



Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Intervalos de Estimación Bootstrap para Cuantiles en Teoría de Valores Extremos

T E S I S

que para obtener el grado de
Maestro en ciencias con orientación en
Probabilidad y Estadística

Presenta:

Addy Margarita Bolívar Cimé

Directores de Tesis:

Dra. Eloísa Díaz-Francés Murguía.

Dr. Joaquín Ortega Sánchez.

Guanajuato, Gto. México. Agosto de 2007

Agradecimientos

Agradezco al CONACYT por el apoyo económico brindado durante la maestría, al CIMAT por todo lo que me dio tanto económicamente como académicamente. Agradezco a los proyectos 05-02-K117-099 de CONACYT y 07-02-KGG2-44 A02 de CONCYTEG por el apoyo brindado.

Quiero dar un agradecimiento especial a Eliud Vilchis por toda su ayuda en el aspecto computacional de esta tesis y también a Luís Escobar por la ayuda proporcionada en algunos temas de la misma. Agradezco a los jóvenes del departamento de cómputo y redes del CIMAT por todo el apoyo brindado para realizar las tareas computacionales en el tiempo planeado.

Agradezco a Miguel Nakamura y a Víctor Pérez-Abreu por sus valiosas sugerencias y comentarios proporcionados con el fin de pulir esta tesis. Agradezco en forma especial a Eloísa Díaz-Francés por su gran dedicación, apoyo y paciencia como asesora de esta tesis, por todas sus enseñanzas y consejos brindados y por facilitarme equipo de cómputo para la elaboración de la misma. Agradezco enormemente a Joaquín Ortega por su paciencia, comprensión y claridad como asesor de tesis, por su disposición para discutir aspectos de la tesis cada vez que se requería, así como también por todas sus enseñanzas y consejos valiosos.

Por último agradezco a Dios por permitirme lograr mis propósitos; a mi familia, especialmente a mis padres, por ser mi inspiración en la vida; a Carlos por brindarme su apoyo en todo lo que hago al mismo tiempo de darle luz y amor a mi vida y a mis amigos porque desde donde estén siempre me hacen sentir su apoyo incondicional.

Contenido

Agradecimientos	I
Prefacio	v
1. Preliminares	1
1.1. Notación básica	2
1.2. Teoría del Bootstrap	4
1.2.1. Estimación puntual Bootstrap	5
1.2.2. Intervalos de Confianza Bootstrap	13
1.3. Teoría de Verosimilitud	17
1.3.1. Función de verosimilitud y estimadores de máxima verosimilitud	17
1.3.2. Regiones de verosimilitud y niveles de confianza aproximados	21
1.3.3. Estimación de un parámetro eliminando parámetros de estorbo	22
1.3.4. Intervalos de confianza con el método Delta	23
1.4. Teoría Clásica de Valores Extremos	25
1.4.1. Modelos asintóticos	26
1.4.2. Estimación de los modelos basada en verosimilitud	29
1.4.3. Periodos de retorno	31
2. Intervalos de estimación Bootstrap para cuantiles	33
2.1. Antecedentes	34
2.1.1. Intervalos Bootstrap para cuantiles de distribuciones asintóticas de máximos	34
2.1.2. Intervalos Bootstrap para cuantiles de distribuciones en general	35

2.2.	Intervalo interpolado lineal simple para cuantiles	37
2.2.1.	Intervalo I_{BH} para cuantiles	38
2.2.2.	Idea en la construcción del intervalo I_{BH}	38
2.3.	Intervalos interpolados calibrados para cuantiles	40
2.3.1.	Método de calibración Bootstrap, $I_{BT}(\alpha)$	41
2.3.2.	Método de calibración Monte Carlo, $I_{MC}(\alpha)$	43
2.3.3.	Método de calibración analítico, $I_{AN}(\alpha)$	43
2.4.	Algunos resultados de los intervalos I_{BT} , I_{MC} e I_{AN}	43
2.5.	Resumen	44
3.	Simulaciones	47
3.1.	Introducción	47
3.2.	Planteamiento	48
3.3.	Resultados de las simulaciones	49
3.3.1.	Inferencia bajo el modelo DVEG	50
3.3.2.	Inferencia bajo el modelo Weibull	51
3.3.3.	Resultados para el cuantil $Q_{0.95}$	57
3.3.4.	Resultados para el cuantil $Q_{0.99}$	67
3.4.	Conclusiones	69
4.	Conclusiones generales	75
A.	Demostración de algunos resultados	77
	Bibliografía	79

Prefacio

En Teoría de Valores Extremos es de interés obtener intervalos de confianza para cuantiles altos de distribuciones de máximos. En la práctica son muy utilizados intervalos de confianza construidos utilizando la asintoticidad normal de los estimadores de máxima verosimilitud para estos cuantiles suponiendo una Distribución de Valores Extremos Generalizada (DVEG) o una de las tres Distribuciones de Valores Extremos (DVE): Gumbel, Fréchet o Weibull. También pueden ser utilizados intervalos de verosimilitud perfil que toman en cuenta la asimetría marcada de la superficie de verosimilitud. Sin embargo, cuando el tamaño de la muestra de máximos es muy pequeño, lo cual ocurre frecuentemente en la práctica, estos intervalos podrían ser difíciles de calcular o no tener las coberturas esperadas en ciertas situaciones. Por ello es de interés tener también en cuenta métodos de construcción de intervalos de confianza no paramétricos para cuantiles.

Una herramienta que ha sido muy utilizada para construir intervalos de confianza no paramétricos para una característica de una distribución (media, mediana, varianza, un cuantil, etc.) es el Bootstrap. En la Teoría Clásica de Bootstrap se encuentran muchas clases de estos intervalos, pero ninguno de ellos había producido resultados muy satisfactorios para la estimación por intervalos de cuantiles hasta que se presentó en el año 2005 el trabajo de Ho y Lee. Ellos propusieron una clase de intervalos de confianza Bootstrap para cuantiles de distribuciones en general con buenos resultados en cuanto a coberturas. Exploraron mediante simulaciones de muestras pequeñas como se comportan estos intervalos para cuantiles de algunas distribuciones, pero no exploraron qué tan buenos son estos intervalos cuando los cuantiles son de una DVEG o de una DVE y tampoco consideraron cuantiles muy altos en dichas simulaciones.

La principal aportación de esta tesis es comparar mediante simulaciones de muestras pequeñas, moderadamente grandes y grandes (muestras de tamaño 25, 50 y 100, respectivamente), los in-

tervalos Bootstrap propuestos por Ho y Lee (2005) con los intervalos basados en la verosimilitud para cuantiles altos de algunas DVEG que engloban a las tres DVE, las cuales son distribuciones asintóticas de máximos bajo ciertas suposiciones cuando el tamaño de los bloques de donde se extraen dichos máximos tiende a infinito. Principalmente interesa comparar las coberturas y anchos de estos intervalos, con el fin de determinar situaciones en las cuales cada tipo de ellos son preferibles sobre los otros, siendo los intervalos Bootstrap los de principal interés.

Entre algunos de los resultados se encuentra, que los intervalos de verosimilitud perfil en general tienen buenas coberturas y son angostos. Los intervalos construidos mediante la asintoticidad normal de los estimadores de máxima verosimilitud, típicamente tienen coberturas muy pobres. Respecto a los intervalos Bootstrap, estos tienen buenas coberturas en situaciones donde los intervalos basados en la verosimilitud tienen coberturas bajas, incluso cuando el tamaño de la muestra de máximos sea pequeño. Cabe resaltar que en estas situaciones los intervalos Bootstrap son más anchos que los intervalos basados en la verosimilitud en la mayoría de las veces, pero pueden ser fácilmente calculados mientras que los intervalos basados en la verosimilitud a veces pueden ser difíciles de obtener, debido a singularidades en la aproximación a la función de verosimilitud a través de la función de densidad de la distribución supuesta. Para evitar este problema se debe utilizar la función de verosimilitud exacta, la cual por ser un producto de probabilidades no tiene singularidades.

En el Capítulo 1 de esta tesis, se proporcionan las nociones básicas de la Teoría del Bootstrap, de la Teoría de Verosimilitud y por último se presentan los resultados principales de la Teoría Clásica de Valores Extremos, así como también la forma en que generalmente se procede para hacer estimaciones en este ámbito.

El Capítulo 2 contiene lo que se encontró en la literatura acerca de intervalos Bootstrap para cuantiles de distribuciones en general y de distribuciones asintóticas de máximos por bloques. Se describen los intervalos Bootstrap propuestos por Ho y Lee (2005), así como también los resultados que obtuvieron con respecto a ellos.

Posteriormente, en el Capítulo 3 se presenta un estudio mediante simulaciones de las coberturas y anchos de los intervalos Bootstrap, de los intervalos asintóticos de máxima verosimilitud y de los intervalos de verosimilitud perfil para cuantiles de distribuciones de máximos. En este capítu-

lo se presenta también, un análisis sobre el uso de la función de verosimilitud exacta para evitar problemas en el cálculo de los intervalos basados en la verosimilitud, que se tienen al utilizar la aproximación a la función de verosimilitud por medio de la función de densidad del modelo supuesto. Cabe mencionar que las simulaciones de este capítulo se hicieron con Matlab V.7 en una computadora Pentium 4, 2.02 GHz y 514 MB de memoria RAM. Los guiones hechos en Matlab V.7 que se utilizaron para calcular los intervalos Bootstrap propuestos por Ho y Lee (2005), pueden descargarse en el sitio <http://www.cimat.mx/~addy/> o <http://mx.geocities.com/addybolivar/>.

En el Capítulo 4 se proporcionan las conclusiones generales de este trabajo. Se menciona lo que se recomienda en la práctica para hacer estimación por intervalos para cuantiles de distribuciones de máximos. Finalmente, en el Apéndice A se presentan las pruebas de algunos resultados mencionados en el Capítulo 2.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo primero se introducirá la notación básica que se utilizará a lo largo de esta tesis. Posteriormente se hablará brevemente de la Teoría del Bootstrap, cuyos conceptos serán retomados en capítulos posteriores. En esta parte se explicará cómo se utiliza el método Bootstrap para la estimación puntual de alguna característica de una distribución desconocida, de la cual sólo se cuenta con una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esta distribución. También se comentarán dos formas de construcción de intervalos de confianza para dicha característica aplicando el Bootstrap.

Por otro lado, se recordarán las nociones básicas de Teoría Clásica de Valores Extremos en relación a las distribuciones asintóticas de muestras de máximos (o mínimos) cuando el tamaño de los bloques de donde se extrae el máximo tiende a infinito. Para que estos resultados asintóticos sean aplicables a muestras finitas en la estimación de algún parámetro o característica de la distribución de los máximos, es también importante que el número de máximos con los que se cuente sea razonable.

Se proporcionarán los teoremas principales en torno a los que giran los resultados básicos en Teoría de Valores Extremos. Así mismo se verá cómo hacer inferencia en este ámbito utilizando la herramienta estadística basada en la función de verosimilitud completa, es decir, considerando además de los estimadores de máxima verosimilitud otros aspectos de la función de verosimilitud, como por ejemplo las funciones de verosimilitud perfil, para hacer estimación.

1.1. Notación básica

A continuación se presentan un par de definiciones que son necesarias para establecer lo que es un cuantil de una función de distribución.

Definición 1.1 (Inversa generalizada de una función monótona) *Sea h una función no decreciente en \mathbb{R} . La inversa generalizada de h se define como:*

$$h^{\leftarrow}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq t\}.$$

Aquí se toma la convención de que el ínfimo del conjunto vacío es infinito. Nótese que en caso de que h sea estrictamente creciente y continua su inversa generalizada coincide con su función inversa.

Definición 1.2 (Función cuantil) *La inversa generalizada de la función de distribución F*

$$F^{\leftarrow}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}, \text{ para } 0 < t < 1,$$

es llamada la función cuantil de F .

Por lo tanto, si F es estrictamente creciente y continua en $(0, 1)$ y F^{-1} es su función inversa en este intervalo, entonces

$$F^{\leftarrow}(t) = F^{-1}(t) \quad \forall t \in (0, 1).$$

Ahora puede introducirse el concepto de cuantil de una función de distribución.

Definición 1.3 (Cuantil) *El cuantil de probabilidad acumulada p de la función de distribución F , con $p \in (0, 1)$, se define como $Q_p = F^{\leftarrow}(p)$.*

En las siguientes definiciones, X_1, \dots, X_n son variables aleatorias con distribución F . Se denotará como θ a un parámetro de la distribución F (es decir, un valor del cual depende F) o a una característica de interés de F (por la cual se entenderá una función de F , como por ejemplo su varianza, media, mediana, un cuantil, etc).

Definición 1.4 (Probabilidad de cobertura) Sean $A = T_1(X_1, \dots, X_n)$ y $B = T_2(X_1, \dots, X_n)$ dos estadísticas (funciones que dependen únicamente de las v.a. X_1, \dots, X_n). La probabilidad de cobertura del intervalo aleatorio (A, B) de θ , es la probabilidad de que dicho intervalo contenga al verdadero valor de θ , digamos θ_0 :

$$Cob = P(A < \theta_0 < B).$$

Está implícito en la definición anterior, que la probabilidad de cobertura de un intervalo aleatorio, puede cambiar si los valores de los parámetros en cuales pueda depender la distribución F cambian. Cuando la probabilidad de cobertura es constante, independientemente del valor de estos parámetros, este intervalo es un *intervalo de confianza*. La definición formal de un intervalo de confianza es la siguiente.

Definición 1.5 (Intervalo de confianza) Sea (A, B) un intervalo aleatorio como en la definición anterior. Se dice que (A, B) es un intervalo de confianza (IC) para θ con nivel de confianza α si

$$P(A < \theta_0 < B) = \alpha,$$

donde θ_0 es el verdadero valor de θ , independientemente del valor de los parámetros en los cuales pueda depender la distribución F .

Una observación de este intervalo (A, B) es un intervalo (a, b) con $a = T_1(x_1, \dots, x_n)$, $b = T_2(x_1, \dots, x_n)$ y x_1, \dots, x_n observaciones de las variables aleatorias X_1, \dots, X_n . La interpretación frecuentista de un intervalo de confianza para θ con nivel de confianza α , es que la proporción de M observaciones de este intervalo que cubren al verdadero valor θ_0 de θ tiende a $\alpha\%$ cuando M tiende a infinito.

En la definición de intervalo de confianza, algunas veces A puede ser $-\infty$, en cuyo caso se dirá que el intervalo $(-\infty, B)$ es un *intervalo de confianza acotado superiormente* para θ . Por otro lado, algunas veces B puede ser ∞ y se dirá que el intervalo (A, ∞) es un *intervalo de confianza acotado inferiormente* para θ .

Si $\alpha \in (0, 1)$, se dirá que (A, B) es un *intervalo de confianza del $100\alpha\%$ o de nivel α para θ* si (A, B) es un intervalo de confianza para θ con nivel de confianza igual a α . La misma terminología se

usará para una observación de este intervalo. Análoga interpretación se tendrá cuando se mencione *intervalo de confianza acotado superiormente del $100\alpha\%$ o de nivel α para θ* e *intervalo de confianza acotado inferiormente del $100\alpha\%$ o de nivel α para θ* .

Definición 1.6 (Estimador consistente) *Un estimador $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ de θ es consistente si la sucesión $\{T_n\}_{n \geq 1}$ converge a θ en algún sentido apropiado como los siguientes.*

T_n es un estimador fuertemente consistente de θ si $\{T_n\}_{n \geq 1}$ converge casi seguramente a θ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, si $\{T_n\}_{n \geq 1}$ converge a θ excepto en un conjunto de medida cero.

T_n es un estimador débilmente consistente de θ si $\{T_n\}_{n \geq 1}$ converge en probabilidad a θ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - \theta| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

En esta tesis se verá que los estimadores fuertemente consistentes juegan un papel importante en la Teoría del Bootstrap para garantizar que de alguna manera las estimaciones Bootstrap converjan al parámetro o característica de una distribución y por tanto esta metodología de estimación sea de interés.

1.2. Teoría del Bootstrap

El método Bootstrap fue creado en 1979 por Bradley Efron, ver Davison y Hinkley (1997), estableciendo un nuevo marco para el análisis estadístico basado en simulaciones. Este método se utiliza para hacer inferencia acerca de alguna característica de interés de una función de distribución (la media, la varianza, la mediana, un cuantil, etc.), generando muestras parecidas a una muestra de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) que siguen esta distribución.

La idea de utilizar datos para generar datos parecidos y poder hacer inferencias es semejante al truco utilizado por el ficticio Barón Munchausen, quién cuando se encontró atrapado en el fondo de un lago se dice que salió de él tirando de las agujetas de sus propios zapatos; de ahí surge el nombre de la metodología de Efron, Bootstrap, que significa “levantarse a uno mismo tirando de

las agujetas de los zapatos”. Esto hace alusión al hecho de intentar obtener mucha más información de la muestra observada misma con el uso de los métodos Bootstrap.

Si se quiere comenzar a estudiar la Teoría del Bootstrap el libro de Efron y Tibshirani (1993), *An Introduction to the Bootstrap*, es un libro didáctico, presenta los conceptos básicos de esta teoría explicando en una forma clara, sencilla e intuitiva los procedimientos de estimación por Bootstrap. El libro de Davison y Hinkley (1997), *Bootstrap Methods and Their Application*, complementa las ideas del libro anterior pues en él se presentan más detalles de como implementar y justificar los procedimientos Bootstrap para hacer inferencias.

A continuación se describirá brevemente el método Bootstrap para la estimación puntual de una característica de interés de una función de distribución y posteriormente la forma en que se puede hacer una estimación por intervalos de confianza para dicha característica. Cabe señalar que varios de los conceptos de la Teoría del Bootstrap que se presentarán en seguida serán retomados en capítulos posteriores de manera particular para cuantiles, debido a que en esta tesis los cuantiles son las características de interés de las distribuciones.

1.2.1. Estimación puntual Bootstrap

Supóngase que se tiene una muestra $\{x_1, \dots, x_n\}$ de las v.a.i.i.d. X_1, \dots, X_n con función de distribución F desconocida y se desea hacer inferencias acerca de una característica de F , llamémosle $\sigma(F) \in \mathbb{R}^k$. Con esta muestra se puede obtener una estimación de F ya sea paramétrica o no paramétrica, denotémosla por \hat{F}_n . Por una estimación paramétrica de F se entenderá una función de distribución la cual es un miembro de una familia paramétrica de distribuciones y cuyos parámetros son estimados de alguna manera, por ejemplo por máxima verosimilitud, usando la muestra que se observó. Se entenderá por una estimación no paramétrica de F a una función de distribución que aproxima a F y que se basa únicamente en la muestra con la que se cuenta; no es necesario estimar ningún parámetro para su construcción.

Nótese que $\sigma(\cdot)$ es un funcional cuyo dominio es la familia de distribuciones $\{G : G \text{ es función de distribución}\}$ y cuyo contradominio es \mathbb{R}^k . Por tanto se puede hablar de $\sigma(\hat{F}_n)$, la característica de interés pero correspondiente a la distribución \hat{F}_n . Dependiendo de si \hat{F}_n es una estimación

paramétrica o no paramétrica de F , a $\sigma(\widehat{F}_n)$ se le llama *estimación Bootstrap paramétrica* o *estimación Bootstrap no paramétrica* de la característica $\sigma(F)$ respectivamente.

La estimación Bootstrap no paramétrica tiene la ventaja de que no se necesita suponer nada acerca de la distribución de los datos para encontrar una estimación de la característica de interés. Sin embargo, podría no ser tan buena en situaciones en las cuales sí se tenga información acerca de la función de distribución de los datos por fuentes externas. Por ejemplo, si se sabe que esta distribución es un miembro de una determinada familia paramétrica por la forma en que los datos fueron obtenidos, entonces el Bootstrap paramétrico es una mejor alternativa. A medida que se incorpora información acerca de la distribución de los datos o teoría de probabilidad a la metodología Bootstrap los resultados suelen ser mejores.

A continuación se verá un ejemplo que ilustra que las estimaciones Bootstrap algunas veces coinciden con las estimaciones que comúnmente se usan.

Ejemplo 1: Supóngase que la característica de interés es la media de F y se toma como \widehat{F}_n a la función de distribución empírica de la muestra observada $\{x_1, \dots, x_n\}$, es decir

$$\widehat{F}_n(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \mathbf{1}_{(-\infty, x_i)}(t),$$

donde $\mathbf{1}_A(t)$ es 1 si $t \in A$, y 0 si $t \notin A$. En este caso la estimación Bootstrap de $\sigma(F)$ será no paramétrica porque la estimación de F se basará únicamente en los datos y no se estimará ningún parámetro para su construcción. El funcional $\sigma(\cdot)$ está dado por

$$\sigma(G) = \int_{\mathbb{R}} x dG(x), \quad G \text{ es función de distribución.}$$

Por lo tanto la estimación Bootstrap no paramétrica asociada es

$$\sigma(\widehat{F}_n) = \int_{\mathbb{R}} x d\widehat{F}_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i = \bar{x}_n,$$

debido a que \widehat{F}_n es la función de distribución empírica que equivale a la distribución de una variable aleatoria discreta que toma los valores de la muestra observada x_1, \dots, x_n con probabilidad uniforme $1/n$ para cada uno.

Es decir, una estimación Bootstrap no paramétrica para la media de F es la media muestral, que es justamente la estimación que cotidianamente se usa para la media de una función de distribución. Nótese que coincide con la estimación por momentos de la media.

Análogamente se puede ver que una estimación Bootstrap no paramétrica de la varianza de F es la varianza muestral $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (x_i - \bar{x}_n)^2$. En el Ejemplo 1 se tiene una expresión sencilla para $\sigma(G)$ como función de G y para obtener $\sigma(\hat{F}_n)$ simplemente se evalúa \hat{F}_n en esta expresión. Sin embargo no siempre es posible encontrar una expresión cerrada para $\sigma(\cdot)$ o ésta puede ser muy compleja. En esos casos se recurre a aproximar $\sigma(\hat{F}_n)$ mediante simulaciones. Antes de decir como se hace dicha aproximación, se definirá un nuevo concepto que facilita la explicación de los procedimientos utilizados en la teoría de Bootstrap para hacer estimaciones.

Definición 1.7 (Muestra Bootstrap) *Supóngase que se tiene una muestra de las v.a.i.i.d. X_1, \dots, X_n con distribución F y \hat{F}_n es una estimación paramétrica o no paramétrica de F obtenida con esta muestra. Una muestra Bootstrap de tamaño m es una muestra de m v.a.i.i.d. con distribución \hat{F}_n .*

En el caso en que \hat{F}_n sea la función de distribución empírica de la muestra, para generar una muestra Bootstrap de tamaño m , se toma una muestra de tamaño m con reemplazo de la muestra original observada $\{x_1, \dots, x_n\}$. Esto se puede hacer simulando una muestra de tamaño m de v.a.i.i.d. con distribución uniforme discreta que tome los valores enteros de 1 a n , $\{u_1, \dots, u_m\}$, y así la muestra Bootstrap simulada es $\{x_{u_1}, \dots, x_{u_m}\}$. Nótese que pueden haber observaciones de la muestra original que salgan más de una vez en la muestra simulada.

Comúnmente una letra mayúscula seguida de “*” (como X^*) denotará una variable aleatoria con distribución \hat{F}_n , y la minúscula correspondiente seguida de “*” (x^*), una observación de esta variable aleatoria, a menos que se indique otra cosa. El simbolo “*” después de cualquier expresión que dependa de la distribución F (por ejemplo una esperanza, varianza, etc), será utilizado para indicar que dicha expresión es con respecto a \hat{F}_n en lugar de F .

Ahora se verá un ejemplo en el cual se hace una aproximación a la estimación Bootstrap de una característica de interés de una distribución.

Ejemplo 2: Supóngase que el interés primordial es la mediana de F . Un estimador para ella es

$$\text{med}(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ \frac{X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ son las estadísticas de orden. Pero supóngase que lo que ahora interesa es conocer qué tan adecuada es su estimación a través de este estimador. Para ello resulta informativo obtener una estimación para $\sigma(F) = \text{Var}[\text{med}(X_1, \dots, X_n)]$, pues con ella se tiene una idea de la dispersión de los valores que puede tomar dicho estimador alrededor de su media que tiende a la mediana de F cuando n tiende a infinito. Una expresión para $\sigma(G)$ en función de G podría ser muy complicada. Supóngase que \widehat{F}_n es la función de distribución empírica de la muestra. Una manera de proceder en este caso es la siguiente:

1. Simular M muestras Bootstrap independientes de tamaño n :

$$\begin{aligned} x_1^* &= \{x_{(1,1)}^*, x_{(1,2)}^*, \dots, x_{(1,n)}^*\}, \\ x_2^* &= \{x_{(2,1)}^*, x_{(2,2)}^*, \dots, x_{(2,n)}^*\}, \\ &\vdots \\ x_M^* &= \{x_{(M,1)}^*, x_{(M,2)}^*, \dots, x_{(M,n)}^*\}. \end{aligned}$$

2. Calcular la estimación de la mediana con (1.1) para cada una de las muestras Bootstrap:

$$m_i^* = \text{med}(x_i^*) = \text{med}(x_{(i,1)}^*, x_{(i,2)}^*, \dots, x_{(i,n)}^*), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (1.2)$$

3. Estimar $\text{Var}[\text{med}(X_1, \dots, X_n)]$ mediante:

$$\widehat{\text{Var}}_M = s_M^2(m_1^*, \dots, m_M^*) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (m_i^* - \bar{m}^*)^2, \quad (1.3)$$

$$\text{donde } \bar{m}^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M m_i^*.$$

El número de muestras Bootstrap M debe ser grande. No se tiene una regla general para su elección pero típicamente se toma mayor o igual a 1,000, mayormente del orden de 10,000 en varias aplicaciones. Para el trabajo realizado en el Capítulo 3 se tomó $M = 100,000$, debido a que en un

trabajo parecido de Ho y Lee (2005) se observó que éste es el menor valor de M necesario para obtener resultados satisfactorios

La idea en la construcción de esta estimación es la siguiente: Aunque no se tiene una expresión de $\sigma(G)$ como función de G en la cual evaluar $G = \widehat{F}_n$, se tiene que

$$\sigma(\widehat{F}_n) = \text{Var}^*[\text{med}(X_1^*, \dots, X_n^*)],$$

donde se toma la varianza $\text{Var}^*[\cdot]$ considerando que X_1^*, \dots, X_n^* son v.a.i.i.d. con distribución \widehat{F}_n . Se puede pensar a $\widehat{\text{Var}}_M$ como una aproximación de $\sigma(\widehat{F}_n) = \text{Var}^*[\text{med}(X_1^*, \dots, X_n^*)]$, la estimación Bootstrap no paramétrica de $\sigma(F) = \text{Var}[\text{med}(X_1, \dots, X_n)]$, como se verá a continuación.

