Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

Índice de Conley

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con especialidad en

Matemáticas Básicas

P r e s e n t a:

Julián David Candela

Director de tesis:

Antonio Rieser

____

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto. primero, julio del 2020

Índice general

Agradecimientos: Agradezco a mi asesor Antonio Rieser, por todo el conocimiento y la ayuda brindada durante este año de trabajo.

Gracias al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), por la formación y el apoyo que recibí durante estos dos años. Agradezco también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico brindado con una beca de maestría sin la cual no hubiera sido posible esta meta.

Resumen: El índice de Conley se ha caracterizado por ser una excelente herramienta en el estudio de sistemas dinámicos, éste permite identificar conjuntos que poseen un conjunto invariante, $S \subset X$ en su interior, respecto de una función continua $f : X \to X$ o para un flujo $\phi(t, x)$.

La idea de este trabajo es presentar 2 teorías clásicas del índice de Conley, una para funciones y otra para flujos, y finalizar con una teoría mas reciente de éste para campos multivectoriales sobre complejos de Lefschetz

Introducción Algunos problemas en distintas áreas del conocimiento, como Física, Química, y Biología, pueden ser descritos por medio de sistemas dinámicos que dependen de parámetros, los cuales no pueden ser determinados con cierto grado de precisión. Para el estudio de estos sistemas es de gran importancia encontrar las propiedades que permanecen invariantes bajo pequeñas perturbaciones. Intentar encontrar maneras de enfrentar este tipo de problemas es lo que incentivó a crear la teoría del índice de Conley.

El índice de Conley es un invariante topológico definido para conjuntos aislados e invariantes para un sistema dinámico. La construcción original se debió a Charles Conley [14], ésta se enfocó en el estudio de flujos en espacios métricos compactos. Mas tarde, esta teoría fue generalizada por otros autores como Robbin, Salamon y Mrozek a sistemas dinámicos discretos e inlcuso a flujos multivaluados.

La teoría del índice de Conley permite encontrar conjuntos invariantes bajo un flujo analizando un entorno del espacio en el que se está trabajando. Esto permite localizar los conjutos invariantes de una manera sencilla sin necesidad hacer análisis demasiado profundos. La propiedad fundamental de esta teoría es que el índice y los entornos aislados son preservados bajo perturbaciones pequeñas. Así, el índice resulta ser invariante bajo homotopías siempre y cuando éstas cumplan ciertas condiciones.

1. Índice de Conley para tiempo Discreto

1.1. Introdución

El presente capítulo se centra en la definición y las propiedades del índice de Conley para un sistema dinámico discreto dado por un homeomorfismo $f : X \to X$, donde X es un espacio métrico localmente compacto (en particular X es Hausdorff).

Definición 1.1.1. Sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto, un *sistema dinámico discreto* ϕ sobre X es una función continua $\phi : \mathbb{Z} \times X \to X$ que satisface las siguientes propiedades

1. $\phi(n_0, \phi(n_1, x)) = \phi(n_0 + n_1, x)$ para todo $n_0, n_1 \in \mathbb{Z}^{n \geq 0}$.
2. $\phi(0, x) = x$ para todo $x \in X$.

Para $n \in \mathbb{Z}$, considere $\phi_n : X \to X$, $\phi_n(x) = \phi(n, x)$. Note que si se toma $f(x) = \phi_1(x)$, debido a que en un sistema dinámico discreto, se tiene que en general para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\phi(n, x) = f^n(x)$.
Si $N \subset X$, el "*subconjunto invariante*" de N está dado por:

$$Inv(N) = Inv(N, f) = \{x \in N : f^n(x) \in N, \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

Además, se dice que un conjunto $S \subset X$ es *invariante* si $Inv(S) = S$. Por otro lado, un conjunto compacto $N \subset X$ es llamado *entorno aislado* si $Inv(N) \subset Int(N)$. En este caso, llamamos a $S = Inv(N)$ un *conjunto aislado e invariante*.

1.2. Pares indexados

Definición 1.2.1. Sea N un *entorno aislado*, un par de conjuntos compactos $P = (P_1, P_2)$, $P_i \subset N$, es llamado un *par indexado* para N si:

1. (**Propiedad de aislamiento**) $Inv(N) \subset Int(P_1 \backslash P_2)$.
2. (**Invarianza positiva**) Si $x \in P_i$ y $f(x) \in N$, entonces $f(x) \in P_i$, $i = 1, 2$.

3. (**$\mathbf{P_2}$ es una salida para $\mathbf{P_1}$**) Si $x \in P_1$ y $f(x) \notin N$, entonces $x \in P_2$.

Como se verá mas adelante, el índice de Conley se define en términos de los pares indexados. Debido a esto es necesario probar que dicho par efectivamente existe para cualquier entorno aislado N. Para ello son necesarios algunos resultados técnicos

Definición 1.2.2. Sea $N \subset X$ un conjunto compacto. Definimos los conjuntos *Invariante positivo* e *Invariante negativo* de N como:

$$Inv^{-}(N) = \{x \in N : f^{n}(x) \in N, \forall n \in \mathbb{Z}^{-}\}$$
$$Inv^{+}(N) = \{x \in N : f^{n}(x) \in N, \forall n \in \mathbb{Z}^{+}\}$$

Proposición 1.2.3. Sea $N \subset X$ compacto, entonces los conjuntos $Inv(N), Inv^{-}(N)$ e $Inv^{+}(N)$ son cerrados y por lo tanto, compactos.

Demostración. Dado que N es compacto e $Inv(N) \subset N$, basta probar que $Inv(N)$ es cerrado. Para ello tome una sucesión $\{x_n\}_{\in\mathbb{N}} \subset Inv(N)$, tal que $x_n \to x$. Como f es una función continua, entonces $f(x_n) \to f(x)$, y en general, $f^m(x_n) \to f^m(x)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. Supongamos que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $f^m(x) \notin N$, entonces $f^m(x) \in X \backslash N$ y como N es compacto, en particular es cerrado (X es Hausdorff). Note entonces que, si tomamos $U = X\backslash N$, U es abierto pues N es cerrado al ser compacto. Así, como $f^m(x_n) \to f^m(x)$, debe existir $M > 0$ tal que $\forall n > M$, $f^m(x_n) \in U$. Esto es una contradicción pues $\forall n$, $x_n \in Inv(N)$, por lo tanto $f^m(x_n) \in N$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. La prueba es análoga para $Inv^{-}(N)$ y $Inv^{+}(N)$. $\square$

En adelante, nos centraremos en la contrucción de un par indexado P para cualquier entorno aislado N dado. La idea a seguir para construir dicho par será la siguiente: Se tomará como P_1 un entorno compacto A de $Inv^{-}(N)$ y como P_2 se tomará el conjunto $P_1 \backslash U$ para U un entorno abierto de $Inv^{+}(N)$. Los conjuntos P_1 y P_2 definidos anteriormente deberán ser agrandados para asegurar que se satisface la condición de invarianza positiva. Para ello será necesario definir cierta función mutivaluada y probar ciertas propiedades.

Definición 1.2.4. Sean X y Y espacios topológicos. Una función multivaluada $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ es una correspondencia que asocia a cada punto $x \in X$ un subconjunto

$F(x)$ de Y. Note en particular que si $A \subset X$, entonces $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$. Además, decimos que la función F es semicontinua por arriba si para todo $x \in X$ y todo abierto U de Y tal que $F(x) \subset U$, existe un entorno abierto V de x tal que $F(V) \subset U$.

Proposición 1.2.5. Sea $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ una función semicontinua por arriba tal que $F(x)$ es compacto para todo $x \in X$. Entonces, para todo compacto $K \subset X$, $F(K)$ es compacto en Y.

Demostración. Suponga que $K \subset X$ es compacto. Asuma que $\{U_\alpha\}_\alpha$ forman una cubierta abierta de $F(K)$. Sea $x \in K$, y considere el conjunto $A(x) = \{\alpha : F(x) \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$. Entonces, $\{U_\alpha : \alpha \in A(x)\}$ forman una cubierta abierta para $F(x)$, así, existen $n(x) \in \mathbb{Z}$ y $\alpha_1(x), ..., \alpha_{n(x)}(x) \in A(x)$ tal que $F(x) \subset \bigcup_{i=1}^{n(x)} U_{\alpha_i}(x)$. Ahora bien, para cada $x \in K$, sea $U_x = \bigcup_{i=1}^{n(x)} U_{\alpha_i}(x)$, claramente, $F(K) \subset \bigcup_x U_x$. Por otro lado, para cada U_x, existe un abierto V_x de X tal que $F(V_x) \subset U_x$ y se tiene además que $K \subset \bigcup_x V_x$. Como K es compacto, existen $x_1, ...x_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Así los U_{x_i} correspondientes cubren a $F(K)$. Por lo tanto, $\{U_\alpha\}_\alpha$ admite una subcubierta finita. $\square$

Considerando la definición anterior, para $x \in N$, definimos:

$$f_N{}^+(x) = \{y \in N : \exists j \in \mathbb{Z}^{n \geq 0}, y = f^j(x) \ y \ f^{[0,j]}(x) \subset N\}$$

Donde por el intervalo $[0, j]$ nos referimos al intervalo en $\mathbb{Z}$ es decir a $[0, j] \cap \mathbb{Z}$. Del mismo modo, por la notación $f^{[0,j]}(x) \subset N$, entendemos que

$$f^{[0,j]}(x) = \{f^0(x) = x, f^1(x), ..., f^j(x)\}$$

Esta notación será utilizada durante muchas de las demostraciones, por lo cual, siempre que se tenga que $j \in [0, n]$ para un parámetro que solo puede tomar valores enteros, entonces $[0, n] = [0, n] \cap \mathbb{Z}$.

Note que f_N^+ define una función multivaluada $f_N^+ : X \to \mathcal{P}(X)$. Usaremos os la función f_N^+ para definir el par indexado P. Sean A un entorno compacto de $Inv^-(N)$ y U es un entorno abierto de $Inv^+(N)$, vamos a definir los conjuntos P_i como: $P_1 = f_N{}^+(A)$ y $P_2 = f_N{}^+(P_1 \backslash U)$. Con el fin de demostrar que los conjuntos elegidos para formar el índice son efectivamente compactos se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.2.6. Sea N un entorno aislado para f. La función multivaluada $f_{N,n} : N \to \mathcal{P}(N)$, definida como:
$f_{N,n}(x) = \{y \in N : \exists j \in [0,n], y = f^j(x), f^{[0,j]}(x) \subset N, \forall j \in [0,n]\}$, es semicontinua por arriba para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Suponga que $f_{N,n}$ no es semicontinua por arriba. Entonces, existe $x \in N$ y un abierto U de N tal que $f_{N,n}(x) \subset U$ y una sucesión convergente $x_k \to x$, tal que $\{x_k\} \subset N$ y $f_{N,n}(x_k) \not\subset U$. Por lo tanto, para todo k, existe un entero $m_k \in [0,n]$ tal que $f^{m_k}(x_k) \in N \backslash U$. Por otro lado, como los $\{m_k\}$ es una sucesión acotada de enteros, debe existir un entero $m \in [0,n]$ una subsucesión $m_{k_j} = m$ para todo j. Por lo tanto, por continuidad, $f^m(x) \notin U$, pues $N \backslash U$ es cerrado en N. Esto es una contradicción pues $f_{N,n}(x) \subset U$. $\square$

Note que, en el caso en que $x \notin Inv^+(N)$, la siguiente expresión resulta ser finita

$$f_N{}^+(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f_{N,n}(x)$$

Además se tiene el siguiente lema:

Lema 1.2.7. Sea $K \subset N$ un subconjunto compacto de X tal que $K \cap Inv^+ N = \emptyset$. Entonces:

1. Existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $n > m$, $f_{N,n}(K) = \emptyset$.
2. La función multivaluada f_N^+ restringida a K es semicontinuo por arriba.
3. $f_N^+(K) \cap Inv^+ N = \emptyset$.

Demostración. 1. Sea $x \in K$, entonces $x \notin Inv^+(N)$. Así para cada $x \in K$ existe un $n_x \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f_{N,n_x}(x) = \emptyset$. Como f_{N,n_x} es semicontinua por arriba, existe un entorno abierto V_x de x tal que $f_{N,n_x}(V_x) = \emptyset$. Como K es compacto, K pede ser cubierto por una cantidad finita de los $\{V_x\}_{x\in K}$. Sea $\{V_{x_1}, ..., V_{x_k}\}$ un cubrimiento finito de K y tome:

$$m = max\{n_{x_i} : i = 1, 2, ..., k\}$$

Entonces $f_{n,N}(K) = \emptyset$, para todo $n \geq m$.

2. Por el apartado anterior, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $n > m$, $f_{N,n}(K) = \emptyset$. Sea $x \in K$, entonces existe y considere un abierto U de N tal que $f_N^+(x) \subset U$, entonces $\bigcup_{n=0}^{\infty} f_{N,n}(x) = \bigcup_{n=0}^{m} f_{N,n}(x) \subset U$. Note que como las funciónes $f_{N,n}$ son semi continuas por arriba, para todo $n \in [0, m]$, existe V_n abierto de N tal que $x \in V_n$ y $f_{n,N}(V_n) \subset U$. Ahora, considere $V = \bigcap_{n=0}^{m} V_n \cap K$. Entonces: $x \in V$, V es un abierto en K y ${f_N}^+(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f_{N,n}(V) = \bigcup_{n=1}^{m} f_{N,n}(V) \subset \bigcup_{n=1}^{m} f_{N,n}(V_n) \subset U$.

3. Note que si $y \in f_N^+(K)$, entonces existen $x \in K$ y $j \in \mathbb{Z}$ tal que $y = f^j(x)$ y $f^{[0,j]}(x) \subset N$, en particular $f^0(x) = x \in N$. Por otro lado, si $y \in Inv^+(N)$, entonces $f^n(y) \in N$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Note entonces que $x \in Inv^+(N)$ pues $f^{[0,j]}(x) \subset N$ y como $f^{n+j}(x) = f^n(f^j(x)) = f^n(y) \in N, \forall n$. Entonces, para todo $m \in \mathbb{Z}$, $f^m(x) \in N$. Esto es una contradicción pues: $K \cap Inv^+N = \emptyset$.

$\square$

Lema 1.2.8. Sea N un entorno aislado y A un conjunto compacto tal que $Inv^-(N) \subset A \subset N$. Entonces ${f_N}^+(A)$ es compacto.

Demostración. Basta mostrar que ${f_N}^+(A)$ es cerrado. Sea $\{y_k\}$ una sucesión de puntos en ${f_N}^+(A)$ tal que $y_k \to y \in N$. Note que para cada y_k, existe $x_k \in A$ y $n_k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $y_k = f^{n_k}(x_k)$ y $f^{[0,n_k]}(x_k) \subset N$. Analicemos la demostración por casos:

Caso 1: La sucesión de los n_k es acotada y por lo tanto existe $l \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n_k \in [0, l]$, para todo k. Como $\{n_k\}$ es un subconjunto cerrado y discreto de un compacto, entonces debe ser finito y por lo tanto $\{n_k\}$ tiene una subsucesión constante. Asuma entonces que $n_k = n$ para todo k, como tanto N como A son compactos, entonces por continuidad, $y = f^n(x)$ y $f^{[0,n]}(x) \subset N$, por lo tanto $y \in {f_N}^+(A)$.

Caso 2: La sucesión de los n_k es no acotada, por lo tanto tiene una subsucesión creciente sin pérdida de generalidad, suponga $n_k = k$. Así, para todo $m \in \mathbb{Z}^-$ y casi todo $k \in \mathbb{Z}^+$, $f^m(y_k) \in N$. Efectivamente, sea $m \in \mathbb{Z}^-$ fijo, como $y_k = f^k(x_k)$, entonces $f^m(y_k) = f^{k+m}(x_k) \in N$ siempre que $k+m \in [0,k]$. Note entonces que basta elegir k tal que $0 < k+m$. Es decir, que la propiedad se cumple salvo para una cantidad finita de k's. Por lo tanto $f^m(y) \in N$. Luego, $y \in Inv^-(N) \subset A$. $\square$

Retomando la construcción del par indexado $P = (P_1, P_2)$. Considere

$$f_N{}^+(x) = \{y \in N : \exists j \in \mathbb{Z}^{n \geq 0}, y = f^j(x) \ y \ f^{[0,j]}(x) \subset N\}$$

y sean $P_1 = f_N{}^+(A)$ y $P_2 = f_N{}^+(P_1 \backslash U)$, donde A es un entorno compacto de $Inv^-(N)$ y U es un entorno abierto de $Inv^+(N)$. Note que P_2 es compacto pues para todo $x \in K$, $f_N^+(x)$ es finito (y por lo tanto compacto) pues $x \notin Inv^+(N)$. Así, por la Proposición 1.2.5, P_2 es también compacto.
Así, se tiene un par indexado $P = (P_1, P_2)$ de compactos, bastaría verificar que P_1 y P_2 satisfacen las propiedades necesarias para ser un par indexado o que al menos, A y U pueden ser elegidos de modo que el par $P = (P_1, P_2)$ satisfaga las propiedades requeridas.

Teorema 1.2.9. El par $P = (f_N{}^+(A), f_N{}^+(P_1 \backslash U))$, donde U es un entorno abierto de $Inv^+(N)$ y A es un entorno compacto de $Inv^-(N)$, satisface la propiedad de **Invarianza positiva**.

Demostración. Note que si $x \in P_1 = f_N{}^+(A)$ y $f(x) \in N$, entonces existe $a \in A$ tal que $x = f^n(a)$ y $f^{[0,n]}(a) \subset N$, para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Así, como $f(x) = f^{n+1}(a) \in N$, entonces $f(x) \in f_N{}^+(A) = P_1$. Análogamente, si $x \in P_2 = f_N{}^+(P_1 \backslash U)$ y $f(x) \in N$, entonces existe $a \in P_1 \backslash U$ tal que $x = f^n(a)$ y $f^{[0,n]}(a) \subset N$, para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Por lo tanto, $f(x) \in P_2$. $\square$

El siguiente lema será necesario para demostrar la propiedad de salida del par indexado P.

Lema 1.2.10. Sea $N \subset X$ compacto. Entonces, para todo entorno abierto V de $Inv^-(N)$, existe un entorno compacto A de $Inv^-(N)$ tal que $f_N{}^+(A) \subset V$.

Demostración. Sea V un entorno abierto de $Inv^-(N)$. Para $n \in \mathbb{N}$, considere

$$f_{N,-n}(x) = \{y \in N : \exists j \in [-n, 0], y = f^j(x) \ y \ f^{[j,0]}(x) \subset N\}$$

Note que el conjunto $K = N \backslash V$ es tal que $K \cap Inv^-(N) = \emptyset$. De manera análoga a la demostración del Lema 1.2.7 se muestra que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_{N,-m}(N \backslash V) = \emptyset$ y del mismo modo, que $f_{N,-m}$ es semicontinua por arriba. Considere ahora $x \in Inv^-(N) \subset V$, como V es abierto, y $f_{N,-m}$ es semicontinua por arriba, entonces existe B entorno abierto de x en N tal que $f_{N,-m}(B) \subset V$. Así, dado que X es localmente compacto, achicando el abierto B podemos asegurar que para todo $x \in Inv^-(N)$, existe un entorno compacto K_x tal que $f_{N,-m}(K_x) \subset V$. Entonces, dado que $Inv^-(N)$ es compacto, existe un cubrimiento finito de $Inv^-(N)$ dado por $\{K_{x_1}, ..., K_{x_k}\}$. Sea $A = \cup_{i=1}^k K_{x_i}$. Entonces A es un entorno compacto de $Inv^-(N)$ tal que $f_{N,-m}(A) \subset V$. Ahora bien, si $y \in {f_N}^+(A)$, entonces existe $n > 0$ y $x \in A$ tal que $y \in f_{N,n}(x)$. Si $n > m$, entonces $x \in f_{N,-m}(y)$, por lo tanto $y \notin N \backslash V$, así $y \in V$. Por otro lado, si $n \leq m$, note que $y = f^0(y)$ y además $f^{[-n,0]}(y) = f^{[-n,0]}(f^n(x)) = f^{[0,n]}(x) \in N$, por lo tanto $y \in f_{N,-m}(N) = f_{N,-m}(V)$ pues $f_{N,-m}(N \backslash V) = \emptyset$. Así, $y \in V$. $\square$

Teorema 1.2.11. Existen A un entorno compacto de $Inv^-(N)$ y U un entorno abierto de $Inv^+(N)$ tal que el par $P = ({f_N}^+(A), {f_N}^+(P_1 \backslash U))$ satisface la propiedad de **conjunto de salida**.

Demostración. Note que mostrar la propiedad de P_2 es un conjunto de salida para P_1 es equivalente a demostrar que $P_1 \backslash P_2 \subset f^{-1}(N)$. Ahora bien , como el conjunto $Inv(N)$ es invariante bajo f, es de esperarse que los puntos cercanos a $Inv(N)$ no puedan ser mapeados por fuera de N. Así, si se eligen A y U de tal forma que $P_1 \backslash P_2$ es cercano a $Inv(N)$, la propiedad estaría garantizada. Note además que dado un entorno abierto W de $Inv(N)$ tal que , $Inv(N) \subset W \subset Int(N)$, existen entornos abiertos U de $Inv^+(N)$ y V de $Inv^-(N)$ tal que $U \cap V \subset W$ pues $Inv(N) = Inv^+(N) \cap Inv^-(N)$. Entonces, note que $P_1 \backslash U \subset {f_N}^+(P_1 \backslash U) = P_2$. Lo anterior se deduce del hecho que si $y \in P_1 = {f_N}^+(A)$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in A$ tal que $y = f^n(x)$ y $f^{[0,n]}(x) \subset N$. Note entonces que para todo $0 \leq m < n$, $f^m(x) \in {f_N}^+(A)$ pues $f^0(f^m(x)) = f^m(x) \in N$, en particular, $x \in {f_N}^+(A)$. Por lo tanto, si $y \in {f_N}^+(A) \backslash U$, entonces como $y = f^n(x) \in N$, $y = f^0(y) \in {f_N}^+({f_N}^+(A) \backslash U)$. Se concluye entonces que $P_1 \backslash U \subset f_N{}^+(P_1 \backslash U) = P_2$, lo cual implica que $P_1 \backslash P_2 \subset U$. Finalmente, gracias al Lema anterior, es posible elegir A de modo que $f_N{}^+(A) \subset V$, lo cual permite garantizar que $P_1 \backslash P_2 \subset W$ pues $P_1 \subset V$ y $P_1 \backslash P_2 \subset U$. Así, $P_1 \backslash P_2 \subset W \subset f^{-1}(N)$ y por lo tanto la propiedad de invarianza positiva queda demostrada. □

Teorema 1.2.12. El par $P = (f_N{}^+(A), f_N{}^+(P_1 \backslash U))$ del Teorema anterior satisface la propiedad de **Propiedad de aislamiento**.

