



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

DESCOMPOSICIÓN DE ZARISKI DE LOS IDEALES MULTIPLICADORES ASOCIADOS A UNA SINGULARIDAD DE CURVA PLANA

T E S I S I N A

Que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias
con Orientación en
Matemáticas Básicas

Presenta

Emmanuel Fuentes Peña

Director de Tesis:

Dr. Manuel González Villa

Autorización de la versión final

Dedico esta tesina a mi madre Blanca Esthela...

Agradecimientos

Agradezco a mi madre, Blanca Esthela Peña Jiménez, porque siempre ha confiado en mí, por mantenerme con los pies en la tierra, por apoyarme en todo y, especialmente, por haberme enseñado que para lograr mis metas hay que esforzarse más de lo necesario. Agradezco a Luis Roberto Uscanga Lara por ser el padre que nunca tuve, y por sus consejos a lo largo de los últimos 16 años.

Agradezco al Dr. Manuel González Villa por ser mi asesor y orientarme en todo momento a lo largo de mis estudios de maestría. Agradezco a la Dra. Lilia Alanís López, al Dr. Jorge Olivares Vázquez, y al Dr. Luis Núñez Betancourt por fungir como sinodales de la presente tesina. También agradezco sus comentarios, correcciones y observaciones de la misma.

Gracias al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), por darme la oportunidad de conseguir mis metas académicas. Al profesorado que me brindó su conocimiento y tiempo durante mis cursos de maestría. Por último, agradezco también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico brindado para mis estudios de maestría.

Índice

Agradecimientos	v
Introducción	1
1 Preliminares	3
2 Curvas Planas	7
2.1 Desarrollo de Newton y Pares de Puiseux	8
2.2 Resolución por explosiones	16
2.2.1 Resolución de curvas planas irreducibles	21
2.2.2 Resolución de curvas planas reducibles	29
3 Descomposición de Zariski	31
3.1 Cerradura integral de un ideal	32
3.2 Ideales monomiales	35
3.3 Teoremas de Zariski	39
3.3.1 Descomposición de Zariski para ideales monomiales	39

4	Ideales Multiplicadores	41
4.1	Log-resolución y divisores	42
4.2	Ideales multiplicadores	44
4.3	Números de salto y periodicidad	47
4.4	Teorema de Howald e ideales monomiales	50
5	Descomposición de Zariski de los ideales multiplicadores asociados a una singularidad de curva plana: Algunos resultados	53
5.1	Sucesión de Milnor y de factores	54
5.2	Curvas con un par de Puiseux	58
5.2.1	Algunos resultados	60
5.3	Algoritmo de Alberich-Carramiñana, Álvarez-Montaner y Blanco	67
	Apéndice A Script para calcular la descomposición de Zariski de curvas con un par de Puiseux	79
	Referencias	84

Introducción

El objetivo del presente escrito es entender la estructura detrás de los ideales multiplicadores $\mathcal{J}(\lambda \cdot C)$ asociados a una singularidad de curva plana C . En específico, se busca obtener información de la singularidad usando la descomposición de Zariski en los ideales multiplicadores de la curva. A cada ideal multiplicador se le puede asociar el número de Milnor de un elemento general, con lo cual se puede construir una sucesión. También se le puede asociar el número de factores que aparecen en la descomposición de Zariski. Resulta interesante preguntarse acerca de las propiedades de estas sucesiones. Por ejemplo, ¿cuándo los ideales multiplicadores son simples?, ¿cómo varía la descomposición de Zariski conforme λ crece?, ¿es posible dar explícitamente estas sucesiones a partir del tipo topológico de la curva?, ¿qué información se puede recuperar de las mismas?, etc.

En este escrito se encontraron algunos resultados parciales para una curva irreducible con un par de Puiseux. Sin embargo, se espera desarrollar más estos resultados en un futuro.

La estructura de la presente tesina es la siguiente:

En el capítulo uno se hará un repaso de los conceptos y resultados preliminares que se consideran necesarios para el desarrollo del presente trabajo, sin profundizar en los mismos.

En la primera mitad del capítulo dos se trabajará con gérmenes de curvas en el plano complejo. En particular, se demostrará la existencia de parametrizaciones de la curva, así también

se mencionará el método de Newton para encontrar la *parametrización de Puiseux*. Además se introducirán los *exponentes característicos* y los *pares de Puiseux*, los cuales son invariantes de dicha parametrización. En la segunda mitad del capítulo se estudiará la resolución de singularidades planas mediante *explosiones en puntos*. Se demostrará que siempre existe dicha resolución, además se introducirán el *grafo de resolución* y la *secuencia de multiplicidades* asociada a dicha resolución. Estos últimos también son invariantes de la singularidad.

En el tercer capítulo se repasarán los fundamentos necesarios para poder enunciar el Teorema de Factorización de Zariski, el cual nos dice que un ideal integralmente cerrado en un anillo local regular de dimensión 2 admite una factorización esencialmente única en términos de potencias de ideales simples y \mathfrak{m} -primarios. En el caso de ideales monomiales esta factorización adquiere una interpretación geométrica usando el polígono de Newton del ideal.

En el cuarto capítulo se definirán los ideales multiplicadores de un \mathbb{Q} -divisor en una variedad algebraica compleja X , así como de una gavilla de ideales $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$. Para esto primero se definirán las *log-resoluciones*. Los ideales multiplicadores son ideales integralmente cerrados y están determinados por un parámetro $\lambda > 0$. Los *números de salto* son los valores de λ para los cuales el ideal multiplicador cambia. Estos números son racionales y presentan la propiedad de ser periódicos. También se enunciará el Teorema de Howald, el cual nos permite calcular, de una manera sencilla, ideales multiplicadores asociados a ideales monomiales o a curvas no degeneradas respecto a su polígono de Newton.

En el quinto, y último capítulo, se estudiará la descomposición de Zariski de los ideales multiplicadores de una singularidad plana. Además se introducirán dos sucesiones asociadas a dicha descomposición, las cuales son la *sucesión de Milnor* y la *sucesión de factores*. Se mostrarán resultados parciales para el caso de singularidades irreducibles con un par de Puiseux. Por último, se hablará del algoritmo de Alberich-Carramiñana, Álvarez y Blanco, el cual nos ayuda a encontrar generadores monomiales en términos de *elementos de contacto máximo* de ideales *completos* (i.e. integralmente cerrados).

Por último, en el Apéndice 1 se muestra un script hecho en  para calcular la descomposición de Zariski para singularidades con un par de Puiseux de la forma $y^a + x^b = 0$.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Definición 1.0.1. El *gérmen* de una función holomorfa en un punto $p \in \mathbb{C}^n$ se define como la clase de equivalencia de funciones holomorfas definidas en una vecindad de p . Dos funciones f, g definen el mismo gérmen si existe una vecindad U de p tal que $f|_U = g|_U$.

La suma y multiplicación de funciones induce una estructura de anillo en el conjunto de gérmenes de funciones holomorfas en p . Dicha estructura se llama *anillo de gérmenes de funciones holomorfas* en p y se denota por $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, p}$.

Como cada función holomorfa es analítica, podemos asociarle su expansión de Taylor alrededor del punto p . Además, dos funciones que definen el mismo gérmen tienen la misma expansión de Taylor. Con esto podemos definir un homomorfismo entre $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, p}$ y el anillo de series convergentes en n variables $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, el cual resulta ser un isomorfismo. Para simplificar la notación, en ocasiones escribiremos $\mathbb{C}\{x\} = \mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Definición 1.0.2. Un elemento $f \in \mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es llamado x_i -regular de orden k si $f(0, \dots, x_i, \dots, 0)$ tiene un cero de orden k .

Definición 1.0.3. Un elemento $p \in \mathbb{C}\{x\}[t]$ es llamado *polinomio de Weierstraß* si tiene la

forma

$$t^k + a_1(x)t^{k-1} + \dots + a_k(x),$$

donde $a_i \in x\mathbb{C}\{x\}$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. En otras palabras, es un polinomio mónico cuyos coeficientes son funciones analíticas que se anulan en el origen.

Teorema 1.0.4 (División de Weierstraß). *Sean $f, g \in \mathbb{C}\{t, x\}$ y supongamos que f es t -regular de orden k . Entonces existen únicos $q \in \mathbb{C}\{t, x\}$ y $r \in \mathbb{C}\{x\}[t]$, con el grado de r estrictamente menor a k , tales que*

$$g = qf + r.$$

Teorema 1.0.5 (Preparación de Weierstraß). *Sea $f \in \mathbb{C}\{t, x\}$ t -regular de orden k . Entonces existen $g \in \mathbb{C}\{t, x\}$ y $p \in \mathbb{C}\{x\}[t]$ polinomio de Weierstraß tales que*

$$f(t, x) = p(t) \cdot g(t, x)$$

con $g(0, 0) \neq 0$. Además los polinomios p y g están determinados de manera única.

Observaciones 1.0.6.

- (i) Podemos encontrar una vecindad U del origen en la cual g no se anula. Entonces los ceros de f coinciden con los ceros del polinomio $p(t) = t^k + a_1(x)t^{k-1} + \dots + a_k(x)$ en U .
- (ii) Bajo un cambio de coordenadas, siempre podemos asumir que f sea t -regular.

Definición 1.0.7. Sean $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$, definimos el *número de intersección* o *multiplicidad de intersección* $(f \cdot g)$ como

$$(f \cdot g) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\}/(f, g),$$

donde (f, g) es el ideal generado por f y g .

Una parametrización $x(t), y(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ se dice que es *buen*a si no existe parametrización $x_1(t), y_1(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ tal que $x(t) = x_1(\tau_1(t))$ y $y(t) = y_1(\tau_1(t))$, donde τ_1 es un elemento de $\mathbb{C}\{t\}$ tal que $\text{ord } \tau_1 > 1$.

Proposición 1.0.8. Sean $f, g, h \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Las siguientes son propiedades básicas del número de intersección.

(i) $(f \cdot g)$ depende solamente del ideal (f, g) .

(ii) $(f \cdot g + hf) = (f \cdot g)$.

(iii) $(f \cdot gh) = (f \cdot g) + (f \cdot h)$.

(iv) Si $(x(t), y(t))$ es una buena parametrización de f irreducible, entonces $(f \cdot g) = \text{ord } g(x(t), y(t))$.

Definición 1.0.9. Sea $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$.

(i) Definimos el ideal Jacobiano por $J(f) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

(ii) El álgebra de Milnor de f se define como la \mathbb{C} -álgebra $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}/J(f)$. El número de Milnor de f se define como

$$\mu(f) := \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}/(J(f)).$$

Lema 1.0.10 (Teissier). Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ con $f(0, 0) = 0$ y $f(0, y) \neq 0$. Entonces

$$\left(f \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mu(f) + (f \cdot x) - 1.$$

Proposición 1.0.11. Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ con $f(0, 0) = 0$. Las siguientes afirmaciones se tienen.

(i) Si $g = fu$, donde u es una unidad, entonces $\mu(g) = \mu(f)$.

(ii) Si $f = f_1 \cdots f_r$ con $f_i(0) = 0$ y las f_i son coprimas 2 a 2, entonces

$$\mu(f) + m - 1 = \sum_{i=0}^r \mu(f_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} (f_i \cdot f_j). \quad (1.1)$$

Proposición 1.0.12. Sea r el número de ramas de la curva $f = 0$. Entonces

$$\mu(f) + r \equiv 1 \pmod{2}.$$

CAPÍTULO 2

Curvas Planas

En el presente capítulo nos enfocaremos en estudiar las propiedades de curvas en el plano complejo \mathbb{C}^2 . Como sólo nos interesan propiedades locales, nos enfocaremos en estudiar gérmenes de funciones analíticas en el origen. Para esto consideraremos $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ con $f(0, 0) = 0$. En la sección 2.1 se estudiará el método de Newton para encontrar una parametrización de $f(x, y) = 0$, dicha parametrización recibe el nombre de *parametrización de Puiseux o de Newton-Puiseux*. También se definirán los *pares de Puiseux* y los *exponentes característicos*, los cuales son invariantes asociados a dicha parametrización. En la sección 2.2 se discutirá un proceso para desingularizar curvas, el cual consiste en resolución de singularidades mediante *explosiones en puntos*. Se probará que siempre es posible desingularizar una curva plana mediante este método. También se introducirán invariantes asociados a la resolución, los cuales son equivalentes a los *exponentes característicos* y a los *pares de Puiseux* de la parametrización de Puiseux de $f = 0$.

2.1 Desarrollo de Newton y Pares de Puiseux

Estudiar el conjunto de ceros de f , en cierta forma, es encontrar soluciones de la ecuación $f(x, y) = 0$. En el caso de que f sea regular en el origen, podemos hacer uso del teorema de la función implícita para encontrar una función analítica $y(x)$, definida en una vecindad del origen, tal que $f(x, y(x)) = 0$.

El caso más interesante es cuando f tiene una singularidad en el origen. Como no podemos hacer uso del teorema de la función implícita, necesitamos un enfoque distinto. Para esto, en vez de buscar una solución $y(x)$ en series de potencias enteras de x , permitiremos potencias fraccionarias. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Consideremos $f(x, y) = y^3 - x^2$, notemos que $y(x) = x^{2/3}$ satisface la ecuación anterior.

Ejemplo 2. En general, si μ es un racional positivo y $f(x, y)$ es un polinomio de la forma

$$f(x, y) = \sum_{a+\mu b=w} c_{ab} x^a y^b$$

esto es, f es un polinomio cuasi-homogéneo con peso $(1, \mu)$ y grado w . Entonces podemos encontrar una solución de la forma $y = tx^\mu$. Basta sustituir esta expresión para obtener

$$\begin{aligned} f(x, tx^\mu) &= \sum_{a+\mu b=w} c_{ab} x^{a+\mu b} t^b \\ &= x^w \sum_{a+\mu b=w} c_{ab} t^b \\ &= x^w g(t). \end{aligned}$$

Si t_0 es un cero de g , entonces una solución para $f(x, y) = 0$ es de la forma $y = t_0 x^\mu$. Además podemos tomar $t_0 \neq 0$ en el caso de que f no sea un monomio.

En el Ejemplo 2 notamos que podemos obtener una solución de la forma $y(x) = tx^\mu$ siempre que nuestra función f sea un polinomio cuasi-homogéneo. Para el caso general, podemos ir construyendo una solución al aproximar mediante polinomios cuasi-homogéneos.

Esta es la idea central en el método que desarrolló Newton en una serie de cartas enviadas a Leibniz.

Definición 2.1.1. Sea $f(x, y) = \sum c_{ab}x^a y^b$ una serie de potencias en $\mathbb{C}\{x, y\}$, tenemos las siguientes definiciones.

(i) $\Delta(f) = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : c_{ab} \neq 0\}$ es llamado el *soporte* de f .

(ii) El *polígono de Newton* de f se define como

$$\Gamma(f) = \text{conv} \left(\bigcup_{p \in \Delta(f)} (p + \mathbb{R}_{\geq 0}^2) \right),$$

donde *conv* es la envolvente convexa.

(iii) Se le llaman *caras* a los lados compactos del polígono de Newton.

(iv) Si S es una cara de $\Gamma(f)$, definimos la *restricción* de f sobre S como

$$f_S = \sum_{(a,b) \in S} c_{ab}x^a y^b$$

Un polinomio cuasi-homogéneo tiene su soporte sobre una línea recta. Además, dado un polinomio f , la restricción f_S es un polinomio cuasi-homogéneo.

Antes de explicar el método de Newton de forma general, ilustremos primero con un ejemplo la idea central.

Ejemplo 3. Consideremos $f(x, y) = y^4 - 2x^3y^2 - 4x^4y - x^5 + x^6$, su soporte está dado por $\Delta(f) = \{(0, 4), (3, 2), (4, 1), (5, 0), (6, 0)\}$.

Observamos que su soporte no está sobre una recta, por lo que no podemos encontrar una solución como en el Ejemplo 2. Sin embargo, podemos escribir $f = \tilde{f} + g$, donde $\tilde{f}(x, y) = y^4 - x^5$ y $g(x, y) = -2x^3y^2 - 4x^4y + x^6$.

Una solución de $\tilde{f} = 0$ es $y = x^{5/4}$. Sustituyendo en $f(x, y)$ obtenemos

$$f(x, x^{5/4}) = g(x, x^{5/4}) = -2x^{11/2} - 4x^{21/4} + x^{15/2},$$

2.1. Desarrollo de Newton y Pares de Puiseux

con lo cual los términos de menor grado han desaparecido. Podemos tomar como una aproximación la solución $y = x^{5/4}$. Una buena suposición es pensar que la solución real difiere de la aproximación sólo por términos de mayor grado. Expresamos la solución real como

$$\begin{aligned}y &= x^{5/4} + \text{términos de grado mayor} \\ &= x^{5/4}(1 + y_1),\end{aligned}$$

y consideramos el cambio de variable $x = x_1^4$. Sustituyendo en $f(x, y)$ obtenemos

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x_1^{20}(1 + y_1)^4 - 2x_1^{22}(1 + y_1)^2 - 4x_1^{21}(1 + y_1) - x_1^{20} + x_1^{24} \\ &= x_1^{20}[(1 + y_1)^4 - 2x_1^2(1 + y_1)^2 - 4x_1(1 + y_1) - 1 + x_1^4] \\ &= x_1^{20} f_1(x_1, y_1),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}f_1(x_1, y_1) &= x_1^4 - 2x_1^2 y_1^2 - 4x_1^2 y_1 - 2x_1^2 - 4x_1 y_1 - 4x_1 + y_1^4 \\ &\quad + 4y_1^3 + 6y_1^2 + 4y_1.\end{aligned}$$

El soporte de f_1 se encuentra sobre un conjunto de líneas paralelas de pendiente -1. Por lo que podemos encontrar una solución de la forma $y_1 = tx_1$.

$$\begin{aligned}f_1(x_1, tx_1) &= x_1^4 - 2t^2 x_1^4 - 4tx_1^3 - 2x_1^2 - 4tx_1^2 - 4x_1 \\ &\quad + t^4 x_1^4 + 4t^3 x_1^3 + 6t^2 x_1^2 + 4tx_1 \\ &= (4t - 4)x_1 + (6t^2 - 4t - 2)x_1^2 + (4t^3 - 4t)x_1^3 \\ &\quad + (t^4 - 2t^2 + 1)x_1^4.\end{aligned}$$

Tomando $t = 1$ eliminamos el término de menor grado. De hecho $y_1 = x_1$ es una solución de $f_1(x_1, y_1) = 0$. Dando marcha atrás a los cambios de variable hechos, encontramos la solución $y = x^{5/4} + x^{3/2}$ para $f(x, y) = 0$.

Ahora podemos describir el método de Newton en general. Para esto consideremos $f(x, y) = \sum c_{ab} x^a y^b \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que es y -general

de orden m . Consideremos la restricción f_S , donde S es la cara con la menor pendiente del polígono de Newton $\Delta(f)$. Escribamos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_S(x, y) + g(x, y) \\ &= \sum_{a+\mu_0 b=m\mu_0} c_{ab} x^a y^b + \sum_{a+\mu_0 b>m\mu_0} c_{ab} x^a y^b \end{aligned}$$

donde $-\frac{1}{\mu_0}$ es la pendiente de la cara S . Como f_S es un polinomio homogéneo, podemos encontrar una solución $y_0 = t_0 x^{\mu_0}$ con $t_0 \neq 0$ (véase Ejemplo 2). Esta solución aproxima a una solución de $f(x, y) = 0$ al anular los términos de menor grado.

Escribamos $\mu_0 = \frac{p_0}{q_0}$, donde p_0 y q_0 son primos relativos. Para evitar trabajar con potencias fraccionarias, hagamos $x_1 := x^{1/q_0}$. La primera aproximación toma la forma $y_0 = t_0 x_1^{p_0}$.

Para mejorar la aproximación, hagamos

$$y = x_1^{p_0}(t_0 + y_1),$$

y sustituyamos en $f(x, y)$ para obtener

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}(t_0 + y_1)) \\ &= \sum_{a+\mu_0 b=m\mu_0} c_{ab} x_1^{aq_0+bp_0} (t_0 + y_1)^b + \sum_{a+\mu_0 b>m\mu_0} c_{ab} x_1^{aq_0+bp_0} (t_0 + y_1)^b \\ &= \sum_{aq_0+bp_0=m p_0} c_{ab} x_1^{aq_0+bp_0} (t_0 + y_1)^b + \sum_{aq_0+bp_0>m p_0} c_{ab} x_1^{aq_0+bp_0} (t_0 + y_1)^b \\ &= x_1^{m p_0} f_1(x_1, y_1), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde la serie $f_1(x_1, y_1)$ es y_1 -general de orden $m_1 \leq m$.

En el caso de que el polígono de Newton $\Gamma(f)$ sea una traslación del primer cuadrante, no podemos encontrar una cara S para iniciar el algoritmo. Pero eso significa que la recta paralela al eje x que delimita a $\Gamma(f)$, cruza por el punto $(0, m)$. Entonces podemos escribir

$$f(x, y) = y^m g(x, y)$$

donde $g(0, 0) \neq 0$. En este caso tenemos la solución trivial $y \equiv 0$.

2.1. Desarrollo de Newton y Pares de Puiseux

Continuando el proceso anterior recursivamente, obtenemos una sucesión $f_i(x_i, y_i)$ de series, donde cada f_i es y_i -general de orden $m_i \leq m_{i-1}$ y $x_{i+1} = x_i^{1/q_i}$.

Además también obtenemos una sucesión de aproximaciones de la forma

$$\begin{aligned}y &= x^{\mu_0}(t_0 + y_1), \\y_1 &= x_1^{\mu_1}(t_1 + y_2), \\&\vdots \\y_i &= x_i^{\mu_i}(t_i + y_{i+1}), \\&\vdots\end{aligned}$$

Con lo anterior, podemos encontrar una serie de la forma

$$\begin{aligned}y &= x^{\mu_0}(t_0 + x_1^{\mu_1}(t_1 + x_2^{\mu_2}(t_2 + \dots))) \\&= t_0 x^{\mu_0} + t_1 x^{\mu_0 + \frac{\mu_1}{q_0}} + t_2 x^{\mu_0 + \frac{\mu_1}{q_0} + \frac{\mu_2}{q_0 q_1}} + \dots,\end{aligned}\tag{2.2}$$

la cual es una solución para $f(x, y) = 0$.

Observaciones 2.1.2.

- (i) La serie (2.2) se llama *serie de Puiseux* de la curva $f(x, y)$.
- (ii) Si durante el proceso anterior encontramos alguna $y_i \equiv 0$, entonces la solución es un polinomio en la variable $x^{1/n}$ para $n = \mu_0 \mu_1 \dots \mu_{i-1}$.
- (iii) El proceso tampoco nos asegura la convergencia de la serie obtenida. Sin embargo más adelante se demostrará esto.

La siguiente proposición nos asegura que los denominadores de los exponentes fraccionarios no crecen indefinidamente.

