sqrt{Y_s}dB_s.$$

Ahora, si definimos $V_t = \theta Y_t$ y $W_t = (B_t^1 - B_t^2)/\sqrt{2}$, deducimos la igualdad

$$P_t = \int_0^t \sqrt{V_s}dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t V_s ds,$$

donde multiplicando la igualdad de Y_t por θ se obtiene

$$V_t = \theta\xi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\gamma(\theta-V_s)ds + \gamma\sqrt{\frac{\theta(1+\beta^2)}{\gamma\mu(1+\beta)^2}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sqrt{V_s}dB_s.$$

Además, notemos que

$$\begin{aligned}
\langle W,B\rangle_t &= \langle \frac{B_t^1 - B_t^2}{\sqrt{2}}, \frac{B_t^1 + \beta B_t^2}{\sqrt{1+\beta^2}}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(1+\beta^2)}}\langle B_t^1, B_t^1\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2(1+\beta^2)}}\langle B_t^1, B_t^2\rangle \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2(1+\beta^2)}}\langle B_t^2, B_t^1\rangle - \frac{\beta}{\sqrt{2(1+\beta^2)}}\langle B_t^2, B_t^2\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(1+\beta^2)}}t - \frac{\beta}{\sqrt{2(1+\beta^2)}}t \\
&= \frac{1-\beta}{\sqrt{2(1+\beta^2)}}t,
\end{aligned}$$

concluyendo que

$$d\langle W,B\rangle_t = \frac{1-\beta}{\sqrt{2(1+\beta^2)}}dt.$$

□

Algo importante que debemos notar es que el proceso límite al que converge débilmente la sucesión de procesos Q^T, corresponde al log-precio de un activo bajo el modelo rugoso de Heston dado por (3). Efectivamente si $P_t = \ln(S_t)$ y considerando S_t como en (3), se tiene aplicando la formula de Itô que

$$\begin{aligned} dP_t = d\ln(S_t) &= -\frac{S_t^2 V_t}{2}\frac{1}{S_t^2}dt + S_t\sqrt{V_t}\frac{1}{S_t}dW_t \\ &= -\frac{V_t}{2}dt + \sqrt{V_t}dW_t, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$P_t = \int_0^t \sqrt{V_s}dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t V_s ds,$$

donde V es la única solución de la ecuación diferencial estocástica

$$V_t = V_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\gamma(\theta - V_s)ds + \frac{\gamma\nu}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sqrt{V_s}dB_s, \tag{3.15}$$

con (W, B) movimientos Brownianos cuya covariación cuadrática satisface

$$d\langle W, B\rangle_t = \rho dt.$$

Luego considerando en el corolario anterior la notación

$$V_0 = \xi\theta, \quad \rho = \frac{1-\beta}{\sqrt{2(1+\beta^2)}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{\theta(1+\beta^2)}{\gamma\mu(1+\beta)^2}}, \tag{3.16}$$

se sigue la observación.

CAPÍTULO 4

Función Característica

En este capítulo finalmente presentaremos la forma que toma la función característica de log-precio de un activo bajo el modelo rugoso de Heston. Esta función la expresaremos como la solución de una ecuación diferencial fraccionaria de Riccati, la cual corresponde a una solución semi-cerrada de nuestro problema. Para proceder a encontrar esta función utilizaremos el teorema de continuidad de P. Lévy y H.Cramér, por lo que necesitaremos dos ingredientes principales y de los cuales ya disponemos: el primero es la forma que toma la función característica de un proceso de Hawkes bidimensional, que recordemos es la base de nuestro modelo micro-estructural. El segundo es la convergencia débil de la sucesión de modelos micro-estructurales del log-precio al log-precio de nuestro modelo rugoso de Heston. Adicionalmente se apelará a dos detalles técnicos que nos permitirán calcular la función característica y se presentarán como dos lemas previos al teorema que enuncia el resultado principal de la tesis.

Lo primero que haremos es ver la forma que toman las funciones características de nuestros modelos micro-estructurales del log-precio, a partir de las funciones de los procesos de Hawkes bidimensionales. Para ello notemos que los modelos micro-estructurales del log-precio toman la forma

$$\begin{aligned} Q_t^T &= \sqrt{\frac{\theta}{2}}\sqrt{\frac{1-a_T}{T^\alpha\mu}}(N_{tT}^{T,+} - N_{\cdot T}^{T,-}) - \frac{\theta}{2}\frac{1-a_T}{T^\alpha\mu}N_{tT}^{T,+} \\ &= \sqrt{\frac{\gamma\theta}{2\mu}}T^{-\alpha}\left(N_{tT}^{T,+} - N_{tT}^{T,-}\right) - \frac{\gamma\theta}{2\mu}T^{-2\alpha}N_{tT}^{T,+}. \end{aligned}$$

Ahora, para todo $T > 0$ y $a \in \mathbb{R}$ definimos

$$a_T^+ = a\sqrt{\frac{\gamma\theta}{2\mu}}T^{-\alpha} - a\frac{\gamma\theta}{2\mu}T^{-2\alpha}, \quad a_T^- = -a\sqrt{\frac{\gamma\theta}{2\mu}}T^{-\alpha}.$$

Luego, denotando por L^T a la función característica del proceso bidimensional N^T, se sigue que al evaluarla en (a_T^+, a_T^-) y al tiempo tT ella toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & L^T\left((a_T^+, a_T^-), tT\right) \\ = \; & \mathbb{E}\left[\exp\left(i(a_T^+, a_T^-)\cdot N_{tT}^T\right)\right] \\ = \; & \mathbb{E}\left[\exp\left(i\left(a_T^+ N_{tT}^{T,+} + a_T^- N_{tT}^{T,-}\right)\right)\right] \\ = \; & \mathbb{E}\left[\exp\left(i\left(a\sqrt{\frac{\gamma\theta}{2\mu}}T^{-\alpha}N_{tT}^{T,+} - a\frac{\gamma\theta}{2\mu}T^{-2\alpha}N_{tT}^{T,+} - a\sqrt{\frac{\gamma\theta}{2\mu}}T^{-\alpha}N_{tT}^{T,-}\right)\right)\right] \\ = \; & \mathbb{E}\left[\exp\left(ia\left(\sqrt{\frac{\gamma\theta}{2\mu}}T^{-\alpha}\left(N_{tT}^{T,+} - N_{tT}^{T,-}\right) - \frac{\gamma\theta}{2\mu}T^{-2\alpha}N_{tT}^{T,+}\right)\right)\right] \\ = \; & \mathbb{E}\left[\exp\left(iaQ_t^T\right)\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto $L^T\left((a_T^+, a_T^-), tT\right)$ es igual a la función característica de Q^T evaluada en a al tiempo t. Haciendo uso del teorema de convergencia de P.Lévy y H.Cramér, junto con el Corolario 3.0.1, se sigue que al hacer $T \to \infty$, $L^T\left((a_T^+, a_T^-), tT\right)$ converge uniformemente a la función característica de P_t la cual denotaremos por L_P.

Observemos ahora la estructura de $L^T\left((a_T^+, a_T^-), tT\right)$ si empleamos el resultado visto en la subsección 1.1.4, en el cual se describe la función característica de un proceso de Hawkes multidimensional. Recordando la forma que tiene la intensidad exógena y la función de auto excitación de nuestro proceso de Hawkes N^T, se sigue por 1.1.7 que

$$\begin{aligned} & L^T\left((a_T^+, a_T^-), tT\right) && (4.1)\\ = \;& \exp\left(\int_0^{tT} \hat{\mu}(s)\left(\left[C^{T,+}\left(\left(a_T^+, a_T^-\right), tT-s\right)-1\right]+\left[C^{T,-}\left(\left(a_T^+, a_T^-\right), tT-s\right)-1\right]\right) ds\right), \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{C}\left(\left(a_T^+, a_T^-\right), t\right) = \left(C^{T,+}\left(\left(a_T^+, a_T^-\right), t\right), C^{T,-}\left(\left(a_T^+, a_T^-\right), t\right)\right),$$

es solución de la ecuación integral

$$\mathbf{C}(\left(a_T^+, a_T^-\right), t) = \exp\left(i\left(a_T^+, a_T^-\right) + \int_0^t (\mathbf{C}(\left(a_T^+, a_T^-\right), t-s) - (1,1))\phi^T(s) ds\right).$$