Demostración. Finalmente, para terminar de comprobar que el par $P = (P_1, P_2)$ es efectivamente un par indexado, es necesario ver que $Inv(N) \subset Int(P_1 \backslash P_2)$. Como P_1 es un entorno de $Inv^-(N)$ y $N \backslash P_2$ es un entorno de $Inv^+(N)$ (Lema 1.2.7). Entonces, $P_1 \backslash P_2 = P_1 \cap (N \backslash P_2)$ es un entorno de $Inv^-(N) \cap Inv^+(N) = Inv(N)$. Por lo tanto: $Inv(N) \subset Int(N) \subset Int(P_1 \backslash P_2)$. □

Finalmente, presentamos el teorema de existencia de los pares indexados:

Teorema 1.2.13. Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo, $N \subset X$ un entorno aislado para f y W un entorno abierto de $Inv(N)$ en X. Entonces existe un par indexado P para N con $P_1 \backslash P_2 \subset W$. En particular, siempre es posible encontrar un par indexado P para todo entorno aislado N.

Demostración. Considere $\hat{W} = W \cap Int(N)$, entonces $\hat{W}$ es un abierto tal que $Inv(N) \subset \hat{W} \subset Int(N)$. El procedimiento descrito por los Teoremas 1.2.9, 1.2.11 y 1.2.12, nos permite encontrar un par indexado P tal que $P_1 \backslash P_2 \subset \hat{W}$ y por lo tanto, también $P_1 \backslash P_2 \subset W$. □

Dado un par indexado $P = (P_1, P_2)$, note que el par $\hat{P} = (P_1, P_1 \cap P_2)$ satisface todas las propiedades requeridas para ser un par indexado. Así, en adelante siempre se considerará que para un par indexado $P = (P_1, P_2)$, $P_2 \subset P_1$. Además, diremos que $P = (P_1, P_2)$ es un par indexado para un conjunto aislado e invariante S, si P es un par indexado para el entorno aislado N tal que $S = Inv(N)$. Introducimos esta notación debido a que se espera que el índice de Conley dé información sobre el conjunto S independientemente del entorno aislado N elegido.

Considere el espacio topológico punteado $(P_1/P_2, [P_2])$ dotado de la topología cociente. Dicho espacio es obtenido del espacio $P_1 \cup P_2$, al colapsar los puntos de P_2 a un solo punto. Por simplicidad, se denotará como $(P_1/P_2, *)$, donde $* = [P_2]$. Hasta este punto, se ha recreado la estructura que será usada para definir el índice de Conley para tiempo continuo (véase Capítulo 2), el cual será defnído como el tipo de homotopía del conjunto $(P_1/P_2, *)$. Sin embargo, como se verá en el siguiente ejemplo, para el caso del índice con tiempo discreto, este espacio no puede ocupar el rol de índice.

Ejemplo 1.2.14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$ y $S = \emptyset$. Sea $N = [0, 2]$, entonces $Inv(N) = \emptyset$, debido a que N es acotado. Considere además a $P_1 = [0, 2]$ y $P_2 = [1, 2]$, verifiquemos que $P = (P_1, P_2)$ es un par indexado para N.

1. Claramente P_1 y P_2 son compactos y están contenidos en N.
2. **Propiedad de aislamiento**, $Inv(N) = \emptyset \subset Int(P_1 \backslash P_2)$.
3. **Invarianza positiva** Note que si $x \in P_1$ y $f(x) \in N = P_1$, entonces claramente $f(x) \in P_1$. Por otro lado, si $x \in P_2$ y $f(x) \in N$, entonces $x = 1$ y $f(1) = 2 \in P_2$.
4. **Conjunto de salida** Si $x \in P_1$ y $f(x) \notin N$, entonces $x \in (1, 2] \subset P_2$.

Por otro lado, considere $N' = [0, 2] \cup \{-1\}$, $Q_1 = N'$ y $Q_2 = [0, 2]$. Se omite la verificación de que $Q = (Q_1, Q_2)$ es un par indexado ya que es análoga a la de $P = (P_1, P_2)$. Sin embargo, los espacios $(P_1/P_2, *)$ y $(Q_1/Q_2, *)$ no son topológicamente equivalentes pues uno es conexo y el otro no.

El ejemplo anterior motiva definir una función que permitirá definir cuando dos pares indexados deberán dar lugar al mismo índice de Conley.

Definición 1.2.15. Dado un par indexado $P = (P_1, P_2)$, se define la *función índice* $f_P : (P_1/P_2, *) \to (P_1/P_2, *)$ como:

$$f_P([x]_P) = \begin{cases} [f(x)]_P & \text{si } x \in f^{-1}(P_1) \\ * & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1.1}$$

Es necesario verificar que la función índice está bien definida, para ello es necesario ver que si se toman dos elementos $x, y \in P_2$, tienen la misma imagen bajo la función f_P. Note que, si $x, y \in P_2$ se tienen 4 posibilidades.

1. $f(x), f(y) \in N$, entonces por la invarianza positiva, $f(x), f(y) \in P_2$.

2. $f(x) \in N$ y $f(y) \notin N$, entonces por la invarianza positiva, $f(x) \in P_2$ y como $f(y) \notin N$, entonces $f(y) \notin P_1$, por lo tanto ambos tienen la misma imagen bajo f_P.

3. $f(y) \in N$ y $f(x) \notin N$ (análogo al anterior).

4. $f(x), f(y) \notin N$, entonces $f(x), f(y) \notin P_1$ y se tiene lo deseado.

Proposición 1.2.16. La función índice f_P es continua.

Demostración. Sea U abierto en $(P_1/P_2, *)$ y $q : P_1 \to P_1/P_2$ la aplicación cociente. Como q es una apliacón cociente, V es abierto en P_1 si y solo si $q(V)$ es abierto en $(P_1/P_2, *)$. Entonces, $q^{-1}(U)$ es abierto en P_1. Por otro lado, como f es continua $f^{-1}(q^{-1}(U))$ es abierto en P_1 y así $q(f^{-1}(q^{-1}(U)))$ es abierto en $(P_1/P_2, *)$. Finalmente, como $f_P = q \circ f \circ q^{-1}$, entonces f_P es continua. □

Debe ser claro que dados dos pares indexados $P = (P_1, P_2)$ y $Q = (Q_1, Q_2)$ ambos definen funciones continuas f_P y f_Q. Con la intención de definir el índice de Conley es necesario encontrar una manera de relacionar dichas funciones, ya que se espera que independientemente del par indexado que se haya usado, el índice sea el mismo.
El siguiente resultado será de utilidad mas adelante:

Lema 1.2.17. Sean $F : I \times X \to X$ una homotopía de homeomorfismos entre $f_0 = F(0, x)$ y $f_1 = F(1, x)$ y $P = (P_1, P_2)$ un par indexado que funciona para toda $(f_\lambda)_P$. Entonces, $(f_0)_P$ y $(f_1)_P$ son homótopas.

Demostración. Sea $f_\lambda = F(\lambda, x)$ para todo $\lambda \in I$ y considere la función $G(\lambda, x) = (f_\lambda)_P$ formada por las funciones indexadas inducidas por cada f_λ. Note que G es continua y satisface que $G(0, x) = (f_0)_P(x)$ y $G(1, x) = (f_1)_P$, por lo tanto G es una homotopía. □

1.3. El Índice de Conley

En esta sección se introduce la definición de "funtor normal" sobre una categoría , la cual permitirá definir el índice de Conley y probar que éste solo depende del conjunto aislado e invariante S.

Dada una categoría $\mathcal{C}$, considere la categoría $Endo(\mathcal{C})$ cuyos objetos son pares $(A, a) \in \mathcal{C}$, donde $A \in \mathcal{C}$ y $a \in \mathcal{C}(A, A)$ es un endomorfismo. Además la colección de morfismos de (A, a) a (B, b) es el subconjunto de $\mathcal{C}(A, B)$ que consta de los morfismos $\phi \in \mathcal{C}(A, B)$ tales que $b\phi = \phi a$. Note en particular que para todo par $(A, a) \in \mathcal{C}$, $a : (A, a) \to (A, a)$ es un morfismo en $Endo(\mathcal{C})$. Así, se tiene la siguiente definición:

Definición 1.3.1. Sea $\mathcal{K}$ una categoría y $L : Endo(\mathcal{C}) \to \mathcal{K}$ un funtor. Se dice que L es un funtor *normal* si $L(a)$ es un isomorfismo en $\mathcal{K}$ para todo endomorfismo $a : (A, a) \to (A, a)$ en $Endo(\mathcal{C})$.

Teorema 1.3.2. Si $L : Endo(\mathcal{C}) \to \mathcal{K}$ es un funtor normal y $\phi(A, a) \to (B, b)$ y $\psi : (B, b) \to (A, a)$ tales que $a = \psi\phi$ y $b = \phi\psi$, entonces el siguiente diagrama conmuta en $\mathcal{K}$ y todos los morfismos resultan ser isomorfismos.

$$\begin{tikzcd}
L(A,a) \arrow[r, "L(a)"] \arrow[d, "L(\phi)"'] & L(A,a) \arrow[d, "L(\phi)"] \\
L(B,b) \arrow[r, "L(b)"'] \arrow[ur, "L(\psi)"'] & L(B,b)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Claramente el diagrama es conmutativo pues a y b son endomirfismos y $b\phi = \phi a$. Como $a = \psi\phi$ y L es un funtor, entonces $L(a) = L(\psi)L(\phi)$ y esto implica que $L(a)^{-1}L(\psi)L(\phi) = Id_{L(A,a)}$. Análogamente, $b = \phi\psi$, implica que $L(\phi)L(\psi)L(b)^{-1} = Id_{L(B,b)}$. Por lo tanto, $L(\phi)$ es un isomorfismo. Análogamente se prueba que $L(\psi)$ es un isomorfismo. $\square$

Antes de seguir mas adelante y dar a a conocer la categoría sobre la cual estaremos trabajando, es necesario probar que efectivamente siempre es posible construir un funtor normal, pues estos serán necesarios para la definición del Índice de Conley. Con la intención de construir un funtor normal $L : Endo(\mathcal{C}) \to \mathcal{K}$, vamos a construir una categoría $\mathcal{K}$ a partir de $Endo(\mathcal{C})$ de modo que todo morfismo $e : (E, e) \to (E, e)$

sea un isomorfismo. Supongamos entonces que existiera un morfismo $\hat{e}$ que fuera el inverso de e y veamos qué debería satisfacer. Si $\phi : (E, e) \to (F, f)$ es un morfismo en $Endo(\mathcal{C})$, entonces $\phi \circ e = f \circ \phi$, lo que en particular implica que $\hat{f} \circ \phi = \phi \circ \hat{e}$. Para preservar la estructura de categoría necesitamos que para toda sucesión $\{\phi\}_{i=1}^{n}$ de morfismos $\phi_i : (E_{i-1}, e_{i-1}) \to (E_i, e_i)$ y toda secuencia $\{k_i\}_{i=0}^{n}$ de números naturales, la composición:

$$\hat{e_n}^{k_n} \circ \phi_n \circ \hat{e}_{n-1}^{k_{n-1}} \circ ... \circ \phi_1 \circ \hat{e_0}^{k_0}$$

esté también dentro de la categoría. Sin embargo, si consideramos la igualdad, $\hat{f} \circ \phi = \phi \circ \hat{e}$, aplicada a las funciones ϕ, obtenemos la igualdad $\hat{e_i} \circ \phi_i = \phi_i \circ \hat{e}_{n-1}$. Esta última aplicada a la expresión anterior es quivalente a:

$$\phi_n \circ \hat{e}_{n-1}^{k_n} \circ \hat{e}_{n-1}^{k_{n-1}} \circ ... \circ \phi_1 \circ \hat{e_0}^{k_0} = \phi_n \circ \hat{e}_{n-1}^{k_n + k_{n-1}} \circ ... \circ \phi_1 \circ \hat{e_0}^{k_0}$$

Por lo tanto, luego de una cantidad finita de iteraciones se obtiene:

$$\phi_n \circ \hat{e}_{n-1}^{k_n} \circ \hat{e}_{n-1}^{k_{n-1}} \circ ... \circ \phi_1 \circ \hat{e_0}^{k_0} = \phi_n \circ \phi_{n-1} \circ ... \circ \phi_1 \circ \hat{e_0}^{n_k + n_{k-1} + ... + n_0}$$

Así, basta añadir a la categoría los morfismos de la forma $\phi \circ \hat{e}^m$, para cualquier morfismo $\phi : (E, e) \to (F, f)$ y cualquier $n$úmero natural m. Por otro lado, note que el morfismo $\hat{e}$ está únicamente determinado por el morfismo ϕ (Una vez fijado ϕ, el elemento que hay que añadir es el inverso del endomorfismo asociado al dominio de ϕ). Por lo anterior, es natural identificar el morfismo $\phi \circ \hat{e}^m$ con el par (ϕ, m). Note entonces que dados dos morfismos (ϕ, k) y (ψ, l) es natural definir su composición como:

$$(\psi, l) \circ (\phi, k) = (\psi \circ \phi, k + l)$$

Para $\phi : (E, e) \to (F, f)$, $\psi : (F, f) \to (G, g)$, $k, l \in \mathbb{N}$. Sin embargo, podría pasar que para $\phi, \phi' : (E, e) \to (F, f)$, se tenga que:

$$\phi \circ \ e^{m'+k} = \phi' \circ e^{m+k}$$

para $m, m', k \in \mathbb{N}$, en ese caso al componer a ambos lados por $\hat{e}^{-m+m'+k}$, se tiene que:

$$\phi \circ \hat{e}^m = \phi' \circ \hat{e}^{m'}$$

es decir que $(\phi, m) = (\phi', m')$. Teniendo en cuenta lo anterior, introducimos una relación de equivalencia R sobre $Hom(\mathcal{C})((E,e),(F,f))$ (los morfismos de (E,e) a (F,f) en la categoría $Endo(\mathcal{C})$) dada por: $(\phi, m) \sim (\phi', m')$ siempre que exista $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\phi \circ \; e^{m'+k} = \phi' \circ e^{m+k}.$$

Definición 1.3.3. Se define la *categoría de Szymezak* de endomorfismos de $\mathcal{C}$ denotada como $Szym(\mathcal{C})$ como la categoría cuyos objetos son los mismos que los objetos de la categoría $Endo(\mathcal{C})$ y cuyos morfismos en $Szym((E,e),(F,f))$ son clases de equivalencia bajo la relación R.

Note que la definición de la composición respeta las clases de equivalencia. Por otro lado, el morfismo identidad para (E,e) está dado por la clase $[Id_E, 0]$. Además note que en esta nueva categoría, el morfismo $e : (E,e) \to (E.e)$ posee un inverso dado por la clase $\hat{e} = [Id_E, 1]$, efectivamente:

$$e \circ \hat{e} = [e, 0] \circ [Id_E, 1] = [e, 1] = [Id_E, 0] = Id_{(E,e)}$$

note que $[e, 1] = [Id_E, 0]$ pues tomando $\phi = e, \phi' = Id_E, m = 1$ y $m' = 0$ y k=1:

$$\phi \circ \; e^{m'+1} = e \circ \; e = e^{1+1} = Id_E \circ e^{1+1} = \phi' \circ e^{m+1}$$

Finalmente, considere el funtor $Szym : Endo(\mathcal{C}) \to Szym(\mathcal{C})$, entonces por lo anterior si $e : (E,e) \to (E,e)$ es un morfismo en $Endo(\mathcal{C})$, entonces $Szym(e)$ es invertible en $Szym(Endo(\mathcal{C}))$ y por lo tanto es un isomorfismo. Así, $Szym : Endo(\mathcal{C}) \to Szym(Endo(\mathcal{C}))$ es un fucntor normal. Algunos detalles de la construcción del funtor normal fueron omitidos debido a que pese a que se quería ilustrar que siempre es posible encontrar un functor normal, nuestro objetivo principal es el Índice de Conley. Para más detalles sobre la construcción véase [4].

Ya demostrado que siempre es posible construir un funtor normal, pasamos a definir el Índice de Conley sobre la categoría de los espacios métricos compactos.

Sea $Comp_*$ la categoría de los espacios métricos compactos punteados y $HComp_*$ la categoría homotópica de los espacios métricos punteados (Esta última formada a partir de la anterior identificando dos morfismos si estos son homotópicos). Además, considere el funtor $Htp : Comp_* \to HComp_*$ el cual fija los objetos y envía un morfismo que preserva el punto base $\phi : X \to Y$ a $[\phi]$, donde $[\phi]$ representa la clase de homotopía de la función ϕ.

Definición 1.3.4. Sea $L : Endo(Hcomp_*) \to \mathcal{K}$ un funtor normal y S un conjunto aislado e invariante, N un entorno aislado de S y P un par indexado para N. Se define el *Índice de Conley homotópico* $Con(S, f)$ como: $Con(S, f) = Con(N, f) = L(P_1/P_2, [f_p])$.

El siguiente teorema afirma que el índice de Conley solo depende del conjunto aislado e invariante S. Antes de realizar la prueba serán necesarios algunos resultados.

Teorema 1.3.5. Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo, $N \subset X$ un entorno aislado para f , $S = Inv(N)$ y P un par indexado para N entonces: $Con(S, f) = Con(N, f) = L(P_1/P_2, [f_p])$ es independiente de la elección de N y P

Note que si los pares indexados P y Q vienen dados por el mismo entorno aislado N y no están muy alejados entre ellos, en particular si $f(Q_i) \cap N \subset P_i$, $i = 1, 2$, es posible definir una función $f_{PQ} : (Q_1 \backslash Q_2, *) \to (P_1 \backslash P_2, *)$ dada por

$$f_{PQ}([x]_Q) = \begin{cases} [f(x)]_P & \text{si } x \in f^{-1}(N) \\ * & \text{si } x \in Q_2 \cup * \end{cases}$$

Lema 1.3.6. Asuma que P y Q son pares indexados para un entorno aislado N tal que $P \subset Q$ ($P_i \subset Q_i$) y $f(Q_i) \cap N \subset P_i$, $i = 1, 2$. Si $L : Endo(Hcomp_*) \to \mathcal{K}$ es un funtor normal, entonces $L([f_{PQ}])$ es un isomorfismo en $\mathcal{K}$.

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 1.3.2 y del siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} P_1/P_2 \arrow[r, "f_P"] \arrow[d, "i_{PQ}"'] & P_1/P_2 \arrow[d, "i_{PQ}"] \\ Q_1/Q_2 \arrow[r, "f_Q"'] \arrow[ur, "f_{QP}"'] & Q_1/Q_2 \end{tikzcd}$$

$\square$

Lema 1.3.7. Sean $P \subset Q$ pares indexados para un entorno aislado N los cuales difieren a lo mas en una coordenada (es decir que $P_1 = Q_1$ o $P_2 = Q_2$), y $G(P,Q) = (G_1, G_2)$, donde

$$G_i = P_i \cup (f(Q_i) \cap N), \text{ para } i = 1, 2.$$

Entonces

1. Si $P_i = Q_i$, entonces $G_i = P_i = Q_i$, para $i = 1, 2$.
2. $P \subset G(P,Q) \subset Q$.
3. $G(P,Q)$ es un par indexado.
4. $f(Q_i) \cap N \subset G_i$, para $i = 1, 2$.

Demostración. 1. Es obvio por la invarianza positiva de los pares P y Q.

2. Claramente $P \subset G$. Por otro lado, $G = P_i \cup (f(Q_i) \cap N) \subset Q_i \cup Q_i = Q_i$, pues $P \subset Q$ y $f(Q_i) \cap N \subset Q$ por la propiedad de Invarianza positiva del par indexado Q.

3. Veamos que $G(P,Q)$ es un par indexado. Claramente, los G_i son compactos pues P_i, Q_i y N lo son. Además, por la propiedad 2, $G_i \subset Q_i \subset N$.

   a) **Invarianza positiva**: "$x \in G_i$, $f(x) \in N$, entonces $f(x) \in G_i$":
   Sea $x \in G_i = P_i \cup (f(Q_i) \cap N)$ y $y = f(x) \in N$, note que si $x \in P_i \subset Q_i$, como $f(x) \in N$ por hipótesis, entonces $f(x) \in P_i \subset G_i$ por la invarianza positiva de P. Por otro lado, si $x \in f(Q_i) \cap N$, entonces existe $z \in Q_i$ tal que $f(z) = x$ y $x \in N$. Por lo tanto, $x \in Q_i$ por la invarianza positiva de Q_i, entonces $f(x) \in f(Q_i)$ y $y = f(x) \in N$, así $f(x) \in f(Q_i) \cap N$.

b) **Conjunto de salida**:"$x \in G_1$, $f(x) \notin N$, entonces $x \in G_2$":

Note que $G_1 \backslash G_2 \subset Q_1 \backslash G_2 \subset Q_1 \backslash P_2$ y como P y Q difieren a lo mas en una coordenada, entonces:

$Q1 \backslash P_2 = Q_1 \backslash Q_2 \subset f^{-1}(N)$ o $Q1 \backslash P_2 = P_1 \backslash P_2 \subset f^{-1}(N)$, por la propiedad del conjunto de salida de P y Q.

c) **Propiedad de aislamiento**: "$Inv(N) \subset Int(G_1 \backslash G_2)$":

$Inv(N) \subset Int(P_1 \backslash P_2) \cap Int(Q_1 \backslash Q_2)$, entonces, basta probar que $(P_1 \backslash P_2) \cap (Q_1 \backslash Q_2) \subset G_1 \backslash G_2$. Si $y \in (P_1 \backslash P_2) \cap (Q_1 \backslash Q_2)$, entonces $y \in P_1 \subset G_1$. Supongamos entonces que $y \in G_2 = P_2 \cup (f(Q_i) \cap N)$, entonces $y \in (f(Q_i) \cap N)$, pero entonces por la propiedad de invarinza positiva de Q, $y \in Q_2$, lo cual es una contradicción.

4. Obvio por la definición de G.

□

Lema 1.3.8. Sea $P \subset Q$ pares indexados que difieren a lo mas en una coordenada, entonces exite $n \in \mathbb{N}$ y una sucesión de pares $\{Q^k = (Q_1^k, Q_2^k)\}_{k=0}^n$:

$$P = Q^n \subset Q^{n-1} \subset ... \subset Q^1 \subset Q^0 = Q$$

tales que:

1. Si $P_i = Q_i$, entonces ${Q_i}^k = P_i = Q_i$, para todo $k = 1, ..., n-1$ e $i = 1, 2$.

2. Q^k es un par indexado para todo $k = 1, 2, ..., n-1$.

3. $f({Q_i}^k) \cap N \subset {Q_i}^{k+1}$, para $k = 0, 1, ..., n-1$; $i = 1, 2$.