Si Y_1, \dots, Y_M son v.a.i.i.d. con varianza finita $\text{Var}(Y)$ y $\bar{Y} = \sum_{i=1}^M Y_i/M$, entonces

$$S_M^2 = S_M^2(Y_1, \dots, Y_M) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (Y_i - \bar{Y})^2 \quad (1.4)$$

converge casi seguramente a $\text{Var}(Y)$ cuando $M \rightarrow \infty$. Es decir, S_M^2 es un estimador fuertemente consistente de $\text{Var}(Y)$. Si se toma $Y_i = \text{med}(X_i^*)$ para $i = 1, 2, \dots, M$, donde las X_i^* son muestras aleatorias independientes de tamaño n de v.a.i.i.d. con distribución \widehat{F}_n , digamos $X_i^* = \{X_{(i,1)}^*, X_{(i,2)}^*, \dots, X_{(i,n)}^*\}$ para $i = 1, 2, \dots, M$, entonces las Y_i son v.a.i.i.d. con varianza finita la cual es precisamente $\text{Var}^*[\text{med}(X_1^*, \dots, X_n^*)]$. Por lo tanto, (1.4) converge casi seguramente a $\text{Var}^*[\text{med}(X_1^*, \dots, X_n^*)]$ cuando el número de muestras Bootstrap tiende a infinito. De aquí, como $m_1^*, m_2^*, \dots, m_M^*$ son valores observados de Y_1, \dots, Y_M se tiene que $\widehat{\text{Var}}_M$ dada por (1.3) para un valor de M suficientemente grande será aproximadamente $\text{Var}^*[\text{med}(X_1^*, \dots, X_n^*)]$.

Aunque $\widehat{\text{Var}}_M$ sea solamente una aproximación de $\sigma(\widehat{F}_n)$ también se le llamará una *estimación Bootstrap* de $\sigma(F)$, la cual es no paramétrica debido a que se construyó con \widehat{F}_n igual a la función de distribución empírica de la muestra que es una estimación no paramétrica de F .

En el Ejemplo 2, con el algoritmo presentado no fue necesario conocer una expresión para la varianza del estimador de la mediana (1.1) para obtener una estimación Bootstrap de ella; ésta es una de las ventajas de este procedimiento. Además, este algoritmo puede ser utilizado para obtener una estimación Bootstrap de la varianza de cualquier otro estimador de la mediana de F simplemente modificando el paso 2 del algoritmo, calculando con este otro estimador las

estimaciones m_i^* de las medianas de las muestras Bootstrap simuladas. Para la estimación Bootstrap de este ejemplo, es vital que el estimador de $\sigma(\widehat{F}_n)$ sea fuertemente consistente para garantizar que la estimación Bootstrap calculada por simulaciones se aproxime a la estimación Bootstrap original con algún modo de convergencia.

¿Cuándo es adecuado usar el Bootstrap?

La metodología Bootstrap es adecuada dependiendo de qué tan buena sea la aproximación de \widehat{F}_n a F y qué tan suave sea el funcional $\sigma(\cdot)$ en F . La Figura 1.1 aclara de manera gráfica esta noción.

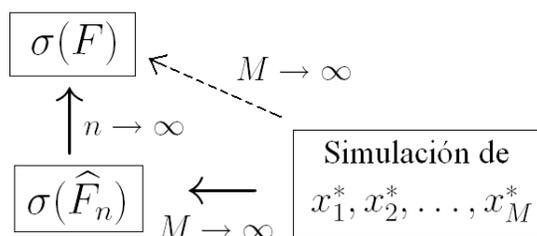


Figura 1.1: Estimación Bootstrap

Si con alguna forma de convergencia γ se tiene que

$$\widehat{F}_n \xrightarrow{\gamma} F, \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

y $\sigma(\cdot)$ es continua en F , en el sentido de que para toda sucesión de distribuciones $\{G_n\}_{n \geq 1}$ que tiende con la convergencia γ a F cuando $n \rightarrow \infty$, se cumple que $\{\sigma(G_n)\}_{n \geq 1}$ tiende con alguna forma de convergencia ω a $\sigma(F)$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces se tendrá que con la convergencia ω

$$\sigma(\widehat{F}_n) \xrightarrow{\omega} \sigma(F), \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

En el caso en que \widehat{F}_n sea la distribución empírica, el Teorema de Glivenko-Cantelli, cuya demostración puede ser consultada en Resnick (2001, p. 224), establece que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{c.s.} 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto \widehat{F}_n converge uniformemente en \mathbb{R} a F cuando $n \rightarrow \infty$, con probabilidad 1. Sin embargo, en la práctica muchas veces no se tiene forma de verificar si el funcional $\sigma(\cdot)$ es efectivamente continuo para garantizar que (1.5) sea cierto. Por otro lado, la conveniencia de aplicar un algoritmo como del Ejemplo 2 también depende de la consistencia fuerte del estimador que se utiliza para aproximar $\sigma(\widehat{F}_n)$.

En la Figura 1.1, la aproximación horizontal depende de la consistencia fuerte del estimador de $\sigma(\widehat{F}_n)$ basado en las M muestras Bootstrap independientes $x_1^*, x_2^*, \dots, x_M^*$. La aproximación vertical depende de la continuidad del funcional $\sigma(\cdot)$ en F y de la proximidad de \widehat{F}_n a F en algún sentido cuando $n \rightarrow \infty$. Algunas veces se piensa que cuando $M \rightarrow \infty$ la estimación Bootstrap se está acercando a $\sigma(F)$, la flecha punteada en la Figura 1.1 se refiere a esta creencia errónea. Como se ha visto, a lo que realmente se está acercando dicha estimación es a $\sigma(\widehat{F}_n)$. Pero $\sigma(\widehat{F}_n)$ podría no ser muy cercana a $\sigma(F)$ si $\sigma(\cdot)$ no es continua en F o si \widehat{F}_n está lejos de F .

Si se satisfacen las suposiciones anteriores de continuidad del funcional $\sigma(\cdot)$ junto con la consistencia fuerte del estimador de $\sigma(\widehat{F}_n)$, se puede tener la tranquilidad de que el método Bootstrap proporcionará estimaciones adecuadas.

Algoritmo Bootstrap

Obsérvese que para aproximar la estimación Bootstrap de una característica de interés cualquiera $\sigma(F)$ de la distribución F , el algoritmo del Ejemplo 2 puede generalizarse como se presentará a continuación.

Primero se piensa en un estimador fuertemente consistente de la estimación Bootstrap $\sigma(\widehat{F}_n)$ de la característica de interés, llamémosle T . Posteriormente se hace lo siguiente:

1. Simular M muestras Bootstrap independientes de tamaño r :

$$\begin{aligned} x_1^* &= \{x_{(1,1)}^*, x_{(1,2)}^*, \dots, x_{(1,r)}^*\}, \\ x_2^* &= \{x_{(2,1)}^*, x_{(2,2)}^*, \dots, x_{(2,r)}^*\}, \\ &\vdots \\ x_M^* &= \{x_{(M,1)}^*, x_{(M,2)}^*, \dots, x_{(M,r)}^*\}. \end{aligned}$$

2. Se calculan las observaciones auxiliares m_i^* con $i = 1, 2, \dots, M$, una por cada muestra Bootstrap, que son necesarias para obtener una estimación basada en T de $\sigma(\widehat{F}_n)$.
3. Estimar $\sigma(F)$ mediante:

$$t_M = T(m_1^*, \dots, m_M^*).$$

En este algoritmo llamado *algoritmo Bootstrap*, M es un número muy grande que podría ser tomado mayor o igual a 1,000. El valor de r se toma dependiendo en la forma del estimador consistente de $\sigma(\widehat{F}_n)$, algunas veces conviene tomarlo igual al tamaño de la muestra observada y en ocasiones igual a uno. Como se dijo anteriormente, el valor de M que se consideró en esta tesis fue $M = 100,000$ para obtener resultados satisfactorios. El valor de r se tomó como el tamaño de la muestra observada. Para entender mejor como elegir el valor de r observemos como se tomó en el Ejemplo 2 y veamos como se tomaría en el Ejemplo 1.

En el Ejemplo 2 el estimador consistente de $\sigma(\widehat{F}_n)$ es $T = S_M^2$ con S_M^2 dado por (1.4), donde

$$Y_i = \text{med}(X_{i,1}^*, \dots, X_{i,n}^*), \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

y $X_{i,j}^*$ son v.a.i.i.d. que siguen la distribución \widehat{F}_n , para $i = 1, 2, \dots, M$, $j = 1, 2, \dots, n$. Para obtener una estimación de $\sigma(\widehat{F}_n)$ con este estimador, se tienen que obtener observaciones de las M v.a. Y_i y para obtener cada una de éstas se tienen que obtener observaciones de las n v.a. $X_{i,1}^*, X_{i,2}^*, \dots, X_{i,n}^*$, así que en este ejemplo es necesario tomar $r = n$. Las observaciones auxiliares m_i^* son las observaciones de las v.a. Y_i con $i = 1, 2, \dots, M$ dadas por (1.2).

El Ejemplo 1 también se pudo haber atacado de esta manera como se verá a continuación. La estimación Bootstrap de la media de F es $\sigma(\widehat{F}_n) = E(X^*)$, donde X^* es una v.a. con distribución \widehat{F}_n . Por la Ley Fuerte de los Grandes Números (LFGN), si X_1^*, \dots, X_M^* son v.a.i.i.d. con distribución \widehat{F}_n , entonces su esperanza es $E(X^*)$ y se tiene que

$$\bar{X}_M = \bar{X}_M(X_1^*, \dots, X_M^*) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i^*$$

converge casi seguramente a $E(X^*)$ cuando $M \rightarrow \infty$. Es decir, \bar{X}_M es un estimador consistente de $\sigma(\widehat{F}_n)$. Entonces para aplicar el algoritmo Bootstrap y aproximar $\sigma(\widehat{F})$ se toma $T = \bar{X}_M$. Para obtener una estimación de $\sigma(\widehat{F}_n)$ con T , es necesario obtener únicamente observaciones de

las M v.a. X_i^* , por lo que en este caso se toma $r = 1$, es decir, se simulan M muestras Bootstrap independientes de tamaño 1, que es lo mismo que simular una muestra de tamaño M de v.a.i.i.d. con distribución \widehat{F}_n , digamos $\{x_1^* \dots, x_M^*\}$. Las observaciones auxiliares son $m_i^* = x_i^*$ con $i = 1, \dots, M$. La estimación Bootstrap para $\sigma(F)$ mediante este algoritmo es entonces $t_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i^*$. Notar que esta estimación no es la misma que se obtuvo en Ejemplo 1, pero cuando M tiende a infinito se acerca más a ella.

En el caso en que se tenga una expresión de $\sigma(G)$ en función de G en la cual no sea muy difícil evaluar \widehat{F}_n , es preferible estimar $\sigma(F)$ simplemente evaluando \widehat{F}_n en $\sigma(\cdot)$ que utilizar el algoritmo Bootstrap para obtener una aproximación a ella, ya que de esta forma se obtiene una estimación Bootstrap precisa. En general, en el algoritmo Bootstrap t_M es una aproximación a la estimación Bootstrap $\sigma(\widehat{F}_n)$ de la característica $\sigma(F)$ de F debido a la consistencia fuerte del estimador T , pero a t_M se le llamará también una *estimación Bootstrap* de $\sigma(F)$, la cual será paramétrica o no paramétrica dependiendo de si \widehat{F}_n es una estimación paramétrica o no paramétrica de F .

1.2.2. Intervalos de Confianza Bootstrap

Supóngase que se quiere obtener un intervalo de confianza del $(1 - 2\alpha)\%$ para la característica $\sigma(F)$ de la distribución F y se cuenta con una muestra observada $\{x_1, \dots, x_n\}$ de las v.a.i.i.d. X_1, \dots, X_n que siguen esta distribución.

Como antes, sea \widehat{F}_n una estimación paramétrica o no paramétrica de F basada en la muestra observada $\{x_1, \dots, x_n\}$; es decir, $\widehat{F}_n = \widehat{F}_n(x_1, \dots, x_n)$. Nótese que la estadística $\widehat{F}_n(X_1, \dots, X_n)$ es un estimador de la distribución F . Así mismo $\sigma[\widehat{F}_n(X_1, \dots, X_n)]$ es un estimador de $\sigma(F)$, al cual se le llamará un *estimador Bootstrap* de $\sigma(F)$.

En lo que se presentará a continuación X_1^*, \dots, X_n^* serán v.a.i.i.d. con distribución \widehat{F}_n y se usará la siguiente notación:

$T = T(X_1, \dots, X_n) = \sigma[\widehat{F}_n(X_1, \dots, X_n)]$
$T^* = T(X_1^*, \dots, X_n^*) = \sigma[\widehat{F}_n(X_1^*, \dots, X_n^*)]$
$\theta = \sigma(F)$
$t = \sigma(\widehat{F}_n)$

Intervalo de confianza Bootstrap básico

Sea $U = T - \theta$ y $U^* = T^* - t$. Denótese por U_p y U_p^* al cuantil de probabilidad acumulada p de U y U^* , respectivamente. Se tiene que si Z_1, \dots, Z_R son v.a.i.i.d. con distribución G y $Z_{(1)} \leq Z_{(2)} \leq \dots \leq Z_{(R)}$ son sus estadísticas de orden, entonces para $j = 1, 2, \dots, R$ se tiene que

$$E(Z_{(j)}) \approx G^{-1}\left(\frac{j}{R+1}\right).$$

Por lo tanto, un estimador del cuantil de probabilidad acumulada p de G , $G^{-1}(p)$, es $Z_{((R+1)p)}$ asumiendo que $(R+1)p$ es un entero (para que esto sea cierto, podría tomarse por ejemplo $R = 999$ cuando p tenga a lo más tres decimales). Así, si $\{t_1^* - t, \dots, t_R^* - t\}$ es un conjunto de observaciones independientes de la variable aleatoria $U^* = T^* - t$, una estimación del cuantil de probabilidad acumulada p de U^* es

$$\widehat{U}_p^* = t_{((R+1)p)}^* - t,$$

donde $t_{(1)}^* \leq t_{(2)}^* \leq \dots \leq t_{(R)}^*$ son los valores ordenados de $\{t_1^*, t_2^*, \dots, t_R^*\}$.

El cuantil U_p puede ser aproximado por U_p^* . Por lo tanto si $0 < \alpha < 1$, como

$$P(U_\alpha \leq T - \theta \leq U_{1-\alpha}) = 1 - 2\alpha,$$

se tiene que

$$P(U_\alpha^* \leq T - \theta \leq U_{1-\alpha}^*) \approx 1 - 2\alpha,$$

entonces

$$P(T - U_{1-\alpha}^* \leq \theta \leq T - U_\alpha^*) \approx 1 - 2\alpha.$$

Además una estimación de $T - U_p^*$ con $p \in (0, 1)$ es

$$t - \widehat{U}_p^* = t - (t_{((R+1)p)}^* - t) = 2t - t_{((R+1)p)}^*,$$

por lo que un intervalo de confianza del $(1 - 2\alpha)\%$ aproximado para θ es

$$(2t - t_{((R+1)(1-\alpha))}^*, 2t - t_{((R+1)\alpha)}^*).$$

Este intervalo es conocido como un *intervalo de confianza Bootstrap básico* del $(1 - 2\alpha)\%$ para θ .

Este intervalo será adecuado dependiendo en la magnitud de R y éste puede tomarse típicamente como $R \geq 999$, según Davison y Hinkley (1997, p. 29). También influye la proximidad de las distribuciones de $T - \theta$ y $T^* - t$. Nótese que si la distribución de $T - \theta$ no depende de ninguna incógnita sino que estuviera completamente especificada, es decir, si $T - \theta$ es una *cantidad pivotal*, la distribución de $T - \theta$ y de $T^* - t$ serán idénticas. Por lo tanto, es deseable utilizar una cantidad pivotal para construir intervalos de confianza Bootstrap. La siguiente clase de intervalos Bootstrap pretende lograr esto.

Intervalo de confianza Bootstrap Studentizado

Obsérvese que si X_1, \dots, X_n son v.a.i.i.d. con distribución normal $N(\mu, \beta^2)$, por el Ejemplo 1 un estimador Bootstrap de μ es

$$T = \bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad (1.6)$$

además un estimador para $\text{Var}(\bar{X}_n) = \beta^2/n$ es

$$V = \frac{S_n^2}{n}, \quad \text{donde } S_n^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1} \quad (1.7)$$

y es bien conocido que

$$\frac{T - \mu}{V^{1/2}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \quad (1.8)$$

tiene distribución t -student con $n - 1$ grados de libertad. Es decir, en este caso la distribución de $(T - \mu)/V^{1/2}$ no depende de ninguna incógnita y está completamente especificada, por lo tanto es una cantidad pivotal.

Debido a lo anterior, en el caso general se propone como un posible pivotal a

$$W = \frac{T - \theta}{V^{1/2}},$$

donde V es un estimador de $\text{Var}(T|F)$. Si se conoce la forma explícita de un estimador de $\text{Var}(T|F)$ se toma a V como este estimador. Por ejemplo si $T = \bar{X}_n$, un estimador de $\text{Var}(T|F)$ con una forma explícita se da en (1.7) y su valor observado para la muestra $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ es $v = s_n^2/n$, donde $s_n^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2/(n-1)$ y $\bar{x}_n = \sum_{i=1}^n x_i/n$. Si no se conoce una forma explícita para un estimador de $\text{Var}(T|F)$, se puede tomar como V a $\text{Var}(T|\hat{F}_n)$ y su valor observado para la muestra

x se aproxima por simulación mediante

$$\sum_{m=1}^M \frac{(t_m^* - \bar{t}^*)^2}{M-1},$$

donde $\bar{t}^* = \sum_{i=1}^M t_i^*/M$, $\{t_1^*, \dots, t_M^*\}$ es un conjunto de observaciones independientes de T^* y M es un número entero grande.

Sea

$$W^* = \frac{T^* - t}{(V^*)^{1/2}},$$

donde V^* es un estimador de $\text{Var}(T^*|\widehat{F}_n)$. Si W_p y W_p^* es el cuantil de probabilidad acumulada p de W y W^* , respectivamente, entonces si $0 < \alpha < 1$ se tiene que

$$P(W_\alpha \leq (T - \theta)/V^{1/2} \leq W_{1-\alpha}) = 1 - 2\alpha.$$

Por lo tanto, como los cuantiles W_p pueden ser aproximados con los cuantiles W_p^* , se tiene que

$$P(W_\alpha^* \leq (T - \theta)/V^{1/2} \leq W_{1-\alpha}^*) \approx 1 - 2\alpha,$$

es decir

$$P(T - V^{1/2}W_{1-\alpha}^* \leq \theta \leq T - V^{1/2}W_\alpha^*) \approx 1 - 2\alpha.$$

De aquí, un intervalo de confianza del $(1 - 2\alpha)\%$ aproximado para θ es

$$(t - v^{1/2}w_{((R+1)(1-\alpha))}^*, t - v^{1/2}w_{((R+1)\alpha)}^*)$$

donde v es el valor observado de V y $w_{(1)}^*, \dots, w_{(R)}^*$ son los valores ordenados de observaciones independientes de W^* . Este intervalo es conocido como un *intervalo de confianza Bootstrap Studentizado* del $(1 - 2\alpha)\%$ para θ .

Otros intervalos de confianza Bootstrap

En la literatura clásica del Bootstrap se encuentran además de los intervalos Bootstrap presentados anteriormente, los *intervalos de confianza Bootstrap percentil* que son análogos a los intervalos Bootstrap básicos. También se encuentran los intervalos *Bias-Corrected and Accelerated* (BC_a), los cuales son más refinados que los intervalos Bootstrap anteriores, pero tienen la desventaja de

adicionar un nivel extra de complejidad en los cálculos computacionales. Para mayor información acerca de estos dos tipos de intervalos, consúltese Efron y Tibshirani (1993).

Son muy comunes también en la literatura del Bootstrap, versiones modificadas de los intervalos anteriores, entre algunas de ellas se encuentran las versiones *suavizadas*, las cuales emplean como \hat{F}_n a una estimación kernel de la distribución F . Por otro lado, también se encuentran los intervalos contruidos por *iteración Bootstrap*, que calibra las coberturas de intervalos Bootstrap (como el percentil, por ejemplo) iterativamente. Estos son solamente algunos de los intervalos Bootstrap más conocidos. En el Capítulo 3 se presentará una nueva clase de ellos propuestos por Ho y Lee en el año 2005 y con los cuales se trabajará en esta tesis, debido a que son los que tienen los mejores resultados en cuanto a coberturas para cuantiles entre todos los intervalos Bootstrap considerados en este trabajo.

1.3. Teoría de Verosimilitud

Supóngase que se cuenta con una muestra $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ de las v.a.i.i.d. X_1, \dots, X_n que siguen una distribución F_θ con parámetro θ desconocido el cual pertenece al espacio parametral $\Theta \subset \mathbb{R}^k$. Esta muestra puede ser considerada como un evento E y la probabilidad de su ocurrencia puede ser determinada con F_θ , por lo tanto esta probabilidad estará en función del parámetro desconocido, denotémosla por $P(E; \theta)$.

1.3.1. Función de verosimilitud y estimadores de máxima verosimilitud

La *función de verosimilitud* de θ se define como

$$L(\theta; x) = c * P(E; \theta),$$

donde c es cualquier constante positiva que no depende de θ ; es decir, c no está en función de θ aunque podría estar en función de la muestra x , Fisher (1921).

Debido a que las v.a. X_1, \dots, X_n son independientes e idénticamente distribuidas se tiene lo siguiente:

- Si F_θ es una distribución discreta con función de probabilidad $f(t; \theta)$, entonces

$$P(E; \theta) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta), \quad (1.9)$$

por lo tanto

$$L(\theta; x) \propto \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta). \quad (1.10)$$

- Si F_θ es una distribución continua con función de densidad $f(t; \theta)$, se tiene que

$$\begin{aligned} P(E; \theta) &= P(x_1 - \epsilon \leq X_1 \leq x_1 + \epsilon, \dots, x_n - \epsilon \leq X_n \leq x_n + \epsilon) \\ &= \prod_{i=1}^n P(x_i - \epsilon \leq X_i \leq x_i + \epsilon) = \prod_{i=1}^n \int_{x_i - \epsilon}^{x_i + \epsilon} f(t; \theta) dt, \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde $\epsilon > 0$ es un número muy pequeño que representa la precisión del instrumento de medición para las observaciones x_1, x_2, \dots, x_n , es decir, ϵ es el error que se comete al registrar los valores observados x_1, x_2, \dots, x_n , debido a que con el instrumento de medición únicamente puede registrarse un número finito de decimales de dichos valores. Por lo tanto

$$L(\theta; x) \propto \prod_{i=1}^n \int_{x_i - \epsilon}^{x_i + \epsilon} f(t; \theta) dt. \quad (1.12)$$

En el caso en que F_θ es continua, la expresión (1.12) de la función de verosimilitud de θ , a la cual se le llamará *verosimilitud exacta* de θ , puede ser difícil de manejar para hacer cálculos. Sin embargo, en algunas ocasiones esta expresión puede ser aproximada como se verá a continuación.

El *Teorema de valor medio para integrales definidas*, establece que si $g(\cdot)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b g(x) dx = (b - a)g(c).$$

Por lo tanto, si la función de densidad $f(t; \theta)$ es continua en el intervalo $[x_i - \epsilon, x_i + \epsilon]$, entonces la i -ésima integral de (1.12) es $2\epsilon f(x'_i; \theta)$ para alguna $x'_i \in [x_i - \epsilon, x_i + \epsilon]$. Si $f(t; \theta)$ es aproximadamente constante en este intervalo se tiene que $f(x_i; \theta) \approx f(x'_i; \theta)$. Por lo que si esto es válido para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y ϵ no depende de θ , una aproximación a la función de verosimilitud (1.12) en θ es

$$L(\theta; x) \propto \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta). \quad (1.13)$$

A la expresión (1.13) se le llama *aproximación continua* a la función verosimilitud. Nótese que si para algún $\theta \in \Theta$ la densidad $f(t; \theta)$ tiene una singularidad en alguno de los intervalos $[x_i - \epsilon, x_i + \epsilon]$, es decir, $f(t; \theta)$ tiende a infinito cuando t se aproxima a algún valor de este intervalo, esta aproximación no es válida para este valor de θ , pues no se satisfacen las condiciones del teorema de valor medio para integrales. En este caso se debe de utilizar la función de verosimilitud exacta (1.12) para calcular la función de verosimilitud en cada valor de θ .