Ahora, si definimos $\mathbf{Y}^T(a,\cdot)$ como una función de $[0,1]$ a $\mathcal{M}^{1\times 2}(\mathbb{C})$ tal que

$$\mathbf{Y}^T(a,t) = \left(Y^{T,+}(a,t), Y^{T,-}(a,t)\right) = \mathbf{C}\left(\left(a_T^+, a_T^-\right), tT\right), \tag{4.2}$$

se sigue de (4.1) que

$$\begin{aligned} & L^T\left((a_T^+, a_T^-), tT\right) \\ = \;& \exp\left(\int_0^t T\hat{\mu}(sT)\left(\left[C^{T,+}\left(\left(a_T^+, a_T^-\right), tT-sT\right)-1\right]+\left[C^{T,-}\left(\left(a_T^+, a_T^-\right), tT-sT\right)-1\right]\right) ds\right) \\ = \;& \exp\left(\int_0^t T\hat{\mu}(sT)\left(\left[Y^{T,+}(a,t-s)-1\right]+\left[Y^{T,-}(a,t-s)-1\right]\right) ds\right) \\ = \;& \exp\left(\int_0^t T^{1-\alpha}\hat{\mu}(sT)\left(T^\alpha\left[Y^{T,+}(a,t-s)-1\right]+T^\alpha\left[Y^{T,-}(a,t-s)-1\right]\right) ds\right), && (4.3) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{Y}^T(a,t)$ es solución de la ecuación integral

$$\mathbf{Y}^T(a,t) = \exp\left(i(a_T^+, a_T^-) + T\int_0^t \left(\mathbf{Y}^T(a,t-s) - (1,1)\right)\phi^T(Ts) ds\right). \tag{4.4}$$

Notemos que para poder hacer el limite de la ecuación (4.3) es necesario usar un resultado que nos permita pasar el límite en la integral, adicionalmente de conocer el límite de los términos del integrando. A continuación presentamos los dos lemas que ayudarán a demostrar nuestro resultado principal, donde el primero nos dará una cota uniforme con respecto a t de $T^\alpha\left\|Y^T(a,t)-(1,1)\right\|$, mientras que el segundo nos muestra hacia donde converge este termino al hacer que T tienda a infinito.

Para lo siguiente, definiremos a $c(a)$ como un real positivo dependiente de a e independiente de t y de T suficientemente grande, que puede variar de linea en linea.

Lema 4.0.1. *Para todo $t \in [0,1]$, existe $c(a)$ tal que*

$$T^{\alpha}\left\|Y^{T}(a,t)-(1,1)\right\| \leq c(a).$$

Demostración. Primero demostraremos el resultado para la primera componente de $Y^{T}(a,t)-(1,1)$, es decir demostraremos

$$T^{\alpha}\left|Y^{T,+}(a,t)-1\right| \leq c(a).$$

De la ecuación (1.5) en los preliminares se sigue que

$$\mathbf{C}^{T,+}((a,b),t)=\exp(ai)\tilde{L}^{T}((a,b),t),$$

donde $\tilde{L}^{T}$ es la función característica del proceso de Hawkes bidimensional $\tilde{N}^{T}=\left(\tilde{N}^{T,+},\tilde{N}^{T,-}\right)$ con función de intensidad

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\tilde{\lambda}_t^{T,+}\\ \tilde{\lambda}_t^{T,-}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\phi^{T}_{(1,1)}(t)\\ \phi^{T}_{(2,1)}(t)\end{pmatrix}+\int_0^t \phi^{T}(t-s)\cdot d\tilde{N}_s^{T}\\
&= \frac{1}{1+\beta}\varphi^{T}(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\int_0^t \frac{\varphi^{T}(t-s)}{1+\beta}\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 1 & \beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}d\tilde{N}_s^{T,+}\\ d\tilde{N}_s^{T,-}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{1+\beta}\varphi^{T}(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{1+\beta}\int_0^t \varphi^{T}(t-s)\begin{pmatrix}d\tilde{N}_s^{T,+}+\beta d\tilde{N}_s^{T,-}\\ d\tilde{N}_s^{T,+}+\beta d\tilde{N}_s^{T,-}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De la definición de función característica obtenemos

$$\mathbf{C}^{T,+}((a,b),t)=\mathbb{E}\left[\exp\left(ia+ia\tilde{N}_t^{T,+}+ib\tilde{N}_t^{T,-}\right)\right]. \tag{4.5}$$

Dado que las componentes de la función de intensidad son iguales, definimos $\tilde{\lambda}_t^{T}:=\tilde{\lambda}_t^{T,+}=\tilde{\lambda}_t^{T,-}$, y denotamos a la martingala asociada a $\tilde{N}^{T}$ como $\tilde{M}^{T}$, es decir

$$\tilde{M}_t^{T}=\left(\tilde{M}_t^{T,+},\tilde{M}_t^{T,-}\right)=\tilde{N}_t^{T}-\int_0^t \tilde{\lambda}_s^{T}ds(1,1).$$

Luego, de la definición de $\tilde{\lambda}_t^T$ y del hecho que

$$d\tilde{N}_s^T = d\tilde{M}_t^T + \tilde{\lambda}_s^T ds(1,1),$$

se sigue

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_t^T &= \frac{1}{1+\beta}\varphi^T(t) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \varphi^T(t-s)\left(d\tilde{N}_s^{T,+} + \beta d\tilde{N}_s^{T,-}\right)\\
&= \frac{1}{1+\beta}\varphi^T(t) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \varphi^T(t-s)\left(d\tilde{M}_s^{T,+} + \tilde{\lambda}_s^T ds + \beta d\tilde{M}_s^{T,-} + \beta\tilde{\lambda}_s^T ds\right)\\
&= \frac{1}{1+\beta}\varphi^T(t) + \int_0^t \varphi^T(t-s)\tilde{\lambda}_s^T ds + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \varphi^T(t-s)\left(d\tilde{M}_s^{T,+} + \beta d\tilde{M}_s^{T,-}\right).
\end{aligned}$$

Observamos que $\tilde{\lambda}_t^T$ cumple una ecuación de renovación similar a la que cumple $\lambda_t^{T,+}$ en la sección 2.1, por lo que procediendo de forma análoga obtenemos

$$\tilde{\lambda}_t^T = \frac{1}{1+\beta}\psi^T(t) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \psi^T(t-u)\left(d\tilde{M}_u^{T,+} + \beta d\tilde{M}_u^{T,-}\right),$$

donde hemos considerado que la función

$$\frac{1}{1+\beta}\varphi^T(t) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \varphi^T(t-s)\left(d\tilde{M}_s^{T,+} + \beta d\tilde{M}_s^{T,-}\right),$$

es localmente acotada, por ser φ^T continua y $\tilde{M}_s^{T,+} + \beta\tilde{M}_s^{T,-}$ de variación acotada. Usando de nuevo el teorema de Fubini-Tonelli estocástico e integración por partes, como en la ecuación (3.11) de la proposición 3.0.1, se llega a

$$\begin{aligned}
\int_0^{tT} \tilde{\lambda}_s^T ds &= \frac{1}{1+\beta}\int_0^{tT} \psi^T(s)ds + \frac{1}{1+\beta}\int_0^{tT}\int_0^s \psi^T(s-u)\left(d\tilde{M}_u^{T,+} + \beta d\tilde{M}_u^{T,-}\right)ds\\
&= \frac{1}{1+\beta}T\int_0^t \psi^T(sT)ds + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t T\psi^T(T(t-s))\left(\tilde{M}_{sT}^{T,+} + \beta\tilde{M}_{sT}^{T,-}\right)ds.
\end{aligned}$$

Luego por la propiedad (iii) de la Proposición 2.1.1 se deduce la igualdad

$$\begin{aligned}
&\int_0^{tT} \tilde{\lambda}_s^T ds\\
&= \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \frac{a_T}{1-a_T} f^{\alpha,\gamma}(s)ds + \frac{1}{1+\beta}\int_0^t \frac{a_T}{1-a_T} f^{\alpha,\gamma}(t-s)\left(\tilde{M}_{sT}^{T,+} + \beta\tilde{M}_{sT}^{T,-}\right)ds\\
&= \frac{1}{\gamma(1+\beta)}a_T T^\alpha F^{\alpha,\gamma}(t) + \frac{1}{\gamma(1+\beta)}a_T T^\alpha\int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)\left(\tilde{M}_{sT}^{T,+} + \beta\tilde{M}_{sT}^{T,-}\right)ds. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Como $f^{\alpha,\gamma}$ es cuadrado integrable para $\alpha \in (1/2,1)$ y $\tilde{M}^{T,+}_{sT} + \beta \tilde{M}^{T,-}_{sT}$ es una martingala cuadrado integrable, se sigue por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad máxima de Doob que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\int_0^t \left| f^{\alpha,\gamma}(t-s)\left(\tilde{M}^{T,+}_{sT} + \beta \tilde{M}^{T,-}_{sT}\right)\right| ds\right] \\
\leq\ & \left(\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|f^{\alpha,\gamma}(t-s)\right|^2 ds\right]\right)^{1/2} \left(\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\tilde{M}^{T,+}_{sT} + \beta \tilde{M}^{T,-}_{sT}\right|^2 ds\right]\right)^{1/2} \\
\leq\ & \left(\int_0^t \left|f^{\alpha,\gamma}(s)\right|^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|\tilde{M}^{T,+}_{sT} + \beta \tilde{M}^{T,-}_{sT}\right|^2\right] ds\right)^{1/2} \\
\leq\ & \left(\int_0^\infty \left|f^{\alpha,\gamma}(s)\right|^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|\tilde{M}^{T,+}_{sT} + \beta \tilde{M}^{T,-}_{sT}\right|^2\right] ds\right)^{1/2} \\
\leq\ & \left(\int_0^\infty \left|f^{\alpha,\gamma}(s)\right|^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t 4\mathbb{E}\left[\left|\tilde{M}^{T,+}_{tT} + \beta \tilde{M}^{T,-}_{tT}\right|^2\right] ds\right)^{1/2} \\
\leq\ & 2\sqrt{t}\left(\int_0^\infty \left|f^{\alpha,\gamma}(s)\right|^2 ds\right)^{1/2} \left(\mathbb{E}\left[\left|\tilde{M}^{T,+}_{tT} + \beta \tilde{M}^{T,-}_{tT}\right|^2\right]\right)^{1/2} \\
<\ & \infty.
\end{aligned}$$