Demostración. Sea Q^k dada por la fórmula de recurrencia $Q^0 = Q$ y $Q^{k+1} = G(P, Q^k)$, $k \in \mathbb{N}$. Por el lema anterior, los $\{Q^k\}$ son una secuencia decreciente de pares indexados que satisfacen las propiedades 1, 2 y 3 requeridas y que contienen a P. Basta entonces probar que $Q^n = P$ para algún n. Efectivamente, supongamos que la inclusión $P \subset Q^k$ es estricta para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir que si $i \in \{1, 2\}$ es tal que $P_i \neq Q_i$ entonces ${Q_i}^k \backslash P_i \neq \emptyset$. Para $k \in \mathbb{N}$ fijo, elija $x_k \in {Q_i}^k \backslash P_i$. Usaremos inducción sobre j para mostrar que:

$$f^{-j}(x_k) \in {Q_i}^{k-j} \backslash P_i \text{ para } j = 0, 1, ..., k.$$

Para $j = 0$, no hay nada que probar pues $f^0(x_k) = x_k \in {Q_i}^k$. Asumimos entonces que $f^{-j}(x_k) \in {Q_i}^{k-j} \backslash P_i$, entonces se tiene que $f^{-j}(x_k) \in f({Q_i}^{k-j-1}) \cap N$, pues por definición: ${Q_i}^{k-j} = P_i \cup (f({Q_i}^{k-j-1}) \cap N)$. Por lo tanto, $y = f^{-j-1}(x_k) \in {Q_i}^{k-j-1}$ y $f(y) \in N$, así por la invarianza positiva de Q^{k-j-1}, se tiene que $f^{-j-1}(x_k) \in {Q_i}^{k-j-1}$. Por otro lado, note que $f^{-j-1}(x_k) \in P_i$, entonces $f^{-j}(x_k) \in P_i$ pues $f^{-j-1}(x_k) \in N$. Así, $f^{-j-1}(x_k) \in f(Q_i^{k-j-2}) \cap N$, por lo tanto $f^{-j}(x_k) \in {Q_i}^{k-j} \backslash P_i$ para toda j. Considere ahora $u_k = f^{-k}(x_{2k})$, entonces $f^{[-k,k](u_k)} \subset Q_i \backslash P_i \subset Q_i \backslash Int(P_i)$. Además, tomando una subsucesión de los u_k, se puede asumir que $u_k \to u \in Q_i \backslash Int(P_i)$ pues $Q_i \backslash Int(P_i)$ es compacto al ser un subconjunto cerrado de un compacto. Así, $f^j(u) \in Q_i \backslash Int(P_i)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, es decir que $u \in Inv(Q_i \backslash Int(P_i))$.
Si $i = 1$, $u \in Inv(Q_1 \backslash Int(P_1)) \subset Inv(N) \subset Inv(P_1 \backslash P_2) \subset Int(P_1)$, lo cual es una contradicción pues por defınción $u \in Inv(Q_1 \backslash Int(P_1)) \subset Q_i \backslash Int(P_1)$.
Si $i = 2$, $u \in Inv(Q_2 \backslash Int(P_2)) \subset Inv(Q_2) \subset Inv(N) \subset Int(Q_1 \backslash Q_2) \subset Q_1 \backslash Q_2$, por lo tanto $Inv(Q_2) = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, debe existir n tal que $Q^n = P$. □

Proposición 1.3.9. Si $P \subset Q$ son pares indexados para un entorno aislado N, entonces $(P_1 \cup Q_2, Q_2)$ y $(P_1, P_1 \cap Q_2)$ también lo son.

Demostración. 1. Como P_i, Q_i son compactos contenidos en N, también lo son $P_1 \cup P_2$ y $P_1 \cap P_2$.

2. **Propiedad de aislamiento:** Note que por la propiedad de aislamiento de los índices P y Q se tiene que $Inv(N) \subset Int(P_1 \backslash P_2)$ e $Inv(N) \subset Int(Q_1 \backslash Q_2)$. Así $Inv(N) \subset Int(P_1 \backslash Q_2)$ y como $P_1 \backslash Q_2 \subset (P_1 \cup Q_2) \backslash Q_2$, entonces $Inv(P_1 \backslash Q_2) \subset Int((P_1 \cup Q_2) \backslash Q_2)$. Por otro lado como $P_1 \backslash Q_2 \subset P_1 \backslash (P_1 \cap Q_2)$, entonces $Inv(N) \subset Int(P_1 \backslash (P_1 \cap Q_2))$.

3. **Conjunto de salida:** Para el caso del par indexado $(P_1 \cup Q_2, Q_2)$ asumimos que $x \in P_1 \cup Q_2$ y $f(x) \notin N$, note que si $x \in Q_2$ no hay nada que probar, si no fuera así entonces , $x \in P_1 \backslash Q_2$, así $x \in P_2$ por la propiedad del conjunto de salida del par indexado P. Lo cual es una contradicción pues $P_2 \subset Q_2$. Para

el par $(P_1, P_1 \cap Q_2)$, asumimos que $x \in P_1 \subset Q_1$ y $f(x) \in N$, entonces por la propiedad de salida del par Q, $x \in Q_2$ y por lo tanto $x \in P_1 \cap Q_2$.

4. **Invarianza positiva:** Se sigue directamente de usar la propiedad de invariaza positiva de los índices P y Q.

□

Lema 1.3.10. Si P y Q son pares indexados para un conjunto aislado invariante N, entonces $P \cap Q$ también lo es.

Demostración. Claramente, $P_1 \cap Q_1$ y $P_2 \cap Q_2$ son compactos y las propiedades de invarianza positiva y la propiedad de salida se siguen directamente de las mismas propiedades en P y Q. Para probar la propiedad de aislamiento note que $Int(P_1 \backslash P_2) \cap Int(Q_1 \backslash Q_2) \subset Int((P_1 \cap Q_1) \backslash (P_2 \cup Q_2)) \subset Int((P_1 \cap Q_1) \backslash (P_2 \cap Q_2))$. □

El siguiente resultado, si bien es trivial, es relevante para probar que el índice de Conley está bien definido

Proposición 1.3.11. Si $P \subset Q$ son pares indexados tales que $P_1 \backslash P_2 = Q_1 \backslash Q_2$, entonces los espacios P_1/P_2 y Q_1/Q_2 son homeomorfos.

Ya listos todos los preparativos, nos disponemos a hacer la prueba del teorema 1.3.5:

Demostración. **Teorema 1.3.5**
Sean M y N entornos aislados para un conjunto aislado invariante S, es decir $S = Inv(N) = Inv(M)$ y sean P y Q pares indexados para N y M respectivamente, debemos probar que $L(P_1 \backslash P_2, [f_P])$ y $L(Q_1 \backslash Q_2, [f_Q])$ son en isomorfos la categoría $\mathcal{K}$. La demostración va a ser realizada por pasos:
Paso 1: Asumimos que tenemos las siguientes condiciones:

1. $M = N$.

2. $P \subset Q$.

3. P y Q difieren a lo mas en una coordenada.

4. $f(Q_i) \cap N \subset P_i$.

En caso de asumir estas 4 condiciones, el resultado está dado por el **Lema 1.3.6**. En los siguientes pasos iremos quitando las condiciones una a una hasta obtener el resultado con las hipótesis originales del teorema.

Paso 2: Retiramos la condición 4. Por el **Lema 1.3.8**, existe una sucesión de índices $\{Q^k\}_{k=0}^n$, $Q^{k+1} \subset Q^k$, tal que cada par de índices consecutivos satisfacen las 4 propiedades asumidas en el **paso 1** y tal que $Q^0 = Q$ y $Q^n = P$. Por lo tanto, por el paso 1 existe un isomorfismo entre todos los pares indexados consecutivos y por lo tanto entre P y Q.

Paso 3: Retiramos la condición 3. Sean $R_1 = P_1 \cup Q_2$ y $R_2 = P_1 \cap Q_2$, entonces (P_1, R_2) y (R_1, Q_2) son pares indexados. Considere ahora el siguiente diagrama de inclusiones conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(P_1, R_2) \arrow[r, "j_2"] & (R_1, Q_2) \arrow[d, "i_3"] \\
(P_1, P_2) \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "j"'] & (Q_1, Q_2)
\end{tikzcd}$$

Note además los pares $(P_1, P_2) \subset (P_1, R_2)$ y $(R_1, Q_2) \subset (Q_1, Q_2)$ satisfacen la condición 1, 2 y 3 del **paso 1**, entonces por el **paso 2**. Las inclusiones i_1 e i_3 inducen isomorfismos en $\mathcal{C} = Endo(HComp_*)$. Por otro lado, como $P_1 \backslash R_2 = P_1 \backslash Q_2 = R_1 \backslash Q_2$, entonces por la **Proposición 1.3.11** la inclusión j_2 induce un isomorfismo en $\mathcal{C} = Endo(HComp_*)$. Por lo tanto, j induce un isomorfismo en $\mathcal{C} = Endo(HComp_*)$.

Paso 4: Asumimos solamente la condición 1, por el **Lema 1.3.10**, $P \cap Q$ es un par indexado y por lo tanto podemos aplicar el **paso 3** a cada uno de los pares $P \cap Q \subset P$ y $P \cap Q \subset Q$. De esta manera se obtienen dos isomorfismos

$$\phi_1 : L(P_1 \backslash P_2, [f_P]) \to L((P_1 \cap Q_1) \backslash (P_2 \cap Q_2), [f_{P \cap Q}])$$
$$\phi_2 : L(Q_1 \backslash Q_2, [f_Q]) \to L((P_1 \cap Q_1) \backslash (P_2 \cap Q_2), [f_{P \cap Q}])$$

y por lo tanto, $L(P_1 \backslash P_2, [f_P])$ y $L(Q_1 \backslash Q_2, [f_Q])$ son isomorfos.

Paso 5: Si $M \neq N$, podemos asumir que $M \subset N$, pues de lo contrario, podemos considerar $M \cap N$, el cual resulta ser también un conjunto aislado invariante para S. Por el **paso 4**, basta mostrar que existe un par indexado Q de M y un par indexado de P de N tales que $L(P_1 \backslash P_2, [f_P])$ y $L(Q_1 \backslash Q_2, [f_Q])$ sean isomorfos. Por el **Teorema 1.2.13**, existe un par indexado para P para N tal que $P_1 \backslash P_2 \subset Int(M) \cap$

$f^{-1}(Int(M))$ y considere además el par indexado $Q = (M \cap P_1, M \cap P_2)$ de M. Note además que como $Q_1 \backslash Q_2 = M \cap (P_1 \backslash P_2) = P_1 \backslash P_2$, la inclusión $Q \subset P$ induce un isomorfismo en $\mathcal{C} = Endo(HComp_*)$ por **Proposición 1.3.11**. $\square$

1.4. Propiedades del Índice

Teorema 1.4.1. Propiedad de Wazewski: Si N es un entorno aislado para una función f y $Con(N, f) \neq Con(\emptyset, f)$ entonces $Inv(N)$ es no vacío.

Demostración. Si $Inv(N) = \emptyset$, entonces $(\emptyset, \emptyset)$ es un par indexado para N. Por lo tanto $Con(N, f) = Con(\emptyset, f)$. $\square$

Teorema 1.4.2. Propiedad de Normalización: El espacio X es un entorno aislado y $Con(X, f) = L([X], [f])$.

Demostración. Basta mostrar que $(X, \emptyset)$ es un par indexado para X. Efectivamente:

1. Claramente $\emptyset$ y X son compactos en X.
2. **Propiedad de salida:** Se cumple trivialmente, pues no puede ser que $f(x) \notin X$.
3. **Invarianza positiva:** Se satisface trivialmente.
4. **Propiedad de aislamiento:** $Inv(X) \subset X = X \backslash \emptyset$.

$\square$

Considere ahora $F : I \times X \to X$ una homotopía tal que $F(\lambda, x) = f_\lambda(x)$ es un homeomorfismo para todo λ, entonces se tiene la siguiente propiedad.
Sea N un subconjunto compacto de X, para cada λ se define:

$$Inv(N, \lambda) = Inv_{f_\lambda}(N)$$

Lema 1.4.3. La función multivaluada $\Omega : I \to P(X)$ tal que $\Omega(\lambda) = Inv(N, \lambda)$ es semiconinua por arriba.

Demostración. Supongamos que no lo es, entonces existe $\lambda_0 \in I$ tal que Ω no es semicontinua por arriba en λ_0 . Por lo tanto, existe un abierto U de X tal que

$$\{\lambda \in I : \Omega(\lambda) \subset U\} = \{\lambda \in I : Inv(\lambda, N) \subset U\}$$

no es abierto. Así, existe $\lambda_0 \in I$ y una sucesión $\lambda_n \to \lambda_0$ tales que $Inv(\lambda_0, N) \subset U$ e $Inv(\lambda_n, N) \cap N \backslash U \neq \emptyset$. Por lo tanto para todo n, existe $x_n \in Inv(\lambda_n, N) \cap N \backslash U$. Así, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $f^k_{\lambda_n}(x_n) \in N$. Note entonces que como $x_n \in Inv(\lambda_n, N) \cap N \backslash U$, entonces existe $x \in N \backslash U$ tal que $x_n \to x$ pues $N \backslash U$ es compacto. Entonces, en particular $f^0_{\lambda_0}(x) = x \in N \backslash U$. Por otro lado, como $f^k_{\lambda_n}(x_n) \to f^k_{\lambda_0}(x)$, entonces $f^k_{\lambda_0}(x) \in N$. Así, $x \in Inv(\lambda_0, N)$. Esto es una contradicción pues $Inv(\lambda_0, N) \subset U$. □

Proposición 1.4.4. Propiedad de estabilidad: Si N es un entorno aislado e invariante para f_{λ_0}, entonces N es un entorno aislado para f_λ para λ suficientemente pequeño. Además, en este caso el índice de Conley de N respecto a cada f_λ coincide.

Demostración. Como N es un entorno aislado e invariante para f_{λ_0}, podemos concluir que, $Inv(N, \lambda_0) \subset Int(N)$. Así para cada $x \in Inv(N, \lambda_0)$, existe $\epsilon(x) > 0$ tal que $B(x, \epsilon(x)) \subset N$. Como $Inv(N, \lambda_0)$ es compacto, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset N$ para todo $x \in Inv(N, \lambda_0)$. Como la función Ω es semicontinua por arriba si tomamos $U = \bigcup_{x \in Inv(N, \lambda_0)} B(x, \epsilon)$, entonces el conjunto $\{\lambda \in I : Inv(\lambda, N) \subset U\}$ es abierto. Así, existe $\delta > 0$ tal que $B(\lambda_0, \delta) \subset \{\lambda \in I : Inv(\lambda, N) \subset U\}$, luego para λ suficientemente pequeño, $Inv(\lambda, N) \subset U \subset N$, con U abierto. Así, $Inv(\lambda, N) \subset Int(N)$. La segunda parte se sigue directamente de la propiedad Homotópica del índice de Conley. □

El siguiente resultado puede ser encontrado en [5]. Se omite su prueba debido a que su demostración requiere de una construcción de pares indexados para funciones multivaluadas. (véase corolario 2.1 en [5]).

Lema 1.4.5. Sea $F : I \times X \to X$ una homotopía y N un subconjunto compacto de X tal que para todo $\lambda \in I$, N es un entorno aislado e invariante para f_λ, entonces existe un par indexado P que funciona para toda f_λ.

Proposición 1.4.6. Propiedad Homotópica: Sea $F : I \times X \to X$ una homotopía y N un subconjunto compacto de X tal que para todo $\lambda \in I$, N es un entorno aislado e invariante para f_λ, entonces $Con(S, f_\lambda)$ es independiente de λ.

Demostración. Como F es una homotopía, por Lema 1.4.5 existe un par indexado P que funciona para $f_\lambda, \forall\lambda$. Además, por el Lema 1.2.17, la funciónes $(f_\lambda)_p$ están en la misma clase de homotopiá y por lo tanto representan a la misma función en la categoría $Endo(Hcomp_*)$. Por lo tanto, $L(P_1/P_2, [(f_\lambda)_p])$ no depende de λ. $\square$

1.5. Índice de Conley Cohomológico

Con la intención reducir el problema del Índice de Conley en el caso continuo al caso discreto estudiado durante las primeras secciones del capítulo 1, en esta sección se define el índice de Conley Cohomológico.

Sea $\mathcal{E}$ la categoría de los módulos graduados sobre $\mathbb{Z}$ y homomorfismos de grado cero. Si $E, F \in \mathcal{E}$ denotamos por $\mathcal{E}(E, F)$ a los morfismos de E a F en $\mathcal{E}$. Definimos además la categoría $\mathcal{E}(End) = \mathcal{E}E$ cuyos objetos son pares (E, e) donde $E \in \mathcal{E}$ y $e \in \mathcal{E}(E, E)$ es un endomorfismo y cuyos morfismos son funciones $\phi \in \mathcal{E}(E, F)$, $\phi : (E, e) \to (F, f)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\phi"'] & E \arrow[d, "\phi"] \\ F \arrow[r, "f"'] & F \end{tikzcd}$$

Por otro lado, se definen las subcategorías completas $\mathcal{E}(Mono) = \mathcal{E}M$ y $\mathcal{E}(Iso) = \mathcal{E}I$, de pares (E, e) donde $e \in \mathcal{E}(E, E)$ es un isomorfismo y un monomorfismo, respectivamente. Note en particular que $\mathcal{E}I \subset \mathcal{E}M \subset \mathcal{E}E$.

Por otro lado, considere la categoría Top_2 de los pares topológicos. Si G es un R-módulo, una *teoría de cohomología* con coeficientes en G consiste de un funtor contravariante $H^* = \{H^q\}$ de la categoría Top_2 a la categoría de los R-módulos graduados y una transformación natural $\delta^* : H^*(A) \to H^*(X, A)$ de grado 1 tal que los siguientes axiomas se satisfacen:

1. **Axioma de homotopía:** Si $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ son homotópicas, enton-

ces $H^*(f_0) = H^*(f_1) : H^*(Y, B) \to H^*(X, A)$.

2. **Axioma de Exactitud:** Para todo par (X, A) con inclusiones, $i : A \to X$ y $j : X \to (X, A)$, existe una secuencia exacta

$$... \xrightarrow{\delta^*} H^q(X, A) \xrightarrow{H^q(j)} H^q(X) \xrightarrow{H^q(i)} H^q(A) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(X, A) \to ...$$

3. **Axioma de Escisión** Para todo par (X, A), si U es un abierto de X tal que $Cl(U) \subset Int(A)$, entonces la función escisión $j : (X \backslash U, A \backslash U) \subset (X, A)$ induce un isomorfismo.

$$H^*(j) : H^*(X, A) \approx H^*(X \backslash U, A \backslash U)$$

4. **Axioma de dimensión:** En la categoría de los espacios de un punto existe una equivalencia natural del funtor constante G con el funtor H^*.

Considere ahora $H^* : Top_2 \to \varepsilon$ el *funtor de Cohomología de Alexander Spanier*. El cual asigna a cada par topológico $P = (P_1, P_2)$ el módulo graduado $H^*(P_1, P_2, \mathbb{Z})$. (Véase [2] Cap 6, sec 4).
Recordamos que por un par topologico $P = (P_1, P_2)$ se entiende un espacio topológico P_1 junto con un subconjunto cerrado P_2. Note que un par indexado como se definió anteriormente no necesariamente es un par topologico pues P_2 no necesariamente es un subconjunto de P_1. Sin embargo, si P es un par indexado, $\hat{P} = (P_1, P_1 \cap P_2)$ también lo es, de este modo siempre que nos refiramos a $H^*(P)$ nos referimos a $H^*(\hat{P})$.

Los siguientes teoremas garantizan que la comohología de Alexander-Spanier satisface los axiomas de Homotopía y Escisión. Véase **[2], Cap 6, sec 5, sec 6**.

Teorema 1.5.1. Propiedad fuerte de escisión Sean (X, A) y (Y, B) pares de conjuntos donde X y Y son paracompactos Hausforff y A y B cerrados. Sea $f(X, A) \to (Y, B)$ una función continua y cerrada que induce una función 1 a 1 entre $X \backslash A$ y $Y \backslash B$. Entonces para todo q y todo G,

$$f^* : H^q(Y, B, G) \simeq H^q(X, A, G).$$

Teorema 1.5.2. La teoría de Cohomología de Alexander-Spanier satisface el axioma de homotopía.

Definición 1.5.3. Una *función de pares* $F : P \to Q$ es una función continua $F : P_1 \to Q_1$ tal que $F(P_1 \cap P_2) \subset Q_1 \cap Q_2$.

Si $P = (P_1, P_2), Q = (Q_1, Q_2), R = (R_1, R_2), S = (S1, S_2)$ son pares topológicos tales que $R \subset P$, $S \subset Q$ y $F : P \to Q$ es una función de pares y $F(R) \subset S$ (es decir $F(R_i) \subset S_i$), entonces $F : R_1 \to S_1$ es tal que $F(R_1 \cap R_2) \subset S_1 \cap S_2$ y por lo tanto es una función de pares la cual será de notada por $F_{R,S} = F : R_1 \to S_1$ y será llamada *contracción* de F a los pares R y S.

Note en particular que si se tienen pares topológicos P y Q tales que $P \subset Q$ y tomamos la función $Id : Q \to Q$, entonces se puede considerar la contracción $i_{P,Q}$ de la identidad a los pares P, Q. Dicha función será llamada la *inclusión del par P al par Q*.

Antes de seguir adelante, procedemos a la construcción de un funtor que nos permitirá definir el Índice de Conley Cohomológico. Para ello, considere $(F, f) \in \mathcal{E}E$. Se define el *kernel generalizado* de f como:

$$gker(f) = \bigcup \{f^{-n}(0) : n \in \mathbb{N}\}$$

Note que $f(gker(f)) \subset gker(f)$, efectivamente, si $y = f(x)$, $x \in gker(f)$, entonces $f^n(x) = 0$ para algún n. Así, $y = f(x) \in f^{-n+1}(0) \subset gker(f)$. Entonces tenemos un monomorfismo $f' : F/gker(f) \to F/gker(f)$ dado por $f'([x]) = [f(x)]$.

Sea $LM(F, f) = (F/gker(f), f') \in \mathcal{E}M$ y asuma que $\phi : (E, e) \to (F, f)$ es un morfismo, entonces debido a la conmutatividad del diagrama dada por el morfismo ϕ, se tiene que $\phi(ker(e)) \subset gker(f)$. Efectivamente, si $x \in gker(e)$, entonces $x = e^{-n}(0)$ para algún n y por lo tanto:

$$\phi(x) = \phi(e^{-n}(0)) = \phi \circ e^{-1} \circ e^{-n+1}(0) = f^{-1} \circ \phi \circ e^{-n+1}(0)$$

Iterando n veces tenemos que $x \in gker(f)$. (Note que como $\phi \in \mathcal{E}(E, F)$, en particular $\phi(0_E) = 0_F$). Por otro lado, lo anterior, permite inducir una función

$\phi' : E/gker(e) \to F/gker(f)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E/gker(e) \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "\phi'"'] & E/gker(e) \arrow[d, "\phi'"] \\ F/gker(f) \arrow[r, "f'"'] & F/gker(f) \end{tikzcd}$$

Así, la definición de LM y el cuadro conmutativo anterior permite definir un funtor covariante $LM : \mathcal{E}E \to \mathcal{E}M$.

Por otro lado, si $(F, f) \in \mathcal{E}M$, se define la *imagen generalizada* de f como:

$$gim(f) = \bigcap\{f^n(F) : n \in \mathbb{N}\}$$

Note que $f(gim(f)) \subset gim(f)$. Efectivamente, si $y = f(x)$, $x \in gim(f)$, entonces existe una sucesión $\{x_n\} \subset F$ tal que $x = f^n(x_n)$, por lo tanto $y = f(x) = f^{n+1}(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y además $y = f^1(x)$.

Lo anterior permite definir una función (contracción) $f'' : gim(f) \to f(gim(f))$ tal que $f''(x) = f(x)$, en particular, f'' es un monomorfismo pues f 1 a 1. Veamos que f'' también es sobreyectiva. Efectivamente, sea $y \in gim(f)$, entonces existe una sucesión $\{x_n\} \subset F$ tal que $x = f^n(x_n)$, para todo n. Note que como f es inyectiva y:

$$f^n(x_n) = y = f^{n+1}(x_{n+1}) = f^n(f(x_{n+1}))$$

$$f(x_1) = y = f^{n+1}(x_{n+1}) = f^(f^n(x_{n+1}))$$

Entonces, $x_1 = f^n(x_{n+1})$ y $f(x_{n+1}) = x_n$, esto en particular implica que f'' es sobreyectiva.