El *estimador de máxima verosimilitud* (EMV) del parámetro θ es el valor de θ que maximiza $P(E; \theta)$. La *función de logverosimilitud* de θ se define como el logaritmo natural de $L(\theta; x)$:

$$\ell(\theta; x) = \log[L(\theta; x)].$$

Como $L(\theta; x)$ es proporcional a $P(E; \theta)$ y la función logaritmo natural es estrictamente creciente, el valor de θ que maximiza $P(E; \theta)$ es el mismo que maximiza $L(\theta; x)$ y $\ell(\theta; x)$. Así el estimador de máxima verosimilitud de θ es el valor de θ que maximiza la función de verosimilitud y la función de logverosimilitud de este parámetro. Usualmente es más fácil trabajar con la función de logverosimilitud.

En el siguiente ejemplo se muestra una función de distribución para la cual no es válida la aproximación continua a la función de verosimilitud y la manera de proceder para obtener los EMV de los parámetros de dicha distribución.

Ejemplo 1: Sea $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una muestra de v.a.i.i.d. con distribución Weibull de parámetros (μ, σ, β) desconocidos, donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $\beta > 0$. La función de densidad de esta distribución, se define para $t \leq \mu$ como

$$\psi(t; \mu, \sigma, \beta) = \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{\mu - t}{\sigma} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{\mu - t}{\sigma} \right)^{\beta} \right]. \quad (1.14)$$

Si $\beta < 1$ entonces el exponente del segundo factor de (1.14) es negativo y por lo tanto este factor tiende a infinito si $\mu - t$ tiende a cero, lo cual sucede si t tiende a μ . Es decir cuando $\beta < 1$, la densidad $\psi(t; \mu, \sigma, \beta)$ tiene una singularidad en $t = \mu$.

Para ilustrar esto, en la Figura 1.2 se presentan las densidades de las distribuciones Weibull con parámetros $\mu = 1$, $\sigma = 1$ y $\beta = 0.5, 1.5, 3$.

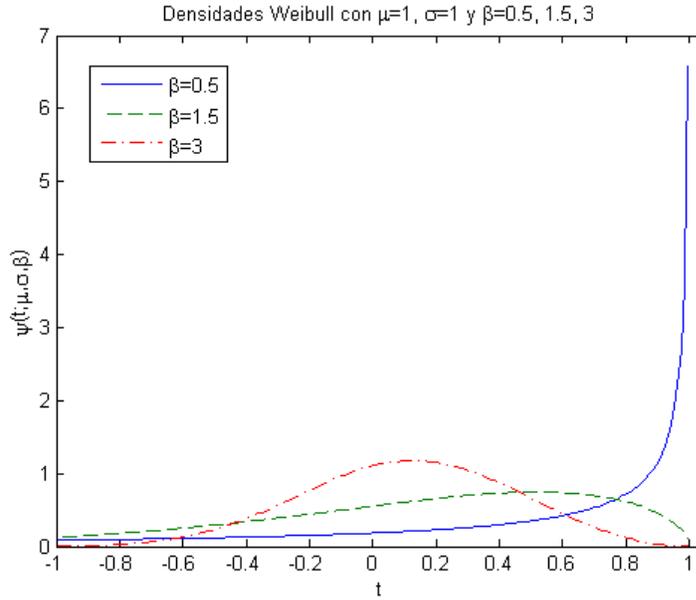


Figura 1.2: Densidades Weibull con $\mu = 1$, $\sigma = 1$, $\beta = 0.5$

Se observa que cuando $\beta = 0.5$ y t tiende a $\mu = 1$ por abajo, la gráfica de la densidad Weibull tiende a infinito. Sin embargo, $\psi(t = 0.9999999; \mu = 1, \sigma = 1, \beta = 0.5) = 1,580.6$ cantidad que todavía dista muchísimo de infinito, por lo que la tendencia de la densidad a infinito cuando t se acerca a 1 por la izquierda es lenta. Cuando $\beta = 1.5$ o $\beta = 3$ se observa que la densidad Weibull no tiene singularidades.

Sean $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ los valores ordenados de la muestra x . Como el rango de valores que puede tomar una v.a. con distribución Weibull de parámetros (μ, σ, β) está acotado superiormente por μ , se debe tener necesariamente que $x_{(n)} \leq \mu$. Si $\epsilon > 0$ es el error de medición, $\sigma > 0$, $0 < \beta < 1$ y $x_{(n)} \leq \mu \leq x_{(n)} + \epsilon$, entonces se tiene una singularidad de la densidad $\psi(t; \mu, \sigma, \beta)$ en el intervalo $[x_{(n)} - \epsilon, x_{(n)} + \epsilon]$ y por tanto no es válida la aproximación continua a la función de verosimilitud para estos valores de los parámetros. Obsérvese que debido a esto, si $0 < \beta < 1$ y $\sigma > 0$ la aproximación continua a la función de verosimilitud tiende a infinito cuando μ tiende por arriba a $X_{(n)}$.

En este caso existen dos alternativas para encontrar los EMV de los parámetros. La primera es maximizar la función de verosimilitud exacta (1.12), como señalan Meeker y Escobar (1998, p. 275). La segunda alternativa más simple y usada, sugerida en Lawless (2003, p. 186) y Montoya,

et al. (2007), consiste en aproximar la función de verosimilitud con

$$L(\mu, \sigma, \beta; x) \propto \prod_{i=1}^n \psi(x_i; \mu, \sigma, \beta) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(\sigma) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(\beta) \mathbf{1}_{(x_{(n)} + \epsilon, \infty)}(\mu), \quad (1.15)$$

donde $\epsilon > 0$ es una cantidad positiva pequeña que está determinada por la precisión del instrumento de medición.

Nótese que la aproximación (1.15) coincide con la aproximación continua si $\beta > 0$, $\sigma > 0$ y $\mu > x_{(n)} + \epsilon$. En otro caso la aproximación (1.15) es cero. Por lo anterior, a esta aproximación se le llamará *aproximación continua truncada* a la verosimilitud Weibull. El máximo global de la función de verosimilitud exacta (1.12) coincide casi siempre con el máximo de la aproximación continua truncada. Computacionalmente ésta es una alternativa más sencilla para calcular los EMV de los parámetros.

1.3.2. Regiones de verosimilitud y niveles de confianza aproximados

Sea $\hat{\theta}$ el EMV del parámetro θ , la *función de verosimilitud relativa* de θ es la razón de la función de verosimilitud $L(\theta; x)$ y su máximo $L(\hat{\theta}; x)$:

$$R(\theta; x) = \frac{L(\theta; x)}{L(\hat{\theta}; x)}.$$

La *función de logverosimilitud relativa* de θ es el logaritmo natural de $R(\theta; x)$:

$$r(\theta; x) = \log[R(\theta; x)].$$

El conjunto $\{\theta : R(\theta; x) \geq p\}$ con $p \in (0, 1)$, es una *región de verosimilitud* para θ y p es su *nivel de verosimilitud*. En el caso en que la dimensión de θ es 1 este conjunto es un *intervalo de verosimilitud*. Se puede referir a este conjunto en forma compacta como *región (o intervalo) de verosimilitud de nivel p para θ* .

Nótese que

$$R(\theta; x) \geq p \Leftrightarrow r(\theta; x) \geq \log(p) \Leftrightarrow -2r(\theta; x) \leq -2\log(p),$$

Por lo tanto, $\theta_0 \in \{\theta : R(\theta; x) \geq p\}$ si y sólo si $-2r(\theta_0; x) \leq -2\log(p)$. De esta forma, el nivel de confianza aproximado de la región de verosimilitud de nivel p para θ es

$$P(D \leq -2\log(p) | \theta = \theta_0),$$

donde $D = -2r(\theta_0; x)$. En Serfling (1980, p. 155) puede ser consultada la demostración de que bajo ciertas condiciones de regularidad en F_θ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(D \leq d | \theta = \theta_0) = P(\chi_{(k)}^2 \leq d), \quad \forall d > 0.$$

Cuando se satisfacen dichas condiciones de regularidad, a la aproximación de la distribución de $D = -2r(\theta_0; x)$ por medio de la distribución χ^2 se le llama *aproximación Ji-cuadrada*, Kalbfleisch (1985, p. 107). Si es válida esta aproximación, la región de verosimilitud de nivel p para θ es una región de confianza aproximada de nivel

$$\alpha_p = P(\chi_{(k)}^2 \leq -2 \log p),$$

y a esta región se le llama una *región de verosimilitud-confianza* del α_p % para θ . En el Cuadro 1.1 se observa el nivel de confianza aproximado para algunos niveles de verosimilitud cuando $k = 1$.

Nivel de verosimilitud	Nivel de confianza
0.0362	0.99
0.1464	0.95
0.2585	0.90
0.7965	0.50

Cuadro 1.1: Caso $k = 1$

1.3.3. Estimación de un parámetro eliminando parámetros de estorbo

En algunas ocasiones puede ser de interés hacer inferencia acerca de un solo parámetro de la distribución F_θ o de un conjunto de ellos, y el resto son parámetros de estorbo. Por ejemplo, puede ser de interés hacer inferencias acerca de un cuantil de la distribución F_θ que puede ser escrita en función de este cuantil y otros parámetros, en este caso los otros parámetros son de estorbo. A continuación se describirá la manera de proceder en estos casos utilizando máxima verosimilitud.

Sea $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ con $k \geq 2$ y supóngase que haciendo un reacomodo en sus entradas puede ser escrito como $\theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$, donde $\theta^{(1)}$ es de dimensión r y $\theta^{(2)}$ es de dimensión $k - r$ con

$1 \leq r \leq k-1$. Si es de interés hacer inferencia únicamente para $\theta^{(1)}$, puede ser utilizada la *función de verosimilitud perfil* de $\theta^{(1)}$ que se define como

$$L_p(\theta^{(1)}) = \max_{\theta^{(2)} | \theta^{(1)}} L(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}; x),$$

donde L es la función de verosimilitud de θ con los datos x , es decir, $L_p(\theta^{(1)})$ es el valor máximo de la función de verosimilitud de $\theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ sobre Θ manteniendo $\theta^{(1)}$ fijo.

Sea $\hat{\theta}$ el EMV de θ , se define la *función de verosimilitud perfil relativa* de $\theta^{(1)}$ como

$$R_p(\theta^{(1)}) = \frac{L_p(\theta^{(1)})}{L(\hat{\theta}; x)}.$$

El conjunto $\{\theta^{(1)} : R_p(\theta^{(1)}) \geq z\}$ es llamado una *región de verosimilitud perfil* de $\theta^{(1)}$ con *nivel de verosimilitud* z . Cuando $\theta^{(1)}$ es de dimensión 1 este conjunto es un *intervalo de verosimilitud perfil* de $\theta^{(1)}$. La forma compacta de referirse a este conjunto es *región (o intervalo) de verosimilitud perfil de nivel p para θ* . Se puede consultar en Serfling (1980, p. 158) una demostración de que bajo ciertas condiciones de regularidad en F_θ se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(D \leq d | \theta^{(1)} = \theta_0^{(1)}) = P(\chi_{(k)}^2 \leq d), \quad \forall d > 0,$$

donde $D = -2 \log(R_p(\theta_0^{(1)}))$, por lo tanto las regiones de verosimilitud de $\theta^{(1)}$ son regiones de confianza aproximadas, por lo que se les llama *regiones de verosimilitud-confianza perfil*.

1.3.4. Intervalos de confianza con el método Delta

Teorema 1.1 Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a.i.i.d. con distribución F_θ donde $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ pertenece al espacio parametral $\Theta \subset \mathbb{R}^k$. Sea $f(\cdot; \theta)$ la función de densidad de F_θ . Entonces, bajo ciertas condiciones de regularidad en F_θ , existe una sucesión de EMV $\{\hat{\theta}_n\}_{n \geq 1}$ de θ tal que

a) *consistencia fuerte*: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{c.s.} \theta$, cuando $n \rightarrow \infty$;

b) *asintoticidad normal*:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \iota_\theta^{-1}), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

donde $\iota_\theta = \{-E_\theta [\partial^2 \log[f(X_1; \theta)] / \partial \theta_i \partial \theta_j]\}_{k \times k}$ es la matriz de información esperada para una sola observación; $\mathcal{I}_\theta = n \iota_\theta$ es la matriz de información esperada de Fisher.

El teorema anterior fue tomado de Serfling (1980, p. 148). La asintoticidad normal de los EMV proporcionada por este teorema puede ser utilizada para obtener intervalos de confianza aproximados para las componentes de θ , como se verá a continuación.

Sea $\nu_{i,j}$ el elemento (i, j) de la inversa de \mathcal{I}_θ , entonces una consecuencia del Teorema 1.1, es que para n grande un intervalo de confianza aproximado del $(1 - \alpha)\%$ para θ_i es

$$\theta_i \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\nu_{i,i}},$$

donde $u_{\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil de probabilidad acumulada $\alpha/2$ de la distribución normal estandar.

Debido a que el valor de θ es generalmente desconocido, en la literatura cuando se tiene una muestra $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de las v.a. X_1, X_2, \dots, X_n , es usual aproximar los terminos de \mathcal{I}_θ con los de la *matriz de información observada* definida por

$$I_{\hat{\theta}} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ell(\theta; x) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \right]_{k \times k},$$

donde $\hat{\theta}$ y $\ell(\theta; x) = \sum_{i=1}^n \log[f(x_i; \theta)]$ son el EMV y la función de logverosimilitud de θ , respectivamente. Denotando al elemento (i, j) de la inversa de esta matriz por $\tilde{\nu}_{i,j}$, se sigue que un intervalo de confianza aproximado del $(1 - \alpha)\%$ para θ_i es

$$\hat{\theta}_i \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\tilde{\nu}_{i,i}}. \tag{1.16}$$

Obsérvese que el intervalo anterior es un intervalo simétrico alrededor de $\hat{\theta}_i$ y no toma en cuenta la posible asimetría de la función de verosimilitud alrededor de este valor. Por otro lado, algunas veces es de interés hacer inferencia acerca de un parámetro unidimensional en función del parámetro θ , $\phi = g(\theta)$. Los siguientes dos teoremas contribuyen a lograr tal finalidad.

Teorema 1.2 (Propiedad de invarianza de la verosimilitud) *Si $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ y $g(\cdot)$ es una función con dominio en \mathbb{R}^k y contradominio en \mathbb{R} , entonces el estimador de máxima verosimilitud de $\psi = g(\theta)$ está dado por $\hat{\psi} = g(\hat{\theta})$.*

Mediante este teorema, encontrado en Pawitan (2001, p. 45), se puede obtener el EMV de un parámetro en función de θ si se conoce el EMV de θ pues únicamente se tiene que sustituir éste.

Teorema 1.3 (Método Delta) *Supóngase que $\{\widehat{\theta}_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de EMV de θ como la del Teorema 1.1, \imath_θ es la matriz de información esperada y $g(\cdot)$ es una función con dominio en \mathbb{R}^k y contradominio en \mathbb{R} con primeras derivadas parciales continuas. Defínase $\psi = g(\theta)$ y $\widehat{\psi}_n = g(\widehat{\theta}_n)$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\sqrt{n}(\widehat{\psi}_n - \psi) \xrightarrow{d} N(0, V_\psi),$$

donde

$$V_\psi = \Delta\psi^T \imath_\theta^{-1} \Delta\psi,$$

con

$$\Delta\psi = \left[\frac{\partial\psi}{\partial\theta_1}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial\theta_k} \right]^T.$$

Debido a este teorema, tomado de Schervish (1995, p. 403), que establece la asintoticidad normal del EMV $\widehat{\psi}$ de ψ , es posible obtener intervalos de confianza aproximados para este parámetro análogamente a como se hizo para las componentes de θ .

1.4. Teoría Clásica de Valores Extremos

La Teoría de Valores Extremos se ocupa del estudio de eventos que involucran a los valores más grandes o más pequeños que pueda tomar una variable aleatoria, es decir eventos extremos. En general, son de especial importancia los máximos por bloques de variables aleatorias, por lo que interesa conocer propiedades distribucionales de estos máximos.

Así como son de interés las distribuciones de máximos también pueden serlo las de mínimos, pero es suficiente hacer un estudio únicamente para los máximos debido a que si $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ entonces

$$\text{mín}(x_1, \dots, x_m) = -\text{máx}(-x_1, \dots, -x_m).$$

Problemas que pueden ser atacados con esta teoría son fácilmente encontrados en finanzas, meteorología, oceanografía, la industria, por decir algunos. A continuación se verán los resultados clásicos de la Teoría de Valores Extremos que son utilizados comúnmente en la modelación de máximos por bloques.

1.4.1. Modelos asintóticos

Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con función de distribución F y defínase

$$M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

En teoría, se puede obtener la distribución de M_n en forma exacta para todos los valores de n :

$$P(M_n \leq z) = P(X_1 \leq z, \dots, X_n \leq z) = P(X_1 \leq z) \cdots P(X_n \leq z) = F^n(z). \quad (1.17)$$

Sin embargo esto no es muy útil en la práctica, ya que F es desconocida. Se podría estimar F de los datos observados y entonces sustituir esta estimación en (1.17). Desafortunadamente pequeñas discrepancias de F pueden producir grandes diferencias para F^n .

Una alternativa es utilizar resultados asintóticos que permitan aproximar la distribución de M_n . Sin embargo, para lograr esto no es suficiente considerar el comportamiento de F^n cuando $n \rightarrow \infty$, ya que si se define w_F como el ínfimo de los valores de z tales que $F(z) = 1$, entonces

$$F^n(z) \rightarrow 0 \text{ si } z < w_F \quad \text{y} \quad F^n(z) \rightarrow 1 \text{ si } w_F < z,$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto F^n tiende en distribución, cuando $n \rightarrow \infty$, a la distribución de la v.a. degenerada que toma el valor w_F con probabilidad 1. Utilizar esta distribución concentrada en un punto para aproximar la de M_n no resulta informativo.

El siguiente teorema tomado de Embrechts, et al. (1997, p. 121), fue propuesto en 1928 por Fisher y Tippett y probado rigurosamente en 1943 por Gnedenko. Este teorema permite aproximar la distribución de una normalización lineal de M_n .

Teorema 1.4 (Fisher y Tippett) *Si existen sucesiones de constantes $\{a_n > 0\}$ y $\{b_n\}$ tales que*

$$P[(M_n - b_n)/a_n \leq x] = F^n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad (1.18)$$

donde G es una distribución que no está concentrada en un punto. Entonces G pertenece a alguna de las siguientes tres familias de distribuciones:

$$\begin{aligned}
(a) \text{ Gumbel: } & \Lambda(x) = \exp\{-\exp[-(\frac{x-\mu}{\sigma})]\}, \quad x \in \mathbb{R}; \\
(b) \text{ Fréchet: } & \Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \mu, \\ \exp[-(\frac{x-\mu}{\sigma})^{-\beta}], & x > \mu; \end{cases} \\
(c) \text{ Weibull: } & \Psi(x) = \begin{cases} \exp\{-[-(\frac{x-\mu}{\sigma})]^\beta\}, & x < \mu, \\ 1, & x \geq \mu; \end{cases}
\end{aligned}$$

con parámetros $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $\beta > 0$.

Las distribuciones asintóticas del Teorema 1.4 son llamadas *Distribuciones de Valores Extremos* (DVE). La distribución (a) es la distribución Gumbel, (b) es la distribución Fréchet y (c) es la distribución Weibull de máximos. Nótese que el Teorema 1.4 no garantiza la existencia de las constantes de normalización y en caso de su existencia, no dice a cual familia de distribuciones pertenece la distribución asintótica de la normalización lineal del máximo.

Una cuestión importante es la unicidad de estas constantes de normalización y qué tanto varía la distribución asintótica si se cumple (1.18) con otras constantes. Esto se responde con el siguiente teorema demostrado en Resnick (2001, p. 275).

Teorema 1.5 (Convergencia a familias, Gnedenko & Khinchin) Sean $G(x)$ y $H(x)$ dos funciones de distribución, ninguna de las cuales está concentrada en un punto. Supóngase que para $n \geq 1$, X_n son v.a. con funciones de distribución F_n , y U y V son v.a. con función de distribución G y H , respectivamente. Sean $a_n > 0$, $\alpha_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$, $\beta_n \in \mathbb{R}$.

a) Si

$$F_n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x), \quad F_n(\alpha_n x + \beta_n) \rightarrow H(x), \quad (1.19)$$

entonces existen constantes $A > 0$ y $B \in \mathbb{R}$ tales que, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{\alpha_n}{a_n} \rightarrow A > 0, \quad \frac{\beta_n - b_n}{a_n} \rightarrow B, \quad (1.20)$$

y

$$H(x) = G(Ax + B). \quad (1.21)$$

b) Recíprocamente, si (1.20) se cumple, entonces cualquiera de las relaciones en (1.19) implica la otra y (1.21) es cierta.

Este teorema garantiza que las constantes de normalización están determinadas salvo por equivalencias asintóticas y la distribución límite está determinada salvo por parámetros de ubicación y escala. Si se satisfacen las condiciones del Teorema 1.4 y n es grande se tiene que

$$P[(M_n - b_n)/a_n \leq x] \approx G(x),$$

por lo tanto una aproximación a la distribución de M_n es

$$P(M_n \leq x) \approx G[(x - b_n)/a_n].$$

Las densidades de las DVE para máximos son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Gumbel : } \lambda(x; \mu, \sigma) &= \frac{1}{\sigma} \exp \left[-\exp \left(\frac{\mu-x}{\sigma} \right) + \frac{\mu-x}{\sigma} \right], \quad x \in \mathbb{R}; \\ \text{Fréchet : } \phi(x; \mu, \sigma, \beta) &= \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-(1+\beta)} \exp \left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-\beta} \right], \quad x \geq \mu; \\ \text{Weibull : } \psi(x; \mu, \sigma, \beta) &= \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{\mu-x}{\sigma} \right)^{\beta-1} \exp \left[-\left(\frac{\mu-x}{\sigma} \right)^{\beta} \right], \quad x \leq \mu. \end{aligned}$$

Las expresiones para el cuantil de probabilidad acumulada p de estas distribuciones son:

$$\begin{aligned} \text{Gumbel : } Q_p &= \mu - \sigma \{ \log[-\log(p)] \}, \\ \text{Fréchet : } Q_p &= \mu + \sigma \{ [-\log(p)]^{-\frac{1}{\beta}} \}, \\ \text{Weibull : } Q_p &= \mu - \sigma \{ [-\log(p)]^{\frac{1}{\beta}} \}. \end{aligned}$$

R. Von Mises en 1954 y A. F. Jenkinson en 1955 propusieron que las familias de distribuciones Gumbel, Fréchet y Weibull pueden ser combinadas en una única familia de distribuciones las cuales tienen la forma

$$G(x) = \exp \left\{ - \left[1 + c \left(\frac{x-a}{b} \right) \right]^{-\frac{1}{c}} \right\}, \quad (1.22)$$

para x tales que $1 + c \left(\frac{x-a}{b} \right) > 0$, donde $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ y $c \in \mathbb{R}$.

La distribución (1.22) es conocida como *Distribución de Valores Extremos Generalizada* (DVEG). El parámetro a es de localización, b es de escala y c es de forma. El caso $c < 0$ corresponde una distribución Weibull y $c > 0$ corresponde una distribución Fréchet. El caso $c = 0$, el cual es interpretado como el límite de (1.22) cuando c tiende a 0, corresponde a una distribución Gumbel.

Las relaciones de los parámetros de la DVEG con los parámetros de las DVE son las siguientes:

$$\begin{aligned} c = 0 \text{ (Gumbel) : } \quad & \sigma = b, \quad \mu = a; \\ c > 0 \text{ (Fréchet) : } \quad & \beta = 1/c, \quad \sigma = b/c, \quad \mu = a - b/c; \\ c < 0 \text{ (Weibull) : } \quad & \beta = -1/c, \quad \sigma = -b/c, \quad \mu = a - b/c. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Por lo tanto, el Teorema 1.4 puede ser reformulado como sigue.

Teorema 1.6 *Si existen sucesiones de constantes $\{a_n > 0\}$ y $\{b_n\}$ tales que*

$$P[(M_n - b_n)/a_n \leq x] = F^n(a_n x + b_n) \rightarrow G(z) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad (1.24)$$

donde G es una distribución que no está concentrada en un punto. Entonces G es un miembro de la familia de DVEG

$$G(x) = \exp \left\{ - \left[1 + c \left(\frac{x-a}{b} \right) \right]^{-\frac{1}{c}} \right\},$$

para x tales que $1 + c \left(\frac{x-a}{b} \right) > 0$, donde $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ y $c \in \mathbb{R}$.

La densidad de la DVEG con parámetros (a, b, c) y $c \neq 0$, está dada por

$$g(x; a, b, c) = \frac{1}{b} \left[1 + c \left(\frac{x-a}{b} \right) \right]^{-(1+1/c)} \exp \left\{ - \left[1 + c \left(\frac{x-a}{b} \right) \right]^{-1/c} \right\}, \quad (1.25)$$

para x tales que $1 + c \left(\frac{x-a}{b} \right) > 0$; si $c = 0$ está dada por

$$g(x; a, b) = \frac{1}{b} \exp \left[- \exp \left(\frac{a-x}{b} \right) + \frac{a-x}{b} \right], \quad (1.26)$$

para $x \in \mathbb{R}$. Nótese que el soporte de la función de densidad de la DVEG depende de los tres parámetros (a, b, c) , mientras que para las familias Weibull y Fréchet sólo depende de un parámetro μ al cual se le llama parámetro umbral.