De lo anterior se puede concluir que podemos usar el teorema de Fubini-Tonelli, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)\left(\tilde{M}^{T,+}_{sT} + \beta \tilde{M}^{T,-}_{sT}\right) ds\right] &= \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)\mathbb{E}\left[\tilde{M}^{T,+}_{sT} + \beta \tilde{M}^{T,-}_{sT}\right] ds \\
&= 0. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Empleando lo anterior en la ecuación (4.6) y recordando que $F^{\alpha,\gamma}$ es una función de distribución, se obtiene

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{tT} \tilde{\lambda}^T_s ds\right] = \frac{1}{\gamma(1+\beta)} a_T T^\alpha F^{\alpha,\gamma}(t) \leq \frac{1}{\gamma(\beta+1)} F^{\alpha,\gamma}(1) T^\alpha.$$

Definimos ahora la variable $\tilde{X}^T_t = a^+_T \tilde{N}^{T,+}_{tT} + a^-_T \tilde{N}^{T,-}_{tT}$, y usando las definiciones dadas y la inecuación anterior, llegamos a

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left[\tilde{X}^T_t\right]\right| &= \left|\mathbb{E}\left[a^+_T \tilde{N}^{T,+}_{tT} + a^-_T \tilde{N}^{T,-}_{tT}\right]\right| \\
&= \left|a^+_T \mathbb{E}\left[\tilde{N}^{T,+}_{tT}\right] + a^-_T \mathbb{E}\left[\tilde{N}^{T,-}_{tT}\right]\right| \\
&= \left|\left(a^+_T + a^-_T\right)\mathbb{E}\left[\int_0^{tT} \tilde{\lambda}^T_s ds\right]\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| a\frac{\gamma\theta}{2\mu}T^{-2\alpha} \right| \mathbb{E}\left[\int_0^{tT} \tilde{\lambda}_s^T ds\right] \\
&\leq |a| \frac{\gamma\theta}{2\mu}T^{-2\alpha}\frac{1}{\gamma(\beta+1)}F^{\alpha,\gamma}(1)T^{\alpha} \\
&= c(a)T^{-\alpha}F^{\alpha,\gamma}(1),
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\left|\mathbb{E}\left[\tilde{X}_t^T\right]\right| \leq c(a)T^{-\alpha}F^{\alpha,\gamma}(1).
$$

Usando la relación entre $\mathbf{Y}^T$ y $\mathbf{C}^T$, se sigue de Lema 4.0.3 del Apéndice y de (4.5) que

$$
\begin{aligned}
& T^{\alpha}\left|Y^{T,+}(a,t)-1\right| \\
= \;& T^{\alpha}\left|\mathbb{E}\left[\exp\left(ia_T^+ + ia_T^+\tilde{N}_{tT}^{T,+} + ia_T^-\tilde{N}_{tT}^{T,-}\right)-1\right]\right| \\
= \;& T^{\alpha}\left|\mathbb{E}\left[\exp\left(ia_T^+ + i\tilde{X}_t^T\right)-1-i\tilde{X}_t^T - ia_T^+ + i\tilde{X}_t^T + ia_T^+\right]\right| \\
\leq \;& T^{\alpha}\mathbb{E}\left[\left|\exp\left(ia_T^+ + i\tilde{X}_t^T\right)-1-i\tilde{X}_t^T - ia_T^+\right|\right] + T^{\alpha}\left|\mathbb{E}\left[\tilde{X}_t^T\right]\right| + T^{\alpha}\left|a_T^+\right| \\
\leq \;& c(a)T^{\alpha}\mathbb{E}\left[\left|a_T^+ + \tilde{X}_t^T\right|^2\right] + T^{\alpha}c(a)T^{-\alpha}F^{\alpha,\gamma}(1) + T^{\alpha}\left(a\sqrt{\frac{\gamma\theta}{2\mu}}T^{-\alpha} + a\frac{\gamma\theta}{2\mu}T^{-2\alpha}\right) \\
\leq \;& c(a)T^{\alpha}\mathbb{E}\left[2\left(\left|a_T^+\right|^2 + \left|\tilde{X}_t^T\right|^2\right)\right] + c(a)F^{\alpha,\gamma}(1) + \left(a\sqrt{\frac{\gamma\theta}{2\mu}} + a\frac{\gamma\theta}{2\mu}T^{-\alpha}\right) \\
\leq \;& 2c(a)T^{-\alpha}\left|a\sqrt{\frac{\gamma\theta}{2\mu}} + a\frac{\gamma\theta}{2\mu}T^{-\alpha}\right|^2 + 2c(a)T^{\alpha}\mathbb{E}\left[\left|\tilde{X}_t^T\right|^2\right] + c(a)F^{\alpha,\gamma}(1) + \left(a\sqrt{\frac{\gamma\theta}{2\mu}} + a\frac{\gamma\theta}{2\mu}T^{-\alpha}\right) \\
\leq \;& c(a)\left(1 + T^{\alpha}\mathbb{E}\left[\left|\tilde{X}_t^T\right|^2\right]\right).
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

La última desigualdad nos muestra una primera cota para $T^{\alpha}\left|Y^{T,+}(a,t)-1\right|$, la cual presenta aun dependencia de T. Por lo tanto, para continuar acotando vamos hallar una cota para $T^{\alpha}\mathbb{E}\left[\left|\tilde{X}_t^T\right|^2\right]$. Usando que $\tilde{N}_{tT}^{T,+} - \tilde{N}_{tT}^{T,-} = \tilde{M}_{tT}^{T,+} - \tilde{M}_{tT}^{T,-}$ y la definición de $\tilde{X}_t^T$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
T^{\alpha}\mathbb{E}\left[\left(\tilde{X}_t^T\right)^2\right] &= T^{\alpha}\mathbb{E}\left[\left(a\sqrt{\frac{\gamma\theta}{2\mu}}T^{-\alpha}\left(\tilde{N}_{tT}^{T,+} - \tilde{N}_{tT}^{T,-}\right) - a\frac{\gamma\theta}{2\mu}T^{-2\alpha}\tilde{N}_{tT}^{T,+}\right)^2\right] \\
&\leq T^{\alpha}\mathbb{E}\left[2\left(a^2\frac{\gamma\theta}{2\mu}T^{-2\alpha}\left(\tilde{N}_{tT}^{T,+} - \tilde{N}_{tT}^{T,-}\right)^2 + a^2\frac{\gamma^2\theta^2}{(2\mu)^2}T^{-4\alpha}\left(\tilde{N}_{tT}^{T,+}\right)^2\right)\right] \\
&\leq c(a)T^{-\alpha}\mathbb{E}\left[\left(\tilde{M}_{tT}^{T,+} - \tilde{M}_{tT}^{T,-}\right)^2\right] + c(a)T^{-3\alpha}\mathbb{E}\left[\left(\tilde{N}_{tT}^{T,+}\right)^2\right].
\end{aligned}
$$

Análogamente a lo hecho en la ecuación (3.9) del Lema 3.0.5, se sigue

$$\left[\tilde{M}^{T,+} - \tilde{M}^{T,-}, \tilde{M}^{T,+} - \tilde{M}^{T,-}\right]_{tT} = \tilde{N}^{T,+}_{tT} + \tilde{N}^{T,-}_{tT},$$

y por propiedades de covariación cuadrática, se deduce que

$$\begin{aligned}
T^{\alpha}\mathbb{E}\left[\left(\tilde{X}^T_t\right)^2\right] &\leq c(a)T^{-\alpha}\mathbb{E}\left[\tilde{N}^{T,+}_{tT} + \tilde{N}^{T,-}_{tT}\right] + c(a)T^{-3\alpha}\mathbb{E}\left[\left(\tilde{N}^{T,+}_{tT}\right)^2\right] \\
&= 2c(a)T^{-\alpha}\mathbb{E}\left[\int_0^{tT}\tilde{\lambda}^T_s ds\right] + c(a)T^{-3\alpha}\mathbb{E}\left[\left(\tilde{N}^{T,+}_{tT}\right)^2\right] \\
&\leq 2c(a)T^{-\alpha}\frac{1}{\gamma(\beta+1)}F^{\alpha,\gamma}(1)T^{\alpha} + c(a)T^{-3\alpha}\mathbb{E}\left[\left(\tilde{N}^{T,+}_{tT}\right)^2\right] \\
&\leq c(a)\left(1 + T^{-3\alpha}\mathbb{E}\left[\left(\tilde{N}^{T,+}_{tT}\right)^2\right]\right). \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Contemplamos que nuevamente nuestra tarea ha sido relegada a acotar otro término, que en este caso es $\mathbb{E}\left[\left(\tilde{N}^{T,+}_{tT}\right)^2\right]$. Para calcular esta nueva cota vamos a proceder a calcular primero una cota de $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{tT}\tilde{\lambda}^T_s ds\right)^2\right]$, debido a la relación que hay entre estos dos términos. Apoyándonos en las ecuaciones (4.6),(4.7) y en la desigualdad de Jensen, es claro que

