CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

EL CONCEPTO DE ACCIÓN DE DIGRUPO Y SU CONEXIÓN CON ALGUNAS CATEGORÍAS RELACIONADAS.

T E S I S

Que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con Orientación en

Matemáticas Básicas

Presenta

Harry Esmith Guzmán Guzmán

Director de Tesis:

Dr. Fausto Antonio Ongay Larios

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto., 05 de marzo de 2020

Dedicación:

A mi madre.

"My mother is my root, my foundation. She planted the seed that I base my life on, and that is the belief that the ability to achieve starts in your mind"
Michael Jordan.

Agradecimientos

Tener el título de doctor en matemáticas fue mi sueño desde que empecé a estudiar mi carrera de matemáticas, en algunos momentos vi como ese sueño se esfumaba, algunas puertas se cerraban y hasta pensé que no podría lograrlo. Tuve que tocar varias puertas para seguir en búsqueda de ese sueño y conté con la enorme fortuna de que el CIMAT y el profesor Fausto Ongay me tendieran la mano y abrieran esa puerta que tanto estaba buscando.

Tengo experiencia docente mayor a siete años; sin embargo, del profesor Fausto aprendí no sólo de matemáticas puras sino de cómo ser un buen profesor; su paciencia, consejos, su toque humano cambiaron mi perspectiva de lo que era ser un buen profesor, él me dio la libertad de explorar por mí mismo algunos resultados y fomentó en mí el gusto por la investigación; a él le debo todo mi agradecimiento.

Por otra parte, siempre he contado con el apoyo moral de mi madre, la cual siempre ha trabajado y luchado contra las adversidades de la vida para que yo pudiera crecer como persona. Ella, al igual que yo, durante estos cuatro años de mi ausencia, se ha convertido en una persona más sabia y fuerte, que sueña con estar a mi lado el día de mi titulación y recibir ese título que, aunque sólo tendrá mi nombre, ambos sabemos que es de los dos.

También quiero agradecer a CIMAT y su gente, ellos siempre estuvieron atentos a resolver cualquier duda, ayudar con cualquier trámite o hasta simplemente compartir un rato de buena charla, siempre con una sonrisa y con la típica característica de la cordialidad que es tan común en la mayoría de los mexicanos. Siempre me hicieron sentir como en casa y que era importante para ellos.

Por último, y no menos importante, todo mi agradecimiento para Conacyt, ya que, gracias a su beca, pude estar en condiciones óptimas para poder hacer mi doctorado y hasta pude viajar a mi país natal para recargarme de energía y continuar con mis proyectos.

Tabla de contenido

Capítulo 1

Introducción

Los digrupos son conjuntos con dos operaciones binarias y asociativas que cumplen algunas condiciones de tal forma que generalizan a los grupos. Esto nos da herramientas del Álgebra para poder estudiar algunas de sus características. Sin embargo, una de sus características más atractivas está en la Geometría Diferencial, ya que si los dotamos de una estructura de variedad diferenciable y suponemos que sus mapeos son suaves entonces no sólo son una generalización para los grupos sino que también son una buena generalización para los grupos de Lie; más aún, son una solución parcial para el problema de las Çoquecigrue", el cual plantea la necesidad de encontrar una estructura algebraica que generalice a los grupos de Lie y en donde se cumpla el Tercer Teorema de Lie para las álgebras de Leibniz; esto ha motivado una parte considerable de su estudio.

Por otra parte, estudiar las simetrías de un objeto, es una tarea que no sólo tiene interés en las matemáticas. De hecho, cuando se estudian de manera formal y precisa las simetrías de un conjunto, lo que en realidad se estudia es la acción de un grupo sobre tal espacio; de ahí que estudiar las acciones de una generalización de los grupos, como son los digrupos, puede llegar a ser muy interesante en otras ciencias además de las matemáticas, y eso explica el tema de la tesis.

Desde el punto de vista de las matemáticas, este concepto involucra otras nociones como órbita, estabilizador, representación, etc.; varios de estos conceptos se estudiarán en el Capítulo 2 desde una perspectiva algebraica. Sin embargo, el concepto de representación de digrupo, que presenta varias sutilezas que se detallarán más adelante, será estudiado a futuro.

A continuación veremos una breve descripción de la estructura de este trabajo:

Como bien se conoce, los digrupos son una categoría que tiene relación con los grupos de Lie, álgebras de Lie, álgebras de Leibniz y diálgebras (ver [6], [8], [12]). Al proponer una definición de la acción de un digrupo, una de las primeras preguntas que surge es ¿qué tipo de relación existe entre esta nueva definición y la definición de acción en las otras categorías mencionadas? En el Capítulo 3 se estudian parte de estas relaciones basándonos en la versión infinitesimal de las acciones de los digrupos y haciendo uso del Teorema 33, el cual permitirá ver a estas acciones como acciones de grupos y mapeos equivariantes con algunas condiciones adicionales.

En la parte final de este trabajo se encuentra el apéndice, donde se estudiará la noción de acción bilateral de digrupo, y se terminará con un capítulo de conclusiones.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Digrupos

Aunque los digrupos fueron introducidos por varios autores con enfoques diferentes entre ellos, nosotros seguiremos en gran parte el mostrado por Kinyon en [8] ya que este camino permite tener una visualización global de los digrupos y su conexión con las álgebras de Leibniz y los racks de Lie.

En esta sección veremos algunos conceptos básicos de digrupos junto con un teorema de caracterización que nos permitirá entenderlos mejor y relacionarlos con las otras categorías.

Definición 1 *Un **digrupo** es una 4-tupla* $(D, \vdash, \dashv, \mathbf{e})$ *formada por un conjunto* D*, dos operadores asociativos* $\vdash, \dashv : D \times D \to D$ *y un elemento* $\mathbf{e} \in D$ *tales que cumplen los siguientes axiomas para todo* $x, y, z \in D$*:*

1. $x \dashv (y \dashv z) = x \dashv (y \vdash z)$

2. $(x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z$

3. $(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z)$

4. $\mathbf{e} \vdash x = x \dashv \mathbf{e} = x$. *A* $\mathbf{e}$ *se le llama unidad barra marcada.*
5. Existe un único $x^{-1} \in D$ *tal que* $x \vdash x^{-1} = x^{-1} \dashv x = \mathbf{e}$. *A* x^{-1} *se conoce como el inverso de* x.

El primer ejemplo que se debería considerar para un digrupo es cualquier grupo, ya que se pueden definir los dos mapeos del digrupo iguales al operador de grupo y se verifican fácilmente los axiomas de la Defnción 1.

En lo siguiente denotaremos a D como un digrupo tal como en la Definición 1. Algunas de las propiedades más básicas que se derivan de los axiomas de digrupo son:

Proposición 2 *Sea* D *un digrupo, entonces para todo* $x, y \in D$ *se tiene:*
1. $x \vdash \mathbf{e} = (x^{-1})^{-1} = \mathbf{e} \dashv x$
2. $(x \vdash y)^{-1} = y^{-1} \vdash x^{-1}$; $(x \dashv y)^{-1} = y^{-1} \dashv x^{-1}$
3. $(x^{-1})^{-1} \vdash x^{-1} \vdash y = y = y \dashv x^{-1} \dashv (x^{-1})^{-1}$.