El cuantil de probabilidad acumulada p de la DVEG está dado por la expresión

$$Q_p = \begin{cases} a - \frac{b}{c} \{1 - [-\log(p)]^{-c}\}, & c \neq 0; \\ a - b \{\log[-\log(p)]\}, & c = 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

1.4.2. Estimación de los modelos basada en verosimilitud

Por el Teorema 1.6 la familia de las DVEG puede usarse para modelar las distribuciones de máximos por bloques. Vilchis (2006) resalta la enorme utilidad de la DVEG para sugerir uno o dos modelos de las DVE a considerar para una muestra observada. Se logra una mejor modelación del fenómeno de interés y la estimación tiene mayor precisión si se hace bajo cada submodelo y no con la DVEG. La elección final del mejor submodelo se hará teniendo en cuenta varios criterios de

validación del modelo y de diagnósticos de ajuste a los datos observados. Aquí es importante tener en cuenta el contexto de donde provienen los datos y esta información externa, no necesariamente matemática es la que llevará a la elección final del submodelo que haya ajustado bien a los datos.

Sea $m = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ una muestra de observaciones de máximos por bloques de tamaño n :

$$\begin{aligned} m_1 &= \text{máx}\{x_{1,1}, \dots, x_{1,n}\}, \\ m_2 &= \text{máx}\{x_{2,1}, \dots, x_{2,n}\}, \\ &\vdots \\ m_k &= \text{máx}\{x_{k,1}, \dots, x_{k,n}\}. \end{aligned}$$

Bajo el supuesto de que las $x_{i,j}$ son observaciones de v.a.i.i.d. y de que los máximos siguen una DVEG, pueden hacerse inferencias basadas en la verosimilitud tanto para los parámetros de este modelo como para sus cuantiles.

La aproximación continua a la función de verosimilitud para los parámetros de la DVEG está dada por

$$L(a, b, c; m) \propto \prod_{i=1}^k g(m_i; a, b, c) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(b), \quad (1.28)$$

donde $g(\cdot; a, b, c)$ es la densidad de la DVEG con parámetros (a, b, c) .

Utilizando la expresión (1.28) como la función de verosimilitud se pueden calcular los EMV de los parámetros de la DVEG. Con la función de verosimilitud relativa y la función verosimilitud perfil se pueden obtener regiones de verosimilitud-confianza para estos parámetros e intervalos de verosimilitud-confianza perfil para cada parámetro, respectivamente.

Mediante la expresión (1.27) del cuantil Q_p de la DVEG puede hacerse una reparametrización de la función de densidad de esta distribución en términos de (μ, Q_p, β) y obtener así intervalos de verosimilitud-confianza perfil para el cuantil Q_p de la DVEG.

Aunque las condiciones de regularidad del Teorema 1.1 no sean satisfechas por la DVEG, debido a que el soporte de su función de densidad depende de los parámetros y por tanto las propiedades asintóticas de los EMV de estos parámetros no tienen porque seguir siendo ciertas, Smith (1985) estudiando este problema a fondo concluyó que cuando $c > -0.5$ estas propiedades asintóticas son válidas, cuando $-1 < c < -0.5$ los EMV generalmente pueden obtenerse pero no tienen las propiedades asintóticas comunes y cuando $c < -1$ los EMV pueden ser incluso imposibles de

obtener. En la práctica el caso $c < -0.5$ raramente se da para fenómenos naturales, según menciona Coles (2001, p. 55). Aquí hay que resaltar que Smith siempre consideró la aproximación continua a la función de versosimilitud.

Por lo tanto, en la literatura estadística se calculan los intervalos de confianza aproximados (1.16) basados en la asintoticidad normal de los EMV para los parámetros del modelo y también para los cuantiles debido al Teorema 1.3. Estas inferencias son válidas tanto para los parámetros y cuantiles de las DVE como para la DVEG.

Sean $m_{(1)} \leq \dots \leq m_{(k)}$ los valores ordenados de la muestra observada $m = \{m_1, \dots, m_k\}$ y sea $\epsilon > 0$ la precisión del instrumento de medición. Para la familia Gumbel y Fréchet puede ser usada la aproximación continua a la función de verosimilitud, dada por

$$L(\mu, \sigma; m) \propto \prod_{i=1}^k \lambda(m_i; \mu, \sigma) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(\sigma) \quad (1.29)$$

y

$$L(\mu, \sigma, \beta; m) \propto \prod_{i=1}^k \phi(m_i; \mu, \sigma, \beta) \mathbf{1}_{(-\infty, m_{(1)})}(\mu) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(\sigma) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(\beta), \quad (1.30)$$

respectivamente.

Como se vió anteriormente, para la familia de distribuciones Weibull la aproximación continua a la función de verosimilitud no siempre es válida, pero puede emplearse la aproximación continua truncada dada por la expresión

$$L(\mu, \sigma, \beta; m) \propto \prod_{i=1}^k \psi(m_i; \mu, \sigma, \beta) \mathbf{1}_{(m_{(k)} + \epsilon, \infty)}(\mu) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(\sigma) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(\beta). \quad (1.31)$$

En el Capítulo 3 se verá con un ejemplo, que algunas veces es necesario utilizar la función de verosimilitud exacta (1.12) para la distribución Weibull cuando al usar (1.31) el EMV $\hat{\mu}$ y $\hat{\beta}$ de μ y β , respectivamente, cumplen que $\hat{\mu} = m_{(k)} + \epsilon$ y $\hat{\beta} \approx 1$, además en este caso para calcular la función de verosimilitud exacta se debe restringir μ a ser $\mu > m_{(k)} - \epsilon$.

1.4.3. Periodos de retorno

Muchas veces es de interés saber cuál es el valor que se excede en promedio cada determinado tiempo, por observaciones independientes de variables aleatorias con distribución F conocida, tomadas en periodos de tiempo iguales. Para resolver esta cuestión obsérvese lo siguiente.

Sea $\{X_i\}_{i \geq 1}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con función de distribución F y u un valor dado. Considérese la sucesión $\{\mathbf{1}_{\{X_i > u\}}\}_{i \geq 1}$ de v.a.i.i.d. Bernoulli que toman el valor 1 si $X_i > u$ y 0 en otro caso, con probabilidad $p = 1 - F(u) = \bar{F}(u)$ y $1 - p$, respectivamente. Entonces, el instante del primer éxito

$$L(u) = \min\{i \geq 1 : X_i > u\},$$

es decir, el instante de la primera excedencia del valor u , es una v.a. geométrica con función de probabilidad

$$P(L(u) = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto

$$E(L(u)) = p^{-1}.$$

Al valor u se le llama *nivel de retorno* con *periodo de retorno* p^{-1} para los eventos $\{X_i > u\}$. Nótese que el periodo de retorno tiende a infinito cuando el nivel de retorno tiende a w_F , donde $w_F = \inf\{x : F(x) = 1\}$.

Así, si es de interés hallar el nivel correspondiente a un periodo de retorno igual a 20, entonces se debe encontrar el valor de u tal que $\bar{F}(u)^{-1} = p^{-1} = 20$, es decir u tal que $\bar{F}(u) = 20^{-1} = 0.05$, por lo tanto $u = Q_{0.95}$. Análogamente el nivel correspondiente a un periodo de retorno igual a 100 es el cuantil $Q_{0.99}$.

En Teoría de Valores Extremos interesan los niveles de máximos anuales correspondientes a periodos de retorno de 20 y 100 años, es por eso que los cuantiles $Q_{0.95}$ y $Q_{0.99}$ de las DVE y DVEG son de especial importancia en este ámbito.

Capítulo 2

Intervalos de estimación Bootstrap para cuantiles

Como se ha visto anteriormente, una técnica para la construcción de intervalos de estimación para cuantiles es reparametrizar el modelo probabilístico en términos de los cuantiles para después estimarlos a través de la función de verosimilitud. Sin embargo uno de los problemas que se presenta con esta metodología es que es necesario especificar el modelo distribucional de los datos y tener muestras de tamaño razonable.

Por otro lado, en Teoría de Valores Extremos a pesar de que se sabe cuáles son las familias de distribuciones asintóticas de máximos que podrían modelar adecuadamente a una muestra finita de ellos, en algunas ocasiones la convergencia a estas distribuciones es lenta, por ejemplo Fisher y Tippett (1928) mencionaron que cuando la distribución de donde se extrae el máximo es normal la convergencia de la distribución del máximo a la distribución Gumbel es extremadamente lenta. Además cuando se tienen muestras pequeñas, el cálculo de los intervalos de verosimilitud perfil para cuantiles, algunas veces puede ser difícil debido a singularidades de la aproximación continua a la función de verosimilitud, en cuyo caso es necesario recurrir a la aproximación continua truncada o la función de verosimilitud exacta para calcular dichos intervalos.

Es por eso y más que a lo largo de los años se han hecho intentos para construir intervalos de confianza no paramétricos para cuantiles con buenos resultados en cuanto a coberturas y utilizando muestras pequeñas. Una técnica de estimación que ha sido muy utilizada para tal finalidad es el

Bootstrap. Sin embargo, en el ámbito de Teoría de Valores Extremos no se ha explorado mucho el comportamiento de intervalos Bootstrap para cuantiles y ese es el objetivo central de esta tesis.

En este capítulo, primero se presentará lo más relevante que se encontró con respecto a intervalos Bootstrap para cuantiles de distribuciones asintóticas de máximos o de distribuciones cualesquiera. Posteriormente, se hará una descripción de los intervalos propuestos por Beran y Hall (1993), que son la base para construir los intervalos propuestos por Ho y Lee (2005) con los que se trabajará en esta tesis. Finalmente, se presentarán los últimos intervalos mencionados y algunos resultados del trabajo de Ho y Lee (2005) con respecto a ellos.

En lo siguiente, cuando se diga que una clase de intervalos de confianza construidos con una muestra de tamaño n para el cuantil Q_p con $p \in (0, 1)$, tiene *error de cobertura del orden* $O(n^{-k})$ con $k > 0$, se estará refiriendo a que si $I(\alpha)$ denota a un intervalo en esta clase de intervalos de confianza de nivel α para el cuantil Q_p , entonces $\forall n \geq N$ con N suficientemente grande se tiene que

$$|P(I(\alpha) \text{ contenga a } Q_p) - \alpha| \leq c * n^{-k},$$

donde c es una constante positiva. Por ello, mientras más grande sea el valor de $k > 0$, los intervalos de confianza con error de cobertura del orden $O(n^{-k})$ son cada vez mejores con respecto a sus coberturas. El mayor valor de k que se ha encontrado para intervalos de estimación Bootstrap de cuantiles ha sido $k = 25/14$ asociado a los intervalos de Ho y Lee (2005).

2.1. Antecedentes

2.1.1. Intervalos Bootstrap para cuantiles de distribuciones asintóticas de máximos

Dentro de lo encontrado sobre intervalos Bootstrap en el ámbito de Teoría de Valores Extremos, en 1998 Dupuis y Field compararon varios tipos de intervalos de confianza para los cuantiles $Q_{0.90}$ y $Q_{0.99}$ de la Distribución de Valores Extremos Generalizada (DVEG). Consideraron intervalos Bootstrap percentil y BC_a paramétricos y no paramétricos, mencionados en la Sección 1.2.2, e intervalos de confianza asintóticos, basándose en los estimadores por *momentos pesados de proba-*

bilidad, definidos en Embrechts, et al. (1997, p. 321), y en los estimadores *robustos acotados óptimos* (optimal bounded robust estimates), introducidos por Dupuis y Field (1998). Encontraron que los intervalos Bootstrap tienen coberturas pobres en comparación a los intervalos asintóticos, siendo los intervalos BC_a los que tienen peores coberturas y por tanto recomendaron no usarlos para valores extremos.

En el año 2004, M.J. Hall, H.F.P van den Boogaard, R.C Fernando y A.E. Mynnet calcularon intervalos de confianza Bootstrap para cuantiles de las distribuciones Gumbel y Weibull. Consideraron los intervalos de confianza Bootstrap percentil e intervalos construidos mediante una aproximación normal y la metodología Bootstrap. Las estimaciones se hicieron por *máxima verosimilitud* o por *producto máximo del espaciamento* (maximum product of spacing), definidos en Ranneby (1984). Concluyeron que estos intervalos no son recomendables cuando se tienen tamaños de muestra pequeños y en caso de muestras grandes pueden ser utilizados sujetos a evaluaciones críticas.

2.1.2. Intervalos Bootstrap para cuantiles de distribuciones en general

Respecto a intervalos Bootstrap para cuantiles de distribuciones en general, en 1989, Hall y Martin argumentaron que los intervalos de confianza Bootstrap convencionales para el cuantil Q_p con $p \in (0, 1)$, tales como los Bootstrap percentil, los BC_a y los intervalos construidos por iteración Bootstrap del intervalo percentil, mencionados en la Sección 1.2.2, tienen notablemente coberturas muy pobres, pues con una muestra de tamaño n el orden de error de cobertura de estos intervalos es al menos $O(n^{-1/2})$. Señalaron también que los intervalos Bootstrap studentizados son apenas una alternativa eficaz debido a que no se dispone de una estimación adecuada para la varianza del cuantil muestral.

Por otro lado, Falk y Kaufmann en 1991 dieron una nueva prueba de que el intervalo Bootstrap percentil para cuantiles tiene error de cobertura del orden $O(n^{-1/2})$ y no $O(n^{-1})$ como para características clásicas de una distribución, por ejemplo la media o la varianza. Posteriormente, en 1992 Falk y Janas obtuvieron el mismo error de cobertura, $O(n^{-1/2})$, para los intervalos Bootstrap percentil suavizados para cuantiles, que son una modificación de los intervalos Bootstrap percentil.

De Angelis, Hall y Young en 1993 mejoraron este error de cobertura con una clase especial

de los intervalos de confianza Bootstrap percentil suavizados, pero el orden de error de cobertura de estos intervalos no fue menor que $O(n^{-1})$. También mostraron que generalmente, el orden de error de cobertura de intervalos basados directamente en los estadísticos de orden de la muestra es $O(n^{-1/2})$.

Respecto a modificaciones de los intervalos Bootstrap Studentizados, descritos en la Sección 1.2.2, en 1991 Hall y Martin mostraron que intervalos de confianza basados en una aproximación normal del cuantil muestral “estudentizado” con una estimación Bootstrap de la varianza produce un error de cobertura del orden $O(n^{-1/2})$. Falk y Janas en 1992 mostraron que un resultado similar es cierto si la varianza en la “estudentización” se basa en una estimación kernel de la densidad de los datos.

Sin embargo, recientemente han aparecido nuevos intervalos de confianza Bootstrap para cuantiles de distribuciones cualesquiera. En el año 2005, Ho y Lee propusieron a los *intervalos de confianza Bootstrap suavizados iterados* para cuantiles. Se tienen dos tipos de estos intervalos, uno basado en la iteración Bootstrap del intervalo percentil suavizado y el otro en la del intervalo Studentizado suavizado. Los órdenes de error de cobertura para estos dos tipos de intervalos fueron $O(n^{-2/3})$ y $O(n^{-58/56})$ respectivamente. Esto significó el mejor resultado con respecto a intervalos de confianza Bootstrap para cuantiles obtenido y propuesto en la literatura hasta ese momento.

Posteriormente, en este mismo año (2005) Ho y Lee propusieron nuevos intervalos de estimación no paramétricos para cuantiles llamados *intervalos de confianza interpolados calibrados*. Se tienen tres tipos de estos intervalos. Uno de ellos basa su construcción en la metodología Bootstrap y su error de cobertura es posible hacerlo del orden $O(n^{-25/14})$. Para los otros dos tipos de estos intervalos los errores de cobertura fueron del orden $O(n^{-3/2})$.

Es decir, los intervalos interpolados calibrados que basan su construcción en el Bootstrap, son los que tienen el menor orden de error de cobertura entre todos los intervalos mencionados anteriormente, por lo que serán los intervalos de interés en esta tesis, en la que se quiso explorar a través de simulaciones sus coberturas para compararlos con intervalos de estimación paramétricos para cuantiles de distribuciones de máximos.

Para construir los intervalos interpolados calibrados se requiere otra clase de intervalos de estimación no paramétricos para cuantiles, los cuales se describen en la siguiente sección.

2.2. Intervalo interpolado lineal simple para cuantiles

Supóngase que se tiene una muestra $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de las v.a.i.i.d. X_1, \dots, X_n que siguen una distribución F continua y desconocida con densidad f . Sean $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ las estadísticas de orden de estas variables aleatorias. Supóngase además que es de interés obtener un intervalo de confianza no paramétrico de nivel α para el cuantil de probabilidad acumulada p de F , $Q_p = F^{-1}(p)$.

Una clase de intervalos de confianza no paramétricos para Q_p basados en los estadísticos de orden de la muestra se deriva como sigue. Sea B igual al número de v.a. X_i que son menores o iguales a Q_p ,

$$B = \#\{X_i \leq Q_p : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Como F es continua, para $i = 1, 2, \dots, n$ la probabilidad del evento $\{X_i \leq Q_p\}$ es exactamente p , por lo tanto B tiene distribución binomial $B(n, p)$. Sea $B_r = P(B \leq r)$.

Nótese que si $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene que

$$P[Q_p \in (-\infty, X_{(k)})] = P[\#\{X_i \leq Q_p : i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \leq k - 1] = P(B \leq k - 1) = B_{k-1}. \quad (2.1)$$

Por lo tanto, el intervalo $(-\infty, X_{(k)})$ es un intervalo de confianza acotado superiormente no paramétrico para Q_p de nivel

$$B_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} P(B = j) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

para $k = 1, 2, \dots, n$. De esta manera, si $0 < \alpha < 1$, un intervalo de confianza acotado superiormente aproximado de nivel α para Q_p es $(-\infty, X_{(k)})$, donde k es un entero positivo menor o igual a n que minimiza $|B_{k-1} - \alpha|$.

Por otro lado, (2.1) implica que los intervalos $(X_{(r)}, X_{(s)})$ tienen probabilidad de cubrir a Q_p igual a $P(r \leq B \leq s - 1) = B_{s-1} - B_{r-1}$. De esta forma si $0 < \alpha < 1$, un intervalo de confianza aproximado para Q_p de nivel α es $(X_{(r)}, X_{(s)})$, donde r y s minimizan $|B_{s-1} - B_{r-1} - \alpha|$. De Angelis, et al. (1993) mostraron que el error de cobertura de este intervalo bajo ciertas suposiciones adicionales en F es de orden $O(n^{-1/2})$.

2.2.1. Intervalo I_{BH} para cuantiles

Para mejorar el error de cobertura de los intervalos basados en las estadísticas de orden Beran y Hall (1993) propusieron el *intervalo de confianza interpolado lineal simple* acotado superiormente de nivel α para el cuantil Q_p , denotado como $I_{BH}(\alpha)$ y cuya construcción es la siguiente.

Elegir $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que $B_{r-1} < \alpha \leq B_r$. Si $0 < r < n$, sea

$$C(\alpha) = (1 - \pi_\alpha)X_{(r)} + \pi_\alpha X_{(r+1)}, \quad \text{donde} \quad \pi_\alpha = \frac{\alpha - B_{r-1}}{B_r - B_{r-1}}. \quad (2.2)$$

Para los casos $r = 0$ y $r = n$ tomar

$$C(\alpha) = X_{(1)} - A \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{B_0 - \alpha}{B_0}\right) \quad \text{y} \quad C(\alpha) = X_{(n)} + A \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha - B_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}\right) \quad (2.3)$$

respectivamente, para alguna constante $A > 0$. Defínase

$$I_{BH}(\alpha) = (-\infty, C(\alpha)). \quad (2.4)$$

Entre los resultados de Beran y Hall (1993) se encuentra que bajo ciertas condiciones de regularidad en F los intervalos I_{BH} tienen error de cobertura $O(n^{-1})$, mejorando el error de cobertura ($O(n^{-1/2})$) de los intervalos de confianza aproximados basados en las estadísticas de orden, mencionados anteriormente. También demostraron que considerar cualquier orden de interpolación más alto, es decir considerar combinaciones lineales de más de dos términos, no mejora el error de cobertura de estos intervalos.

2.2.2. Idea en la construcción del intervalo I_{BH}

La idea en la construcción del intervalo I_{BH} desde el punto de vista de la autora de esta tesis es la siguiente. Si $0 < r < n$, como los intervalos $(-\infty, X_{(r)})$ y $(-\infty, X_{(r+1)})$ tienen probabilidad B_{r-1} y B_r respectivamente de contener al cuantil Q_p y además $B_{r-1} < \alpha \leq B_r$, se esperaría que eligiendo una combinación lineal adecuada (una interpolación) de $X_{(r)}$ y $X_{(r+1)}$, por decir $C(\alpha)$, la probabilidad de cubrir a Q_p con el intervalo $I_{BH} = (-\infty, C(\alpha))$ sea igual a α o más cercana a α que con los intervalos $(-\infty, X_{(r)})$ y $(-\infty, X_{(r+1)})$. La pregunta es ¿qué combinación lineal tomar para lograr esto?, si α es más cercana a B_i que a B_j se sospecharía que $C(\alpha)$ debe parecerse más a $X_{(i+1)}$

que a $X_{(j+1)}$ para lograr que el intervalo $I_{BH} = (-\infty, C(\alpha))$ contenga a Q_p con una probabilidad muy cercana a α ; por lo tanto intuitivamente se debe dar más peso en la combinación lineal a $X_{(i+1)}$ que a $X_{(j+1)}$. Esto se puede hacer tomando

$$\pi_\alpha = \frac{\alpha - B_{r-1}}{B_r - B_{r-1}} \quad \text{y} \quad C(\alpha) = (1 - \pi_\alpha)X_{(r)} + \pi_\alpha X_{(r+1)}.$$

Si $r = 0$, como B_0 es la probabilidad de que $(-\infty, X_{(1)})$ contenga a Q_p y $\alpha \leq B_0$, se necesita que $C(\alpha) \leq X_{(1)}$ para que la probabilidad de cubrir a Q_p con el intervalo $I_{BH} = (-\infty, C(\alpha))$ sea igual a α o más cercana a α que con el intervalo $(-\infty, X_{(1)})$. Análogamente, si $r = n$, entonces $B_{n-1} < \alpha$, es decir, la probabilidad de que $(-\infty, X_{(n)})$ contenga a Q_p es menor a α , por lo que se necesita que $X_{(n)} < C(\alpha)$ para que la probabilidad de cubrir a Q_p con el intervalo $I_{BH} = (-\infty, C(\alpha))$ sea igual a α o más cercana a α que con el intervalo $(-\infty, X_{(n)})$.

Por lo tanto, para obtener $C(\alpha)$ en los casos $r = 0$ y $r = n$ se tiene que hacer una extrapolación. Debido a que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \infty,$$

para tener $C(\alpha) \leq X_{(1)}$ en el caso $r = 0$ y $X_{(n)} < C(\alpha)$ en el caso $r = n$, se toma

$$C(\alpha) = X_{(1)} - A \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{B_0 - \alpha}{B_0}\right) \quad \text{y} \quad C(\alpha) = X_{(n)} + A \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha - B_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}\right)$$

respectivamente, con $A > 0$. Obsérvese que la lejanía de $C(\alpha)$ a $X_{(1)}$ en el caso $r = 0$ y la lejanía de $C(\alpha)$ a $X_{(n)}$ en el caso $r = n$, depende de la lejanía de α a B_0 y de la lejanía de α a B_n respectivamente. Ho y Lee (2005) mencionaron que los casos $r = 0$ y $r = n$ se observan cuando p y α son ambos cercanos a 0 o 1.

Obsérvese que $C(\cdot)$ es una función a trozos con dominio el intervalo $(0, 1)$ y contradominio en los números reales. Un resultado importante que será utilizado más adelante para justificar la construcción de los intervalos interpolados calibrados propuestos por Ho y Lee (2005), es que esta función es estrictamente creciente y continua en el intervalo $(0, 1)$, lo cual constituye el Resultado 1 que se demuestra en el Apéndice A.

2.3. Intervalos interpolados calibrados para cuantiles

Si $I(\alpha)$ denota un intervalo de confianza de nivel α para la característica $\sigma(F)$ de la distribución F obtenido por algún procedimiento específico, al proceso de encontrar un valor $\beta \in (0, 1)$ tal que $P(\sigma(F) \in I(\beta))$ sea más cercana a α que $P(\sigma(F) \in I(\alpha))$ se le llama *calibración de las coberturas de los intervalos I* .

Ho y Lee (2005) probaron la siguiente expansión, bajo ciertas condiciones de regularidad en F , la cual es una extensión de los resultados de Beran y Hall (1993):

$$P(Q_p \in I_{BH}(\alpha)) = \alpha + n^{-1}p_1(\alpha; p) + n^{-3/2}p_2[\alpha; p, f(Q_p), f'(Q_p)] + O(n^{-2}), \quad (2.5)$$

donde $p_j(\alpha, \dots)$ son Lipschitz continuas en α y suaves en los otros argumentos. En particular,

$$p_1(\alpha; p) = \{p(1-p)\}^{-1}\pi_\alpha(1-\pi_\alpha)u_\alpha\phi(u_\alpha),$$

donde ϕ denota la densidad de la distribución $N(0, 1)$ y u_α su cuantil de probabilidad acumulada α .

Esta expansión les hizo concebir la idea de calibrar las coberturas de los intervalos I_{BH} dados por (2.4), para obtener intervalos de confianza aproximados de nivel α para el cuantil Q_p y error de cobertura de orden menor a $O(n^{-1})$. Ellos visualizaron tres métodos para la calibración de las coberturas de los intervalos I_{BH} a los cuales llamaron el *analítico*, el *Monte Carlo* y el *Bootstrap*, resultando los intervalos $I_{AN}(\alpha)$, $I_{MC}(\alpha)$ y $I_{BT}(\alpha)$ respectivamente. A estos intervalos los llamaron *intervalos de confianza interpolados calibrados* de nivel α para el cuantil Q_p .