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\int_0^{tT}\tilde{\lambda}^T_s ds\right)^2\right] &= \mathbb{E}\Bigg[\Bigg(\frac{1}{\gamma(1+\beta)}a_T T^{\alpha}F^{\alpha,\gamma}(t) \\
&\quad + \frac{1}{1+\beta}a_T T^{\alpha}\int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)\left(\tilde{M}^{T,+}_{sT} + \beta\tilde{M}^{T,-}_{sT}\right)ds\Bigg)^2\Bigg] \\
&= \frac{1}{\gamma^2(\beta+1)^2}a_T^2 T^{2\alpha}\left(F^{\alpha,\gamma}(t)\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{(\beta+1)^2}a_T^2 T^{2\alpha}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s)\left(\tilde{M}^{T,+}_{sT} + \beta\tilde{M}^{T,-}_{sT}\right)ds\right)^2\right] \\
&\leq c(a)T^{2\alpha}\left(1 + \mathbb{E}\left[\int_0^t (f^{\alpha,\gamma}(t-s))^2\left(\tilde{M}^{T,+}_{sT} + \beta\tilde{M}^{T,-}_{sT}\right)^2 ds\right]\right) \\
&\leq c(a)T^{2\alpha}\left(1 + \int_0^t (f^{\alpha,\gamma}(t-s))^2\mathbb{E}\left[\left(\tilde{M}^{T,+}_{sT} + \beta\tilde{M}^{T,-}_{sT}\right)^2\right]ds\right).
\end{aligned}$$

Recurriendo de nuevo al argumento usado para la variación cuadrática, se sigue que

$$\left[\tilde{M}^{T,+}_{sT} + \beta\tilde{M}^{T,-}_{sT}, \tilde{M}^{T,+}_{sT} + \beta\tilde{M}^{T,-}_{sT}\right] = \tilde{N}^{T,+}_{sT} + \beta^2\tilde{N}^{T,-}_{sT}$$

por lo tanto nuestra cota toma la forma

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^{tT}\tilde{\lambda}_s^T ds\right)^2\right] &\leq c(a)T^{2\alpha}\left(1+\int_0^t (f^{\alpha,\gamma}(t-s))^2\mathbb{E}\left[\tilde{N}_{sT}^{T,+}+\beta^2\tilde{N}_{sT}^{T,-}\right]ds\right) \\ &= c(a)T^{2\alpha}\left(1+(1+\beta^2)\int_0^t (f^{\alpha,\gamma}(t-s))^2\mathbb{E}\left[\int_0^{sT}\tilde{\lambda}_u^T du\right]ds\right) \\ &\leq c(a)T^{2\alpha}\left(1+\frac{(1+\beta^2)}{\gamma(\beta+1)}F^{\alpha,\gamma}(1)T^\alpha\int_0^t (f^{\alpha,\gamma}(t-s))^2 ds\right) \\ &\leq c(a)T^{2\alpha}\left(1+T^\alpha\int_0^t (f^{\alpha,\gamma}(t-s))^2 ds\right). \end{aligned}$$

Usando nuevamente que la densidad Mittag-Leffler es cuadrado integrable para $\alpha \in (1/2, 1)$, se llega a que

$$E\left[\left(\int_0^{tT}\tilde{\lambda}_s^T ds\right)^2\right] \leq c(a)T^{3\alpha}.$$

De la definición de $\tilde{M}^T$ y propiedades de una martingala asociada a un proceso de conteo, deducimos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\tilde{N}_{tT}^{T,+}\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\tilde{M}_{tT}^{T,+}+\int_0^{tT}\tilde{\lambda}_s^T ds\right)^2\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[2\left(\left(\tilde{M}_{tT}^{T,+}\right)^2+\left(\int_0^{tT}\tilde{\lambda}_s^T ds\right)^2\right)\right] \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^{tT}\tilde{\lambda}_s^T ds\right]+2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{tT}\tilde{\lambda}_s^T ds\right)^2\right] \\ &\leq 2\frac{1}{\gamma(\beta+1)}F^{\alpha,\gamma}(1)T^\alpha+2c(a)T^{3\alpha} \\ &\leq c(a)T^{3\alpha}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Lo anterior nos dice que $\mathbb{E}\left[\left(\tilde{N}_{tT}^{T,+}\right)^2\right]$ está acotado por $T^{3\alpha}$, por lo que retomando la desigualdad (4.9), se llega a

$$T^\alpha\mathbb{E}\left[\left(\tilde{X}_t^T\right)^2\right] \leq c(a).$$

Finalmente, usando la última cota en la desigualdad (4.8) se concluye que

$$T^\alpha\left|Y^{T,+}(a,t)-1\right| \leq c(a),$$

donde esta cota no depende de t y T. Para concluir la demostración del lema, observemos que esta desigualdad también se mantiene para $T^{\alpha}\left|Y^{T,-}(a,t)-1\right|$ (procediendo de manera análoga), por lo que usando desigualdad triangular, se obtiene el resultado deseado. $\square$

A continuación empezaremos a visualizar la forma que toma el limite de los términos que conforman a la función característica. Para los siguiente, definiremos $k=\gamma\theta/(2\mu)$.

Lema 4.0.2. *La sucesión $T^{\alpha}\left(Y^{T}(a,t)-(1,1)\right)$ converge uniformemente en $t\in[0,1]$ a $(g(a,t),h(a,t))$, donde (g,h) son solución de*

$$g(a,t)=ia\sqrt{k}-ia\frac{k}{\gamma(\beta+1)}F^{\alpha,\gamma}(t)+\frac{1}{2\gamma(\beta+1)}\int_0^t\left(g^2(a,t-s)+h^2(a,t-s)\right)f^{\alpha,\gamma}(s)ds,$$

$$h(a,t)=-ia\sqrt{k}-ia\frac{\beta k}{\gamma(\beta+1)}F^{\alpha,\gamma}(t)+\frac{\beta}{2\gamma(\beta+1)}\int_0^t\left(g^2(a,t-s)+h^2(a,t-s)\right)f^{\alpha,\gamma}(s)ds.$$

Demostración. Para demostrar este lema lo primero que haremos será reescribir el término $T^{\alpha}(Y^{T}-(1,1))$, de tal forma que nos permita demostrar la convergencia de forma más práctica. Notemos que por el Lema 4.0.1, se sigue que podemos hacer T lo suficientemente grande para que las desigualdades

$$\left|Y^{T,+}(a,t)-1\right|<\frac{1}{2}\quad \text{y}\quad \left|Y^{T,-}(a,t)-1\right|<\frac{1}{2},$$

se cumplan uniformemente en t. Por lo tanto del lema anterior y el Lema 4.0.4 del apéndice, con z igual a cada componente de $(Y^{T}-(1,1))$, se sigue que para T suficientemente grande la siguiente igualdad se da componente a componente:

$$\ln(Y^{T}(a,t))=Y^{T}(a,t)-(1,1)-\frac{1}{2}(Y^{T}(a,t)-(1,1))^2-\varepsilon^{T}(a,T),\tag{4.11}$$

donde

$$\left|\varepsilon^{T}(a,T)\right|\leq c(a)T^{-3\alpha}.$$

Por otro lado, recurriendo de nuevo al lema anterior y al hecho de que φ es una densidad, se sigue

$$\left|ia_T^{+}+\int_0^t\left[T\left(Y^{T,+}(a,t-s)-1\right)+T\left(Y^{T,-}(a,t-s)-1\right)\right]\frac{\varphi^{T}(Ts)}{1+\beta}ds\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left|a_T^+\right| + \frac{a_T}{1+\beta}\int_0^t T\left(\left|Y^{T,+}(a,t-s)-1\right| + \left|Y^{T,-}(a,t-s)-1\right|\right)\varphi(Ts)ds \\
&\leq \left|a_T^+\right| + \frac{a_T}{1+\beta}c(a)T^{-\alpha}\int_0^{tT}\varphi(s)ds \\
&\leq c(a)T^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

De forma análoga

$$\left|ia_T^- + \int_0^t \left[T\left(Y^{T,+}(a,t-s)-1\right) + T\left(Y^{T,-}(a,t-s)-1\right)\right]\frac{\beta\varphi^T(Ts)}{1+\beta}ds\right| \leq c(a)T^{-\alpha}.$$