Considere ahora $LI(F, f) = (gim(f), f'') \in \mathcal{E}I$ y asuma que $\phi : (E, e) \to (F, f)$ es un morfismo para $(E, e), (F, f) \in \mathcal{E}E$. Entonces por la conmutatividad del diagrama asociado a ϕ, se tiene que $\phi(gim(e)) \subset gim(f)$, efectivamente: Si $y = \phi(x)$ y existe una sucesión $\{x_n\} \subset E$ tal que $x = e^n(x_n)$, para todo n. Entonces, $y = \phi(x) = \phi(e^n(x_n))$.

Lo anterior nos permite definir una función $\phi'' : gim(e) \to gim(f)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} gim(e) \arrow[r, "e''"] \arrow[d, "\phi''"'] & gim(e) \arrow[d, "\phi''"] \\ F/gim(f) \arrow[r, "f''"'] & gim(f) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, la definición de LI junto con el diagrama conmutativio anterior, nos define un funtor contravariante $LI : \mathcal{E}M \to \mathcal{E}E$:

Definición 1.5.4. El *funtor de Leray* L es el funtor definido por la composición $LI \circ LM$.

Note en particular que el funtor de Leray aplicado a cualquier endomorfismo da como resultado un isomorfismo.

Teorema 1.5.5. El funtor de Leray es la identidad sobre $\mathcal{E}I$.

Demostración. Basta mostrar que si $\phi : E \to E$ es un isomorfismo entonces $gker(\phi) = \{0\}$ y $gim(\phi) = E$. Note entonces que:

$$gker(f) = \bigcup \{\phi^{-n}(0) : n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$$

Por lo tanto, $LM(E, \phi) = (E/gker(\phi), \phi') = (E, \phi)$ Por otro lado:

$$gim(f) = \bigcap \{\phi^{n}(E) : n \in \mathbb{N}\} = E$$

Así, $LI(E, \phi) = (gim(\phi), \phi'') = (E, \phi)$.

□

Definición 1.5.6. Dos objetos $(E, e), (F, f) \in \mathcal{E}E$ están vinculadas por $\phi \in \mathcal{E}(E, F)$ y $\psi \in \mathcal{E}(F, E)$, si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\phi"'] & E \arrow[d, "\phi"] \\ F \arrow[ur, "\psi"'] \arrow[r, "f"'] & F \end{tikzcd}$$

Note en particular que la conmutatividad del diagrama anterior implica que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
(E,e) \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\phi"'] & (E,e) \arrow[d, "\phi"] \\
(F,f) \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "\psi"'] & (F,f)
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto, aplicando el funtor de Leray al diagrama anterior, se obtiene el siguiente diagrama en $\mathcal{E}I$:

$$
\begin{tikzcd}
L(E,e) \arrow[r, "L(e)"] \arrow[d, "L(\phi)"'] & L(E,e) \arrow[d, "L(\phi)"] \\
L(F,f) \arrow[r, "L(f)"'] \arrow[ur, "L(\psi)"'] & L(F,f)
\end{tikzcd}
$$

Note que como $L(e)$ y $L(f)$ son isormorfismos en $\mathcal{E}$ y por lo tanto en $\mathcal{E}I$, entonces $L(\phi)$ y $L(\psi)$ también lo serán. Lo anterior prueba el siguiente teorema:

Teorema 1.5.7. Asuma que (E,e) y (F,f) están vinculados por por $\phi \in \mathcal{E}(E,F)$ y $\psi \in \mathcal{E}(F,E)$. Entonces $L(\phi)$ y $L(\psi)$ son isomorfismos. En particular, $L(E,e)$ y $L(F,f)$ son isomorfos.

Proposición 1.5.8. Sea P un par indexado para un entorno aislado N y $T(P) = (P_1 \cup (X\backslash Int(N)), P_2 \cup (X\backslash Int(N)))$ entonces:

1. $f(P) \subset T(P)$ (Es decir $f(P_i) \subset T(P)_i$).

2. La inlcusión $i_{P,T(P)} : P \to T(P)$ induce isomorfismos en la cohomología de Alexander Spanier.

Demostración.

1. Suponga que $y = f(x) \in f(P_1)$ y que $y \notin X\backslash Int(N)$. Entonces $f(x) \in P_1$ y $f(x) \in N$, así por la propiedad de invarianza positiva $f(x) \in P_1$. Análogo para P_2.

2. Note que como $T_1(P)\backslash T_2(P) = (P_1 \cup (X\backslash Int(N))\backslash(P_2 \cup (X\backslash Int(N)) = P_1\backslash P_2$, entonces la propiedad 2 es consecuencia del Teorema 1.5.1.

□

Note que por la proposición anterior, la función $f_{P,T(P)} : P \to T(P)$ dada por $f_{P,T(P)}(x) = f(x)$ para $x \in P$ es una función de pares. Por otro lado, para

$i_P = i_{P,T(P)}$, la proposición anterior asegura que $H^*(i_P)$ es un isomorfismo. Note entonces que al aplicar el funtor de Alexander-Spanier a las funciones $f_{P,T(P)}$ y ${i_p}^{-1}$ obtenemos un endomorfimo $H^*(P) \to H^*(T(P)) \to H^*(P)$. (Ojo, el funtor H^* es un funtor contravariante). Así tenemos la siguiente definición:

Definición 1.5.9. El endomorfismo $I_P = H^*(f_{P,T(P)}) \circ H^*(i_P)^{-1}$ de $H^*(P)$ es llamado *mapeo indexado* de P.

Aplicando el funtor de Leray L al par $(H^*(P), I_P)$ se obtiene un módulo graduado sobre $\mathbb{Z}$ junto con su endomorfismo el cual es llamado la reducción de Leray de la cohomología Alexander-Sapiner de P.

Definición 1.5.10. El módulo $C(S, f) = L(H^*(P), I_P)$ es llamado *índice de Conley cohomológico* de S.

Teorema 1.5.11. Sea S un conjunto aislado e invariante, $C(S, f)$ es independiente del entorno aislado N y del par indexado P.

Demostración. **Paso 1:** Asumimos que tenemos las siguientes condiciones

1. $M = N$.
2. $P \subset Q$.
3. P y Q difieren a lo mas en una coordenada.
4. $f(Q) \subset T_N(P)$.

Debido a la condición 4 podemos asumir que f es una función de pares $f : Q \to T_N(P)$. Considere $I_{Q,P} = H^*(f_{Q,P}) \circ H^*(i_P)^{-1}$ el isomorfismo , entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^*(P) \arrow[r, "I_P"] \arrow[d, "H^*(j)"'] & H^*(P) \arrow[d, "H^*(j)"] \\
H^*(Q) \arrow[r, "I_Q"'] \arrow[ur, "I_{Q,P}"'] & H^*(Q)
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $(H^*(P), I_P)$ y $(H^*(P), I_P)$ están vinculados, así $L(H^*(j))$: $L((H^*(Q), I_Q)) \to (H^*(P), I_P)$ es un isomorfismo.

Paso 2: Retiramos la condición 4. Por el **Lema 1.3.8**, existe una sucesión de índices $\{Q^k\}_{k=0}^n$, $Q^{k+1} \subset Q^k$, tal que cada par de índices consecutivos satisfacen las 4 propiedades asumidas en el **paso 1** y tal que $Q^0 = Q$ y $Q^n = P$. Por lo tanto, por el paso 1 existe un isomorfismo entre todos los pares indexados consecutivos y así entre $L((H^*(Q), I_Q))$ y $(H^*(P), I_P)$.

Paso 3: Retiramos la condición 3. Sean $R_1 = P_1 \cup Q_2$ y $R_2 = P_1 \cap Q_2$, entonces (P_1, R_2) y (R_1, Q_2) son pares indexados. Considere ahora el siguiente diagrama de inclusiones conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(P_1, R_2) \arrow[r, "j_2"] & (R_1, Q_2) \arrow[d, "i_3"] \\
(P_1, P_2) \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "j"'] & (Q_1, Q_2)
\end{tikzcd}$$

Note además los pares $(P_1, P_2) \subset (P_1, R_2)$ y $(R_1, Q_2) \subset (Q_1, Q_2)$ satisfacen la condición 1,2 y 3 del **paso 1**. Entonces, por el **paso 2**, las inclusiones i_1 e i_3 inducen isomorfismos. Por otro lado, como $P_1 \backslash R_2 = P_1 \backslash Q_2 = R_1 \backslash Q_2$, entonces por la **Proposición 1.5.1** la inclusion j_2 induce un isomorfismo. Por lo tanto, j induce un isomorfismo también.

Paso 4: Asumimos solamente la condición 1, por el **Lema 1.3.10**, $P \cap Q$ es un par indexado y por lo tanto podemos aplicar el **paso 3** a cada uno de los pares $P \cap Q \subset P$ y $P \cap Q \subset Q$. De esta manera se obtienen dos isomorfismos

$$\phi_1 : L(H^*(P), I_P) \to L(H^*(P \cap Q), I_P \cap Q)$$
$$\phi_2 : L((H^*(Q), I_Q)) \to L(H^*(P \cap Q), I_P \cap Q)$$

y por lo tanto $L((H^*(Q), I_Q))$ y $L(H^*(P), I_P)$ son isomorfos.

Paso 5: Si $M \neq N$, podemos asumir que $M \subset N$, pues de lo contrario, podemos considerar $M \cap N$, el cual resulta ser también un conjunto aislado invariante para S. Por el **paso 4** basta mostrar que existe un par indexado Q de M y un par indexado de P de N tales que $L((H^*(Q), I_Q))$ y $L(H^*(P), I_P)$ sean isomorfos. Por el **Teorema 1.2.13**, existe un par indexado para P para N tal que $P_1 \backslash P_2 \subset Int(M) \cap f^{-1}(Int(M))$ y considere además el par indexado $Q = (M \cap P_1, M \cap P_2)$ de M. Note además que como $Q_1 \backslash Q_2 = M \cap (P_1 \backslash P_2) = P_1 \backslash P_2$, la inclusión $Q \subset P$ induce un isomorfismo en C por **Proposición 1.5.1**. $\square$

Las propiedades del indice de Conley ya fueron abordadas anteriormente cuando se definió el índice homotopico. Sin embargo, con la intención de exponer dos ejemplos importantes, presentamos ahora la propiedad de Wasewski para el caso cohomológico:

Proposición 1.5.12. Propiedad de Wasewski del índice Cohomológico Si N es un entorno aislado e invariante para una función f y $C(N, f) \neq C(\emptyset, f)$, entonces $Inv(N) \neq \emptyset$.

Demostración. Si $Inv(N) = \emptyset$, entonces $(\emptyset, \emptyset)$ es un par indexado para N. Así, $C(N, f) = C(\emptyset, f)$. $\square$

Los siguientes ejemplos son de gran imporancia en dínamica y además nos permiten verificar que el converso de la propiedad de Wazewski, en general, no es cierto. Es decir, que el índice de Conley puede ser trivial aún cuando el conjunto aislado e invariante S sea no vacío. Los ejemplos pueden ser encontrados sin detalles en [10] (Véanse ejemplos 3.27, 3.35 y 3.36).

Ejemplo 1.5.13. Considere $N = [0, 1] \times [0, 1]$ y la función continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que envía de manera lineal el rectángulo R_i en el rectángulo S_i para $i = 0, 1$ como se muestra en la figura 1.1.

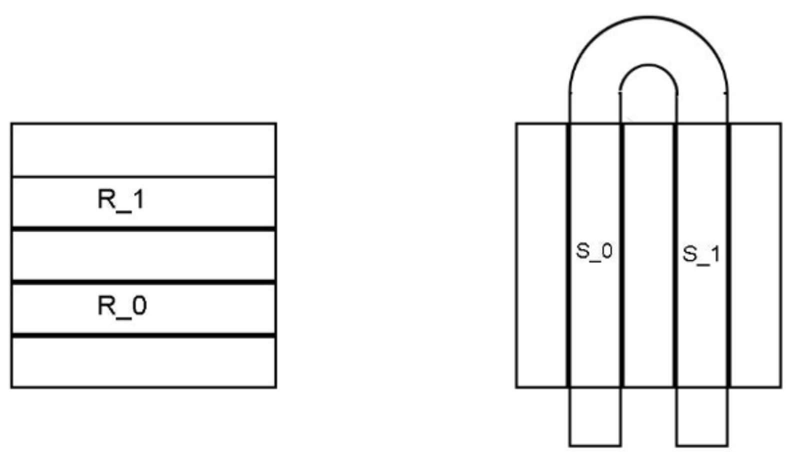

Figura 1.1:

Además suponga que la función f mapea $N\setminus(R_0\cup R_1)$ a $\mathbb{R}^2\setminus N$ y mapea $\mathbb{R}^2\setminus N$ a $N\setminus(S_0\cup S_1)$. Considere además el par indexado dado por $P_1 = N$ y

$$P_2 = [0,1]\times([0,\frac{1}{5}]\cup[\frac{2}{5},\frac{3}{5}]\cup[\frac{4}{5},1]).$$

Note que el conjunto P_1/P_2 es homotópicamente equivalente a la cuña de dos círculos. Esto se puede ver al identificar las franjas rosas en la Figura 1.2 como sigue: al identificar la primera y la tercera franja obtenemos un cilindro con dos franjas rosas opuestas, cada una de las cuales puede ser identificadas en una recta para posteriormente identificar las dos rectas obtenidas de modo que se tenga dos cilindros unidos por una recta rosa (véase Figura 1.3) . Finalmente, es posible hacer un retracto por deformación de los dos cilindros a la cuña de dos círculos.

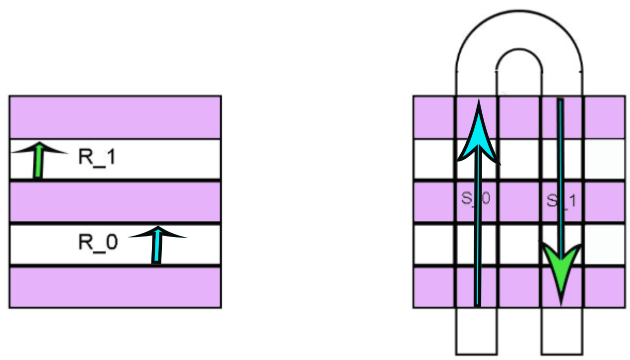

Figura 1.2:

Note entonces que como P_1/P_2 es homotópicamente equivalente a $S^1\vee S^1$. Entonces: $H^*(P_1/P_2) = H^*(S^1\vee S^1)$. Así:

$$H^k(P_1/P_2) = H^k(S^1\vee S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k>1 \end{cases}$$

Considere entonces para el caso $k=1$ los generadores $(1,0)$ y $(0,1)$ de $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. En la Figura 1.3, los cilindros del lado izquierdo muestran estos dos generadores, los cuales corresponden a segmentos rectas verticales en los rectángulos R_0 y R_1. Note entonces que al mapear dichos segmentos mediante f se obtienen segmentos de rectas que van de un extremo de N a otro (Véase Figura 1.2). Note además que al hacer el

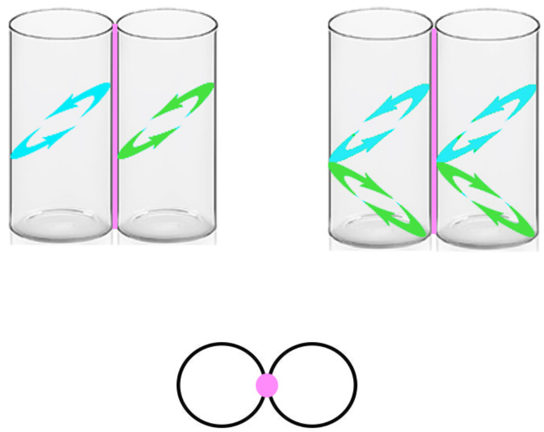

Figura 1.3:

cociente en $f(N) \cap N$, el resultado es el par de cilindros de la parte derecha en la Figura 1.3. De este modo, vemos que la imagen bajo I_p de los generadores $(1,0)$ y $(0,1)$ es $(1,1)$ y $(-1,-1)$, respetivamente. Así, la función $I_p : H^1(P) \to H^1(P)$ tiene como matriz asociada

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $(I_p)^2 = 0$. Así, $gker(I_p) = H^1(P)$. Recordemos ahora que el funtor de Leray L se definió como la composición de los funtores LM Y LI. En particular $LM(H^1(P), I_p) = (H^1(I_p)/gker(I_p), (I_p)')$ donde:

$$(I_p)' : H^1(I_p)/gker(I_p) \to H^1(I_p)/gker(I_p)$$

Por lo tanto, $LM(H^*(I_p), I_p)$ es trivial. Así, claramente $L(H^*(I_p), I_p)$ es trvial. Note en particular que este ejemplo muestra que en general el converso de la propiedad de Wazewski no es verdad pues es posible verificar que $Inv(N) \neq \emptyset$. Efectivamente, considere $Q_1 = N$. Note que los rectángulos R_0 y R_1 son mapeados a N nuevamente. Considere entonces $Q_2 = R_0 \cap f(R_0)$ y en general $Q_n = R_0 \cap f^n(R_0) \cap Q_{n-1}$. Note que para todo n, $Q_n \neq \emptyset$. Además Q_n es cerrado pues es la intersección de cerrados y además $Q_{n+1} \subset Q_n$. Por lo tanto, por el teorema del encaje de Cantor: $\emptyset \neq \bigcap Q_n \subset Inv(N)$.

Ejemplo 1.5.14. Considere $N = [0,1] \times [0,1]$ y la función continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que envía de manera lineal el rectángulo R_i en el rectángulo S_i para $i = 0, 1$ como se muestra en la Figura 1.4.
Es posible usar un argumento análogo al realizado para el ejemplo pasado para concluir que: la función $I_p : H^1(P) \to H^1(P)$ tiene como matriz asociada

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

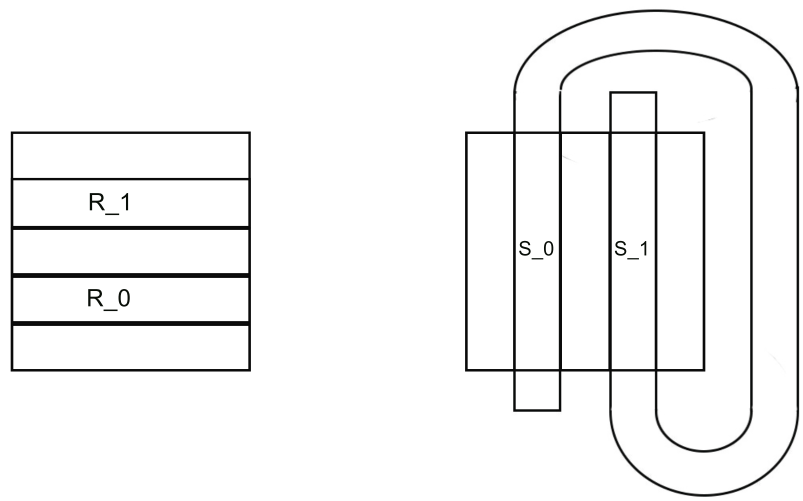

Figura 1.4:

Note que en este caso, se tiene que $I_p^n = 2^n I_p$, por lo tanto $gker(I_p) = ker(I_p)$. Así, $gker(I_p) = span\{(-1,1)\} \simeq \mathbb{Z}$. Luego, $H^1(P)/gker(I_p) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$. Entonces: $LM(H^1(P), I_p) = (\mathbb{Z}, (I_p)')$ donde:

$$(I_p)' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

Es posible verificar mediante argumentos análogos al ejemplo pasado que $(I_p)' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ está dada por $(I_p)'(x) = 2x$. Efectivamente basta verificar que la imagen bajo f

del generador $(1,1)$ es $(2,2)$. Ahora bien, debemos aplicar el funtor LI, note que:

$$gim((I_P)') = \bigcap\{((I_P)')^n(\mathbb{Z}) : n \in \mathbb{N}\} = \bigcap\{2^n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$$

Así, $LI(H^1(P), (I_P)')$ es trivial. Por lo tanto, $L(H^*(I_p), I_p)$ también lo es.

Por otro lado, tal como se definió el indice de Conley cohomológico, es necesario aplicar el funtor de la cohomología de Alexande Spanier al par $P = (P_1, P_2)$, este funtor asocia al par P un módulo graduado con coeficientes en un anillo R. Duarante todo el documento hemos asumido que ese anillo es $\mathbb{Z}$. Sin embargo, R puede ser cualquier anillo con unidad. Este hecho es importante pues la elección del anillo puede afectar de manera considerable la información qe recibimos del índice.
Efectivamente, continuando con el Ejemplo 1.5.14. Si utilizamos el anillo $R = \mathbb{Q}$, se tienen los siguientes resultados

$$H^k(P_1/P_2) = H^k(S^1 \vee S^1) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

La matriz asociada a la función $I_p : H^1(P) \to H^1(P)$ es la misma por lo que concluimos nuevamente que $I_p^n = 2^n I_p$. Pero entonces, ¿qué diferencia hay al cambiar un anillo por otro?
La diferencia radica a la hora de aplicar los funtores LM y LI. Como ya hemos visto antes, estos funtores son la identidad sobre elemntos de la forma (E, e) para E un espacio y $e : E \to E$ un isomorfismo. Continuando con el ejemplo, usando el mismo calculo hecho anteriormente, se conluye que $LM(H^1(P), I_P) = (\mathbb{Q}, (I_p)' = 2x)$. Sin embargo, a diferencia de la última vez, $(I_p)' = 2x$ es un isomorfismo sobre $\mathbb{Q}$. Por lo tanto usando el anillo $R = \mathbb{Q}$, obtuvimos un indice no trivial a diferencia de cuando usamos el anillo $\mathbb{Z}$. Así:

$$C_k(S) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, 2Id) & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Note en particular que por lo anterior, la propiedad de Wasewski, asegura que $S \neq \emptyset$.

2. Índice de Conley para tiempo Continuo

2.1. Introdución

A diferencia del capítulo anterior, no se desarrollará toda la teoría necesaria para la construcción del índice en el caso continuo. Sin embargo, se demostrará que el índice para el caso de un flujo se puede remitir al caso ya estudiado en la capítulo 1. Esto, debido a que muchos de los argumentos y demostraciones usadas para desarrollar la teoría en el capítulo 2 resutarían ser análogos o simplemenete copias de las demostraciones en el caso discreto. Debido a esto, se decidió usar un argumento mas elegante en el cual se remite el índice de Conley Continuo al caso discreto estudiado anteriormente.

El presente capítulo se centra en la definición y las propiedades del índice de Conley para un flujo $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$, tal que $\phi_t(x)$ es un homeomorfismo para todo t, para X un espacio métrico localmente compacto.

Definición 2.1.1. Sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto, un sistema dinámico sobre X es una función continua $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$ tal que:

1. $\phi(\phi(x, s), t) = \phi(x, s + t))$.

2. $\phi(x, 0) = x$.