En las siguientes tres subsecciones se describirá la construcción de cada uno de estos intervalos. Primero se presentarán los intervalos interpolados calibrados por Bootstrap I_{BT} , que son los intervalos Bootstrap de interés en esta tesis. Para estos intervalos se justificará desde el punto de vista de la autora de esta tesis la forma en que se elige el valor de β al calibrar las coberturas de los intervalos I_{BH} . Posteriormente se presentarán los intervalos interpolados calibrados por el método Monte Carlo I_{MC} , el cual se construye de manera similar a los intervalos I_{BT} . Finalmente se describirán los intervalos interpolados calibrados por el método analítico I_{AN} , cuya construcción es la más sencilla. Cabe señalar que los intervalos I_{MC} y los intervalos I_{AN} no se usarán en esta tesis pero se presentan para complementar los resultados de Ho y Lee (2005).

2.3.1. Método de calibración Bootstrap, $I_{BT}(\alpha)$

Al calibrar las coberturas de los I_{BH} , lo ideal sería encontrar $\beta = \beta(F)$ tal que $P(Q_p \in I_{BH}(\beta(F))) = \alpha$. Viendo a β como un funcional del conjunto de distribuciones a los números reales, una estimación Bootstrap de $\beta = \beta(F)$ es $\hat{\beta} = \beta(\hat{F}_n)$, donde \hat{F}_n es una estimación kernel de F , es decir $\hat{F}_n(t) = \hat{F}_{n,h}(t)$ donde $\hat{F}_{n,h}(t)$ es la distribución con densidad

$$\hat{f}_{n,h}(t) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - x_i}{h}\right),$$

donde $h > 0$ y K es una función kernel (no negativa y simétrica alrededor de cero).

Para obtener el intervalo $I_{BT}(\alpha)$ se procede como sigue:

1. Se generan M muestras de \hat{F}_n , cada una de tamaño n ,

$$\begin{aligned} Y^1 &= \{Y_1^1, Y_2^1, \dots, Y_n^1\}, \\ Y^2 &= \{Y_1^2, Y_2^2, \dots, Y_n^2\}, \\ &\vdots \\ Y^M &= \{Y_1^M, Y_2^M, \dots, Y_n^M\}, \end{aligned}$$

y se denota por $Y_{(1)}^i \leq \dots \leq Y_{(n)}^i$ a las estadísticas de orden de la i -ésima muestra con $i = 1, 2, \dots, M$.

2. Sea $\hat{Q}_p = \hat{F}_n^{-1}(p)$ el cuantil de probabilidad acumulada p de \hat{F}_n . Para cada i , se elige \hat{r} tal que $Y_{(\hat{r})}^i < \hat{Q}_p \leq Y_{(\hat{r}+1)}^i$. Defínase

$$\beta_i = (1 - \hat{\pi})B_{\hat{r}-1} + \hat{\pi}B_{\hat{r}}, \quad \text{con } \hat{\pi} = (\hat{Q}_p - Y_{(\hat{r})}^i) / (Y_{(\hat{r}+1)}^i - Y_{(\hat{r})}^i). \quad (2.6)$$

Definir

$$\beta_i = \begin{cases} B_0 - (2/\pi)B_0 \tan^{-1}[(Y_{(1)}^i - \hat{Q}_p)/A], & \text{si } \hat{Q}_p \leq Y_{(1)}^i; \\ B_{n-1} + (2/\pi)(B_n - B_{n-1}) \tan^{-1}[(\hat{Q}_p - Y_{(n)}^i)/A], & \text{si } \hat{Q}_p > Y_{(n)}^i. \end{cases} \quad (2.7)$$

3. Ordenar las β_i como $\beta_{(1)} \leq \dots \leq \beta_{(M)}$ y tomar $\hat{\beta} = \beta_{(\ell)}$, donde ℓ es la parte entera de $M\alpha$, $\ell = \lfloor M\alpha \rfloor$. Definir $I_{BT}(\alpha) = I_{BH}(\hat{\beta})$, donde I_{BH} es calculado como se describió en (2.4).

Idea en la construcción del intervalo I_{BT}

La justificación de que se tome $\widehat{\beta} = \beta_{(\ell)}$, desde un punto de vista de la autora de esta tesis, es la siguiente. Para cada muestra $Y^i = \{Y_1^i, \dots, Y_n^i\}$ con $i = 1, 2, \dots, M$, sea $I_{BH}^i(\beta_j) = (-\infty, C^i(\beta_j))$ donde $j \in \{1, 2, \dots, M\}$, el intervalo de confianza lineal simple de nivel β_j para el cuantil $\widehat{Q}_p = \widehat{F}_n^{-1}(p)$ calculado con esta muestra.

Para $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ sea $\widehat{Cob}(\beta_j)$ la cobertura empírica de los intervalos $I_{BH}(\beta_j)$ para \widehat{Q}_p considerando las M muestras Y^1, Y^2, \dots, Y^M , es decir,

$$\widehat{Cob}(\beta_j) = \frac{\#\{i : \widehat{Q}_p \in I_{BH}^i(\beta_j)\}}{M}.$$

Nótese que puede considerarse $\beta_{(1)} < \beta_{(2)} < \dots < \beta_{(M)}$, pues la distribución \widehat{F}_n es continua y por lo tanto $\beta_r \neq \beta_s$ para $r \neq s$ casi seguramente. Para $i = 1, 2, \dots, M$, $C^i(\cdot)$ es una función estrictamente creciente y continua como se dijo al final de la Sección 2.2.2, además el Resultado 2 demostrado en el Apéndice A establece que $C^i(\beta_i) = \widehat{Q}_p$. Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

- Si $\beta_i < \beta_j$, entonces

$$\widehat{Q}_p = C^i(\beta_i) < C^i(\beta_j)$$

$$\text{y } \widehat{Q}_p \in I_{BH}^i(\beta_j) = (-\infty, C^i(\beta_j)).$$

- Si $\beta_j \leq \beta_i$, entonces

$$C^i(\beta_j) \leq C^i(\beta_i) = \widehat{Q}_p$$

$$\text{y } \widehat{Q}_p \notin I_{BH}^i(\beta_j) = (-\infty, C^i(\beta_j)).$$

Es decir, $\widehat{Q}_p \in I_{BH}^i(\beta_j)$ si y sólo si $\beta_i < \beta_j$.

De aquí, como el número de β_i 's que son menores que $\beta_{(j)}$ es $j - 1$, se tiene que

$$\widehat{Cob}(\beta_{(j)}) = \frac{\#\{i : \widehat{Q}_p \in I_{BH}^i(\beta_{(j)})\}}{M} = \frac{j - 1}{M}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, M.$$

Finalmente, si $\ell = \lfloor \alpha M \rfloor$ se tiene que

$$\widehat{Cob}(\beta_{(\ell)}) = \frac{\ell - 1}{M} = \frac{\lfloor \alpha M \rfloor}{M} - \frac{1}{M} \rightarrow \alpha, \quad \text{cuando } M \rightarrow \infty.$$

Por lo anterior, se esperaría que tomando M muy grande la cobertura del intervalo $I_{BH}(\beta_{(\ell)})$ para \widehat{Q}_p sea cercana a α y por eso conviene tomar a $\widehat{\beta} = \beta(\widehat{F}_n)$ como $\beta_{(\ell)}$.

2.3.2. Método de calibración Monte Carlo, $I_{MC}(\alpha)$

Este método es análogo al método de calibración Bootstrap descrito anteriormente, la diferencia es que en lugar de estimar $\beta = \beta(F)$ con $\beta(\widehat{F}_n)$, donde \widehat{F}_n es una estimación kernel de F , se estima con $\widehat{\beta} = \beta(G)$ para una distribución G completamente especificada. Aquí, $\widehat{\beta}$ se calcula de la misma manera que con el método de calibración Bootstrap, pero tomando G en lugar de \widehat{F}_n . Se define $I_{MC}(\alpha) = I_{BH}(\widehat{\beta})$.

Este método es adecuado dependiendo de la proximidad de F y G . En la práctica se recomienda aprovechar los conocimientos acerca de F al elegir G para obtener mejores resultados.

2.3.3. Método de calibración analítico, $I_{AN}(\alpha)$

Este método consiste simplemente en tomar $\beta = \alpha - n^{-1}p_1(\alpha; p)$ y definir $I_{AN}(\alpha) = I_{BH}(\beta)$.

Observese que con este valor de β , se elimina el término que contiene a n^{-1} en la expansión (2.5); por lo tanto el error de cobertura del intervalo $I_{BH}(\beta)$ es $O(n^{-3/2})$ y no $O(n^{-1})$.

2.4. Algunos resultados de los intervalos I_{BT} , I_{MC} e I_{AN}

Los siguientes resultados del trabajo de Ho y Lee (2005) son la base de la investigación hecha en el Capítulo 3. El siguiente teorema propuesto por Ho y Lee (2005) establece propiedades asintóticas de las coberturas de los intervalos I_{BT} , I_{MC} e I_{AN} .

Teorema 2.1 *Sea $\alpha \in (0, 1)$. Asíumase que F y G son dos veces diferenciables en alguna vecindad de $F^{-1}(p)$ y $G^{-1}(p)$ respectivamente, y que $F'(F^{-1}(p)), G'(G^{-1}(p)) > 0$. Supóngase también que K es no negativa, simétrica alrededor del cero y $h \propto n^{-\Delta}$ para algún $\Delta \in (0, 1)$. Entonces $I_{AN}(\alpha)$, $I_{MC}(\alpha)$ y $I_{BT}(\alpha)$ tienen orden de error de cobertura $O(n^{-3/2})$, $O(n^{-3/2})$ y $O(n^{-3/2}h^2 + n^{-2}h^{-3/2})$ respectivamente.*

Se observa que para el método Bootstrap si se toma como ancho de banda $h \propto n^{-1/7}$, es decir, $h = cn^{-1/7}$ con c positivo, se obtiene el orden de error de cobertura más pequeño:

$$O(n^{-3/2}(cn^{-1/7})^2 + n^{-2}(cn^{-1/7})^{-3/2}) = O(n^{-2/7}n^{-3/2} + n^{-2}n^{3/14}) = O(n^{-25/14} + n^{-25/14}) = O(n^{-25/14}).$$

Por lo tanto, estos intervalos mejoran el orden de error de cobertura de los intervalos I_{BH} , siendo los intervalos calibrados mediante Bootstrap los que alcanzan un menor orden cuando se elige $h \propto n^{-1/7}$.

Ho y Lee (2005) comentan que para la construcción de un intervalo de confianza acotado en ambos lados de nivel α para el cuantil Q_p , simplemente hay que tomar como sus límites las cotas superiores de los intervalos interpolados calibrados descritos anteriormente de niveles $(1 - \alpha)/2$ y $(1 + \alpha)/2$. El Teorema 2.1 sigue siendo cierto para estos intervalos acotados en ambos lados.

Mediante simulaciones, Ho y Lee (2005) comprobaron la mejora en las coberturas de los intervalos I_{BT} , I_{MC} e I_{AN} con respecto a las coberturas de los intervalos I_{BH} , con nivel de confianza $\alpha = 0.01, 0.02, \dots, 0.1, 0.91, 0.92, \dots, 0.99$, para los cuantiles $Q_{0.10}$, $Q_{0.25}$, $Q_{0.50}$, $Q_{0.75}$ y $Q_{0.90}$ de las distribuciones normal estandar y la exponencial con razón 1. Todas las coberturas fueron estimadas tomando el promedio sobre 5,000 muestras simuladas de tamaño $n = 10$ y $n = 20$.

En su estudio de simulación tomaron G como la normal estandar, $M = 1,000,000$, $A = 0.1$, la función kernel triangular $K(x) = (1 - |x|)\mathbf{1}_{(-1,1)}(x)$ y el ancho de banda h se tomó como Ho y Lee (2005) propusieron para obtener resultados satisfactorios:

$$h = 2.36052\gamma n^{-1/7}, \text{ con } \gamma = \min\{\text{std}(X), \lambda\}/1.34, \quad (2.8)$$

donde λ es el intercuartil de la muestra, es decir, $\lambda = x_{(\lfloor n*0.75 \rfloor)} - x_{(\lfloor n*0.25 \rfloor)}$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ es la función parte entera).

Observaron que los mejores resultados se obtienen con los intervalos calibrados mediante el método Monte Carlo y Bootstrap. Mencionan que el error de cobertura de los intervalos depende fuertemente en M pero se estabiliza cuando M se toma mayor o igual a 100,000.

2.5. Resumen

Entre lo más importante visto en este capítulo, se tiene que los intervalos Bootstrap clásicos encontrados en la literatura no producen buenos resultados en cuanto a coberturas cuando la característica de interés de la distribución es un cuantil. En Teoría de Valores Extremos se ha explorado la forma en que se comportan estos intervalos para cuantiles de distribuciones de máximos

y los resultados no han sido satisfactorios.

Sin embargo, en este capítulo se presentó una nueva clase de intervalos Bootstrap propuestos por Ho y Lee (2005) llamados *intervalos interpolados calibrados* para cuantiles de distribuciones en general, los cuales son los que han reportado tener los mejores resultados en cuanto a coberturas y serán los intervalos de principal interés en esta tesis, en la que se compararán estos intervalos para cuantiles de distribuciones asintóticas de máximos con los intervalos que se utilizan en la práctica basados en la propiedad de sintoticidad normal de los EMV o en la verosimilitud perfil de los cuantiles.

Capítulo 3

Simulaciones

En este capítulo se presentan las simulaciones llevadas a cabo con el fin de comparar las coberturas empíricas de varios tipos de intervalos de confianza para cuantiles de distribuciones de máximos discutidos anteriormente.

El objetivo principal es explorar el comportamiento de los intervalos Bootstrap propuestos por Ho y Lee (2005), en especial se desea valorar las ventajas y desventajas de estos intervalos para hacer inferencias sobre cuantiles de distribuciones de máximos en el caso de muestras pequeñas, muestras moderadamente grandes y muestras grandes, por el hecho de ser no paramétricos.

3.1. Introducción

En Teoría de Valores Extremos muchas preguntas radican en torno a cuantiles grandes de las distribuciones de máximos como $Q_{0.95}$ y $Q_{0.99}$, como se mencionó en capítulos anteriores. Principalmente lo que interesa es encontrar un intervalo de estimación para estos cuantiles. Dicho intervalo podría ser de confianza aproximado, obtenido a través de métodos asintóticos, o de verosimilitud (con un nivel de confianza aproximado). También se puede utilizar la herramienta de Bootstrap para construir intervalos de estimación y es de interés evaluar el nivel de confianza que tienen.

Es necesario saber en qué situaciones resulta más eficiente una técnica de construcción de intervalos de estimación con respecto a las otras. Con este objetivo en mente se procedió a comparar, mediante simulaciones bajo varios escenarios, los diversos intervalos mencionados construidos para

cuantiles de distribuciones de máximos. Así, se consideraron los intervalos de verosimilitud perfil (IV perfil), los intervalos de confianza aproximados construidos con el método Delta basado en la asintoticidad normal de los EMV (I Delta) y los intervalos interpolados calibrados mediante Bootstrap acotados en ambos lados, de Ho y Lee (2005) presentados en la Sección 2.3.1. A estos últimos se les llamará únicamente intervalos Bootstrap (I Bootstrap).

Interesa comparar principalmente, la probabilidad de cobertura de cada tipo de intervalo, la cual se aproxima a través de sus coberturas empíricas. Es decir, se simulan 10,000 muestras; para cada una se construye un intervalo dado y se cuenta cuántos de estos intervalos incluyeron al verdadero valor del cuantil deseado. Esa proporción es la cobertura empírica y estima la probabilidad de cobertura del intervalo en cuestión. También es de interés contrastar las longitudes de los distintos tipos de intervalos para cada muestra simulada.

3.2. Planteamiento

Los escenarios de simulación que se consideraron se presentan a continuación. Se simularon 10,000 muestras de tamaño $n = 25, 50$ y 100 . Estas muestras fueron de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como una DVEG con parámetros $a = 1, b = 1$, y c en $\{-0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, -0.05, 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$. Este esquema de simulación trata de representar el caso hipotético en que se cuenta con una muestra de máximos independientes e idénticamente distribuidos, que provienen de una DVEG debido a que cada máximo pudo haber sido extraído de un bloque muy grande.

Los valores de n fueron elegidos así debido a que en la práctica los tamaños de muestras de máximos suelen ser de estas magnitudes. Se consideraron estos valores de a y b por simplicidad pero sin pérdida de generalidad. Los valores de c se tomaron de esta manera ya que en esta forma se explora qué es lo que ocurre cuando la DVEG corresponde a una función de distribución Weibull ($c < 0$), Gumbel ($c = 0$) o Fréchet ($c > 0$), y también para explorar lo que pasa al variar c .

Para cada muestra que se generó, se procedió a calcular un IV perfil suponiendo una DVEG y suponiendo un submodelo de esta distribución (Weibull, Gumbel o Fréchet), también se calculó un I Delta bajo la DVEG y bajo un submodelo, así como también un I Bootstrap, para el cuantil $Q_{0.95}$

y en algunas ocasiones también para el cuantil $Q_{0.99}$. La elección del submodelo se hizo dependiendo de si la estimación del parámetro c de la DVEG fue mayor a cero o menor a cero. En el primer caso se consideró al modelo Fréchet y en el segundo al modelo Weibull. Únicamente en los casos cuando el EMV de c estuvo en el intervalo $(-0.000001, 0.000001)$, es decir resultó prácticamente cero, se consideró al modelo Gumbel. Todos los intervalos considerados corresponden a un 95 % de confianza aproximado. Para ello, el nivel de verosimilitud se tomó como 0.1464 para los IV perfil.

En el cálculo de los I Bootstrap para cuantiles, se hizo lo siguiente: Se tomó $A = 0.1$. El kernel que se utilizó fue el triangular, $K(x) = (1 - |x|)\mathbf{1}_{(-1,1)}(x)$. Se tomó la propuesta de Ho y Lee (2005) para el ancho de banda h dada por (2.8). Se utilizó $M = 100,000$, debido a que Ho y Lee encontraron que a partir de este valor de M se estabiliza el error de cobertura de los I Bootstrap para cuantiles.

Cabe resaltar que como comentan Higham, D. y Higham, N. (2005, p. 46), en el programa utilizado para calcular los I Bootstrap (Matlab V.7) el periodo de números aleatorios uniformes $U(0, 1)$, esto es, el número de términos aleatorios uniformes generados antes de que la secuencia se empiece a repetir es $2^{1492} \approx 10^{449}$, por lo que las $M = 100,000$ muestras de tamaño $n = 25, 50$ o 100 generadas para calcular cada I Bootstrap son distintas y no se hicieron cálculos redundantes. Por otro lado, el tiempo de cálculo promedio de los intervalos para cada muestra simulada, fue de 6 seg. para los I Bootstrap y menor a 1 seg. para los IV perfil e I Delta.

3.3. Resultados de las simulaciones

En esta sección se presentarán las coberturas empíricas de los diferentes tipos de intervalos calculados para los cuantiles de interés, así como las razones de sus longitudes que son útiles para valorar cuales son los intervalos que suelen ser más angostos y por tanto dar mayor precisión en la estimación del parámetro de interés.

En los escenarios con tamaño de muestra $n = 100$ no se tuvieron problemas para calcular todos los intervalos de interés. En cambio, para los escenarios con $n = 25$ y $n = 50$ en algunas ocasiones se tuvieron problemas para calcular los IV perfil y los I Delta bajo una DVEG o bajo el submodelo Weibull. En las siguientes dos secciones se presenta una descripción de dichos problemas y la forma

en que se procedió ante ellos.

3.3.1. Inferencia bajo el modelo DVEG

Para calcular la función de verosimilitud de los parámetros (a, b, c) de la DVEG se utilizó la aproximación continua a la función de verosimilitud dada por (1.28). Recuérdese que cuando $c < 0$ la DVEG corresponde a una distribución Weibull con parámetros (μ, σ, β) (umbral, escala y forma respectivamente) dados por

$$\mu = a - b/c, \quad \sigma = -b/c, \quad \beta = -1/c,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $\beta > 0$.

En el caso en que $c < -1$, se tiene que $0 < \beta < 1$ y como se vió anteriormente, la densidad de esta distribución Weibull presenta una singularidad en $x = \mu$. Como la aproximación continua a la función de verosimilitud de la distribución Weibull no es válida en algunas ocasiones cuando $0 < \beta < 1$, entonces la aproximación continua a la función de verosimilitud de la DVEG dada por (1.28) hereda los mismos problemas cuando $c < -1$.

Es por eso que cuando el EMV del parámetro c de la DVEG fue menor que -1 , los EMV de los parámetros de esta distribución así como también las funciones de verosimilitud perfil de estos parámetros son cuestionables si se usó la aproximación continua a la verosimilitud y algún algoritmo numérico de búsqueda para hallarlos. Por lo tanto, los I Delta y los IV perfil bajo la DVEG para los cuantiles de interés, correspondientes a muestras para las cuales el EMV de c fue menor que -1 , también se consideraron cuestionables y se clasificaron como “nulos”.

Para evitar estos problemas se podría utilizar la función verosimilitud exacta (1.12) con la DVEG. Aquí no se hizo de esta manera debido a que en la práctica lo común es utilizar la aproximación continua a la función de verosimilitud con la DVEG y se quiso explorar las consecuencias de usar esta aproximación. Cabe señalar que el submodelo para muestras con EMV de c menor que -1 se tomó como la distribución Weibull, ya en estas muestras la plausibilidad de $c \geq 0$ era despreciable.

3.3.2. Inferencia bajo el modelo Weibull

La función de verosimilitud para los parámetros de la distribución Weibull se calculó utilizando la aproximación continua truncada dada por (1.31) y fijando $\epsilon > 0$ a un valor pequeño que representa la supuesta precisión del instrumento de medición.

Recuérdese que la aproximación continua a la función de verosimilitud Weibull tiende a infinito en $\mu = x_{(n)}$ cuando $0 < \beta < 1$, donde $x_{(n)}$ es el máximo de la muestra. El propósito de la aproximación continua truncada es modificar la aproximación continua para lograr que la verosimilitud no se evalúe en valores sumamente cercanos a $x_{(n)}$. La idea es localizar al EMV en el máximo local que suele presentar la superficie de verosimilitud en vez del máximo global que se alcanza en la singularidad.

Para algunas muestras sucedió que los valores de los parámetros donde se alcanzó el máximo de la aproximación continua truncada cumplieron que $\mu = x_{(n)} + \epsilon$ y $\beta \approx 1$. Esto quiere decir que estos valores de los parámetros son cercanos a un punto donde se presenta una singularidad en la aproximación continua y por tanto no son precisamente los valores de los parámetros donde se alcanza el máximo local buscado. En estos casos se vió que al contemplar la verosimilitud exacta siempre se llegó a EMV's razonables y tales que el modelo ajustó bien a los datos como con la muestra que se presentará a continuación.

Análisis de una muestra particular

Una muestra de tamaño $n = 25$ simulada de una DVEG con parámetros $(a, b, c) = (1, 1, -0.5)$, equivalente a una Weibull de parámetros $(\mu, \sigma, \beta) = (3, 2, 2)$, para la cual se observó lo mencionado anteriormente es la siguiente:

-0.3554	-0.0404	0.2213	0.5173	0.7708
0.9115	1.0934	1.1762	1.2951	1.3499
1.4052	1.4415	1.5050	1.5103	1.5676
1.5996	1.6798	1.9282	1.9491	1.9729
2.1184	2.1241	2.2069	2.2298	2.2387

Los valores de los parámetros (μ, σ, β) de la distribución Weibull que maximizaron la aproximación continua truncada suponiendo como error de medición $\epsilon = 0.1$ fueron los siguientes:

$$\tilde{\mu} = 2.3387, \tilde{\sigma} = 1.0503, \tilde{\beta} = 1.3607.$$

Para esta muestra el máximo es $x_{(n)} = 2.2387$. Se observa que $\tilde{\mu}$ es el máximo de la muestra 2.2387 más el valor de $\epsilon = 0.1$; es decir $\tilde{\mu} = x_{(n)} + \epsilon$. Además $\tilde{\beta}$ es cercano a 1.

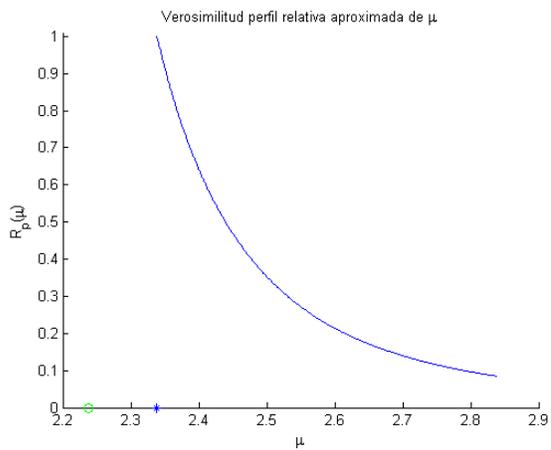
En la Figura 3.1 se presentan las gráficas de las funciones de verosimilitud perfil de cada parámetro al utilizar la aproximación continua truncada, así como también los contornos de la función de verosimilitud relativa con dicha aproximación, fijando el parámetro μ , σ y β en $\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\beta}$ respectivamente. El punto marcado con “*” se refiere a los valores de los parámetros donde se maximizó la aproximación continua truncada. En (a) el punto “o” indica el máximo de la muestra, $x_{(n)}$.

Nótese que la función de verosimilitud perfil aproximada de μ es una función decreciente. Esto no sucede con esta función correspondiente a los parámetros σ y β que tienen una forma acampanada. Estas tendencias también se aprecian en los contornos que aparecen en estas figuras, pues en el contorno con μ fijo puede verse que la función de verosimilitud relativa aproximada es como una campana, mientras que en los contornos con β y σ fijos se observa que cuando μ crece la función de verosimilitud aproximada decrece.

