Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

ESPACIOS DE BERGMAN PESADOS Y SUS REPRESENTACIONES UNITARIAS

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Matemáticas Básicas

Presenta

Germán Sameed López Paredes

Director de Tesis:

Dr. Raúl Quiroga Barranco

Raúl Quiroga Barranco

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto a 26 de Noviembre de 2020

Agradecimientos

Agradezco a mis padres y hermanos, sin más que decir, por temor a no decirlo todo.

A mi director de tesis, el Dr. Raúl Quiroga Barranco, por su tiempo, confianza y paciencia que me ha otorgado, además de todo el conocimiento que me ha brindado, aportando parte importante en mi desarrollo como estudiante a lo largo de este último año.

A mis sinodales, la Dra. Sofía Ortega Castillo y el Dr. Fernando Galaz Fontes, por su confianza y el tiempo dedicado a leer este trabajo, además de sus valiosas observaciones y aportes.

A mis amigos, por su apoyo y hacer de mi estadía en Guanajuato muy amena.

Al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), por permitirme ser parte de la institución y todo el apoyo que me han brindado.

A CONACYT, por el apoyo económico otorgado durante los dos años de estudio.

Índice

Introducción

Es bien conocido el hecho de que el grupo especial unitario con signatura uno, denotado por $SU(n,1)$ actúa de manera transitiva sobre la bola unitaria $\mathbb{B}_n$ en $\mathbb{C}^n$.

Además, si nos enfocamos en estudiar el grupo de automorfismos de $\mathbb{B}_n$, podemos establecer una representación de dichos automorfismos mediante elementos de $SU(n,1)$.

Así, esto nos motiva a preguntarnos sobre la representación unitaria de $SU(n,1)$ sobre $U\left(A^2_\alpha(\mathbb{B}_n)\right)$, esto es, los operadores unitarios sobre $A^2_\alpha(\mathbb{B}_n)$, donde esto último denota el conjunto de funciones holomorfas f en $\mathbb{B}_n$ y tales que $f \in L^2_\alpha(\mathbb{B}_n)$, respecto a la medida

$$dv_\alpha(z) = c_\alpha \left(1 - |z|^2\right)^\alpha dv(z),$$

donde $dv(z)$ denota la medida de volumen normalizada de $\mathbb{B}_n$ y $c_\alpha \in \mathbb{R}$.

Hay que notar, que si, en la definición anterior reemplazamos p en lugar de 2, con $1 \leq p < \infty$ y consideramos el espacio $L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$, dado que estamos trabajando en un espacio de medida finita, tenemos la inclusión $L^q_\alpha \subset L^p_\alpha$ para $1 \leq p < q < \infty$, por lo tanto, la representación será válida para todo p tal que $2 \leq p < \infty$.

A lo largo del trabajo, se estudiará el grupo de automorfismos de $\mathbb{B}_n$, después la teoría de espacios de Bergman pesados, haciendo énfasis en representaciones integrales y finalmente estableceremos la representación unitaria que se planteó anteriormente.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Utilizaremos la siguiente notación, la cual emplearemos a lo largo de este trabajo. Denotemos por

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$$

al espacio euclidiano de dimensión compleja n.

La suma, multiplicación por escalar y conjugación están definidas en $\mathbb{C}^n$ componente a componente. Sean $z,w \in \mathbb{C}^n$, entonces definimos el producto interior mediante la fórmula

$$\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w_1} + \cdots + z_n \overline{w_n},$$

donde $z = (z_1, ..., z_n)$, $w = (w_1, \cdots, w_n)$ y $\overline{w_k}$ es el conjugado complejo de w_k.

Así, podemos considerar la norma del elemento $z \in \mathbb{C}^n$, esto es

$$||z|| = \sqrt{\langle z, z \rangle} = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}.$$

En $\mathbb{C}^n$ la base canónica consiste de los vectores

$$e_1 = (1, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, \cdots, 1).$$

Notemos que $\mathbb{C}^n$ es producto (finito) de espacios de Hilbert ($\mathbb{C}$ lo es), así, tenemos que $\mathbb{C}^n$ es un espacio de Hilbert n-dimensional y más aún, podemos identificar transformaciones lineales de $\mathbb{C}^n$ con matrices de tamaño $n \times n$ cuyas entradas son números complejos.

La bola abierta unitaria en $\mathbb{C}^n$ es el conjunto

$$\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}.$$

La frontera de $\mathbb{B}_n$, denotada por $\mathbb{S}_n$, es llamada la esfera unitaria en $\mathbb{C}^n$, es decir

$$\mathbb{S}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| = 1\}.$$

Y finalmente, denotamos a la bola cerrada unitaria mediante

$$\overline{\mathbb{B}_n} = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| \leq 1\} = \mathbb{B}_n \cup \mathbb{S}_n.$$

Una función $f : \mathbb{B}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es holomorfa en $\mathbb{B}_n$ si para cada punto $z \in \mathbb{B}_n$ y cada $k \in \{1, \cdots, n\}$, el límite

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(z + \lambda e_k) - f(z)}{\lambda}$$

existe, donde $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si f es holomorfa en $\mathbb{B}_n$, usamos la notación

$$\frac{\partial f}{\partial z_k}(z)$$

para denotar a la derivada parcial de f respecto de z_k, esto es

$$\frac{\partial f}{\partial z_k}(z) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(z + \lambda e_k) - f(z)}{\lambda}$$

para cada $k \in \{1, \cdots, n\}$.

De manera equivalente, una función $f : \mathbb{B}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si

$$f(z) = \sum_i a_i z^i, z \in \mathbb{B}_n$$

donde consideramos los multi-índices $i \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, esto es

$$i = (i_1, \cdots, i_n)$$

con $i_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ para todo $k \in \{1, \cdots, n\}$, y

$$z^i = z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}.$$

Esta serie se llama la serie de Taylor de f centrada en el origen, la cual converge absolutamente y uniformemente en los conjuntos de la forma

$$r\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| \leq r\}.$$

con $0 < r < 1$.

Si consideramos

$$f_k(z) = \sum_{|i|=k} a_i z^i$$

para $k \geq 0$, donde

$$|i| = i_1 + \cdots i_n,$$

entonces la serie de Taylor de f puede ser reescrita como

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z).$$

Esta expansión es llamada la expansión homogénea de f, pues cada f_k es un polinomio homogéneo de grado k, ya que, tomando $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos:

$$\begin{aligned} f_k(\lambda z) &= \sum_{|i|=k} a_i (\lambda z)^i = \sum_{|i|=k} a_i (\lambda^{i_1} z_1^{i_1} \cdots \lambda^{i_n} z_1^{i_n}) = \sum_{|i|=k} a_i \lambda^{i_1 + \cdots + i_n} z^i \\ &= \sum_{|i|=k} a_i \lambda^{|i|} z^i = \sum_{|i|=k} a_i \lambda^k z^i = \lambda^k \sum_{|i|=k} a_i z^i. \end{aligned}$$

Cuando una función es holomorfa, todas sus derivadas parciales existen y son holomorfas. Para un multi-índice $i = (i_1, \cdots, i_n)$, emplearemos la notación

$$\partial^i f = \frac{\partial^i f}{\partial z^i} = \frac{\partial^{|i|} f}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_n^{i_n}}$$

para indicar dichas derivadas parciales.

1.1. El grupo de automorfismos

1.1.1. Enfoque analítico

Podemos considerar funciones de $\mathbb{B}_n$ a $\mathbb{C}^p$ con p un entero positivo como sigue:

$$F(z) = (f_1(z), \cdots, f_p(z)), z \in \mathbb{B}_n,$$

donde cada f_k, $k = 1, \cdots, p$ es una función compleja.

Decimos que F es holomorfa en $\mathbb{B}_n$ si cada función f_k es holomorfa en $\mathbb{B}_n$.

Notemos que cualquier función holomorfa $F : \mathbb{B}_n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ tiene una expansión de Taylor del tipo

$$F(z) = \sum_m a_m z^m,$$

donde $m = (m_1. \cdots, m_p)$ es un multi-índice de enteros no negativos y cada a_m pertenece a $\mathbb{C}^p$.

Los coeficientes de dicha expansión son justamente vectores de p números complejos, donde cada uno de ellos corresponde a la expansión de Taylor de las funciones f_k.

Entonces, F posee una expansión homogénea

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(z),$$

donde cada una de las p componentes de cada F_k es un polinomio homogéneo de grado k, como lo vimos anteriormente.

Para una función holomorfa

$$F(z) = (f_1(z), \cdots, f_p(z)),$$

será conveniente representar su derivada, la cual es un operador lineal, mediante una matriz de tamaño $p \times n$ empleando la base canónica, esto es:

$$F'(z) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(z) \right)_{pxn} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial z_n} \end{bmatrix} (z)$$

Así, la expansión homogénea de F está dada por:

$$F(z) = F(0) + F'(0)z + \cdots$$

Aquí el término $F'(0)z$ es la matriz $F'(0)$ veces el vector columna z en $\mathbb{C}^n$.

Una función $F : \mathbb{B}_n \longrightarrow \mathbb{B}_n$ se dice que es biholomorfa si F es inyectiva, sobreyectiva, holomorfa y F^{-1} es holomorfa, es decir, F es un homeomorfismo holomorfo con inversa F^{-1} holomorfa. Notemos que si F es biholomorfa, se sigue de la regla de la cadena que $\left(F^{-1}\right)'(F(z))$ es la matriz inversa de $F'(z)$ y, en particular, F es no singular en $\mathbb{B}_n$, esto es, $F'(a)$ tiene rango máximo para todo $a \in \mathbb{B}_n$.

El grupo de automorfismo de $\mathbb{B}_n$, denotado por $Aut(\mathbb{B}_n)$, consiste en el conjunto de todos los biholomorfismos de $\mathbb{B}_n$.

El conjunto $Aut(\mathbb{B}_n)$ dotado con la operación de la composición de funciones, en efecto es un grupo, pues, la función identidad está en dicho conjunto, ya que es una función holomorfa, sobreyectiva, inyectiva y su inversa es ella misma. Además, al componer dos biholomorfismos, de nuevo obtenemos un biholomorfismo y $Aut(\mathbb{B}_n)$ contiene las funciones inversas de todos sus elementos, por definición.

Primero estudiaremos analíticamente a dicho grupo, y posteriormente, de manera algebraica.

Todo operador unitario de $\mathbb{C}^n$ es un automorfismo de $\mathbb{B}_n$, pues dicho operador posee una representación matricial, de tamaño $n \times n$ (complejo), donde dicha matriz es invertible. Esto es, si A es la representación de dicho operador, al ser unitaria, satisface la condición $A^*A = AA^* = I$, donde A^* es la matriz conjugada transpuesta (adjunta) de A, e I la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Luego, se satisface la sobreyectividad e inyectividad, además, al ser lineal, es holomorfo, con inversa holomorfa.

Describiremos a continuación un tipo de automorfismos particulares de $\mathbb{B}_n$.

Lema 1.1.1. *Un automorfismo φ de $\mathbb{B}_n$ es una transformación unitaria de $\mathbb{C}^n$ si y sólo si $\varphi(0) = 0$.*

Demostración. Sea φ un automorfismo de $\mathbb{B}_n$, con $\varphi(0) = 0$. Fijemos un complejo λ tal que $|\lambda| = 1$ y consideremos la función $F : \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$ definida por

$$F(z) = \varphi^{-1}\left(\overline{\lambda}\varphi(\lambda z)\right)$$

para $z \in \mathbb{B}_n$. Notemos que $F(0) = 0$ y, por la regla de la cadena para funciones de varias variables complejas, tenemos que $F'(0)$ es la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Si F no es la función identidad de $\mathbb{B}_n$, entonces la expansión homogénea de F es de la forma

$$F(z) = z + \sum_{k=l}^{\infty} F_k(z),$$

donde $l \geq 2$ y $F_l(z)$ no es cero. Si componemos F consigo misma N veces, entonces la expansión homogénea resultante de dicha composición es

$$F \circ F \circ \cdots \circ F(z) = z + NF_l(z) + \cdots,$$

donde los términos omitidos son polinomios de grado mayor que l. Haciendo $N \to \infty$, $F_l = 0$, lo cual contradice la suposición de que $F_l \neq 0$. Esto prueba que $F(z) = z$ o $\varphi(\lambda z) = \lambda\varphi(z)$ para todo $z \in \mathbb{B}_n$. Esto implica que la expansión homogénea de φ consiste solo del término lineal, esto es, φ es una transformación lineal. Dado que φ manda a $\mathbb{B}_n$ en sí mismo, concluimos que φ es una transformación unitaria.

Si φ es una transformación unitaria de $\mathbb{C}^n$, en particular, es lineal y, por lo tanto, $\varphi(0) = 0$, más aún, φ deja invariante a $\mathbb{B}_n$.

Para ver esto, tomemos $z \in \mathbb{B}_n$, por lo tanto $\|z\| < 1$, luego

$$\|\varphi(z)\|^2 = \langle \varphi(z), \varphi(z) \rangle = \langle z, z \rangle = \|z\|^2 < 1,$$

concluyendo que $\varphi(z) \in \mathbb{B}_n$.