Notamos de la propiedad 3 que para todo $x \in D$, $(x^{-1})^{-1} \vdash x^{-1}$ es una unidad barra. Esto nos muestra que en los digrupos no necesariamente hay una única unidad barra. Al conjunto de todas las unidades barra se le llamará el *halo* del digrupo al que denotaremos por E, es decir, $E := \{x \in D : x \vdash y = y \dashv x = y \ \forall y \in D\}$. Se puede mostrar, usando las propiedades anteriores, que si $E = \{\mathbf{e}\}$ entonces el digrupo es un grupo, como consecuencia, si queremos un digrupo no trivial, su halo debe tener más de un elemento.

Otro item importante a tener en cuenta en todo digrupo es que, en general, $(x^{-1})^{-1} \neq x$; esto da lugar a considerar otro subconjunto importante de cualquier digrupo D, $G = \{(x^{-1})^{-1} : x \in D\}$. Se puede entonces ver que G es cerrado respecto a las operaciones $\vdash, \dashv$; en efecto, gracias a que $\forall (x^{-1})^{-1}, (y^{-1})^{-1} \in G$ se tiene que $(x^{-1})^{-1} \vdash (y^{-1})^{-1} = ((x \vdash y)^{-1})^{-1}$ y $(x^{-1})^{-1} \dashv (y^{-1})^{-1} = ((x \dashv y)^{-1})^{-1}$, y si

$(y^{-1})^{-1} \vdash x = x$ entonces $y = \mathbf{e}$, lo cual implica que G es un subdigrupo de D y a la vez es también un grupo.

Para los digrupos, al igual que en los grupos, también se tiene el concepto de homomorfismo. Este está dado por la siguiente definición:

Definición 3 *Sean $(D_1, \vdash, \dashv, e_1)$ y $(D_2, \trianglerighteq, \trianglelefteq, e_2)$ digrupos. Un* ***homomorfismo*** *$\Phi : D_1 \to D_2$ es un mapeo que cumple que para todo $x, y \in D_1$:*

$$\Phi(x \vdash y) = \Phi(x) \trianglerighteq \Phi(y);\ \Phi(x \dashv y) = \Phi(x) \trianglelefteq \Phi(y)\ \text{y}\ \Phi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$$

Como consecuencia, los digrupos forman una categoría. Un uso importante de la Definición 3 se muestra en [8] cuando demuestra el siguiente teorema de descomposición para digrupos:

Teorema 4 *Sea D un digrupo y sean G, E como se definieron anteriormente entonces se tiene:*
1. G actúa como grupo en E con la acción definida por: $A \cdot \alpha := A \vdash \alpha \dashv A^{-1}$ para todo $A \in G$, $\alpha \in E$. Además, $A \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}$ para todo $A \in G$.
2. La 4-tupla $(G \times E, \trianglerighteq, \trianglelefteq, (\mathbf{e}, \mathbf{e}))$, donde para todo $A, B \in G$ y todo $\alpha, \beta \in E$ los mapeos $\trianglerighteq; \trianglelefteq$ se definen como:

$$\begin{aligned} (A,\alpha) \trianglerighteq (B,\beta) &= (A \vdash B, A \vdash \beta \dashv A^{-1}) \\ (A,\alpha) \trianglelefteq (B,\beta) &= (A \vdash B, \alpha) \end{aligned}$$

es un digrupo.
3. D y $G \times E$ son isomorfos como digrupos vía el mapeo $x \longmapsto ((x^{-1})^{-1}, x^{-1} \vdash x)$ para todo $x \in D$.

Ejemplo 5 *Sean $G = SO(n)$; $E = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y supongamos que G actúa en E por rotaciones dejando fija la última coordenada de los elementos de E; como hay dos*

puntos fijos en E respecto a esta acción (los dos polos), entonces tomamos uno de ellos, digamos $N = (0, \ldots, 0, 1)$.
Luego, aplicando el teorema anterior, formamos el digrupo $D = G \times E$ con parte de grupo $SO(n)$, halo S^n y unidad barra marcada $\mathbf{e} = (Id_{\mathbb{R}^n}, N)$. Los inversos tienen la forma (A^{-1}, N), $A \in SO(n)$, las unidades barra tienen la forma $(Id_{\mathbb{R}^n}, \alpha)$, $\alpha \in S^n$. Finalmente, los operadores del digrupo están dados por:

$$\begin{aligned}(A, \alpha) \vdash (B, \beta) &= (AB, A\beta) \\ (A, \alpha) \dashv (B, \beta) &= (AB, \alpha).\end{aligned}$$

Gracias al Teorema 4 podemos estudiar a los digrupos desde los grupos y sus acciones. Una implicación de este teorema la podemos observar en la siguiente proposición la cual describe, análogo al Teorema 4, una descomposición para los homomorfismos de digrupos.

Proposición 6 *Dado un homomorfismo de digrupos $\phi : G_1 \times E_1 \to G_2 \times E_2$, este se puede descomponer como $\phi \equiv (f, \mu)$ donde $f : G_1 \to G_2$ es un homomorfimos de grupos y $\mu : E_1 \to E_2$ es un mapeo equivariante.*

Finalmente, similar al caso de grupos de Lie, si dotamos a D de una estructura de variedad y suponemos que los mapeos $\vdash, \dashv$ son diferenciables entonces diremos que D es un *digrupo de Lie*. De aquí también tenemos que los homomorfismos de digrupos de Lie serán los homomorfismos diferenciables entre digrupos de Lie. Adicional a esto, se pueden encontrar más propiedades algebraicas sobre los digrupos en [3],[8] y [13].

2.2. Racks de Lie.

Los racks son una categoría con uso no sólo en la Geometría Diferencial sino también en la teoría de nudos, ya que ellos satisfacen axiomas similares al segundo y tercer movimiento de Reidemeister, lo que permite usarlos para obtener invariantes de algunos nudos; sin embargo, la estructura algebraica de los racks es interesante, ya que cada uno de sus elementos actúa, vía el mapeo del rack, como un automorfismo de esta categoría.

Los racks de Lie se pueden obtener al conjugar en los digrupos de Lie (en particular, en los grupos de Lie). Una aplicación importante para nosotros de esta categoría se da en la solución parcial al problema de las Coquecigrue, ya que los racks de Lie sirven como paso intermedio entre las álgebras de Leibniz escindidas y los digrupos de Lie cuando dichas álgebras se integran. Ver [8].

Definición 7 *Un* ***rack punteado*** *es una tripleta* $(Q, \circ, 1)$ *con* $1 \in Q$ *y donde el mapeo* $\circ : Q \times Q \to Q$ *es tal que* $\forall x, y, z \in Q$ *se cumple:*
1. $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$
2. $\exists! b \in Q$ *tal que* $x = y \circ b$
3. $1 \circ x = x$ *y* $x \circ 1 = 1$.