Sea ϕ un flujo tal que $\phi_t(x)$ es un homeomorfismo para todo t. Para $t \in \mathbb{R}$ fijo, considere la función $\phi_t : X \to X$, dada por $\phi_t(x) = \phi(t, x)$. Si $N \subset X$, se define el *subconjunto invariante* de N como:

$$Inv(N) = Inv(N, \phi) = \{x \in N : \phi_t(x) \in N, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Además, se dice que un conjunto $S \subset X$ es *invariante* si $Inv(S) = S$. Por otro lado, un conjunto compacto $N \subset X$ es llamado *entorno aislado* si $Inv(N) \subset Int(N)$. En este caso, llamamos a $S = Inv(N)$ un *conjunto aislado e invariante*. En lo que sigue, siempre que nos refiramos a un flujo, asumimos que $\phi_t(x)$ es un homeomorfismo para todo t.

Probar la existencia de un conjunto S de tales características y estudiar su comportamiento bajo pequeñas perturbaciones es importante a la hora de intentar entender el sistema dinámico. Sin embargo, encontrar dicho conjunto puede llegar a ser muy difícil, debido a esto, la teoría del índice de Conley propone utilizar entornos aislados, los cuales son mucho mas fáciles de encontrar y además su estudio permite localizar conjuntos aislados invariantes.

2.2. Índice de Conley y Ejemplos

Definición 2.2.1. Sea N un entorno aislado para ϕ. Un par de conjuntos compactos $P = (P_1, P_2)$, $P_i \subset X$, $P_2 \subset P_1$; es llamado *par indexado* para un conjunto aislado e invariante S si:

1. (**Propiedad de aislamiento**) $S = Inv(N) \subset Int(P_1 \backslash P_2)$.

2. (**Invarianza positiva**) Si $x \in P_i$ y $\phi([0,t],x) \subset N$, entonces $\phi([0,t],x) \subset P_i$.

3. ($\mathbf{P_2}$ **es una salida para** $\mathbf{P_1}$)Si $x \in P_1$ y $\exists t_1 > 0$ tal que $\phi(t_1, x) \notin N$, entonces $\exists t_0 \in [0, t_1]$ tal que $\phi([0,t_0],x) \subset N$ y $\phi(t_0, x) \in P_2$.

Definición 2.2.2. Dado N un entorno aislado para ϕ, $S = inv(N)$ y $P = (P_1, P_2)$ un par indexado para N. Se define el *Índice de Conley homotópico* como: $Con(S, \phi) \approx [P_1/P_2, *]$.

Es decir, el índice de Conley es el tipo de homotopía del conjunto basado $(P_1/P_2, *)$.

Teorema 2.2.3. El Índice de Conley de un conjunto aislado e invariante S no depende del entorno aislado N ni del par indexado P usados para calcularlo.

Algo importante que resaltar del índice de Conley es que, si bien, es una herramienta bastante fuerte, en la práctica calcular el tipo de homotopía del conjunto $(P_1/P_2, *)$ puede llegar a ser muy complicado. Debido a esto, usualmente se opta por trabajar con su versión homológica o cohomológica.

Definición 2.2.4. El *Índice de Conley Homológico* para un conjunto aislado e invariante S respecto de un flujo ϕ se define como: $CH_*(S) \approx H_*(P_1/P_2, *)$.

Note en particular que el Índice de Conley Homológico está bien definido pues la homología de espacios con el mismo tipo de homotopía es la misma.
Considere ahora el siguiente teorema (véase Teorema 3.13 en [3]) que nos permitirá dar algunos ejemplos del Índice de Conley en el caso continuo.

Teorema 2.2.5. Sea $S = \{a\}$ un punto fijo hiperbólico con variedad inestable de dimensión n. Entonces:

$$CH_k(S) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Recordamos que un punto hiperbólico de una ecuación diferencial es un punto para el cual los valores propios asociados a la linealización alrededor de dicho punto poseen parte real distinta de cero. Por otro lado, la variedad inestable asociada de dimensión n se refiere a la cantidad de valores propios con parte real positiva que posee.

Ejemplo 2.2.6. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = y - x^2 + 1$$

El sistema anterior tiene dos puntos de equilibrio $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. Note que al linealizar el sistema obtenemos que:

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2x & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los valores propios asociados al equilibrio $(-1, 0)$ son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Mientras que los valores propios asociados al equilibrio $(1, 0)$ son $\beta_1 = 1, \beta_2 = -2$. Note en particular que la variedad inestable asociada a $(-1, 0)$ posee dimensión 2 mientras que la asociada a $(1,0)$ tiene dimensión 1. Por lo tanto, por el Teorema 2.2.5:

$$CH_k((-1,0)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$CH_k((1,0)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Un posible argumento que se puede utilizar para sustentar los resultados anteriores sin tener que recurrir al Teorema 2.2.5 podría ser: Utilizar el teorema de Hartman-Grobman, el cual garantiza que el flujo de una ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(x)$ alrededor de $S = \{a\}$ es topológicamente equivalente al flujo en un entorno alrededor del origen del sistema:

$$\frac{dy}{dt} = Df(s)$$

De esta manera, el teorema de Hartman-Grobman garantiza que estudiar el sistema $\frac{dz}{dt} = J(1,0)$ para:

$$\mathcal{J}(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

alrededor del origen equivale a estudiar el comportamiento del flujo alrededor del equilibrio $(1,0)$. En este caso, es posible calcular el índice de Conley Homológico tomando $N = P_1 = [-1,1] \times [-1,1]$ y tomando $P_2 = (\partial[-1,1]) \times [-1,1]$. Note en particular que es posible dotar el conjunto P_1 de una estructura como complejo simplicial al dividir el cuadrado P_1 en dos trángulos trazando una arista por una de las diagonales. Note entonces que el espacio P_1/P_2 sería un segmento de recta con los extremos identificados (Espacio equivalente a S^1). Dado que los grupos de homología cuentan la cantidad de huecos n dimensionales que tiene un espacio. Se concluiría nuevamente que:

$$CH_k((1,0)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por otro lado, en el caso de $(-1,0)$, se analiza el comportamiento del sistema $\frac{dz}{dt} =$

$J(1,0)$ alrededor del cero. En este caso, es posible calcular el Índice de Conley Homológico tomando $N = P_1 = [-1,1]\times[-1,1]$ y tomando $P_2 = \partial P_1$. Note entonces que al dotar a P_1 de una estructura como complejo simplicial, el espacio P_1/P_2 sería un cuadrado con todos los puntos de la frontera identificados. Es decir, un espacio equivalente a una 2-esfera. De este modo concluimos nuevamente que:

$$CH_k((-1,0)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2.3. Propiedades del Índice

A continuación, enunciamos las propiedades mas importantes del Íncide de Conley

Teorema 2.3.1. Propiedad de Wazewski Si $Con(N,\phi)$ es no trivial, entonces $Inv(N) \neq \emptyset$.

Demostración. Si $Inv(N) = \emptyset$, entonces $(\emptyset,\emptyset)$ es un par indexado para N. Por lo tanto $Con(N,\phi) = Con(\emptyset,\phi)$. □

Teorema 2.3.2. Sea ϕ_λ una familia parametrizada continua de flujos y N un entorno aislado para ϕ_0, entonces para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, N es entorno aislado para ϕ_λ, para todo $\lambda < \delta$.

Demostración. Como N es un entorno aislado e invariante para ϕ_{λ_0}, entonces $Inv(N,\lambda_0) \subset Int(N)$. Así, para cada $x \in Inv(N,\lambda_0)$, existe $\epsilon(x) > 0$ tal que $B(x,\epsilon(x)) \subset N$. Como $Inv(N,\lambda_0)$ es compacto, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x,\epsilon) \subset N$ para todo $x \in Inv(N,\lambda_0)$. Además, como la familia ϕ_λ es continua si tomamos $U = \bigcup_{x\in Inv(N,\lambda_0)} B(x,\epsilon)$, entonces el conjunto $\{\lambda \in I : Inv(\lambda,N) \subset U\}$ es abierto. Así, existe $\delta > 0$ tal que $B(\lambda_0,\delta) \subset \{\lambda \in I : Inv(\lambda,N) \subset U\}$, luego para λ suficientemente pequeño, $Inv(\lambda,N) \subset U \subset N$, con U abierto. Así, $Inv(\lambda,N) \subset Int(N)$. □

Para demostrar la siguiente propiedad, requerimos una versión un poco mas fuerte del Teorema 1.2.13 para el caso de flujos. Véase 4.1D en [14] para una prueba.

Lema 2.3.3. Sea $\phi : X \times \mathbb{R} \to X$ un flujo y N un conjunto aislado e invariente respecto a ϕ. Considere además $S = Inv(N)$, entonces para cada entorno abierto W de S existe un par indexado $P = (P_1, P_2)$ tal que $Cl(P_1 \backslash P_2) \subset W$.

Teorema 2.3.4. Propiedad de Continuación Si N es un entorno aislado para una familia de flujos parametrizada continua ϕ_λ, $\lambda \in [0, 1]$, entonces $Con(\phi_0, N) = Con(\phi_1, N)$.

Demostración. Usando el lema anterior, es posible construir $P = (P_1, P_2), R = (R_1, R_2)$ pares indexados para $S_0 = Inv_{\phi_0}(N)$ y $Q = (Q_1, Q_2), T = (T_1, T_2)$ pares indexados para $S_1 = Inv_{\phi_1}(N)$ tales que:

$$(P_1, P_2) \subset (Q_1, Q_2) \subset (R_1, R_2) \subset (T_1, T_2).$$

Note que como P y R son pares indexados para S_0, entonces $(P_1 \backslash P_2, *)$ y $(R_1 \backslash R_2, *)$ tienen el mismo tipo de homotopía. Del mismo modo, $(Q_1 \backslash Q_2, *)$ y $(T_1 \backslash T_2, *)$ poseen el mismo tipo de homotopía. Por lo tanto, si consideremos la siguiente secuencia:

$$P_1 \backslash P_2 \xrightarrow{i} Q_1 \backslash Q_2 \xrightarrow{j} R_1 \backslash R_2 \xrightarrow{k} T_1 \backslash T_2$$

las funciones $j \circ i$ y $k \circ j$ son equivalencias homotopicas. Note entonces que si mostramos que i es una equivalencia homotópica, se tendrá que $Con(\phi_0, N) = Con(\phi_1, N)$. Efectivamente, como $j \circ i$ y $k \circ j$ son equivalencias homotópicas, existen f y g inversas homotópicas de $j \circ i$ y $k \circ j$ respectivamente. Así, $f \circ (j \circ i) \approx Id_P$. Note entonces que:

$$Id_P \approx f \circ (j \circ i) \approx (f \circ j) \circ i$$

Por lo tanto, $f \circ j$ es inversa homotopica de i por la izquierda. Por otro lado:

$$i \circ (f \circ j) \approx (g \circ (k \circ j)) \circ i \circ (f \circ j) \approx g \circ k \circ (j \circ i \circ f) \circ j \approx g \circ k \circ j \approx Id_Q$$

Así, i es una equivalencia homotópica y por lo tanto $Con(\phi_0, N) = Con(\phi_1, N)$. $\square$

2.4. Índice de Conley Cohomológico

Como se mencionó en la introducción, este capítulo se centrará en remitir el caso del índice para un flujo $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$ al índice desarrollado para funciones. Para ello primeramente presentamos la definición del índice cohomológico:

Definición 2.4.1. Dado S un conjunto aislado e invariante para un entorno aislado N y P un par indexado. Se define el *Índice de Conley Cohomológico* $C(S, \phi)$ como: $C(S, \phi) \approx H^*(P)$.

Note en particular que el índice anterior está bien definido pues los grupos de cohomología de espacios homotópicos siempre son iguales.
Teniendo en cuenta lo anterior, el siguiente teorema se tiene directamente del teorema análogo del índice en el caso homotópico:

Teorema 2.4.2. $C(S, \phi)$ *no depende del índice* P *ni del entorno aislado* N *que se utilice para calcularlo.*

Ahora bien, antes de comenzar con los resultados necesarios para demostrar que efectivamente el índice cohológico para flujos se remite al caso estudiado para homeomorfismos, es necesario introducir un poco de notación. Note que si restringimos ϕ a $\mathbb{Z}$ se tiene un flujo discreto $\pi : \mathbb{Z} \times X \to X$. Note en particular que para un tiempo $\hat{t}$ fijo la función $f_{\hat{t}}(x) = \pi(\hat{t}, x)$ satisface que: $f^n_{\hat{t}}(x) = \pi(n\hat{t}, x)$. Con la intención de mostrar que efectivamente el índice definido anterior mente se remite al definido en el capítulo 1 se presentan los siguientes resultados:

Teorema 2.4.3. *Sea* $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$ *un flujo y* $S \subset X$ *compacto, son equivalentes:*

1. S *es un conjunto aislado e invariante para* ϕ.

2. S *es un conjunto aislado e invariante para* $f_{\hat{t}}$, *para todo* $\hat{t} > 0$.

3. S *es un conjunto aislado e invariante para* $f_{\hat{t}}$, *para algún* $\hat{t} > 0$.

Demostración. La demosración se realizará de la siguiente manera $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

1. $(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$: Sea $\hat{t} > 0$ fijo y N un entorno aislado e invariante para S respecto a ϕ. Es decir, $N \subset X$ es un compacto tal que:

$$S = Inv_{\phi}(N) = \{x \in N : \phi(x,t) \in N, \forall t \in \mathbb{R}\} \subset Int(N).$$

Sea $f_{\hat{t}}(x) = \phi(\hat{t}, x)$, entonces $f_{\hat{t}}^{n}(x) = \phi(n\hat{t}, x)$. Primeramente, veamos que S es invariante respecto a $f_{\hat{t}}$. Efectivamente:

$$Inv_{f_{\hat{t}}}(S) = \{x \in S : f_{\hat{t}}^{n}(x) \in S, \forall n \in \mathbb{Z}\} \subset S.$$

Pero si $x \in S = Inv_{\phi}(N)$, entonces $\phi(t, x) \in N$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular para $t = n\hat{t}$, así $f_{\hat{t}}^{n}(x) \in N$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego, $S = Inv_{f_{\hat{t}}}(S)$. Por otro lado, veamos que $S = Inv_{f_{\hat{t}}}(M)$, para algún M. Considere la función $w : N \to \mathbb{R}$ tal que $w(x) = Sup\{t \in \mathbb{R}^{+} : \phi([0,t], x) \in N\}$. Note que para todo $x \in S$, $w(x) = \infty$. Sea $N' = \{x \in N : w(x) > \hat{t}\}$, note que N' es cerrado y por lo tanto compacto y además, $S \subset N'$. Veamos que $S = Inv_{f_{\hat{t}}}(N')$. Como $S \subset N'$, entonces $S = Inv_{f_{\hat{t}}}(S) \subset Inv_{f_{\hat{t}}}(N')$. Por oro lado, si $x \in Inv_{f_{\hat{t}}}(N')$, entonces $f_{\hat{t}}^{n}(x) \in N'$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Así, $\phi(n\hat{t}, x) \in N'$, en particular, $x = \phi(0, x) \in N'$. Así, $\phi([0, \hat{t}], x)) \in N$, pero además, $\phi([0, \hat{t}], \phi(n\hat{t}, x)) \in N$ para todo n. Por lo tanto, $x \in Inv_{\phi}(N) = S$

2. Claramente 2 implica 3.

3. Supongamos que existe $\hat{t} > 0$ tal que S es un conjunto aislado e invariante para $f_{\hat{t}}$ y N su entorno aislado correspondiente. Sea $x \in S = Inv_{\hat{f}}(N) \subset Int(N)$, note entonces que $\phi(\hat{t}n, x) \in N$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Note entonces que si $x \in S$, $x = \phi(0, x) \in Int(N)$, así para cada $x \in S$ existe $\epsilon(x)$ tal que $\phi([0, \epsilon(x)], x) \subset Int(N)$. Como $S \subset \bigcup_{\epsilon(x)} B(x, \epsilon(x))$, existe $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon(x_i))$ subcubrimiento finito para S. Sea $\epsilon = min\{\epsilon_i, i = 1, ...n\}$, entonces para todo $x \in S$, $\phi([0, \epsilon], x) \subset int(N)$. Defina ahora: Para $x \in S$

$$t_0 = \sup\{t \in [0, \hat{t}] : \forall n \in \mathbb{Z}, \phi([n\hat{t}, n\hat{t} + t], x) \subset S\}.$$

Vamos a ver que $t_0 = \hat{t}$, si no fuera así, entonces $t_0 < \hat{t}$. Note entonces que por continuidad $\phi(n\hat{t} + t_0, x) \in S$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $\phi([0,\epsilon], \phi(n\hat{t} + t_0), x) \subset Int(N)$ pata todo $n \in \mathbb{Z}$, lo anterior implica que $\phi(n\hat{t}+t_0+\epsilon), x) \in S$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, esto es una contradicción con la definición de supremo de t_0.

Ahora bien, veamos que $S = Inv_\phi(N)$. Sea $x \in Inv_\phi(N)$, entonces $\phi(t,x) \in N$ para todo $t \in \mathbb{R}$, en particular $\phi(n\hat{t}, x) \in N$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, así $x \in Inv_{f_{\hat{t}}}(N) = S$.

□

Teorema 2.4.4. Asuma que $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$ es un flujo para un espacio métrico X localmente compacto y $f_{\hat{t}} = \phi(\hat{t}, x)$ para algún $\hat{t} > 0$ y sea S un conjunto aislado e invariante para ϕ. Entonces, el morfismo I_P asociado a $f_{\hat{t}}$, resulta ser la identidad y por lo tanto:

$$C(S, f_{\hat{t}}) = L(H^*(P), I_P) = L(H^*(P), Id) = (H^*(P), Id) = (H^*(P), Id) = C(S, \phi).$$

Demostración. Sea S un conjunto aislado e invariante. Sea V un entorno de S. Considere las funciones $\psi, \gamma : V \to [0, \infty)$ tales que:

1. $S = \psi^{-1}(0)$ y $S = \gamma^{-1}(0)$.

2. $\psi(x) > 0$, $t > 0$ y $\phi(x,t) \in V$ implica que $\psi(\phi(x,t)) > \psi(x)$ (ψ es decreciente sobre la órbita de x).

3. $\gamma(x) > 0$, $t > 0$ y $\phi(x,t) \in V$ implica que $\gamma(\phi(x,t)) < \gamma(x)$ (γ es creciente sobre la órbita de x).

4. $\gamma(x) > 0$, $t > 0$, $\phi(t,x) \in V$, entonces $\gamma(\phi(t,x)) < \psi(x)$.

La existencia de dichas funciones se estudia a fondo durante la demostración del teorema 5.1 en [1] (véanse funciones g^+ y g^-). Para $\epsilon > 0$ definimos:

$$G(t) = \{x \in V : \psi(x) < \epsilon, \gamma(x) < \epsilon\}$$

$$H(t) = \{x \in V : \psi(x) \leq \epsilon, \gamma(x) \leq \epsilon\}.$$

Como X es localmente compacto, para todo entorno U de S existe $\epsilon > 0$ tal que $H(\epsilon) \subset U$. En particular, es posible elegir ϵ, δ de modo que: $S \subset N = H(\epsilon) \subset V$ y $H(\delta) \subset G(\epsilon)$ (En particular $\delta < \epsilon$) . Elija

$$P_1 = \{x \in V : \psi(x) \leq \delta, \gamma(x) \leq \epsilon\}$$

y

$$P_2 = \{x \in P_1 : \gamma(x) \geq \delta\}.$$

Entonces, $P = (P_1, P_2)$ es un par indexado para S respecto a el entorno asilado N y el flujo ϕ.
Efectivamente:

1. $P_i \subset N$ son compactos. Claramente $P_i \subset N$. Basta mostrar entonces que son cerrados. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset P_1$ tal que $x_n \to x$, veamos que $x \in P_1$. Como $x_n \in P_1$, entonces $\psi(x_n) \leq \delta$ y $\gamma(x_n) \leq \epsilon$. Como ambas funciones son continuas, entonces $\psi(x) \leq \delta$ y $\gamma(x) \leq \epsilon$, por lo tanto P_1 es compacto. Análogamente se demuestra que P_2 es compacto.

2. **Propiedad de aislamiento** Veamos que $S \subset Int(P_1 \backslash P_2)$. Sea $x \in S$, entonces $\phi(t, x) \in N$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pero en particular $\phi(t, x) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$ pues S es invariante. Por lo tanto $\gamma(\phi(t, x)) = \psi(\phi(t, x)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Como γ y ψ continuas, existe r tal que si $|x - y| < r$, entonces $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \delta/2$ y $|\psi(x) - \psi(y)| < \delta$, así $\gamma(y) < \delta/2$ y $\psi(y) < \delta$. Como $\delta < \epsilon$, entonces $B(x, r) \subset P_1 \backslash P_2$.

3. **Invarianza positiva** Asuma que $x \in P_1$ y $\phi([0, t_0], x) \subset N$. Supongamos que no es cierto que $\phi([0, t_0], x) \subset P_1$, entonces existe un $\hat{t} \in (0, t_0]$ tal que $\phi(\hat{t}, x) \notin P_1$. Sin pérdida de generalidad, asuma que para todo $t < \hat{t}$, $\phi(t, x) \in P_1$. Entonces como P_1 es compacto y ϕ continua $\phi(\hat{t}, x) \in P_1$. Lo cual es una contradicción. (Análogo para P_2).

4. **Propiedad de salida** Sea $x \in P_1$ tal que $\phi(\hat{t}, x) \notin N$, supongamos que no se satisface la propiedad de salida, es decir que para todo $t < \hat{t}$, $\phi(t, x) \in P_1 \backslash P_2$. Note que en particular se tendría que $x = \phi(0, x) \in P_1 \backslash P_2$, así $\gamma(x) < \delta$ y

$\psi(x) \leq \delta$. Ahora bien, como $\phi(\hat{t}, x) \notin N$, entonces $y = \phi(\hat{t}, x)$ debe estar en alguno de los siguientes conjuntos:

$$A = \{a \in V : \psi(a) > \epsilon,\ \gamma(a) \leq \epsilon\}$$

$$B = \{a \in V : \psi(a) \leq \epsilon,\ \gamma(a) > \epsilon\}$$

$$C = \{a \in V : \psi(a) > \epsilon,\ \gamma(a) > \epsilon\}$$

Note que $\phi(\hat{t}, x) \notin B$ pues como $\phi(\hat{t}, x) \notin N$, $x \notin S$. Por lo tanto $\gamma(x) > 0$, así $\gamma(x) < \gamma(\phi(\hat{t}, x)) < \psi(x)$. Ahora bien, como $x \in P_1$, $\psi(x) \leq \delta$ y como ψ es decreciente a lo largo de la órbita de x, entonces $\psi(\phi(\hat{t}, x)) < \delta$, así: No puede ser que $\phi(\hat{t}, x)$ esté ni en C ni en A, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, es necesario verificar que P también es un par indexado para la función $f_{\hat{t}}$, $\hat{t} > 0$. Efectivamente:

1. $P_i \subset N$ son compactos. (Ya fue verificado anteriormente).

2. **Propiedad de aislamiento** Análoga a la prueba anterior.