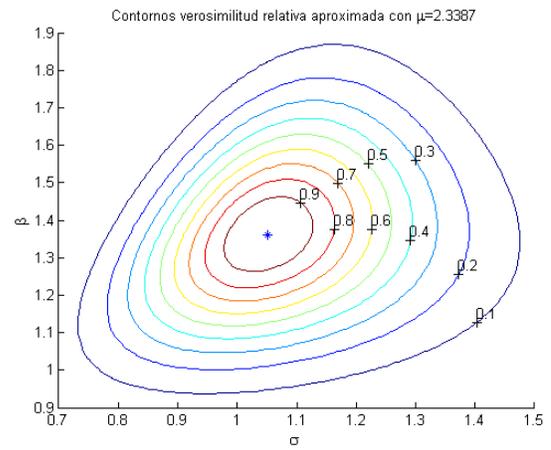
Estos comportamientos en las gráficas indican que no existe algún otro máximo local de la aproximación continua truncada que no sea el máximo global que se encuentra en el punto $(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}, \tilde{\beta})$. Cabe resaltar que tomando $0 < \epsilon < 0.1$ en la aproximación continua truncada, este comportamiento en las gráficas permanece. Por lo que con esta aproximación siempre se obtiene el máximo en $\mu = x_{(n)} + \epsilon$; algunas veces, además se tiene que $0 < \beta < 1$. En un caso como este, lo conveniente es utilizar la función de verosimilitud exacta (1.12) para calcular los EMV y para hacer inferencias acerca de los parámetros o cuantiles del modelo Weibull.

Uso de la función de verosimilitud exacta Weibull

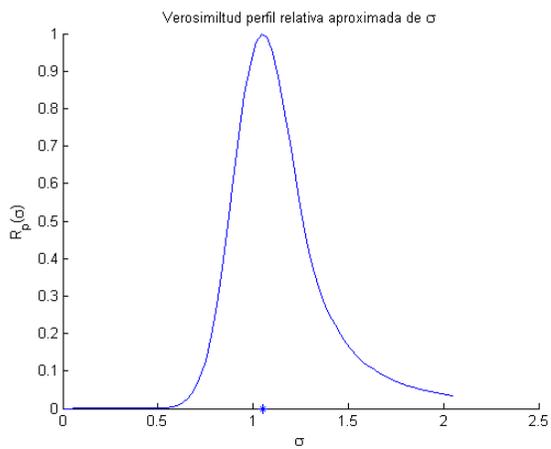
Suponiendo que $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un conjunto de observaciones independientes de una variable aleatoria con distribución Weibull, donde $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ son sus valores ordenados y $\epsilon > 0$ es la



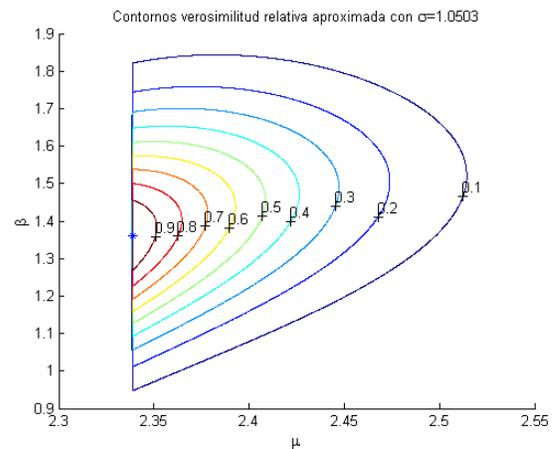
(a) Verosimilitud perfil aproximada de μ



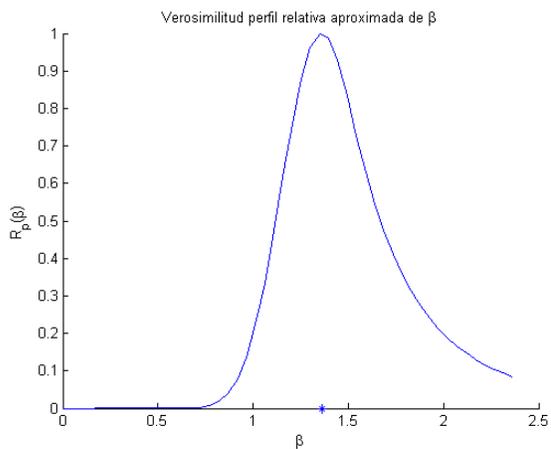
(b) Contornos con $\mu = \tilde{\mu}$



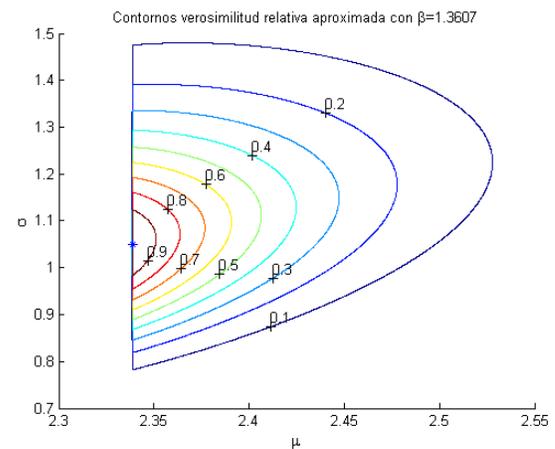
(c) Verosimilitud perfil aproximada de σ



(d) Contornos con $\sigma = \tilde{\sigma}$



(e) Verosimilitud perfil aproximada de β



(f) Contornos con $\beta = \tilde{\beta}$

Figura 3.1: Verosimilitud perfil relativa de cada parámetro y contornos de verosimilitud relativa fijando un parámetro, al utilizar la aproximación continua truncada a la verosimilitud Weibull

precisión del instrumento medición, la función de verosimilitud exacta (1.12) para la distribución Weibull es

$$L(\mu, \sigma, \beta) \propto \prod_{i=1}^n \left(\int_{x_i - \epsilon}^{x_i + \epsilon} \psi(t; \mu, \sigma, \beta) dt \right) I_{(x_{(n)} - \epsilon, \infty)}(\mu) I_{(0, \infty)}(\sigma) I_{(0, \infty)}(\beta), \quad (3.1)$$

donde $\psi(\cdot; \mu, \sigma, \beta)$ es la densidad de la distribución Weibull de parámetros (μ, σ, β) . En esta expresión para la función de verosimilitud exacta Weibull se debe pedir que $x_{(n)} - \epsilon < \mu$, pues μ es mayor que todas las observaciones de la muestra y en particular debe ser mayor al máximo de ellas que se encuentra en el intervalo $(x_{(n)} - \epsilon, x_{(n)} + \epsilon)$ debido a que la precisión del instrumento con el que se mide es ϵ .

Utilizando la función de verosimilitud exacta Weibull para la muestra considerada anteriormente y suponiendo $\epsilon = 0.1$, los EMV de los parámetros de la distribución Weibull fueron los siguientes:

$$\hat{\mu} = 2.3172, \quad \hat{\sigma} = 1.0149, \quad \hat{\beta} = 1.2974.$$

En ejemplos reales la cantidad ϵ la determina el equipo de medición de manera natural; aquí se supuso igual a $\epsilon = 0.1$ puesto que se simularon las muestras. Las gráficas de las perfiles de estos parámetros se presentan en la Figura 3.2. Se observa que la función de verosimilitud perfil exacta de cada parámetros es creciente antes del EMV del parámetro marcado con “*” y decrecientes después de este estimador. La gráfica cuantil-cuantil de la muestra con la distribución Weibull de parámetros $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\beta})$ y la comparación del histograma de la muestra con la densidad de esta distribución Weibull se presenta en la Figura 3.4. Se aprecia un buen ajuste de esta distribución Weibull a los datos, pues en la gráfica cuantil-cuantil los puntos están muy cercanos a la recta identidad; además se observa un parecido en la forma del histograma de la muestra con la forma de la densidad Weibull.

A modo de exploración, se presentan las gráficas de verosimilitud perfil relativa exacta para los cuantiles $Q_{0.95}$ y $Q_{0.99}$. En cada gráfica se encuentra marcado con “*” el verdadero valor del cuantil en cuestión y con un rectángulo (de altura 0.1464) los límites del IV perfil del 95% para dicho cuantil. En este caso los IV perfil bajo la distribución Weibull subestimaron el verdadero valor del cuantil, a pesar de que el modelo estimado ajustó bien a la muestra observada.

Debido a que la función de verosimilitud exacta resolvió el problema que se tenía con esta muestra; cada vez que se detectó una muestra para la cual los EMV (utilizando la aproximación continua

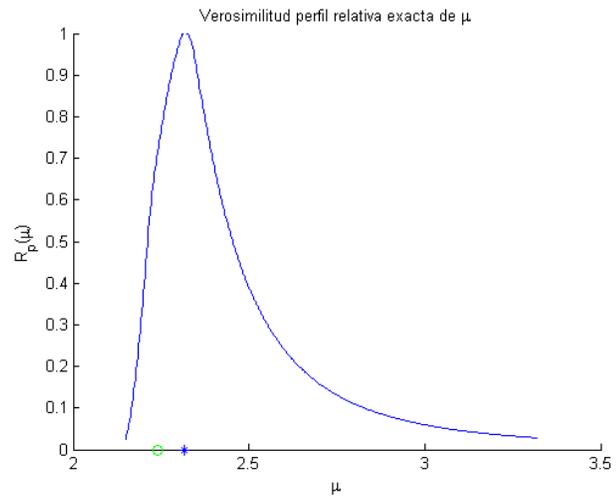
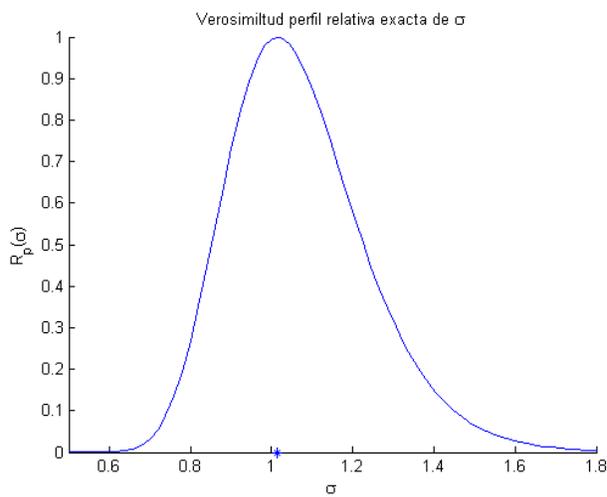
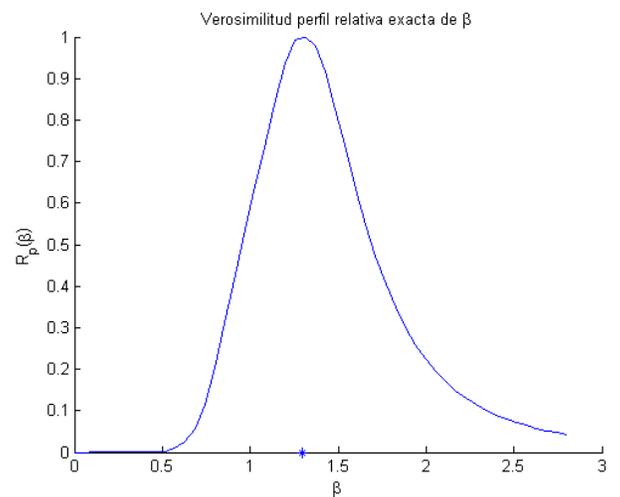
(a) Verosimilitud perfil exacta de μ (b) Verosimilitud perfil exacta de σ (c) Verosimilitud perfil exacta de β

Figura 3.2: Verosimilitud perfil relativa exacta de los parámetros de la Weibull

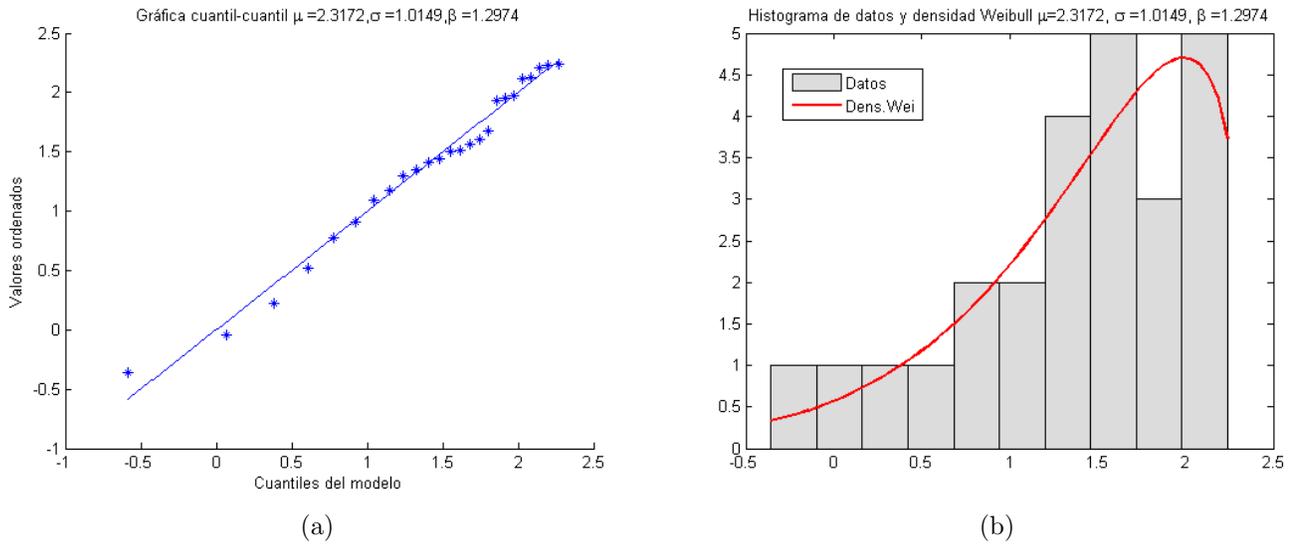


Figura 3.3: (a) Gráfica cuantil-cuantil con distribución Weibull. (b) Histograma de datos y densidad Weibull

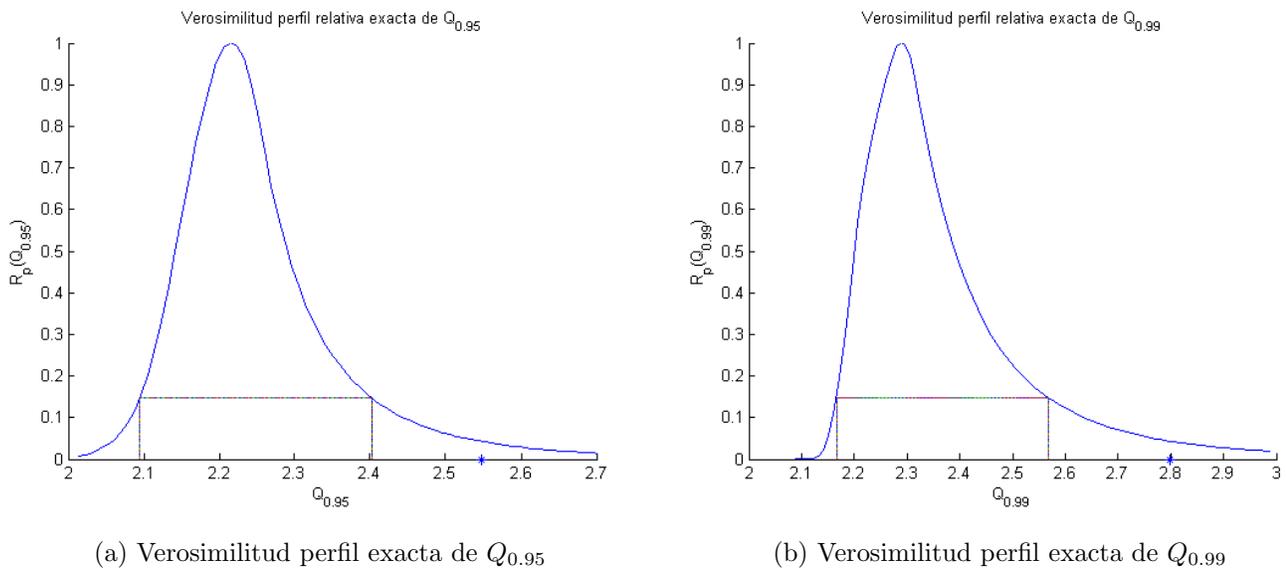


Figura 3.4: Verosimilitud perfil relativa exacta de los cuantiles

truncada) $\hat{\mu}$ y $\hat{\beta}$ de μ y β respectivamente, fueron tales que $\hat{\mu} = x_{(n)} + \epsilon$ y $\hat{\beta} \approx 1$, se calcularon los IV perfil y los I Delta para los cuantiles de interés utilizando la función de verosimilitud exacta.

3.3.3. Resultados para el cuantil $Q_{0.95}$

La Figura 3.5 contiene las tablas de las coberturas empíricas de los intervalos del supuesto 95 % de confianza para el cuantil $Q_{0.95}$ Bootstrap, intervalos de verosimilitud perfil (IV perfil) bajo la DVEG (columna DVEG, subcolumna Perfil) y bajo el submodelo (columna Submodelo, subcolumna Perfil), intervalos de confianza de máxima verosimilitud asintóticos con el método Delta (I Delta) bajo la DVEG (columna DVEG, subcolumna Delta) y bajo el submodelo (columna Submodelo, subcolumna Delta).

En estas tablas, la columna “Cob.” correspondiente a una clase de intervalos se refiere a su cobertura empírica para el cuantil de interés $Q_{0.95}$. La columna “<” y “>” indica la proporción de intervalos que subestimaron y sobreestimaron, respectivamente, al verdadero valor de este cuantil; es decir que cayeron completamente a la izquierda o a la derecha del verdadero valor de $Q_{0.95}$, respectivamente.

En la columna “DVEG” la subcolumna “Nulos” se refiere a la proporción de los IV perfil y la proporción de los I Delta, ambos bajo esta distribución, que no fueron correctos debido a los problemas explicados anteriormente en la Sección 3.3.1 que se presentaron cuando el EMV del parámetro c de la DVEG fue menor que -1 . Cabe resaltar que para los IV perfil y los I Delta la suma de las subcolumnas “Cob.”, “<”, “>” y la subcolumna “Nulos” es igual a 1.

En la Figura 3.6 se presentan de manera gráfica los resultados de las tablas mencionadas anteriormente. Se observan las coberturas empíricas con cada tamaño de muestra para el cuantil $Q_{0.95}$. En estas gráficas “Bootstrap”, “PerfilDVEG”, “PerfilSub”, “DeltaDVEG” y “DeltaSub”, se refieren a las coberturas empíricas de los I Bootstrap, IV perfil bajo la DVEG, IV perfil bajo el submodelo, I Delta bajo la DVEG e I Delta bajo el submodelo respectivamente.

En estos resultados se aprecian fundamentalmente tres cosas que cambian al variar los valores de n y c :

1. Las coberturas empíricas.

C	BOOTSTRAP			SUBMODELO						DVEG						
				Perfil			Delta			Perfil			Nulos	Delta		
	<	Cob.	>	<	Cob.	>	<	Cob.	>	<	Cob.	>		<	Cob.	>
-0.5	0.0163	0.9606	0.0231	0.0757	0.9107	0.0136	0.2165	0.7550	0.0285	0.0583	0.8787	0.0115	0.0515	0.1826	0.7469	0.0190
-0.4	0.0246	0.9523	0.0231	0.0639	0.9244	0.0117	0.2037	0.7834	0.0129	0.0550	0.9153	0.0109	0.0188	0.1886	0.7815	0.0111
-0.3	0.0404	0.9326	0.0270	0.0599	0.9287	0.0114	0.1839	0.8097	0.0064	0.0545	0.9264	0.0112	0.0079	0.1773	0.8089	0.0059
-0.2	0.0571	0.9174	0.0255	0.0556	0.9313	0.0131	0.1759	0.8209	0.0032	0.0526	0.9328	0.0129	0.0017	0.1744	0.8208	0.0031
-0.1	0.0748	0.8994	0.0258	0.0547	0.9315	0.0138	0.1658	0.8330	0.0012	0.0499	0.9356	0.0136	0.0009	0.1648	0.8331	0.0012
-0.05	0.0839	0.8914	0.0247	0.0595	0.9259	0.0146	0.1659	0.8334	0.0007	0.0485	0.9365	0.0145	0.0005	0.1656	0.8332	0.0007
0	0.0868	0.8882	0.0250	0.0586	0.9252	0.0162	0.1535	0.8457	0.0008	0.0398	0.9439	0.0158	0.0005	0.1528	0.8459	0.0008
0.05	0.0981	0.8744	0.0275	0.0714	0.9103	0.0183	0.1576	0.8421	0.0003	0.0430	0.9385	0.0182	0.0003	0.1571	0.8423	0.0003
0.1	0.1045	0.8663	0.0292	0.0734	0.9109	0.0157	0.1481	0.8518	0.0001	0.0382	0.9458	0.0157	0.0003	0.1478	0.8518	0.0001
0.2	0.1200	0.8539	0.0261	0.0819	0.9008	0.0173	0.1457	0.8543	0	0.0392	0.9435	0.0173	0	0.1457	0.8543	0
0.3	0.1304	0.8457	0.0239	0.0625	0.9195	0.0180	0.1434	0.8566	0	0.0338	0.9482	0.0180	0	0.1433	0.8567	0
0.4	0.1298	0.8435	0.0267	0.0398	0.9414	0.0188	0.1311	0.8689	0	0.0286	0.9526	0.0188	0	0.1311	0.8689	0
0.5	0.1524	0.8212	0.0264	0.0353	0.9434	0.0213	0.1385	0.8615	0	0.0307	0.9480	0.0213	0	0.1385	0.8615	0

(a) $n = 25$

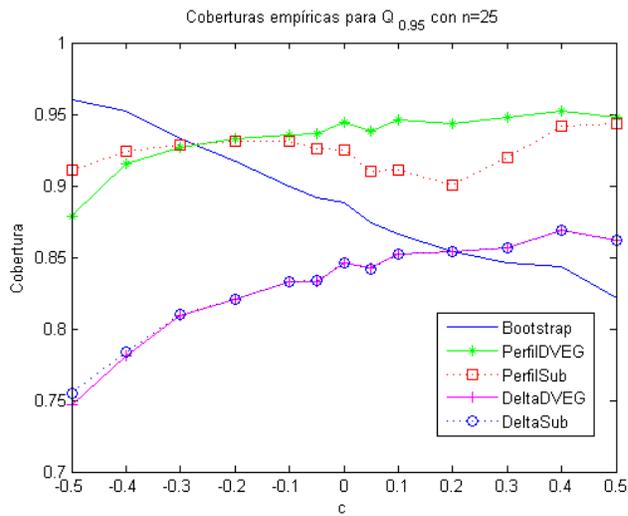
C	BOOTSTRAP			SUBMODELO						DVEG						
				Perfil			Delta			Perfil			Nulos	Delta		
	<	Cob.	>	<	Cob.	>	<	Cob.	>	<	Cob.	>		<	Cob.	>
-0.5	0.0170	0.9596	0.0234	0.0576	0.9288	0.0136	0.1382	0.8450	0.0168	0.0572	0.9287	0.0136	0.0005	0.1379	0.8448	0.0168
-0.4	0.0247	0.9510	0.0243	0.0552	0.9309	0.0139	0.1346	0.8547	0.0107	0.0551	0.9308	0.0139	0.0002	0.1343	0.8548	0.0107
-0.3	0.0291	0.9470	0.0239	0.0505	0.9345	0.0150	0.1271	0.8663	0.0066	0.0505	0.9345	0.0150	0	0.1271	0.8663	0.0066
-0.2	0.0328	0.9433	0.0239	0.0433	0.9435	0.0132	0.1195	0.8763	0.0042	0.0433	0.9435	0.0132	0	0.1195	0.8763	0.0042
-0.1	0.0356	0.9374	0.0270	0.0412	0.9432	0.0156	0.1105	0.8881	0.0014	0.0383	0.9466	0.0151	0	0.1105	0.8882	0.0013
-0.05	0.0418	0.9335	0.0247	0.0447	0.9379	0.0174	0.1111	0.8875	0.0014	0.0388	0.9449	0.0163	0	0.1112	0.8876	0.0012
0	0.0438	0.9327	0.0235	0.0503	0.9327	0.0170	0.1047	0.8945	0.0008	0.0351	0.9486	0.0163	0	0.1045	0.8947	0.0008
0.05	0.0431	0.9306	0.0263	0.0567	0.9243	0.0190	0.1067	0.8927	0.0006	0.0346	0.9466	0.0188	0	0.1063	0.8931	0.0006
0.1	0.0477	0.9252	0.0271	0.0640	0.9168	0.0192	0.1069	0.8929	0.0002	0.0359	0.9449	0.0192	0	0.1068	0.8930	0.0002
0.2	0.0440	0.9292	0.0268	0.0461	0.9333	0.0206	0.1001	0.8997	0.0002	0.0304	0.9491	0.0205	0	0.1001	0.8997	0.0002
0.3	0.0450	0.9291	0.0259	0.0333	0.9458	0.0209	0.0978	0.9022	0	0.0297	0.9494	0.0209	0	0.0977	0.9023	0
0.4	0.0500	0.9247	0.0253	0.0309	0.9492	0.0199	0.0985	0.9015	0	0.0307	0.9494	0.0199	0	0.0985	0.9015	0
0.5	0.0520	0.9206	0.0274	0.0283	0.9468	0.0249	0.0993	0.9007	0	0.0283	0.9468	0.0249	0	0.0993	0.9007	0