Luego, como el valor absoluto de la parte imaginaria de un número complejo es menor que su norma, se sigue que componente a componente

$$\left|Im\left(i(a_T^+,a_T^-) + \int_0^t T\left(Y^T(a,t-s)-(1,1)\right)\cdot\phi^T(Ts)ds\right)\right| \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

por lo que para T suficientemente grande podemos hacer la norma de la parte imaginaria del término de la derecha de cada componente de (4.4), más pequeña que π. Como el logaritmo complejo está definido para todo $z\in\mathbb{C}$, tal que $-\pi < Arg(z) < \pi$, se sigue que la siguiente expresión está bien definida[1]

$$\ln\left(\exp\left(i(a_T^+,a_T^-) + \int_0^t T\left(Y^T(a,t-s)-(1,1)\right)\cdot\phi^T(Ts)ds\right)\right),$$

y además es igual a

$$i(a_T^+,a_T^-) + \int_0^t T\left(Y^T(a,t-s)-(1,1)\right)\cdot\phi^T(Ts)ds.$$

Aplicando logaritmo a la ecuación (4.4) y usando la ecuación (4.11) , llegamos a que

$$
\begin{aligned}
Y^T(a,t)-(1,1) &= \frac{1}{2}\left(Y^T(a,t)-(1,1)\right)^2 + \varepsilon^T(a,t) \\
&\quad + i(a_T^+,a_T^-) + \int_0^t T\left(Y^T(a,t-s)-(1,1)\right)\cdot\phi^T(Ts)ds \\
&= \frac{1}{2}\left(Y^T(a,t)-(1,1)\right)^2 + \varepsilon^T(a,t) + ia\sqrt{k}T^{-\alpha}(1,-1) \\
&\quad - iakT^{-2\alpha}(1,0) + \int_0^t T\left(Y^T(a,t-s)-(1,1)\right)\cdot\phi^T(Ts)ds,
\end{aligned}
$$

[1]Recordemos que si $z=a+bi$ entonces $Arg(\exp(z))=b$.

donde esta última igualdad se da por la forma de a_T^+ y a_T^- en terminos de k. Por el Lema 4.0.1 y la definición de ε^T, la función

$$\frac{1}{2}\left(Y^T(a,t)-(1,1)\right)^2+\varepsilon^T(a,t)+ia\sqrt{k}T^{-\alpha}(1,-1)-iakT^{-2\alpha}(1,0), \tag{4.12}$$

es acotada para todo $t\in[0,1]$, por lo tanto la ecuación en (4.12) con $Y^T(a,t)-(1,1)$ como función incógnita, tiene solución como ecuación de renovación. Luego, procediendo de forma análoga como en la propiedad (iii) de la Proposición 2.1.1, se sigue que

$$\sum_{k\geq 1}\left(T\phi^T(T\cdot)\right)^{*k}=a_T\frac{T^\alpha}{\gamma}f^{\alpha,\gamma}(\cdot)\chi,$$

por lo que usando el Teorema 4.0.2, deducimos

$$\begin{aligned}
& Y^T(a,t)-(1,1)\\
= & \frac{1}{2}\left(Y^T(a,t)-(1,1)\right)^2+\varepsilon^T(a,t)+ia\sqrt{k}T^{-\alpha}(1,-1)-iakT^{-2\alpha}(1,0)\\
& +\int_0^t\Big[\frac{1}{2}\left(Y^T(a,t-s)-(1,1)\right)^2+\varepsilon^T(a,t-s)+ia\sqrt{k}T^{-\alpha}(1,-1)\\
& -iakT^{-2\alpha}(1,0)\Big]\cdot a_T\frac{T^\alpha}{\gamma}f^{\alpha,\gamma}(s)\chi ds\\
= & \frac{1}{2}\left(Y^T(a,t)-(1,1)\right)^2+\varepsilon^T(a,t)+ia\sqrt{k}T^{-\alpha}(1,-1)-iakT^{-2\alpha}(1,0)\\
& +\frac{a_T}{2}\frac{T^\alpha}{\gamma}\int_0^t\left(Y^T(a,t-s)-(1,1)\right)^2\cdot\chi f^{\alpha,\gamma}(s)ds+a_T\frac{T^\alpha}{\gamma}\int_0^t\varepsilon^T(a,t-s)\cdot\chi f^{\alpha,\gamma}(s)ds\\
& +ia\sqrt{k}\frac{a_T}{\gamma}(1,-1)\cdot\chi\int_0^t f^{\alpha,\gamma}(s)ds-iakT^{-\alpha}\frac{a_T}{\gamma}(1,0)\cdot\chi\int_0^t f^{\alpha,\gamma}(s)ds.
\end{aligned}\tag{4.13}$$

Recordando la definición de χ en 2.1.1, obtenemos

$$(1,-1)\cdot\chi=\frac{1}{1+\beta}(1,-1)\cdot\begin{pmatrix}1&\beta\\1&\beta\end{pmatrix}=0,$$

$$(1,0)\cdot\chi=\frac{1}{1+\beta}(1,0)\cdot\begin{pmatrix}1&\beta\\1&\beta\end{pmatrix}=\frac{1}{1+\beta}(1,\beta),$$

por lo que definiendo

$$\varepsilon_1^T(a,t)=\frac{1}{2}\left(Y^T(a,t)-(1,1)\right)^2+\varepsilon^T(a,t)-iakT^{-2\alpha}(1,0)+a_T\frac{T^\alpha}{\gamma}\int_0^t\varepsilon^T(a,t-s)\cdot\chi f^{\alpha,\gamma}(s)ds,$$

$$\varepsilon_2^T(a,t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \left(Y^T(a,t-s)-(1,1)\right)^2 \cdot \chi f^{\alpha,\gamma}(s)ds + ia\frac{k}{1+\beta}T^{-2\alpha}F^{\alpha,\gamma}(t)(1,\beta),$$

y considerando que $a_T = 1-\gamma T^{-\alpha}$, se reescribe la ecuación (4.13) como

$$\begin{aligned} & Y^T(a,t)-(1,1) \\ = \; & \varepsilon_1^T(a,t)+\varepsilon_2^T(a,t)+ia\sqrt{k}T^{-\alpha}(1,-1)+\frac{1}{2\gamma}T^{\alpha}\int_0^t \left(Y^T(a,t-s)-(1,1)\right)^2\cdot\chi f^{\alpha,\gamma}(s)ds \\ & -ia\frac{k}{\gamma(1+\beta)}T^{-\alpha}F^{\alpha,\gamma}(t)(1,\beta). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Para concluir la forma adecuada en la que queremos reescribir $T^{\alpha}(Y^T(a,t)-(1,1))$, definimos

$$\theta^T(a,t) = (\theta^{T,+}(a,t),\theta^{T,-}(a,t)) = T^{\alpha}(Y^T(a,t)-(1,1)),$$

y

$$r^T(a,t) = T^{\alpha}(\varepsilon_1^T(a,t)+\varepsilon_2^T(a,t)).$$

Por lo tanto de (4.14) al multiplicarla por T^{α} se llega a

$$\begin{aligned} \theta^T(a,t) \;\; = \;\; & r^T(a,t)+ia\sqrt{k}(1,-1)+\frac{1}{2\gamma}\int_0^t \left(\theta^T(a,t-s)\right)^2\cdot\chi f^{\alpha,\gamma}(s)ds \\ & -ia\frac{k}{\gamma(1+\beta)}F^{\alpha,\gamma}(t)(1,\beta). \end{aligned}$$

Ahora probaremos la convergencia uniforme en $t\in[0,1]$ de $\theta^T(a,\cdot)$ para a fijo, mostrando que es una sucesión de Cauchy en el espacio de funciones continuas de $\mathbf{C}([0,1],\mathbb{R}^2)$, con la norma supremo[2]. Para llevar esto acabo notemos que por el Lema 4.0.1 y por como se definió ε^T, se deduce que $T^{2\alpha}\varepsilon_1^T(a,t)$ y $T^{2\alpha}\varepsilon_2^T(a,t)$ son acotados uniformemente con respecto a t y T suficientemente grande, por lo que $T^{\alpha}r^T$ y θ^T también resultan ser uniformemente acotados para todo t y T suficientemente grande. De lo anterior se sigue que para todo $\delta>0$ existe $T_0>1$ tal que si $T,T'>T_0$ y $t\in[0,1]$, se obtiene

$$\left\|r^T(a,t)\right\|_\infty \leq \frac{\delta}{2}, \quad \left\|r^{T'}(a,t)\right\|_\infty \leq \frac{\delta}{2},$$

[2] Por lo que se vio en el Ejemplo 1.2.1 de los preliminares, se sabe que el espacio de funciones continuas dotado con la norma supremo es completo. Además con esta norma, la convergencia resulta ser uniforme con respecto al parámetro t.