$\square$

Otra clase importante de automorfismos consiste en las simetrías de $\mathbb{B}_n$, los cuales son llamados también automorfismos involutivos o involuciones. Para cualquier punto $a \in \mathbb{B}_n \setminus \{0\}$ y $z \in \mathbb{B}_n$, definimos

$$\varphi_a(z) = \frac{a - P_a(z) - s_a Q_a(z)}{1 - < z, a >}, \tag{1.1.1}$$

donde $s_a = \sqrt{1 - |a|^2}$, P_a es la proyección ortogonal de $\mathbb{C}^n$ sobre el subespacio unidimensional $\langle a \rangle$ generado por a, y Q_a es la proyección ortogonal de $\mathbb{C}^n$ sobre $\langle a \rangle^{\perp}$. Por lo tanto

$$P_a(z) = \frac{< z, a >}{|a|^2} a, \tag{1.1.2}$$

para $z \in \mathbb{C}^n$ y

$$Q_a(z) = z - P_a(z), \tag{1.1.3}$$

para $z \in \mathbb{B}_n$.

Si $a = 0$, entonces definimos $\varphi_a(z) = -z$. Notemos que cada φ_a es una función holomorfa de $\mathbb{B}_n$ a $\mathbb{C}^n$, pues, la singularidad de φ_a está situada en $\langle z, a\rangle = 1$, pero $|\langle z, a\rangle| \leq |z||a| < 1$.

Lema 1.1.2. *Para cada $a \in \mathbb{B}_n$, la función φ_a satisface*

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{\left(1 - |a|^2\right)\left(1 - |z|^2\right)}{|1 - \langle z, a\rangle|^2}, \tag{1.1.4}$$

$$\varphi_a \circ \varphi_a(z) = z, \tag{1.1.5}$$

para $z \in \mathbb{B}_n$. Además, cada φ_a es un automorfismo de $\mathbb{B}_n$ que intercambia los puntos 0 y a, es decir $\varphi_a(0) = a$ y $\varphi_a(a) = 0$.

Demostración. Primero probaremos la identidad (1.1.4).

Notemos que si $a = 0$, entonces $\varphi_a(z) = -z$, luego

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = 1 - |z|^2,$$

esto es, se tiene la identidad buscada, sustituyendo $a = 0$ en (1.1.4). Supongamos que $a \neq 0$. Primero notemos que $a - P_a(z)$ y $Q_a(z)$ son ortogonales en $\mathbb{C}^n$, pues

$$\begin{aligned}
\langle a - P_a(z), Q_a(z)\rangle &= \langle a - \frac{\langle z, a\rangle}{|a|} a, z - \frac{\langle z, a\rangle}{|a|} a\rangle \\
&= \langle a, z\rangle - \frac{\langle a, z\rangle}{|a|^2}\langle a, a\rangle - \frac{\langle z, a\rangle}{|a|^2}\langle a, z\rangle + \frac{|\langle z, a\rangle|^2}{|a|^2} \\
&= \langle a, z\rangle\left(1 - \frac{|a|^2}{|a|^2}\right) = 0,
\end{aligned}$$

luego, tenemos

$$\begin{aligned}|a - P_a(z) - s_a Q_a(z)|^2 &= |a - P_a(z)|^2 + \left(1 - |a|^2\right)|Q_a(z)|^2 \\ &= |a|^2 - 2Re\langle P_a(z), a\rangle + |P_a(z)|^2 + \left(1 - |a|^2\right)\left(|z|^2 - |P_a(z)|^2\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|1 - \langle z, a\rangle|^2 |\varphi_a(z)|^2 = |a|^2 - 2Re\langle P_a(z), a\rangle + |P_a(z)|^2 + \left(1 - |a|^2\right)\left(|z|^2 - |P_a(z)|^2\right),$$

donde notemos que

$$\langle P_a(z), a\rangle = \langle \frac{\langle z, a\rangle}{|a|^2} a\rangle = \langle z, a\rangle,$$

y también

$$|P_a(z)|^2 = \langle \frac{\langle z, a\rangle}{|a|^2} a, \frac{\langle z, a\rangle}{|a|^2} a\rangle = \frac{|\langle z, a\rangle|^2}{|a|^2}.$$

Juntando estos cálculos, obtenemos

$$\begin{aligned}|1 - \langle z, a\rangle|^2 |\varphi_a(z)|^2 &= |a|^2 - 2Re\langle z, a\rangle + \frac{|\langle z, a\rangle|^2}{|a|^2} + |z|^2 - \frac{|\langle z, a\rangle|^2}{|a|^2} - |a|^2|z|^2 + |\langle z, a\rangle|^2 \\ &= 1 - 2Re\langle z, a\rangle + |\langle z, a\rangle|^2 - 1 + |a|^2 + |z|^2 - |a|^2|z|^2 \\ &= |1 - \langle z, a\rangle|^2 + \left(1 - |a|^2\right)\left(1 - |z|^2\right).\end{aligned}$$

Ahora, se tiene $1 - \langle z, a\rangle \neq 0$, ya que $|\langle z, a\rangle| \leq |z|^2|a|^2 < 1$. Por lo tanto, podemos dividir la identidad anterior entre $|1 - \langle z, a\rangle|^2$. Con esto obtenemos la identidad (1.1.4).

Ahora probemos la propiedad involutiva de φ_a. Para ello, basta realizar el cálculo $\varphi_a \circ \varphi_a(z)$, esto es

$$\varphi_a(\varphi_a(z)) = \frac{a - P_a(\varphi_a(z)) - s_a Q_a(\varphi_a(z))}{1 - \langle \varphi_a(z), a\rangle}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\langle \varphi_a(z), a\rangle &= \langle \frac{a - P_a(z) - s_a Q_a(z)}{1 - \langle z, a\rangle}, a\rangle = \frac{1}{1 - \langle z, a\rangle}\langle a - P_a(z) - s_a Q_a(z), a\rangle \\ &= \frac{1}{1 - \langle z, a\rangle}\left(|a|^2 - \langle z, a\rangle - s_a(\langle z, a\rangle - \langle z, a\rangle)\right) = \frac{|a|^2 - \langle z, a\rangle}{1 - \langle z, a\rangle},\end{aligned}$$

luego

$$1 - \langle \varphi_a(z), a \rangle = \frac{1 - |a|^2}{1 - \langle z, a \rangle}.$$

De los cálculos anteriores, también tenemos que

$$P_a(\varphi_a(z)) = \frac{\langle \varphi_a(z), a \rangle}{|a|^2} a = \frac{a}{|a|^2} \frac{|a|^2 - \langle z, a \rangle}{1 - \langle z, a \rangle}.$$

Ahora sustituyendo estos dos últimos resultados, obtenemos la propiedad involutiva $\varphi_a \circ \varphi_a(z) = z$.

Notemos que, evaluando directamente en la definición de $\varphi_a(z)$, obtenemos

$$\varphi_a(0) = a, \varphi_a(a) = 0.$$

□

Al aplicar la fórmula de polarización a la identidad (1.1.4), obtenemos la fórmula establecida en el siguiente lema.

Lema 1.1.3. *Supongamos que* $a \in \mathbb{B}_n$. *Entonces*

$$1 - \langle \varphi_a(z), \varphi_a(w) \rangle = \frac{(1 - \langle a, a \rangle)(1 - \langle z, w \rangle)}{(1 - \langle z, a \rangle)(1 - \langle a, w \rangle)}, \tag{1.1.6}$$

para todo z *y* w *en la bola cerrada unitaria* $\overline{\mathbb{B}_n}$.

La propiedad $\varphi_a \circ \varphi_a(z) = z$ justifica el uso del término involución para φ_a. Ahora veremos que las transformaciones unitarias y las involuciones generan a todo el grupo $Aut(\mathbb{B}_n)$.

Teorema 1.1.4. *Todo automorfismo* φ *de* $\mathbb{B}_n$ *es de la forma*

$$\varphi = U\varphi_a = \varphi_b V,$$

donde U *y* V *son transformaciones unitarias de* $\mathbb{C}^n$ *y* φ_a *y* φ_b *son involuciones.*

Demostración. Sea $\varphi \in Aut(\mathbb{B}_n)$ y $a = \varphi^{-1}(0)$. Entonces, el automorfismo $\psi = \varphi \circ \varphi_a$ satisface $\psi(0) = \varphi \circ \varphi_a(0) = \varphi(a) = \varphi\left(\varphi^{-1}(0)\right) = 0$, así, por el lema (1.1.1), tenemos que existe una transformación unitaria U de $\mathbb{C}^n$ tal que $U = \varphi \circ \varphi_a$, luego, por la propiedad involutiva de φ_a, tenemos que $\varphi = U\varphi_a$. Ahora consideremos $b = \varphi(0)$ y el automorfismo $\tau = \varphi_b \circ \varphi$, entonces $\tau(0) = \varphi_b\varphi(0) = \varphi_b(b) = 0$, así, empleando de nuevo el lema (1.1.1), tenemos que existe una transformación unitaria V de $\mathbb{C}^n$ tal que $V = \varphi_b\varphi$, así, dado que φ_b es una involución, concluimos que $\varphi = \varphi_b V$. □

Ahora, utilizando los resultados anteriores, estamos en condiciones de considerar la acción de $Aut(\mathbb{B}_n)$ sobre $\mathbb{B}_n$, esto es $Aut(\mathbb{B}_n) \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$, la cual está dada por la asignación

$$(\varphi, z) \mapsto \varphi(z)$$

donde el elemento identidad de $Aut(\mathbb{B}_n)$ es la función identidad, y, además, dicha acción es transitiva, pues dados $a, b \in \mathbb{B}_n$, la función $\psi = \varphi_b\varphi_a$ manda el punto a al punto b, pues $\psi(a) = \varphi_b\varphi_a(a) = \varphi_b(0) = b$ y $\psi \in Aut(\mathbb{B}_n)$, ya que es composición de dos funciones (involuciones) invertibles y holomorfas en $\mathbb{B}_n$.

Corolario 1.1.5. *Toda φ en $Aut(\mathbb{B}_n)$ se extiende a un homeomorfismo de $\mathbb{S}_n$.*

La prueba de este corolario puede consultar en (Zhu, 2005).

Dada $\varphi \in Aut(\mathbb{B}_n)$, usaremos $J_C\varphi(z)$ para denotar el determinante de la matriz compleja $\varphi'(z)$ de tamaño $n \times n$ y la llamaremos la jacobiana compleja de φ en z. Si identificamos $\mathbb{B}_n$ con la bola unitaria en el espacio real euclidiano $2n-dimensional$, esto es, $\mathbb{R}^{2n}$, entonces la función φ induce un determinante real jacobiano, el cual denotaremos por $J_R\varphi(z)$. Además, se tiene que

$$J_R\varphi(z) = |J_C\varphi(z)|^2. \tag{1.1.7}$$

para todo $z \in \mathbb{B}_n$

Lema 1.1.6. *Para cada $a \in \mathbb{B}_n \setminus \{0\}$, tenemos*

$$\varphi_a'(0) = -\left(1 - |a|^2\right)P_a - \sqrt{1 - |a|^2}\,Q_a, \tag{1.1.8}$$

$$\varphi_a'(a) = -\frac{P_a}{1-|a|^2} - \frac{Q_a}{\sqrt{1-|a|^2}} \tag{1.1.9}$$

Demostración. Para $a \in \mathbb{B}_n$, $a \neq 0$, notemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle z, a\rangle^k = \frac{1}{1-\langle z, a\rangle},$$

pues $|\langle z, a\rangle| < 1$, por lo tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\varphi_a(z) &= (a - P_a(z) - s_a Q_a(z)) \sum_{k=0}^{\infty} \langle z, a\rangle^k \\
&= a + a\langle z, a\rangle - (P_a(z) + s_a Q_a(z)) + O\left(|z|^2\right) \\
&= a - s_a^2 P_a(z) - s_a Q_a(z) + O\left(|z|^2\right)
\end{aligned}$$

para $z \in \mathbb{B}_n$. El cálculo anterior muestra que

$$\varphi_a'(0) = -s_a^2 P_a - s_a Q_a$$

similarmente, utilizando el hecho

$$\varphi_a(a+h) = \frac{-P_a(h) - s_a Q_a(h)}{s_a^2 - \langle h, a\rangle}$$

se concluye que

$$\varphi_a'(a) = -\frac{1}{s_a^2} P_a - \frac{1}{s_a} Q_a.$$

□

Lema 1.1.7. *Para cada $\varphi \in Aut(\mathbb{B}_n)$, tenemos*

$$J_R\varphi(z) = \left(\frac{1-|a|^2}{|1-<z, a>|^2}\right)^{n+1} \tag{1.1.10}$$

donde $a = \varphi^{-1}(0)$.