Ejemplo 8 *Si tomamos cualquier grupo* $(G, \cdot, 1)$ *y definimos el mapeo* $\circ : G \times G \to G$ *como* $x \circ y := x \cdot y \cdot x^{-1} \forall x, y \in Q$*, se ve fácilmente que* $(G, \circ, 1)$ *es un rack punteado.*

En el ejemplo anterior usamos la notación "$\cdot$"para referirnos al operador del grupo. En lo siguiente, sólo se escribirá xy indicando el producto de x con y en el grupo, sin volver a usar "$\cdot$"para referirnos a él.

Ejemplo 9 *Partiendo de cualquier digrupo* $(D, \vdash, \dashv, \mathbf{e})$ *definimos el mapeo* $\circ : D \times D \to D$ *como* $x \circ y := x \vdash y \dashv x^{-1}$ $\forall x, y \in D$*. Veamos que* $(D, \circ, e)$ *es un rack punteado. Sean* $x, y, z \in D$.

$$
\begin{aligned}
\textit{1. } x \circ (y \circ z) &= x \vdash (y \vdash z \dashv y^{-1}) \dashv x^{-1} \\
&= x \vdash (y \vdash x^{-1} \vdash x \vdash z \dashv x^{-1} \dashv (x^{-1})^{-1} \dashv y^{-1}) \dashv x^{-1} \\
&= (x \vdash y \dashv x^{-1}) \vdash (x \vdash z \dashv x^{-1}) \dashv ((x^{-1})^{-1} \vdash y^{-1} \dashv x^{-1}) \\
&= (x \vdash y \dashv x^{-1}) \vdash (x \vdash z \dashv x^{-1}) \dashv (x \vdash y \dashv x^{-1})^{-1} \\
&= (x \vdash y \dashv x^{-1}) \circ (x \vdash z \dashv x^{-1}) \\
&= (x \circ y) \circ (x \circ z)
\end{aligned}
$$

2. Notamos que $x = y \vdash y^{-1} \vdash x \dashv (y^{-1})^{-1} \dashv y^{-1}$ *Así que tomamos* $b = y^{-1} \vdash x \dashv (y^{-1})^{-1} = y^{-1} \circ x$ *y veamos que es único. Supongamos que existe* $a \in D$ *tal que* $x = y \circ a$, *así que* $x = y \vdash a \dashv y^{-1}$, *lo que es equivalente a tener que* $y^{-1} \vdash x \dashv (y^{-1})^{-1} = y^{-1} \vdash y \vdash a \dashv y^{-1} \dashv (y^{-1})^{-1}$, *pero como* $y^{-1} \vdash y \vdash a \dashv y^{-1} \dashv (y^{-1})^{-1} = a$ *entonces* $a = y^{-1} \vdash x \dashv (y^{-1})^{-1} = b$.

$$
\begin{aligned}
3.\ \mathbf{e} \circ x &= \mathbf{e} \vdash x \dashv \mathbf{e}^{-1} \\
&= \mathbf{e} \vdash x \dashv \mathbf{e} \\
&= x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \circ \mathbf{e} &= x \vdash \mathbf{e} \dashv x^{-1} \\
&= (x^{-1})^{-1} \dashv x^{-1} \\
&= \mathbf{e}
\end{aligned}
$$

Nota 10 *Diremos que un* ***rack de Lie*** *es un rack punteado de la forma* $(Q, \circ, 1)$ *donde* Q *es una variedad diferenciable y* $\circ$ *es suave.*

Para finalizar esta sección, como mencionamos en la introducción, uno de los objetivos de esta tesis es relacionar el concepto de acción de digrupo con el mismo concepto en otras categorías. Para poder realizar la conexión entre acción de digrupos y acción de álgebras de Leibniz necesitaremos la definición de acción de rack de Lie, la cual podemos encontrar en [2] y está dada de la siguiente manera:

Definición 11 *Una acción (izquierda) de un rack de Lie* $(Q, \circ, 1)$ *sobre un conjunto* M *es un mapeo* $* : Q \times M \to M$ *tal que para todo* $x, y \in Q$ *y todo* $m \in M$ *se tiene:*

$$x * (y * m) = (x \circ y) * (x * m)$$

Un ejemplo de acción de rack de Lie lo podemos observar con la acción adjunta de un rack de Lie sobre sí mismo. Es decir, si consideramos un rack de Lie $(Q, \circ, 1)$ y el mapeo $Adj_x : Q \to Q\ \forall x \in Q$ definido por: $Adj_x(y) = x \circ y$. Entonces tenemos que $\circ$ es una acción (izquierda) de Q sobre sí mismo.

2.3. Álgebras de Leibniz.

En esta sección recordaremos algunos conceptos básicos sobre las álgebras de Leibniz y su relación con los digrupos y los racks de Lie. Las álgebras de Leibniz toman fuerza y algo de fama después de que J.L. Loday en [10] las presentara como una generalización de las álgebras de Lie y al mismo tiempo se planteara el problema de cómo integrarlas, es decir, cómo encontrar una generalización apropiada al Tercer Teorema de Lie para las álgebras de Leibniz.

Definición 12 *Una* ***álgebra de Leibniz*** $(L, [\ ,\ ])$ *es un par compuesto por un* $\Bbbk$*-espacio vectorial* L *y un mapeo bilineal* $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ *tal que para todo* $x, y, z \in L$ *se cumple la identidad de Leibniz:*

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

En lo siguiente, el campo $\Bbbk$ que consideraremos será $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Notamos que estas álgebras generalizan a las álgebras de Lie, sólo que en el caso de Leibniz no se pide la antisimetría del corchete, de hecho, con ello se consigue una categoría considerablemente más amplia, como muestran los siguientes ejemplos:

Ejemplo 13 *Consideremos el conjunto* $L = \mathbb{R}^2$ *y tomemos una base cualquiera* $\{v_1, v_2\}$ *para* L*. Podemos definir el corchete* $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ *tal que* $[v_2, v_2] = v_1$*;* $[v_1, v_1] = [v_1, v_2] = [v_2, v_1] = 0$ *y para el resto de* $L \times L$ *lo extendemos de manera bilineal. Se muestra fácilmente que* $(L, [\ ,\ ])$ *es álgebra de Leibniz pero no es álgebra de Lie, basta con observar que* $0 \neq [v_2, v_2] = v_1$*.*

Ejemplo 14 *Sea* $L = \mathfrak{g} \oplus V$ *donde* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie y* V *es una variedad en la cual actúa* $\mathfrak{g}$ *por la izquierda vía el mapeo* $\cdot : \mathfrak{g} \times V \to V$*. Definimos* $[,] : L \times L \to L$ *como:*

$$[(a+\alpha), (b+\beta)] = [a, b] + a \cdot \beta \text{ para todo } (a+\alpha), (b+\beta) \in L$$

Estas últimas álgebras de Leibniz son llamadas **álgebras de Leibniz escindidas** y son importantes en nuestro trabajo, pues ellas tienen una fuerte conexión con los digrupos, la cual veremos más adelante.