(b) $n = 50$

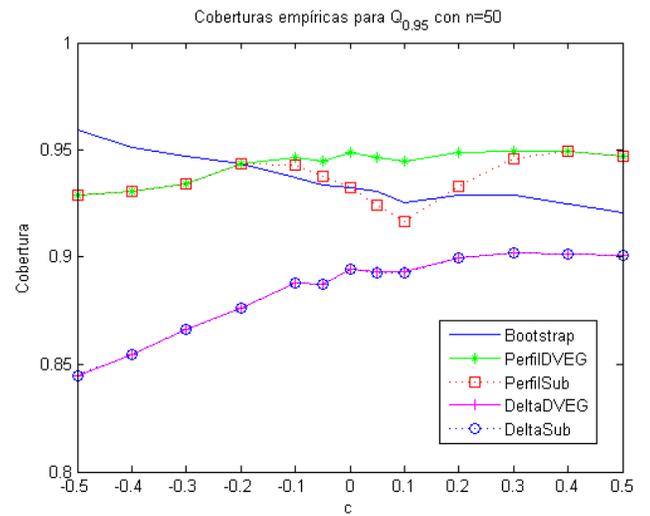
C	BOOTSTRAP			SUBMODELO						DVEG						
				Perfil			Delta			Perfil			Nulos	Delta		
	<	Cob.	>	<	Cob.	>	<	Cob.	>	<	Cob.	>		<	Cob.	>
-0.5	0.0292	0.9450	0.0258	0.0543	0.9314	0.0143	0.0984	0.8877	0.0139	0.0543	0.9314	0.0143	0	0.0984	0.8877	0.0139
-0.4	0.0248	0.9535	0.0217	0.0438	0.9408	0.0154	0.0884	0.9003	0.0113	0.0438	0.9408	0.0154	0	0.0884	0.9003	0.0113
-0.3	0.0267	0.9461	0.0272	0.0442	0.9374	0.0184	0.0888	0.9023	0.0089	0.0442	0.9374	0.0184	0	0.0887	0.9024	0.0089
-0.2	0.0260	0.9455	0.0285	0.0379	0.9449	0.0172	0.0872	0.9076	0.0052	0.0378	0.9450	0.0172	0	0.0872	0.9076	0.0052
-0.1	0.0254	0.9489	0.0257	0.0347	0.9457	0.0196	0.0844	0.9120	0.0036	0.0344	0.9469	0.0187	0	0.0842	0.9124	0.0034
-0.05	0.0263	0.9498	0.0239	0.0392	0.9423	0.0185	0.0805	0.9169	0.0026	0.0363	0.9464	0.0173	0	0.0805	0.9170	0.0025
0	0.0240	0.9518	0.0242	0.0394	0.9415	0.0191	0.0751	0.9221	0.0028	0.0325	0.9490	0.0185	0	0.0751	0.9221	0.0028
0.05	0.0236	0.9509	0.0255	0.0446	0.9358	0.0196	0.0735	0.9240	0.0025	0.0309	0.9501	0.0190	0	0.0731	0.9245	0.0024
0.1	0.0265	0.9489	0.0246	0.0496	0.9302	0.0202	0.0781	0.9195	0.0024	0.0321	0.9477	0.0202	0	0.0781	0.9195	0.0024
0.2	0.0218	0.9509	0.0273	0.0285	0.9495	0.0220	0.0727	0.9262	0.0011	0.0267	0.9513	0.0220	0	0.0727	0.9262	0.0011
0.3	0.0226	0.9501	0.0273	0.0280	0.9506	0.0214	0.0757	0.9232	0.0011	0.0280	0.9506	0.0214	0	0.0757	0.9232	0.0011
0.4	0.0247	0.9524	0.0229	0.0298	0.9477	0.0225	0.0782	0.9214	0.0004	0.0298	0.9477	0.0225	0	0.0782	0.9214	0.0004
0.5	0.0232	0.9536	0.0232	0.0296	0.9472	0.0232	0.0740	0.9260	0	0.0296	0.9472	0.0232	0	0.0740	0.9260	0

(c) $n = 100$

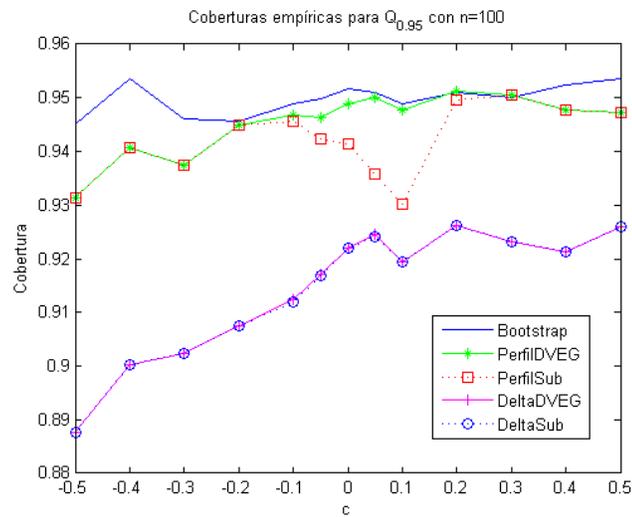
Figura 3.5: Coberturas empíricas para $Q_{0.95}$



(a) $n = 25$



(b) $n = 50$



(c) $n = 100$

Figura 3.6: Gráficas de coberturas empíricas para $Q_{0.95}$

2. La proporción de intervalos que subestiman y sobreestiman.
3. El número de intervalos nulos.

A continuación se describe lo que se observó con respecto a cada una de estas tres características.

Coberturas empíricas

Se observa que los I Delta bajo la DVEG y bajo el submodelo siempre tienen coberturas empíricas muy cercanas para todos los valores de n y c , las cuales están muy por debajo de las coberturas empíricas del resto de los intervalos de confianza, excepto para $n = 25$ donde para $c \geq 0.2$ las coberturas empíricas de estos intervalos son más grandes que las de los I Bootstrap. Esto constituye un fuerte argumento en contra de los intervalos Delta que son muy utilizados en la práctica hoy en día. La razón primordial por la que no dan buenos resultados es porque no toman en cuenta a la marcada asimetría que presenta la superficie de verosimilitud.

Respecto a los otros tres tipos de intervalos de confianza se destaca lo que sigue en cuanto a sus coberturas empíricas. Para $n = 25$, se observa que las coberturas empíricas de los I Bootstrap tienen una tendencia decreciente al variar c , es decir los mejores resultados son con $c = -0.5$ y los peores con $c = 0.5$. Cuando $c \leq -0.3$ las coberturas de los I Bootstrap son mejores que las de los IV perfil, pero cuando $c > -0.3$ las coberturas de estos últimos son mejores que las de los I Bootstrap, siendo los IV perfil bajo la DVEG los que tienen mejores coberturas. Cerca de $c = -0.5$ se observan las coberturas más bajas de los IV perfil bajo la DVEG y bajo el submodelo. Para los IV perfil bajo submodelo se observa además una caída de las coberturas cerca de $c = 0.1$, esto se debe a que para muchas muestras que corresponden a valores de c cerca de 0.1 se eligió como submodelo a la distribución Weibull cuando lo correcto hubiese sido elegir a la Fréchet.

La tendencia decreciente de las coberturas de los I Bootstrap se mantiene para $n = 50$, pero al variar c la curva de las coberturas decrece menos rápido que con $n = 25$. El comportamiento de esta curva para cada clase de intervalos es similar al caso $n = 25$ pero son más cercanas a 0.95 en casi todos los valores de c . Se observa además que para $c \leq -0.2$ y $c \geq 0.4$ las coberturas de los IV perfil bajo la DVEG y el submodelo son muy cercanas entre ellas dos. En especial para $c = -0.5$, los I Bootstrap mejoran mucho la cobertura de los otros tipos de intervalos.

Cuando $n = 100$ la curva de las coberturas empíricas de los I Bootstrap no tiene ninguna tendencia y son muy cercanas a 0.95, incluso en la mayoría de las veces son mucho más cercanas que las de los IV perfil bajo la DVEG y bajo el submodelo. Aquí también las coberturas de los I Bootstrap son más altas que las de los IV perfil para $c \leq -0.3$. También se observan las menores coberturas de los IV perfil cerca de $c = -0.5$ y para los IV perfil bajo el submodelo una caída de ellas cerca de $c = 0.1$. Las coberturas de los IV perfil del submodelo y de la DVEG son muy cercanas entre sí para $c \leq -0.2$ y $c \geq 0.3$. Cuando n varía se observa que la curva de las coberturas empíricas que se mantiene más estable y más cercana a la recta constante 0.95 es la que corresponde a los IV perfil bajo la DVEG.

Proporción de intervalos que sobreestiman y subestiman

Al obtener intervalos de confianza para cuantiles de distribuciones de máximos, si éste no cubre al verdadero valor del cuantil es preferible que sobreestime a que subestime a dicho valor. Por ejemplo, imagínese que en una compañía de seguros se quiere conocer un intervalo que con probabilidad igual a 0.95 contenga al valor que en promedio sea excedido una vez cada 20 años por el máximo anual de pagos que hace la compañía a sus clientes por daños, con el propósito de tomar las debidas precauciones para no quedar en la ruina en ese tiempo. Es decir, se quiere un intervalo de confianza del 0.95 % para el cuantil $Q_{0.95}$ de la distribución de máximos anuales de pagos que hace la compañía.

Si el intervalo de confianza que se obtiene por alguna metodología no contiene al valor del cuantil y está por debajo de él (subestima), es muy probable que en el transcurso de 20 años la compañía tenga pagos que estén por encima del extremo superior del intervalo en varios años diferentes y esto puede originar pérdidas mayores a la compañía si no estaba preparada para algo así. En cambio si el intervalo no contiene al valor del cuantil y esta por encima de él (sobreestima), la compañía tomará demasiadas precauciones para no excederse de su presupuesto y no quedar en la ruina, y difícilmente ocurrirá un pago mayor que el extremo superior del intervalo durante los 20 años. Por lo tanto, es importante conocer como son las proporciones de los intervalos que subestiman y sobreestiman al cuantil $Q_{0.95}$ con cada uno de los tipos de intervalos de confianza bajo estudio para este cuantil.

En las tablas de la Figura 3.5 se observa que para cualquier valor de n y c la proporción de

intervalos que subestiman es mayor que la de intervalos que sobreestiman con los I Delta e IV perfil. Para $n = 25$ y $n = 50$ las proporciones de los I Bootstrap que sobreestiman son menores que las proporciones de esta clase de intervalos que subestiman para todos los valores de c excepto para $c = -0.4$. En el caso $n = 100$ estas proporciones se mantienen más o menos equilibradas para todos los valores de c . Por lo tanto, los I Bootstrap tienen la ventaja sobre los otros intervalos, que con valores grandes de n si el I Bootstrap no contiene al verdadero valor del cuantil tiene la misma posibilidad de sobreestimar que de subestimar este valor, mientras que con los otros intervalos es más posible que se subestime al cuantil.

Intervalos nulos

Conforme el valor de n crece, el número de intervalos nulos bajo el modelo DVEG cuando se usa la aproximación continua a la función de verosimilitud (1.28) disminuye. Para $n = 25$ y $n = 50$ a medida que el valor de c se acerca a $c = -0.5$ el número de intervalos nulos aumenta. Para $n = 100$ no se tienen intervalos nulos.

Comparación de la longitud de los intervalos calculados

Además de considerar las coberturas empíricas, para determinar en qué situaciones son más adecuados unos intervalos respecto a los otros es necesario saber cuales son los más angostos, siempre y cuando hayan incluido al verdadero valor del cuantil. En lo siguiente únicamente se consideraron a los I Bootstrap, IV perfil bajo la DVEG y bajo el submodelo, ya que estos son los que tienen las mejores coberturas empíricas.

En las figuras 3.7, 3.8 y 3.9 se presentan gráficas de caja que resumen como se comportan las razones de las longitudes de los intervalos (correspondientes a la misma muestra) por cada par de tipos de ellos. Cada una de estas figuras corresponde a un valor de n y en cada una de ellas se muestran las gráficas de caja correspondientes a cada valor de c y se muestra también la parte central de dichas gráficas. Se consideraron únicamente para estas razones a los pares de intervalos para los cuales ambos cubrieron al verdadero valor del cuantil $Q_{0.95}$ y ninguno de ellos fue catalogado como nulo. En estas figuras se observa lo que sigue con respecto a las razones entre las longitudes de los intervalos considerados.

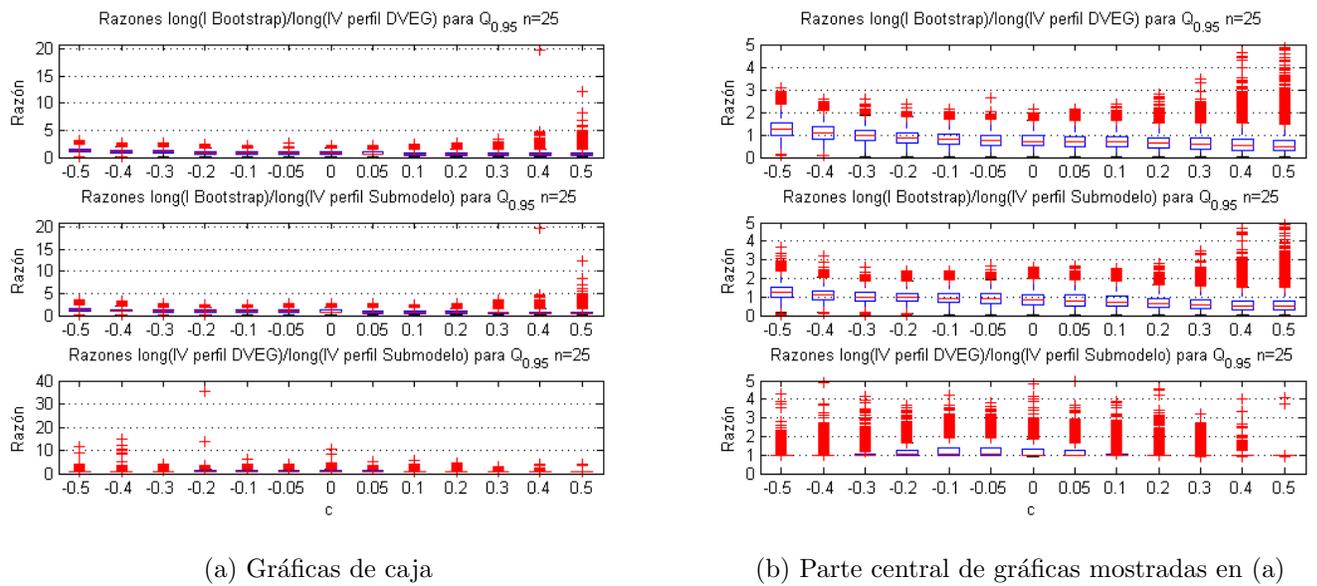


Figura 3.7: Razones de longitudes de intervalos para $Q_{0.95}$ con $n = 25$

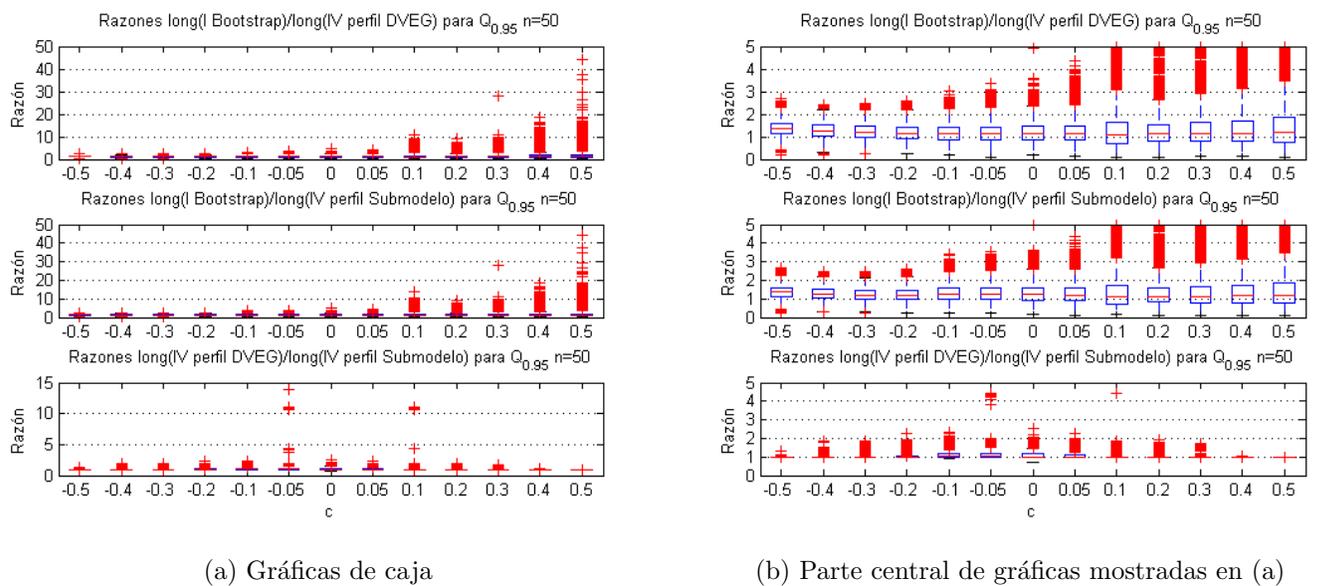


Figura 3.8: Razones de longitudes de intervalos para $Q_{0.95}$ con $n = 50$

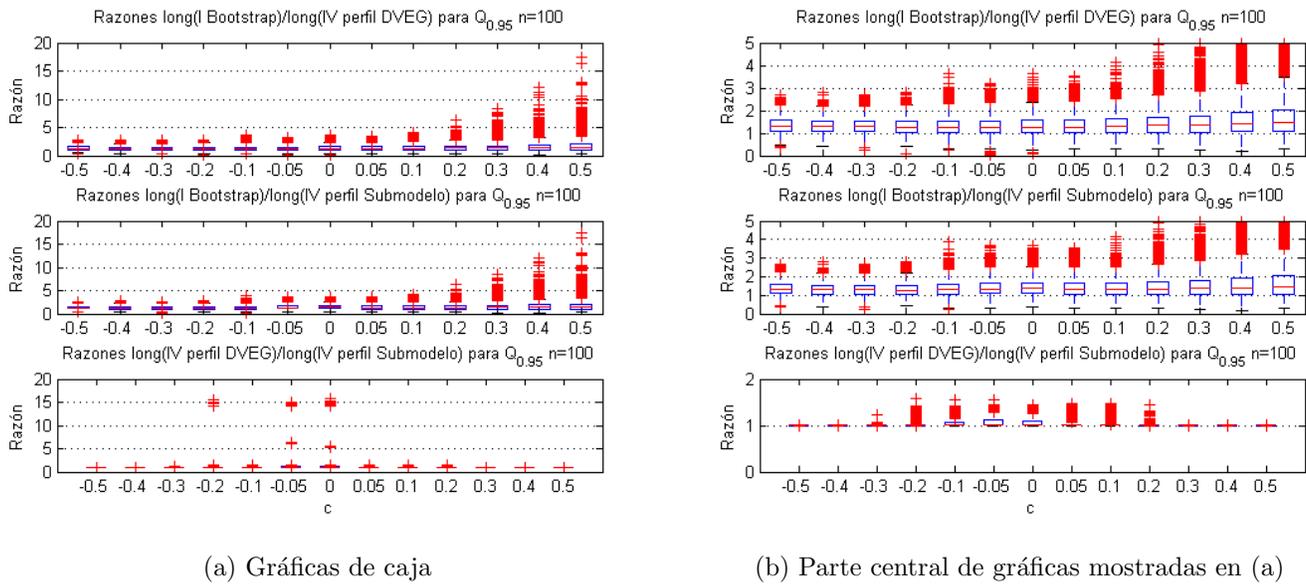


Figura 3.9: Razones de longitudes de intervalos para $Q_{0.95}$ con $n = 100$

RAZONES ENTRE LONGITUDES DE IV PERFIL BAJO LA DVEG Y BAJO EL SUBMODELO: Para todos los valores de n y c estudiados las razones son mayores o iguales a 1 siempre y cercanas a 1 en la mayoría de las veces. Esto quiere decir que los IV perfil bajo el submodelo son más pequeños, pero las longitudes de estos dos tipos de intervalos no difieren en mucho mayormente.

Para $c \geq 0.4$ con $n = 50$ y para $c \leq -0.4$ y $c \geq 0.3$ con $n = 100$, casi todas estas razones son iguales a 1, por lo tanto en estos casos casi todos los IV perfil bajo la DVEG son iguales en longitud a los IV perfil bajo el submodelo, de hecho se observó que casi siempre estos intervalos coinciden.

RAZONES ENTRE LONGITUDES DE I BOOTSTRAP Y CADA UNO DE LOS TIPOS DE IV PERFIL: Para $n = 25$ se tiene que al variar c la mediana de estas razones tiene una tendencia decreciente. La posición de esta mediana indica cuáles son los intervalos que son los más grandes la mayoría de las veces. Si la mediana es mayor que 1, los I Bootstrap son en la mayoría de las veces más anchos que los otros intervalos; si la mediana es igual a 1, la mitad de las veces los I Bootstrap son más anchos y si la mediana es menor que 1, los I Bootstrap son más pequeños que los otros intervalos la mayoría de las veces. Por lo tanto al variar c los I Bootstrap pasan de ser los más anchos a los más angostos mayormente. Con este mismo tamaño de muestra se observa que en $c = -0.5$, la caja que

contiene al 50 % de las razones se encuentra totalmente por arriba de 1, es decir una proporción más grande que el 75 % de los I Bootstrap son mas grandes que los IV perfil. Conforme c se mueve a la derecha estas cajas van bajando hasta que a partir de $c \geq -0.05$ para las razones con los IV perfil bajo la DVEG y $c \geq 0.2$ para las razones con los IV perfil bajo el submodelo, estas cajas se encuentran totalmente por debajo de 1, por lo que en esos casos más del 75 % de los I Bootstrap son más pequeños que los otros intervalos.

Para $n = 50$, en la mediana de las razones no se observa ninguna tendencia al variar c y ésta siempre es mayor que 1, por lo tanto los I Bootstrap son más grandes la mayoría de las veces que los otros intervalos para todos los valores de c . Las cajas que contienen al 50 % de las razones con los IV perfil bajo la DVEG y las razones con los IV perfil bajo el submodelo, en $c \leq -0.2$ y en $c \leq -0.05$ respectivamente, se encuentran totalmente por encima de 1, por lo tanto en estos casos los I Bootstrap son más anchos que los otros intervalos en más de 75 % de las veces. Para $n = 100$ se observa que todas las cajas que contienen al 50 % de las razones se encuentran totalmente por arriba de 1, por lo tanto, los I Bootstrap son más grandes que los otros intervalos en más de 75 % de las veces para todos los valores de c .

Con cada valor de n , al mover c a la derecha se observa que el máximo de las razones entre las longitudes de los I Bootstrap y las de cada tipo de IV perfil es cada vez más grande, es decir, se encuentran I Bootstrap cada vez más grandes que los IV perfil al aumentar c . Al variar n , para cada valor de c las cajas que contienen al 50 % de las razones entre las longitudes de los I Bootstrap con las de los IV perfil se van moviendo hacia arriba hasta quedar completamente por encima de 1. Esto quiere decir que siempre al aumentar n , más del 75 % de las veces los I Bootstrap son más grandes que los IV perfil bajo la DVEG y bajo el submodelo. Se observa que para todos los valores de n y c estas cajas se encuentran totalmente o casi totalmente por debajo de 2, por lo tanto, siempre más del 75 % de los I Bootstrap son a lo más el doble de ancho que los IV perfil correspondientes.

I Bootstrap contra IV perfil bajo el submodelo

Es de interés conocer más acerca de como funcionan los I Bootstrap e IV perfil bajo el submodelo para las muestras en las cuales el IV perfil bajo la DVEG fue nulo. Para esto se presentan en el Cuadro 3.1 los valores de c en los cuales se encontraron muestras con intervalos nulos para el

cuantil $Q_{0.95}$ en el caso $n = 25$. Para cada uno de estos valores de c se proporciona el total de estas muestras, así como también el número de los I Bootstrap e IV perfil bajo el submodelo para este cuantil, calculados con dichas muestras, que cubrieron al verdadero valor de $Q_{0.95}$.

c	Total de muestras	I Bootstrap	IV perfil submodelo
-0.5	515	438	321
-0.4	188	133	91
-0.3	79	43	29
-0.2	17	5	3
-0.1	9	2	2
-0.05	5	3	2
0	5	1	2
0.05	3	0	0
0.1	3	0	0

Cuadro 3.1: Total de intervalos que cubren a $Q_{0.95}$ para muestras de tamaño $n = 25$ con intervalos nulos

Debido a que para $c \leq -0.3$ se tiene un gran número de muestras con intervalos nulos, se presenta además en la Figura 3.10 la proporción de estos intervalos que cubrieron dicho cuantil para estos valores de c . En esta figura se observa que la proporción de los I Bootstrap que cubrieron al cuantil $Q_{0.95}$ es mayor que la de los IV perfil bajo el submodelo. Para los valores de $c > -0.3$, se tienen muy pocas muestras y por tanto no hay evidencia fuerte para decir que una clase de intervalos sea mejor para cubrir al cuantil de interés en esta clase de muestras.

Se concluye que mayormente cuando se tienen IV perfil bajo la DVEG nulos para el cuantil $Q_{0.95}$, los I Bootstrap tienen mayor posibilidad de cubrir al verdadero valor de este cuantil que los IV perfil bajo el submodelo.