Demostración. Sean a y z fijos en $\mathbb{B}_n$ con $a \neq 0$ y tomemos $w = \varphi_a(z)$, además consideremos el automorfismo

$$U = \varphi_w \circ \varphi_a \circ \varphi_z.$$

Dado que $U(0) = 0$, pues $U(0) = \varphi_w \circ \varphi_a \circ \varphi_z(0) = \varphi_w \circ \varphi_a(z) = \varphi_{\varphi_a(z)} \circ \varphi_a(z) = 0$, por el lema (1.1.1), tenemos que U es unitario. Debido a la propiedad involutiva, tenemos $\varphi_a = \varphi_w \circ U \circ \varphi_z$, ahora, aplicando la regla de la cadena, obtenemos

$$\varphi_a'(z) = \varphi_w'(0) U \varphi_z'(z),$$

luego

$$J_C \varphi_a(z) = det(\varphi_w'(0))\, det U\, det(\varphi_z'(z)),$$

donde $|det U| = 1$.

Ahora, por (1.1.8), la transformación lineal $\varphi_w'(0)$ tiene un espacio propio de dimensión uno con valor propio $-\left(1-|w|^2\right)$ y un espacio propio de dimensión $n-1$ con valor propio $-\sqrt{1-|w|^2}$, así, su determinante es igual a $(-1)^n \left(1-|w|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}$. Esto, junto con el cálculo similar del determinante de $\varphi_z'(z)$ usando ahora (1.1.9), tenemos

$$J_R \varphi_a(z) = |J_C \varphi_a(z)|^2 = \left(\frac{1-|w|^2}{1-|z|^2}\right)^{n+1}.$$

Ahora, aplicando (1.1.4), tenemos

$$J_R \varphi_a(z) = \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\langle z, a\rangle|^2}\right)^{n+1}.$$

Recordemos que todo $\varphi \in Aut(\mathbb{B}_n)$ puede ser escrito mediante $\varphi = U\varphi_a$, donde $a = \varphi^{-1}(0)$, así, aplicando regla de la cadena, conseguimos

$$\varphi'(z) = U \varphi_a'(z),$$

luego, concluimos

$$J_R \varphi(z) = J_R \varphi_a(z),$$

pues $\varphi^{-1} = \varphi_a U^{-1}$. □

1.1.2. Enfoque algebraico

Rotaciones holomorfas

El grupo de funciones $\mathbb{C}-lineales$ que preserva ángulos, es llamado el grupo unitario, y está definido mediante

$$U(n) = \{g \in GL(n+1,\mathbb{C}) : \langle gx, gy\rangle = \langle x, y\rangle \text{ para todo } x, y \in \mathbb{C}^n\}$$

donde $\langle , \rangle$ es el producto interno hermitiano estándar en $\mathbb{C}^n$.

Al igual que para grupos ortogonales, tenemos que el grupo $U(n)$ es más grande (en sentido de inclusión) que solo las rotaciones, así que debemos añadir una condición sobre el determinante, obteniendo la definición del grupo especial unitario:

$$SU(n) = \{g \in U(n) : det(g) = 1\}$$

Además, tenemos una definición para el grupo estándar unitario, esto es

$$U(n) = \{g \in GL(n+1,\mathbb{C}) : g^* g = 1_n\},$$

donde g^* es la conjugada transpuesta de g.

Veamos que las dos definiciones para $U(n)$ son iguales, como era de esperarse, esto es

Lema 1.1.8.

$$\{g \in GL_n(\mathbb{C}) : \langle gx, gy\rangle = \langle x, y\rangle \textit{ para todo } x, y \in \mathbb{C}^n\} = \{g \in GL_n(\mathbb{C}) : g^* g = 1_n\}$$

Demostración. El producto usual está dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_i x_i \overline{y_i} = y^* x$$

así, para $g^* g = 1_n$, calculamos

$$\langle gx, gy\rangle = (gy)^* (gx) = y^* (g^* g) x = y^* x = \langle x, y\rangle,$$

de donde concluimos que la condición $g^* g = 1_n$ implica que el producto $\langle , \rangle$ se preserva. Por otro lado, supongamos ahora que g preserva al producto $\langle , \rangle$. Para los vectores columna $v_1, \cdots, v_n$ y $w_1, \cdots, w_n$, todos en $\mathbb{C}^n$, armemos las matrices V y W, cuyas columnas son los vectores anteriores, respectivamente, así

$$W^* V = [w_1 \cdots w_n]^* [v_1 \cdots v_n]$$

donde dicha matriz $n \times n$ posee en su entrada (i,j) al producto $\langle w_i, v_j \rangle$.

Sea $g \in GL(n+1, \mathbb{C})$, así

$$[gw_1 \cdots gw_n]^* [gv_1 \cdots gv_n] = (gW)^* (gV) = W^* (g^* g) V.$$

Dado que g preserva el producto $\langle , \rangle$, tomando $v_1, \cdots, v_n$ y $w_1, \cdots, w_n$ como la base estándar $e_1, \cdots, e_n$, la relación anterior toma la siguiente forma

$W^* (g^* g) V = 1_n^* (g^* g) 1_n = g^* g =$ matriz $n \times n$ cuya entrada (i,j) es el producto $\langle ge_i, ge_j \rangle$,

así $g^* g = 1_n$. Por lo tanto, las dos definiciones de grupo unitario son equivalentes.

$\square$

Notemos que

$$1 = det(1_n) = det(g^* g) = \overline{det(g)} det(g) = |det(g)|^2,$$

así $|det(g)| = 1$.

Proposición 1.1.9. *El grupo especial unitario $SU(n)$ actúa de manera transitiva en la esfera $\mathbb{S}_n$, para $n \geq 2$.*

Demostración. Es suficiente probar que $SU(n)$ manda el vector canónico $e_1 = (1, \cdots, 0)$ a cualquier vector v_1 de longitud 1 en $\mathbb{C}^n$. Primero probemos que, dado $x \in \mathbb{S}_n$, existe una matriz $g \in U(n)$ tal que $ge_1 = x$, donde $e_1, \cdots, e_n$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Para esto, construyamos $g \in U(n)$ tal que la primera columna de g sea el vector x. Luego, completamos x a una $\mathbb{C}$-base $x, x_2, \cdots, x_n$ para $\mathbb{C}^n$. Después, apliquemos el proceso de Gram-Schmidt para hallar una base ortonormal $x, v_2, \cdots, v_n$ para $\mathbb{C}^n$. La condición $g^* g = 1_n$ está dada debido a que las columnas de g forman una base ortonormal. Así, tomando $x, v_2, \cdots, v_n$ como las columnas de g, concluimos que $g \in U(n)$ y $ge_1 = x$. Para hacer que $det(g) = 1$, reemplazamos v_n por $(det(g))^{-1} v_n$. Finalmente tenemos que $det(g) = 1$ y este reemplazo no altera la ortonormalidad de los vectores. $\square$

Además, al igual que con los grupos ortogonales, podemos expresar a la esfera $\mathbb{S}_n$ como un cociente de $SU(n)$, esto es

Proposición 1.1.10. *El grupo de isotropía $SU(n)_{e_n}$ del vector $e_n = (0, \cdots, 1)$, es:*

$$SU(n)_{e_n} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : A \in SU(n-1) \right\} \approx SU(n-1)$$

por lo tanto,

$$\mathbb{S}_n \approx SU(n)/SU(n-1)$$

por transitividad, como espacios $SU(n)$.

Omitiremos dicha prueba, pues, al final de la siguiente subsección, se probará la versión análoga de este resultado para el grupo $SU(n,1)$, el cual introduciremos a continuación.

El n-espacio complejo hiperbólico

Mostraremos que un grupo más pequeño actúa de manera transitiva en la bola abierta unitaria.

De manera similar a como el disco (abierto) unitario en $\mathbb{C}$ se sitúa dentro de el plano proyectivo $\mathbb{P}$, la $n-bola$ compleja, esto es $\mathbb{B}_n$, se sitúa dentro de $\mathbb{P}^n$. El objetivo de esta sección es ver que ciertos grupos unitarios estabilizan y actúan de manera transitiva sobre $\mathbb{B}_n$, justo como el grupo

$$SU(1,1) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} : |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$$

actúa transitivamente en el disco unitario en $\mathbb{C}$.

Describiremos a $\mathbb{B}_n$ en $\mathbb{P}^n$ mediante la transformación $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^n$, dada por

$$z \to \left[\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right] \tag{1.1.11}$$

La modificación deseada en la presentación de $\mathbb{B}_n$ la obtendremos remplazando el 1 en la definición de $\mathbb{B}_n$ por $|v_{n+1}|^2$, esto es

$$\mathbb{B}_n = \left\{[v] \in \mathbb{P}^n : |v_1|^2 +, \cdots, +|v_n|^2 - |v_{n+1}|^2 < 0\right\} \subset \mathbb{P}^n$$

Notemos que esta expresión de $\mathbb{B}_n$ en coordenadas homogéneas usa una condición de homogeneidad, establecida bajo la acción de escalares, esto es

$$|v_1|^2 +, \cdots, +|v_n|^2 - |v_{n+1}|^2 < 0 \text{ si y sólo si } |\lambda v_1|^2 +, \cdots, +|\lambda v_n|^2 - |\lambda v_{n+1}|^2 < 0$$

para $\lambda \in \mathbb{C}^*$, donde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$.

Notemos además, que para cumplir la condición $|v_1|^2 +, \cdots, +|v_n|^2 - |v_{n+1}|^2 < 0$, la componente v_{n+1} debe ser distinta de cero, confirmando el hecho de que el conjunto definido vive en la imagen de $\mathbb{C}^n$ dentro de $\mathbb{P}^n$. Luego, podemos dividir entre v_{n+1}, recuperando la condición

$$\left|\frac{v_1}{v_{n+1}}\right|^2 +, \cdots, +\left|\frac{v_n}{v_{n+1}}\right|^2 - 1 < 0$$

que justamente es la definición de $\mathbb{B}_n$.

Incluso, la descripción en coordenadas homogéneas puede ser mejorada más allá de la compatibilidad con la acción de $GL(n+1, \mathbb{C})$. Definamos la forma hermitiana indefinida

$$\langle (z_1, \cdots, z_{n+1}), (w_1, \cdots, w_{n+1}) \rangle = z_1 \overline{w_1} + \cdots - z_{n+1} \overline{w_{n+1}}$$

entonces, en coordenadas proyectivas, tenemos

$$\mathbb{B}_n = \left\{[v] \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle v, v \rangle < 0\right\}$$

Además, otro grupo unitario estándar, $U(n,1)$ se puede definir vía esta nueva forma hermitiana, mediante

$$U(n,1) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{C}) : \langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle \text{ para todo } v, w\}$$

Alternativamente, de manera usual, dichos objetos y condiciones pueden ser expresados en términos de matrices y vectores columna o fila, empleando la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Sea

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \tag{1.1.12}$$

una matriz de tamaño $(n+1)\times(n+1)$, compuesta por 1's en los primeros n términos de la diagonal y el último elemento de la diagonal un -1. Entonces, considerando $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ como un vector columna, y haciendo $v \to v^*$ con v^* el conjugado transpuesto de v, tenemos

$$v^*Hv = (\overline{v_1} \ \cdots \ \overline{v_n} \ \overline{v_{n+1}}) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ -v_{n+1} \end{bmatrix} = |v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2 - |v_{n+1}|^2 = \langle v, v \rangle$$

donde $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ -v_{n+1} \end{bmatrix}$ con $v_i \in \mathbb{C}$, para $i = 1, \cdots, n+1$.

Por lo tanto,

$$\mathbb{B}_n = \{[v] = [(v_1, \cdots, v_n, -v_{n+1})] : v_i \in \mathbb{C}, \ i = 1, \cdots n+1, v_{n+1} \neq 0 : v^*Hv < 0\}$$

Y el grupo unitario estándar $U(n,1)$ de signatura $(n,1)$ es definible usando H, esto es

$$U(n,1) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{C}) : g^*Hg = H\}$$

donde, la signatura en este caso, solo nos dice la cantidad de $+1's$ y $-1's$ que los elementos de $U(n,1)$ tienen en la diagonal, que corresponde con n y 1, respectivamente, suponiendo que el resto de entradas son 0.

Además, estas dos nuevas descripciones para $\mathbb{B}_n$ y $U(n,1)$, nos brindan los mismos objetos usuales (los que denotamos al inicio).

Proposición 1.1.11. *La bola unitaria $\mathbb{B}_n$ es invariante bajo la acción de $U(n,1)$.*

Demostración. Sea $g \in U(n,1)$ y sea v una representación en coordenadas homogéneas para un punto en la bola unitaria. Esto es, $\langle v,v\rangle < 0$. Ahora, analicemos el signo de $\langle gv, gv\rangle$, esto es

$$\langle gv, gv\rangle = \langle v,v\rangle < 0,$$

así gv está en la bola unitaria.