Veamos ahora el concepto de acción de álgebra de Leibniz (ver [11]), el cual relacionaremos con la versión infinitesimal de la acción de digrupo.

Definición 15 *Una acción (bilateral) de una álgebra de Leibniz* $(L, [,])$ *sobre un* $\mathbb{k}$*-módulo* M *es un par de mapeos* $L \otimes M \to M$*;* $M \otimes L \to M$ *tales que, para todo* $x, y \in L$ *y todo* $m \in M$ *se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} m \otimes [x, y] &= (m \otimes x) \otimes y + x \otimes (m \otimes y) \\ x \otimes (y \otimes m) &= [x, y] \otimes m + y \otimes (x \otimes m) \\ x \otimes (m \otimes y) &= (x \otimes m) \otimes y + m \otimes [x, y] \end{aligned}$$

Ejemplo 16 *Sea* $(L, [\ ,\ ])$ *un álgebra de Leibniz y consideremos el mapeo* $adj : L \times L \to L$ *definido por* $adj(x, y) = [x, y]$ *para todo* $x, y \in L$*. Los dos mapeos de la definición de acción los podemos definir iguales al mapeo adj y, por la identidad de Jacobi del corchete, se comprueban fácilmente las tres identidades de la definición de acción.*

A continuación expondremos la conexión entre digrupos, racks de Lie y álgebras de Leibniz descrita en [8], la cual será fundamental para conectar el concepto de acción de digrupo con las demás categorías.

Para esta construcción, empezamos con un digrupo $(D, \vdash, \dashv, \mathbf{e})$ donde D es una variedad diferenciable y $\vdash, \dashv$ son suaves, es decir, $(D, \vdash, \dashv, \mathbf{e})$ es un digrupo de Lie. Luego formamos el rack de Lie asociado a D conjugando por medio de las dos operaciones del digrupo, es decir, $x \circ y := x \vdash y \dashv x^{-1}$ para todo $x, y \in D$. Como $\vdash, \dashv$ son suaves entonces $\circ$ también lo es, por lo tanto, $(D, \circ, \mathbf{e})$ es un rack de Lie.

El siguiente objetivo es conectar al rack obtenido con un álgebra de Leibniz, para esto consideremos el mapeo $\phi_x : D \to D$ definido como $\phi_x(y) = x \circ y$ para todo $x, y \in D$. Por el axioma 2 de la Definición 7 se tiene que cada mapeo ϕ_x es biyectivo, así tenemos el mapeo $\phi : D \to Aut(D)$ donde $\phi(x) := \phi_x$.

Por otro lado, para toda $x \in D$, ϕ_x es suave y $\phi_x(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$, así que, derivamos en $\mathbf{e}$ a ϕ_x y tenemos $\Phi_x := D_{\mathbf{e}}\phi_x : T_{\mathbf{e}}D \to T_{\mathbf{e}}D$. Así mismo, definimos la función $\Phi := D_{\mathbf{e}}\phi : D \to GL(T_{\mathbf{e}}D)$ como $\Phi(x) = \Phi_x$ y es tal que $\Phi(\mathbf{e}) = Id$. Por último, derivamos a Φ en $\mathbf{e}$ y tenemos el mapeo $ad : D_{\mathbf{e}}\Phi : T_{\mathbf{e}}D \to gl(T_{\mathbf{e}}D)$, el cual nos permite definir el corchete $[X, Y] := ad_X(Y)$ para todo $X, Y \in T_{\mathbf{e}}D$.

Sólo queda por mostrar que $(T_{\mathbf{e}}D, [\ ,\ ])$ es un álgebra de Leibniz, es decir, que el corchete satisface la identidad de Leibniz:

De la definición de rack, sabemos que para todo $x, y, z \in D$ tenemos:

$$\phi_x(\phi_y(z)) = \phi_{\phi_x(y)}(\phi_x(z)) \tag{2.1}$$

Derivando en 2.1 primero respecto a z y luego respecto a y en $\mathbf{e}$, tenemos:

$$\Phi_x([Y, Z]) = [\Phi_x(Y), \Phi_x(Z)] \tag{2.2}$$

Por último, derivamos en 2.2 respecto a x en $\mathbf{e}$ y tenemos:

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$$

Lo cual muestra que $(T_{\mathbf{e}}D, [\ ,\ ])$ es álgebra de Leibniz.

Todo lo anterior se resume en el siguiente teorema (ver [8]):

Teorema 17 *Sea* $(Q, \circ, 1)$ *un rack de Lie y sea* $\mathfrak{g} = T_1Q$. *Entonces existe un mapeo bilineal* $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *tal que:*
1. $(\mathfrak{g}, [,])$ *es una álgebra de Leibniz,*
2. Para todo $x \in Q$ *el mapeo* $\Phi_x = D_1\phi_x$ *es un automorfismo de* $(\mathfrak{g}, [,])$,
3. Si $adj : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *está definida por* $adj(X) = adj_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *donde* $adj_X(Y) = [X,Y]\ \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ *entonces* $adj = D_1\Phi$.

El recíproco de esta relación, que significaría tener la integración de las álgebras de Leibniz, sólo es posible (por ahora), cuando las álgebras son escindidas, como las del Ejemplo 14. Para ese caso podemos enunciar el siguiente teorema (ver [8]):

Teorema 18 *Si* $(L = \mathfrak{g} \oplus V, [,])$ *es una álgebra de Leibniz escindida entonces existe un digrupo* $(D, \vdash, \dashv, \mathbf{e})$ *para el cual* $L = T\mathbf{e}D$.

A grandes rasgos, la idea principal para la demostración de este teorema es relacionar la descomposición en producto de los digrupos (Teorema 4), con la escisión de algunas álgebras de Leibniz, de manera que si el álgebra escindida tiene la forma $(L = \mathfrak{g} \oplus V, [\ ,\ ])$ entonces el digrupo resultante será de la forma $(D = G \times E, \vdash, \dashv, (1, e))$, donde $\mathfrak{g} = T_1G$ y $V = T_eE$.

2.4. Diálgebras

Las diálgebras tienen su origen en la K-teoría algebraica. Estas álgebras son espacios vectoriales dotados con dos operadores asociativos que cumplen algunas propiedades, que de hecho son muy similares a las de los digrupos. Debido a esta similitud, las diálgebras y digrupos están relacionados, esto lo mostraremos en el último capítulo; por ahora veamos algunas nociones básicas de las diálgebras.

Definición 19 *Una diálgebra* $(D, \vdash, \dashv)$ *es una tripleta compuesta por un* $\mathbb{k}$*-módulo* D*, con* $\mathbb{k}$ *un campo de característica cero y dos mapeos* $\mathbb{k}$*-lineales y asociativos* $\vdash, \dashv: D \otimes D \to D$ *tales que se cumplen los siguientes axiomas para todo* $x, y, z \in D$*.*
1. $x \dashv (y \dashv z) = x \dashv (y \vdash z)$*,*
2. $(x \vdash y) \vdash z = (x \dashv y) \vdash z$*,*
3. $x \vdash (y \dashv z) = (x \vdash y) \dashv z$*.*

Notamos que, a diferencia de los digrupos, en las diálgebras no necesariamente se tienen unidades barra (halo) ni inversos laterales. Sin embargo, sí existe el concepto de diálgebras con unidad barra, las cuales Loday llama *diálgebras unitarias* y son estudiadas en [9].