Proposición 2.1.3. *Existe un índice i_0 tal que μ_i es entero para $i \geq i_0$. Haciendo $n := q_0 q_1 \dots q_{i_0}$, podemos escribir la serie (2.2) como una serie de potencias en $x^{1/n}$.*

Demostración. Primero demostraremos que si $m_i = m_{i+1}$, entonces μ_i es entero. Sin pérdida de generalidad, tomemos $i = 0$. Por la ecuación (2.1) podemos escribir a f_1 como

$$f_1(x_1, y_1) = \sum_{aq_0+bp_0=mp_0} c_{ab}(t_0 + y_1)^b + x_1 \left(\sum_{aq_0+bp_0 > mp_0} c_{ab} x_1^{aq_0+bp_0-mp_0-1} (t_0 + y_1)^b \right).$$

Además f_1 es y_1 -general de orden m_1 , entonces

$$f_1(0, y_1) = \sum_{aq_0+bp_0=mp_0} c_{ab}(t_0 + y_1)^b. \quad (2.3)$$

Sea $h(t) = f_1(0, t - t_0)$, el cual es un polinomio de grado $m = m_0$. Como $y_1 = 0$ es un cero de $f_1(0, y_1)$ de orden m_1 , entonces $t = t_0$ es un cero de h del mismo orden. Por hipótesis tenemos que $m_1 = m$, luego

$$h(t) = c(t - t_0)^m, \quad c \neq 0.$$

En particular, al desarrollar la expresión anterior, el coeficiente de t^{m-1} es diferente de cero. Esto equivale a que $c_{a,m-1} \neq 0$ en la ecuación (2.3). Se deduce que

$$aq_0 + (m - 1)p_0 = mp_0, \text{ entonces } \mu_0 = a \in \mathbb{N}.$$

Por lo anterior, vemos que $\mu_i \notin \mathbb{N}$ solamente cuando $m_i > m_{i+1}$. Pero como

$$m = m_0 \geq m_1 \geq \dots$$

es una sucesión decreciente de enteros no negativos, entonces existe i_0 tal que $\mu_i \in \mathbb{N}$ para $i \geq i_0$. □

Los siguientes teoremas nos garantizan que la serie (2.2) es convergente. Sus demostraciones se pueden encontrar en [JP00, Capítulo 5].

Teorema 2.1.4. *Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ irreducible y distinta de 0. Entonces existen $x(t), y(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ tales que*

2.1. Desarrollo de Newton y Pares de Puiseux

(i) $f(x(t), y(t)) = 0$,

(ii) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}) < \infty$.

Teorema 2.1.5. Sean $x(t), y(t) \in t\mathbb{C}\{t\}$ y sea $R := \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$. Supongamos que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{t\}/R) < \infty$. Entonces existe $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ irreducible tal que $R \cong \mathbb{C}\{x, y\}/(f)$. Más aún, $\mathbb{C}\{t\}$ es la normalización de R .

Teorema 2.1.6. Sea ε una raíz n -ésima primitiva de la unidad. Sea $\mathbb{C}\{t, y\}$ una extensión del anillo $\mathbb{C}\{x, y\}$, donde $x = t^n$.

(i) Sea $f = y^n + c_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + c_0(x)$ un polinomio irreducible de Weierstraß. Entonces existe $y \in t\mathbb{C}\{t\}$ tal que

$$f = \prod_{i=1}^n (y - y(\varepsilon^i t)).$$

(ii) Sea $y(t) \in t\mathbb{C}\{t\}$ tal que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{t\}/\mathbb{C}\{t^n, y(t)\}) < \infty$. Entonces $f = \prod_{i=1}^n (y - y(\varepsilon^i t))$ es un polinomio irreducible de Weierstraß en $\mathbb{C}\{x, y\}$.

Corolario 2.1.7. Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Entonces se tiene las siguientes afirmaciones.

(i) Supongamos que $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ es irreducible. Entonces f es también irreducible como elemento de $\mathbb{C}[[x, y]]$.

(ii) Si $f = f_1 f_2$ con $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[[x, y]]$ y f_1 es un polinomio de Weierstraß en y . Entonces $f_1, f_2 \in \mathbb{C}\{x, y\}$.

(iii) Supongamos que $y = y(x)$ es una solución formal de $f(x, y) = 0$. Entonces $y(x)$ es convergente.

Consideremos una curva plana C con parametrización de la forma

$$\begin{cases} x(t) = t^n, \\ y(t) = \sum_{i \geq n} a_i t^i \end{cases}$$

y definamos inductivamente $k_0 = e_0 = n$ y

$$k_j = \min\{i : a_i \neq 0, e_{j-1} \nmid i\}, \quad e_j = \gcd(k_j, e_{j-1}) \quad \text{para } j \geq 1.$$

Continuando encontramos $g \in \mathbb{N}$ tal que $e_g = 1$. Además se tiene que

$$k_0 < k_1 < \dots < k_g$$

y que k_1, k_2, \dots, k_g son primos relativos. También se tiene que $e_g < e_{g-1} < \dots < e_0 = n$.

Definición 2.1.8. Al conjunto $\{k_0, k_1, \dots, k_g\}$ se le llama conjunto de *exponentes característicos* de C .

Los *pares de Puiseux* están muy relacionados con los exponentes característicos. A continuación se definen.

Definición 2.1.9. Sea C un germen de curva plana y sean k_0, \dots, k_g los exponentes característicos de C . Definamos los *pares de Puiseux* como sigue: Sea (n_1, m_1) definido por $\frac{k_1}{k_0} = \frac{n_1}{m_1}$ en donde $\gcd(n_1, m_1) = 1$ y sea (n_j, m_j) definido por $\frac{n_j}{m_j} = \frac{k_j m_1, \dots, m_{j-1}}{k_0}$ con $\gcd(n_j, m_j) = 1$, para $j \geq 2$.

Para entender mejor la definición anterior, consideremos la serie de Puiseux de la curva C , la cual tiene la forma

$$y(x) = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Q}} a_{\bar{k}} x^{\bar{k}}.$$

Si la curva no es suave, entonces existe un \bar{k}_1 mínimo no entero tal que $a_{\bar{k}_1} \neq 0$. Sea $\bar{k}_1 = \frac{n_1}{m_1}$ con $\gcd(n_1, m_1) = 1$, entonces (n_1, m_1) es el primer par de Puiseux. Para el segundo par de Puiseux, buscamos el mínimo de los exponentes de la serie que no se puede escribir de la forma $\frac{a}{m_1}$. Sea \bar{k}_2 este número, y escribamos $\bar{k}_2 = \frac{n_2}{m_1 m_2}$ con $\gcd(n_2, m_2) = 1$. El par (n_2, m_2) es el segundo par de Puiseux. Y así sucesivamente se encuentran el resto de pares de Puiseux. Cabe señalar que $k_0 = m_1 \dots m_g$ y $k_i = k_0 \bar{k}_i$ para $i = 1, \dots, g$. Por tanto, se pueden obtener los exponentes característicos de los pares de Puiseux y viceversa.

2.2 Resolución por explosiones

Consideremos $X \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ definido por

$$X = \{(x, y, u : v) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 : xv = yu\},$$

donde (x, y) son coordenadas afines en \mathbb{C}^2 y $(u : v)$ son coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. El subconjunto X se puede interpretar como los pares $(p, l) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ tales que el punto $p \in \mathbb{C}^2$ está sobre la recta $l \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ que pasa por el origen. Más aún, si $p \neq 0$, entonces existe un único par $(p, l) \in X$. En el caso de que $p = 0$, se tiene que $(p, l) \in X$ está en X , para cualquier $l \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Definamos la función

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (p, l) &\longmapsto p, \end{aligned}$$

la cual es la proyección en la primer coordenada de X . Es fácil ver que π es un biholomorfismo entre $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ y $\pi^{-1}(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$. Además $\pi^{-1}(\{0\}) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Definición 2.2.1. Al par (X, π) definido anteriormente, se le conoce como la **explosión** de \mathbb{C}^2 en el origen.

Observaciones 2.2.2.

- i. Se pueden definir *explosiones* en puntos distintos del origen usando un cambio de coordenadas.
- ii. Al conjunto $\pi^{-1}(\{0\})$ se le llama **divisor excepcional** y se denota por E .
- iii. El conjunto X es una subvariedad de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ dada por la ecuación $xv = yu$.
- iv. Las *explosiones* en puntos también se pueden generalizar fácilmente para \mathbb{C}^n . Para esto consideremos el par (X, π) donde $X = \{(x, z) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1} : \exists \lambda > 0, x = \lambda z\}$ y $\pi : X \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es la proyección en la primera coordenada.

Podemos describir localmente al espacio X mediante el par de cartas usuales de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Sean $U'_1 = \{(1 : v)\}$, $U'_2 = \{(u : 1)\}$ las cartas de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Entonces un par de cartas para X están dadas por

$$U_1 = X \cap (\mathbb{C}^2 \times U'_1) = \{(x, y, 1 : v) : xv = y\} \cong \{(x, xv, v) \in \mathbb{C}^3\} \cong \mathbb{C}^2$$

$$U_2 = X \cap (\mathbb{C}^2 \times U'_2) = \{(x, y, u : 1) : xv = y\} \cong \{(yu, y, u) \in \mathbb{C}^3\} \cong \mathbb{C}^2$$

En caso de una curva $C \subset \mathbb{C}^2$ que contenga al origen, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.2.3. Sea $C \subset \mathbb{C}^2$ una curva que contenga al origen y sea (X, π) la explosión de \mathbb{C}^2 en el origen.

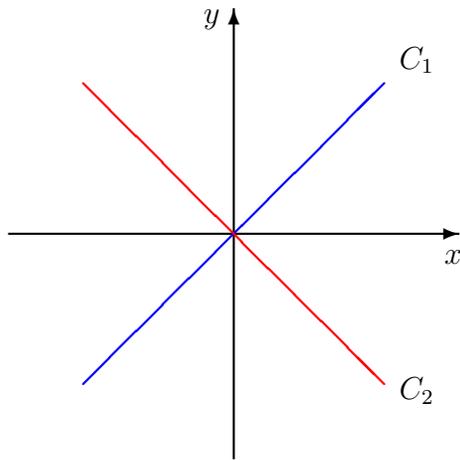
- (i) La **transformada total** de C bajo (X, π) se define como $\pi^{-1}(C)$.
- (ii) Al conjunto $\overline{\pi^{-1}(C \setminus \{0\})}$ se le llama **transformada estricta** de C y se denota por \tilde{C} .

La *explosión* es un proceso local, por lo cual podemos definirlo sobre una variedad compleja M de dimensión 2 en un punto p . Para hacer esto tomemos una carta $\phi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{C}^2$, donde U es una vecindad de p y V es una vecindad de 0. Consideremos la *explosión* (X, π) y sea $V' = \pi^{-1}(V)$. La idea es reemplazar la vecindad U (biholomorfa a V) por la vecindad V' . Para hacer eso, definamos M' como la variedad compleja que resulta de pegar $M \setminus \{p\}$ con V' al identificar $U \setminus \{p\}$ con $V' \setminus \{p\}$ mediante el biholomorfismo $\pi^{-1} \circ \phi : U \setminus \{p\} \rightarrow V' \setminus \{p\}$. Es natural definir la función $\pi' : M' \rightarrow M$ mediante

$$\pi'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in M' \setminus V' \\ (\phi^{-1} \circ \pi)(x) & \text{si } x \in V' \end{cases},$$

la cual es holomorfa. El par (M', π') se define como la *explosión* de M en p .

Ejemplo 4. Consideremos $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 - y^2 = 0\} = C_1 \cup C_2$, la cual consiste en un par de rectas que se intersecan en el origen.



La transformada total de C es

$$\pi^{-1}(C) = \{(x, y, u : v) : x^2 - y^2 = 0, xv = yu\},$$

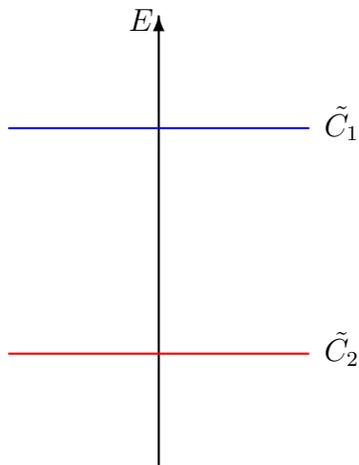
la cual vista en la carta U_1 está dada por

$$\pi^{-1}(C) \cap U_1 = \{(x, y, 1 : v) : x^2 - y^2 = 0, xv = y\} \cong \{(x, v) \in \mathbb{C}^2 : x^2(1 - v^2) = 0\}.$$

El divisor excepcional E está dado por $x = 0$, ya que $\pi(x, v) = 0$ solamente cuando $x = 0$.

Entonces podemos escribir la transformada total como

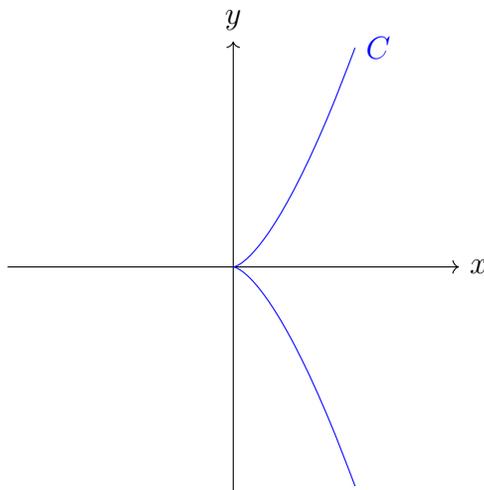
$$\pi^{-1}(C) \cap U_1 = E \cup \{(x, v) \in \mathbb{C}^2 : 1 - v^2 = 0\} = E \cup \{(x, \pm 1) : x \in \mathbb{C}\}.$$



Por tanto, la transformada estricta $\tilde{C} = \tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2$ consiste en un par de rectas paralelas las cuales intersecan a E en los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$. Se llega a un resultado análogo usando la carta U_2 .

Ejemplo 5. Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 - x^3 = 0\}$. La transformada total en la carta U_1 corresponde al cambio de variables $(x, y) \mapsto (x, xv)$. Entonces

$$\pi_1^{-1}(C) \cap U_1 = \{(x, v) \in \mathbb{C}^2 : x^2(v^2 - x) = 0\}.$$

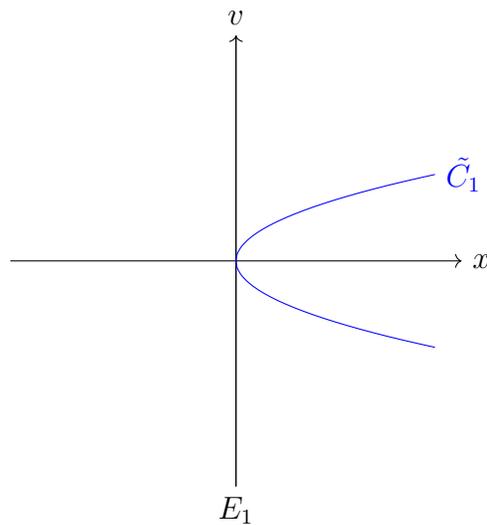


El divisor excepcional E_1 está dado por $x = 0$, luego la transformada estricta está determinada por

$$\tilde{C}_1 = \{(x, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 - x = 0\}$$

la cual interseca al divisor E_1 en $v = 0$.

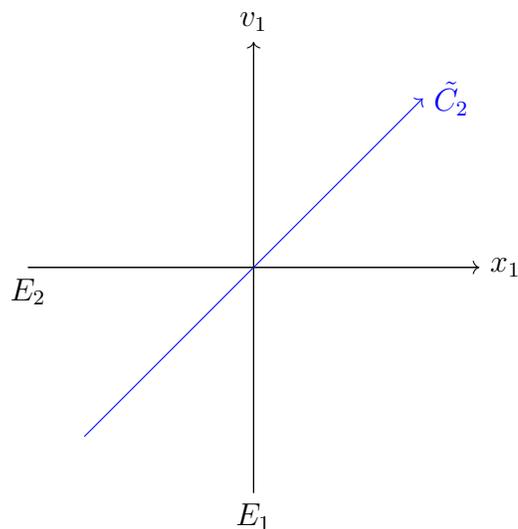
2.2. Resolución por explosiones



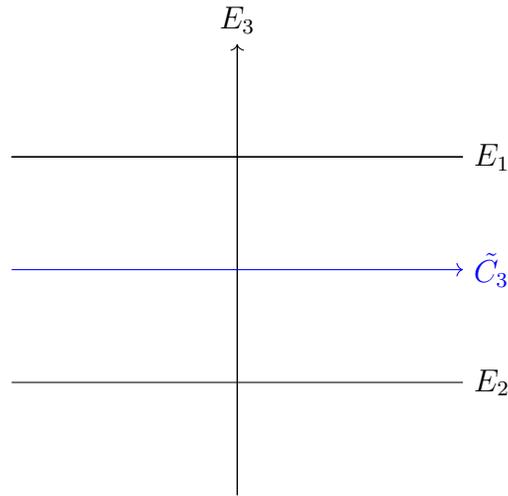
La curva \tilde{C}_1 es suave, sin embargo no interseca transversalmente al divisor E_1 . Al hacer una segunda *explosión* en el punto de intersección, la transformada total en la carta U_2 es

$$\pi_2^{-1}(\tilde{C}_1) = \{(x_1, v_1) \in \mathbb{C}^2 : v_1(v_1 - x_1) = 0\}.$$

El divisor excepcional E_2 corresponde a la ecuación $v_1 = 0$ y la transformada estricta de \tilde{C}_1 es $\tilde{C}_2 = \{(x_1, v_1) \in \mathbb{C}^2 : x_1 - v_1 = 0\}$. La transformada estricta de E_1 corresponde a la ecuación $x_1 = 0$ y la seguiremos denotando por E_1 .



Como podemos observar, la curva \tilde{C}_2 interseca a E_1 y E_2 . Al hacer una última *explosión*, se obtienen 3 rectas paralelas que intersecan transversalmente al divisor E_3 .



En los Ejemplos 4 y 5 observamos que las *explosiones* separan las direcciones que pasan por el origen. Además, las curvas tienen una singularidad en el origen, pero sus transformaciones estrictas son lisas. Podemos suponer que las *explosiones* son una herramienta para la resolución de singularidades de curvas planas. A continuación se formalizará esta idea.

2.2.1 Resolución de curvas planas irreducibles

Definición 2.2.4. Sea $C \subset U$ un germen de curva plana irreducible. Consideremos la siguiente sucesión de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} X_n & \xrightarrow{\pi_n} & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\pi_1} & U \\ \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup \\ \tilde{C}_n & \longrightarrow & \tilde{C}_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \tilde{C}_1 & \longrightarrow & C = \tilde{C}_0 \end{array}$$

donde la i -ésima transformada estricta está dada por $\tilde{C}_i = \overline{(\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_i)^{-1}(C \setminus \{0\})}$. Definamos $E^{(i)} := (\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_i)^{-1}(0)$. Se dice que la sucesión anterior es una *resolución estándar* si cumple

- (1) C es suave y $n = 0$, o bien,
- (2) \tilde{C}_n es suave, interseca solamente a una componente de $E^{(n)}$ y lo hace de forma transversal. Además para $i < n$ se cumple

2.2. Resolución por explosiones

- (i) \tilde{C}_{i-1} tiene un punto singular y π_i es la explosión de X_{i-1} en este punto, o bien,
- (ii) \tilde{C}_{i-1} es suave, pero no interseca a $E^{(i-1)}$ de forma transversal, o bien,
- (iii) \tilde{C}_{i-1} es suave, interseca a $E^{(i-1)}$ transversalmente, pero interseca a más de una componente de $E^{(i-1)}$.

Teorema 2.2.5. *Sea C un germen de curva plana irreducible. Entonces siempre existe una resolución estándar para C .*

Demostración. Si C es suave, no hay nada que probar. Consideremos que C no sea suave, mediante el método de Newton podemos encontrar una parametrización de C de la forma

$$\begin{cases} x = t^p \\ y = \sum_{m \geq q} a_m t^m, \quad a_m \neq 0 \end{cases}$$

tal que $p < q$ y $p \nmid q$. Consideremos la explosión en la carta U_1 , el cambio de variables está dado por $(x, y) \mapsto (x, xv)$. Entonces una parametrización para la transformada estricta es

$$\begin{cases} x = t^p \\ v = \sum_{m \geq q} a_m t^{m-p}, \quad a_m \neq 0 \end{cases}$$

Sea $n = \min_{k \in \mathbb{N}} \{q - kp < p\}$. Continuando el proceso, luego de n explosiones, obtenemos una parametrización de la n -ésima transformada estricta de la forma

$$\begin{cases} x = t^p \\ y = \sum_{m \geq q} a_m t^{m-np}, \quad a_m \neq 0 \end{cases}$$

Observamos que la multiplicidad de \tilde{C}_n es $q - np < p$. Por lo que haciendo un cambio de coordenadas obtenemos una parametrización de la forma

$$\begin{cases} x = t^{p-nq} \\ y = \sum_{m \geq q_1} a_m t^m, \quad a_m \neq 0 \end{cases}$$

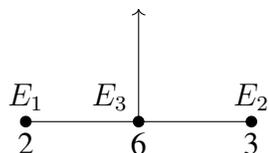
tal que $p - nq < q_1$ y $p - nq \nmid q_1$. Hemos probado que después de un número finito de explosiones, se reduce la multiplicidad de la transformada estricta. Por tanto, continuando el proceso, obtenemos una curva \tilde{C}_N suave. En caso de que la intersección de la curva \tilde{C}_N con $E^{(N)}$ no sea transversal, se puede seguir haciendo explosiones hasta que suceda. En caso de que la intersección sea con más de una componente de $E^{(N)}$, una explosión es suficiente. \square

Definición 2.2.6. Usando la notación de la Definición 2.2.4, denotemos por m_i a la multiplicidad de \tilde{C}_i en el punto de intersección con $E^{(i)}$. Y sea m_0 la multiplicidad de C en el origen. Se le llama *secuencia de multiplicidades* a la sucesión (m_0, \dots, m_{n-1}) .

Con el fin de simplificar, a una resolución estándar se le puede asociar un grafo ponderado, de tal forma que la información de la resolución sea codificada en los pesos de los vértices del grafo.

Definición 2.2.7. Sea $\pi = \pi_n \circ \dots \circ \pi_1 : X_n \rightarrow C$ una resolución estándar de C donde $C = \{f(x, y) = 0\}$. Sea \tilde{C}_n la transformada estricta y sea $E = \pi^{-1}(0) = \bigcup_{i=1}^n E_i$ el divisor excepcional. Consideremos un grafo G tal que el conjunto de sus vértices sea $\{E_1, \dots, E_n\}$. Unimos E_i y E_j con una arista si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, también dibujemos una flecha en E_i si $E_i \cap \tilde{C}_n \neq \emptyset$. A cada vértice E_i se le asocia el peso $r_i = \text{ord}_{E_i}(\pi^*f)$. Al grafo G se le llama el *grafo de la resolución*.

Ejemplo 6. Regresando al Ejemplo 5, su grafo de la resolución es el siguiente.