□

Ahora, queremos ver, explícitamente, que los denominadores en las transformaciones lineales fraccionales de la acción de $U(n,1)$ sobre la bola unitaria no son cero. Notemos que el denominador de la imagen gv es la entrada $(n+1)$ del vector $w = gv \in \mathbb{C}^{n+1}$, dado que

$$|w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2 - |w_{n+1}|^2 < 0$$

se tiene que $w_{n+1} \neq 0$ y podemos justamente dividir entre w_{n+1}, como se quería.

Ahora probaremos que el grupo especial unitario

$$SU(n,1) = \{g \in U(n,1) : det(g) = 1\}$$

actúa de manera transitiva sobre $\mathbb{B}_n$.

Pero, antes, notemos que $SU(n,1)$ es un subgrupo cerrado. Dado que la función determinante es continua, entonces, $det^{-1}(\{1\}) = SU(n,1)$ es cerrado. Por lo tanto, $SU(n,1)$ es un grupo de Lie, pues $SU(n,1)$ es un subgrupo de $GL(n+1,\mathbb{C})$, el grupo general lineal.

Tenemos que $\mathbb{B}_n$ es un $SU(n,1)$–conjunto, mediante la acción

$$SU(n,1) \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$$

$$\left(\begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix}, z\right) \mapsto \frac{Az+b}{c^t z + d},$$

con $A \in SU(n)$, $b, c \in \mathbb{C}^n$ y $d \in \mathbb{C}$.

Denotaremos dicha acción mediante el símbolo de producto usual, esto es, si $g \in SU(n,1)$ y $z \in \mathbb{B}_n$, entonces $gz = \frac{Az+b}{c^t z+d}$.

Notemos que la función φ es equivariante, es decir, que satisface $\varphi(gz) = g\varphi(z)$. Si $z \in \mathbb{B}_n$, entonces

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix} z\right) = \varphi\left(\frac{Az+b}{c^t z+d}\right) = \left[\begin{pmatrix} \frac{Az+b}{c^t z+d} \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Por otro lado

$$\begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix} \varphi(z) = \begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} Az+b \\ c^t z+d \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} \frac{Az+b}{c^t z+d} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

pues $c^t z + d \neq 0$, ya que que la matriz $\begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix}$ es invertible. Además, las clases de equivalencia $\left[\begin{pmatrix} Az+b \\ c^t z+d \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} \frac{Az+b}{c^t z+d} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ son iguales pues $\begin{pmatrix} Az+b \\ c^t z+d \end{pmatrix} = (c^t z+d)\begin{pmatrix} \frac{Az+b}{c^t z+d} \\ 1 \end{pmatrix}$, concluyendo que $\varphi(gz) = g\varphi(z)$.

Veremos que el grupo de isotropía en $SU(n,1)$ de $0 \in \mathbb{C}^n$ es

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in SU(n,1) : a^* a = 1_n, |d|^2 = 1, d \times det(a) = 1 \right\} \approx U(n)$$

para tener el resultado

Proposición 1.1.12. *El grupo especial unitario $SU(n,1)$ es transitivo en $\mathbb{B}_n$ y, como subespacio de $SU(n,1)$, se tiene*

$$\mathbb{B}_n \approx SU(n,1)/U(n)$$

Demostración. Es suficiente probar que $0 \in \mathbb{C}^n$ puede ser enviado a cualquier otro punto z de la bola unitaria.

Primero, calculemos el grupo de isotropía de 0. Usando una descomposición en bloques $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de un elemento g en $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ con a una matriz $n \times n$, b una matriz $n \times 1$, c una matriz $1 \times n$ y finalmente d una matriz 1×1, la condición de fijar al elemento 0 se traduce en

$$0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(0) = bd^{-1}$$

lo que requiere que b sea la matriz $n \times 1$ de ceros. Ahora añadiremos la condición para que g sea una matriz en $U(n,1)$, esto es

$$H = g^* H g = \begin{bmatrix} a^*a - c^*c & -c^*d \\ -d^*c & -d^*d \end{bmatrix}$$

así, de los elementos fuera de la diagonal, concluimos que $c = 0$. Luego $a^*a = 1_n$ y $d^*d = 1$. La condición para hacer que el determinante de g sea 1, es traducido en $d = (deta)^{-1}$. Así, todo elemento $a \in U(n)$ da un elemento del grupo de isotropía en $SU(n,1)$ y viceversa.

Ahora probemos la transitividad de la acción, verificando que 0 puede ser enviado por la acción de $SU(n,1)$ a cualquier otro punto z de la bola unitaria. Podemos simplificar el problema, esencialmente enfocándonos en el caso $n = 1$, utilizando el grupo de isotropía $K \approx U(n)$ de 0 para rotar el elemento z dado a una forma especial. La transitividad de $SU(n)$ en la esfera en $\mathbb{C}^n$ de un radio fijo r , asegura que hay un $a \in SU(n)$ tal que

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(z) = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $r = |z|$.

Así, hay una copia de $SU(1,1)$ dentro de $SU(n,1)$ dada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1_{n-1} & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix}$$

que actúa mediante transformaciones lineales fraccionales de la forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1_{n-1} & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ar+b}{cr+d} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así, hemos reducido el problema de la transitividad a hallar $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SU(1,1)$ que mande 0 a $r = |z|$ en el disco en $\mathbb{C}^1$. Hallemos condiciones para dicha matriz. Para que $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ esté en $SU(1,1)$, con a, b reales, solo es necesario que $a^2 - b^2 = 1$. La condición de que esta matriz envíe 0 a r, con $0 \leq r < 1$, es $\frac{b}{a} = r$. Sustituyendo $b = ra$ en la primer relación, tenemos $a^2\left(1 - r^2\right) = 1$. Esto da una elección para a y para b. $\square$

CAPÍTULO 2

Espacios de Bergman

Los resultados de esta sección son extraídos de Zhu (2005) y Rudin (1980), por lo cual omitiremos la prueba de algunas fórmulas técnicas que se emplean en la demostración de resultados importantes.

2.1. La métrica de Bergman

Sea n un entero positivo fijo. Denotaremos por ν a la medida de Lebesgue normalizada en $\mathbb{C}^n$, esto es $\nu(\mathbb{B}_n) = 1$. Ahora, la medida de superficie en $\mathbb{S}_n$ la denotaremos por $d\sigma$, la cual también estará normalizada, esto es, $\sigma(\mathbb{S}_n) = 1$. Dichas medidas son importantes, pues, posteriormente definiremos una medida de volumen con peso en $\mathbb{B}_n$, la cual estará dada términos de ν.

El siguiente resultado nos relaciona las medidas ν y σ.

Teorema 2.1.1 (Integración en coordenadas polares). *Las medidas ν y σ están relacionadas mediante la fórmula*

$$\int_{\mathbb{B}_n} f(z)d\nu(z) = 2n\int_0^1 r^{2n-1}dr\int_{\mathbb{S}_n} f(r\zeta)\,d\sigma(\zeta). \tag{2.1.1}$$

Dicho resultado se encuentra en Zhu (2005) o Rudin (1980).

Sea $H(\mathbb{B}_n)$ el conjunto de funciones holomorfas sobre $\mathbb{B}_n$. Ahora, para $1 \leq p < \infty$, consideremos el espacio $L^p(\mathbb{B}_n, \nu) \cap H(\mathbb{B}_n)$, esto es, el espacio de las funciones holomorfas $f : \mathbb{B}_n \to \mathbb{C}^n$ que pertenecen a $L^p(\mathbb{B}_n, \nu)$.

Con respecto a la norma usual en L^p, se tiene

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{B}_n} |f(z)|^p d\nu \right)^{\frac{1}{p}},$$

luego $L^p \cap H$ se vuelve un subespacio cerrado de L^p (en este momento no probaremos esto, ya que posteriormente lo haremos en el caso general para espacios de Bergman pesados y lo anterior será un corolario de ello).

Definimos la función $K : \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$ dada por

$$K(z,w) = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^{n+1}} \tag{2.1.2}$$

la cual es llamada el kernel de Bergman de $\mathbb{B}_n$. Definamos una métrica hermitiana en $\mathbb{B}_n$. Consideremos la matriz compleja $n \times n$

$$B(z) = \left(b_{ij}(z)\right) = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \overline{z_1} \partial z_1} logK(z,z) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \overline{z_1} \partial z_n} logK(z,z) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial \overline{z_n} \partial z_1} logK(z,z) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \overline{z_n} \partial z_n} logK(z,z) \end{bmatrix}. \tag{2.1.3}$$

Dicha matriz es llamada la matriz de Bergman de $\mathbb{B}_n$. Retomemos el operador de proyección ortogonal de $\mathbb{C}^n$ sobre el espacio unidimensional $\langle z \rangle$ generado por $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, esto es, empleando (1.1.2)

$$P_z(w) = \frac{\langle w, z \rangle}{|z|^2} z$$

y notemos que, aplicando dicho operador a los elementos de la base estándar de $\mathbb{C}^n$, esto es, $e_j = (0, \cdots, 1 \cdots, 0)$ para $j = 1, \cdots, n$ y, considerando $z = (z_1, \cdots, z_n)$ tenemos

$$P_z\left(e_j\right) = \frac{\langle e_j, z \rangle}{|z|^2} z = \frac{\overline{z_j}}{|z|^2} z,$$

así, formemos la matriz cuyas columnas sean los vectores $P_z\left(e_j\right)$, así, la representación matricial del operador P_z es

$$P_z = \frac{1}{|z|^2}A(z),$$

donde

$$A(z) = \left(z_i\overline{z_j}\right) = \begin{bmatrix} z_1\overline{z_1} & \cdots & z_1\overline{z_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ z_n\overline{z_1} & \cdots & z_n\overline{z_n} \end{bmatrix}$$

Proposición 2.1.2. *Para $z \in \mathbb{B}_n$, las matrices $A(z)$ y $B(z)$ tienen las siguientes propiedades (donde I es la matriz identidad $n \times n$):*

(a) $B(z) = \frac{\left(1-|z|^2\right)I+A(z)}{\left(1-|z|^2\right)^2}$

(b) $B(z)^{-1} = \left(1-|z|^2\right)(I-A(z))$

(c) $B(z) = (\varphi_z'(z))^* \varphi_z'(z) = (\varphi_z'(z))^2\, det\,(B(z)) = K(z,z)$

(d) $B(z) = \frac{P_z}{\left(1-|z|^2\right)^2} + \frac{Q_z}{\left(1-|z|^2\right)}$ *para* $z \neq 0$

De la propiedad (e)*, se sigue que para* $n \geq 2$ *y* $z \neq 0$*, la matriz* $B(z)$ *tiene dos valores propios, los cuales son* $\frac{1}{\left(1-|z|^2\right)^2}$ *con el espacio propio asociado* $\langle z\rangle$*, y* $\frac{1}{1-|z|^2}$ *con espacio propio asociado* $\langle z\rangle^{\perp}$*.*

Demostración. Retomando el kernel de Bergman, tenemos que

$$logK(z,z) = -(n+1)log\left(1-|z|^2\right)$$

luego, derivando respecto a la variable z_j, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial z_j}logK(z,z) = (n+1)\frac{\overline{z_j}}{1-|z|^2}$$

pues, si $z_j = x_j + iy_j$ con $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial z_j}z_j\overline{z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\left(x_j^2 + y_j^2\right) = x_j - iy_j = \overline{z_j},$$

para $j = 1, \cdots, n$. Luego,

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{z_j} \partial z_j} log K(z,z) = \frac{(n+1)\left(1 - |z|^2 + \left|z_j\right|^2\right)}{\left(1 - |z|^2\right)^2},$$

para $j = 1, \cdots, n$, pues

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} |z|^2 = z_j,$$

donde $\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$, y, para $i \neq j$, además

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{z_i} \partial z_j} log K(z,z) = \frac{(n+1)\left(z_i \overline{z_j}\right)}{\left(1 - |z|^2\right)^2},$$

así,

$$B(z) = \frac{\left(1 - |z|^2\right) I + A(z)}{\left(1 - |z|^2\right)^2}.$$

□

Como conclusión de los cálculos anteriores, se sigue que la matriz de Bergman $B(z)$ es definida positiva e invertible, además tenemos la siguiente representación para la raíz cuadrada de la matriz de Bergman,

$$B(z)^{\frac{1}{2}} = \frac{P_z}{1 - |z|^2} + \frac{Q_z}{\sqrt{1 - |z|^2}}. \tag{2.1.4}$$

Proposición 2.1.3. *La matriz de Bergman es invariante bajo automorfismos, esto es,*

$$B(z) = (\varphi'(z))^* B(\varphi(z)) \varphi'(z)$$

para todo $z \in \mathbb{B}_n$ y $\varphi \in Aut(\mathbb{B}_n)$.

Para una curva suave $\gamma : [0,1] \to \mathbb{B}_n$, definimos

$$l(\gamma) = \int_0^1 \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(\gamma(t))\, \gamma_i'(t)\overline{\gamma}_j'(t) \right)^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 \langle B(\gamma(t))\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

Dicha definición, la generalizaremos al caso en que tengamos una curva suave a trozos.