y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
& \left\|\theta^T(a,t)-\theta^{T'}(a,t)\right\|_\infty \\
= \; & \left\| r^T(a,t)+\frac{1}{2\gamma}\int_0^t \left(\theta^T(a,t-s)\right)^2 \cdot \chi f^{\alpha,\gamma}(s)ds \right. \\
& \left. -r^{T'}(a,t)-\frac{1}{2\gamma}\int_0^t \left(\theta^{T'}(a,t-s)\right)^2 \cdot \chi f^{\alpha,\gamma}(s)ds \right\|_\infty \\
\leq \; & \delta+\left\|\frac{1}{2\gamma}\int_0^t \left[\left(\theta^T(a,t-s)\right)^2-\left(\theta^{T'}(a,t-s)\right)^2\right]\cdot \chi f^{\alpha,\gamma}(s)ds\right\|_\infty \\
\leq \; & \delta+\frac{1}{2\gamma}\int_0^t \left\|\left[\left(\theta^T(a,t-s)\right)^2-\left(\theta^{T'}(a,t-s)\right)^2\right]\cdot \chi\right\|_\infty f^{\alpha,\gamma}(s)ds \\
\leq \; & \delta+\frac{1}{2\gamma}\int_0^t \left\|\left(\theta^T(a,t-s)\right)^2-\left(\theta^{T'}(a,t-s)\right)^2\right\|_\infty f^{\alpha,\gamma}(s)ds \\
\leq \; & \delta+\frac{1}{2\gamma}C\int_0^t \left\|\theta^T(a,t-s)-\theta^{T'}(a,t-s)\right\|_\infty f^{\alpha,\gamma}(s)ds,
\end{aligned}
$$

donde C es la constante resultante de utilizar que θ^T es uniformemente acotada. Haciendo cambio de variable en la última desigualdad y usando el Lema 4.0.6 del Apéndice, se sigue que

$$\left\|\theta^T(a,t)-\theta^{T'}(a,t)\right\|_\infty \leq \delta C',$$

donde

$$C' = 1+\frac{C}{2}\int_0^1 s^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\gamma(\frac{C}{2\gamma}-1)s^\alpha)ds.$$

Lo anterior muestra que efectivamente $\theta^T(a,\cdot)$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de funciones $C([0,1],\mathbb{R}^2)$ con la norma supremo, por lo que converge a una función $(g(\cdot),h(\cdot))$ tal que, por definición de $\theta^T(a,\cdot)$ y χ, es solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
g(a,t) &= ia\sqrt{k}-ia\frac{k}{\gamma(1+\beta)}F^{\alpha,\gamma}(t)+\frac{1}{2\gamma(1+\beta)}\int_0^t \left(g^2(a,t-s)+h^2(a,t-s)\right)f^{\alpha,\gamma}(s)ds, \\
h(a,t) &= -ia\sqrt{k}-ia\frac{k\beta}{\gamma(1+\beta)}F^{\alpha,\gamma}(t)+\frac{\beta}{2\gamma(1+\beta)}\int_0^t \left(g^2(a,t-s)+h^2(a,t-s)\right)f^{\alpha,\gamma}(s)ds.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Notemos que en las ecuaciones anteriores no aparece el término correspondiente a r^T lo cual se debe a que para T suficientemente grande $T^\alpha r^T(a,t)$ es uniformemente acotado, por lo que en la norma supremo r^T converge a cero. □

Con el último lema enunciado ya estamos listos para dar el resultado principal de este trabajo, el cual expone la forma que toma el limite de $L^T((a_T^+, a_T^-), tT)$ cuando T tiende a infinito, dándonos así una expresión de L_P. Dado que la solución estará expresada en términos de la integral y derivada fraccionaria, definimos a continuación estos conceptos: la integral fraccionaria de orden $r \in (0,1]$ de una función f esta definida como

$$I^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s) ds,$$

y su derivada fraccionaria de orden $r \in [0,1)$ como

$$D^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-r)} \frac{d}{dr} \int_0^t (t-s)^{-r} f(s) ds,$$

siempre y cuando existan. Esta noción de integral y derivada han sido ampliamente estudiadas debido a su utilidad en varias áreas del conocimiento, desde aplicaciones en ingeniería hasta teoría de probabilidad [32]. Presentamos el resultado principal de este trabajo.

Teorema 4.0.1. *Consideremos el modelo rugoso de Heston* (3) *tal que la correlación ρ entre los movimientos Brownianos que lo definen está entre $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. Para todo $t \geq 0$ y $a \in \mathbb{R}$ fijo, se tiene que*

$$L_p(a,t) = \exp\left(\theta\gamma I^1 H(a,t) + V_0 I^{1-\alpha} H(a,t)\right),$$

donde $H(a,\cdot)$ es solución de la ecuación fraccionaria de Riccati

$$D^\alpha H(a,t) = \frac{1}{2}(-a^2 - ia) + \gamma(ia\rho\nu - 1)H(a,t) + \frac{(\gamma\nu)^2}{2} H^2(a,t), \quad I^{1-\alpha}H(a,0) = 0, \tag{4.16}$$

la cual admite una única solución continua.

Demostración. Primero notemos que por (2.9) se sigue que $\hat{\mu}_T(t)$ se puede reescribir como

$$\hat{\mu}_T(t) = \mu_T + \xi\mu_T \left[\frac{t^{-\alpha}}{\gamma}(tT)^\alpha \int_t^\infty \varphi(s)ds + \gamma T^{-\alpha} \int_0^t \varphi(s)ds\right].$$

Por lo tanto, recordando que $\mu_T = \mu T^{\alpha-1}$, se sigue que

$$T^{1-\alpha}\hat{\mu}_T(tT) = \mu + \xi\mu \left[\frac{t^{-\alpha}}{\gamma}(tT)^\alpha \int_{tT}^\infty \varphi(s)ds + \gamma T^{-\alpha} \int_0^{tT} \varphi(s)ds\right].$$

Observemos que para T suficientemente grande existe $c(a)$ tal que

$$T^{1-\alpha}\hat{\mu}_T(tT) \leq c(a)(1+t^{-\alpha}),$$

y más aun

$$T^{1-\alpha}\hat{\mu}_T(tT) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \mu\left(1+\xi\frac{t^{-\alpha}}{\gamma\Gamma(1-\alpha)}\right),$$

donde hemos usado (1.6). Luego del Lema 4.0.1 y de la cota vista para $T^{1-\alpha}\hat{\mu}_T(tT)$, se obtiene lo siguiente:

$$\left|T^{\alpha}\left(Y^{T,+}(a,t-s)-1\right)+T^{\alpha}\left(Y^{T,-}(a,t-s)-1\right)\right|T^{1-\alpha}\hat{\mu}_T(sT) \leq c(a)(1+s^{-\alpha}).$$

La cota anterior es uniforme en $s\in[0,1]$ y dado que el término en la desigualdad anterior es integrable, se sigue al aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada a la ecuación (4.3) que

$$L^T((a_T^+,a_T^-),tT) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left(\int_0^t \mu(g(a,s)+h(a,s))\left(1+\xi\frac{(t-s)^{-\alpha}}{\gamma\Gamma(1-\alpha)}\right)ds\right).$$

Recordemos que $L^T((a_T^+,a_T^-),tT)$ converge a $L_P(a,t)$ cuando T tiende a infinito

$$L_P(a,t) = \exp\left(\int_0^t \mu(g(a,s)+h(a,s))\left(1+\xi\frac{(t-s)^{-\alpha}}{\gamma\Gamma(1-\alpha)}\right)ds\right). \tag{4.17}$$

Notemos que ya conseguimos una expresión para $L_P(a,t)$, que es la función característica del log-precio al tiempo t de un activo bajo el modelo rugoso de Heston. Esta expresión de $L_P(a,t)$ está constituida a partir de las funciones (g,h) que cumplen un sistema de ecuaciones integrales, por lo que nos gustaría expresar esta en términos de una única función que cumpla una ecuación integral. Para hacer esto, notemos primero la siguiente relación entre las funciones g y h a partir del sistema (4.15):

$$h(a,t) = \beta g(a,t) - ia(1+\beta)\sqrt{k} = \beta(g(a,t)-ia\sqrt{k}) - ia\sqrt{k}.$$

Sea

$$G(a,t) = \mu(g(a,t)+h(a,t)).$$

Reescribiendo $h(a,t)$ en términos de $g(a,t)$ en $G(a,t)$ y usando la definición de $g(a,t)$ se sigue que

$$\begin{aligned}
& G(a,t) \\
= \; & \mu(\beta+1)(g(a,t) - ia\sqrt{k}) \\
= \; & \mu(\beta+1)\Bigg[ia\sqrt{k} - ia\frac{k}{\gamma(1+\beta)}F^{\alpha,\gamma}(t) \\
& + \frac{1}{2\gamma(1+\beta)}\int_0^t \left(g^2(a,s)+h^2(a,s)\right) f^{\alpha,\gamma}(t-s)ds - ia\sqrt{k}\Bigg] \\
= \; & -ia\frac{k\mu}{\gamma}F^{\alpha,\gamma}(t) + \frac{\mu}{2\gamma}\int_0^t \left(g^2(a,s)+h^2(a,s)\right) f^{\alpha,\gamma}(t-s)ds.
\end{aligned}$$