Para calcular sus pesos vemos que en la carta correspondiente al cambio de variables $(x, y) \mapsto (x, xv)$ la transformada de C está definida por $x^2(v^2 - x) = 0$. Como el divisor E_1 está dado por $x = 0$, se sigue que $r_1 = 2$. Para la segunda explosión, la expresión local de la transformada total es $x_1^2 v_1^3 (v_1 - x_1) = 0$, la cual corresponde al cambio de variables $(x, v) \mapsto (x_1 v_1, v_1)$. El divisor E_2 está determinado por $v_1 = 0$, por tanto $r_2 = 3$. La

2.2. Resolución por explosiones

última explosión localmente corresponde al cambio $(x_1, v_1) \mapsto (x_2, x_2 v_2)$, por lo que su transformada total está definida en esa carta por $x_2^6 v_2^3 (v_2 - 1) = 0$. El divisor E_3 está definido por $x_2 = 0$, entonces $r_3 = 6$. Por último, la secuencia de multiplicidades es $(2, 1, 1)$.

Proposición 2.2.8. *El número de Milnor de un germen de curva plana irreducible definido por $f = 0$ se puede obtener mediante la secuencia de multiplicidades. En específico,*

$$\mu(f) = \sum m_i(m_i - 1).$$

El siguiente resultado nos dice que la información codificada por la secuencia de multiplicidades es equivalente a la información codificada por los exponentes característicos de una curva plana irreducible.

Teorema 2.2.9 ([JP00, Teorema 5.3.12]). *Sea C un germen de curva plana irreducible con exponentes característicos k_0, \dots, k_g . El siguiente algoritmo calcula la secuencia de multiplicidades:*

Si $g = 0$ entonces la secuencia de multiplicidades es \emptyset . Si $g > 0$, definamos $\chi_1 := k_1$ y $\rho_{1,1} := k_0$ y desarrollemos su algoritmo de Euclides.

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \mu_{1,1} \rho_{1,1} + \rho_{1,2} \\ \rho_{1,1} &= \mu_{1,2} \rho_{1,2} + \rho_{1,3} \\ &\vdots \\ \rho_{1,w(1)-1} &= \mu_{1,w(1)} \rho_{1,w(1)}. \end{aligned}$$

Definamos $\chi_i := k_i - k_{i-1}$ y $\rho_{i,1} := \rho_{i-1,w(i-1)}$, con $i = 2, \dots, g$. Desarrollando el algoritmo de Euclides para χ_i y $\rho_{i,1}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \chi_i &= \mu_{i,1} \rho_{i,1} + \rho_{i,2} \\ \rho_{i,1} &= \mu_{i,2} \rho_{i,2} + \rho_{i,3} \\ &\vdots \\ \rho_{i,w(i)-1} &= \mu_{i,w(i)} \rho_{i,w(i)}. \end{aligned}$$

Una vez hecho lo anterior, la secuencia de multiplicidades se construye como sigue

$$\underbrace{(\rho_{1,1}, \dots, \rho_{1,1})}_{\mu_{1,1} \text{ veces}}, \dots, \underbrace{(\rho_{i,j}, \dots, \rho_{i,j})}_{\mu_{i,j} \text{ veces}}, \dots, \underbrace{(\rho_{g,w(g)}, \dots, \rho_{g,w(g)})}_{\mu_{g,w(g)} \text{ veces}}.$$

Más aún, el proceso inverso recupera los exponentes característicos k_0, \dots, k_g .

Ejemplo 7. Sea C el germen de curva plana irreducible con exponentes característicos $k_0 = 12$, $k_1 = 18$, $k_2 = 32$ y $k_3 = 35$. El primer algoritmo de Euclides es

$$18 = 1 \cdot 12 + 6$$

$$12 = 2 \cdot 6$$

Para el siguiente algoritmo de Euclides se tiene $\chi_2 = k_2 - k_1 = 14$ y $\rho_{2,1} = \rho_{1,2} = 6$.

$$14 = 2 \cdot 6 + 2$$

$$6 = 3 \cdot 2.$$

Ahora $\chi_3 = k_3 - k_2 = 3$ y $\rho_{3,1} = \rho_{2,2} = 2$. El tercero algoritmo de Euclides es

$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1.$$

Por tanto la secuencia de multiplicidades es

$$(12, 6, 6, 6, 6, 2, 2, 2, 2, 1, 1).$$

Ahora recuperemos los exponentes característicos de la secuencia de multiplicidades. Notemos que $k_0 = 12$ y como $k_0 \nmid k_1$ entonces $k_1 = 1 \cdot 12 + 6 = 18$. El primer algoritmo de Euclides es

$$18 = 1 \cdot 12 + 6$$

$$12 = 2 \cdot 6.$$

2.2. Resolución por explosiones

Para el siguiente algoritmo de Euclides, se debe de tener $k_2 - k_1 = 2 \cdot 6 + 2 = 14$ ya que los primeros dos 6 han sido usados en el algoritmo de Euclides anterior. Entonces $k_2 = 32$ y el segundo algoritmo de Euclides es

$$\begin{aligned} 14 &= 2 \cdot 6 + 2 \\ 6 &= 3 \cdot 2. \end{aligned}$$

Para el último algoritmo de Euclides, se tiene $k_3 - k_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Por tanto $k_3 = 35$.

El siguiente teorema es un algoritmo para construir el grafo de resolución de una curva C sin necesidad de realizar la resolución explícitamente.

Teorema 2.2.10 ([JP00, Teorema 5.3.14]). *Sea C un gérmen de curva plana irreducible y sean k_0, \dots, k_g sus exponentes característicos. Sean $\mu_{i,j}$ los mismos generados por los g algoritmos de Euclides del Teorema 2.2.9, donde $1 \leq i \leq g$, y $1 \leq j \leq w(i)$. El grafo de resolución consiste de g cadenas de Puiseux P_i . Cada cadena consiste en $w(i)$ bloques S_i^j de la forma*

$$E_{\pi(i,j)+1} \quad \dots \quad E_{\pi(i,j)+2} \quad \dots \quad E_{\pi(i,j)+\mu_{i,j}-1} \quad E_{\pi(i,j)+\mu_{i,j}}$$

donde

$$\begin{aligned} \pi(1, 1) &= 0 \\ \pi(i, 1) &= \pi(i-1, w(i-1)) + \mu_{i-1, w(i-1)}, & 2 \leq i \leq g, \\ \pi(i, j) &= \pi(i, j-1) + \mu_{i, j-1}, & 2 \leq j \leq w(i), \quad 1 \leq i \leq g. \end{aligned}$$

La cadena de Puiseux P_i es construida conectando el vértice final de S_i^k con el vértice inicial de S_i^{k+2} , para $1 \leq k \leq w(i) - 2$. Por último, se conecta el vértice final de $S_i^{w(i)-1}$ con el vértice final de $S_i^{w(i)}$.

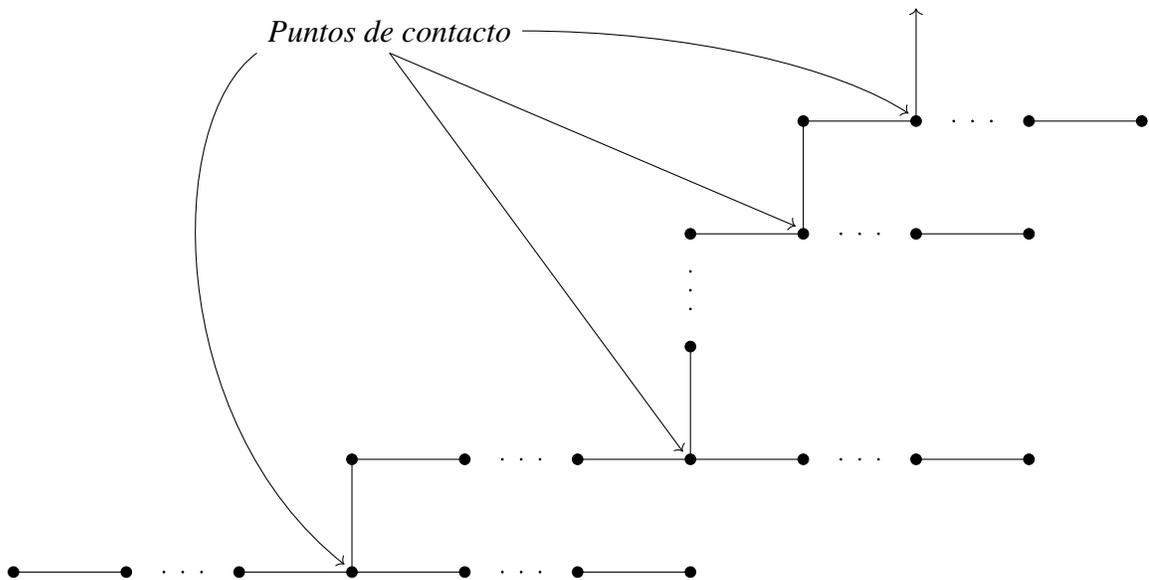
Ahora las cadenas de Puiseux se unen en un mismo grafo conectando el vértice final de $S_i^{w(i)}$

(i) con el vértice inicial de S_{i+1}^1 si $\mu_{i+1,1} \neq 0$,

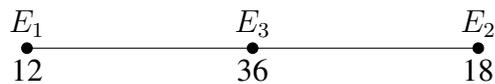
(ii) con el vértice inicial de S_{i+1}^3 si $\mu_{i+1,1} = 0$ y $w(i) \geq 3$,

(iii) con el vértice final de S_{i+1}^2 si $\mu_{i+1,1} = 0$ y $w(i) = 2$.

Por último, se dibuja una flecha en el vértice final de $S_g^{w(g)}$, la cual representa la intersección de la transformada estricta de C con el divisor excepcional E . Los **puntos de contacto** corresponden con los vértices del grafo que tienen valencia 3. Estos corresponden con los vértices finales de los bloques $S_i^{w(i)}$. A continuación se muestra un bosquejo de la construcción del grafo.



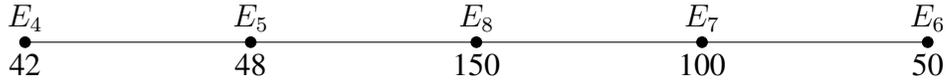
Ejemplo 8. Regresando al Ejemplo 7, calculemos su grafo de resolución. La primera cadena de Puiseux P_1 está compuesta por los bloques $S_1^1 = \{E_1\}$ y $S_1^2 = \{E_2, E_3\}$. Además los pesos de la cadena P_1 son $r_1 = 12$, $r_2 = 18$ y $r_3 = 36$.



Cadena de Puiseux P_1

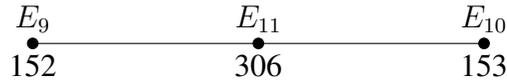
La segunda cadena P_2 está compuesta por los bloques $S_2^1 = \{E_4, E_5\}$ y $S_2^2 = \{E_6, E_7, E_8\}$. Sus respectivos pesos son $r_4 = 42$, $r_5 = 48$, $r_6 = 50$, $r_7 = 100$ y $r_8 = 150$.

2.2. Resolución por explosiones



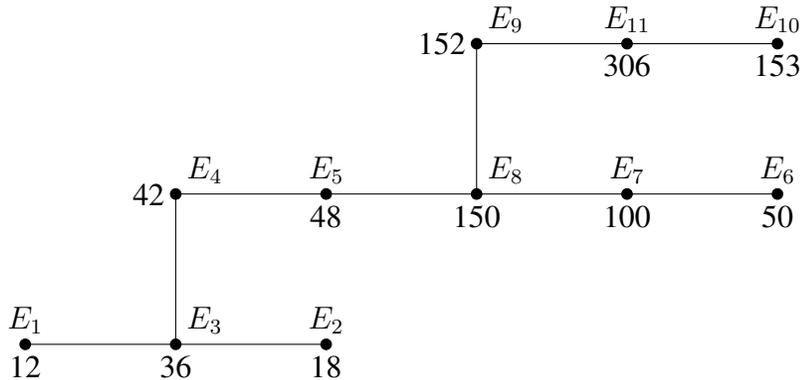
Cadena de Puiseux P_2

La última cadena, P_3 , está formada por los bloques $S_3^1 = \{E_9\}$ y $S_3^2 = \{E_{10}, E_{11}\}$. Sus respectivos pesos son $r_9 = 152$, $r_{10} = 153$ y $r_{11} = 306$.



Cadena de Puiseux P_3

El grafo de la resolución consiste en 3 pisos y se construye pegando E_3 con E_4 y E_8 con E_9 . Lo anterior es porque $\mu_{2,1} = 2 \neq 0$ y $\mu_{3,1} = 1 \neq 0$.



Grafo de resolución del Ejemplo 7

En general, para una curva con k_0, \dots, k_g , el grafo de resolución tendrá g pisos. Cada piso corresponde a una cadena de Puiseux.

Por último, el siguiente teorema recopila los invariantes vistos hasta ahora, así como la equivalencia de los mismo. Una demostración se encuentra en [JP00, Teorema 5.3.18].

Teorema 2.2.11. *Para una singularidad de curva plana la siguiente información es equivalente.*

- (i) *Los pares de Puiseux;*
- (ii) *Los exponentes característicos;*
- (iii) *La secuencia de multiplicidades;*
- (iv) *El grafo de resolución.*

2.2.2 Resolución de curvas planas reducibles

Como en la sección anterior, empezaremos definiendo la resolución estándar de una curva reducible.

Definición 2.2.12. Sea $C = \cup_{i=1}^r C_i$ un germen de curva plana reducible con $r \geq 2$ ramas. Sea $X_i \xrightarrow{\pi_i} \dots \xrightarrow{\pi_2} X_1 \xrightarrow{\pi_1} U$ una sucesión de explosiones, y denotemos por $E^{(i)}$ al divisor excepcional y por \tilde{C}_i a la transformada estricta. La función $\pi_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ consiste en explotar el espacio X_{i-1} en los puntos de $\tilde{C}_{i-1} \cap E^{(i-1)}$ tales que son singulares en \tilde{C}_{i-1} , o que son la intersección no transversal de \tilde{C}_{i-1} con $E^{(i-1)}$.

Entonces la sucesión $X_k \xrightarrow{\pi_k} \dots \xrightarrow{\pi_2} X_1 \xrightarrow{\pi_1} U$ es una resolución estándar de C si todas las ramas de \tilde{C}_k son suaves, no se intersecan entre ellas, y se intersecan transversalmente con sólo una componente de $E^{(k)}$.

Análogamente al caso irreducible, el siguiente teorema nos asegura que siempre existe una resolución estándar.

Teorema 2.2.13. *Sea C un germen de curva plana reducible, entonces existe una resolución estándar para C .*

Demostración. Sea $C = \cup_{i=1}^r C_i$ un germen de curva reducible. Como cada rama C_i es irreducible, entonces por el Teorema 2.2.4 podemos encontrar una sucesión de explosiones tales que la transformada estricta de C_i tenga intersección transversal con el divisor excepcional. Ahora falta considerar el caso en el que dos componentes de \tilde{C} tengan intersección no vacía.

2.2. Resolución por explosiones

Pero en este caso, podemos seguir haciendo explosiones para que disminuya la multiplicidad de intersección entre ellas. Por tanto, después de una cantidad finita de explosiones, encontramos una resolución estándar de C . \square

La definición de grafo de resolución también aplica para el caso reducible. Si $C = \cup_{i=1}^r C_i$ es un germen de curva plana, su grafo de resolución se contruye de la misma forma que en la Definición 2.2.7. En este caso, tendremos r flechas que representan las intersecciones de las componentes de \tilde{C} con el divisor excepcional E .

Definición 2.2.14. Sea $C = \cup_{i=1}^r C_i$ un germen de curva reducible. Denotemos por $\tilde{C}_i^{(j)}$ a la j -ésima componente de la i -ésima transformada estricta de C . Naturalmente se tiene que $\tilde{C}_0^{(j)} = C_j$. El *número de contacto* de las ramas C_j y C_k se define como $\gamma(C_j, C_k) := \min\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \tilde{C}_i^{(j)} \cap \tilde{C}_i^{(k)} = \emptyset\}$.

El siguiente teorema nos dice que la información dada por el grafo de resolución de una curva reducible C es equivalente a la información de los grafos de resolución de sus ramas, junto a sus números de contacto. La demostración se puede consultar en [JP00, Teorema 5.4.5].

Teorema 2.2.15. Sea $C = \cup_{i=1}^r C_i$ un germen de curva reducible. La siguiente información es equivalente.

- (i) El grafo de resolución de C .
- (ii) El grafo de resolución de las ramas C_i junto con sus números de contacto $\gamma(C_j, C_k)$.

CAPÍTULO 3

Descomposición de Zariski

Los Teoremas de Zariski son una herramienta para el estudio de una cierta clase de ideales, llamados *integralmente cerrados*. Estos ideales aparecen en diversas ramas de la Geometría Algebraica y la Teoría de Números, incluyendo la teoría de singularidades, valuaciones, álgebras de Rees y álgebra homológica. El objetivo del presente capítulo es introducir los conceptos necesarios para poder enunciar los resultados de Zariski. En la sección 3.1 se definirá la noción de *cerradura integral* de un ideal en un anillo conmutativo con unidad, así como propiedades elementales de la cerradura integral. La cerradura integral de ideales monomiales resulta ser un ideal monomial, este resultado se abordará en la sección 3.2. Por último, en la sección 3.3 se enunciará el Teoremas de Factorización de Zariski, el cual nos asegura que un ideal integralmente cerrado admite una factorización esencialmente única en productos de potencias de ideales simples. También se mencionará el caso para ideales monomiales, el cual adquiere una interpretación geométrica.

3.1 Cerradura integral de un ideal

A lo largo de la sección se supondrá que R es un anillo conmutativo con unidad.

Definición 3.1.1. Sea I un ideal en un anillo R . Un elemento $r \in R$ se dice que es *integral sobre I* si se puede escribir de la forma

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0, \quad (3.1)$$

en donde $a_i \in I^i$ para $i = 1, \dots, n$. La *cerradura integral* de I se define como el conjunto de todos los elementos que son integrales sobre I y se denota por \bar{I} . Un ideal I se dice que es *integralmente cerrado* si $I = \bar{I}$. Si $I \subset J$ son ideales, se dice que J es *integral sobre I* si $J \subset \bar{I}$.

Ejemplo 9. Sean $x, y \in R$ y sea $I = (x^d, y^d)$. Sea $r = x^i y^{d-i}$, entonces

$$r^d + a_d = 0$$

donde $a_d = -x^{di} y^{d(d-i)} \in I^d$. Por tanto se tiene que $x^i y^{d-i} \in \bar{I}$ para $i \leq d$.

Las siguientes propiedades se pueden deducir fácilmente de la definición anteriormente dada.

Proposición 3.1.2. Sean $I, J \subset R$ ideales en un anillo R . Entonces

- (i) $I \subset \bar{I}$.
- (ii) Si $I \subset J$ entonces $\bar{I} \subset \bar{J}$.
- (iii) $\bar{I} \subset \sqrt{\bar{I}}$, donde $\sqrt{\bar{I}}$ es el radical de I .
- (iv) Los ideales radicales, y por tanto ideales primos, son integralmente cerrados.
- (v) La intersección de ideales integralmente cerrados es integralmente cerrada.
- (vi) Si $R \xrightarrow{\phi} S$ es un homomorfismo de anillos, entonces $\phi(\bar{I}) \subset \overline{\phi(I)S}$. Esta propiedad es llamada *persistencia*.

(vii) Si $R \xrightarrow{\phi} S$ es un homomorfismo de anillos y $J = \bar{J}$ es un ideal de S , entonces $\phi^{-1}(J) = \overline{\phi^{-1}(J)}$. Esta propiedad se conoce como *contracción*.

Para probar que, efectivamente, \bar{I} es un ideal en R , introduciremos el concepto de *reducción*.

Definición 3.1.3. Sea $J \subset I$ ideales en R . Se dice que J es una *reducción* de I si existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $I^{n+1} = JI^n$.

Proposición 3.1.4. Sea J un ideal en R y sea $r \in R$. Entonces J es una *reducción* de $J + (r)$ si y sólo si r es *integral* sobre J .

Demostración.

(\Rightarrow) Supongamos que J es una *reducción* de $J + (r)$, luego existe $m \geq 0$ tal que $(J + (r))^{m+1} = J(J + (r))^m$. Como $r^{m+1} \in J(J + (r))^m$, entonces podemos encontrar (después de unos cálculos) elementos $b_i \in J^i$ con $i = 1, \dots, m + 1$, tales que

$$r^{m+1} = b_1 r^m + \dots + b_{m+1}.$$

Por tanto, r es *integral* sobre J .

(\Leftarrow) Si r es *integral* sobre J , entonces existe $n \geq 1$ y $b_i \in J^i$ para $i = 1, \dots, n$, tales que $r^n = b_1 r^{n-1} + \dots + b_n$. Luego se tiene que $r^n \in J(J + (r))^{n-1}$. Lo anterior implica que $(J + (r))^n \subset J(J + (r))^{n-1}$, pero siempre se tiene que $J(J + (r))^{n-1} \subset (J + (r))^n$. Por tanto se tiene la igualdad $J(J + (r))^{n-1} = (J + (r))^n$, haciendo el cambio $m = n - 1$ concluimos que J es una *reducción* de $J + (r)$. \square

La siguiente proposición nos asegura que la *reducción* es una propiedad transitiva.

Proposición 3.1.5. Sean $K \subset J \subset I$ ideales en R . Entonces

(i) Si K es una *reducción* de J y J es una *reducción* de I , entonces K es una *reducción* de I .

(ii) Si K es una *reducción* de I , entonces J es una *reducción* de I .

3.1. Cerradura integral de un ideal

(iii) Si I es finitamente generado, $J = K + (r_1, \dots, r_k)$, y K es una reducción de I , entonces K es una reducción de J .

Ahora tenemos todas las herramientas para probar que la cerradura integral de un ideal es, efectivamente, un ideal.

Proposición 3.1.6. *La cerradura integral de un ideal es un ideal. Más aún, la cerradura integral de un ideal es integralmente cerrada.*

Demostración. Sea K un ideal en R . Es fácil ver que si $r \in \overline{K}$ y $a \in R$, entonces $ar \in \overline{K}$. Sólo falta probar que \overline{K} es un subgrupo aditivo de R . Sean $r, s \in \overline{K}$, luego tenemos que $r^n + k_1 r^{n-1} + \dots + k_n = 0$ para algunos $k_i \in K^i$. Cada k_i es una suma finita de productos de i factores en K , entonces haciendo una elección adecuada de generadores, podemos encontrar un ideal $K' \subset K$ finitamente generado tal que $k_i \in (K')^i$. Luego $r \in \overline{K'}$, agregando generadores a K' , podemos suponer también que $s \in \overline{K'}$. Definamos $J = K' + (r)$ e $I = K' + (r, s) = J + (s)$. Por la Proposición 3.1.4 se tiene que K' es una reducción de J y J es una reducción de I . Entonces, por 3.1.5, K' es una reducción de I . Como K' es finitamente generado, entonces I es finitamente generado. Por la Proposición 3.1.5 se sigue que $K' \subset K' + (r + s) \subset I$ son reducciones. Usando la Proposición 3.1.4 deducimos que $r + s \in \overline{K'} \subset \overline{K}$. Por tanto \overline{K} es un ideal en R .