Ahora definamos una métrica $\beta : \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n \to [0,\infty)$ de la siguiente manera. Para cualesquiera dos puntos z y w en $\mathbb{B}_n$, sea $\beta(z,w)$ el ínfimo del conjunto que consiste de todos los $l(\gamma)$, donde γ es una curva suave a trozos en $\mathbb{B}_n$ que une los puntos z y w. Tenemos que β es una métrica, pues $B(z)$ es definida positiva. Llamaremos a β la métrica de Bergman en $\mathbb{B}_n$.

Proposición 2.1.4. *La métrica de Bergman es invariante bajo automorfismos, esto es,*

$$\beta(\varphi(z), \varphi(w)) = \beta(z,w)$$

para todo $z, w \in \mathbb{B}_n$ y $\varphi \in Aut(\mathbb{B}_n)$.

Ahora, en la siguiente proposición, caracterizaremos la métrica de Bergman, lo que nos facilitará cálculos posteriores.

Proposición 2.1.5. *Si $z, w \in \mathbb{B}_n$, entonces*

$$\beta(z,w) = \frac{1}{2} log \frac{1 + |\varphi_z(w)|}{1 - |\varphi_z(w)|}$$

donde φ_z es el automorfismo involutivo asociado a z.

Corolario 2.1.6. *Para $z, w \in \mathbb{B}_n$, sea*

$$\rho(z,w) = |\varphi_z(w)|.$$

Entonces ρ es una métrica en $\mathbb{B}_n$. Más aún, ρ es invariante bajo automorfismos, esto es

$$\rho(\varphi(z), \varphi(w)) = \rho(z,w)$$

para $\varphi \in Aut(\mathbb{B}_n)$.

La métrica ρ es llamada la métrica pseudo-hiperbólica en $\mathbb{B}_n$. Tenemos que ρ está acotada, lo cual se sigue de la definición, pues $\varphi_z(w) \in \mathbb{B}_n$, así, $\rho < 1$, y, también podemos notar que β no es acotada, pues, utilizando la caracterización de la métrica de Bergman, notamos que si $|\varphi_z(w)| \to 1$, entonces $\beta \to \infty$. Ahora, empleando la métrica de Bergman, podemos definir de manera natural la topología que genera, esto es, si $z \in \mathbb{B}_n$ y $r > 0$, entonces denotamos por $D(z,r)$ a la bola abierta centrada en z, donde

$$D(z,r) = \{w \in \mathbb{B}_n : \beta(z,w) < r\}.$$

Ahora, calculemos el volumen de las bolas abiertas dadas por la métrica de Bergman.

Lema 2.1.7. *Para $z, w \in \mathbb{B}_n$ y $r > 0$, tenemos*

$$v\left(D(z,r)\right) = \frac{R^2\left(1-|z|^2\right)^{n+1}}{\left(1-R^2|z|^2\right)^{n+1}} \tag{2.1.5}$$

donde $R = tanh(r)$. En particular, para $r > 0$, existen constantes $c_r > 0$ y $C_r > 0$ tales que

$$c_r\left(1-|z|^2\right)^{n+1} \leq v\left(D(z,r)\right) \leq C_r\left(1-|z|^2\right) \tag{2.1.6}$$

para todo $z \in \mathbb{B}_n$.

Ahora, necesitaremos una clase de medidas de volumen con peso para $\mathbb{B}_n$. Considerando el parámetro real α,y luego integrando en coordenadas polares, podemos probar que

$$\int_{\mathbb{B}_n} \left(1-|z|^2\right)^{\alpha} d\nu(z)$$

es finita si y solo si $\alpha > -1$. Cuando $\alpha > -1$, definimos una medida finita $d\nu_\alpha$ en $\mathbb{B}_n$ mediante

$$d\nu_\alpha = c_\alpha\left(1-|z|^2\right)^{\alpha} d\nu(z), \tag{2.1.7}$$

donde c_α es una constante de normalización, así $\nu_\alpha\left(\mathbb{B}_n\right) = 1$. Usando coordenadas polares, tenemos que

$$c_\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}. \tag{2.1.8}$$

Cuando $\alpha \leq -1$, simplemente escribimos

$$d\nu_\alpha(z) = \left(1 - |z|^2\right)^\alpha d\nu(z).$$

Lema 2.1.8. *Supongamos que* $m = (m_1, \cdots, m_n)$ *es un multi índice de enteros no negativos y* $\alpha > -1$. *Entonces*

$$\int_{\mathbb{S}_n} |\zeta^m|^2 d\sigma(\zeta) = \frac{(n-1)!\; m!}{(n-1+|m|)!}, \tag{2.1.9}$$

$$\int_{\mathbb{B}_n} |z^m|^2 dv_\alpha(z) = \frac{m!\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+|m|+\alpha+1)}. \tag{2.1.10}$$

Ahora, tenemos la siguiente estimación para $\nu_\alpha(D(z,r))$.

Lema 2.1.9. *Para cualquier real* α *y número positivo* r *existen constantes* $C > 0$ *y* $c > 0$ *tales que*

$$c\left(1-|z|^2\right)^{n+1+\alpha} \leq \nu_\alpha(D(z,r)) \leq C\left(1-|z|^2\right)^{n+1+\alpha}$$

para todo $z \in \mathbb{B}_n$.

Ahora, mostraremos un resultado que nos da una fórmula integral para el caso en que realicemos un cambio de variable vía un automorfismo de la bola unitaria, la cual será muy útil en cálculos posteriores.

Proposición 2.1.10. *Sea* α *un número real y* $f \in L^1(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$. *Entonces*

$$\int_{\mathbb{B}_n} f\circ\varphi(z) dv_\alpha(z) = \int_{\mathbb{B}_n} f(z) \frac{\left(1-|a|^2\right)^{n+1+\alpha}}{|1-\langle z,a\rangle|^{2(n+1+\alpha)}} dv_\alpha(z),$$

donde φ *es un automorfismo de* $\mathbb{B}_n$ *y* $a = \varphi(0)$.

Demostración. Por el teorema 1.1.4, existe una transformación unitaria U tal que $\varphi = \varphi_a U$, donde $a = \varphi(0)$. Dado que la medida dv_α es invariante bajo la acción de transformaciones unitarias (pues la medida dv lo es), podemos asumir $\varphi = \varphi_a$. En este caso, tenemos que $\varphi^{-1} = \varphi$ y su determinante jacobiano real en el punto z está dado por el lema 1.1.7, así, aplicando la fórmula de cambio de variable a la integral $\int_{\mathbb{B}_n} f \circ \varphi(z) dv_\alpha(z)$ y empleando la definición de dv_α, se tiene

$$c_\alpha \int_{\mathbb{B}_n} f(z)\left(1-|\varphi_a|^2\right)^\alpha \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\langle z,a\rangle|}^2\right)^{n+1} dv(z).$$

□

2.2. Funciones subarmónicas

A continuación, definiremos lo que es una función subarmónica y daremos un par de resultados sobre dichas funciones, lo cual también nos será de ayuda para realizar cálculos posteriores. Dichos resultados son de naturaleza real, así, podemos pensar en $\mathbb{B}_n$ como la bola unitaria en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{2n}$.

Recordemos que toda función armónica posee la propiedad del valor medio y el principio del máximo. Además, si B es una bola cuya esfera frontera es S y u es una función continua en S, entonces u puede ser extendida de manera contínua a una función armónica en B.

Una función $f : \mathbb{B}_n \to [-\infty, \infty)$ se dice que es semi-continua por arriba si

$$limsup_{z\to z_0} f(z) \leq f(z_0)$$

para todo $z_0 \in \mathbb{B}_n$. Una función semi-continua por arriba se dice subarmónica si

$$f(a) \leq \int_{\mathbb{S}_n} f(a + r\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

para todo $a \in \mathbb{B}_n$ y $0 \leq r < 1 - |a|$.

A lo largo de la sección, utilizaremos a las funciones armónicas en el sentido de las dos proposiciones siguientes.

Proposición 2.2.1. *Si $\alpha > -1$ y f es subarmónica en $\mathbb{B}_n$, entonces*

$$f(a) \leq \int_{\mathbb{B}_n} f(a + rz)\, dv_\alpha(z) \tag{2.2.1}$$

para todo $a \in \mathbb{B}_n$ y $0 \leq r < 1 - |a|$.

Demostración. El resultado se obtiene de integrar en coordenadas polares la definición de función subarmónica. □

Proposición 2.2.2. *Si f es holomorfa en $\mathbb{B}_n$ y $0 < p < \infty$, entonces $log|f|$ y $|f|^p$ son subarmónicas en $\mathbb{B}_n$.*

Demostración. Fijemos un punto $a \in \mathbb{B}_n$. Si $f(a) = 0$, entonces, trivialmente se tiene

$$log|f(a)| \leq \int_{\mathbb{S}_n} log|f(a + r\zeta)| d\sigma(\zeta)$$

y

$$|f(a)|^p \leq \int_{\mathbb{S}_n} |f(a + r\zeta)|^p d\sigma(\zeta),$$

donde r es un radio que satisface $0 \leq r < 1 - |a|$. Si $f(a) \neq 0$, podemos hallar un número positivo $\epsilon < 1 - |a|$ tal que f es distinta de cero en $|z - a| < \epsilon$. En particular, tenemos ramas analíticas definidas para $log f(z)$ y $f(z)^p$. Luego, tenemos

$$log|f(a)| = \int_{\mathbb{S}_n} log|f(a + r\zeta)| d\sigma(\zeta),$$

para $0 \leq r < \epsilon$, pues $log|f(z)|$ es holomorfa en $|z - a| < \epsilon$ y por lo tanto, tiene la propiedad de valor medio. De igual manera, tenemos

$$f(a)^p = \int_{\mathbb{S}_n} f(a + r\zeta)^p d\sigma(\zeta),$$

para $0 \leq r < \epsilon$. Tomando módulo en ambos lados, conseguimos

$$|f(a)|^p \leq \int_{\mathbb{S}_n} |f(a + r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)$$

para todo $0 \leq r < \epsilon$. Dado que $\epsilon < 1 - |a|$, se satisface que ambas funciones son subarmónicas. □

2.3. Espacios de Bergman

Para $\alpha > -1$ y $p > 0$, el espacio de Bergman pesado A^p_α consiste en funciones holomorfas f en $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$, esto es,

$$A^p_\alpha = L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha) \cap H(\mathbb{B}_n) \tag{2.3.1}$$

donde dv_α está dada por (2.1.7).

Si $\alpha = 0$, se denota A^p para A^p_α, donde dichos espacios, son los usuales espacios de Bergman (sin peso).

Notemos que si $1 \leq p < \infty$, entonces $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{B}_n} |f(z)|^p dv_\alpha(z) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3.2}$$

Si $0 < p < 1$, el espacio $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$ es un espacio métrico completo con la distancia

$$\rho(f,g) = \|f - g\|^p_{p,\alpha}.$$

En el caso cuando $p = 2$, entonces $L^2(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$ es un espacio de Hilbert cuyo producto interno será denotado por $\langle , \rangle_\alpha$.

Para todo $0 < p < \infty$, llamaremos a $\|.\|_{p,\alpha}$ la norma en $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$.

Ahora veremos en el siguiente teorema qué tan rápido una función en A^p_α puede crecer cerca de la frontera de $\mathbb{B}_n$.

Teorema 2.3.1. *Supongamos que* $0 < p < \infty$ *y* $\alpha > -1$. *Entonces*

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_{p,\alpha}}{\left(1 - |z|^2\right)^{\frac{(n+1+\alpha)}{p}}} \tag{2.3.3}$$

para todo $f \in A^p_\alpha$ *y* $z \in \mathbb{B}_n$.

Demostración. Si f es una función holomorfa en $\mathbb{B}_n$, entonces, por la proposición 2.2.2, tenemos que $|f|^p$ es subarmónica, luego, aplicando la proposición 2.2.1, se tiene

$$|f(0)|^p \leq \int_{\mathbb{B}_n} |f(w)|^p dv_\alpha(w),$$

esto es, hemos probado la proposición para el caso $z = 0$.

Dado que el grupo de automorfismos actúa de manera transitiva en $\mathbb{B}_n$, podemos mandar al punto $z = 0$ en otro punto de la bola mediante una involución, así, en general, consideremos $f \in A^p_\alpha$, $z \in \mathbb{B}_n$ y la función

$$F(w) = f \circ \varphi_z(w) \frac{\left(1-|z|^2\right)^{\frac{(n+1+\alpha)}{p}}}{(1-\langle w,z\rangle)^{\frac{2(n+1+\alpha)}{p}}},$$

para $w \in \mathbb{B}_n$.