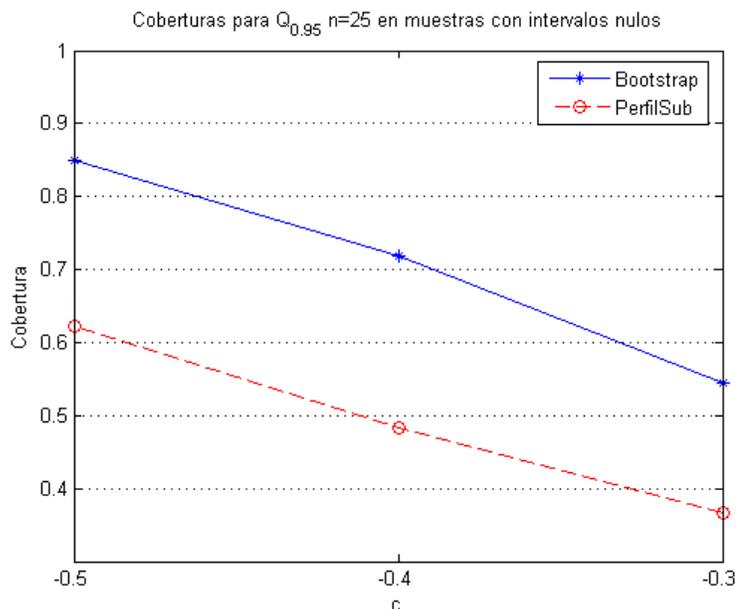


Figura 3.10: Proporción de intervalos que cubren a $Q_{0.95}$ para muestras de tamaño $n = 25$ con intervalos nulos correspondientes a $c \leq -0.3$

3.3.4. Resultados para el cuantil $Q_{0.99}$

A continuación se presentan las coberturas empíricas de los intervalos del 95 % de confianza para el cuantil $Q_{0.99}$ en algunos escenarios de simulaciones con tamaño de muestra $n = 50$ y las razones de las longitudes de estos intervalos. La tabla de la Figura 3.11 se interpreta en forma análoga a las que se presentaron para las coberturas empíricas de $Q_{0.95}$. En la Figura 3.12 se grafican las coberturas empíricas de los intervalos de confianza para el cuantil $Q_{0.99}$.

C	BOOTSTRAP			SUBMODELO						DVEG						
	<	Cob.	>	Perfil			Delta			Perfil			Nulos	Delta		
				<	Cob.	>	<	Cob.	>	<	Cob.	>		<	Cob.	>
-0.4	0.0138	0.9622	0.0240	0.0576	0.9355	0.0069	0.1915	0.8083	0.0002	0.0575	0.9354	0.0069	0.0002	0.1913	0.8083	0.0002
-0.2	0.0845	0.8907	0.0248	0.0429	0.9412	0.0159	0.1475	0.8525	0	0.0429	0.9452	0.0119	0	0.1475	0.8525	0
0	0.1947	0.7781	0.0272	0.0624	0.9157	0.0219	0.1249	0.8750	0.0001	0.0361	0.9459	0.0180	0	0.1249	0.8751	0
-0.2	0.2724	0.6916	0.0360	0.0577	0.9190	0.0233	0.1138	0.8862	0	0.0289	0.9478	0.0233	0	0.1137	0.8863	0
0.4	0.3248	0.6376	0.0376	0.0286	0.9479	0.0235	0.1172	0.8828	0	0.0286	0.9479	0.0235	0	0.1173	0.8827	0

Figura 3.11: Coberturas empíricas para $Q_{0.99}$ con $n = 50$

Se observa que en general las coberturas empíricas de los I Bootstrap son malas, especialmente

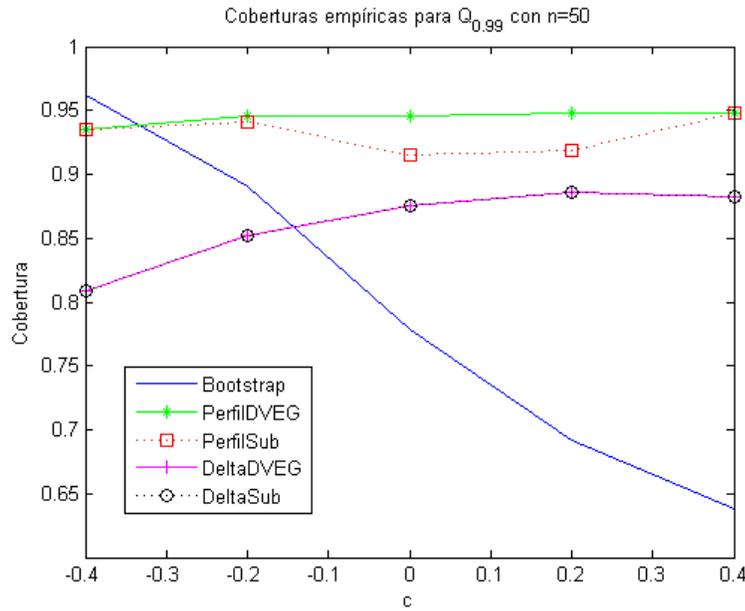


Figura 3.12: Gráficas de coberturas empíricas para $Q_{0.99}$ con $n = 50$

cuando $c > -0.4$. Cuando c varía, estas coberturas tienen una tendencia decreciente y para $c \geq 0$ son mucho menores que las coberturas de los otros cuatro tipos de intervalos. Las mejores coberturas se tienen con los IV perfil bajo la DVEG. Los IV perfil bajo el submodelo también tienen buenas coberturas. Los I Delta bajo la DVEG y el submodelo tienen coberturas muy cercanas, estas son más bajas que las de los IV perfil para todos los valores de c analizados. Nuevamente, debido a estas coberturas no se recomienda utilizar los I Delta para estimar cuantiles grandes con estos tamaños de muestra.

Respecto a las proporciones de los intervalos que subestiman y sobreestiman se tienen resultados análogos a los encontrados para los intervalos correspondientes al cuantil $Q_{0.95}$. Debido a que los intervalos que tienen mejores coberturas son los IV perfil bajo la DVEG y bajo el submodelo, interesa comparar sus tamaños. Como los intervalos Bootstrap son de interés en esta tesis, se compararán las longitudes de estos tres tipos de intervalos. Para ello se presentan en la Figura 3.13 las gráficas de caja de las razones entre las longitudes de los intervalos correspondientes a la misma muestra.

Se observa que las razones entre las longitudes de los IV perfil bajo la DVEG y las de los IV

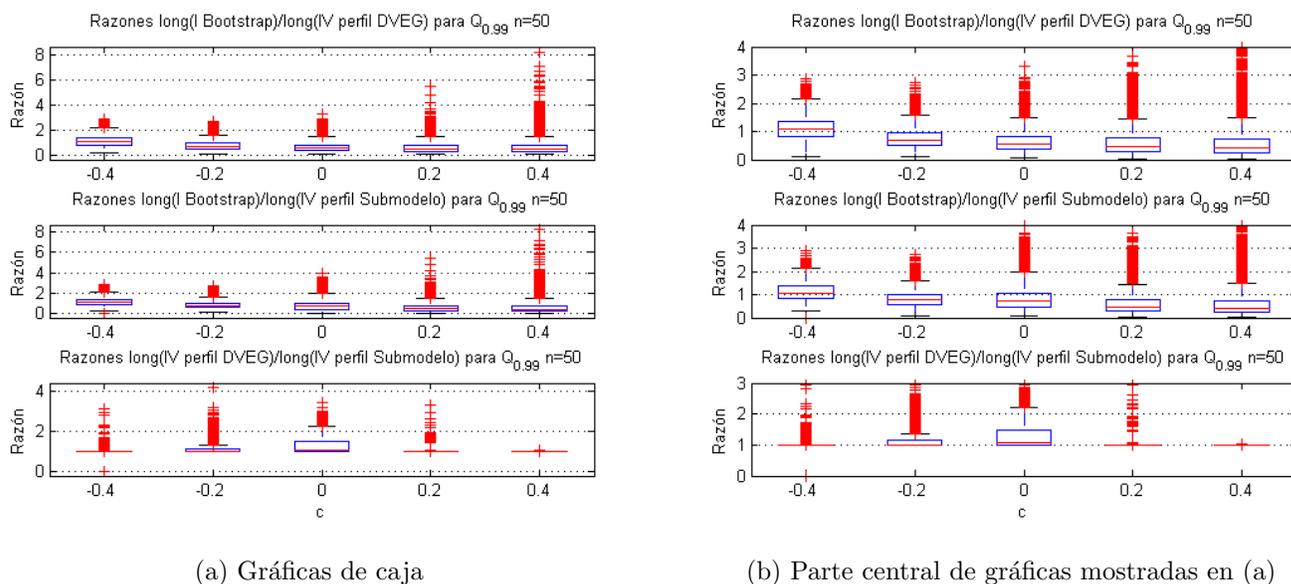


Figura 3.13: Razones de longitudes de intervalos para $Q_{0.99}$ con $n = 50$

perfil bajo el submodelo para todos los valores de c en la mayoría de las veces son muy cercanas a 1, es decir las longitudes de los dos intervalos no difieren en mucho, pero también se observa que los intervalos más angostos son los IV perfil bajo el submodelo. Además para $c = -0.4, 0.2, 0.4$ casi todas las razones son iguales a 1, estos intervalos casi siempre coinciden.

Se aprecia una tendencia decreciente en la mediana de las razones entre las longitudes de los I Bootstrap y las de los IV perfil al variar c . Esta mediana es menor que 1 para $c > -0.4$, esto quiere decir que para estos valores de c la mayor parte de los I Bootstrap son más pequeños que los otros intervalos.

3.4. Conclusiones

Con lo visto anteriormente se puede decir cuáles son las ventajas y desventajas generales de cada tipo de intervalo, así como también en qué situaciones cada uno de ellos resultó ser más eficiente con respecto a los otros.

Ventajas y desventajas generales de los intervalos

I BOOTSTRAP:

Ventajas:

1. Cuando n es grande ($n = 100$), las coberturas de estos intervalos para $Q_{0.95}$ son mejores que las de los IV perfil bajo la DVEG y bajo el submodelo.
2. Cuando n es pequeño ($n = 25$), pueden ser calculados sin ningún problema para valores de c muy negativos, a diferencia de los IV perfil bajo la DVEG y además tienen buenas coberturas en estos valores de c .
3. Cuando los IV perfil bajo la DVEG para el cuantil $Q_{0.95}$ no pueden ser calculados debido a singularidades, en general los I Bootstrap cubren mejor a este cuantil que los IV perfil bajo el submodelo.
4. Casi siempre excepto para c muy positivos y tamaños de muestra pequeños, los I Bootstrap tienen mejores coberturas que los I Delta para el cuantil $Q_{0.95}$.

Desventajas:

1. Cuando estos intervalos tienen coberturas tan buenas como las de los IV perfil (bajo la DVEG o bajo el submodelo) son más anchos que ellos la mayoría de las veces.
2. Para tamaños de muestra pequeños y $c \geq 0$, estos intervalos tienen coberturas muy malas para el cuantil $Q_{0.95}$.
3. Para el cuantil $Q_{0.99}$ estos intervalos tienen coberturas muy malas, excepto para valores de c muy negativos.

IV PERFIL BAJO LA DVEG:

Ventajas:

1. Son los más conservadores, en el sentido de que para casi todos los valores de c y de n tienen buenas coberturas.

2. Al cambiar n y c sus coberturas son las más estables con respecto a los otros intervalos, es decir no cambian drásticamente.
3. Son más angostos que los I Bootstrap cuando ambos tienen buenas coberturas.

Desventajas:

1. Son más anchos que los IV perfil bajo el submodelo en situaciones en donde ambos tienen buenas coberturas.
2. Cuando c es muy negativo las coberturas son un poco bajas en comparación de los I Bootstrap.
3. Para c muy negativo pueden haber errores en el cálculo de estos intervalos si no se toma la función de verosimilitud exacta de la DVEG.

IV PERFIL BAJO EL SUBMODELO:

Ventajas:

1. Tienen coberturas tan buenas como las de los IV perfil bajo la DVEG en muchos casos.
2. Sus coberturas son siempre mejores que las de los I Delta. Con tamaños de muestras pequeños y $c \geq 0$ son mejores que las de los I Bootstrap.
3. Son los más angostos mayormente. Esto puede ser aprovechado cuando tienen tan buenas coberturas como otro tipo de intervalos, como por ejemplo los IV perfil bajo la DVEG.
4. En situaciones donde es necesario utilizar la función de verosimilitud exacta para calcular los IV perfil bajo la DVEG, algunas veces para calcular los IV perfil bajo el submodelo es suficiente utilizar la aproximación continua truncada para la distribución Weibull.

Desventajas:

1. Si el submodelo es elegido en forma incorrecta no se obtienen buenos resultados.
2. Para valores de c muy negativos sus coberturas son un poco bajas comparadas con las de los I Bootstrap.

3. Si el valor de c es muy negativo el cálculo de estos intervalos puede ser un poco complicado, pero utilizar la función de verosimilitud exacta de la Weibull soluciona el problema.

I DELTA BAJO LA DVEG Y BAJO EL SUBMODELO:

Ventajas:

1. Para $c > 0$ y tamaños de muestra pequeños, estos intervalos tienen mejores coberturas que los I Bootstrap para el cuantil $Q_{0.95}$.
2. Muchas veces aún con tamaños de muestra moderados ($n = 50$), estos intervalos tienen mejores coberturas que los I Bootstrap para $Q_{0.99}$.

Desventajas:

1. Sus coberturas siempre están muy por debajo de las coberturas de los IV perfil y en muchas ocasiones también de las coberturas de los I Bootstrap.
2. Cuando c es muy negativo sus coberturas son muy malas.
3. Para c muy negativo pueden haber errores en el cálculo de estos intervalos si no se toma la función de verosimilitud exacta suponiendo una DVEG o pueden ser difíciles de calcular al suponer la distribución Weibull.

Situaciones de utilidad para cada uno de los intervalos

Algunas de las situaciones en que cada uno de los intervalos de estimación estudiados resulta más útil o eficiente con respecto a los otros, se presentan a continuación.

■ I BOOTSTRAP:

Si el tamaño de muestra es pequeño y los valores más plausibles de c son muy negativos (el mejor modelo es claramente Weibull), se puede utilizar esta clase de intervalos que tienen muy buenas coberturas para estos valores de c .

- IV PERFIL BAJO EL SUBMODELO:

Cuando se tiene suficiente información externa a los datos para elegir un submodelo de la DVEG, los IV perfil bajo ese submodelo son recomendables para tener mayor precisión en la estimación por intervalos.

- IV PERFIL BAJO LA DVEG:

Si no se tienen razones externas para elegir a un submodelo de la DVEG o para creer que c es muy negativo, son recomendables por tener muy buenas coberturas en la mayoría de los casos.

- I DELTA BAJO LA DVEG Y BAJO EL SUBMODELO:

Estos intervalos en realidad no son muy eficientes con $n \leq 100$, pues sus coberturas siempre están muy por debajo de las de los IV perfil y por tanto estos últimos son preferibles sobre ellos.

Capítulo 4

Conclusiones generales

Los intervalos interpolados calibrados por Bootstrap (I Bootstrap) propuestos por Ho y Lee (2005) son una buena alternativa como intervalos de estimación para cuantiles de distribuciones de máximos, para muestras chicas claramente de un modelo Weibull, ya que tienen muy buenas coberturas en esos casos. Los intervalos de verosimilitud perfil (IV perfil) bajo la DVEG son recomendables si no se tiene información externa para elegir un submodelo de la DVEG o si no se puede suponer que c sea muy negativo. Los intervalos Delta (I Delta), por tener coberturas muy pobres, no son recomendables para tamaños de muestra menores o iguales a 100 máximos. Por otro lado, cuando el tamaño de la muestra de máximos aumenta, las coberturas de los I Bootstrap mejoran mucho más rápido que las coberturas de los otros intervalos, pero generalmente los I Bootstrap suelen ser los más anchos.

Más específicamente se tiene lo siguiente con respecto al parámetro de forma c de la DVEG:

- Cuando el EMV de c es muy negativo se recomienda calcular los I Bootstrap pues tienen buenas coberturas en esos casos.
- Cuando el EMV de c es muy cercano a cero y la plausibilidad de $c = 0$ sea alta, se recomienda calcular los I Bootstrap para muestras moderadamente grandes o muestras grandes.
- Si el EMV de c es mayor a cero y el modelo Fréchet es razonable, los I Bootstrap no son recomendables si n no es grande. Los IV perfil bajo DVEG y bajo la Fréchet son los apropiados en este caso.

Por otra parte, se observó que en situaciones donde los EMV y los intervalos basados en la verosimilitud (los IV perfil y los I Delta) bajo la DVEG o bajo el submodelo Weibull, son difíciles de calcular debido a singularidades en la aproximación continua a la función de verosimilitud, lo adecuado es utilizar la función de verosimilitud exacta para calcular dichos intervalos. Esta verosimilitud exacta por ser un producto de probabilidades no presenta singularidades ni problemas numéricos.

Apéndice A

Demostración de algunos resultados

Los siguientes resultados fueron identificados y demostrados por la autora de esta tesis al momento de querer justificar la construcción de los intervalos propuestos por Beran y Hall (1993) y los intervalos propuestos por Ho y Lee (2005) mencionados en el Capítulo 2.

Resultado 1: La función $C(\cdot)$, dada por (2.2) y (2.3), es estrictamente creciente y continua en el intervalo $(0, 1)$.

Demostración:

Para $r = 1, 2, \dots, n - 1$, la función $C(\cdot)$ en el intervalo $(B_{r-1}, B_r]$ es el segmento de recta que une $X_{(r)}$ con $X_{(r+1)}$. Ya que $X_{(r)} \leq X_{(r+1)}$ y $X_{(r)} \neq X_{(r+1)}$ con probabilidad 1 pues F es continua, puede considerarse a estos segmentos de recta estrictamente crecientes. Nótese que dichos segmentos se empatan en los extremos de los intervalos. Por lo tanto $C(\cdot)$ es estrictamente creciente y continua en el intervalo $(B_0, B_{n-1}]$.

Por otro lado se tiene que

$$C(\alpha) = X_{(1)} - A \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{B_0 - \alpha}{B_0} \right), \quad \text{para } 0 < \alpha < B_0,$$

y por tanto $C(\cdot)$ es continua en este intervalo. Además, si $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq B_0$, entonces se tiene que

$$\frac{\pi}{2} \frac{B_0 - \alpha_2}{B_0} < \frac{\pi}{2} \frac{B_0 - \alpha_1}{B_0}.$$

Ya que la función tangente es estrictamente creciente en el conjunto $(0, 1)$ se cumple que

$$C(\alpha_1) = X_{(1)} - A \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{B_0 - \alpha_1}{B_0}\right) < X_{(1)} - A \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{B_0 - \alpha_2}{B_0}\right) = C(\alpha_2).$$

De aquí, $C(\cdot)$ es estrictamente creciente y continua en el intervalo $(0, B_0]$. Análogamente se prueba que lo mismo es cierto para el intervalo $(B_{n-1}, 1)$.

Obsérvese que $C(B_0) = X_{(1)}$, $C(B_{n-1}) = X_{(n)}$, además

$$\lim_{\alpha \rightarrow B_0^+} C(\alpha) = X_{(1)} \quad \text{y} \quad \lim_{\alpha \rightarrow B_{n-1}^-} C(\alpha) = X_{(n)};$$

por lo tanto $C(\cdot)$ es continua en los puntos B_0 y B_{n-1} .

En conclusión, $C(\cdot)$ es estrictamente creciente y continua en el intervalo $(0, 1)$. \square

Resultado 2: Sean \widehat{Q}_p y $C^i(\beta_i)$, para $i = 1, 2, \dots, M$, como en la Sección 2.3.1. Se tiene que $C^i(\beta_i) = \widehat{Q}_p$, para $i = 1, 2, \dots, M$.

Demostración:

Sea $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ y considérese β_i es como en (2.6), entonces por (2.2)

$$C^i(\beta_i) = (1 - \pi_i)Y_{(\widehat{r})}^i + \pi_i Y_{(\widehat{r}+1)}^i, \quad \text{con } \pi_i = \frac{\beta_i - B_{\widehat{r}-1}}{B_{\widehat{r}} - B_{\widehat{r}-1}}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} C^i(\beta_i) &= \frac{B_{\widehat{r}} - \beta_i}{B_{\widehat{r}} - B_{\widehat{r}-1}} Y_{(\widehat{r})}^i + \frac{\beta_i - B_{\widehat{r}-1}}{B_{\widehat{r}} - B_{\widehat{r}-1}} Y_{(\widehat{r}+1)}^i \\ &= \frac{B_{\widehat{r}} - [(1 - \widehat{\pi})B_{\widehat{r}-1} + \widehat{\pi}B_{\widehat{r}}]}{B_{\widehat{r}} - B_{\widehat{r}-1}} Y_{(\widehat{r})}^i + \frac{[(1 - \widehat{\pi})B_{\widehat{r}-1} + \widehat{\pi}B_{\widehat{r}}] - B_{\widehat{r}-1}}{B_{\widehat{r}} - B_{\widehat{r}-1}} Y_{(\widehat{r}+1)}^i \\ &= (1 - \widehat{\pi})Y_{(\widehat{r})}^i + \widehat{\pi}Y_{(\widehat{r}+1)}^i = \frac{Y_{(\widehat{r}+1)}^i - \widehat{Q}_p}{Y_{(\widehat{r}+1)}^i - Y_{(\widehat{r})}^i} Y_{(\widehat{r})}^i + \frac{\widehat{Q}_p - Y_{(\widehat{r})}^i}{Y_{(\widehat{r}+1)}^i - Y_{(\widehat{r})}^i} Y_{(\widehat{r}+1)}^i \\ &= \widehat{Q}_p. \end{aligned}$$

Así mismo, $C^i(\beta_i) = \widehat{Q}_p$ si β_i es como alguna de las expresiones en (2.7). \square

Bibliografía

- [1] Beran, R., Hall, P. (1993). *Interpolated nonparametric prediction intervals and confidence intervals*. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), V. 55, No. 3, pp. 643–652.
- [2] Coles, S. (2001). *An introduction to statistical modeling of extreme values*. Springer-Verlag, London.
- [3] Davison, A., Hinkley, D. (1997). *Bootstrap methods and their application*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [4] De Angelis, D., Hall, P., Young, G. A. (1993). *A note on coverage error of bootstrap confidence intervals for quantiles*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, V. 114, pp. 517–531.
- [5] Dupuis, D. J., Field, C. A. (1998). *Robust estimation of extremes*. Canadian Journal of Statistics, V. 26, No. 2, pp. 199–215.
- [6] Dupuis, D. J., Field, C. A. (1998). *A comparison of confidence intervals for generalized extreme-value distributions*. Journal of Statistical Computation and Simulation, V. 61, pp. 341–360.
- [7] Efron, B., Tibshirani, R. (1993). *An introduction to the bootstrap*. Chapman & Hall, New York.
- [8] Embrechts, P., Klüppelberg C., Mikosch, T. (1997). *Modelling extremal events for insurance and finance*. Springer-Verlag, Berlin.
- [9] Falk, M., Janas, D. (1992). *Edgeworth expansions for studentized and prepivoted sample quantiles*. Statistics & Probability Letters, V. 14, pp. 13–24.

- [10] Falk, M., Kaufmann, E. (1991). *Coverage probabilities of bootstrap-confidence intervals for quantiles*. The Annals of Statistics, V. 19, No. 1, pp. 485–495.
- [11] Fisher, R. A. (1921). *On the “probable error” of coefficient of correlation deduced from a small sample*. Metron, V. 1, pp. 3–32.
- [12] Fisher, R. A., Tippett, L. H. C. (1928). *Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, V. 24, pp. 180–190.
- [13] Hall, M. J., van den Boogaard, H. F. P., Fernando, R. C., Mynett, A. E. (2004). *The construction of confidence intervals for frequency analysis using resampling techniques*. Hydrology and Earth System Sciences, V. 8, No. 2, pp. 235–246.
- [14] Hall, P., Martin, M. A. (1989). *A note on the accuracy of bootstrap percentile method confidence intervals for a quantile*. Statistics & Probability Letters, V. 8, pp. 197–200.
- [15] Hall, P., Martin, M. A. (1991). *On the error incurred using the bootstrap variance estimate when constructing confidence intervals for quantiles*. Journal of Multivariate Analysis, V. 38, pp. 70–81.
- [16] Higham, D., Higham, N. (2005). *Matlab guide*. Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia.
- [17] Ho, Y. H. S., Lee, S. M. S. (2005). *Iterated smoothed bootstrap confidence intervals for population quantiles*. The Annals of Statistics, V. 33, No. 1, pp. 437–462.
- [18] Ho, Y. H. S., Lee, S. M. S. (2005). *Calibrated interpolated confidence intervals for population quantiles*. Biometrika, V. 92, No. 1, pp. 234–241.
- [19] Kalbfleisch, J. (1985). *Probability and statistical inference*. Vol 2: Statistical Inference. Springer-Verlag, New York.
- [20] Lawless, J. F. (2003). *Statistical models and methods for lifetime data*. John Wiley & Sons, Toronto, Canada.

- [21] Meeker, W. O., Escobar, L. A. (1998). *Statistical methods for reliability data*. John Wiley & Sons, New York.
- [22] Montoya, J. A., Díaz-Francés, E., Sprott, D. A. (2007). *On a criticism of the profile likelihood function*. Aceptado para publicación en Statistical Papers.
- [23] Pawitan, Y. (2001). *In all likelihood: statistical modelling and inference using likelihood*. Clarendon Press, Oxford.
- [24] Ranneby, B. (1984). *The maximum spacing method: an estimation method related to the maximum likelihood method*. Scandinavian Journal of Statistics, V. 11, pp. 93–112.
- [25] Resnick, S. I. (2001). *A probability Path*. Birkhäuser. Boston.
- [26] Schervish, M. J. (1995). *Theory of statistics*. Springer-Verlang, New York.
- [27] Serfling, R. J. (1980). *Approximation theorems of mathematical statistics*. John Wiley & Sons, New York.
- [28] Smith, R. (1985). *Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases*. Biometrika, V. 72, No. 1, pp. 67–90.
- [29] Vilchis, J. E. (2006). *Modelación estadística de máximos por bloques*. Tesis de Maestría. Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Probabilidad y Estadística, CIMAT, Guanajuato, Gto., México.