Ahora sea I un ideal, por la Proposición 3.1.2 tenemos que $\overline{I} \subset \overline{\overline{I}}$. Sea $r \in \overline{\overline{I}}$, por el argumento expresado anteriormente, existe un ideal $J \subset \overline{I}$ finitamente generado tal que $r \in \overline{J}$. Sea $J = (j_1, \dots, j_n)$, nuevamente por el argumento anterior, existe un ideal $K \subset I$ finitamente generado tal que $j_i \in \overline{K}$. Por 3.1.4, tenemos que

$$K \subset K + (j_1) \subset K + (j_1, j_2) \subset \dots \subset K + J$$

son reducciones. Luego K es una reducción de $K + J$, pero $K + J$ es una reducción de $K + J + (r)$, entonces K es una reducción de $K + J + (r)$. Como este último ideal es finitamente generado y $K \subset K + (r) \subset K + J + (r)$, entonces K es una reducción de $K + (r)$. Lo anterior implica que r es integral sobre $K \subset I$, con lo cual también es integral sobre I . Por tanto $\overline{I} = \overline{\overline{I}}$. □

3.2 Ideales monomiales

La cerradura integral de un ideal monomial tiene una interpretación geométrica. Los resultados mostrados a continuación son para el anillo $k[x, y]$, donde k es un campo, pero fácilmente se pueden generalizar para el caso de n variables o para el anillo de series formales $k[[x, y]]$.

Definición 3.2.1. Sea k un campo y sea $k[x, y]$ el anillo de polinomios en 2 variables. Un ideal $I \subset k[x, y]$ es *monomial* si está generado por monomios.

Las siguientes proposiciones son propiedades elementales de los ideales monomiales y se pueden deducir fácilmente de la definición anterior.

Proposición 3.2.2. Sea $I \subset k[x, y]$ un ideal. Las siguientes condiciones son equivalentes

(i) I es un ideal monomial.

(ii) Para todo $f = \sum c_{ab}x^a y^b \in I$ se tiene que $x^a y^b \in I$ siempre que $c_{ab} \neq 0$.

Proposición 3.2.3. Sea $I \subset k[x, y]$ un ideal monomial, entonces I^n es un ideal monomial para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $I \subset k[x, y]$ un ideal monomial, entonces $I = \langle S \rangle$, donde S es un conjunto de monomios que generan I . Se deduce que S^2 es un conjunto generador para I^2 . Luego I^2 es un ideal monomial al ser S^2 un conjunto de monomios. Por tanto, usando inducción, queda demostrada la proposición. \square

Sea $I \subset k[x, y]$ un ideal monomial y consideremos un monomio $r = x^{n_1} y^{n_2} \in \bar{I}$. Entonces podemos encontrar $a_i \in I^i$ tales que

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Por las Proposiciones 3.2.2 y 3.2.3, cada monomio de a_i es elemento de I^i . En específico, sea b_i el monomio de a_i cuyo soporte es (in_1, in_2) . Estos monomios cumplen que

$$r^n + b_1 r^{n-1} + \dots + b_n = 0.$$

3.2. Ideales monomiales

Ahora tomemos un elemento $b_i r^{n-i} \neq 0$ y observamos que tiene el mismo soporte que r^n . Entonces existe $\alpha \in k^*$ tal que $r^n - \alpha b_i r^{n-i} = 0$. Dividiendo por r^{n-i} obtenemos que $r^i - \alpha b_i = 0$, en donde b_i es el producto de i monomios en I , ya que $b_i \in I^i$. Por tanto, para ver si un monomio r es integral sobre un ideal I , basta probar que existe $i \in \mathbb{N}$ y monomios $m_1, \dots, m_i \in I$ tales que

$$r^i - m_1 m_2 \dots m_i = 0. \quad (3.2)$$

Con lo anterior, podemos demostrar la siguiente proposición.

Proposición 3.2.4. *La cerradura integral de un ideal monomial $I \subset k[x, y]$ es un ideal monomial.*

Demostración. Supongamos que \bar{I} no es monomial, entonces por la Proposición 3.2.2 existe $f \in \bar{I}$ tal que no todos los monomios de f están en \bar{I} . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ningún monomio de f está en \bar{I} . Escribamos $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$, donde $\Lambda \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ es finito y f_λ tiene soporte λ . También sea $m = (m_1, m_2) \in \Lambda$ tal que $f_m \neq 0$.

Supongamos que k es algebraicamente cerrado. Cualquier automorfismo ϕ de $k[x, y]$ cumple que si $f \in \bar{I}$ entonces $\phi(f) \in \overline{\phi(I)}$. En particular, sea ϕ_u el automorfismo definido por $\phi(x) = u_1 x$ y $\phi(y) = u_2 y$, en donde u_1 y u_2 son unidades en k . El automorfismo ϕ_u verifica que $\phi_u(I) = I$ y, por tanto, que $\phi_u(f) \in \bar{I}$. Además $m \in k[x, y]$ es un monomio con soporte (a, b) si y sólo si $\phi_u(m)$ es un monomio con soporte (a, b) . Como k es algebraicamente cerrado (y por tanto, infinito) y f no es un monomio, entonces podemos encontrar unidades $u_1, u_2 \in k$ tales que $\phi_u(f)$ no es un múltiplo de f . Definamos el polinomio $g = u_1^{m_1} u_2^{m_2} f - \phi_u(f)$, el cual es diferente de cero. Notemos que $g_m = 0$ y que si $g_l \neq 0$ entonces $f_l \neq 0$. Luego g tiene una cantidad de monomios estrictamente menor que f . Aplcando el mismo argumento a g , obtenemos un polinomio $g^{(1)}$ con una cantidad estrictamente menor de monomios que g . Continuando el proceso recursivamente obtenemos que $g^{(n)} \in \bar{I}$ es un monomio. Pero el monomio $g^{(n)}$ es un múltiplo escalar de un monomio de $g^{(n-1)}$, y así, sucesivamente, el monomio $g^{(n)}$ es un múltiplo escalar de un monomio de f . Luego $f_\lambda \in \bar{I}$ para algún $\lambda \in \Lambda$, contradiciendo la elección de f . Por tanto \bar{I} es un ideal monomial.

Para el caso de que k no sea algebraicamente cerrado, sea \bar{k} su cerradura algebraica. Por el caso anterior, cada monomio de f es integral sobre $I\bar{k}[x, y]$. Usando la ecuación (3.2), si r es un monomio de f entonces r satisface la ecuación $r^i - a_i = 0$ donde a_i es el producto de i monomios en $I\bar{k}[x, y]$. Pero como $a_i = r^i \in k[x, y]$, entonces a_i se puede escribir como producto de i monomios en I . Por tanto $r \in \bar{I}$ y concluimos que \bar{I} es un ideal monomial. \square

Antes de continuar, daremos una definición análoga a la Definición 2.1.1 para el caso de un ideal.

Definición 3.2.5. Sea $I \subset k[x, y]$ un ideal. Entonces se tienen las siguientes definiciones:

- (i) El *soporte* de I se define como $\Delta(I) = \cup_{f \in I} \Delta(f)$.
- (ii) El *polígono de Newton* de I se define como

$$\Gamma(I) = \text{conv} \left(\bigcup_{p \in \Delta(I)} (p + \mathbb{R}_{\geq 0}^2) \right).$$

Una ventaja que tienen los ideales monomiales es que su cerradura integral tiene una interpretación geométrica. El siguiente teorema detalla esta característica.

Teorema 3.2.6. Sea I un ideal monomial y sea \bar{I} su cerradura integral. Entonces el soporte de \bar{I} es igual a todos los puntos con coordenadas enteras dentro del polígono de Newton de I .

Demostración. Sea $I \subset k[x, y]$ un ideal generado por los monomios $m_j = x^{n_{j1}}y^{n_{j2}}$ con $j = 1, \dots, s$. Sea $r = x^{n_1}y^{n_2} \in \bar{I}$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ y a_i tales que $r^i - a_i = 0$ en donde a_i es el producto de i monomios en I . Podemos reescribir a a_i como $a_i = bm_1^{k_1} \dots m_s^{k_s}$, donde b es un monomio, $k_j \geq 0$ y $\sum k_j = i$. Como $r^i = bm_1^{k_1} \dots m_s^{k_s}$, entonces tenemos la desigualdad $i \cdot n_l \geq \sum_j k_j \cdot n_{jl}$ la cual se puede reescribir como

$$n_l \geq \sum_j c_j \cdot n_{jl}, \quad \text{para } l = 1, 2.$$

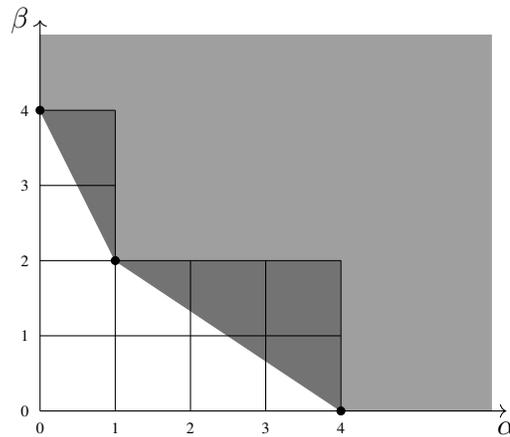
donde $c_j = \frac{k_j}{i} \geq 0$ y $\sum_j c_j = 1$.

3.2. Ideales monomiales

Recíprocamente, supongamos que existen racionales $c_j \geq 0$ tales que $\sum_{j=1}^s c_j = 1$ y que cumplen la desigualdad anterior. Escribamos $c_j = \frac{k_j}{i}$ para algún $i \in \mathbb{N}$ y $k_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Como $r^i = bm_1^{k_1} \cdots m_s^{k_s}$ para algún monomio $b \in k[x, y]$, entonces $r \in \bar{I}$. Por tanto, un monomio $r = x^{n_1}y^{n_2} \in \bar{I}$ si y sólo si existen números racionales $c_j \geq 0$ con $j = 1, \dots, s$, tales que $\sum_j c_j = 1$ y $n_l \geq \sum_j c_j \cdot n_{j_l}$ para $l = 1, 2$.

La condición anterior nos dice que todos los puntos con coordenadas enteras dentro del polígono de Newton de I son el soporte de monomios que son integrales sobre I . \square

Ejemplo 10. Sea $I = (x^4, xy^2, y^4)$, en la figura de abajo se muestra su polígono de Newton.



Observamos que cualquier monomio en \bar{I} está generado por (x^4, xy^2, x^3y, y^4) . Por lo tanto deducimos que $\bar{I} = (x^4, x^3y, xy^2, y^4)$.

En general, si I es un ideal integralmente cerrado, entonces no necesariamente se deduce que I^n es integralmente cerrado. Sin embargo, el siguiente teorema da condiciones para que esto suceda.

Teorema 3.2.7. ([HS06, Teorema 1.4.10]). *Sea I un ideal monomial en $k[x_1, \dots, x_n]$ tal que I, I^2, \dots, I^{n-1} son integralmente cerrados. Entonces todas las potencias de I son ideales integralmente cerrados.*

Como corolario del teorema anterior, tenemos que en $k[x, y]$ las potencias de ideales integralmente cerrados son ideales integralmente cerrados.

3.3 Teoremas de Zariski

En esta sección nos limitaremos a enunciar los Teoremas de Zariski. Una demostración detallada de los mismos se puede encontrar en [HS06, Capítulo 14].

Definición 3.3.1. Un ideal I de un anillo R es *simple* si no se puede escribir de la forma $I = J \cdot K$, en donde $J, K \subset I$ son ideales propios. Decimos que J divide a I , y se escribe $J \mid I$, si $I = J \cdot K$ para algún ideal K .

Definición 3.3.2. Un ideal propio $I \subset R$ es *primario* si $xy \in I$ implica que $x \in I$ o $y^n \in I$ para algún $n > 0$. Si I es un ideal primario, entonces $P = \sqrt{I}$ es un ideal primo. En este caso se dice que I es P -primario.

Teorema 3.3.3. (Zariski [HS06, Teorema 14.4.4]). *Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local regular de dimensión 2 y sean $I, J \subset R$ ideales integralmente cerrados. Entonces IJ es integralmente cerrado.*

Teorema 3.3.4. (Factorización de Zariski [HS06, Teorema 14.4.8]). *Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local regular de dimensión 2. Entonces cualquier ideal $I \neq 0$ integralmente cerrado se puede escribir de forma única (salvo en el orden) como*

$$I = a_1^{l_1} \cdots a_m^{l_m} I_1^{k_1} \cdots I_n^{k_n} \quad (3.3)$$

donde I_1, \dots, I_n son ideales simples \mathfrak{m} -primarios integralmente cerrados, a_1, \dots, a_m son elementos primos relativos 2 a 2 e irreducibles de R , y $l_1, \dots, l_m, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$.

3.3.1 Descomposición de Zariski para ideales monomiales

La factorización de Zariski de ideales monomiales integralmente cerrados en $\mathbb{C}[[x, y]]$ tiene una sencillez e interpretación geométrica.

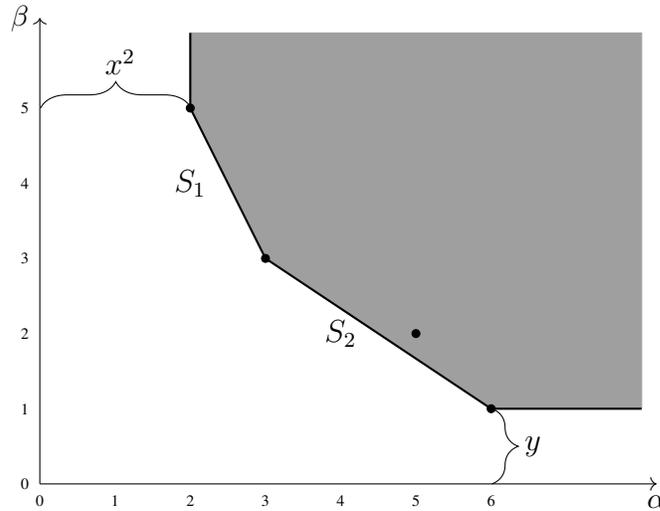
Corolario 3.3.5. *Sea $I \subset \mathbb{C}[[x, y]]$ un ideal monomial integralmente cerrado. Entonces la factorización de Zariski del ideal es*

$$I = x^m y^n \cdot \prod_S I_{(ps, qs)}^{k_s} \quad (3.4)$$

3.3. Teoremas de Zariski

donde m, n son enteros no negativos, S es una cara de $\Gamma(I)$ con ecuación $p_S\alpha + q_S\beta = N_S$, con $(p_S, q_S) = 1$ y $k_S = |\Delta(I) \cap S| - 1$, y $I_{(p_S, q_S)}$ es el ideal integralmente cerrado tal que su polígono de Newton tiene solamente una cara con ecuación $p_S\alpha + q_S\beta = p_Sq_S$.

Ejemplo 11. Sea $I = (x^6y, x^5y^2, x^3y^3, x^2y^5)$, su polígono de Newton se muestra a continuación.



Las caras S_1 y S_2 están dadas por $2\alpha + \beta = 9$ y $2\alpha + 3\beta = 15$ respectivamente. Además tenemos que $k_{S_1} = k_{S_2} = 1$. Los ideales asociados son $I_{(2,1)} = (x, y^2)$ y $I_{(2,3)} = (x^3, x^2y, y^2)$, los cuales son integralmente cerrados. Por tanto la factorización de Zariski del ideal I es

$$I = x^2y(x, y^2)(x^3, x^2y, y^2).$$

CAPÍTULO 4

Ideales Multiplicadores

Los *ideales multiplicadores* han sido ampliamente estudiados en las últimas tres décadas. Fueron concebidos de una manera analítica al estudiar la integrabilidad local de funciones por Nadel en 1990 (ver [Nad90]). También aparecieron como *ideales adjuntos* en trabajos de Lipman en 1993 (ver [Lip93]). Desde entonces se ha tenido un interés especial por ellos dentro de la Geometría Birracional. Esto se debe a que son una herramienta para estudiar y clasificar singularidades de variedades algebraicas complejas. En la sección 4.1 se definirán los divisores para variedades complejas y las *log-resoluciones* de divisores e ideales. En 4.2 se definirán las gavillas de ideales multiplicadores para divisores e ideales y se estudiarán sus propiedades elementales. Los números de salto se estudiarán en la sección 4.3 y se demostrará que son periódicos y racionales. Estos números determinan cuándo hay cambios en los ideales multiplicadores y son un invariante de la singularidad. Por último, en la sección 4.4 se enunciará el Teorema de Howald, el cual es una herramienta para el cálculo de ideales multiplicadores asociados a ideales monomiales o singularidades de curvas planas no degeneradas respecto a su polígono de Newton.

4.1 Log-resolución y divisores

A lo largo del capítulo se asumirá que X es una variedad compleja suave.

Definición 4.1.1. Sea X una variedad irreducible. Un \mathbb{Q} -divisor D en X es una combinación lineal formal finita

$$D = \sum_i a_i D_i \quad (4.1)$$

de subvariedades irreducibles $D_i \subset X$ de codimensión 1 con coeficientes $a_i \in \mathbb{Q}$. También decimos que D es *efectivo* si todos los coeficientes $a_i \geq 0$ y que D es *entero* si $a_i \in \mathbb{Z}$ para toda i . Por último, escribimos $D_1 \preceq D_2$ si $D_2 - D_1$ es efectivo.

Definición 4.1.2. Sea $D = \sum_i a_i D_i$ un \mathbb{Q} -divisor en X . La parte entera $[D]$ de D es el divisor entero definido por

$$[D] = \sum_i [a_i] D_i,$$

donde $[a_i]$ representa la parte entera de a_i .

Definición 4.1.3. Sea X una variedad de dimensión n . Decimos que un divisor $D = \sum_i D_i$ es SNC o tiene *cruces normales simples* si cada D_i es suave y si D es definido en una vecindad de cualquiera de sus puntos por una ecuación local de la forma

$$z_1 \cdot \dots \cdot z_k = 0$$

para algún $k \leq n$. De igual forma, un divisor $D = \sum_i a_i D_i$ tiene soporte normal simple si $\sum_i D_i$ tiene cruces normales simples.

Definición 4.1.4 (Log-resolución de un \mathbb{Q} -divisor). Sea $D = \sum_i a_i D_i$ un \mathbb{Q} -divisor en X . Una log-resolución de D es un morfismo birracional propio

$$\pi : X' \longrightarrow X$$

con X' no singular, tal que el divisor $\pi^* D + Exc(\pi)$ tiene soporte normal simple. Aquí $Exc(\pi)$ denota el divisor excepcional de π .

Definición 4.1.5 (Log-resolución de un ideal). Sea $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ una gavilla no nula de ideales en X . Una log-resolución de \mathfrak{a} es un morfismo birracional propio $\pi : X' \rightarrow X$ tal que

$$\pi^{-1}\mathfrak{a} := \mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(-F),$$

donde F es un divisor efectivo en X tal que $F + \text{Exc}(\pi)$ tiene soporte normal simple.

Observaciones 4.1.6.

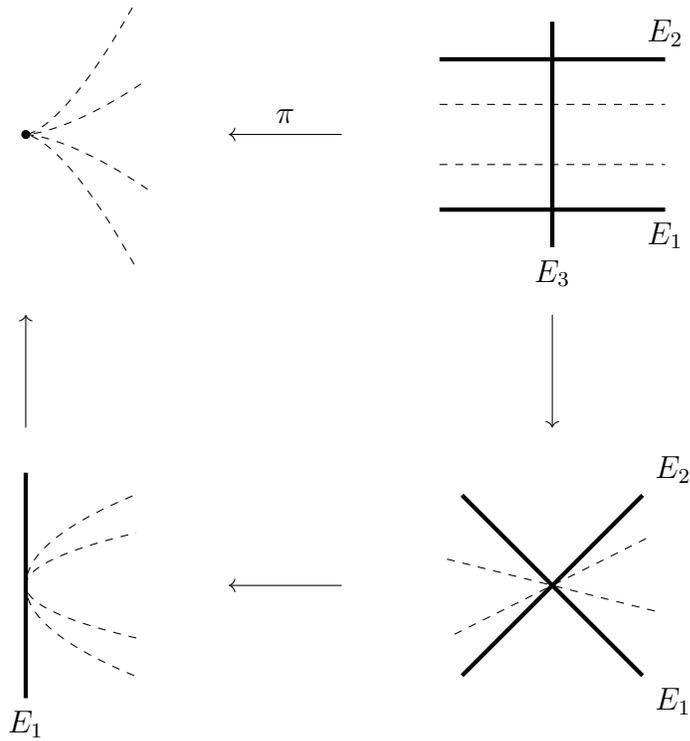
- (i) Dado que estamos trabajando en característica 0, entonces las log-resoluciones siempre existen. Una prueba de ello se puede encontrar en [Hir64].
- (ii) Sea X una variedad afín, sea $A(X)$ su anillo coordenado y sea $\mathfrak{a} = (g_1, \dots, g_k) \subset A(X)$. Si $\pi : X' \rightarrow X$ es una log-resolución de \mathfrak{a} , entonces π también es una log-resolución del divisor $C = \text{Div}(g)$, en donde $g = c_1g_1 + \dots + c_kg_k$ es un elemento general de \mathfrak{a} . Recordemos que un *elemento general* de un ideal es una combinación \mathbb{C} -lineal genérica de los generadores del ideal. Más aún, si escribimos $\pi^*C = F + C_{X'}$ en donde $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(-F)$, entonces $C_{X'}$ es suave.

Dada una resolución $\pi : X' \rightarrow X$, denotamos por

$$K_{X'/X} = K_{X'} - \pi^*K_X$$

al divisor canónico relativo de X' sobre X . Observemos que es un divisor efectivo con soporte en $\text{Exc}(\pi)$. Más aún, el determinante $\det(d\pi)$ es una ecuación local.

Ejemplo 12. Consideremos el ideal $\mathfrak{a} = (x^3, y^2) \subset \mathbb{C}[x, y]$. Uno puede ver que una log-resolución $\pi : X' \rightarrow X$ de \mathfrak{a} está dada por 3 explosiones sucesivas. Tenemos que $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(-2E_1 - 3E_2 - 6E_3)$, en donde E_i es el divisor excepcional de la i -ésima explosión. Por último, uno puede comprobar que $K_{X'/X} = E_1 + 2E_2 + 4E_3$. En la figura de abajo se muestra la log-resolución de \mathfrak{a} .



4.2 Ideales multiplicadores

Naturalmente se tiene que $\pi_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X}) = \mathcal{O}_X$. Luego si N es un divisor entero efectivo entonces

$$\pi_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - N) \subset \mathcal{O}_X$$

es una gavilla de ideales de \mathcal{O}_X . Ahora tenemos todo lo necesario para definir los ideales multiplicadores.