Dado que $f \in A^p_\alpha$, entonces $|f|^p \in L^1(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$, pues, en particular, $f \in L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$, así, por la proposición 2.1.9 (y utilizando el hecho de que la inversa de una involución es ella misma), tenemos:

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{p,\alpha} &= \int_{\mathbb{B}_n} |f(w)|^p dv_\alpha(w) \\
&= \int_{\mathbb{B}_n} |f \circ \varphi_z \circ \varphi_z(w)|^p dv_\alpha(w) = \int_{\mathbb{B}_n} |f \circ \varphi_z(w)|^p \frac{\left(1-|z|^2\right)^{n+1+\alpha}}{(1-\langle w,z\rangle)^{2(n+1+\alpha)}} dv_\alpha(w) \\
&= \|F\|^p_{p,\alpha},
\end{aligned}$$

luego, notemos que

$$F(0) = f(z)\left(1-|z|^2\right)^{\frac{(n+1+\alpha)}{p}}$$

y, dado que f es holomorfa, se tiene

$$|F(0)|^p \leq \int_{\mathbb{B}_n} |F(w)|^p dv_\alpha = \|F\|^p_{p,\alpha} = \|f\|^p_{p,\alpha},$$

obteniendo así la desigualdad deseada. □

El siguiente resultado, nos dará una representación integral para funciones en A^1_α.

Teorema 2.3.2. *Si $\alpha > -1$ y $f \in A^1_\alpha$, entonces*

$$f(z) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(w)dv_\alpha(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}} \tag{2.3.4}$$

para todo $z \in \mathbb{B}_n$.

Demostración. Sea $f \in A^1_\alpha$. Por la propiedad del valor medio de funciones holomorfas, se tiene que

$$f(0) = \int_{\mathbb{S}_n} f(r\zeta)\, d\sigma(\zeta),$$

para $0 \leq r < 1$. Ahora, integrando en coordenadas polares, conseguimos

$$f(0) = \int_{\mathbb{B}_n} f(w) dv_\alpha(w).$$

Sea $z \in \mathbb{B}_n$ y reemplacemos f por $f \circ \varphi_z$. Entonces

$$f \circ \varphi_z(0) = f(z) = \int_{\mathbb{B}_n} f \circ \varphi_z(w) dv_\alpha(w).$$

Empleando el cambio de variable dado por la proposición 2.1.9, tenemos

$$f(z) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{\left(1 - |z|^2\right)^{n+1+\alpha}}{|1 - \langle z, w\rangle|^{2(n+1+\alpha)}} f(w) dv_\alpha(w).$$

Fijemos $z \in \mathbb{B}_n$ y reemplacemos f por la función $f(w)(1 - \langle w, z\rangle)^{n+1+\alpha}$, entonces

$$f(z)\left(1 - |z|^2\right)^{n+1+\alpha} = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{\left(1 - |z|^2\right)^{n+1+\alpha}}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+1+\alpha}} f(w) dv_\alpha(w)$$

pues $\overline{\langle w, z\rangle} = \langle z, w\rangle$, luego, despejando el término que multiplica a $f(z)$ en el lado izquierdo, el cual es distinto de 0, pues $z \in \mathbb{B}_n$, se obtiene el resultado deseado. □

Dado que la medida de $\mathbb{B}_n$ es finita, entonces $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha) \subset L^1(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$, esto es, $A^p_\alpha \subset A^1_\alpha$, así, la representación integral mostrada en el resultado anterior es valida para funciones en A^1_α con $1 \leq p < \infty$, dicho resultado es bien conocido, por ejemplo, en Folland (1999) y de demostración sencilla.

Ahora, definiremos el operador de derivada radial, para ello, dados dos parámetros reales α y t con la propiedad de que ni $n + \alpha$ ni $n + \alpha + t$ son enteros negativos, definimos el operador invertible

$$R^{\alpha,t} : H(\mathbb{B}_n) \to H(\mathbb{B}_n)$$

como sigue. Si

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$$

es la expansión homogénea de f, entonces

$$R^{\alpha,t} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(n+1+k+\alpha+t)}{\Gamma(n+1+\alpha+t)\Gamma(n+1+k+\alpha)} f_k(z). \tag{2.3.5}$$

La inversa de $R^{\alpha,t}$, denotada por $R_{\alpha,t}$, está dada por

$$R_{\alpha,t} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+\alpha+t)\Gamma(n+1+k+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(n+1+k+\alpha+t)} f_k(z). \tag{2.3.6}$$

Ahora, daremos una descripción alternativa para estos operadores.

Proposición 2.3.3. *Supongamos que ni $n+\alpha$ ni $n+\alpha+t$ es un entero negativo. Entonces, el operador $R^{\alpha,t}$ es el único operador lineal continuo en $H(\mathbb{B}_n)$ que satisface*

$$R^{\alpha,t}\left(\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}\right) = \frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha+t}} \tag{2.3.7}$$

para todo $w \in \mathbb{B}_n$. Similarmente, el operador $R_{\alpha,t}$, es el único operador lineal continuo en $H(\mathbb{B}_n)$ que satisface

$$R_{\alpha,t}\left(\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha+t}}\right) = \frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}} \tag{2.3.8}$$

para todo $w \in \mathbb{B}_n$.

Corolario 2.3.4. *Supongamos que $\alpha > -1$, $t > 0$ y f es holomorfa en $\mathbb{B}_n$. Si $n+\alpha$ y $n+\alpha+t$ no son enteros negativos, entonces*

$$R^{\alpha,t} = lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(rw)dv_\alpha(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha+t}}, \tag{2.3.9}$$

y

$$R_{\alpha,t} = lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(rw)dv_\alpha(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}. \tag{2.3.10}$$

En particular, dichos límites siempre existen.

Demostración. Para todo $r \in (0,1)$ fijo, la dilatación f_r, definida por $f_r(z) = f(rz)$, pertenece a A^1_α y $A^1_{\alpha+t}$. Luego, por el Teorema 3.3.2,

$$f_r(z) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{f_r(w)dv_\alpha(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}},$$

para $z \in \mathbb{B}_n$, y

$$f_r(z) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{f_r(w)dv_{\alpha+t}(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha+t}},$$

para $z \in \mathbb{B}_n$. El resultado deseado se obtiene de la Proposición anterior y el hecho de que

$$R^{\alpha,t}f(z) = lim_{r\to 1^-}R^{\alpha,t}f_r(z)$$

y

$$R_{\alpha,t}f(z) = lim_{r\to 1^-}R_{\alpha,t}f_r(z).$$

□

Lema 2.3.5. *Supongamos que $p > 0$, $\alpha > -1$, $0 < r < 1$, y $m = (m_1, \cdots, m_n)$ es un multi índice de enteros no negativos. Entonces existe una constante positiva C tal que*

$$\left|\frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z)\right| \leq C\|f\|_{p,\alpha}$$

para todo $f \in A^p_\alpha$ y todo $z \in \mathbb{B}_n$ con $|z| \leq r$.

Demostración. Fijemos $\delta \in (r,1)$ y apliquemos el Teorema 3.3.2 en el caso especial en que $\alpha = 0$. Así obtenemos

$$f(\delta z) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(\delta w)dv(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1}},$$

para $z \in \mathbb{B}_n$. Haciendo un cambio de variables y reemplazando δz por z, tenemos

$$f(z) = \delta^2 \int_{|w|<\delta} \frac{f(w)dv(w)}{(\delta^2-\langle z,w\rangle)^{n+1}},$$

para $|z| < \delta$. Luego, aplicando la estimación de Cauchy, la cual se puede encontrar, por ejemplo, en Range (1986), tenemos que existe una constante C tal que

$$\left|\frac{\partial^m f}{\partial z^m}\right|(z) \leq Csup\{|f(w)| : |w| \leq \delta\}$$

para todo $|z| \leq r$. Esto se reduce al caso $|m| = 0$, el cual es el caso planteado en el Teorema 2.3.1. □

Corolario 2.3.6. *Para cada $p > 0$ y $\alpha > -1$, el espacio de Bergman pesado A_α^p es cerrado en $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$.*

Demostración. Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión en A_α^p y

$$lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{p,\alpha} = 0$$

para alguna $f \in L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$. Entonces alguna subsucesión de $\{f_n\}$ converge a f para casi todo $z \in \mathbb{B}_n$. Por lo tanto, $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en A_α^p, así, por el Lema 3.3.5, la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente (no depende de z) de Cauchy en el conjunto $\{z \in \mathbb{B}_n : |z| < r\}$, y debe converger a una función holomorfa definida en este conjunto, donde $0 < r < 1$. Dado que r es arbitrario, $\{f_n\}$ converge a una función holomorfa $g(z)$ en $\mathbb{B}_n$. Por la unicidad de los límites puntuales, tenemos que $f(z) = g(z)$ para casi todo $z \in \mathbb{B}_n$. Esto prueba que f es holomorfa en $\mathbb{B}_n$ y por lo tanto pertenece a A_α^p. □

De esto se sigue que las espacios de Bergman pesados A_α^p con la topología heredada de $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$ es un espacio de Banach cuando $1 \leq p < \infty$, y es un espacio métrico completo cuando $0 < p < 1$.

Cuando $p = 2$, el espacio A_α^2 es un espacio de Hilbert. Más aún, si

$$f(z) = \sum_m a_m z^m$$

es la expansión de Taylor de f, por (3.1.10), tenemos

$$\|f\|_\alpha^2 = \int_{\mathbb{B}_n} |f(z)|^2 dv_\alpha(z) = \sum_{m\geq 0} \frac{(m!)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+|m|+\alpha+1)}|a_m|^2. \tag{2.3.11}$$

En particular, las funciones

$$e_m(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+|m|+\alpha+1)}{(m!)\Gamma(n+\alpha+1)}} z^m \tag{2.3.12}$$

forman una base ortonormal para A^2_α, donde $m = (m_1, \cdots, m_n)$ corre sobre todos los multi índices de enteros no negativos.

Proposición 2.3.7. *Supongamos que $p > 0$ y $\alpha > -1$. Entonces el conjunto de polinomios es denso en A^p_α.*

Demostración. Dada $f \in A^p_\alpha$, consideremos la dilatación $f_r(z) = f(rz)$, con $0 < r < 1$. Notemos que cada f_r es holomorfa en un disco más grande que f pues, se tiene tiene que f_r es holomorfa en discos tales que $|z| \leq \frac{1}{r}$, por lo tanto, puede ser aproximada cada f_r de manera uniforme en $\mathbb{B}_n$ por polinomios (su expansión en serie de Taylor). Así, basta probar que f puede ser aproximada en la norma de A^p_α por dilataciones, esto es $\|f - f_r\|_{p,\alpha} \to 0$ cuando $r \to 1^-$.

Integrando en coordenadas polares y aplicando el Teorema de convergencia dominada (pues $f_r \to f$ uniformemente en compactos) se tiene el resultado deseado. □

2.4. Proyecciones de tipo Bergman

Sea $\alpha > -1$. Tenemos que para cada punto $w \in \mathbb{B}_n$, podemos definir un funcional lineal acotado en el espacio de Hilbert A^2_α mediante la evaluación en w de un elemento dado en dicho espacio, así, por el teorema de representación de Riesz (el cual garantiza que dicho operador es acotado) podemos ver que para cada $w \in \mathbb{B}_n$ existe una función única K^α_w en A^2_α tal que

$$f(w) = \langle f, K^\alpha_w \rangle_\alpha = \int_{\mathbb{B}_n} f(z) \overline{K^\alpha_w(z)} dv_\alpha(z), \tag{2.4.1}$$

para $f \in A^2_\alpha$. Dicha representación será llamada la fórmula reproductora para f en A^2_α. La función

$$K^\alpha(z, w) = K^\alpha_w(z),$$

para $z, w \in \mathbb{B}_n$ es llamada el kernel reproductor de A^2_α. Cuando $\alpha = 0$, el kernel reproductor

$$K(z,w) = K^0(z,w)$$

es llamado el kernel de Bergman.

Teorema 2.4.1. *Para cada $\alpha > -1$, el kernel reproductor de A^2_α está dado por*

$$K^\alpha(z,w) = \frac{1}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+1+\alpha}}$$

para $z, w \in \mathbb{B}_n$.

Demostración. Aplicando el Teorema 3.3.2 y la unicidad de la representación de Riesz para funcionales lineales acotados en un espacio de Hilbert se obtiene el resultado. □

Dado que la función $K^\alpha(z,w)$ es acotada en z cuando w es fijo, podemos considerar integrales de la forma

$$\int_{\mathbb{B}_n} f(z) K^\alpha(z,w)\, dv_s(z)$$

donde $\alpha > -1$, $s \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{B}_n$, y $f \in L^1(\mathbb{B}_n, dv_s)$. En particular, haremos uso del siguiente operador integral

$$P_\alpha(f)(z) = \int_{\mathbb{B}_n} f(w) K^\alpha(z,w)\, dv_\alpha(w),$$

para $f \in L^1(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$.