Ejemplo 20 *Sea* $A = \mathfrak{g} \oplus L$ *donde* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie y* L *es un espacio vectorial donde* $\mathfrak{g}$ *actúa linealmente. Definimos* $\vdash, \dashv: A \times A \to A$ *como:*

$$\begin{aligned}(a, \alpha) \vdash (b, \beta) &= (a + b, a \cdot \beta)\\ (a, \alpha) \dashv (b, \beta) &= (a + b, \alpha)\end{aligned}$$

Para todo $(a, \alpha), (b, \beta) \in A$*. Se verifica fácilmente que* $(A, \vdash, \dashv)$ *es diálgebra (unitaria).*

Toda diálgebra $(A, \vdash, \dashv)$ se puede dotar de una estructura de álgebra de Leibniz $(A, [\ ,\ ])$ definiendo $[x, y] := x \vdash y - y \dashv x$ para todo $x, y \in A$. De manera recíproca, se tiene la noción de la diálgebra universal envolvente que permite, a partir de una álgebra de Leibniz, obtener una diálgebra. De aquí que existe una estrecha relación entre estas dos categorías. Todo esto lo muestra Loday en [11], incluyendo también la noción de homomorfismo de diálgebra, el cual lo mostraremos a continuación:

Definición 21 *Un homomorfismo de diálgebras $f : D_1 \to D_2$ es un mapeo $\mathbb{k}$-lineal tal que*

$$\begin{aligned} f(x \vdash_1 y) &= f(x) \vdash_2 f(y) \\ f(x \dashv_1 y) &= f(x) \dashv_2 f(y) \end{aligned}$$

Esto muestra que las diálgebras conforman una categoría. Como nuestro interés es relacionar el concepto de acción de digrupo con el mismo concepto en la categoría de las diálgebras, a continuación veremos rápidamente la definición de acción de diálgebra, el cual se puede encontrar con detalle en [9]:

Definición 22 *Dada una diálgebra $(A, \vdash, \dashv)$ decimos que A actúa sobre un $\mathbb{k}$-módulo M por la izquierda, si existen $\trianglerighteq, \trianglelefteq : A \times M \to M$ tales que para todo $x, y \in A$ y todo $m \in M$ se tiene:*

1. $x \trianglerighteq (y \trianglerighteq m) = (x \vdash y) \trianglerighteq m,$

2. $x \trianglelefteq (y \trianglelefteq m) = (x \dashv y) \trianglelefteq m$

3. $x \trianglelefteq (y \trianglelefteq m) = x \trianglelefteq (y \trianglerighteq m),$

4. $(x \vdash y) \trianglerighteq m = (x \dashv y) \trianglerighteq m,$

5. $x \trianglerighteq (y \trianglelefteq m) = (x \vdash y) \trianglelefteq m.$

De manera análoga se define una acción derecha de una diálgebra. Para definir una acción bilateral de una diálgebra necesitamos cuatro mapeos (dos para la acción derecha y otros dos para la izquierda), tales que se cumplan las identidades correspondientes, las cuales se basan en los axiomas de la definición de diálgebra.

Veamos ahora un ejemplo que nos será de utilidad en el Capítulo 3.

Ejemplo 23 *Dadas dos diálgebras* $(D_1, \vdash, \dashv)$*;* $(D_2, \triangleright, \triangleleft)$ *y un homomorfismo de diálgebras* $f : D_1 \to D_2$*, se define la acción de* D_1 *en* D_2 *inducida por* f *de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} x_1 \trianglerighteq x_2 &:= f(x_1) \triangleright x_2 \\ x_1 \trianglelefteq x_2 &:= f(x_1) \triangleleft x_2 \end{aligned}$$

para todo $x_i \in D_i, i = 1, 2.$

Como es de esperarse, uno de los primeros tipos de acción en cualquier categoría es el inducido por los homorfismos, veamos que esto se tiene también para las diálgebras en la siguiente proposición (ver [9]):

Proposición 24 *Todo homomorfismo de diálgebras* $f : D_1 \to D_2$ *induce una acción izquierda de* $(D_1, \vdash_1, \dashv_1)$ *sobre* $(D_2, \vdash_2, \dashv_2)$ *vía:*

$$\begin{aligned} x_1 &\trianglerighteq x_2 := f(x_1) \vdash_2 x_2 \\ x_1 &\trianglelefteq x_2 := f(x_1) \dashv_2 x_2 \end{aligned}$$

Para todo $x_i \in D_i$*,* $i = 1, 2.$

La demostración de la anterior proposición es fácil.

En [9], Loday hace un estudio detallado de estas estructuras y sus relaciones con otras categorías, por lo que referimos al lector a esta referencia para más detalles sobre estas construcciones.

Capítulo 3

Algunos aspectos algebraicos de la acción de digrupo

3.1. Definición y ejemplos

Sabemos que los digrupos son una generalización de los grupos. Veremos que el concepto de acción de digrupo, que definimos a continuación, también generaliza al de acción de grupo; además, veremos también que la acción de un digrupo en un conjunto está dada por un par de mapeos donde uno conserva la teoría clásica de grupos y el otro aporta la parte novedosa de esta definición.

Definición 25 *Una acción (izquierda) de un digrupo D sobre un conjunto M es un par de funciones:*

$$\ltimes, \rtimes : D \times M \to M,$$

tales que para todo $x, y \in D$ y $m \in M$:

1. $x \ltimes (y \ltimes m) = (x \vdash y) \ltimes m.$

2. $\mathbf{e} \ltimes m = m$.

3. $x \rtimes (y \rtimes m) = (x \dashv y) \rtimes m$.

4. $x \rtimes (y \ltimes m) = x \rtimes (y \rtimes m)$.

5. $x \ltimes (y \rtimes m) = (x \vdash y) \rtimes m$.

Es claro que se puede definir de manera totalmente análoga a las acciones derechas. De hecho, para establecer la conexión con los tipos clásicos de acción definidos en otras categorías esto será necesario y será hecho en el Apéndice A. Además, se estudiarán algunas propiedades de las acciones bilaterales de los digrupos. No obstante, las acciones en el sentido que hemos introducido aquí tienen interés por sí mismas, pues como mencionamos, presentan varias propiedades interesantes y novedosas. En el resto de este capítulo, sólo consideraremos acciones izquierdas. Por consiguiente, cuando hablemos de acción será siempre una acción izquierda, en el sentido de la definición que acabamos de dar, así que abusando un poco del lenguaje, pero en aras de simplificar la terminología, en lo siguiente llamaremos al mapeo $\ltimes$ acción izquierda (en vez de algo como "la primera de las dos operaciones de la acción"), y a $\rtimes$ acción derecha.