3. **Invarianza positiva**. Supongamos que $x \in P_1$ y $f_{\hat{t}}(x) \subset N$. Si $x \in S$, entonces $f_{\hat{t}}(x) \in S$, por lo tanto $f_{\hat{t}}(x) \in P_1$. Si $x \notin S$, entonces $\gamma(x), \psi(x) > 0$. Note que como ψ decrece a lo largo de la órbita de x entonces $\psi(f_{\hat{t}}(x)) < \psi(x) \leq \delta$. Por otro lado como, $\gamma(\phi(t, x)) < \psi(x)$, entonces en particular $\gamma(f_{\hat{t}}(x)) < \delta < \epsilon$. Ahora bien, si $x \in P_2 \subset P_1$ y $f_{\hat{t}}(x) \in N$, entonces $f_{\hat{t}}(x) \in P_1$, por la propiedad de invarianza positiva de P_1. Basta mostrar entonces que $\gamma(f(x)) \geq \delta$. Ahora bien, como γ crece a lo largo de las órbitas de x, entonces $\gamma(f_{\hat{t}}(x)) > \gamma(x) \geq \delta$.

4. **Propiedad de salida** Sea $x \in P_1$ tal que $f_{\hat{t}}(x) \notin N$, supongamos que no se satisface la propiedad de salida, es decir que $x \in P_1 \backslash P_2$. Por lo tanto $\gamma(x) < \delta$ y $\psi(x) \leq \delta$. Ahora bien, como $f_{\hat{t}}(x) \notin N$, entonces $f_{\hat{t}}(x)$ debe estar en alguno de los siguientes conjuntos:

$$A = \{a \in V : \psi(a) > \epsilon,\ \gamma(a) \leq \epsilon\}$$

$$B = \{a \in V : \psi(a) \leq \epsilon,\ \gamma(a) > \epsilon\}$$

$$C = \{a \in V : \psi(a) > \epsilon,\ \gamma(a) > \epsilon\}$$

Note que $f_{\hat{t}}(x) \notin B$ pues como $f_{\hat{t}}(x) \notin N$, $x \notin S$. Por lo tanto $\gamma(x) > 0$, así $\gamma(x) < \gamma(f_{\hat{t}}(x)) < \psi(x)$. Ahora bien como $x \in P_1$, $\psi(x) \leq \delta$ y como ψ es decreciente a lo largo de la órbita de x, entonces $\psi(f_{\hat{t}}(x)) \leq \delta$, así: No puede ser que $f_{\hat{t}}(x)$ esté ni en C ni en A, lo cual es una contradicción.

Note ahora que la función $\Omega : (P_1, P_2) \times [0,1] \to (P_1 \cup X \backslash Int(N), P_2 \cup X \backslash Int(N))$ dado por $\Omega(x, s) = \phi(\hat{t}s, x)$ es claramente una homotopía de pares que une a las funciones $f_P = f_{P,T(P)}$ e $i_P = i_{P,T(P)}$. Entonces por el axioma de Homotopía de la Cohomología de Alexander-Spanier, el mapeo indexado $I_p = H^*(f_P) \circ H^*(i_P)^{-1} = Id$. Ahora bien, según la definición del índice de Conley cohomológico en el caso continuo, $C(S, \phi) = H^*(P) = (H^*(P), Id)$. Por otro lado, en el caso discreto $C(S, f_{\hat{t}}) = L(H^*(P), I_P)$, pero dado que el funtor de Leray es la identidad sobre εI. Entonces $C(S, f_{\hat{t}}) = L(H^*(P), I_P) = L(H^*(P), Id) = (H^*(P), Id) = (H^*(P), Id) = C(S, \phi)$. □

Corolario 2.4.5. El índice de conley cohomológico para un conjunto aislado e invariante S respecto de un flujo ϕ coincide con el índice respecto al mapeo $f_{\hat{t}}$, $\hat{t} > 0$.

3. Índice de Conley para campos multivectoriales

3.1. Introducción

Introducimos ahora una versión combinatorial de índice de Conley y hacemos una breve comparación entre las definiciones de este nuevo índice y las de los índices ya vistos.

3.2. Complejos de Lefschetz

Definimos ahora el concepto que nos permitirá emular la construcción hecha para el índice de Conley.

Definición 3.2.1. Un *complejo de Lefchetz* es un conjunto finito X ordenado por una relación de orden propia reflexiva $<$, junto con dos funciones de valores enteros $k : X \times X \to \mathbb{Z}$ y $dim : X \to \mathbb{Z}$ que satisfacen las siguientes funciones:

1. $x < y \Rightarrow dim(x) \leq dim(y)$.
2. $k(x, y) \neq 0 \Rightarrow x < y$ y $|dim(x) - dim(y)| = 1$.
3. Para todo par de elementos x, y tales que $dim(x)$ y $dim(y)$ difieren por dos, se tiene que:
$$\sum_{y \in X} k(x, y)k(y, z) = 0.$$

Teniendo en cuenta la definición anterior: si $x < y$, decimos que x es una *cara* de y. Además, decimos que el complejo de Lefschetz (X, k) es *regular* si $k(x, y)$ es inveritible en $\mathbb{Z}$ o es cero para todo $x, y \in X$.

Sea (X, k) un complejo de Lefschetz y considere $\mathbb{Z}$ en anillo de los enteros. Representamos por $\mathbb{Z}(X)$ el módulo finitamente generado por X sobre $\mathbb{Z}$. Considere además $\partial^k : \mathbb{Z}(X) \to \mathbb{Z}(X)$ el "*operador frontera*" definida sobre todo $s \in X$, como:

$$\partial^k(s) = \sum_{t \in X} k(s, t)t.$$

Note que super índice k en ∂^k hace referencia a la dependencia de la función ∂ respecto de k. Por otro lado, la función ∂^k depende de la dimensión del simplejo donde esté actuando. Sin embargo, para no complicar demasiado la notación, usaremos siempre la función ∂^k para denotar la frontera en todas las dimensiones. La dimensión en la que se está trabajando debería ser clara a partir de los elementos utilizados. Note además que la condición 3, de la Definición 3.2.1 asegura que $\partial^k \circ \partial^k = 0$ y por lo tanto $(\mathbb{Z}(X), \partial^k)$ es un complejo de cadena libre con base X. Así, por la homología de un complejo de Lefschetz, entendemos la homlogía del complejo de cadenas $(\mathbb{Z}(X), \partial^k)$.

El siguiente ejemplo muestra que a todo complejo simplicial se le puede asignar la estructura de un complejo de Lefschetz:

Ejemplo 3.2.2. Considere K un complejo simplicial y sobre K las funciones $k : K \times K \to \mathbb{Z}$ y $dim : K \to \mathbb{Z}$ definidas como:

$$k(\sigma, \tau) = \begin{cases} (-1)^i & \text{si } \sigma = (v_0, ..., v_q), \tau = (v_0 ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_q) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y la función dim que asocia a cada simplejo su dimensión. Dotado de estas dos funciones y la relación de orden $x < y$ si x es cara de y, K es un complejo de Lefschetz. Mas aún, es regular.

Definición 3.2.3. Sea X un complejo de lefschetz y $x \in X$, definimos la *clausura* de x como:

$$Cl(x) = \{y \in X : y < x\}.$$

Del mismo modo, si $A \subset X$, se define la *clausura* de A como $Cl(A) = \bigcup_{x \in A} Cl(x)$.

Definición 3.2.4. Sea $A \subset X$, se define el conjunto $Mo(A) = Cl(A) \backslash A$. Además, se dice que A es un conjunto *propio* si $Mo(A)$ es cerrado.

Note en particular que los conjuntos abiertos y cerrados son propios. Estos conjuntos serás de gran importancia mas adelante para poder definir la teoría que nos permitorá emular los flujos.

Teorema 3.2.5. Suponga que (X, k) es un complejo de Lefschetz, y $A \subset X$ es propio, entonces para todo $z, x \in A$ y todo $y \in X$ tales que $x \in Cl(y)$ y $y \in Cl(z)$, se tiene que, $y \in A$.

Demostración. Sean $z, x \in A$, $y \in X$ tales que $x \in Cl(y)$, $y \in Cl(z)$ y suponga que $y \notin A$. Entonces, $y \in Mo(A)$ y $x \in Cl(Mo(A)) = Mo(A) = Cl(A)\backslash A$. Por lo tanto $x \notin A$, lo cual es una contradicción. $\square$

Note que la proposición anterior implica, en particular, que si A es propio y $k(s,t) \neq 0$ y $k(t,u) \neq 0$, para $s, u \in A$, entonces $t \in A$. Además, en términos de caras nos dice que si $u < t < s$ y $dim(u) = dim(t) + 1 = dim(s) + 2$, con $u, s \in A$, entonces $t \in A$.

Teorema 3.2.6. Sea (X, k) es un complejo de Lefschetz y $X' \subset X$ es propio. Considere demás, la función $k' = k_{|X' \times X'}$. Entonces, (X', k') es un complejo de Lefschetz.

Demostración. Sea $\partial^{k'}$ la función frontera asociada a k'. Debemos verificar que $\partial^{k'} \circ \partial^{k'} = 0$. Asuma que no es cierto, luego:

$$0 \neq \partial^{k'} \circ \partial^{k'}(s) = \sum_{t \in X'} k(s,t) \partial^{k'} t = \sum_{u \in X'} \left(\sum_{t \in X'} k(s,t) k(t,u) \right) u$$

para algún $s \in X'$. Entonces, existe $u_0 \in X'$ tal que

$$\sum_{t \in X'} k(s,t) k(t,u_0) \neq 0$$

Por otro lado, ∂^k es un operador frontera, luego

$$0 \neq \partial^k \circ \partial^k(s) = \sum_{t \in X} k(s,t) \partial^k t = \sum_{u \in X} \left(\sum_{t \in X} k(s,t) k(t,u) \right) u.$$

En particular:

$$\sum_{t \in X} k(s,t) k(t,u_0) = 0.$$

Así:

$$\sum_{t\in X\setminus X'} k(s,t)k(t,u_0)\neq 0.$$

Esto implica que $k(s,t_0)k(t_0,u_0)\neq 0$ para algún $t_0\in X\setminus X'$. Por lo tanto, por la proposición anterior, $t_0\in X'$. Lo cual es una contradicción. □

Teorema 3.2.7. Si $X'\subset X$ es cerrado, entonces:

1. $\partial^{k'}=\partial^{k}_{|R(X')}$.
2. $R(X')$ es un subcomplejo de $R(X)$.

Demostración. Para probar 1, note que como X' es cerrado, X' contiene todas las caras de sus elementos, luego:

$$\partial^k=\sum_{u\in X}k(t,u)u=\sum_{u\in X'}k(t,u)u=\partial^{k'}(t).$$

Para 2, note que como $\partial^k(t)=\partial^{k'}(t)$ para todo $t\in X'$, entonces $\partial^k(R(X))\subset R(X')$ □

Teorema 3.2.8. Asuma que $X'\subset X$ es cerrado en X y $X''=X\setminus X'$ y $k''=k_{|X''\times X''}$. Entonces la inclusión

$$i:(\mathbb{Z}(X'),\partial^{k'})\to(\mathbb{Z}(X),\partial^{k})$$

y la proyección

$$\pi:(\mathbb{Z}(X),\partial^{k})\to(\mathbb{Z}(X''),\partial^{k''})$$

son mapeos de cadenas. Mas aún, se tiene la siguiente secuencia exacta corta

$$0\to\mathbb{Z}(X')\xrightarrow{i}\mathbb{Z}(X)\xrightarrow{\pi}\mathbb{Z}(X'')\to 0$$

y la siguiente exacta larga de módulos homológicos

$$...\xrightarrow{\partial}H_n(X')\xrightarrow{i_n}H_n(X)\xrightarrow{\pi_n}H_n(X'')\xrightarrow{\partial}H_{n-1}(X')\xrightarrow{i_{n-1}}...$$

Demostración. El hecho de que i sea una mapeo de de cadenas se sigue directamente del Teorema 3.2.7. Por otro lado, para mostrar que π es un mapa de cadenas, sea

$x \in X$. Si se tiene que $x \in X'$, entonces, $\partial^k(x) \in \mathbb{Z}(X')$ y:

$$\pi(\partial^k(x)) = 0 = \partial^{k''}(0) = \partial^{k''}(\pi(x)).$$

Por otro lado, si $x \notin X'$, entonces $x \in X''$. Así:

$$\pi(\partial^k(x)) = \pi(\sum_{t\in X} k(x,t)t) = \sum_{t\in X''} k(x,t)t = \partial^{k''}(x) = \partial^{k''}(\pi(x)).$$

□

Definición 3.2.9. Decimos que un subconjunto propio $T \subset X$ es un *espacio cero* si $H(\mathbb{Z}(T)) = 0$.

El siguiente resultado se sigue del Teorema 3.2.8:

Corolario 3.2.10. Si $T \subset X$ es un espacio nulo, entonces $H(\mathbb{Z}(X))$ y $H(\mathbb{Z}(X\backslash T))$ son isomorfos.

Proposición 3.2.11. Si $X = \{a\}$, entonces $H_k(X) \approx \mathbb{Z}(X) \neq 0$. Además, si $X = \{a, b\}$ y $k(a, b)$ es inveritible, entonces $H_k(X) = 0$.

Demostración. Si $X = \{a\}$, entonces ∂^k es cero. Por otro lado, si $X = \{a, b\}$ y $k(a, b)$ es invertible, sin perdida de generalidad asumamos que $dim(a) = p$ y $dim(b) = p+1$ entonces $\partial : C_{p+1}(X) \to C_p(X)$ es un isomorfismo y además $C_n(X) = \{0\}$ para cualquier n distinto de p o $p + 1$. Por lo tanto, $H_n(X) = \{0\}$ para todo n. □

A continuación, presentamos el procedimiento de *colapso* que permite simplificar el espacio al identificar espacios cero y eliminarlos para obtener un espacio mas simple pero con el mismo tipo de homología.

Definición 3.2.12. Sea (X, k) un complejo de Lefschetz, se define

1. $bd(A) = \{t \in X : k(s,t) \neq 0, s \in A\}$.

2. $cbd(A) = \{s \in X : k(s,t) \neq 0, t \in A\}$.

3. Decimos que un par (a, b) de elementos de X es un *par de reducciíon* si $k(a, b)$ es invertble en $\mathbb{Z}$.

   Además, un par de reducción (a, b) se dice que es

4. Un *par de reducción elemental* si $cbd(a) = \{b\}$.

5. Un *par de co-reducciíon elemental* si si $bd(b) = \{a\}$.

Lema 3.2.13. Asuma que $s_0, u_0, t_0 \in X$ son tales que $u_0 \in bd(t_0)$ y $t_0 \in bd(s_0)$. Entonces $car(bd(s_0)) \geq 2$ y $card(cbd(u_0)) \geq 2$.

Demostración. Tenemos que:

$$0 = \partial\partial(s_0) = \sum_{u \in X} (\sum_{t \in X} k(s_0, t)k(t, u))u$$

en particular,

$$0 = \sum_{t \in X} k(s_0, t)k(t, u_0).$$

Como por hipótesis $k(s_0, t_0)k(t_0, u_0) \neq 0$, la suma puede ser cero, solo si existe otro término que sea distinto de cero. Así:

$$k(s_0, t_1) \neq 0 \neq k(t_1, u_0)$$

para algún $t_1 \neq t_0 \in X$. Por lo tanto, $t_0, t_1 \in bd(s_0)$ y $t_0, t_1 \in cbd(u_0)$. □

Teorema 3.2.14. Asuma que $a, b \in X$. Si (a, b) es un par de reducción elemental entonces, $\{a, b\}$ es abierto en X. Si (a, b) es un par de co-reducción elemental, entonces $\{a, b\}$ es cerrado en X. Mas aún, en ambos casos $\{a, b\}$ es un espacio cero.

Demostración. Asuma primeramente que (a, b) es un par de reducción elemental. Tenemos que mostrar que $X \backslash \{a, b\}$ es cerrado. Suponga que no es verdad. Entonces, existe $x_0 \in X \backslash \{a, b\}$ y $y_0 \in db(x_0) \cap \{a, b\}$. No puede ser que $y_0 = a$, porque entonces $b \neq x_0 \in cbd(a)$. Luego, $y_0 = b$. Así por el Lema 3.2.13, $card(cbd(a)) \geq 2$ lo cual es una contradicción.

Ahora asuma que (a, b) es un par de co-reducción elemental. Necesitamos que $\{a, b\}$ es cerrado. Obviamente, $bd(a) = \{b\} \subset \{a, b\}$. También, tenemos que $bd(b) = \emptyset$ pues si no fuera asi; por el Lema 3.2.13 , $card(bd(b)) \geq 2$. Entonces, $bd\{a, b\} \subset \{a, b\}$.

Sea $T = \{a, b\}$ y sea $k = dim(b)$. Entonces

$$C_q(T) = \begin{cases} a\mathbb{Z} & \text{si } q = k-1 \\ b\mathbb{Z} & \text{si } q = k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y ∂_q es cero excepto para $q = k$, que es una multipliación por $k(b, a)$. Como $k(b, a)$ es invertible, ∂_k es un isomorfismo. Por lo tanto, $C_q(T) = 0$ para todo $q \neq k - 1$ y $C_{k-1} = a\mathbb{Z} = B_{k-1}(T)$. Así, $H_q(T) = \{0\}$. □

Corolario 3.2.15. Si (a, b) es un par de reducción elemental o un par de co-reducción elemental en X, entonces $H(\mathbb{Z}(X))$ y $H(\mathbb{Z}(X\backslash\{a, b\})$ son isomorfos.

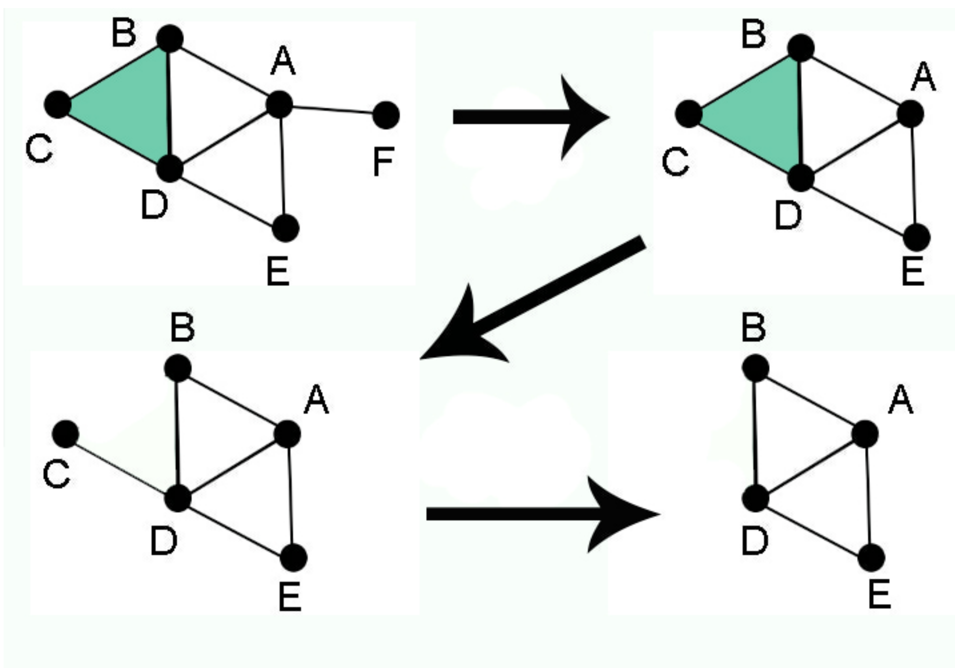

Figura 3.1:

Ejemplo 3.2.16. Considere el complejo simplicial de la Figura 3.1 el cual consiste de un dos simplejo DCD 8 aristas AB, BC, CD, DE, AD, AF, AE, BD Y seis vértices A, B, C, D, E, F. Asuma que los simplejos están ordenados con el orden lexicográfico. Considere los siguientes pares de simplejos:

$$(A, AF), \ (BC, BCD), \ (C, CD).$$

Note entonces que los tres pares son apropiados para aplicar el procedimiento de colapso (vease la Figura 3.1).

3.3. Campos multivectoriales

Definición 3.3.1. Sea (X, k) un complejo de Lefschetz. Un *multivector* es un conjunto propio $V \subset X$ que admite un único elemento maximal respecto del orden parcial $<$. Dicho elemento es denotado por V^*.

Definición 3.3.2. Un multivector es llamado *regular* si es un espacio cero (Es decir su su homología es nula). De lo contrario es llamado crítico.

Definición 3.3.3. Sea (X, k) un complejo de Lefschetz. Un *Campo multivectorial* para X es una partición $\mathcal{V}$ de X en multivectores. Además para $x \in X$, denotamos por $[x]_{\mathcal{V}}$ al único multivector de $\mathcal{V}$ que contiene a x. Por otro lado, denotamos por $x^* = [x]^*_{\mathcal{V}}$, es decir, x^* representa al elemento maximal del multivector que contiene a x.

Note que de la definición anterior, sabemos que si $x \in X$, $x < x^*$. Note en particular que debido a lo anterior, $x \in Cl(x^*)$. El elemento x^* algunas veces es llamado *cara maximal* de x.

A continuación introducimos el concepto que nos permitirá emular el flujo para un sistema dinámico. Recordemos que para poder definir el Índice de Conley, en los capítulos 1 y 2 requerimos de un espacio y de una función ya fuera un flujo ϕ o un homeomorfismo f. Fuera como fuese, dado un $x \in X$ podíamos imaginar un camino (continuo o a saltos) por el cual se iba moviendo x a medida que el tiempo avanzaba o a medida que se iteraba la funcioń f, este camino es precisamente la órbita de x. Note que debido a las condiciones sobre f y ϕ esta órbita era única, es decir que solo existe un posible camino que pasa por x, algo que no pasaría en caso de que la función f fuera multivaluada. Intentando simular dichos caminos se define:

Definición 3.3.4. Dado un campo multivectorial $\mathcal{V}$ en X, es posible asociar $\mathcal{V}$ con un grafo $G_{[x]_{\mathcal{V}}}$ el cual posee vértices en X y que tiene una flecha de x a y, para $x, y \in X$ si se satisface una de las siguientes condiciones:

1. $x \neq y$, $y = x^*$.
2. $x = x^*$ y $y \in cl(x) \backslash [x]_{\mathcal{V}}$.
3. $x = x^* = y$ y $[y]_{\mathcal{V}}$ es crítico (un bucle).

Las condiciones anteriores se pueden interpretar como sigue:

1. Una flecha que apunta desde un $x \in X$ hacia su cara maximal, siempre y cuando $x \neq x^*$. Algunas veces, este tipo de flechas es llamada flecha que sube dimensiones.
2. Una flecha que apunta de el elemento maximal de un multivector x^* a un elemento cercano y pero que no se encuentra en su mismo multivector. Esta es la única condición que permite a una flecha moverse de un multivector a otro. Algunas veces, este tipo de flechas es llamada flecha que baja dimensiones.
3. Una flecha de x a si mismo si el multivector que contiene a x es crítico (en este caso x es su propia cara maximal, es decir los únicos elementos de X que puede tener flechas en si mismas son los elementos maximales de cada multivector). Usualmente, este tipo de flechas son las mas difíciles de identificar, se recomienda usar el procedimiento de colapso para identificar si el multivector es un espacio cero.

Escribimos $x \prec_{\mathcal{V}} y$ si existe una flecha de x a y en $G_{[x]_{\mathcal{V}}}$. Denotamos por:

$$\Pi_{\mathcal{V}}(x) = \{y \in X : x \prec_{\mathcal{V}} y\}.$$

La siguiente proposición nos ayuda a identificar cuando un multivector es crítico:

Proposición 3.3.5. Asuma que X es un complejo de Lefchetz regular y sea $V \subset X$ un multivector de a lo mas dos elementos. Entonces $Card(V) = 1$ si y solo si V es crítico, y $Card(V) = 2$ si y solo si V es regular.