Definición 4.2.1 (Ideal multiplicador de un \mathbb{Q} -divisor efectivo). Sean D un \mathbb{Q} -divisor efectivo en una variedad compleja suave X , $\lambda > 0$ y $\pi : X' \rightarrow X$ una log-resolución de D . Entonces la gavilla de ideales multiplicadores $\mathcal{J}(\lambda D) \subset \mathcal{O}_X$ asociada a D y λ está definida por

$$\mathcal{J}(\lambda D) = \pi_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - \lfloor \lambda \cdot \pi^*D \rfloor). \quad (4.2)$$

Definición 4.2.2 (Ideal multiplicador asociado a una gavilla de ideales). Sea $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ una gavilla no nula de ideales y $\lambda > 0$. Sea $\pi : X' \rightarrow X$ una log-resolución de \mathfrak{a} con $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X'} =$

$\mathcal{O}_{X'}(-F)$. La gavilla de ideales multiplicadores asociada a \mathfrak{a} y λ es definida como

$$\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a}) = \pi_* \mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - \lfloor \lambda \cdot F \rfloor). \quad (4.3)$$

Observaciones 4.2.3. Sea X una variedad afín con anillo coordinado $A(X)$. Entonces cualquier ideal $\mathfrak{a} \subset A(X)$ determina una gavilla en X , y por consiguiente, podemos ver a $\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a})$ como un ideal en $A(X)$. Más aún, en este caso se tiene que si $F = \sum_i r_i E_i$ y $K_{X'/X} = \sum_i b_i E_i$, entonces

$$\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a}) = \{h \in A(X) : \text{ord}_{E_i}(\pi^* h) \geq \lfloor \lambda r_i \rfloor - b_i\}. \quad (4.4)$$

Análogamente para el caso de un divisor D , si $\pi^* D = \sum_i r_i E_i$, entonces

$$\mathcal{J}(\lambda D) = \{h \in A(X) : \text{ord}_{E_i}(\pi^* h) \geq \lfloor \lambda r_i \rfloor - b_i\}. \quad (4.5)$$

El número $\lfloor \lambda r_i \rfloor - b_i$ es llamado cota asociada a E_i y λ , y se denota por $C(E_i, \lambda)$.

La primera propiedad de los ideales multiplicadores es que son independientes de la log-resolución usada. Esta propiedad se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.4 ([Laz04, Teorema 9.2.18]). *Las gavillas de ideales multiplicadores $\mathcal{J}(\lambda D)$ y $\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a})$ son independientes de las log-resoluciones usadas.*

Ejemplo 13. Regresando al Ejemplo 12, las cotas $C(E_i, \lambda)$ para $\lambda \leq \frac{7}{6}$ se muestran en la siguiente tabla.

	$C(E_1, \lambda)$	$C(E_2, \lambda)$	$C(E_3, \lambda)$
$0 < \lambda < \frac{5}{6}$	≤ 0	≤ 0	≤ 0
$\frac{5}{6} \leq \lambda < 1$	0	0	1
$1 \leq \lambda < \frac{7}{6}$	1	1	2
$\lambda = \frac{7}{6}$	1	1	3

Para encontrar los ideales multiplicadores $\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a})$, basta calcular $\text{ord}_{E_i}(\pi^* h)$ para algunos h de grado pequeño. En la siguiente tabla se resume esta información.

4.2. Ideales multiplicadores

h	$\text{ord}_{E_1}(\pi^*h)$	$\text{ord}_{E_2}(\pi^*h)$	$\text{ord}_{E_3}(\pi^*h)$
cte	0	0	0
x	1	1	2
y	1	2	3
x^2	2	2	4

Con lo anterior podemos concluir que

$$\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a}) = \begin{cases} \mathbb{C}[x, y], & \text{para } 0 < \lambda < \frac{5}{6} \\ (x, y), & \text{para } \frac{5}{6} \leq \lambda < \frac{7}{6} \\ (x^2, y), & \text{para } \lambda = \frac{7}{6}. \end{cases}$$

Ejemplo 14. Sea $C = \{x^3 - y^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$, en el Ejemplo 5 vimos que una log-resolución de C consiste en 3 explosiones. De hecho la log-resolución del ejemplo anterior es también una log-resolución de C . Tenemos que el divisor $K_{X'/X} - \lfloor \lambda \cdot \pi^*C \rfloor$ está dado por

$$\begin{aligned} K_{X'/X} - \lfloor \lambda \cdot \pi^*D \rfloor &= E_1 + 2E_2 + 4E_3 - \lfloor \lambda(E_0 + 2E_1 + 3E_2 + 6E_3) \rfloor \\ &= -\lfloor \lambda \rfloor E_0 - (\lfloor 2\lambda \rfloor - 1)E_1 - (\lfloor 3\lambda \rfloor - 2)E_2 - (\lfloor 6\lambda \rfloor - 4)E_3 \end{aligned}$$

en donde E_0 representa la transformada estricta de C . Usando la ecuación (4.5) podemos calcular los ideales multiplicadores para $\lambda \in (0, 1]$. En la siguiente tabla se resume esta información.

	$C(E_0, \lambda)$	$C(E_1, \lambda)$	$C(E_2, \lambda)$	$C(E_3, \lambda)$
$0 < \lambda < \frac{5}{6}$	0	≤ 0	≤ 0	≤ 0
$\frac{5}{6} \leq \lambda < 1$	0	0	0	1
$\lambda = 1$	1	1	1	2

h	$\text{ord}_{E_0}(\pi^*h)$	$\text{ord}_{E_1}(\pi^*h)$	$\text{ord}_{E_2}(\pi^*h)$	$\text{ord}_{E_3}(\pi^*h)$
cte	0	0	0	0
x	0	1	1	2
y	0	1	2	3
$x^n y^m$	0	$n + m$	$n + 2m$	$2n + 3m$
$x^3 - y^2$	1	2	3	6

Por tanto concluimos que los ideales multiplicadores son

$$\mathcal{J}(\lambda \cdot C) = \begin{cases} \mathbb{C}[x, y], & \text{para } 0 < \lambda < \frac{5}{6} \\ (x, y), & \text{para } \frac{5}{6} \leq \lambda < 1 \\ (x^3 - y^2), & \text{para } \lambda = 1. \end{cases}$$

Observando los Ejemplos 13 y 14 podemos intuir que los ideales multiplicadores cambian para valores discretos (y racionales) de λ . Además, a pesar de que el ideal (x^3, y^2) y el divisor $C = \{x^3 - y^2 = 0\}$ tengan la misma log-resolución, los ideales multiplicadores solamente coinciden para $\lambda \in (0, 1)$. Se profundizará en esto en las próximas secciones.

4.3 Números de salto y periodicidad

Definición 4.3.1 (Umbral log-canónico de un \mathbb{Q} -divisor). El *umbral log-canónico* de un \mathbb{Q} -divisor efectivo en $x \in X$ está definido por

$$\text{lct}(D; x) = \inf\{c \in \mathbb{R} : \mathcal{J}(c \cdot D) \neq \mathcal{O}_X\}. \quad (4.6)$$

La definición análoga para el caso de una gavilla de ideales \mathfrak{a} es la siguiente.

Definición 4.3.2 (Umbral log-canónico de una gavilla de ideales). Sea $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ una gavilla de ideales, el *umbral log-canónico* de \mathfrak{a} en $x \in X$ es definido por

$$\text{lct}(\mathfrak{a}; x) = \inf\{c \in \mathbb{R} : \mathcal{J}(c \cdot \mathfrak{a}) \neq \mathcal{O}_X\}. \quad (4.7)$$

Usando las ecuaciones (4.4) y (4.5) podemos calcular el umbral log-canónico. Este corresponde con el λ más pequeño tal que $C(E_i, \lambda) = 1$ para algún E_i . En otras palabras,

$$\text{lct}(D; x) = \min \left\{ \frac{1 + b_i}{r_i} \right\}. \quad (4.8)$$

Intuitivamente, el umbral log-canónico sirve para comparar singularidades. Un umbral más pequeño corresponde con una singularidad "peor". Para más detalles ver [Kol95].

Continuando con el contenido de la sección, los ideales multiplicadores pueden cambiar solamente cuando λr_i es entero. Al empezar a variar λ , el ideal multiplicador "salta" de $\mathcal{O}_{X,x}$ a \mathfrak{m}_x cuando λ es el umbral log-canónico. Conforme λ se incrementa, el ideal multiplicador continúa "saltando" haciéndose más pequeño. Pero como r_i es racional, entonces los valores de λ en donde el ideal cambia son racionales. Esto nos deja el siguiente lema.

Lema 4.3.3 ([Laz04, Lema 9.3.21]). *Sea D un \mathbb{Q} -divisor efectivo en X y $x \in X$ un punto en el soporte de D . Entonces existe una sucesión creciente y discreta*

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$$

de números racionales caracterizados por la propiedad de que

$$\mathcal{J}(\lambda \cdot D)_x = \mathcal{J}(\lambda_i \cdot D)_x \quad \text{para } \lambda \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}),$$

y $\mathcal{J}(\lambda_i \cdot D) \subsetneq \mathcal{J}(\lambda_{i+1} \cdot D)$ para todo i .

Definición 4.3.4. Los *números de salto* se definen como los números λ_i del lema anterior. Más aún, si $\pi : X' \rightarrow X$ es una log-resolución de D con $\pi^*D = \sum_i r_i E_i$ y $K_{X'/X} = \sum_i b_i E_i$ entonces los números de salto tienen la forma

$$\frac{b_i + m}{r_i}$$

para algún índice i y $m \in \mathbb{N}$. A los elementos del conjunto

$$\left\{ \frac{b_i + m}{r_i} : m \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots \right\}$$

se le llaman *candidatos a números de salto*.

En general, es difícil calcular los números de salto. La siguiente proposición nos dice que para el caso de un divisor efectivo entero A , entonces sólo es suficiente encontrar los números de salto en $(0, 1]$.

Proposición 4.3.5. *Sea X una variedad suave, A un divisor entero y D un \mathbb{Q} -divisor en X .*

Entonces

$$\mathcal{J}(D + A) = \mathcal{J}(D) \otimes \mathcal{O}_X(-A).$$

Demostración. Sea $\pi : X' \rightarrow X$ una log-resolución de D . Si A es entero, entonces $[\pi^*D + \pi^*A] = [\pi^*D] + \pi^*A$ para cualquier \mathbb{Q} -divisor. Por tanto

$$\begin{aligned} \pi_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - [\pi^*(D + A)]) &= \pi_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - [\pi^*D]) \otimes \mathcal{O}_{X'}(-\pi^*A) \\ &= \pi_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - [\pi^*D]) \otimes \mathcal{O}_X(-A) \\ &= \mathcal{J}(D) \otimes \mathcal{O}_X(-A). \end{aligned}$$

□

Corolario 4.3.6. *Sea A un divisor entero efectivo en X . Entonces λ es un número de salto si y sólo si $\lambda + 1$ lo es. Por tanto, todos los números de salto se pueden obtener a partir de los números de salto en $(0, 1]$, los cuales son una cantidad finita.*

Demostración. Por la Proposición 4.3.5 se tiene que

$$\mathcal{J}((\lambda + 1)A) = \mathcal{J}(\lambda A + A) = \mathcal{J}(\lambda A) \otimes \mathcal{O}_X(-A).$$

□

4.4 Teorema de Howald e ideales monomiales

A partir de ahora vamos a considerar que $X = \mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Además, como vimos anteriormente, un ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}[X]$ determina una gavilla en X y, por tanto, $\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a}) \subset \mathbb{C}[X]$ es un ideal para $\lambda > 0$.

Sea $\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}[X]$ un ideal monomial y sea $\Gamma(\mathfrak{a})$ su polígono de Newton. Definamos el conjunto $\Gamma(\lambda \cdot \mathfrak{a})$ como

$$\Gamma(\lambda \cdot \mathfrak{a}) := \{\lambda x : x \in \Gamma(\mathfrak{a})\},$$

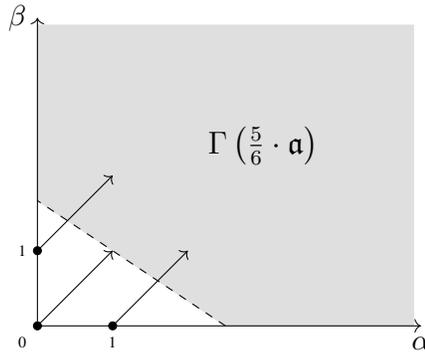
el cual es el polígono $\Gamma(\mathfrak{a})$ reescalado por λ . Denotemos por $\text{int}(\Gamma(\lambda \cdot \mathfrak{a}))$ al interior del conjunto $\Gamma(\lambda \cdot \mathfrak{a})$ con la topología usual de \mathbb{C}^n . Por último sea $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$. Con lo anterior ya tenemos todo lo necesario para enunciar el Teorema de Howald.

Teorema 4.4.1. (Howald [How01]). *Sea $\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}[X]$ un ideal monomial y sea $\Gamma(\mathfrak{a})$ su polígono de Newton. Entonces $\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a})$ es un ideal monomial y*

$$\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a}) = \{x^\nu : \nu + \mathbf{1} \in \text{int} \Gamma(\lambda \cdot \mathfrak{a})\}, \quad (4.9)$$

en donde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ y $x^\nu = x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n}$.

Ejemplo 15. Sea $\mathfrak{a} = (x^3, y^2)$ el ideal monomial del Ejemplo 12. El polígono de Newton $\Gamma(\mathfrak{a})$ tiene solamente un lado compacto con ecuación $2\alpha + 3\beta = 6$. En la siguiente figura se muestra el conjunto $\Gamma(\frac{5}{6} \cdot \mathfrak{a})$, en donde su única cara está sobre la recta $2\alpha + 3\beta = 5$.



Observamos que el punto $(0, 0) + \mathbf{1}$ se encuentra sobre la frontera de $\Gamma(\frac{5}{6} \cdot \mathfrak{a})$ pero no está en su interior, luego $\mathcal{J}(\frac{5}{6} \cdot \mathfrak{a}) = (x, y)$. Además si $\lambda < \frac{5}{6}$, entonces $\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a}) = \mathbb{C}[x, y]$. Esto coincide con lo obtenido en el Ejemplo 13.

Ejemplo 16 (Ideales diagonales). Sean $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ y $\mathfrak{a} = (x_1^{a_1}, \dots, x_n^{a_n}) \subset \mathbb{C}[X]$. El polígono de Newton $\Gamma(\mathfrak{a})$ sólo tiene un lado compacto con ecuación $\sum_i \frac{x_i}{a_i} = 1$. Entonces el ideal multiplicador $\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a})$ consiste en todos los monomios x^ν tales que

$$\sum_{i=1}^n \frac{\nu_i + 1}{a_i} > \lambda.$$

Por último, $\lambda < \sum_i \frac{1}{a_i}$ si y sólo si $\mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a}) = \mathbb{C}[X]$. Por tanto $\sum_i \frac{1}{a_i}$ es el umbral log-canónico de \mathfrak{a} .

El Teorema de Howald también nos ayuda a caracterizar los números de salto de los ideales multiplicadores de \mathfrak{a} . El polígono de Newton $\Gamma(\mathfrak{a})$ está determinado por una cantidad finita de desigualdades lineales con coeficientes racionales de la forma $f_m(x_1, \dots, x_n) \geq 1$, definidas en el primer ortante. Cada $\nu \in \mathbb{N}^n$ determina un número de salto λ_ν caracterizado por ser el racional c más pequeño tal que $x^\nu \notin \mathcal{J}(c \cdot \mathfrak{a})$. Usando el Teorema de Howald, lo anterior implica que

$$\lambda_\nu = \min_m \{f_m(\nu + \mathbf{1})\}.$$

Todos los números de salto tienen esta forma, sin embargo diferentes ν pueden determinar el mismo número de salto.

Denotemos por \mathfrak{a}_f el ideal generado por los monomios presentes en el polinomio f y por $\mathcal{J}(\lambda \cdot f)$ el ideal multiplicador del ideal (f) . Como $(f) \subset \mathfrak{a}_f$, entonces $\mathcal{J}(\lambda f) \subset \mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a}_f)$ para todo $\lambda > 0$. Uno se puede preguntar cuándo la contención anterior se vuelve igualdad. Esto sucede cuando los coeficientes de f son los suficientemente “generales”. La siguiente definición nos formaliza esta idea.

Definición 4.4.2 (Polinomios no degenerados). Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio y sea $\Gamma(f)$ su polígono de Newton. Sea S una cara de $\Gamma(f)$ y sea f_S la restricción de f sobre S . Se dice que f es no degenerado respecto a S si la 1-forma d_{f_S} no se anula en $(\mathbb{C}^*)^n$. Además se dice que f es no degenerado respecto a su polígono de Newton si f es no degenerado respecto a todas las caras de $\Gamma(f)$.

Teorema 4.4.3 ([Laz04, Lema 9.3.37]). *Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio no degenerado respecto a su polígono de Newton. Entonces*

$$\mathcal{J}(\lambda \cdot f) = \mathcal{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a}_f)$$

para todo $\lambda \in (0, 1)$.

Observaciones 4.4.4.

(i) Si $C = \text{Div} f$, entonces $\mathcal{J}(\lambda \cdot C) = \mathcal{J}(\lambda \cdot f)$.

(ii) Por la Proposición 4.3.5, si $\lambda > 1$ entonces el ideal multiplicador $\mathcal{J}(\lambda \cdot f)$ está determinado por

$$\mathcal{J}(\lambda \cdot f) = (f) \cdot \mathcal{J}((\lambda - 1) \cdot f),$$

por lo que podemos calcular el ideal multiplicador $\mathcal{J}(\lambda \cdot f)$ para todo $\lambda > 0$.

CAPÍTULO 5

Descomposición de Zariski de los ideales multiplicadores asociados a una singularidad de curva plana: Algunos resultados

Para una singularidad de curva plana irreducible C podemos obtener una serie de invariantes topológicos tales como sus exponentes característicos, sus pares de Puiseux, su grafo de resolución y su sucesión de multiplicidades. El objetivo del presente y último capítulo es introducir dos posibles invariantes más, los cuales son la *sucesión de números de Milnor* y la *sucesión de número de factores* asociados a los ideales multiplicadores de la curva C . En la sección 5.1 se introducirán estos conceptos, así como se presentan propiedades para el cálculo de los mismos. En la sección 5.2 se discutirá un poco acerca de estos invariantes para el caso de una singularidad irreducible con un par de Puiseux, además las Proposiciones 5.2.3, 5.2.5 y 5.2.6 son algunos resultados parciales originales acerca de los mismos. En la sección 5.3 se presentará el Algoritmo de Alberich-Carramiñana, Álvarez-Montaner y Blanco, el cual calcula un conjunto de generadores para ideales integralmente cerrados en una superficie

suave compleja. Por último, se mostrarán ejemplos para el caso de singularidades con más de un par de Puiseux.

5.1 Sucesión de Milnor y de factores

Definición 5.1.1. Sea $I \subset \mathbb{C}[x, y]$ un ideal y sea f un elemento general de I . Definimos el *número de Milnor* del ideal I como el número de Milnor de f y lo denotaremos por $\mu(I)$.

Consideremos un gérmen de curva plana irreducible C y sea λ un número de salto. Como el ideal multiplicador $\mathcal{J}(\lambda \cdot C)$ es un ideal integralmente cerrado, entonces podemos usar el Teorema de Zariski (3.3.4) para encontrar una factorización en productos de ideales simples. Sea v_λ el número de factores, contando multiplicidades, presentes en la factorización de $\mathcal{J}(\lambda \cdot C)$. Sea además μ_λ el número de Milnor del ideal $\mathcal{J}(\lambda \cdot C)$. A pesar de que los números v_λ y μ_λ están definidos para cualquier número de salto λ , gracias a la periodicidad de los mismos es suficiente considerar solamente números de salto $\lambda < 1$.

Definición 5.1.2. Sea C un gérmen de curva plana y sean $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k < 1$ todos los números de salto menores a 1. Definamos $\mu_i := \mu_{\lambda_i}$ y $v_i := v_{\lambda_i}$. A las sucesiones (v_i) y (μ_i) se les llama *sucesión de factores* y *sucesión de Milnor* asociadas a la curva C , respectivamente.

Calcular el número de Milnor para un ideal I arbitrario puede resultar complicado. Sin embargo el Teorema de Zariski nos facilita el cálculo de dicho número para el caso de ideales monomiales integralmente cerrados. Para esto consideremos primero un ideal $I_{(p_S, q_S)}$ simple m-primario tal como aparece en la Factorización de Zariski del Corolario 3.3.5. Un elemento general de $I_{(p_S, q_S)}$ es $f(x, y) = k_1 x^{q_S} + k_2 y^{p_S} + g(x, y)$, donde $\text{ord}_t g(t^{p_S}, t^{q_S}) > p_S q_S$. Como dos curvas equisingulares tienen el mismo número de Milnor, entonces $\mu(f) = \mu(f - g) = \mu(k_1 x^{q_S} + k_2 y^{p_S})$. Por tanto

$$\mu(I_{(p_S, q_S)}) = (p_S - 1)(q_S - 1).$$

La siguiente proposición aborda el caso para $I_{(p_S, q_S)}^n$.

Proposición 5.1.3. *El número de Milnor del ideal $I_{(p_S, q_S)}^n$, donde $n > 0$, está dado por*

$$\mu(I_{(p_S, q_S)}^n) = (np_S - 1)(nq_S - 1). \quad (5.1)$$

Demostración. Usemos inducción, el caso $n = 1$ lo probamos anteriormente. Supongamos que $\mu(I_{(p_S, q_S)}^k) = (kp_S - 1)(kq_S - 1)$ y consideremos $f \in I_{(p_S, q_S)}^{k+1}$ un elemento general. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $f = f_1 f_2 \dots f_{k+1}$, donde $f_i \in I_{(p_S, q_S)}$ son elementos generales. Usando la fórmula (1.1) para f_{k+1} y $g = f_1 \dots f_k$ tenemos que

$$\mu(f) = \mu(f_{k+1}) + \mu(g) + 2(f_{k+1} \cdot g) - 1. \quad (5.2)$$

Recordemos que $(f_{k+1} \cdot g) = \sum_{i=1}^k (f_{k+1} \cdot f_i)$, luego sólo basta calcular $(h_1 \cdot h_2)$ para elementos generales $h_1, h_2 \in I_{(p_S, q_S)}$. Una parametrización para h_1 es

$$\begin{cases} x(t) = t^{p_S} \\ y(t) = a_1 t^{q_S} + (\text{términos de orden superior}) \end{cases},$$

entonces $h_2(x(t), y(t)) = k_1 x^{p_S q_S} + k_2 y^{p_S q_S} + (\text{términos de orden superior})$. Por consiguiente $(h_1 \cdot h_2) = \text{ord}_t h_2(x(t), y(t)) = p_S q_S$. Como $g \in I_{(p_S, q_S)}^k$ es un elemento general, entonces por hipótesis inductiva se tiene que $\mu(g) = (kp_S - 1)(kq_S - 1)$. Volviendo a (5.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(f) &= (p_S - 1)(q_S - 1) + (kp_S - 1)(kq_S - 1) + 2kp_S q_S - 1 \\ &= (kp_S - 1)(kq_S - 1) + p_S(kq_S - 1) + q_S(kp_S - 1) + p_S q_S \\ &= ((k+1)p_S - 1)((k+1)q_S - 1). \end{aligned}$$

Esto completa la inducción, por tanto $\mu(I_{(p_S, q_S)}^n) = (np_S - 1)(nq_S - 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Las siguientes proposiciones también serán de utilidad para calcular números de Milnor de ideales.