Ahora, si desarrollamos aparte la suma de los cuadrados dentro de la integral en términos de $G(\cdot,\cdot)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
& g^2(a,s)+h^2(a,s) \\
= \; & (g(a,s) - ia\sqrt{k} + ia\sqrt{k})^2 + (\beta(g(a,s) - ia\sqrt{k}) - ia\sqrt{k})^2 \\
= \; & (g(a,s) - ia\sqrt{k})^2 + 2(g(a,s) - ia\sqrt{k})ia\sqrt{k} - a^2k \\
& \beta^2(g(a,s) - ia\sqrt{k})^2 - 2\beta(g(a,s) - ia\sqrt{k})ia\sqrt{k} - a^2k \\
= \; & (1+\beta^2)(g(a,s) - ia\sqrt{k})^2 + 2(1-\beta)(g(a,s) - ia\sqrt{k})ia\sqrt{k} - 2a^2k \\
= \; & \frac{1+\beta^2}{\mu^2(1+\beta)^2}(G(a,s))^2 + \frac{i2a(1-\beta)\sqrt{k}}{\mu(1+\beta)}G(a,s) - 2a^2k.
\end{aligned}$$

Sustituyendo esto último en la expresión que teníamos de $G(a,t)$ y usando que $k=\gamma\theta/(2\mu)$, se sigue

$$\begin{aligned}
& G(a,t) \\
= \; & -ia\frac{k\mu}{\gamma}F^{\alpha,\gamma}(t) \\
& + \frac{\mu}{2\gamma}\int_0^t \left(\frac{1+\beta^2}{\mu^2(1+\beta)^2}(G(a,s))^2 + \frac{i2a(1-\beta)\sqrt{k}}{\mu(1+\beta)}G(a,s) - 2a^2k\right) f^{\alpha,\gamma}(s)ds \\
= \; & -ia\frac{k\mu}{\gamma}F^{\alpha,\gamma}(t) + \frac{(1+\beta^2)}{2\gamma\mu(1+\beta)^2}\int_0^t (G(a,s))^2 f^{\alpha,\gamma}(t-s)ds \\
& + \frac{ia(1-\beta)\sqrt{k}}{\gamma(1+\beta)}\int_0^t G(a,s)f^{\alpha,\gamma}(t-s)ds - \frac{\mu a^2k}{\gamma}F^{\alpha,\gamma}(t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\theta}{2}(-a^2 - ia)F^{\alpha,\gamma}(t) + \frac{(1+\beta^2)}{2\gamma\mu(1+\beta)^2}\int_0^t (G(a,s))^2 f^{\alpha,\gamma}(t-s)ds \\
&\quad + ia\frac{\sqrt{\theta}(1-\beta)}{\sqrt{2\gamma\mu}(1+\beta)}\int_0^t G(a,s)f^{\alpha,\gamma}(t-s)ds.
\end{aligned}
$$

Por la definición que se dio de ρ y ν en (3.16), se cumple que

$$
\rho\nu = \frac{\sqrt{\theta}(1-\beta)}{\sqrt{2\gamma\mu}(1+\beta)},
$$

y usando esto en la expresión anterior de $G(a,t)$ se concluye que

$$
\begin{aligned}
G(a,t) &= \frac{\theta}{2}(-a^2 - ia)F^{\alpha,\gamma}(t) + \frac{\nu^2}{2\theta}\int_0^t (G(a,s))^2 f^{\alpha,\gamma}(s)ds + ia\rho\nu\int_0^t G(a,s)f^{\alpha,\gamma}(s)ds \\
&= \int_0^t \left(\frac{\theta}{2}(-a^2 - ia) + ia\rho\nu G(a,s) + \frac{\nu^2}{2\theta}(G(a,t))^2\right) f^{\alpha,\gamma}(t-s)ds.
\end{aligned}
$$

Sea $H(a,t) = G(a,t)/(\theta\gamma)$, por lo tanto

$$
H(a,t) = \int_0^t \left(\frac{1}{2}(-a^2 - ia) + ia\gamma\rho\nu H(a,s) + \frac{(\gamma\nu)^2}{2\theta}(H(a,s))^2\right)\frac{1}{\gamma}f^{\alpha,\gamma}(t-s)ds. \quad (4.18)
$$

Ademas, del Lema 4.0.5 del Apéndice se concluye que $H(a,t)$ es la única solución continua de la siguiente ecuación fraccionaria:

$$
D^\alpha H(a,t) = \frac{1}{2}(-a^2 - ia) + ia\gamma\rho\nu H(a,t) + \frac{(\gamma\nu)^2}{2\theta}(H(a,t))^2 - \gamma H(a,t), \quad I^{1-\alpha}H(a,0) = 0.
$$

Dado que ya tenemos una función H que cumple una ecuación integral fraccionaria, notemos que la ecuación (4.17) se puede reescribir a partir de integrales fraccionarias de H como sigue:

$$
\begin{aligned}
L_P(a,t) &= \exp\left(\int_0^t G(a,s)\left(1 + \xi\frac{(t-s)^{-\alpha}}{\gamma\Gamma(1-\alpha)}\right)ds\right) \\
&= \exp\left(\int_0^t H(a,s)\left(\theta\gamma + \xi\frac{\theta(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right)ds\right) \\
&= \exp\left(\theta\gamma\int_0^t H(a,s)ds + \xi\theta\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}H(a,s)ds\right) \\
&= \exp\left(\theta\gamma I^1 H(a,t) + V_0 I^{1-\alpha}H(a,t)\right),
\end{aligned}
$$

donde en esta última igualdad se ha usado la definición de V_0 y la de integral fraccionaria.

Para terminar esta prueba, mostraremos la unicidad de la solución de la ecuación (4.16) y para lo cual supondremos que H_1 y H_2 son dos soluciones de dicha ecuación. Se sigue que

$$\begin{aligned}
& |H_1(a,t) - H_2(a,t)| \\
= & \left| \int_0^t \left(ia\gamma\rho\nu \left(H_1(a,s) - H_2(a,s)\right) + \frac{(\gamma\nu)^2}{2\theta}\left(H_1^2(a,s) - H_2^2(a,s)\right) \right) \frac{1}{\gamma} f^{\alpha,\gamma}(t-s)ds \right| \\
\leq & \int_0^t \left(|a\gamma\rho\nu| \, |H_1(a,s) - H_2(a,s)| + \frac{(\gamma\nu)^2}{2\theta} \left|H_1^2(a,s) - H_2^2(a,s)\right| \right) \frac{1}{\gamma} f^{\alpha,\gamma}(t-s)ds.
\end{aligned}$$

Como estas soluciones son continuas, se tiene que ambas están acotadas en $[0,t]$, por lo que existe c tal que para todo $s \in [0,t]$

$$\left|H_1^2(a,s) - H_2^2(a,s)\right| \leq c \, |H_1(a,s) - H_2(a,s)| \, .$$

El argumento anterior implica que

$$\begin{aligned}
|H_1(a,t) - H_2(a,t)| & \leq \int_0^t \left(|a\gamma\rho\nu| + \frac{(\gamma\nu)^2}{2\theta} c \right) |H_1(a,s) - H_2(a,s)| \, \frac{1}{\gamma} f^{\alpha,\gamma}(t-s)ds \\
& \leq c(a) \int_0^t |H_1(a,s) - H_2(a,s)| \, \frac{1}{\gamma} f^{\alpha,\gamma}(t-s)ds. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Usando nuevamente que H_1 y H_2 son continuas obtenemos que $|H_1(a,\cdot) - H_2(a,\cdot)|$ es una función continua en $[0,1]$. Por lo tanto aplicando el Lema 4.0.6 del Apéndice, considerando $\varepsilon = 0$, se concluye que para todo $t \in [0,1]$

$$|H_1(a,t) - H_2(a,t)| = 0,$$

es decir

$$H_1(a,t) = H_2(a,t).$$

□

Finalmente hemos obtenido la función característica del log-precio de un activo bajo modelo rugoso de Heston, en términos de una solución de una ecuación fraccionaria de Riccati. Existen aproximaciones numéricas a la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias como en [6, 7], por lo que nuestra función característica L_P puede ser utilizada en aplicaciones numéricas.

estariá

Apendice

En este anexo se presentarán resultados de análisis que se utilizaron a lo largo del trabajo.

Teorema 4.0.2 (Solución a una ecuación de renovación)**.** *Sea g una función medible localmente acotada de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^d$, y sea ϕ una función valuada matricialmente con componentes integrables de $\mathbb{R}^+$ a $\mathcal{M}^d(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{S}(\int_0^\infty \phi(s)ds)$ es menor estricto que 1 ($\mathcal{S}$ es el operador radio espectral). Entonces existe una única función localmente acotada f de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^d$ que es solución de*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t \phi(t-s) \cdot f(s)ds, \quad t \geq 0$$

dada por

$$f(t) = g(t) + \int_0^t \psi(t-s) \cdot g(s)ds, \quad t \geq 0,$$

donde $\psi = \sum_{k\geq 1} \phi^{*k}$.