Veamos dos ejemplos que muestran que las construcciones típicas, que son usadas en grupos, tienen sus respectivos análogos para digrupos también.

Ejemplo 26 *El ejemplo más básico, y que de hecho es la motivación de nuestra definición, es el siguiente: Todo digrupo actúa sobre sí mismo vía traslación izquierda. Podemos definir en un digrupo $(D, \vdash, \dashv, \mathbf{e})$ la acción sobre sí mismo como $(\ltimes, \rtimes)$ donde $\ltimes \; \equiv \vdash$ y $\rtimes \; \equiv \dashv$. Es claro que se satisfacen los axiomas de la definición 25 usando las propiedades de $\vdash$ y $\dashv$.*

Ejemplo 27 *Similarmente, todo digrupo actúa sobre sí mismo vía conjugación: Definimos $\ltimes$ como la conjugación estándar (ver [8], [13]), es decir, para todo $x, y \in D$ definimos:*

$$x \ltimes y = x \vdash y \dashv x^{-1}$$

Fijada $\ltimes$ entonces tenemos al menos dos opciones para definir $\rtimes$:

$$x \rtimes m = x \dashv m \dashv x^{-1} \ ; \ x \rtimes m = x \vdash m \vdash x^{-1}.$$

Veamos que se cumplen los axiomas tomando la primera opción (la otra se muestra de manera similar). Sean $x, y, z \in D$:

1. $$\begin{aligned} x \ltimes (y \ltimes z) &= x \vdash (y \vdash z \dashv y^{-1}) \dashv x^{-1} \\ &= (x \vdash y) \vdash z \dashv (y^{-1} \vdash x^{-1}) \\ &= (x \vdash y) \vdash z \dashv (x \vdash y)^{-1} \\ &= (x \vdash y) \ltimes z \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \mathbf{e} \ltimes x &= \mathbf{e} \vdash x \dashv \mathbf{e}^{-1} \\ &= \mathbf{e} \vdash x \dashv \mathbf{e} \\ &= x \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x \rtimes (y \rtimes z) &= x \dashv (y \dashv z \dashv y^{-1}) \dashv x^{-1} \\ &= (x \dashv y) \dashv z \dashv (y^{-1} \dashv x^{-1}) \\ &= (x \dashv y) \dashv z \dashv (x \dashv y)^{-1} \\ &= (x \dashv y) \rtimes z \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x \rtimes (y \ltimes z) &= x \dashv (y \vdash z \dashv y^{-1}) \dashv x^{-1} \\ &= x \dashv (y \dashv z \dashv y^{-1}) \dashv x^{-1} \\ &= x \dashv (y \rtimes z) \dashv x^{-1} \\ &= x \rtimes (y \rtimes z) \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x \ltimes (y \rtimes z) &= x \vdash (y \dashv z \dashv y^{-1}) \dashv x^{-1} \\ &= (x \vdash y) \dashv z \dashv (y^{-1} \vdash x^{-1}) \\ &= (x \vdash y) \dashv z \dashv (x \vdash y)^{-1} \\ &= (x \vdash y) \rtimes z \end{aligned}$$

De (1) y (2) de la Definición 25 podemos notar que la acción izquierda corresponde a una acción de grupo. Por otro lado, si D es simplemente un grupo G y $\cdot : G \times H \to H$ es una acción de D sobre algún conjunto H, entonces podemos hacer $\ltimes \equiv \rtimes \equiv \cdot$ y vemos fácilmente que se cumplen los axiomas de la Definición 25; es decir, la definición de acción de digrupo que hemos dado es más general que la de grupo. Sin embargo, aún en este caso de que el digrupo sea un grupo no necesitamos una condición tan fuerte como la igualdad de los dos mapeos para obtener una acción de digrupo; a continuación veremos un ejemplo donde el digrupo es un grupo, pero la acción izquierda es diferente a la derecha:

Ejemplo 28 *Supongamos que G es un grupo actuando sobre un conjunto M con un punto fijo m_0. Tomamos $\ltimes$ como esta acción y definimos $\rtimes$ como $g \rtimes m = m_0$ $\forall g \in G$ y $\forall m \in M$. Veamos que esto define una acción del digrupo $D = G$ sobre M: Los axiomas (1) y (2) de la Definición 25 se tienen ya que $\ltimes$ es una acción de grupo. (3) y (4) se ven fácilmente porque la acción final es $\rtimes$ la cual es constante. Por último, el axioma (5) se tiene ya que dados $x, y \in G$ y $m \in M$:*

$$\begin{aligned} x \ltimes (y \rtimes m) &= x \ltimes m_0 \\ &= m_0 \\ &= (x \vdash y) \rtimes m_0 \end{aligned}$$

Para evitar situaciones que podrían considerarse como triviales, en lo siguiente siempre consideraremos digrupos con halo no trivial, es decir, digrupos que no son grupos. Como ya hemos visto, las acciones de digrupos involucran dos mapeos. En el siguiente lema veremos dos propiedades de la acción izquierda ($\ltimes$) que nos ayudarán a entender como se relaciona esta acción con las propiedades del digrupo.

Lema 29 *Si $(\ltimes, \rtimes)$ es una acción de D sobre M, entonces se cumple:*

1. Si α es una unidad barra de D, entonces $\alpha \ltimes m = m$ para toda m en M.

2. Para todo $x, y \in D$, $m \in M$, $(x \vdash y) \ltimes m = (x \dashv y) \ltimes m$.

Demostración. 1. Sea α unidad barra de D y sea $m \in M$.

$$\begin{aligned} \alpha \ltimes m &= (\alpha \dashv \mathbf{e}) \ltimes m \\ &= (\alpha \vdash \mathbf{e}) \ltimes m \\ &= \mathbf{e} \ltimes m \\ &= m \end{aligned}$$

2. Sean $x, y \in D$ y $m \in M$:

$$\begin{aligned} (x \vdash y) \ltimes m &= (x \vdash y) \ltimes (\mathbf{e} \ltimes m) \\ &= ((x \vdash y) \vdash \mathbf{e}) \ltimes m \\ &= ((x \dashv y) \vdash \mathbf{e}) \ltimes m \\ &= (x \dashv y) \ltimes (\mathbf{e} \ltimes m) \\ &= (x \dashv y) \ltimes m. \end{aligned}$$

■

Tenemos entonces que con la acción izquierda, el halo del digrupo actúa trivialmente sobre M. Por otro lado, en el siguiente lema, mostraremos que la acción derecha actúa de manera diferente a la izquierda.

Lema 30 *Sea $D = G \times E$ un digrupo actuando en el conjunto M; entonces, para todo $x \in D$ y todo $m \in M$, se tiene:*

1. $x \rtimes (\mathbf{e} \rtimes m) = x \rtimes m$. En particular, $e \rtimes (e \rtimes m) = e \rtimes m$. Esto implica que $\rtimes$ define una acción del grupo G sobre el conjunto $e \rtimes M$.