Lema 2.4.2. *Supongamos que $\alpha > -1$. Entonces la restricción de P_α a $L^2(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$ es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$ sobre A^2_α.*

Demostración. Sea P la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$ sobre A^2_α. Para $f \in L^2(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$ y $z \in \mathbb{B}_n$ la propiedad de reproducción de K^α y el hecho de que P es auto adjunto nos brinda

$$Pf(z) = \langle Pf, K^\alpha_z\rangle_\alpha = \langle f, PK^\alpha_z\rangle_\alpha.$$

Dado que $K_z^\alpha \in A_\alpha^2$, tenemos $PK_z^\alpha = K_z^\alpha$ y, por lo tanto

$$Pf(z) = \langle f, K_z^\alpha \rangle_\alpha = \int_{\mathbb{B}_n} f(w) K^\alpha(z,w) dv_\alpha(w).$$

Esto prueba que P es la restricción de P_α a $L^2(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$. □

El lema anterior muestra que el operador P_α manda $L^2(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$ de manera acotada y sobre al espacio de Bergman A_α^2. Ahora queremos ver cómo el operador P_α actúa en otros espacios tales como $L^p(\mathbb{B}_n, dv_t)$. Una herramienta útil para afrontar este problema, es la siguiente prueba de Schur.

Teorema 2.4.3. *Supongamos que (X,μ) es un espacio de medida, $1 < p < \infty$, y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para un kernel no negativo $H(x,y)$, consideremos el operador integral*

$$Tf(x) = \int_X H(x,y) f(y) d\mu(y).$$

Si existe una función positiva h en X y una constante positiva C tal que

$$\int_X H(x,y) h(y)^q d\mu(y) \leq C h(x)^q$$

para casi todo $x \in X$, y

$$\int_X H(x,y) h(x)^p d\mu(x) \leq C h(y)^p$$

para casi todo $y \in X$, entonces el operador T es acotado en $L^p(X,\mu)$ con $\|T\| \leq C$.

Demostración. Dada una función $f \in L^p(X,\mu)$, por la desigualdad de Hölder se tiene

$$|Tf(x)| \leq \left(\int_X H(x,y) h(y)^q d\mu(y) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X H(x,y) h(y)^{-p} \left| f(y) \right|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para casi todo $x \in X$. Por la primer desigualdad de las hipótesis se tiene

$$|Tf(x)| \leq C^{\frac{1}{q}} h(x) \left(\int_X H(x,y) h(y)^{-p} \left| f(y) \right|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para casi todo $x \in X$. Por el Teorema de Fubini y la segunda desigualdad de las hipótesis, se tiene

$$\int_X |Tf(x)|^p d\mu(x) \leq C^p \int_X \left| f(y) \right|^p d\mu(y),$$

lo que demuestra la prueba de Schur. □

Ahora usaremos la prueba de Schur para describir el acotamiento de una clase de operadores integrales inducidos por los kernels de tipo Bergman en espacios de Lebesgue pesados. Retomemos las medidas

$$dv_t(z) = c_t\left(1 - |z|^2\right)^t dv(z),$$

para $< -\infty < t < \infty$, donde c_t es una constante positiva.

Antes de describir el acontamiento de los operadores mencionados anteriormente, enunciaremos un resultado que nos será de utilidad en la demostración del siguiente teorema.

Teorema 2.4.4. *Supongamos que c es un real y $t > -1$. Entonces las integrales*

$$I_c(z) = \int_{\mathbb{S}_n} \frac{d\sigma(\zeta)}{|1 - \langle z, \zeta\rangle|^{n+c}},$$

y

$$J_{c,t}(z) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{\left(1 - |w|^2\right)^t dv(w)}{|1 - \langle z, w\rangle|^{n+1+t+c}}$$

para $z \in \mathbb{B}_n$, satisfacen

(a) Si $c < 0$, entonces I_c y $J_{c,t}$ son acotadas en $\mathbb{B}_n$.

(b) Si $c = 0$, entonces $I_c(z) \sim J_{c,t}(z) \sim log\frac{1}{1-|z|^2}$.

(c) Si $c > 0$, entonces $I_c(z) \sim J_{c,t}(z) \sim \left(1 - |z|^2\right)^{-c}$ cuando $|z| \to 1^-$.

Demostración. Sea $\lambda = \frac{n+c}{2}$. Entonces

$$\frac{1}{|1 - \langle z, \zeta\rangle|^{n+c}} = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\lambda)}{k!\Gamma(\lambda)} \langle z, \zeta\rangle^k\right|^2.$$

Para $z \in \mathbb{B}_n$ fijo, las funciones $\langle z, \zeta\rangle^{k_1}$ y $\langle z, \zeta\rangle^{k_2}$ son ortogonales en $L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ cuando $k_1 \neq k_2$. Así, se sigue que

$$I_c(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\Gamma(k+\lambda)}{k!\Gamma(\lambda)}\right|^2 \int_{\mathbb{S}_n} |\langle z, \zeta\rangle|^{2k} d\sigma(\zeta).$$

Si $z \neq 0$, entonces podemos usar el vector unitario $\frac{z}{z}$ en $\mathbb{C}^n$ como la primer fila para construir la matriz unitaria U. Escribamos $U\zeta = \zeta'$ y notemos que la primer coordenada de ζ' es

$$\zeta_1' = \frac{\langle \zeta, z\rangle}{|z|}.$$

Por la invarianza unitaria de $d\sigma$, tenemos

$$\int_{\mathbb{S}_n} |\langle z, \zeta\rangle|^{2k} d\sigma(\zeta) = |z|^{2k} \int_{\mathbb{S}_n} \left|\zeta_1'\right|^{2k} d\sigma(\zeta').$$

Lo cual también se tiene si $z = 0$. Luego, por el Lema 3.1.8, se tiene

$$\int_{\mathbb{S}_n} |\langle z, \zeta\rangle|^{2k} d\sigma(\zeta) = \frac{(n-1)!k!}{(n-1+k)!}|z|^{2k}.$$

Así

$$I_c(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\Gamma(k+\lambda)}{k!\Gamma(\lambda)}\right|^2 \frac{(n-1)!k!}{(n-1+k)!}|z|^{2k}.$$

Aplicando la fórmula de Stirling para la función Gamma, los coeficientes de la serie anterior son de orden k^{c-1}. Lo que prueba las afirmaciones sobre $I_c(z)$.

Ahora, para verificar las afirmaciones sobre $J_{c,t}(z)$, integramos en coordenadas polares para obtener

$$J_{c,t}(z) = 2n \int_0^1 \left(1 - r^2\right)^t I_{1+t+c}(rz) r^{2n-1} dr.$$

Combinando esto con la serie para $I_c(z)$, integrando término a término y luego aplicando la fórmula de Stirling, concluimos

$$J_{c,t}(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} k^{c-1}|z|^{2k}$$

cuando $|z| \to 1^-$. Esto completa la prueba. □

Teorema 2.4.5. *Fijemos dos parámetros reales a , b y definamos dos operadores integrales, T y S por*

$$Tf(z) = \left(1 - |z|^2\right)^a \int_{\mathbb{B}_n} \frac{\left(1 - |w|^2\right)^b}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+1+a+b}} f(w) dv(w)$$

y

$$Sf(z) = \left(1-|z|^2\right)^a \int_{\mathbb{B}_n} \frac{\left(1-|w|^2\right)^b}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+a+b}} f(w)dv(w).$$

Entonces para $-\infty < t < \infty$ y $1 \leq p < \infty$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *T es acotado en $L^p(\mathbb{B}_n, dv_t)$.*

(b) *S es acotado en $L^p(\mathbb{B}_n, dv_t)$.*

(c) *$-pa < t+1 < p(b+1)$.*

Demostración. Notemos que b) implica a) solamente por la forma en que están definidos los operadores. Ahora probaremos a) implica c), para ello, sea N un entero positivo suficientemente grande tal que $N+b > -1$ y tal que la función

$$f_N = \left(1-|z|^2\right)^N,$$

para $z \in \mathbb{B}_n$, pertenezca a $L^p(\mathbb{B}_n, dv_t)$. La simetría de $\mathbb{B}_n$ muestra que

$$Tf_N(z) = c_N\left(1-|z|^2\right)^a$$

donde $z \in \mathbb{B}_n$ y c_N es una constante positiva. El hecho de que T es acotado en $L^p(\mathbb{B}_n, dv_t)$ implica que la función $\left(1-|z|^2\right)^a$ pertenece a $L^p(\mathbb{B}_n, dv_t)$, lo cual implica que $pa+t > -1$, o $t+1 > -pa$.

Si $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, al ser T un operador acotado en $L^p(\mathbb{B}_n, dv_t)$, se tiene que el adjunto de T también es acotado en $L^q(\mathbb{B}_n, dv_t)$. De aquí se tiene que

$$T^*f(z) = \left(1-|z|^2\right)^{b-t} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{\left(1-|w|^2\right)^{a+t}}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+a+b}} f(w)dv(w).$$

Luego, juntando esto con la conclusión del párrafo anterior, se tiene

$$t+1 > -q(b-t),$$

lo cual es equivalente a

$$t+1 < p(b+1).$$

Similarmente, el hecho de que T sea acotado en $L^1(\mathbb{B}_n, dv_t)$ implica que T^* es acotado en $L^\infty(\mathbb{B}_n)$. Aplicando T^* a la función constante 1, se tiene $b - t \geq 0$. Para ver que no se tiene la igualdad, consideremos la función

$$f_z(w) = \frac{(1 - \langle z, w \rangle)^{n+1+a+b}}{|1 - \langle z, w \rangle|^{n+1+a+b}}$$

para $w \in \mathbb{B}_n$.

Cada función f_z es un vector unitario en $L^\infty(\mathbb{B}_n)$. Si $b = t$, entonces

$$\|T^* f_z\|_\infty \geq |T^* f_z(z)| = c_t \int_{\mathbb{B}_n} \frac{\left(1 - |w|^2\right)^{a+t} dv(w)}{|1 - \langle z, w \rangle|^{n+1+a+t}}.$$

donde, la integral anterior tiende a $+\infty$ cuando $|z| \to 1^-$. Luego, dado que T es acotado en $L^1(\mathbb{B}_n, dv_t)$, entonces $b - t > 0$, o $t + 1 < b + 1$. Esto completa la prueba *a*) implica *c*).

Resta probar que *c*) implica *b*). El caso $p = 1$ se sigue del Teorema de Fubini y la estimación realizada anteriormente.

Si $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces la condición $-pa < p(b+1)$ implica que los intervalos

$$(A, B) = \left(-\frac{b+1}{q}, \frac{a}{q}\right)$$

y

$$(C, D) = \left(-\frac{a+1+t}{p}, \frac{b-t}{p}\right)$$

son ambos no vacíos y la condición $-pa < t+1$ implica que $C < B$, además la condición $t + 1 < p(b+1)$ implica que $A < D$. Por lo tanto, las desigualdades

$$-pa < t + 1 < p(b+1)$$

implican que (A, B) y (C, D) tienen intersección no vacía. Fijemos

$$s \in (A, B) \cap (C, D)$$

y sea

$$h(z) = \left(1 - |z|^2\right)^s,$$

para $z \in \mathbb{B}_n$.

El hecho de que S sea acotado en $L^p(\mathbb{B}_n, dv_t)$ se sigue de la prueba de Schur y de la estimación realizada anteriormente. □

El siguiente Teorema muestra casos especiales importantes del resultado anterior.

Teorema 2.4.6. *Supongamos $-1 < \alpha < \infty$, $-1 < t < \infty$, y $1 \leq p < \infty$. Entonces el operador P_α es una proyección acotada de $L^p(\mathbb{B}_n, dv_t)$ sobre A_t^p si y solo si*

$$p(\alpha + 1) > t + 1.$$

En particular, P_α es una proyección acotada de $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$ sobre A_α^p si y solo si $p > 1$, y P_α es una proyección acotada de $L^1(\mathbb{B}_n, dv_t)$ sobre A_t^1 si y solo si $\alpha > t$.

En particular, vemos que existen muchas proyecciones acotadas de el espacio $L^1(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$ sobre A_α^1.

Teorema 2.4.7. *Supongamos $\alpha > -1$, $\beta > -1$, y $1 < p < \infty$. Entonces*

$$\left(A_\alpha^p\right)^* = A_\beta^q$$

bajo la integral

$$\langle f, g\rangle_\gamma = \int_{\mathbb{B}_n} f(z)\overline{g(z)}dv_\gamma(z),$$

para $f \in A_\alpha^p$ y $g \in A_\beta^q$, donde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ \gamma = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}.$$

Demostración. Si $g \in A_\beta^q$ y

$$F(f) = \langle f, g\rangle_\gamma = c_\gamma \int_{\mathbb{B}_n} \left(1 - |z|^2\right)^{\frac{\alpha}{p}} f(z)\overline{\left(1 - |z|^2\right)^{\frac{\beta}{q}} g(z)}dv(z),$$

para $f \in A^p_\alpha$, entonces se sigue de la desigualdad de Hölder que F es un funcional lineal acotado en A^p_α con $\|F\| \leq C\|g\|_{q,\beta}$, donde C es una constante positiva dependiente de c_α, c_β y c_γ.