Proposición 5.1.4. *Sean $I, J \subset \mathbb{C}[x, y]$. Entonces*

$$\mu(IJ) = \mu(I) + \mu(J) + 2(f \cdot g) - 1, \quad (5.3)$$

donde $f \in I, g \in J$ son elementos generales.

5.1. Sucesión de Milnor y de factores

Demostración. Se deduce inmediatamente de (1.1). □

Proposición 5.1.5. Sean $I_{(a,b)}, I_{(c,d)}$ ideales como en el Corolario 3.3.5 y sean $f \in I_{(a,b)}$, $g \in I_{(c,d)}$ elementos generales. Entonces

$$(f \cdot g) = \min\{ad, bc\} \quad (5.4)$$

Demostración. El elemento general $f = k_1x^b + k_2y^a + f_1$, donde $\text{ord}_t f_1(t^a, t^b) > ab$, tiene una parametrización de la forma

$$\begin{cases} x(t) = t^a \\ y(t) = a_1t^b + (\text{términos de orden superior}) \end{cases} .$$

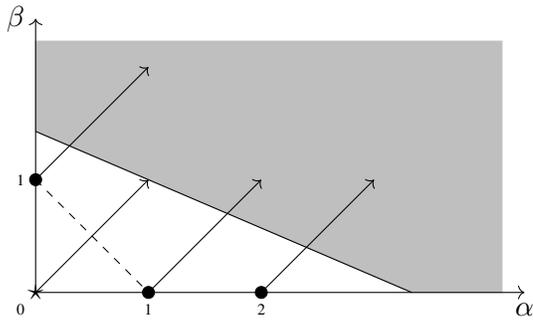
Sustituyendo en g obtenemos que $g(x(t), y(t)) = k_3t^{ad} + k_4t^{bc} + (\text{términos de orden superior})$.

Luego $(f \cdot g) = \text{ord}_t g = \min\{ad, bc\}$ □

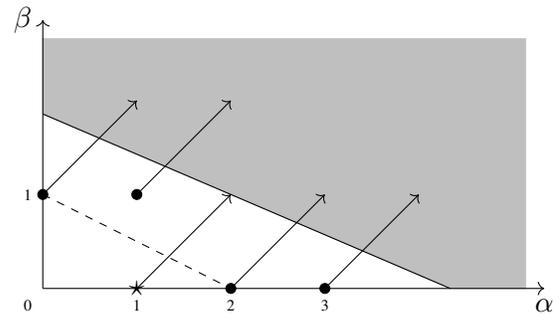
Ejemplo 17. Consideremos la singularidad de curva plana definida por $f(x, y) = y^3 + x^7$. El polinomio f es no degenerado respecto a su polígono de Newton, ya que $df = (7x^6, 3y^2)$ no se anula en $(\mathbb{C}^*)^2$. Por el Teorema 4.4.3 tenemos que $\mathcal{J}(\lambda \cdot f) = \mathcal{J}(\lambda \cdot \alpha_f)$, donde $\alpha_f = (x^7, y^3)$ y $\lambda < 1$. Los números de salto de α_f en $(0, 1)$ están dados por

$$\left\{ \frac{3(i+1) + 7(j+1)}{21} : i, j \geq 0 \right\} \cap (0, 1) = \left\{ \frac{10}{21}, \frac{13}{21}, \frac{16}{21}, \frac{17}{21}, \frac{19}{21}, \frac{20}{21} \right\} .$$

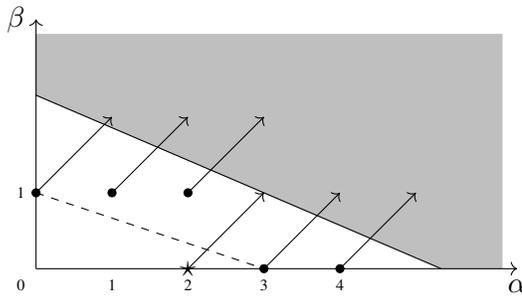
Los conjuntos $\Gamma(\lambda \cdot \alpha_f)$ se muestran a continuación. Las líneas punteadas son las caras del polígono de Newton del ideal $\mathcal{J}(\lambda \cdot \alpha_f)$, mientras que el vértice (\star) representa el elemento que ocasiona el salto en el ideal multiplicador.



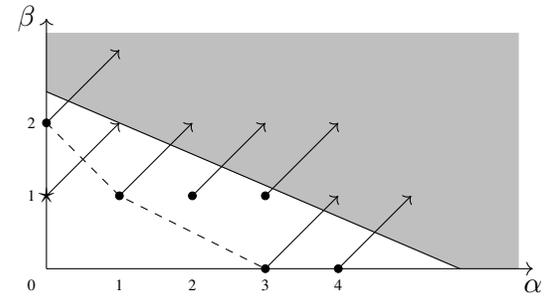
(a) $\Gamma\left(\frac{10}{21} \cdot \mathfrak{a}_f\right)$



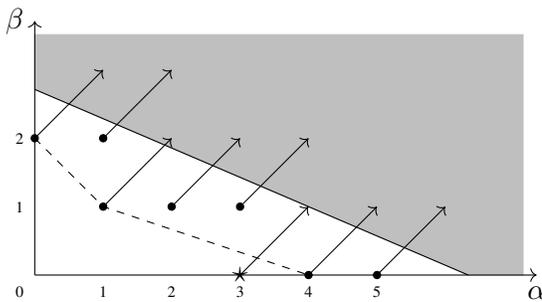
(b) $\Gamma\left(\frac{13}{21} \cdot \mathfrak{a}_f\right)$



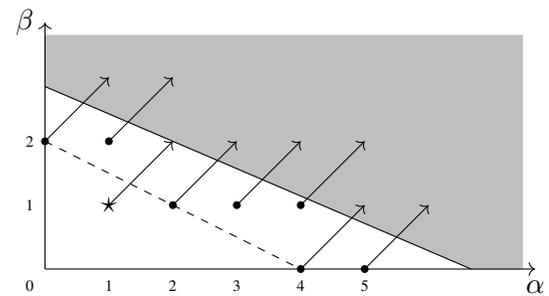
(c) $\Gamma\left(\frac{16}{21} \cdot \mathfrak{a}_f\right)$



(d) $\Gamma\left(\frac{17}{21} \cdot \mathfrak{a}_f\right)$



(e) $\Gamma\left(\frac{19}{21} \cdot \mathfrak{a}_f\right)$



(f) $\Gamma\left(\frac{20}{21} \cdot \mathfrak{a}_f\right)$

Los 3 primeros ideales multiplicadores son simples y además $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. Para $\lambda = \frac{17}{21}$ tenemos que $\mathcal{J}\left(\frac{17}{21} \cdot \mathfrak{a}_f\right) = (x^3, xy, y^2) = (x, y)(x^2, y)$. El número de Milnor μ_4 lo podemos calcular de la siguiente forma

$$\mu_4 = \mu(g_1 g_2) = \mu(g_1) + \mu(g_2) + 2(g_1 \cdot g_2) - 1,$$

en donde $g_1 = k_1 x + k_2 y$ y $g_2 = k_3 x^2 + k_4 y$ son elementos generales de (x, y) y (x^2, y)

5.2. Curvas con un par de Puiseux

respectivamente. Es fácil ver que $\mu(g_1) = \mu(g_2) = 0$ y $(g_1 \cdot g_2) = 1$, por tanto $\mu_4 = 1$. Análogamente podemos obtener μ_5 y μ_6 . La siguiente tabla recopila toda la información.

i	λ_i	$\mathcal{J}(\lambda_i \cdot f)$	(\star)	μ_i	ν_i
1	$\frac{10}{21}$	(x, y)	1	0	1
2	$\frac{13}{21}$	(x^2, y)	x	0	1
3	$\frac{16}{21}$	(x^3, y)	x^2	0	1
4	$\frac{17}{21}$	$(x^3, xy, y^2) = (x, y)(x^2, y)$	y	1	2
5	$\frac{19}{21}$	$(x^4, xy, y^2) = (x, y)(x^3, y)$	x^3	1	2
6	$\frac{20}{21}$	$(x^4, x^2y, y^2) = (x^2, y)^2$	xy	3	2

5.2 Curvas con un par de Puiseux

Si C tiene un único par de Puiseux, entonces es topológicamente equivalente a la singularidad determinada por la ecuación $f(x, y) = y^a + x^b = 0$, en donde $\gcd(a, b) = 1$ y $a < b$. Por tanto, a lo largo de la sección, asumiremos que C tiene esta forma.

El polinomio f es no degenerado respecto a su polígono de Newton, entonces los ideales multiplicadores asociados a f pueden ser calculados usando el Teorema 4.4.3 y el Teorema de Howald. El conjunto de los números de salto asociados a C en el intervalo $(0, 1)$ es

$$\left\{ \frac{a(i+1) + b(j+1)}{ab} : i, j \geq 0 \right\} \cap (0, 1),$$

cuya cardinalidad es $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$. Cabe señalar que la longitud de las sucesiones de Milnor y de factores es también $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$. Además el umbral log-canónico es $\text{lct}(C; 0) = \frac{a+b}{ab}$.

Proposición 5.2.1. *Sea $\lambda_{i,j} = \frac{a(i+1)+b(j+1)}{ab} < 1$ el número de salto determinado por el monomio $x^i y^j$. Entonces un conjunto de generadores para el ideal multiplicador $\mathcal{J}(\lambda_{i,j} \cdot C)$ es*

$$T = \{x^{\nu_1} y^{\nu_2} : ai + bj < a\nu_1 + b\nu_2 < a(i+1) + b(j+1)\}.$$

Demostración. Por el Teorema 4.4.3 y el Teorema de Howald tenemos que el ideal multiplicador $\mathcal{J}(\lambda_{i,j} \cdot C)$ es

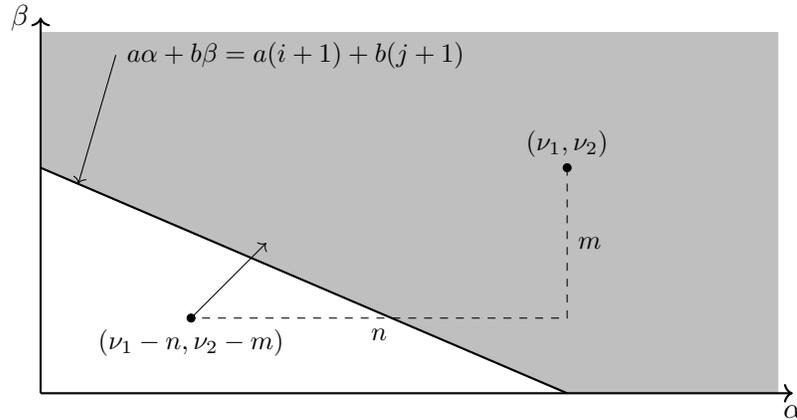
$$\mathcal{J}(\lambda_{i,j} \cdot C) = \mathcal{J}(\lambda_{i,j} \cdot \mathbf{a}_f) = \{x^{\nu_1}y^{\nu_2} : \nu + \mathbf{1} \in \text{int } \Gamma(\lambda_{i,j} \cdot \mathbf{a}_f)\},$$

donde $\mathbf{a}_f = (x^b, y^a)$. El conjunto $\Gamma(\lambda_{i,j} \cdot \mathbf{a}_f)$ tiene un lado compacto dado por la ecuación $a\alpha + b\beta = a(i+1) + b(j+1)$, luego la condición $\nu + \mathbf{1} \in \text{int } \Gamma(\lambda_{i,j} \cdot \mathbf{a}_f)$ es equivalente a que $a(\nu_1 + 1) + b(\nu_2 + 1) > a(i+1) + b(j+1)$, la cual también es equivalente a que $a\nu_1 + b\nu_2 > ai + bj$. Por tanto $\langle T \rangle \subset \mathcal{J}(\lambda_{i,j} \cdot C)$.

Para la otra contención sea $x^{\nu_1}y^{\nu_2} \in \mathcal{J}(\lambda_{i,j} \cdot C)$, luego tenemos que $ai + bj < a\nu_1 + b\nu_2$. Si $a\nu_1 + b\nu_2 < a(i+1) + b(j+1)$, entonces $x^{\nu_1}y^{\nu_2} \in T$ y acabamos. Supongamos que $a\nu_1 + b\nu_2 \geq a(i+1) + b(j+1)$, tomemos $(n, m) \in ([0, \nu_1] \times [0, \nu_2]) \cap \mathbb{Z}^2$ tal que

$$ai + bj < a(\nu_1 - n) + b(\nu_2 - m) < a(i+1) + b(j+1).$$

Notamos que $x^{\nu_1}y^{\nu_2} \in \langle T \rangle$ ya que $x^{\nu_1-n}y^{\nu_2-m} \in T$. Entonces $\mathcal{J}(\lambda_{i,j} \cdot C) \subset \langle T \rangle$ y la proposición queda demostrada. En la siguiente figura se muestra el proceso de elección del par (n, m) , el cual puede no ser único.



□

El conjunto de generadores T de la proposición anterior puede no ser minimal, esto se ilustra en el Ejemplo 17.

La siguiente proposición se deduce fácilmente de la Proposición 1.0.12.

5.2. Curvas con un par de Puiseux

Proposición 5.2.2. Sean $(\mu_i)_{i=1}^n$ y $(\nu_i)_{i=1}^n$ las sucesiones de Milnor y de factores de una singularidad de curva plana C (no necesariamente irreducible). Entonces

$$\mu_i + \nu_i \equiv 1 \pmod{2},$$

para $i = 1, \dots, n$.

Otra observación que cabe señalar es que $\mu_i = 0$ y $\nu_i = 1$ para $i = 1, \dots, \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil$. Lo anterior es porque $\mathcal{J}(\lambda_i \cdot C) = (x^i, y)$. A pesar de que el Teorema de Howald simplifica bastante el cálculo de ideales multiplicadores, todavía no se ha encontrado una expresión explícita para el cálculo de generadores del ideal multiplicador o para el cálculo de las sucesiones (μ_i) y (ν_i) .

5.2.1 Algunos resultados

En la presente sección se muestran algunos resultados de las sucesiones de Milnor y de factores para ciertas curvas particulares con un único par de Puiseux. En específico, las Proposiciones 5.2.3, 5.2.5 y 5.2.6 son resultados originales.

Representemos por C_n a la singularidad de curva plana determinada por $y^n + x^{n+1} = 0$, para $n > 1$. Además sea l_n la cantidad de números de salto < 1 asociados a C_n . Entonces $l_n = \frac{n(n-1)}{2}$ y $l_{n+1} = n + l_n$. Sean

$$0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{l_n} < 1,$$

los números de salto de C_n .

Proposición 5.2.3. El ideal multiplicador asociado a λ_{l_n} es

$$\mathcal{J}(\lambda_{l_n} \cdot C_n) = (x, y)^{n-1}$$

Demostración. El número de salto λ_{l_n} corresponde al monomio y^{n-2} y

$$\lambda_{l_n} = \frac{n(0+1) + (n+1)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{n^2 + n - 1}{n^2 + n}.$$

Por la Proposición 5.2.1 un conjunto de generadores del ideal $\mathcal{J}(\lambda_{l_n} \cdot C_n)$ es

$$T = \{x^{\nu_1}y^{\nu_2} : (n+1)(n-2) < n\nu_1 + (n+1)\nu_2 < n + (n+1)(n-1)\}.$$

Reescribiendo las desigualdades tenemos que

$$x^{\nu_1}y^{\nu_2} \in T \quad \text{si y sólo si} \quad n^2 - n - 2 < n(\nu_1 + \nu_2) + \nu_2 < n^2 + n - 1.$$

Consideremos los siguientes casos.

- (i) Si $\nu_1 + \nu_2 = n - 1$, entonces $n(\nu_1 + \nu_2) + \nu_2 = n(n - 1) + \nu_2$. Pero también tenemos que $\nu_2 \leq n - 1$, luego

$$n(\nu_1 + \nu_2) + \nu_2 \leq n(n - 1) + n - 1 = n^2 - 1 < n^2 + n - 1.$$

Además como $-2 < \nu_2$, entonces

$$n^2 - n - 2 < n^2 - n + \nu_2 = n(n - 1) + \nu_2 = n(\nu_1 + \nu_2) + \nu_2.$$

Por tanto $x^{\nu_1}y^{\nu_2} \in T$ si $\nu_1 + \nu_2 = n - 1$.

- (ii) Si $\nu_1 + \nu_2 < n - 1$, entonces

$$\begin{aligned} \nu_1 + \nu_2 &\leq n - 2, \\ \implies n(\nu_1 + \nu_2) &\leq n(n - 2) = n^2 - 2n, \\ \implies n(\nu_1 + \nu_2) + \nu_2 &< n^2 - 2n + n - 1 = n^2 - n - 1, \\ \implies n(\nu_1 + \nu_2) + \nu_2 &\leq n^2 - n - 2. \end{aligned}$$

Luego $x^{\nu_1}y^{\nu_2} \notin T$ si $\nu_1 + \nu_2 < n - 1$.

- (iii) Si $\nu_1 + \nu_2 > n - 1$ entonces $x^{\nu_1}y^{\nu_2}$ está generado por un elemento $x^c y^d$ con $c + d = n - 1$.

Luego podemos suponer que $T = \{x^{\nu_1}y^{\nu_2} : \nu_1 + \nu_2 = n - 1\}$. Por tanto

$$\mathcal{J}(\lambda_{l_n} \cdot C_n) = \langle T \rangle = (x^{n-1}, x^{n-2}y, \dots, xy^{n-2}, y^{n-1}) = (x, y)^{n-1}.$$

□

5.2. Curvas con un par de Puiseux

Antes de continuar con el siguiente resultado, enunciemos un par de propiedades útiles de la función parte entera $\lfloor \cdot \rfloor$.

Proposición 5.2.4. *Sea $\lfloor \cdot \rfloor$ la función parte entera. Entonces*

- (i) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$.
- (ii) $\left\lfloor \frac{nb}{n+1} \right\rfloor = b - 1$, para $n \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que $b \leq n + 1$.

Demostración. La propiedad (i) se deduce inmediatamente de la definición de la función parte entera y la propiedad (ii) es consecuencia de que $b - 1 \leq \frac{nb}{n+1} < b$ si $b \leq n + 1$. \square

Proposición 5.2.5. *Sea λ'_k el k -ésimo número de salto de C_n y sea λ_k el k -ésimo número de salto de C_{n+1} . Entonces*

$$\mathcal{J}(\lambda_k \cdot C_{n+1}) = \mathcal{J}(\lambda'_k \cdot C_n),$$

para $k = 1, \dots, l_n$.

Demostración. Los números de salto λ_k y λ'_k corresponden al mismo monomio, sea $x^i y^j$ este monomio. Entonces

$$\lambda'_k = \frac{n(i+1) + (n+1)(j+1)}{n(n+1)} \quad \text{y} \quad \lambda_k = \frac{(n+1)(i+1) + (n+2)(j+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

Sean T y T' los conjuntos de generadores de $\mathcal{J}(\lambda_k \cdot C_{n+1})$ y $\mathcal{J}(\lambda'_k \cdot C_n)$ dados por la Proposición 5.2.1.

(\supset) Sea $x^{\nu_1} y^{\nu_2} \in T'$, entonces

$$ni + (n+1)j < n\nu_1 + (n+1)\nu_2 < n(i+1) + (n+1)(j+1). \quad (5.5)$$

Lo primero que hay que resaltar es que $i < n$, $j < n-1$, $\nu_1 < n+1$ y $\nu_2 < n$. Esto se deduce del hecho de que $\lambda'_k < 1$. Ahora multiplicamos la desigualdad (5.5) por $\frac{n+2}{n+1}$ y obtenemos

$$\frac{n(n+2)}{n+1}i + (n+2)j < \frac{n(n+2)}{n+1}\nu_1 + (n+2)\nu_2 < \frac{n(n+2)}{n+1}(i+1) + (n+2)(j+1).$$

Si aplicamos la función $\lfloor \cdot \rfloor$ en la desigualdad de la izquierda y usamos las propiedades de 5.2.4, entonces

$$\begin{aligned}
 & \left\lfloor \frac{n(n+2)}{n+1}i + (n+2)j \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n(n+2)}{n+1}\nu_1 + (n+2)\nu_2 \right\rfloor, \\
 \implies & \left\lfloor \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)ni \right\rfloor + (n+2)j \leq \left\lfloor \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)n\nu_1 \right\rfloor + (n+2)\nu_2, \\
 \implies & ni + \left\lfloor \frac{ni}{n+1} \right\rfloor + (n+2)j \leq n\nu_1 + \left\lfloor \frac{n\nu_1}{n+1} \right\rfloor + (n+2)\nu_2, \\
 \implies & ni + i - 1 + (n+2)j \leq n\nu_1 + \nu_1 - 1 + (n+2)\nu_2, \\
 \implies & (n+1)i + (n+2)j \leq (n+1)\nu_1 + (n+2)\nu_2.
 \end{aligned}$$

Para ver que la desigualdad anterior es estricta, supongamos que es una igualdad. Como es una ecuación en \mathbb{Z} , se sigue que

$$\begin{cases} \nu_1 = i + (n+2)m, \\ \nu_2 = j - (n+1)m, \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (5.6)$$

son la soluciones enteras. Pero la única solución en el primer cuadrante es $\nu_1 = i$ y $\nu_2 = j$, lo cual es absurdo por (5.5). Se sigue que

$$\begin{aligned}
 & (n+1)i + (n+2)j < (n+1)\nu_1 + (n+2)\nu_2, \\
 \implies & (n+1)(i+1) + (n+2)(j+1) < (n+1)(\nu_1+1) + (n+2)(\nu_2+1), \\
 \implies & x^{\nu_1}y^{\nu_2} \in \mathcal{J}(\lambda_k \cdot C_{n+1}).
 \end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{J}(\lambda'_k \cdot C_n) \subset \mathcal{J}(\lambda_k \cdot C_{n+1})$.

(\subset) Sea $x^{\nu_1}y^{\nu_2} \in T$, análogamente se tiene

$$(n+1)i + (n+2)j < (n+1)\nu_1 + (n+2)\nu_2 < (n+1)(i+1) + (n+2)(j+1), \quad (5.7)$$

en donde $i < n+1$, $j < n$, $\nu_1 < n+2$ y $\nu_2 < n+1$. La desigualdad de la izquierda, después

5.2. Curvas con un par de Puiseux

de multiplicar por $\frac{n}{n+1}$, se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
 ni + nj + \frac{nj}{n+1} &< n\nu_1 + n\nu_2 + \frac{n\nu_2}{n+1}, \\
 \implies ni + nj + \left\lfloor \frac{nj}{n+1} \right\rfloor &\leq n\nu_1 + n\nu_2 + \left\lfloor \frac{n\nu_2}{n+1} \right\rfloor, \\
 \implies ni + nj + j - 1 &\leq n\nu_1 + n\nu_2 + \nu_2 - 1, \\
 \implies n(i+1) + (n+1)(j+1) &\leq n(\nu_1+1) + (n+1)(\nu_2+1).
 \end{aligned}$$

La desigualdad anterior es estricta por la observación hecha en (5.6), y por el Teorema de Howald deducimos que $x^{\nu_1}y^{\nu_2} \in \mathcal{J}(\lambda'_k \cdot C_n)$. Por tanto $\mathcal{J}(\lambda_k \cdot C_{n+1}) \subset \mathcal{J}(\lambda'_k \cdot C_n)$. \square

La siguiente proposición nos da una forma recursiva de calcular los ideales multiplicadores de C_{n+1} .