2. $x \rtimes m = \alpha \rtimes (A \ltimes m)$, donde $A = \mathbf{e} \dashv x$ es la parte de grupo y $\alpha = x \dashv x^{-1}$ es la parte de unidad barra x, como se muestra en el Teorema 4.

3. Sean $\alpha, \beta \in E$ dos unidades barra. Entonces, para todo $m \in M$

$$\alpha \rtimes (\beta \rtimes m) = \alpha \rtimes m.$$

Demostración. Sean $x \in D$ y $m \in M$

$$\begin{aligned} 1)\ x \rtimes (\mathbf{e} \rtimes m) &= (x \dashv \mathbf{e}) \rtimes m \\ &= x \rtimes m \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2)\ x \rtimes m &= (x \dashv x^{-1} \dashv (x^{-1})^{-1}) \rtimes m \\
&= (\alpha \dashv A) \rtimes m \\
&= \alpha \rtimes (A \rtimes m) \\
&= \alpha(A \ltimes m)
\end{aligned}
$$

3) Sean $\alpha, \beta \in E$.

$$
\begin{aligned}
\alpha \rtimes (\beta \rtimes m) &= (\alpha \dashv \beta) \rtimes m) \\
&= \alpha \rtimes m
\end{aligned}
$$

y así tenemos lo que queríamos demostrar.

De (1) podemos ver que si en lugar de $\mathbf{e}$ ponemos cualquier otra unidad barra, entonces la igualdad se mantiene; es decir, $G \rtimes M = G \rtimes (E \rtimes M)$ y también $E \rtimes M = E \rtimes (E \rtimes M)$; luego, si primero hacemos que E actúe en M via $\rtimes$, y después que D actúe en $E \rtimes M$ via $\rtimes$, entonces se tiene que $D \rtimes (E \rtimes M) = D \rtimes M$. Esto muestra que hay una cierta propiedad de idempotencia para $\rtimes$. ∎

Sabemos que la acción izquierda corresponde a una acción de grupo; por lo tanto, las unidades barra deben actuar trivialmente vía esta acción. Sin embargo, si al menos una unidad barra actuara trivialmente respecto a $\rtimes$ entonces esto obligaría a que las dos acciones ($\ltimes$ y $\rtimes$), fueran iguales. Veamos la siguiente proposición para demostrar esta afirmación.

Proposición 31 *Si existe $\alpha \in E$ tal que $\alpha \rtimes m = m$ para todo $m \in M$ entonces $\ltimes \equiv \rtimes$.*

Demostración. Sean $x \in D$, $m \in M$. Se tiene:

$$
\begin{aligned}
x \rtimes m &= \boldsymbol{\alpha} \rtimes (x \rtimes m) \\
&= \boldsymbol{\alpha} \rtimes (x \ltimes m) \\
&= x \ltimes m
\end{aligned}
$$

∎

Como consecuencia de este resultado, y una vez más para evitar situaciones triviales, las acciones que nos interesan son en las que $\ltimes \neq \rtimes$, por esa razón, en lo que sigue supondremos que no hay puntos fijos respecto a la acción $\rtimes$ en M. Por otra parte, del Lema 29 se sigue lo siguiente:

Proposición 32 *Sea D actuando en M; entonces, para todo $x \in D$, $m \in M$,*

$$x \ltimes m = (x^{-1})^{-1} \ltimes m;$$

en particular, $\ltimes$ sólo depende de la parte de grupo de D, es decir, sólo depende de G.

Demostración. Sabemos que $(x^{-1})^{-1} = x \vdash \mathbf{e}$ para todo $x \in D$. Por lo tanto, $(x^{-1})^{-1} \ltimes m = (x \vdash \mathbf{e}) \ltimes m = x \ltimes m$. ■

Esto quiere decir que la acción izquierda es equivalente a $*$, la cual es una acción del grupo de inversos de D, es decir, una acción de G sobre el conjunto M.

3.2. Teorema de caracterización

Con las proposiciones anteriores observamos que la clave para entender las acciones de digrupos está en entender la operación $\rtimes$, ya que este mapeo es el que nos aportará la diferencia entre las acciones de digrupos y las de grupos. Por esta razón, introducimos el mapeo $\varepsilon : E \times M \to M$, dado por $\varepsilon(\alpha, m) = (1, \alpha) \rtimes m$. También usaremos la notación $\varepsilon_\alpha : M \to M$ para referirnos al mapeo $\varepsilon(\alpha, \cdot) : M \to M$ con α fijo en E. Del numeral 3 del Lema 30, podemos observar que la familia $\{\varepsilon_\alpha\}$ cumple la siguiente regla de composición:

$$\varepsilon_\alpha \circ \varepsilon_\beta = \varepsilon_\alpha$$

Tal propiedad se conoce en la literatura (ver [15]) como **propiedad de semigrupo cero izquierdo** (LZS). Con todo lo anterior podemos demostrar el siguiente teorema de caracterización para acciones de digrupos, al cual llegamos basándonos en el teorema de descomposición de digrupos, Teorema 4:

Teorema 33 *Sea $D = G \times E$ un digrupo actuando en un conjunto M vía los mapeos $(\ltimes, \rtimes)$. Entonces, el mapeo $* : G \times M \to M$ definido como $*(a, m) := a \ltimes m$ es una acción del grupo G sobre M, y el mapeo $\varepsilon : E \times M \to M$ definido como $\varepsilon(\alpha, m) := (1, \alpha) \rtimes m$ es equivariante y cumple la propiedad LZS.*

Recíprocamente, dada una acción del grupo G en un conjunto M, y un mapeo equivariante $\varepsilon : E \times M \to M$, tal que la familia $\{\varepsilon_\alpha\}$ tiene la propiedad de semigrupo cero izquierdo, se tiene una acción del digrupo $D = G \times E$ definiendo $\ltimes, \rtimes$ como sigue: Para todo $x = (A, \alpha) \in D$ y $m \in M$, definimos

$$x \ltimes m = A * m \; ; \; x \rtimes m = \varepsilon(\alpha, A * m).$$

Demostración. Para demostrar la primera parte del teorema, observamos de la Proposición 32 que $\ltimes$ sólo depende de la parte de grupo de D, esto sumado a los axiomas (1) y (2) de la Definición 25, implica que $\ltimes$ es una acción del grupo G sobre M, la cual denotaremos por $*$.