Ahora, si F es un funcional lineal acotado en A^p_α, entonces empleando el Teorema de Hahn-Banach, F puede ser extendido a un funcional lineal acotado en $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$. Debido a la dualidad de los espacios L^p, entonces existe algún $h \in L^q(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$ tal que

$$F(f) = \int_{\mathbb{B}_n} f(z)\overline{h(z)}dv_\alpha(z),$$

con $f \in L^p(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$. Definamos

$$H(z) = \frac{c_\alpha}{c_\gamma}\left(1-|z|^2\right)^{\alpha-\beta} h(z)$$

con $z \in \mathbb{B}_n$. Así

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_n} |H(z)|^q dv_\beta(z) &= \int_{\mathbb{B}_n} c_\beta \left|\frac{c_\alpha}{c_\gamma}\right|^q \left(1-|z|^2\right)^\alpha \left(1-|z|^2\right)^\beta \left(1-|z|^2\right)^{-\beta} |h(z)|^q dv(z) \\ &= \frac{c_\beta |c_\alpha|}{\left|c_\gamma\right|^q} \int_{\mathbb{B}_n} |c_\alpha| |h(z)|^q \left(1-|z|^2\right)^\alpha dv(z) < \infty\end{aligned}$$

pues $h \in L^q(\mathbb{B}_n, dv_\alpha)$, concluyendo así que $H \in L^q\left(\mathbb{B}_n, dv_\beta\right)$ y, por lo tanto

$$F(f) = \int_{\mathbb{B}_n} f(z)\overline{H(z)}dv_\gamma(z),$$

con $f \in A^p_\alpha$. $\square$

CAPÍTULO 3

Acción de $SU(n,1)$ en el espacio A^2_α

Ahora, retomemos la acción de el grupo $SU(n,1)$ sobre $\mathbb{B}_n$, la cuál está dada por

$$SU(n,1) \times \mathbb{B}_n \longrightarrow \mathbb{B}_n$$

$$\left(\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{Az+b}{c \cdot z + d},$$

la cual denotaremos por $Mz = \frac{Az+b}{c \cdot z+d}$, con $M = \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $z \in \mathbb{B}_n$.

Anteriormente, se demostró que dicha acción es transitiva en $\mathbb{B}_n$.

Ahora, lo que queremos es hallar una representación unitaria de dicha acción, es decir, asignar a cada elemento de $SU(n,1)$ un elemento de $U\left(A^2_\alpha\right)$, donde esto último denota el grupo (bajo la composición) de operadores unitarios sobre el espacio de Hilbert A^2_α.

Dado que dicho operador debe enviar una función de A^2_α a sí mismo, entonces, en particular, requerimos que envíe funciones holomorfas en funciones holomorfas, así, para garantizar esto último, antes de iniciar nuestra construcción, consideraremos el grupo cubriente universal $\widetilde{SU}(n,1)$, el cual es simplemente conexo (por definición de espacio cubriente universal), de este modo, esto nos permitirá realizar una extensión analítica, pero, más adelante veremos esto a detalle.

Consideremos la función cubriente $p : \widetilde{SU}(n,1) \to SU(n,1)$, donde, si $g \in \widetilde{SU}(n,1)$, entonces $p(g) \in SU(n,1)$, con p continua, sobreyectiva y homomorfismo.

Así, la manera natural de hacer actuar $\widetilde{SU}(n,1)$ sobre $\mathbb{B}_n$ es mediante la acción

$$\widetilde{SU}(n,1) \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$$

$$(g,z) \mapsto p(g)z \tag{3.0.1}$$

donde, tenemos el siguiente esquema

$$\widetilde{SU}(n,1) \times \mathbb{B}_n \to SU(n,1) \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n,$$

luego asignando en dicho esquema las funciones $H : \widetilde{SU}(n,1) \times \mathbb{B}_n \to SU(n,1) \times \mathbb{B}_n$ con $H = (p, Id)$, p la función cubriente que hemos estado empleando, Id la función identidad y $F : SU(n,1) \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$ la acción usual de $SU(n,1)$ sobre $\mathbb{B}_n$, tenemos que en el esquema anterior la asignación de $\widetilde{SU}(n,1) \times \mathbb{B}_n$ a $\mathbb{B}_n$ se sigue mediante la composición $F \circ H$, la cual es continua y sobreyectiva.

Además, dado que p es sobreyectiva, todo elemento $A \in SU(n,1)$ es de la forma $A = p(g)$ para un $g \in \widetilde{SU}(n,1)$, por lo tanto, la acción de $\widetilde{SU}(n,1)$ sobre $\mathbb{B}_n$ también es transitiva.

En Wallach (1979), se da la acción natural de $U(n)$ sobre el espacio A^2_α, la cual está dada por

$$A \circ f(z) = f\left(A^{-1}z\right).$$

Así, siguiendo esto como inspiración, definimos

$$\pi_\alpha : \widetilde{SU}(n,1) \to U\left(A^2_\alpha(\mathbb{B}_n)\right)$$

$$\pi_\alpha(g) = j\left(g^{-1}, z\right)^{\frac{\alpha+n+1}{n+1}} (\cdot)\left(g^{-1}z\right) \tag{3.0.2}$$

donde

$$\pi_\alpha(g) : A^2_\alpha \to A^2_\alpha$$

$$\pi_\alpha(g)(f) = j\left(g^{-1}, z\right)^{\frac{\alpha+n+1}{n+1}} f\left(g^{-1}z\right). \tag{3.0.3}$$

Notemos que la asignación (4.0.3) está bien definida, pues, si $g^{-1} = h^{-1}$, dado que p es función, entonces $p\left(g^{-1}\right) = p\left(h^{-1}\right)$, luego, tomando $z \in \mathbb{B}_n$, se tiene $p\left(g^{-1}z\right) = p\left(h^{-1}z\right)$, y, por lo tanto $j\left(g^{-1}, z\right) = \left(h^{-1}, z\right)$, donde $j\left(g^{-1}, z\right) = det\,(dp(g)z)$.

Si $\frac{\alpha+n+1}{n+1} \in \mathbb{Z}$, entonces $j\left(g^{-1}, z\right)^{\frac{\alpha+n+1}{n+1}}$ es holomorfa y, por ende, $\pi_\alpha(g)(f)$ es holomorfa, pero, en general esto no se tiene y bien, se puede dar el caso en que $\frac{\alpha+n+1}{n+1} \in \mathbb{R}$, por ello, consideremos lo siguiente.

Dados $(g_0, z_0) \in \widetilde{SU}(n,1) \times \mathbb{B}_n$, al ser $j\left(g^{-1}, z\right)$ holomorfa y no singular (pues, $det\left(p\left(g^{-1}\right)\right) = 1$), entonces, existe un abierto $U_0 \times V_0 \subseteq \widetilde{SU}(n,1) \times \mathbb{B}_n$ vecindad de (g_0, z_0) tal que $j\,(U_0 \times V_0) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, por lo tanto, podemos definir una rama de logaritmo, esto es

$$log\,(j(\cdot,\cdot))\,U_0 \times V_0 \to \mathbb{C}$$

es holomorfa, luego, la función $exp\left(\frac{\alpha+n+1}{n+1} log\left(j\left(g^{-1}, z\right)\right)\right) = j\left(g^{-1}, z\right)^{\frac{\alpha+n+1}{n+1}}$ es holomorfa en $U_0 \times V_0$.

Consideremos la curva $\gamma : [0,1] \to \widetilde{SU}(n,1) \times \mathbb{B}_n$ con punto inicial (g_0, z_0).

Sea

$$0 = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = 1$$

una partición del intervalo $[0,1]$. Sea D_i un disco que contiene al punto $\gamma\,(a_i)$. Dado que dichos discos son conjuntos conexos, tenemos que la intersección de dos de ellos también es conexa, luego, cubriremos dicha curva con los discos D_i, donde, dichos discos son de la forma $U_i \times V_i$, con U_i abierto en $\widetilde{SU}(n,1)$ y V_i abierto en $\mathbb{B}_n$.

Así, podemos definir una rama de logartimo en cada disco, donde, dichas ramas coinciden en las intersecciones, luego, tomando como rama de logaritmo inicial a la definida en $U_0 \times V_0$, se tiene que dicha rama está definida sobre toda la curva γ.

Luego, dado que $\widetilde{SU}(n,1)$ es simplemente conexo, entonces $\widetilde{SU}(n,1)\times\mathbb{B}_n$ es simplemente conexo, luego, podemos aplicar el principio de monodromía a $j\left(g^{-1},z\right)^{\frac{\alpha+n+1}{n+1}}$, concluyendo que podemos extender dicha función de manera analítica a todo $\widetilde{SU}(n,1)\times\mathbb{B}_n$, luego, la función $\pi_\alpha(g)(f)$ es holomorfa.

Además, $\pi_\alpha(g)$ en efecto es un operador unitario, pues, si $f,s\in A^2_\alpha$, entonces

$$\begin{aligned}\pi_\alpha(g)(f+s) &= j\left(g^{-1},z\right)^{\frac{\alpha+n+1}{n+1}} f+s\left(g^{-1}z\right)\\ &= j\left(g^{-1},z\right)^{\frac{\alpha+n+1}{n+1}} f\left(g^{-1}z\right)+j\left(g^{-1},z\right)^{\frac{\alpha+n+1}{n+1}} s\left(g^{-1}z\right)=\pi_\alpha(g)(f)+\pi_\alpha(g)(s),\end{aligned}$$

esto es, $\pi_\alpha(g)$ es lineal.

Recordemos que, si $D\subset\mathbb{C}^n$ y $F:D\to\mathbb{C}^n$ es holomorfa, entonces

$$det\left(J_{\mathbb{R}}F(z)\right)=\left|det\left(F'(z)\right)\right|^2$$

para $z\in D$, resultado clásico que puede ser visto, por ejemplo, en Range (1986), por lo tanto, por el Lema 2.1.7, tenemos

$$\left|j\left(g^{-1},z\right)\right|=\left|\left(p\left(g^{-1}\right)(z)\right)'\right|=\left(\frac{1-|a|^2}{|1-\langle z,a\rangle|^2}\right)^{\frac{n+1}{2}},$$

por lo tanto

$$\left|j\left(g^{-1},z\right)\right|^{\frac{2(\alpha+n+1)}{n+1}}=\left(\frac{1-|a|^2}{|1-\langle z,a\rangle|^2}\right)^{\alpha+n+1}$$

ahora, notamos que

$$\frac{\left(1-|a|^2\right)^{\alpha+n+1}}{|1-\langle z,a\rangle|^{2(\alpha+n+1)}}|f(z)|^2\frac{\left(1-|a|^2\right)^{\alpha+n+1}}{|1-\langle z,a\rangle|^{2(\alpha+n+1)}}=\left(\frac{\left(1-|a|^2\right)^{\alpha+n+1}}{|1-\langle z,a\rangle|^{2(\alpha+n+1)}}|f(z)|\right)^2$$

entonces, aplicando la proposición 3.1.10, la penúltima identidad en la prueba del Teorema 3.3.2 y lo anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}\|\pi_\alpha(g)(f)\|^2 &= \int_{\mathbb{B}_n}\left|j\left(g^{-1},z\right)\right|^{\frac{2(\alpha+n+1)}{n+1}}\left|f\left(g^{-1}z\right)\right|^2 dv_\alpha(z)\\ &= \int_{\mathbb{B}_n}\left(\frac{\left(1-|a|^2\right)^{\alpha+n+1}}{|1-\langle z,a\rangle|^{2(\alpha+n+1)}}|f(z)|\right)^2 dv_\alpha(z)=\|f\|^2,\end{aligned}$$

luego, se tiene que el operador $\pi_\alpha(g)$ es acotado, además, los cálculos anteriores, también nos dicen que dicho operador preserva el producto interior de A^2_α, pues $\pi_\alpha(g)$ es una isometría (preserva normas), luego

$$\begin{aligned}\langle \pi_\alpha(g)(f), \pi_\alpha(g)(h)\rangle_\alpha &= \int_{\mathbb{B}_n} \left| j\left(g^{-1}, z\right)\right|^{\frac{2(\alpha+n+1)}{n+1}} f\left(g^{-1}z\right)\overline{h(g^{-1}z)}\,dv_\alpha(z) \\ &= \langle f, h\rangle_\alpha,\end{aligned}$$

para $f, h \in A^2_\alpha$. La sobreyectividad también se da por los cálculos anteriores, pues vimos que la norma de un elemento en A^2_α coincide con la norma del elemento resultante tras hacer actuar el operador $\pi_\alpha(g)$ sobre dicho elemento, por lo tanto, podemos concluir que en efecto $\pi_\alpha(g)$ es un operador unitario.

Bibliografía

Folland, G. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (2 ed.). John Wiley & Sons, Inc. 34

Range, M. R. (1986). *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*. Springer Science & Business Media. 37, 50

Rudin, W. (1980). *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$. Springer Science & Business Media. 23, 24

Wallach, N. (1979). *The analytic continuation of discretes series I*. Transaction of the American Mathematical Society. 48

Zhu, K. (2005). *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*. Springer Science & Business Media. 11, 23, 24