Demostración. Si $Card(V) = 1$ entonces por la Proposición 3.2.11, V sería crítico. Si $Card(V) = 2$, entonces $V_* \neq V^*$, donde V_* es el otro elemento de V. Veamos que $V^* \in bd(V_*)$. Si no fuera así, entonces existiría $x \in X$ tal que $V_* < V^*$, pero entonces, $x \in Mo(V)$ y $V_* \in Cl(Mo(V) \backslash Mo(V))$, lo cual contradice el hecho de que V sea un multivector, pues entones no sería propio. Por lo tanto $V^* \in bd(V_*)$, luego $k(V^*, V_*) \neq 0$. Entonces por el proceso de colapso, $H^k(V) = 0$. $\square$

Ejemplo 3.3.6. Considere el 2-simplejo $X = \{A, B, C, AB, BC, AC, ABC\}$. Sobre X considere la partición $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ formado por $V_1 = \{A\}$, $V_2 = \{B\}$, $V_3 = \{AB, AC, ABC\}$ y $V_4 = \{B, BC\}$. Note que $\mathcal{V}$ forma un campo multivectorial sobre X. La Figura 3.2 muestra el grafo asociado al campo multivectorial. Note además que el multivector $V_3 = \{AB, AC, ABC\}$ es crítico, esto puede ser deducido al aplicar el procedimiento de colapso al multivector V_3, tomando (AB, ABC) como un par de reducción elemental. Así $H_n(V_3) = H_n(\{AC\})$ que por la Proposición 3.2.11 es no nulo. Es importante recalcar que para mantener la simplicidad del diagrama, algunos autores prefieren dejar implícitas las flechas que son producidas por la condición 2 de la Definición 3.3.4. La Figura 3.2 contrasta como se ve el grafo omitiendo y sin omitir dichas flechas. Note además que las flechas están organizadas por colores según la condición que fue usada para crearla.

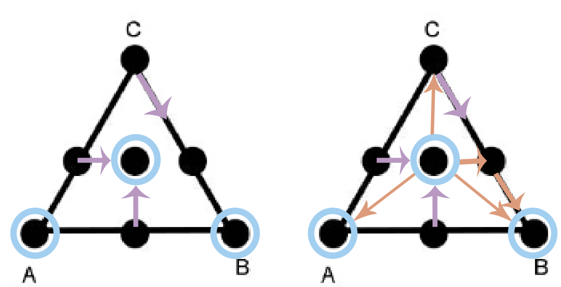

Figura 3.2:

Note además que de cierta manera al definir este grafo, lo que estamos haciendo es simular un flujo al considerar los caminos formados por las flechas en él. Este enfoque es mas similar a la defineión del índice de Conley para funciones multivaluados la cual no fue considerada en este documento pero que es bastante similar a los conceptos trabajados aquí, con la diferencia de que un mismo valor de x puede tener diferentes órbitas mientras que en nuestro caso tiene solo una. Debido a esto, en el caso de funciones multivaluadas se suele trabajar con el concepto de solución que pasa a través de x para hablar de una de las posibles órbitas que pasa por x. Teniendo en cuenta lo anterior se define:

Definición 3.3.7. Sea $\mathcal{V}$ un campo multivectorial, definimos una *solución* para $\mathcal{V}$ como una función $\phi : I \subset \mathbb{Z} \to X$ tal que I es un intervalo en $\mathbb{Z}$ y tal que $\phi(i+1) \in \Pi_{\mathcal{V}}(\phi(i))$ para todos $i, i+1 \in I$. Además decimos que:

1. ϕ es una solución a través de x si $x \in Im(\phi)$.
2. ϕ es una solución en $A \subset X$ si $Im(\phi) \subset A$.
3. ϕ es una solución completa si $I = \mathbb{Z}$.

y definimos los siguientes subconjuntos de soluciones para $\mathcal{V}$

$$Sol(x, A) = \{\phi : \mathbb{Z} \to X : x = \phi(0) \in Im(\phi) \subset A\},$$

$$Sol^{+}(x, A) = \{\phi : \mathbb{Z}^{n\geq 0} \to X : x \in Im(\phi) \subset A\},$$

$$Sol^{-}(x, A) = \{\phi : \mathbb{Z}^{n\leq 0} \to X : x \in Im(\phi) \subset A\}.$$

Note que dentro de X tenemos un conjunto de flechas dadas por la definición 3.3.4. Entonces, una solución ϕ para $\mathcal{V}$ através de x no es mas que un camino a lo largo de dichas flechas que en algún momento para por el punto x, del mismo modo un una solución ϕ para $\mathcal{V}$ en A es un camino a lo largo de dichas flechas que nunca se sale de A.

Algunas veces, es posible concatenar soluciones para crear otra solución. Suponga por ejemplo que $\phi \in Sol^{-}(x, A)$ y $\psi \in Sol^{+}(x, A)$, entonces definimos la concatenación $\phi * \psi$ como la solución que recorre todo ϕ y luego todo ψ. Del mismo modo si por ejemplo $\psi \in Sol^{+}(x)$ y $x \in \Pi_{\mathcal{V}}(y)$, para algún $y \in X$, entonces $y * \psi \in Sol^{+}(y)$.

Note que, podemos interpretar $\prec_{\mathcal{V}}$ como una relación transitiva en X. Denotamos por $\leq_{\mathcal{V}}$ al pre-orden inducido por $\prec_{\mathcal{V}}$.

Considere ahora un campo multivectorial $\mathcal{V}$ y el pre-orden $\leq_{\mathcal{V}}$ dado sobre X, es posible extender este pre-orden a un pre-orden para el campo multivectorial $\mathcal{V}$ de la siguiente manera. Decimos que si $V, W \in \mathcal{V}$, $V \leq_{\mathcal{V}} W$ si y solo si $V^* \leq_{\mathcal{V}} W^*$. De esta manera, decimos que un multivector V es menor o igual que un multivector W si existe un camino de flechas que une la cara maximal de V con la de W.
La siguiente proposición es bastante clara por lo que se omite su prueba.

Proposición 3.3.8. Si $\leq_{\mathcal{V}}$ es un orden parcial sobre X, entonces la extensión de $\leq_{\mathcal{V}}$ a $\mathcal{V}$ es un orden parcial también.

Definición 3.3.9. Decimos que un campo multivectorial $\mathcal{V}$ es acíclico si $\leq_{\mathcal{V}}$ es un orden parcial sobre X (y por lo tanto sobre $\mathcal{V}$).

Teorema 3.3.10. Asuma que X admite un campo multivectorial acíclico en el cual cada multivector es regular. Entonces, X es un espacio cero.

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ como en el enunciado. Haremos inducción sobre la cardinalidad de $\mathcal{V}$. Si $|\mathcal{V}| = 0$, entonces $X = \emptyset$ y no hay nada que probar. Asuma entonces que $|\mathcal{V}| = n > 0$. Como $\mathcal{V}$ es acíclico, tenemos que $\leq_{\mathcal{V}}$ es un orden parcial sobre X y sobre $\mathcal{V}$, considere entonces V un elemento maximal de $\mathcal{V}$ respecto a $\leq_{\mathcal{V}}$. Aseguramos que $X' = X \backslash V$ es cerrado en X. Si no fuera así, entonces existiría un $x \in Cl(X') \cap V$. Considere $y \in X$' tal que $x \in Cl(y) \subset Cl(y^*)$ (esto es posible pues $Cl(X') = \bigcup_{y \in X'} Cl(y)$). Como $x \in V$ y $y \notin V$, tenemos que $V = [x]_{\mathcal{V}} \neq [y]_{\mathcal{V}} = [y^*]_{\mathcal{V}}$. Por lo tanto, $x \leq_{\mathcal{V}} y^*$ pues por las condiciones 1 y 2 de la Definición 3.3.4 $x \leq_{\mathcal{V}} y$ y $y \leq_{\mathcal{V}} y^*$ y por lo tanto: $V = [x]_{\mathcal{V}} \leq_{\mathcal{V}} [y^*]_{\mathcal{V}}$. Esto es una contradicción pues en ese caso V no sería maximal pues $V = [x]_{\mathcal{V}} \neq [y^*]_{\mathcal{V}}$. Po lo tanto, X' es cerrado. En particular, X' es propio. Note entonces que $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \backslash V$ es un campo multivectorial acíclico sobre X' y cada uno de sus multivectores es regular. Así, por inducción, X' es un espacio cero. Además, como V es un espacio cero también pues es regular, entonces X es un espacio cero. $\square$

3.4. Compatibilidad, Conjuntos Invariantes y pares indexados

Definición 3.4.1. Decimos que un conjunto $A \subset X$ es $\mathcal{V}$-*compatible*, si para todo $x \in A$, $[x]_{\mathcal{V}} \subset A$. Además, se denota como $[A]^{-}_{\mathcal{V}}$ al subconjuto maximal compatible de A y por $[A]^{+}_{\mathcal{V}}$ al superconjunto minimal compatible de A (El conjunto maximal mas pequeño que contiene a A).

En particular, note que: $[A]^{-}_{\mathcal{V}} \subset [A]_{\mathcal{V}} \subset [A]^{-}_{\mathcal{V}}$.

Definición 3.4.2. Dado $A \subset X$, definimos la parte invariante de A como:

$$Inv(A) = \{x \in A : Sol(x^*, [A]^{-}_{\mathcal{V}}) \neq \emptyset\}$$

se definen además la parte invariante positiva y negativa de A como

$$Inv^{+}(A) = \{x \in A : Sol^{+}(x^*, [A]^{-}_{\mathcal{V}}) \neq \emptyset\}$$

$$Inv^{-}(A) = \{x \in A : Sol^{-}(x^*, [A]^{-}_{\mathcal{V}}) \neq \emptyset\}.$$

Así, decimos que A es *invariante* respecto al campo multivectorial $\mathcal{V}$ si $A = [A]^{-}_{\mathcal{V}}$. Además decimos que un conjunto invariante $S \subset X$ es un *conjunto aislado e invariante* si es propio S es propio.

Note en particular que $Inv^{+}(A) \cap Inv^{-}(A) = Inv(A)$.

Ejemplo 3.4.3. Considere $A = \{AB, AC, B, BC, ABC\} \subset X$ en el Ejemplo 3.3.6. Vamos a calcular el conjunto $Inv(A)$, para ello, es necesario primeramente conocer $[A]^{-}_{\mathcal{V}}$. Note que:

$$[A]^{-}_{\mathcal{V}} = \{AB, AC, B, ABC\}$$

lo anterior debería ser claro del hecho de que el multivector V_4 no está contenido en A. Por lo cual, $BC \notin [A]^{-}_{\mathcal{V}}$. Ahora bien:

$$Inv(A) = \{x \in A : Sol(x^*, [A]^{-}_{\mathcal{V}}) \neq \emptyset\}.$$

Analicemos cada elemento de A.

1. Elemento AB, su cara maximal es ABC. Una solución que pasa por ABC y no se sale de $[A]_{\mathcal{V}}^{-}$ es la solución cíclica en ABC.

2. Elemento AC, su cara maximal es ABC. Una solución que pasa por ABC y no se sale de $[A]_{\mathcal{V}}^{-}$ es la solución cíclica en ABC.

3. Elemento ABC, su cara maximal es ABC. Una solución que pasa por ABC y no se sale de $[A]_{\mathcal{V}}^{-}$ es la solución cíclica en ABC.

4. Elemento B, su cara maximal es B. Una solución que pasa por B y no se sale de $[A]_{\mathcal{V}}^{-}$ es la solución cíclica en B.

5. Elemento BC, su cara maximal es BC. Sin embargo, no existe ninguna solución que pase por BC y no se salga de $[A]_{\mathcal{V}}^{-}$, pues $BC \notin [A]_{\mathcal{V}}^{-}$.

Concluimos entonces que:

$$Inv(A) = \{AC, AB, BABC\}.$$

Note en particular que el argumento usado para AB, AC Y ABC es el mismo, esto se debe a que tienen la misma cara maximal. Así siempre que un elemento de un multivector esté en $Inv(A)$ automáticamente todo el multivector estará en $Inv(A)$. Note que entonces que según lo anterior, el conjunto $Inv(A)$ es $\mathcal{V}$-compatibe.

Teorema 3.4.4. Sea S un conjunto aislado e invariante respecto de un campo multivectorial $\mathcal{V}$, entonces S es $\mathcal{V}$-compatible.

Demostración. Efectivamente, sea $A \subset X$ tal que $S = Inv(A) = \{x \in A : Sol^{-}(x^{*}, [A]_{\mathcal{V}}^{-}) \neq \emptyset\}$. Sea $x \in S$, considere $y \in [x]_{\mathcal{V}}$. Como $x \in S$, entonces $Sol^{-}(x^{*}, [A]_{\mathcal{V}}^{-}) \neq \emptyset$, pero note que la cara maximal de x y y es la misma pues ambos están en el mismo multivector "$x^{*} = y^{*}$". Por lo tanto la misma solución que sirve para x funciona para y, luego $Sol^{-}(y^{*}, [A]_{\mathcal{V}}^{-}) \neq \emptyset$. Así, $y \in S$, esto es que $[x]_{\mathcal{V}} \subset S$. $\square$

Definición 3.4.5. Sea $P = (P_1, P_2)$ un par de subconjuntos cerrados $P_i \subset X$ tales que $P_2 \subset P_1$ y:

1. $Inv(P_1 \backslash P_2) = S$.

2. $P_1 \cap \Pi_{\mathcal{V}}(P_2) \subset P_2$.

3. $P_1 \cap \Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(X \backslash P_1) \subset P_2$.

Entonces, P es llamado *par indexado* para S. Además, decimos que P es saturado si $S = P_1 \backslash P_2$.

Los conjuntos $\Pi_{\mathcal{V}}$ y $\Pi_{\mathcal{V}}^{-1}$ de la definición anterior, están definidos como uno esperaría, es decir: Para $A \subset X$:

$$\Pi_{\mathcal{V}}(A) = \{y \in X : \exists x \in A, y \prec_{\mathcal{V}} x\}$$

$$\Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(A) = \{x \in X : \exists y \in A, y \prec_{\mathcal{V}} x\}.$$

Proposición 3.4.6. Si $P = (P_1, P_2)$ es un par indexado y $x \in P_1 \backslash P_2$, entonces $x^* \in P_1 \backslash P_2$.

Demostración. Asuma que $x^* \notin P_1 \backslash P_2$, entonces $x^* \notin P_1$ o $x^* \in P_2$. Note por otro lado que $x^* \in \Pi_{\mathcal{V}}(x)$ por la condición 1 de la Definición 3.3.4. Así, si $x^* \in P_1$, entonces $x^* \in X \backslash P_1$, además como $x^* \in \Pi_{\mathcal{V}}(x)$, entonces $x \in \Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(x^*)$. Así, $x \in P_1 \cap \Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(X \backslash P_1)$, pero $x \notin P_2$, esto contradice la definición de par indexado. Ahora bien, si $x^* \in P_2$, como $x \in Cl(x^*)$, entonces $x \in Cl(x^*) \subset P_2$, lo cual es una contradicción. □

Proposición 3.4.7. Si $P = (P_1, P_2)$ es un par indexado, entonces $P_1 \backslash P_2$ es $\mathcal{V}$-compatible.

Demostración. Supongamos que no. Entonces, existe $x \in P_1 \backslash P_2$, tal que $[x]_{\mathcal{V}}$ no está contenido en $P_1 \backslash P_2$. Por la proposición anterior, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x = x^*$. Entonces, existe $y \in [x^*]$ tal que $y \notin P_1 \backslash P_2$. Como $y \in Cl(x^*) \subset P_1$, entonces debe pasar que $y \in P_2$. Pero $x^* \in \Pi_{\mathcal{V}}(y)$ pues x^* es la cara maximal de y (Definición 3.3.4). Pero entonces, por la definición de par indexado (condición 2) $x^* \in P_2$, lo cual es una contradicción. □

La siguiente proposición debe ser familiar pues básicamente garantiza lo que conocíamos en capítulos anteriores como **propiedad de salida**.

Proposición 3.4.8. Asuma que $P = (P_1, P_2)$ es un par indexado y $x \in P_1$ y $\phi \in Sol^+(x)$. Entonces o bien $\phi \in Sol^+(x, P_1)$ o $\phi(i) \in P_2$ para algún $i \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Supongamos que $\phi \in Sol^+(x)$ y supongamos que $\phi \notin Sol^+(x, P_1)$. Entonces existe i tal que $\phi(i) \notin P_1$ pero $\phi(i-1) \in P_1$ (En particular $\phi(i) \notin P_2$). Note entonces que: $\phi(i-1) \in P_1 \cap \Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(\phi(i))$, luego por la defininción de par indexado $\phi(i-1) \in P_2$. □

Definición 3.4.9. Sea P un par indexado, se define el conjunto

$$\hat{P} = \{x \in P_1 : \forall \phi \in Sol^+(x), \exists i \in dom(\phi), \phi(i) \in P_2\}.$$

Teorema 3.4.10. Si $y \in \hat{P} \backslash P_2$, entonces $y^* \in \hat{P}$.

Demostración. Si $y = y^*$, la conclusión es obvia. Suponga entonces que $y \neq y^*$, por lo tanto, $y^* \in \Pi_{\mathcal{V}}(y)$. Además, note que $y \in P_1 \backslash P_2$. Por otro lado por la defininción de par indexado "condición 3": $P_1 \cap \Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(X \backslash P_1) \subset P_2$. Entonces note que, como $y \in \Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(y^*)$ y como $y \in P_1$, si y^* estuviera en $X \backslash P_1$ entonces y estará enP_2 lo cual es una contradicción. Así $y^* \in P_1$. Veamos ahora que efectivamente $y^* \in \hat{P}$, considere entonces $\phi \in Sol^+(y^*)$ y tome $\phi' = y * \phi$, como $y \in \hat{P}$, entonces $\phi'(i) \in P_2$ para algún $i \in Dom(\phi')$. Como $y \notin P_2$, entonces $i > 0$. Por lo tanto, $\phi(i-1) = \phi'(i) \in P_2$, por lo tanto $y^* \in \hat{P}$ □

Lema 3.4.11. Si P es un par indexado para un conjunto aislado e invariante S respecto de un campo multivectorial $\mathcal{V}$. Entonces $P^* = (S \cup \hat{P}, P_2)$ y $P^{**} = (S \cup \hat{P}, \hat{P})$ también lo son y además, P^{**} es saturado.

Demostración. Primeramente, veamos que los conjuntos $\hat{P}$ y $S \cup \hat{P}$ son cerrados. Efectivamente, Tome $x \in Cl(\hat{P})$ y asuma que $x \notin \hat{P}$. Como $\hat{P} \subset P_1$ y P_1 cerrado, entonces $x \in P_1$. Como $Cl(\hat{P}) = \bigcup_{x \in \hat{P}} Cl(x)$ es posible elegir $y \in \hat{P}$ tal que $x \in Cl(y)$. Si $y \in P_2$, entonces como P_2 es cerrado $x \in Cl(y) \subset P_2 \subset \hat{P}$, lo cual es una contradicción. Asumimos entonces que $y \notin P_2$. Entonces, por la proposición, anterior

$y^* \in \hat{P}$. Mas aún , $x \in Cl(y) \subset Cl(y^*)$, como $x \notin \hat{P}$, debe existir una solución $\phi \in Sol^+(x, X \backslash P_2)$, con $x \in P_1$. Entonces por la Proposición 3.4.8, $\phi \in Sol^+(x, P_1 \backslash P_2)$. Note además que $x \neq y^*$, pues $x \notin \hat{P}$ y $y^* \in \hat{P}$. Note entonces que no puede ser que $[y^*]_{\mathcal{V}} = [x]_{\mathcal{V}}$, pues en ese caso, $\phi(1) = y^*$ y entonces $\psi(i) = \phi(i+1)$ sería una solución en $Sol^+(y^*, P_1 \backslash P_2)$, lo cual contradice que $y* \in \hat{P}$. Por lo tanto, $[y^*]_{\mathcal{V}} \neq [x]_{\mathcal{V}}$. Así, por la condición 2 de la Defínción 3.3.4, $x \in \Pi_{\mathcal{V}}(y^*)$. Así, $(y^*) * \phi \in Sol^+(y^*, P_1 \backslash P_2)$, lo que nuevamente contradice que $y* \in \hat{P}$. Por lo tanto, $x \in \hat{P}$. Por lo tanto $\hat{P}$ es cerrado.

Ahora bien, para mostrar que $S \cup \hat{P}$ es cerrado, basta mostrar que $(Cl(S) \backslash S) \subset \hat{P}$. Supongamos que no es así, entonces existe $x \in Cl(S) \backslash S$ tal que $x \notin \hat{P}$. Sea $y \in S$ tal que $x \in Cl(y)$. Sin pérdida de generalidad, debido a la compatibilidad de S, podemos asumir que $y = y^*$. Además, la compatibilidad de S también nos permite garantizar que $x \notin [y^*]$. Así, $x \in \Pi_{\mathcal{V}}(y^*)$. Por otro lado, como $y^* \in S \subset Inv^-(P_1 \backslash P_2)$, existe $\phi \in Sol^-(y^*, P_1 \backslash P_2)$ y además como $x \notin \hat{P}$, existe una solución $\psi \in Sol^+(x, P_1 \backslash P_2)$; considere entonces $\phi * \psi \in Sol(x, P_1 \backslash P_2)$. Como $P_1 \backslash P_2$ es compatible, entonces $x \in Inv(P_1 \backslash P_2) = S$. Lo cual es una contradicción, por lo tanto $S \cup \hat{P}$ es cerrado.

Finalmente, es necesario verificar las propiedades de los pares indexados.

1. $\mathbf{Inv}(\mathbf{S} \cup \hat{\mathbf{P}} \backslash \mathbf{P_2}) = \mathbf{S}$: Note que

$$S = Inv(S) \subset Inv((S \cup \hat{P}) \backslash P_2) \subset (P_1 \backslash P_2) = S.$$

2. $(\mathbf{S} \cup \hat{\mathbf{P}}) \cap \mathbf{\Pi}_{\mathcal{V}}(\mathbf{P_2}) \subset \mathbf{P_2}$. Note que como $S \cup \hat{P} \subset P_1$, esta propiedad se deduce de la propiedad del par indexado P.

3. $(\mathbf{S} \cup \hat{\mathbf{P}}) \cap \mathbf{\Pi}_{\mathcal{V}}^{-1}(\mathbf{X} \backslash (\mathbf{S} \cup \hat{\mathbf{P}})) \subset \mathbf{P_2}$: Tome $x \in S \cup \hat{P}$ y asuma que existe $y \in \Pi_{\mathcal{V}}(x)$ tal que $y \in X \backslash (S \cup \hat{P})$, veamos que $x \notin S$. Supongamos que $x \in S$. Entonces, no puede ser que $y = x^*$, pues en este caso, por la compatibilidad de S, y estaría en S. Por lo tanto, $y \in Cl(x)$, así $y \in Cl(S) \backslash S$ y como ya vimos que $Cl(S) \backslash S \subset \hat{P}$, entonces $y \in \hat{P}$, lo cual es una contradicción. Así, $x \notin S$ y por lo tanto $x \in \hat{P}$. Ahora bien como $y \notin \hat{P}$, es posible encontrar una solución $\phi \in Sol^+(y, X \backslash P_2)$. Note entonces que $x * \phi \in Sol^+(x)$ y como $x \in \hat{P}$, debe existir un i tal que $x * \phi(i) \in P_2$. Pero entonces debe tenerse que $i = 0$, y por

lo tanto $x \in P_2$.