Demostración. Ver [13], Lema 3. □

Lema 4.0.3. *Existe un $c > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$|\exp(ix) - 1 - ix| \leq c\,|x|^2 .$$

Demostración. Para hacer esta prueba procederemos en dos casos: primero consideremos $|x| < 1$, luego por la forma que tiene la serie de potencias de la función exponencial, se sigue

$$|\exp(ix) - 1 - ix| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^2}{k!} \leq |x|^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} = |x|^2 (e-2).$$

Ahora sea $|x| \geq 1$; como la función $f(y) = (2+y)/y^2$ es decreciente en los reales no negativos

$$\frac{|\exp(ix) - 1 - ix|}{|x|^2} \leq \frac{2 + |x|}{|x|^2} \leq 3,$$

donde en la primera inecuación se a usado desigualdad triangular; por lo tanto

$$|\exp(ix) - 1 - ix| \leq 3\,|x|^2\,.$$

De lo anterior se concluye que existe un $c > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$|\exp(ix) - 1 - ix| \leq c\,|x|^2\,.$$

□

Lema 4.0.4. *Sea* $\ln(\cdot)$ *el logaritmo natural en el plano complejo. Existe* $c > 0$ *tal que para todo* $z \in \mathbb{C}$ *con* $|z| < 1/2$*, se tiene que*

$$\left| \ln(1+z) - z + \frac{1}{2} z^2 \right| \leq c\,|z|^3$$

Demostración. Puesto que $\ln(1+z)$ tiene expansión en serie de potencias para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$, se sigue que si $|z| < 1/2$

$$\begin{aligned} \left| \ln(1+z) - z + \frac{1}{2} z^2 \right| &= \left| \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} \right| \\ &\leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} \\ &= |z|^3 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} \frac{n}{n+3} + \frac{1}{3} \right) \\ &\leq |z|^3 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} + \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ |z|^3 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \right) \\
&\leq \ |z|^3 \left(\ln(2) + \frac{1}{3} \right),
\end{aligned}
$$

por lo tanto tomando $c = \ln(2) + 1/3$ se tiene el resultado. □

Lema 4.0.5. *Sea h una función continua de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1]$ y $\gamma \in \mathbb{R}$. Hay una única solución continua a la ecuación*

$$\boldsymbol{D}^{\alpha} y(t) = \gamma y(t) + h(t), \quad \boldsymbol{I}^{1-\alpha} y(0) = 0,$$

dado por

$$y(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\gamma(t-s)^{\alpha}) h(s) ds = \int_0^t -\frac{1}{\gamma} f^{\alpha,\gamma}(t-s) h(s) ds.$$

Demostración. Ver [12], ejemplo 42.2. □

Lema 4.0.6. *Sea h una función continua no negativa de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ tal que para cualquier $t \in [0,1]$,*

$$h(t) \leq \varepsilon + C \int_0^t f^{\alpha,\gamma}(t-s) h(s) ds,$$

para algún $\varepsilon \geq 0$ y $C \geq 0$. Entonces para cualquier $t \in [0,1]$,

$$h(t) \leq C'\epsilon,$$

con

$$C' = 1 + C\gamma \int_0^1 s^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\gamma(C-1)s^{\alpha}) ds,$$

en particular, si $\varepsilon = 0$ entonces $h = 0$.

Demostración. Ver [18], Lema A.3. □

Referencias

[1] Khalil Dayri & Mathieu Rosenbaum . “Large tick assets: implicit spread and optimal tick size”. En: *arXiv* arXiv:1207.6325 (2013). URL: https://arxiv.org/abs/1207.6325.

[2] Jacod J. & Shiryaev A. *Limit theorems for stochastic processes*. Springer Science & Business Media., 2013. ISBN: 978-3-642-07876-7.

[3] Irene Aldridge. *High-Frequency Trading:A Practical Guide to Algorithmic Strategies and Trading Systems*. First edition. Wiley trading series, 2010. ISBN: 978-0-470-56376-2.

[4] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measure*. Second edition. Wiley series in probability y statistics, 1999. ISBN: 0-471-19745-9.

[5] Kai L. Chung. *A couse in probability theory*. Third edition. ACADEMIC PRESS, 2001. ISBN: 0121741516.

[6] Diethelm K. & Ford N. J. & Freed A. D. “Detailed error analysis for a fractional Adams method”. En: *Numerical Algorithms* 36(1) (2004), págs. 31-52.

[7] Diethelm K. & Freed A. D. “A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations”. En: *Nonlinear Dynamics* 29(1-4) (2002), págs. 3-22.

[8] Arthur Erdelyi. *Higher transcendental functions*. First edition. McGHAW-HILL BOOK COMPANY, INC, 1995. ISBN: 0-89874-207-2 (v. III).

[9] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Second edition. Vol. Vol 2. WILEY, 1991. ISBN: 978-0-471-25709-7.

[10] Alan G. Hawkes. “Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes”. En: *Biometrika* 58 (1971), págs. 83-90.

[11] S.L Heston. “A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options.” En: *Review of financial studies* 6(2) (1993), págs. 327-343.

[12] Samko S. G. & Kilbas A. A. & Marichev O. I. *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications.* Gordon y Breach, 1993. ISBN: 2-88124-864-0.

[13] Bacry E. & Delattre S. & Hoffmann M. & Muzy J.F. “Some limit theorems for Hawkes processes and application to financial statistics”. En: *Stochastic Processes and Their Applications* 123 (2013), págs. 2475-2499. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.spa.2013.04.007.

[14] Bacry E. & Jaisson T. & Muzy J.F. “Estimation of slowly decreasing Hawkes kernels: Application to high frequency order book modelling”. En: *Quantitative Finance* 16(8) (2016), págs. 1179-1201.

[15] Fima C Klebaner. *Introduction to stochastic calculus with application*. Second edition. Imperial College Press, 2005. ISBN: 1-86094-555-4.

[16] Thomas G. Kurtz. *Approximation of Population Processes*. Society for Industrial y Applied Mathematics., 1981. ISBN: 0 89871 169 X.

[17] Alan L. Lewis. “A simple option formula for general jump-diffusion and other exponntial levy process”. En: *Envision Financial Systems and OptionCity.nets* (2001).

[18] El Euch O. & Rosenbaum M. “The characteristic function of rough Heston models”. En: *Mathematical Finance* 29 (2019), págs. 3-38. URL: https://doi.org/10.1111/mafi.12173.

[19] El Euch O. & Fukasawa M. & Rosenbaum M. “The microstructural foundations of leverage effect and rough volatility”. En: *Finance Stoch* 22 (2018), págs. 241-280. URL: https://doi-org.svproxy01.cimat.mx/10.1007/s00780-018-0360-z.

[20] Gatheral J. & Jaisson T. & Rosenbaum M. “Volatility is rough”. En: *arXiv* arXiv:1410.3394 (2014). URL: https://arxiv.org/abs/1410.3394.

[21] Horvath B. & Muguruza A. & Tomas M. “Deep Learning Volatility”. En: *SSRN* (2019). URL: https://ssrn.com/abstract=3322085.

[22] Jaisson T. & Rosenbaum M. “Rough fractional diffusions as scaling limits of nearly unstable heavy tailed hawkes processes”. En: *The Annals of Applied Probability* 26-5 (2016), págs. 2860-2882.

[23] Revuz D. & Yor M. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer Science & Business Media., 2005. ISBN: 978-3-642-08400-3.

[24] P. Carr & D. Madan. “Option valuation using the fast Fourier transform”. En: *Journal of Computational Finance* 2(4) (1999), págs. 61-73.

[25] D.B. Nelson. “OARCH models as diffusion approximations”. En: *Journal Economic* 45 (1990), págs. 7-38.

[26] Maureen O’Hara. *Market microstructure theory*. Second edition. Blackwell Publishers Inc, 1998. ISBN: 1-55786-443-8.

[27] Alan G. Hawkes & David Oakes. “A Cluster Process Representation of a Self-Exciting Process”. En: *Journal of Applied Probability* 11 (1974), págs. 493-503. URL: https://www.jstor.org/stable/3212693.

[28] Thomas R. & David P. *Counting Processes and Survival Analysis*. John Wiley & Sons., 1991. ISBN: 0 471 52218 X.

[29] Philip E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer., 2004. ISBN: 3 540 00313 4.

[30] Darío R. "Procesos puntuales: El modelo de Hawkes y sus aplicaciones." CIMAT, 2018.

[31] Christian B. & Benjamin S. "Deep calibration of rough stochastic volatility models". En: *arXiv* arXiv:1810.03399 (2018). URL: https://arxiv.org/abs/1810.03399.

[32] H.M. Srivastava & R.K. Saxena. "Operators of fractional integration and their applications". En: *Applied Mathematics and Computation* 181 (2001), págs. 1-52.

[33] H. J. Haubold & A. M. Mathai & R. K. Saxena. "Mittag-Leffler Functions and Their Applications". En: *Applied Mathematics* 2011 (2011).

[34] R. Sh. Liptser & A. N. Shiryayev. *Theory of Martingales*. Kluwer Academic Publishers, 1989. ISBN: 978-94-010-7600-5.