Proposición 5.2.6. *Sean λ'_k y λ_k los k -ésimos números de salto de C_n y C_{n+1} respectivamente. Entonces*

$$\mathcal{J}(\lambda_k \cdot C_{n+1}) = \begin{cases} \mathcal{J}(\lambda'_k \cdot C_n), & \text{si } k = 1, \dots, l_n, \\ I_{m,m+1} \cdot (x, y)^{n-m-1}, & \text{si } k = l_n + m, \\ (x, y)^n, & \text{si } k = l_{n+1}, \end{cases} \quad (5.8)$$

donde $m = 1, \dots, n-1$ y $I_{m,m+1}$ es la cerradura integral del ideal (x^{m+1}, y^m) .

Demostración. La Proposición 5.2.5 demuestra el caso para $k = 1, \dots, l_n$. Además, por la Proposición 5.2.3, obtenemos que $\mathcal{J}(\lambda_{l_n} \cdot C_{n+1}) = (x^{n-1}, x^{n-2}y, \dots, xy^{n-2}, y^{n-1})$. El monomio que produce el siguiente salto es x^{n-1} , ya que

$$\min_{\nu_1+\nu_2=n-1} \{(n+1)(\nu_1+1) + (n+2)(\nu_2+1)\} = (n+1)n + (n+2) = n^2 + 2n + 2$$

se alcanza en $\nu = (n-1, 0)$. Entonces $\lambda_{l_{n+1}} = \frac{n^2+2n+2}{(n+1)(n+2)}$ y su ideal multiplicador asociado es $\mathcal{J}(\lambda_{l_{n+1}} \cdot C_{n+1}) = (x^n, x^{n-2}y, \dots, xy^{n-2}, y^{n-1})$. El conjunto $\Gamma(\lambda_{l_{n+1}} \cdot C_{n+1})$ tiene 2 caras con ecuaciones $\alpha + \beta = n-1$ y $\alpha + 2\beta = n$, además en la intersección del soporte de

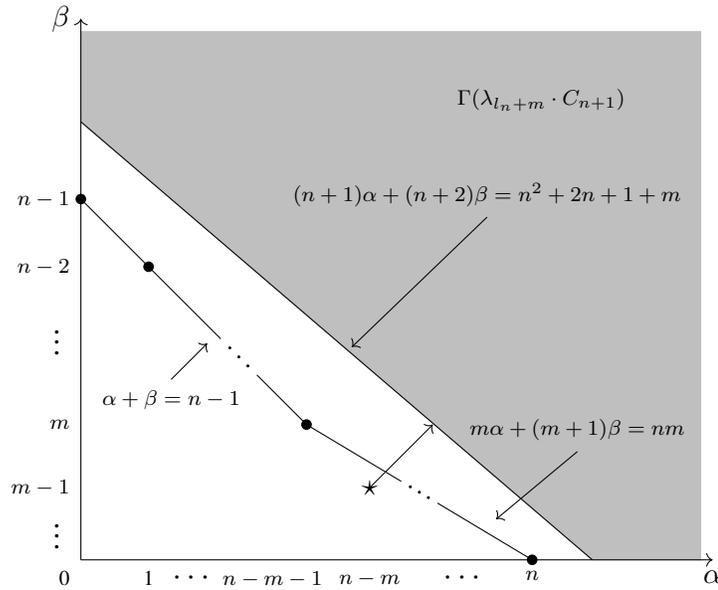
$\mathcal{J}(\lambda_{l_{n+1}} \cdot C_{n+1})$ con la primera recta hay $n - 1$ puntos y 2 en la segunda intersección. Luego la factorización de Zariski del ideal $\mathcal{J}(\lambda_{l_{n+1}} \cdot C_{n+1})$ es

$$\mathcal{J}(\lambda_{l_{n+1}} \cdot C_{n+1}) = (x, y)^{n-2} \cdot (x^2, y).$$

En general, luego de m pasos, el monomio que ocasiona siguiente salto es $x^{n-m}y^{m-1}$ y el número de salto correspondiente es

$$\lambda_{l_{n+m}} = \frac{(n+1)(n-m+1) + (n+2)m}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1 + m}{(n+1)(n+2)}.$$

Además el conjunto $\Gamma(\lambda_{l_{n+m}} \cdot C_{n+1})$ tiene 2 caras compactas con ecuaciones $\alpha + \beta = n - 1$ y $m\alpha + (m+1)\beta = nm$. La intersección del soporte de $\mathcal{J}(\lambda_{l_{n+m}} \cdot C_{n+1})$ con la primer recta consiste de $n - m$ puntos mientras que con la segunda solamente hay 2 puntos.



Por tanto la factorización de Zariski es

$$\mathcal{J}(\lambda_{l_{n+m}} \cdot C_{n+1}) = (x, y)^{n-m-1} \cdot I_{(m,m+1)}.$$

El último caso es una consecuencia de la Proposición 5.2.3. □

5.2. Curvas con un par de Puiseux

Corolario 5.2.7. Sean $(\mu_k), (v_k), (\mu'_k), (v'_k)$ las sucesiones de Milnor y de factores de C_{n+1} y C_n respectivamente. Entonces

$$\mu_k = \begin{cases} \mu'_k, & \text{si } k = 1, \dots, l_n, \\ (n-2)^2 + m - 1, & \text{si } k = l_n + m, \\ (n-1)^2, & \text{si } k = l_{n+1}. \end{cases} \quad (5.9)$$

y

$$v_k = \begin{cases} v'_k, & \text{si } k = 1, \dots, l_n, \\ n - m, & \text{si } k = l_n + m, \\ n, & \text{si } k = l_{n+1}, \end{cases} \quad (5.10)$$

donde $m = 1, \dots, n - 1$.

Demostración. La sucesión (v_k) se puede obtener directamente de la ecuación (5.8). Además la igualdad $\mu_k = \mu'_k$ se deduce inmediatamente del hecho de que $\mathcal{J}(\lambda_k \cdot C_{n+1}) = \mathcal{J}(\lambda'_k \cdot C_n)$ para $k \leq l_n$. Ahora si $k = l_n + m$ para $m = 1, \dots, n - 1$, entonces por la ecuación (5.8)

$$\mathcal{J}(\lambda_k \cdot C_{n+1}) = I_{(m, m+1)} \cdot (x, y)^{n-m-1}.$$

Sean $I = I_{(m, m+1)}$ y $J = (x, y)^{n-m-1}$, entonces por la ecuación (5.3)

$$\mu_k = \mu(I) + \mu(J) + 2(f \cdot g) - 1,$$

donde podemos asumir que $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_{n-m-1}$, con f_i elemento general de (x, y) y g elemento general de I . Luego, por las Proposiciones 5.1.3 y 1.0.8,

$$\begin{aligned} \mu_k &= m(m-1) + (n-m-2)^2 + 2 \sum_i (f_i \cdot g) - 1 \\ &= m^2 - m + n^2 + m^2 + 4 - 2nm - 4n + 4m + 2 \sum_i m - 1 \\ &= m^2 - m + n^2 + m^2 + 4 - 2nm - 4n + 4m + 2m(n-m-1) - 1 \\ &= (n-2)^2 + m - 1, \text{ para } k = l_n + m. \end{aligned}$$

Por último, la igualdad $\mu_{l_{n+1}} = (n-1)^2$ se deduce de que $\mathcal{J}(\lambda_{l_{n+1}} \cdot C_{n+1}) = (x, y)^n$. \square

Ejemplo 18. Consideremos la singularidad plana $C_2 = \{y^2 + x^3 = 0\}$, la cual solamente tiene el número de salto $\lambda = \frac{5}{6}$. La sucesión de Milnor es (0) y la de factores es (1), ya que su ideal multiplicador es (x, y) . Con esta información y gracias a las fórmulas de recurrencia obtenidas, podemos calcular ambas sucesiones para cualquier curva C_n . A continuación se muestran las sucesiones de C_n para $n = 2, \dots, 7$.

n	l_n	Sucesión de Milnor	Sucesión de factores
2	1	(0)	(1)
3	3	(0,0,1)	(1,1,2)
4	6	(0,0,1,1,2,4)	(1,1,2,2,1,3)
5	10	(0,0,1,1,2,4,4,5,6,9)	(1,1,2,2,1,3,3,2,1,4)
6	15	(0,0,1,1,2,4,4,5,6,9,9,10,11,12,16)	(1,1,2,2,1,3,3,2,1,4,4,3,2,1,5)
7	21	(0,0,1,1,2,4,4,5,6,9,9,10,11,12,16,16,17,18,19,20,25)	(1,1,2,2,1,3,3,2,1,4,4,3,2,1,5,5,4,3,2,1,6)

5.3 Algoritmo de Alberich-Carramiñana, Álvarez-Montaner y Blanco

El algoritmo de la presente sección se utiliza para calcular un conjunto de generadores para ideales integralmente cerrados (i.e., completos) en superficies complejas suaves. Estos generadores admiten una representación monomial en términos de elementos llamados de *contacto máximo*. Además tienen la propiedad de ser un invariante equisingular del ideal. Nos centraremos en la aplicación del algoritmo para encontrar la descomposición de Zariski de ideales multiplicadores. Para una descripción más detallada del mismo, consultar [AAB17].

Preliminares.

Sea $\pi : X' \rightarrow X$ un morfismo birracional propio, con X' una superficie suave. Cualquiera de estos morfismos se pueden obtener como una sucesión de explosiones

$$\pi : X' = X_{r+1} \rightarrow X_r \rightarrow \dots \rightarrow X_1 = X$$

donde X_{i+1} es la explosión de X_i en un punto p_i . Sea K el conjunto de los puntos p_i , este es un conjunto de índices para las componentes del divisor excepcional E . El conjunto K es llamado un clúster de puntos *infinitamente cercanos al origen*.

Definición 5.3.1. Decimos que un punto $q \in K$ es *próximo* a $p \in K$ si y sólo si $q \in E_p$. Denotaremos esta relación por $q \rightarrow p$ y definiremos la *matriz de proximidad* $P = (P_{p,q})$ como

$$P_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ -1 & \text{si } q \rightarrow p, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La *matriz de intersección* N se define como $N = (E_p \cdot E_q)$ y se relaciona con la matriz P mediante la ecuación $N = -P^\top P$. Por último, decimos que un punto q es *libre* si solamente es próximo a un punto, y es *satélite* en caso contrario.

Base de divisores.

Sea $\Lambda_\pi := \bigoplus_{p \in K} \mathbb{Z}E_p$ la retícula de divisores enteros en X' con soporte excepcional. Podemos encontrar 2 distintas bases para el \mathbb{Z} -módulo Λ_π , dadas por las transformadas estrictas y totales de las componentes del divisor excepcional E . Abusando de la notación, denotaremos por E_p a la transformada estricta y por \bar{E}_p a la transformada total. Si D es un divisor en Λ_π , entonces

$$D = \sum_{p \in K} v_p(D)E_p = \sum_{p \in K} e_p(D)\bar{E}_p,$$

donde los coeficientes $v_p(D)$ y $e_p(D)$ se relacionan mediante la expresión

$$v_p(D) = e_p(D) + \sum_{p \rightarrow q} v_q(D).$$

Esta última expresión nos da la fórmula de cambio de base $\mathbf{e}^\top = P \cdot \mathbf{v}^\top$, donde $\mathbf{e} = (e_p(D))_{p \in K}$ y $\mathbf{v} = (v_p(D))_{p \in K}$.

Una tercera base que nos será útil es la *base de ramificación* $\{B_p\}_{p \in K}$ definida como el dual de $\{-E_p\}_{p \in K}$ con respecto a la forma de intersección. El divisor D en esta base tiene la representación

$$D = \sum_{p \in K} \rho_p(D)B_p,$$

donde $\rho_p(D) = -(D \cdot E_p)$. La fórmula de cambio de base es $\rho^\top = P^\top \mathbf{e}^\top$, donde $\rho = (\rho_p(D))_{p \in K}$.

Elementos de contacto máximo.

Dado un punto $p \in K$, sea $f_p \in \mathcal{O}_{X,O}$ un elemento irreducible tal que su transformada estricta interseca transversalmente a E_p en un punto suave del divisor excepcional E . Entonces $B_p = \text{Div}(\pi^* f_p)_{exc}$. Por el contrario, cualquier $g \in \mathcal{O}_{X,O}$ con $B_p = \text{Div}(\pi^* g)_{exc}$ es irreducible y su transformada estricta interseca transversalmente a E .

Definición 5.3.2. Los *elementos de contacto máximo* del morfismo propio $\pi : X' \rightarrow X$ son elementos $f_p \in \mathcal{O}_{X,O}$ con $p \in K$, considerados en la observación anterior, tales que p es un vértice de valencia 1 del grafo de resolución de π . Un *conjunto de elementos de contacto máximo* $\{f_i\}_{i \in I}$ contiene un único elemento $f_{p_i} = f_i$ para cada vértice $p_i \in K$ de valencia 1.

Sea C un germen de curva plana irreducible dado por $f = 0$ y sea π su log-resolución. Los elementos de contacto máximo f_i son los que cumplen que $(f \cdot f_i) = m_i$, donde m_0, \dots, m_g son los generadores del semigrupo $\Sigma(f)$. En el caso de que el germen de curva C no sea tangente al eje y , entonces $f_0 = x$ y $f_1 = y$ son elementos de contacto máximo.

Divisores antinef e ideales completos.

Dado un divisor efectivo D , el ideal

$$H_D = \{f \in \mathcal{O}_{X,O} : v_p(f) \geq v_p \text{ para todo } E_p \preceq D\} \quad (5.11)$$

es completo y m -primario. Este ideal corresponde al tallo de la gavilla $\pi_* \mathcal{O}_{X'}(-D)$ en el origen O . Cabe resaltar que dos divisores diferentes pueden definir el mismo ideal H_D , sin embargo, podemos seleccionar un único divisor con la propiedad de ser *antinef*. El conjunto de los ideales H_D está en correspondencia biunívoca con el conjunto de divisores antinef. Esta correspondencia fue estudiada por Zariski en [Zar38].

Definición 5.3.3. Un divisor efectivo D de X' es llamado *antinef* si $\rho_p(D) \geq 0$ para todo $p \in K$. Esto es equivalente a que

$$e_p(D) \geq \sum_{q \rightarrow p} e_q(D), \text{ para todo } p \in K.$$

5.3. Algoritmo de Alberich-Carramiñana, Álvarez-Montaner y Blanco

Dado un divisor D que no sea antinef, podemos encontrar un divisor \tilde{D} antinef, llamado *cerradura antinef*, tal que $\pi_*\mathcal{O}_{X'}(-D) = \pi_*\mathcal{O}_{X'}(-\tilde{D})$. El siguiente algoritmo calcula la cerradura antinef de un divisor D .

Algoritmo 1 (Algoritmo de descarga).

Entrada: Un divisor $D = \sum d_p E_p \in \Lambda_\pi$.

Salida: La cerradura antinef \tilde{D} de D .

Repetir:

- Definir $\Theta := \{E_p \in \Lambda_\pi : \rho_p = -D \cdot E_p < 0\}$.
- Hacer $n_p = \left\lceil \frac{\rho_p}{E_p^2} \right\rceil$ para cada $E_p \in \Theta$. Notar que $(D + n_p E_p) \cdot E_p \leq 0$.
- Definir $\tilde{D} = D + \sum_{E_p \in \Theta} n_p E_p$.

Parar si el divisor \tilde{D} es antinef.

El Teorema de Zariski (3.3.4) se puede reformular para el caso de los ideales H_D .

Teorema 5.3.4. Sea $D \in \Lambda_\pi$ un divisor antinef cuya expresión en la base de ramificación es $D = \sum_{p \in K} \rho_p B_p$. Entonces

$$H_D = \prod_{p \in K} H_{B_p}^{\rho_p}, \quad (5.12)$$

donde los ideales H_{B_p} son ideales simples y completos para todo $p \in K$.

A los divisores antinef que definen ideales simples y completos se les llamará *divisores simples*.

Algoritmo de Alberich-Carramiñana, Álvarez-Montaner y Blanco.

La idea principal del algoritmo consiste en descomponer un divisor $D \in \Lambda_\pi$, que se puede asumir que es antinef, en divisores simples. Esto es, $D = \rho_{q_1} B_{q_1} + \dots + \rho_{q_r} B_{q_r}$ con $\rho_{q_i} > 0$.

Para cada divisor simple B_{q_i} con $q_i \neq O$, denotaremos por \hat{D}_i a la cerradura antinef del divisor $B_{q_i} + E_O$. El divisor \hat{D}_i define un ideal $H_{\hat{D}_i}$ el cual es adyacente a $H_{B_{q_i}}$, esto es, $H_{\hat{D}_i} \subsetneq H_{B_{q_i}}$ y $\dim H_{B_{q_i}}/H_{\hat{D}_i} = 1$ visto como \mathbb{C} -espacio vectorial. Después se procede a encontrar un elemento de contacto máximo f_i tal que $f_i \in H_{B_{q_i}} \setminus H_{\hat{D}_i}$. Entonces se tiene que $H_{B_{q_i}} = (f)^{n_i} + H_{\hat{D}_i}$ para algún n_i , además el divisor \hat{D}_i tiene un soporte menor que el de B_{q_i} en la base $\{\overline{E}_p\}$. Por tanto podemos repetir el procedimiento para $D := \hat{D}_i$ hasta que $D = B_O := \text{Div}(\pi^*\mathfrak{m})$.

Algoritmo 2 (Generadores para H_D).

Entrada: *Un morfismo propio birracional $\pi : X' \rightarrow X$ y un divisor antinef $D \in \Lambda_\pi$.*

Salida: *Generadores para el ideal H_D .*

1. Calcular un conjunto de elementos de contacto máximo $\{f_i\}_{i \in I}$ de π .
2. Hacer $D^{(0)} := D$ y proceder al paso (0.1).

Paso (i):

i.1 Descomponer $D^{(i)}$ en $d_i := \#\{p \in K : \rho_p(D^{(i)}) > 0\}$ divisores simples.

i.2 Para cada $j = 1, \dots, d_i$, considerar $q_j \in \{p \in K : \rho_p(D^{(i)}) > 0\}$ y asumir que

$$B_{q_j} = \sum_{p \in K} e_p \overline{E}_p.$$

i.j.1 **Parar en el ideal maximal:**

Si $B_{q_j} = B_O := \text{Div}(\pi^*\mathfrak{m})$, entonces hacer $H_{B_{q_j}} = (f_{i_0}, f_{i_1})$ para $i_0, i_1 \in I$, tales que sean suaves y transversos en O , entonces parar. Si no, proceder al paso

i.j.2.

i.j.2 **Calcular el ideal adyacente a $H_{B_{q_j}}$:**

Calcular la cerradura antinef \hat{D}_j del divisor $B_{q_j} + E_O$ mediante el algoritmo de descarga (1).

i.j.3 **Seleccionar un elemento de contacto máximo en $H_{B_{q_j}} \setminus H_{\hat{D}_j}$:**

5.3. Algoritmo de Alberich-Carramiñana, Álvarez-Montaner y Blanco

Sea $p \in K$ el último punto libre tal que $e_p \neq 0$. Tomar $\tau_j \in I$ tal que $e_p(f_{\tau_j}) = 1$ y $e_O(f_{\tau_j}) \leq e_O$. Definir el entero $n_j := e_O/e_O(f_{\tau_j})$.

***i.j.4* Paso recursivo:**

Asumir que $H_{\hat{D}_j}$ ha sido calculado después del paso $(i + 1)$ con $D^{(i+1)} := \hat{D}_j$.

***i.j.5* Hacer:**

$$H_{B_{q_j}} = (f_{\tau_j}^{n_j}) + H_{\hat{D}_j}.$$

***i.3* Aplicar el teorema de factorización de Zariski:**

Calcular el producto $H_{D^{(i)}} = \prod_{j=1}^{d_i} H_{B_{q_j}}^{\rho_{q_j}}$, dando generadores h_1, \dots, h_{s_i} .

***i.4* Usar el lema de Nakayama:**

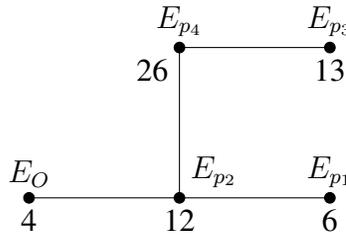
$$H_{D^{(i)}} = (h_k : \pi^* h_k \notin \mathcal{O}_{X'}(-D^{(i)} - \bar{E}_O), k = 1, \dots, s_i) \mathcal{O}_{X,O}.$$

3. Salida: $H_D = H_{D^{(0)}}$.

Observaciones 5.3.5.

- (i) La elección de los elementos de contacto máximo no altera el resultado del algoritmo, ya que el algoritmo usa el tipo de equisingularidad de los elementos de contacto máximo. Sin embargo es conveniente escoger a los elementos de una forma sencilla para facilitar el cálculo. Además, la elección del elemento de contacto máximo en el paso *i.j.3* puede no ser única. Dependiendo de cuál se eliga, se tendrá un sistema de generadores diferentes.
 - (ii) Dado que las gavillas de ideales $\mathcal{O}_{X'}(-D)$ son definidas mediante valuaciones, para saber si $\pi^* f$ es elemento o no de $\mathcal{O}_{X'}(-D)$, basta comparar los valores $v_p(\text{Div}(\pi^* f))$ y $v_p(D)$ para $p \in K$.
 - (iii) El paso *i.4* elimina generadores redundantes usando el lema de Nakayama y el hecho de que un conjunto es un sistema de generadores de H_D si y sólo si sus clases módulo $H_{D+\bar{E}_O}$ forman un sistema de generadores de $H_D/H_{D+\bar{E}_O}$ como un \mathbb{C} -espacio vectorial.
-

Ejemplo 19. Sea C la singularidad de curva plana irreducible definida por el polinomio $f(x, y) = (y^2 - x^3)^2 + x^2y^3$. Los exponentes característicos de C son $k_0 = 4, k_1 = 6$ y $k_2 = 7$. Su grafo de resolución se muestra a continuación.