Finalmente, debemos verificar las propiedades de par indexado para P^{**}.

1. $\mathbf{Inv}((\mathbf{S} \cup \hat{\mathbf{P}}) \backslash \hat{\mathbf{P}}) = \mathbf{S}$: Note que $S \cap \hat{P} = \emptyset$, por lo tanto $S \cup \hat{P} \backslash \hat{P} = S$. Note que en particular, esto muestra que P^{**} es saturado.

2. $(\mathbf{S} \cup \hat{\mathbf{P}}) \cap \mathbf{\Pi}_{\mathcal{V}}(\mathbf{P_2}) \subset \hat{\mathbf{P}}$: Sea $x \in \hat{P}$ y $y \in \Pi_{\mathcal{V}}(x)$ tal que $y \in (S \cup \hat{P})$. Entonces $y \in P_1$. Considere una solución $\phi^+(y)$, entonces $x * \phi \in Sol^+(x)$. Como $x \in \hat{P}$, existe $i \in \mathbb{Z}^{n \geq 0}$ tal que $(x * \phi)(i) \in P_2$. Si $i > 0$, entonces $\phi(i-1) = (x*\phi)(i) \in P_2$ y por lo tanto, $y \in \hat{P}$. Si $i = 0$, entonces $x \in P_2$ y por la definición de par indexado aplicada a el par P, $y \in P_2$ pero $P_2 \subset \hat{P}$.

3. $(\mathbf{S} \cup \hat{\mathbf{P}}) \cap \mathbf{\Pi}_{\mathcal{V}}^{-1}(\mathbf{X} \backslash (\mathbf{S} \cup \hat{\mathbf{P}})) \subset \hat{\mathbf{P}}$: Considere $x \in S \cup \hat{P}$ y asuma que existe $y \in X \backslash (S \cup \hat{P})$. Si $x \in S$, por la compatibilidad de S tendríamos que $y \neq x^*$. Por lo tanto, asumimos que $y \in Cl(x) \subset Cl(S)$ y como $(Cl(S) \backslash S) \subset \hat{P}$, entonces $y \in \hat{P}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x \in \hat{P}$.

□

Definición 3.4.12. Sea P y Q pares indexados, decimos que P y Q son semi iguales si $P \subset Q$ "$P_i \subset Q_i$" y además $P_1 = Q_1$ o $P_2 = Q_2$. Además, si P y Q son pares semi iguales, escribimos:

$$A(P,Q) = \begin{cases} Q_1 \backslash P_1 & \text{si } P_2 = Q_2 \\ Q_2 \backslash P_2 & \text{si } P_1 = Q_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

Lema 3.4.13. Si $P \subset Q$ son pares indexados semi iguales entonces, $A(P,Q)$ es $\mathcal{V}$-compatible.

Demostración. Supongamos primeramente que $Q_1 = P_1$. Sea $V \in \mathcal{V}$. Basta mostrar que $x \in Q_2 \backslash P_2$ si y solo si $x^* \in Q_2 \backslash P_2$. Sea $x \in Q_2 \backslash P_2$, como $x^* \in \Pi_{\mathcal{V}}(x)$, entonces por la definición de par indexado, condición 2, aplicada a P, $x^* \in P_1 = Q_1$. Entonces aplicando nuevamente la condición 2 a Q, $x^* \in Q_2$. Como $x \in Cl(x^*)$, entonces $x^* \notin P_2$ pues de lo contrario, $x \in P_2$. Por lo tanto, $x \in Q_2 \backslash P_2$ implica que $x^* Q_2 \backslash P_2$. Recíprocamente, si $x^* \in Q_2 \backslash P_2$, entonces $x \in Cl(x^*) \subset Q_2$. Como además $x^* \subset Q_2 \subset Q_1 = P_1$, y $x^* \notin P_2$, entonces por la condición 2 de la definición de los pares indexados aplicada a P, $x \notin P_2$.

Considere ahora el caso $P_2 = Q_2$. Nuevamente, basta mostrar que: $x \in Q_1 \backslash P_1$ si y solo si $x^* \in Q_1 \backslash P_1$. Sea $x \in Q_1 \backslash P_1$. Entonces, $x \notin P_2 = Q_2$ y por la condicón 2 de la definición de pares indexados tenemos que $x^* \in Q_1$. Además, $x^* \notin P_1$ porque en otro caso $x \in Cl(x^*) \subset P_1$. Así, $x^* \in Q_1 \backslash P_1$. Finalmente, asuma que $x^* \in Q_1 \backslash P_1$, entonces $x \in Cl(x) \subset Q_1$. Note que no puede ser que $x \in P_1$, pues como $x^* \notin P_1$, si x estuviera en P_1 tendríamos, por la condición 3 de los índices, que $x \in P_2 = Q_2$, pero entonces, por compatibilidad, $x^* \in Q_2 = P_2 \subset P_1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x \notin Q_1 \backslash P_1$. $\square$

Lema 3.4.14. Asuma que $A \subset X$ es propio ($Mo(A)$ es cerrado), A es $\mathcal{V}$-compatible y además $Inv(A) = \emptyset$. Entonces A es un espacio cero.

Demostración. Vamos a mostrar primeramente que $\mathcal{V}_{|A}$ es aciclíco. Asuma lo contrario, entonces es posible construir un ciclo

$$x_n \prec_{\mathcal{V}} x_{n-1} \prec_{\mathcal{V}} \ldots \prec_{\mathcal{V}} x_0 = x_n$$

en A para algún $n \geq 1$. Por lo tanto, $\phi : \mathbb{Z} \to A$ definida como $\phi(i) = x_{i \ mod(n)}$ es una solución en A. Por lo tanto $Inv(A) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{V}' = \mathcal{V}_{|A}$ es aciclíco. Además, si $V \subset A$ es un multivector crítico, entonces $\psi : \mathbb{Z} \to A$ definida como $\psi(i) = V^*$, es una solución en A, lo que contradice que $Inv(A) = \emptyset$. Así todo multivector en $\mathcal{V}'$ es regular. Entonces por el Teorema 3.3.10, A es espacio cero. $\square$

El siguiente lema da un adelanto de lo que será considerado como Índice de Conley:

Lema 3.4.15. Si $P \subset Q$ son pares indexados semi iguales para S, entonces $H_k(P_1 \backslash P_2)$ y $H_k(Q_1 \backslash Q_2)$ son isomorfos.

Demostración. Supongamos primeramente que $P_2 = Q_2$, entonces $A(P, Q) = Q_1 \backslash P_1$. Como Q_1 es cerrado, en particular también es propio, luego que $A(P, Q)$ es abierto en Q_1, también es propio. Similarmente se prueba que $A(P, Q)$ es propio si $P_1 = Q_1$.

Por lo anterior, $A(P,Q)$ es un Complejo de Lefschetz, así $\mathcal{V}' = \mathcal{V}_{|A(P,Q)}$ es un multivector en $A(P,Q)$. Note además que:

$$S \cap (Q_1 \backslash P_1) \subset P_1 \cap (X \backslash P_1) = \emptyset$$

$$S \cap (Q_2 \backslash P_2) \subset P_1 \cap (X \backslash Q_2) = \emptyset.$$

Por lo tanto, $S \cap A(P,Q) = \emptyset$ e $Inv(A(P,Q)) \subset X \backslash S$. Por otro lado:

$$P_1 = Q_1 \Rightarrow Inv(Q_2 \backslash P_2) \subset Inv(P_1 \backslash P_2) = S$$

$$P_2 = Q_2 \Rightarrow Inv(Q_1 \backslash P_1) \subset Inv(Q_1 \backslash Q_2) = S.$$

Así, $Inv(A(P,Q)) \subset S \cap (X \backslash S) = \emptyset$. Por lo tanto, por el Lema 3.4.14, $A(P,Q)$ es un cero espacio.

Note además que: Si $P_2 = Q_2$, entonces $P_1 \backslash P_2 \subset Q_1 \backslash Q_2$, además $Q_1 \backslash Q_2 = A(P,Q) \cup (P_1 \backslash P_2)$ y $P_1 \backslash P_2 = P_1 \cap (Q_1 \backslash Q_2)$ es cerrado en $Q_1 \backslash Q_2$.
Por otro lado: Si $P_1 = Q_1$, entonces $Q_1 \backslash Q_2 \subset P_1 \backslash P_2$, además $P_1 \backslash P_2 = A(P,Q) \cup (Q_1 \backslash Q_2)$ y $A(P,Q) = Q_2 \backslash P_2 = Q_2 \cap (P_1 \backslash P_2)$ es cerrado en $P_1 \backslash P_2$. Así, por el Teorema 3.2.8 aplicada al par $(Q_1 \backslash Q_2, P_1 \backslash P_2)$ en el caso de que $P2 = Q_2$ y aplicado al par $(P_1 \backslash P_2, Q_1 \backslash P_2)$ en el caso de que $P_1 = Q_1$ y el hecho de que $A(P,Q)$ es un cero espacio, se concluye que $H_k(P_1 \backslash P_2)$ y $H_k(Q_1 \backslash Q_2)$ son isomorfos.

□

3.5. Índice de Conley para Campos multivectoriales

Definición 3.5.1. Dado $S \subset X$ un conjunto aislado e invariante respecto del un campo multivectorial $\mathcal{V}$, se define el *Índice de Conley* como $Con(S) = H_k(P_1, P_2)$.

El siguiente teorema muestra que a diferencia de los índices estudiados anteriormente, el índice de Conley para un campo multivectorial siempre puede ser elegido de manera canónica.

Teorema 3.5.2. Sea $S \subset X$ un conjunto aislado e invariante respecto del un campo multivectorial $\mathcal{V}$, entonces $P = (Cl(S), Mo(S))$ es un par indexado saturado para

S.

Demostración. Debemos verificar entonces las propiedades de los pares indexados: Note que S es invariante si y solo si S es propio, luego $Mo(S)$ es cerrado. Por otro lado, $Cl(S)$ es claramente cerrado.

1. $Inv(Cl(S)\backslash Mo(S)) = S$, efectivamente, note que como $Mo(A) = Cl(A)\backslash A$, entonces en particular $S = Cl(S)\backslash Mo(S)$. Así, $S = Inv(S) = Inv(Cl(S)\backslash Mo(S))$, pues S es invariante.

2. $Cl(S) \cap \Pi_{\mathcal{V}}(Mo(S)) \subset Mo(S)$, efectivamente, sea $x \in Mo(S)$ y $y \in \Pi_{\mathcal{V}}(x) \cap Cl(S)$. Asuma que $y \notin Mo(S) = Cl(S)\backslash S$, entonces $y \in Cl(S)\backslash S$. Entonces, $y \in S$ y por la compatibilidad de S, $[y]_{\mathcal{V}} \subset S$. Note entonces que $[x]_{\mathcal{V}} \neq [y]_{\mathcal{V}}$ pues $x \in Mo(S) = Cl(S)\backslash S$. Note entonces que $[x]_{\mathcal{V}} \neq [y]_{\mathcal{V}}$ y $y \in \Pi_{\mathcal{V}}(x)$, lo anterior implica que existe una flecha de x a y dada por la condión 2 en la Definición 3.3.4 pues la condicón 1 y la condición 3 quedan descartadas pues $[x]_{\mathcal{V}} \neq [y]_{\mathcal{V}}$. Esto implica que $y \in Cl(x)\backslash[x]_{\mathcal{V}}$. Así, $y \in Cl(x)$ y como $x \in Mo(S)$ y S es un conjunto aislado e invariante, en particular es propio, luego $Mo(S)$ es cerrado, así $y \in Cl(x) \subset Mo(S)$. Lo cual es una contradicción.

3. $Cl(S) \cap \Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(X\backslash Cl(S)) \subset Mo(S)$, efectivamente, sea $x \in Cl(S)$ y supongamos que existe $y \in \Pi_{\mathcal{V}}(x)\backslash Cl(S)$. Note entonces que $x \neq y$, sin embargo debe tenerse que $[x]_{\mathcal{V}} = [y]_{\mathcal{V}}$, pues de no ser así, la única posible flecha estaría dada por la condición 2 de la Definición 3.3.4, así $y \in Cl(x) \subset Cl(S)$ y por lo tanto $y \in Cl(S)$. Por otro lado, como $y \notin Cl(S)$, entonces $y \notin S$ y por la compatibilidad de S, entonces $[y]_{\mathcal{V}} \cap S = \emptyset$. Así, $x \notin S$, por lo tanto $x \in Cl(S)\backslash S = Mo(S)$.

□

El teorema anterior comprueba la existencia de un par indexado canónico, note que esto evita muchas de las dificultades que tiene el Índice de Conley de los capítulos anteriores, para los cuales, si bien es cierto que siempre es posible encontrar un par indexado, siempre es necesario realizar la búsqueda y la verificación de que efectivamente el par P elegido lo es.

Teorema 3.5.3. Si P y Q son pares indexados para un conjunto aislado e invariante S, entonces $H_k(P_1 \backslash P_2)$ y $H_k(Q_1 \backslash Q_2)$ son isomorfos.

Demostración. Note que si ambos pares son saturados, es decir si $P_1 \backslash P_2 = S = Q_1 \backslash Q_2$, el resultado es obvio.
Suponga entonces que P no es saturado y Q lo es. Por la afirmación anterior, como P^{**} (Lema 3.4.11) y Q son saturados, entonces $H_k({P_1}^{**} \backslash {P_2}^{**})$ y $H_k(Q_1 \backslash Q_2)$ son isomorfos. Así, basta probar el teorema cuando $Q = P^{**}$. Note que $P^* \subset P$ y $P^* \subset P^{**}$ y cada una de las dos inclusiones es de pares semi iguales. Por lo tanto, ambas inclusiones inducen isomorfismos por el Lema 3.4.15. Por lo tanto $H_k(P_1 \backslash P_2)$ y $H_k(Q_1 \backslash Q_2)$ son isomorfos. Ahora bien, si ninguno de los dos es saturado, considere P^{**} y Q^{**}. Entonces por los dos casos anteriores $H_k({P_1}^{**} \backslash {P_2}^{**})$ y $H_k(P_1 \backslash P_1)$ son isomorfos, y tambieén $H_k({Q_1}^{**} \backslash {Q_2}^{**})$ y $H_k(Q_1 \backslash Q_1)$ y como P^{**} y Q_{**} son saturados $H_k({Q_1}^{**} \backslash {Q_2}^{**})$ y $H_k({P_1}^{**} \backslash {P_2}^{**})$ son isomorfos. Así $H_k(P_1 \backslash P_2)$ y $H_k(Q_1 \backslash Q_2)$ son isomorfos. $\square$

Ejemplo 3.5.4. Continuando con los Ejemplos 3.3.6 y 3.4.3. Tenemos un conjunto invariante $S = \{AB, AC, B, ABC\}$, por el Teorema 3.5.2, sabemos que $P = (Cl(S), Mo(S))$ es un par indexado saturado para S. Calculemos el índice de Conley de S:

$$Con(S) = H_k(P_1 \backslash P_2) = H_k(\{AB, AC, B, ABC\}) = H_k(S).$$

Usando el método de colapso, podemos conlcluir que $H_k(S) = 0$ para todo $k > 1$. Vease la Figura 3.3.

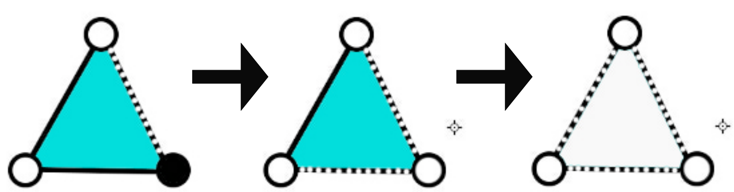

Figura 3.3:

Sin embargo, es posible calcular los grupos de homología de manera directa de la defínción. Como $S = \{AB, AC, B, ABC\}$, es un subconjunto de un complejo simplicial, usaamos la función k asociada a los complejos simpliciales para darle estructura de complejos de Lefschetz:

$$k(\sigma,\tau) = \begin{cases} (-1)^i & \text{si } \sigma = (v_0, ..., v_q), \tau = (v_0 ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_q) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tenemos entonces que: $k(ABC, AB) = 1$, $k(ABC, AC) = -1$, $k(ABC, B) = 0$, $k(AB, B) = 1$, $k(AC, B) = 0$. Por lo tanto, el morfimos ∂ aplicado a los generadores de los C_i son: $\partial_2(ABC) = AB - AC$, $\partial_1(AB) = B$, $\partial_1(AC) = 0$. Note entonces que:

1. $H_2 = ker(\partial_2)/im(\partial_3) = \{0\}$, pues $ker(\partial_2) = \{0\}$.

2. $H_1 = ker(\partial_1)/im(\partial_2) = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{0\}$, pues $ker(\partial_1)$ e $im(\partial_2)$ poseen cada uno un solo generador.

Índice de notación

Conjuntos y Categorías:

Conceptos Cap 1	Definición
$Inv_f(N)$	$Inv_f(N) = \{x \in N : f^n(x) \in N, \forall n \in \mathbb{Z}\}$
$Inv_f^-(N)$	$Inv_f^-(N) = \{x \in N : f^n(x) \in N, \forall n \in \mathbb{Z}^-\}$
$Inv_f^+(N)$	$Inv_f^+(N) = \{x \in N : f^n(x) \in N, \forall n \in \mathbb{Z}^+\}$
$Endo(\mathcal{C})$	
$Szym(Endo(\mathcal{C}))$	
$Comp_*$	Catagoría de los espacios métricos punteados
$HComp_*$	Catagoría homotópica de los espacios métricos punteados
Top_2	Catagoría homotópica de los pares topológicos
$G_i(P,Q)$	$G_i = P_i \cup (f(Q_i) \cap N)$
(E,e)	Par conformado por un conjunto E y un endomorfismo $e : E \to E$
$\mathcal{E}E$	Categoría formada por objetos de la forma (E,e)
$\mathcal{E}M$	Subcategoría completa de $\mathcal{E}E$ conformada por objetos de la forma (E,e), $e : E \to E$ monomorfismo
$\mathcal{E}I$	Subcategoría completa de $\mathcal{E}E$ conformada por objetos de la forma (E,e), $e : E \to E$ isomorfismo
$gker(f)$	$gker(f) = \bigcup\{f^{-n}(0) : n \in \mathbb{N}\}$
$gim(f)$	$gim(f) = \bigcap\{f^n(F) : n \in \mathbb{N}\}$

Conceptos Cap 2	Definición
$Inv_\phi(N)$	$Inv(N) = Inv(N,\phi) = \{x \in N : \phi_t(x) \in N, \forall t \in \mathbb{R}\}$

Conceptos Cap 3	Definición
$Mo(A)$	$Mo(A) = Cl(A) \backslash A$
$bd(A)$	$bd(A) = \{t \in X : k(s,t) \neq 0, s \in A\}$
$cbd(A)$	$cbd(A) = \{s \in X : k(s,t) \neq 0, t \in A\}$
$Sol(x, A)$	$Sol(x, A) = \{\phi : \mathbb{Z} \to X : x = \phi(0) \in Im(\phi) \subset A\}$
$Sol^{+}(x, A)$	$Sol^{+}(x, A) = \{\phi : \mathbb{Z}^{n \geq 0} \to X : x \in Im(\phi) \subset A\}$
$Sol^{-}(x, A)$	$Sol^{-}(x, A) = \{\phi : \mathbb{Z}^{n \leq 0} \to X : x \in Im(\phi) \subset A\}$
$\Pi_{\mathcal{V}}(x)$	$\Pi_{\mathcal{V}}(x) = \{y \in X : x \prec_{\mathcal{V}} y\}$
$\Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(x)$	$\Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(A) = \{x \in X : \exists y \in A, y \prec_{\mathcal{V}} x\}$
$[A]_{\mathcal{V}}^{-}$	Subconjuto maximal compatible de A
$[A]_{\mathcal{V}}^{+}$	Superconjuto compatible de A
$Inv(A)$	$Inv(A) = \{x \in A : Sol(x^{*}, [A]_{\mathcal{V}}^{-}) \neq \emptyset\}$
$Inv^{+}(A)$	$Inv^{+}(A) = \{x \in A : Sol^{+}(x^{*}, [A]_{\mathcal{V}}^{-}) \neq \emptyset\}$
$Inv^{-}(A)$	$Inv^{-}(A) = \{x \in A : Sol^{-}(x^{*}, [A]_{\mathcal{V}}^{-}) \neq \emptyset\}$

Bibliografía

[1] Krzysztof P. Rybakowski, *The homotopy index and partial differential equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1987.\MR910097

[2] Edwin H. Spanier, *Algebraic topology*, Springer-Verlag, New York, [1995?]. Corrected reprint of the 1966 original.\MR1325242

[3] Konstantin and Mrozek Mischaikow Marian, *Conley index*, Handbook of dynamical systems, Vol. 2, 2002, pp. 393–460, DOI 10.1016/S1874-575X(02)80030-3.\MR1901060

[4] A. Szymczak, *The Conley index for discrete semidynamical systems*, Topology Appl. **66** (1995), no. 3, 215–240, DOI 10.1016/0166-8641(95)0003J-S.\MR1359514

[5] Tomasz Kaczynski, *Conley index for set-valued maps: from theory to computation*, Conley index theory (Warsaw, 1997), Banach Center Publ., vol. 47, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 1999, pp. 57–65.\MR1692361

[6] Marian Mrozek, *Construction and properties of the Conley index*, Conley index theory (Warsaw, 1997), Banach Center Publ., vol. 47, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 1999, pp. 29–40.\MR1686769

[7] ———, *Leray functor and cohomological Conley index for discrete dynamical systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), no. 1, 149–178, DOI 10.2307/2001233.\MR968888

[8] ———, *The Conley index on compact ANRs is of finite type*, Results Math. **18** (1990), no. 3-4, 306–313, DOI 10.1007/BF03323175.\MR1078427

[9] Bogdan Batko and Marian Mrozek, *Weak index pairs and the Conley index for discrete multivalued dynamical systems*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **15** (2016), no. 2, 1143–1162, DOI 10.1137/15M1046691. \MR3513850

[10] Konstantin and Mrozek Mischaikow Marian, *Conley index*, Handbook of dynamical systems, Vol. 2, 2002, pp. 393–460, DOI 10.1016/S1874-575X(02)80030-3.\MR1901060

[11] Marian Mrozek, *Conley-Morse-Forman theory for combinatorial multivector fields on Lefschetz complexes*, Found. Comput. Math. **17** (2017), no. 6, 1585–1633, DOI 10.1007/s10208-016-9330-z.\MR3735862

[12] Marian Mrozek and Bogdan Batko, *Coreduction homology algorithm*, Discrete Comput. Geom. **41** (2009), no. 1, 96–118, DOI 10.1007/s00454-008-9073-y.\MR2470072

[13] Solomon Lefschetz, *Algebraic Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 27, American Mathematical Society, New York, 1942.\MR0007093

[14] Charles Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 38, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.\MR511133

.