Usaremos el Algoritmo 2 para calcular el ideal H_D , donde

$$\begin{aligned} D &= 4E_O + 6E_{p_1} + 12E_{p_2} + 13E_{p_3} + 26E_{p_4} \\ &= 4\bar{E}_O + 2\bar{E}_{p_1} + 2\bar{E}_{p_2} + \bar{E}_{p_3} + \bar{E}_{p_4} \\ &= B_{p_4}. \end{aligned}$$

Como podemos observar, H_D es un ideal simple por (5.12). Las matrices de proximidad y de intersección son

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Los puntos de valencia 1 del grafo de resolución son los puntos O, p_1 y p_3 . Luego un conjunto de elementos de contacto máximo es $\{f_0, f_1, f_2\}$, donde

$$\begin{aligned} f_0 &= x, \\ f_1 &= y, \\ f_2 &= y^2 - x^3. \end{aligned}$$

5.3. Algoritmo de Alberich-Carramiñana, Álvarez-Montaner y Blanco

Antes de comenzar el algoritmo, hagamos $D_i = \text{Div}(\pi^* f_i)$ para cada elemento de contacto máximo. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} D_0 &= E_O + E_{p_1} + 2E_{p_2} + 2E_{p_3} + 4E_{p_4} \\ &= \overline{E}_O \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= E_O + 2E_{p_1} + 3E_{p_2} + 3E_{p_3} + 6E_{p_4} \\ &= \overline{E}_O + \overline{E}_{p_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= 2E_O + 3E_{p_1} + 6E_{p_2} + 7E_{p_3} + 13E_{p_4} \\ &= 2\overline{E}_O + \overline{E}_{p_1} + \overline{E}_{p_2} + \overline{E}_{p_3} \end{aligned}$$

Hagamos $D^{(0)} := D$ y procedamos a utilizar el algoritmo.

Paso (0):

0.1. $D^{(0)} = B_{p_4}$ y $d_0 = 1$.

0.2. $B_{p_4} = 4\overline{E}_O + 2\overline{E}_{p_1} + 2\overline{E}_{p_2} + \overline{E}_{p_3} + \overline{E}_{p_4}$.

0.1.1. El divisor $B_{p_4} \neq B_O$, entonces continuamos.

0.1.2. El divisor $B_{p_4} + E_O$ expresado en la base de ramificación está dado por el vector $(3, 0, -1, 0, 1)$. Como no es antinef, hay que calcular su cerradura antinef usando el algoritmo de descarga. La cerradura antinef en la base de ramificación es $\hat{D}_1 = (2, 1, 1, 0, 0)$.

0.1.3. Los únicos puntos libres son p_1 y p_3 , luego p_3 es el último punto libre tal que $e_{p_3} \neq 0$. Además $\tau_1 = 2$ ya que $e_{p_3}(f_2) = 1$ y $e_O(f_2) = 2 \leq e_O = 4$. Luego $n_1 = 2$.

0.1.4. Este es el paso iterativo, hagamos $D^{(1)} := \hat{D}_1$.

0.1.5. $H_{B_{p_4}} = ((y^2 - x^3)^2) + H_{D^{(1)}}$.

0.3. Por Teorema de Zariski, $H_D = H_{B_{p_4}} = ((y^2 - x^3)^2) + H_{D^{(1)}}$

Ahora repetimos el algoritmo para encontrar $H_{D^{(1)}}$, pero primero expresemos $D^{(1)}$ en las 3 bases de divisores.

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= 5E_O + 7E_{p_1} + 13E_{p_2} + 13E_{p_3} + 26E_{p_4} \\ &= 5\bar{E}_O + 2\bar{E}_{p_1} + \bar{E}_{p_2} \\ &= 2B_O + B_{p_1} + B_{p_2}. \end{aligned}$$

Paso (1):

1.1. $D^{(1)} = 2B_O + B_{p_1} + B_{p_2}$ y $d_1 = 3$.

1.2. Los divisores B_O, B_{p_1} y B_{p_2} en la base $\{\bar{E}_i\}$ son

$$\begin{aligned} B_O &= \bar{E}_O \\ B_{p_1} &= \bar{E}_O + \bar{E}_{p_1} \\ B_{p_2} &= 2\bar{E}_O + \bar{E}_{p_1} + \bar{E}_{p_2} \end{aligned}$$

1.1.1. El ideal de B_O es $H_{B_O} = (x, y)$.

1.2.1. El divisor $B_{p_1} \neq B_O$, entonces continuamos.

1.2.2. El divisor $B_{p_1} + E_O$ se puede expresar en la base de ramificación está por el vector $(3, 1, -1, 0, 0)$. Como no es antinef, hay que calcular su cerradura antinef usando el algoritmo de descarga. La cerradura antinef en la base de ramificación es $\hat{D}_2 = (2, 0, 0, 0, 0)$.

1.2.3. El punto p_1 es el último punto libre tal que $e_{p_1} \neq 0$. Además $\tau_1 = 1$ ya que $e_{p_1}(f_1) = 1$ y $e_O(f_1) = 1 \leq e_O = 1$. Luego $n_2 = 1$.

1.2.4. Este es el paso iterativo, hagamos $D_1^{(2)} := \hat{D}_2$.

1.2.5. $H_{B_{p_1}} = (y) + H_{D_1^{(2)}}$.

1.3.1. El divisor $B_{p_2} \neq B_O$, entonces continuamos.

1.3.2. El divisor $B_{p_2} + E_O$ en la base de ramificación está dado por el vector $(3, 0, 0, 0, 0)$, el cual es antinef. Luego $\hat{D}_3 = (3, 0, 0, 0, 0)$ en la base de ramificación.

1.3.3. El punto p_1 es el último punto libre tal que $e_{p_1} \neq 0$. Además podemos tomar

$$\tau_1 = 1 \text{ ya que } e_{p_1}(f_1) = 1 \text{ y } e_O(f_1) = 1 \leq e_O = 2. \text{ Luego } n_2 = 2.$$

1.3.4. Este es el paso iterativo, hagamos $D_2^{(2)} := \hat{D}_3$.

$$1.3.5. H_{B_{p_2}} = (y^2) + H_{D_2^{(2)}}.$$

1.3 Por el Teorema de Zariski tenemos que

$$\begin{aligned} H_{D^{(1)}} &= H_{B_O}^2 \cdot H_{B_{p_1}} \cdot H_{B_{p_2}} \\ &= (x, y)^2 \cdot \left((y) + H_{D_1^{(2)}} \right) \cdot \left((y^2) + H_{D_2^{(2)}} \right) \end{aligned}$$

Podemos continuar el algoritmo para encontrar los ideales $H_{D_1^{(2)}}$ y $H_{D_2^{(2)}}$. Sin embargo, como $D_1^{(2)} = 2B_O$ y $D_2^{(2)} = 3B_O$, entonces $H_{D_1^{(2)}} = (x, y)^2$ y $H_{D_2^{(2)}} = (x, y)^3$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} H_{D^{(1)}} &= (x, y)^2 \cdot \left((y) + (x, y)^2 \right) \cdot \left((y^2) + (x, y)^3 \right) \\ &= (x^2, xy, y^2) \cdot (x^2, y) \cdot (x^3, x^2y, y^2) \\ &= (x^7, x^5y, x^4y^2, x^2y^3, xy^4, y^5). \end{aligned}$$

Ahora podemos encontrar el ideal H_D ,

$$\begin{aligned} H_D &= ((y^2 - x^3)^2) + (x^7, x^5y, x^4y^2, x^2y^3, xy^4, y^5) \\ &= ((y^2 - x^3)^2, x^7, x^5y, x^4y^2, x^2y^3, xy^4, y^5) \\ &= ((y^2 - x^3)^2, x^7, x^5y, x^4y^2, x^2y^3, xy^4). \end{aligned}$$

El elemento y^5 se elimina ya que es una combinación del resto de generadores. En específico, $y = y(y^2 - x^3)^2 + 2x(x^2y^3) - x(x^5y)$. Observamos que, efectivamente, el Algoritmo 2 nos permite calcular generadores monomiales en términos de los elementos de contacto máximo de la resolución $\pi : X' \rightarrow X$. En este ejemplo,

$$H_D = (f_2^2, f_0^7, f_0^5 f_1, f_0^4 f_1^2, f_0^2 f_1^3, f_0 f_1^4).$$

Ejemplo 20. Sea C la singularidad del Ejemplo 19, calcularemos sus ideales multiplicadores junto a las sucesiones de Milnor y de factores. Para esto, primero calcularemos los ideales H_{B_p} para todo $p \in K$. En el ejemplo anterior se calcularon los ideales asociados a

B_O, B_{p_1}, B_{p_2} y B_{p_4} . Para calcular el ideal $H_{B_{p_3}}$, en lugar de utilizar el Algoritmo 2, haremos uso de (5.11). A los divisores $D_i = Div(\pi^* f_i)$, con f_i elemento de contacto máximo, les corresponden los siguientes vectores de coordenadas en la base $\{E_p\}_{p \in K}$.

$$D_0 = (1, 1, 2, 2, 4),$$

$$D_1 = (1, 2, 3, 3, 6),$$

$$D_2 = (2, 3, 6, 7, 13).$$

Mientras que al divisor B_{p_3} le corresponde el vector $B_{p_3} = (2, 3, 6, 7, 13)$. Para encontrar generadores para el ideal $H_{B_{p_3}}$ es suficiente buscar expresiones monomiales de los elementos de contacto máximo cuyos vectores de coordenadas cumplan (5.11). Entonces un conjunto de generadores para el ideal $H_{B_{p_3}}$ es $\{x^4, x^2y, xy^2, y^3, f_2\}$. En resumen,

$$H_{B_O} = (x, y),$$

$$H_{B_{p_1}} = (x^2, y),$$

$$H_{B_{p_2}} = (x^3, x^2y, y^2),$$

$$H_{B_{p_3}} = (x^4, x^2y, xy^2, y^3, (y^2 - x^3)),$$

$$H_{B_{p_4}} = (x^7, x^5y, x^4y^2, x^2y^3, xy^4, (y^2 - x^3)^2).$$

El divisor canónico relativo asociado a la log-resolución π es

$$K_{X'/X} = E_O + 2E_{p_1} + 4E_{p_2} + 5E_{p_3} + 10E_{p_4}.$$

En la siguiente tabla se muestran los números de salto de C , así como el divisor $[\lambda \cdot \pi^* C] - K_{X'/X}$ y la cerradura antinef del mismo. Se escribe $(\dots)_{E_p}$ para denotar el divisor en la base $\{E_p\}$ y $(\dots)_{B_p}$ para la base de ramificación.

5.3. Algoritmo de Alberich-Carramiñana, Álvarez-Montaner y Blanco

λ	$[\lambda \cdot \pi^* C] - K_{X'/X}$	Cerradura antinef	
$\frac{5}{12}$	$(0, 0, 1, 0, 0)_{E_p}$	$(1, 1, 2, 2, 4)_{E_p}$	$(1, 0, 0, 0, 0)_{B_p}$
$\frac{15}{26}$	$(1, 1, 2, 2, 5)_{E_p}$	$(1, 2, 3, 3, 6)_{E_p}$	$(0, 1, 0, 0, 0)_{B_p}$
$\frac{17}{26}$	$(1, 1, 3, 3, 7)_{E_p}$	$(2, 2, 4, 4, 8)_{E_p}$	$(2, 0, 0, 0, 0)_{B_p}$
$\frac{19}{26}$	$(1, 2, 4, 4, 9)_{E_p}$	$(2, 3, 5, 5, 10)_{E_p}$	$(1, 1, 0, 0, 0)_{B_p}$
$\frac{21}{26}$	$(2, 2, 5, 5, 11)_{E_p}$	$(2, 3, 6, 6, 12)_{E_p}$	$(0, 0, 1, 0, 0)_{B_p}$
$\frac{23}{26}$	$(2, 3, 6, 6, 13)_{E_p}$	$(2, 3, 6, 7, 13)_{E_p}$	$(0, 0, 0, 1, 0)_{B_p}$
$\frac{11}{12}$	$(2, 3, 7, 6, 13)_{E_p}$	$(3, 4, 7, 7, 14)_{E_p}$	$(2, 1, 0, 0, 0)_{B_p}$
$\frac{25}{26}$	$(2, 3, 7, 7, 15)_{E_p}$	$(3, 4, 8, 8, 16)_{E_p}$	$(1, 0, 1, 0, 0)_{B_p}$

Ahora podemos usar el Teorema 5.12 para encontrar la factorización de Zariski de los ideales multiplicadores. Además podemos obtener las sucesiones de Milnor y de factores.

λ	$\mathcal{J}(\lambda \cdot C)$	μ_i	v_i
$\frac{5}{12}$	(x, y)	0	1
$\frac{15}{26}$	(x^2, y)	0	1
$\frac{17}{26}$	$(x, y)^2$	1	2
$\frac{19}{26}$	$(x, y)(x^2, y)$	1	2
$\frac{21}{26}$	(x^3, x^2y, y^2)	2	1
$\frac{23}{26}$	$(x^4, x^2y, xy^2, y^3, (y^2 - x^3))$	2	1
$\frac{11}{12}$	$(x, y)^2(x^2, y)$	4	3
$\frac{25}{26}$	$(x, y)(x^3, x^2y, y^2)$	5	2

APÉNDICE A

Script para calcular la descomposición de Zariski de curvas con un par de Puiseux

El siguiente script fue creado para ser usado en . Calcula los ideales multiplicadores asociados a los números de salto $\lambda < 1$ de una curva C definida por la ecuación $y^a + x^b = 0$ con $\gcd(a, b) = 1$. También calcula la descomposición de Zariski de dichos ideales y la sucesión de Milnor y de factores. Como opción extra, calcula el polígono de Newton de los ideales multiplicadores y también el conjunto $\Gamma(\lambda \cdot C)$, que consiste en la recta $ax + by = \lambda ab$.

Para usar el script hay que especificar los valores de $a, b \in \mathbb{N}$, así como el valor lógico $Flag \in \{T, F\}$ para visualizar, o no, los polígonos de Newton de los ideales multiplicadores.

```
a <- 7      ##### Ingresar valor de a
b <- 9      ##### Ingresar valor de b
Flag <- T   ##### Visualizar los Poligonos de Newton? (T=SI / F=NO)
library(purrr)
##### Convex Hull Function #####
convhull <- function(X,a,b){
  X <- X[order(X[,1],X[,2]),]
  n <-length(X[,1])
```

```

pos <- 1
i <- pos
while(T)
{
  m<-(X[i:n,2]-X[i,2])/(X[i:n,1]-X[i,1])
  if(sum(as.numeric(m[is.finite(m)]>=0))==length(m[is.finite(m)]))
    break
  pos <- c(pos, which.min(m)+i-1)
  i <- pos[length(pos)]
}
return(X[unique(pos),])
}

```

```
##### Jumping Numbers Function #####
```

```

jumpingNumbers <- function(a,b){
  r <- 0
  s <- 0
  jn <- NULL
  while(a*(r+1)+b*(s+1)<a*b){
    while(a*(r+1)+b*(s+1)<a*b){
      jn <- c(jn, a*(r+1)+b*(s+1))
      r <- r+1
    }
    r <- 0
    s <- s+1
  }
  return(jn[order(jn)])
}

```

```
##### Milnor Number Function #####
```

```

milnor <- function(a,b){
  k <- max(a,b)
  u <- min(a,b)
  q <- floor(k/u)
  r <- k%%u
  MS <- NULL
  for (i in 1:q)
    MS <- c(MS,u)
  while(r!=0){
    k <- u
    u <- r
    q <- floor(k/u)
    r <- k%%u
    for (i in 1:q)
      MS <- c(MS,u)
  }
}

```

```

}
return (sum(MS*(MS-1)))
}
##### Intersection Multiplicity Function #####
inumber <- function(M,N){
  return (min(M*N[2:1]))
}
Milnorseq<-NULL
Factorseq<-NULL
jn <- jumpingNumbers(a,b)
L <- matrix(unlist(cross2(0:max(a,b),0:max(a,b))), ncol = 2,byrow = T)
L <- L[a*L[,1]+b*L[,2]<=a*b,]
for(i in jn){
  L <- matrix(unlist(cross2(0:max(a,b),0:max(a,b))), ncol = 2,byrow = T)
  L <- L[a*L[,1]+b*L[,2]<i,]
  L <- L[a*L[,1]+b*L[,2]>i-a-b,]
  MI <- convhull(L,a,b)
  {FI=matrix(0,nrow=length(MI[,1])-1,ncol=2)
  FI=(MI[1:(length(MI[,1])-1),]-MI[2:(length(MI[,1])),])
  FI=abs(FI)
  dim(FI) <- c(nrow=length(MI[,1])-1,2)
  CompactSides <- NULL
  for(j in 1:(length(MI[,1])-1)){
    CompactSides <- c(CompactSides,(MI[j,2]-MI[j+1,2])/(MI[j,1]-MI[j+1,1]))
  }
  CompactSides <- unique(CompactSides)
  D <- NULL
  E <- NULL
  for(k in min(L[,1]):max(L[,1]))
    D <- rbind(D,c(k,min(L[L[,1]==k,2])))
  for(k in min(L[,2]):max(L[,2]))
    E <- rbind(E,c(min(L[L[,2]==k,1]),k))
  GEN <- rbind(D, E)
  GEN <- GEN[duplicated(GEN),,drop = FALSE]}
##### ZARISKI FACTORIZATION #####
MI <- MI[order(MI[,1],MI[,2]),]
GEN <- GEN[order(GEN[,1],GEN[,2]),]
ZF <- new.env()
Names <- paste("Factor",1:(length(MI[,1])-1),sep = "")
for(k in 1:(length(MI[,1])-1)){
  if(abs(MI[k,2]-MI[k+1,2])==1 || abs(MI[k,1]-MI[k+1,1])==1)
    assign(Names[k],matrix(c(0,abs(MI[k,1]-MI[k+1,1]),
                           abs(MI[k,2]-MI[k+1,2]),0),2,2),envir = ZF)
}

```

```

else{
  AUX <- GEN[GEN[,1]>=MI[k,1],]
  AUX <- AUX[AUX[,1]<=MI[k+1,1],]
  AUX[,1] <- AUX[,1]-MI[k,1]
  AUX[,2] <- AUX[,2]-MI[k+1,2]
  assign(Names[k],AUX,envir = ZF)
}
}
#####      MILNOR NUMBER      #####
n <- length(FI[,1])
sum <- 0
sum2 <- 0
for(k in 1:n)
  sum <- sum + milnor(FI[k,1],FI[k,2])
for(k in 1:n)
  for(j in 1:k)
    if(j<k){
      sum2 <- sum2 + inumber(FI[k,1],FI[j,1])
    }
milnornumber <- sum + 2*sum2 - n+1
Milnorseq <- c(Milnorseq ,milnornumber)
Factorseq <- c(Factorseq ,n)
#####      DATA OUTPUT      #####
cat(" \n")
if(Flag==T){
  plot(L,pch=20,cex=0.8,xlim = c(0,i/a),ylim = c(0,i/b),asp=1,xlab = "",ylab = "")
  points(MI[,1],MI[,2],col="red",pch=20,cex=1.3)
  abline(v=(seq(0,max(a,b),1)), col="lightgray", lty="dotted")
  abline(h=(seq(0,max(a,b),1)), col="lightgray", lty="dotted")
  text(i/a, 1.5,paste(a,"x+",b,"y=",i,sep = ""))
  lines(MI, col="blue")
  lines(c(0,b),c(0,0))
  lines(c(0,0),c(0,a))
  title(main = paste("NP of",i,"/",a*b))
  lines(c((i)/a,0),c(0,(i)/b), col="black")
}
Q <- paste(paste(paste("x",GEN[,1],sep = "^"),
  paste("y",GEN[,2],sep = "^"),sep=" * "),sep=" , ")
cat("J[" ,i ,"/" ,a*b ,"]= ( " ,sep = " "); cat(Q,sep = " , "); cat(" )", "\n")
cat("Zariski Factorization: ")
for(k in 1:length(ZF)){
  Q <- paste(paste(paste("x",get(Names[k],ZF)[,1],sep = "^"),
    paste("y",get(Names[k],ZF)[,2],sep = "^"),sep=" * "),sep=" , ")
}

```

```
cat("( ", sep = ""); cat(Q, sep = " , "); cat(")")
}
#readkey()
cat("\n", "Compact Sides: ", length(CompactSides), "\n", sep="")
cat("Number of Factors: ", length(MI[,1]) - 1, "\n")
cat("Milnor Number: ", milnornumber, "\n", "\n")
}
##### PRINT SEQUENCES #####
cat("Milnor Sequence: ", Milnorseq, "\n", sep=" ")
cat("Factor sequence: ", Factorseq, "\n", sep=" ")
```

Referencias

- [AAB17] M. ALBERICH-CARRAMIÑANA, J. ÁLVAREZ-MONTANER & G. BLANCO, *Monomial generators of complete planar ideals*, arXiv:1701.03503v3 (2017).
- [AAD16] M. ALBERICH-CARRAMIÑANA, J. ÁLVAREZ-MONTANER & F. DACHS, *Multiplier ideals in two-dimensional local rings with rational singularities* Michigan Mathematical Journal 65 (2016), 287–320.
- [BL04] M. BLICKLE & R. LAZARSELD, *An Informal Introduction to Multiplier Ideals*, Trends in Commutative Algebra, MSRI Publications Vol. 51 (2004), 87–114.
- [BK86] E. BRIESKORN & H. KNÖRRER, *Plane Algebraic Curves*, Modern Birkhauser Classics, Birkhäuser (1986).
- [Cas00] E. CASAS, *Singularities of Plane Curves*, London Mathematical Society Lecture Note Series 276, Cambridge University Press (2000).
- [Har77] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, New York (1977).

- [Hir64] H. HIRONAKA, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 79, No. 1 (1964), 109–203.
- [How01] J.A. HOWALD, *Multiplier ideals of monomial ideals*, Transactions of the American Mathematical Society 353 (2001), 2665–2671.
- [HS06] C. HUNEKE & I. SWANSON, *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*, London Mathematical Society Lecture Note Series 336, Cambridge University Press (2006).
- [JP00] T. DE JONG & G. PFISTER, *Local Analytic Geometry: Basic Theory and Applications*, Advanced Lectures in Mathematics, Springer (2000).
- [Kol95] J. KOLLÁR, *Singularities of pairs*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol.62.1 (1997), 221–287.
- [Laz04] R. LAZARSELD, *Positivity in Algebraic Geometric II*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Vol.49, Springer-Verlag (2004).
- [Lip93] J. LIPMAN, *Adjoints and polars of simple complete ideals in two-dimensional regular local rings*, Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, Série A, 45 (1993) 223–244.
- [LW03] J. LIPMAN & K. WATANABE, *Integrally Closed Ideals in Two-Dimensional Regular Local Rings are Multiplier Ideals*, Mathematical Research Letters 10 (2003), 423–434.
- [Nad90] A. M. NADEL, *Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature*, Annals of Mathematics Vol. 132 (1990), 549–596.
- [Tuc10] K. TUCKER, *Jumping numbers and Multiplier Ideals on Algebraic Surfaces*. Thesis (Ph.D.)-University of Michigan. (2010), 114 pp. ISBN: 978-1109-73275-7.
- [Zar38] O. ZARISKI, *Polynomials ideals defined by infinitely near base points*, American Journal of Mathematics, Vol. 60, No. 1 (1938), 151–204.

- [Zha19] M. ZHANG, *Multiplier Ideals of Analytically Irreducible Plane Curves*,
arXiv:1907.06281v3 (2019).