Para el mapeo $\varepsilon : E \times M \to M$ definido por $\varepsilon(\alpha, m) := (1, \alpha) \rtimes m$ $\forall \alpha \in E, m \in M$ usamos el numeral (3) del Lema 30 y tenemos $\forall \alpha, \beta \in E; m \in M$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha(\varepsilon_\beta(m)) &= \alpha \rtimes (\beta \rtimes m) \\ &= \alpha \rtimes m \\ &= \varepsilon_\alpha(m) \end{aligned}$$

Lo anterior muestra la propiedad LZS del ε. Para demostrar la equivarianza del mapeo ε, consideramos la acción $*$ y tomamos cualquier $A \in G$; así tenemos que probar que

$$A * \varepsilon(\alpha, m) = \varepsilon(A \cdot \alpha, A * m) \tag{3.1}$$

donde $A \cdot \alpha$ representa la acción del grupo G sobre el halo E que se describe en (1) del Teorema 4. Del lado izquierdo de (3) tenemos:

$$A * \varepsilon(\alpha, m) = A \ltimes (\alpha \rtimes m) = (A \vdash \alpha) \rtimes m;$$

Ahora, del otro lado de (3) tenemos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(A \cdot \alpha, A * m) &= \varepsilon(A \vdash \alpha \dashv A^{-1}, A \ltimes m) \\
&= (A \vdash \alpha \dashv A^{-1}) \rtimes (A \ltimes m) \\
&= (A \vdash \alpha) \rtimes (A^{-1} \rtimes (A \ltimes m)) \\
&= (A \vdash \alpha) \rtimes (A^{-1} \dashv A) \ltimes m)) \\
&= (A \vdash \alpha) \rtimes m
\end{aligned}$$

Lo cual implica la equivarianza de ε.

Ahora, para la parte recíproca, supongamos que tenemos la acción $*$ del grupo G sobre el conjunto M y el mapeo $\varepsilon : E \times M \to M$ equivariante y con la propiedad LZS. Luego, definiendo en $D \times M = G \times E \times M$ los mapeos $\ltimes, \rtimes$ de la siguiente manera:

$$(A, \alpha) \ltimes m = A * m \ ; \quad (A, \alpha) \rtimes m = \varepsilon_\alpha(A * m),$$

veamos que se cumplen los axiomas de la Definición 25. Sean $(A, \alpha), (B, \beta) \in D = G \times E; m \in M$:

1) $$\begin{aligned}
(A, \alpha) \ltimes ((B, \beta) \ltimes m) &= (A, \alpha) \ltimes (B * m) \\
&= A * (B * m) \\
&= AB * m \\
&= (AB, A \cdot \beta) \ltimes m \\
&= ((A, \alpha) \vdash (B, \beta)) \ltimes m
\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}
\mathbf{e} \rtimes m &= (1, e) \rtimes m \\
&= 1 * m \\
&= m
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3)\ (A,\alpha) \rtimes ((B,\beta) \rtimes m) &= (A,\alpha) \rtimes \varepsilon(\beta, B * m) \\
&= \varepsilon(\alpha, A * \varepsilon(\beta, B * m)) \\
&= \varepsilon(\alpha, \varepsilon(A \cdot \beta, AB * m) \\
&= \varepsilon_{\alpha}(\varepsilon_{A\cdot\beta}(AB * m)) \\
&= \varepsilon_{\alpha}(AB * m) \\
&= \varepsilon(\alpha, AB * m) \\
&= (AB, \alpha) \rtimes m \\
&= ((A,\alpha) \dashv (B,\beta)) \rtimes m \\
4)\ (A,\alpha) \rtimes ((B,\beta) \rtimes m) &= (A,\alpha) \rtimes \varepsilon(\beta, B * m) \\
&= \varepsilon(\alpha, \varepsilon(A \cdot \beta, AB * m)) \\
&= \varepsilon_{\alpha}(\varepsilon_{A\cdot\beta}(AB * m)) \\
&= \varepsilon_{\alpha}(AB * m) \\
&= \varepsilon(\alpha, A * (B * m)) \\
&= (A,\alpha) \rtimes (B * m) \\
&= (A,\alpha) \rtimes ((B,\beta) \ltimes m) \\
5)\ (A,\alpha) \ltimes ((B,\beta) \rtimes m) &= (A,\alpha) \ltimes \varepsilon(\beta, B * m) \\
&= A * \varepsilon(\beta, B * m) \\
&= \varepsilon(A \cdot \beta, A * (B * m)) \\
&= (AB, A \cdot \beta) \rtimes m \\
&= ((A,\alpha) \vdash (B,\beta)) \rtimes m
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Retomando el digrupo del Ejemplo 5, veremos un ejemplo de una acción de este digrupo sobre $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ejemplo 34 *Sean $G = SO(n)$, $E = S^n$ y $M = \mathbb{R}^{n+1}$, como en el Ejemplo 5 . La acción de digrupo que formaremos para $A \in SO(n)$, $\alpha, \beta \in S^n$ y $(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ estará dada por:*

$$A * (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (A(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1})$$
$$\varepsilon : E \times M \to M;\ \varepsilon(\alpha, m) = \|m\|\alpha.$$

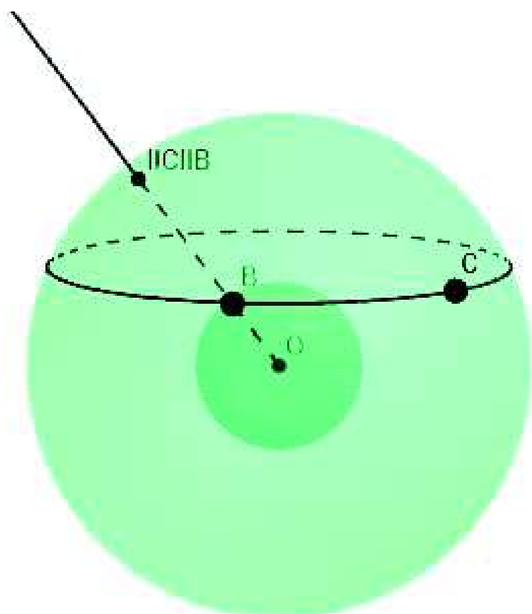
Para probar la equivarianza del mapeo ε tenemos:

$$\begin{aligned} A * \varepsilon(\alpha, m) &= A * \|m\|\, \alpha \\ &= \|m\|\, (A \cdot \alpha) \\ &= \|A * m\|\, (A \cdot \alpha) \\ &= \varepsilon(A \cdot \alpha, A * m); \end{aligned}$$

Similarmente, probamos la condición LZS:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha(\varepsilon_\beta(m)) &= \varepsilon_\alpha(\, \|m\|\, \beta) \\ &= \|\|m\|\, \beta\|\, \alpha \\ &= \|m\|\, \alpha \\ &= \varepsilon_\alpha(m) \end{aligned}$$

Para tener una idea gráfica de lo que hace esta acción, es conveniente pensar en el caso particular cuando $n = 2$. En este caso $\ltimes$ corresponde a rotaciones alrededor del eje z, mientras que para la acción derecha $\rtimes$, si fijamos un elemento de $m \in \mathbb{R}^3$, m es enviado por $\rtimes$ a la esfera de radio $\|m\|$; esto quiere decir que las unidades barra actúan sobre m cambiando su dirección pero conservando su magnitud. Todo esto lo *podemos observar en la siguiente gráfica:*



donde $C \in \mathbb{R}^3 = M$ *y* $B \in S^2 = E$.

3.3. (Algunos) Tipos de acción

Haciendo uso del Teorema 33, veremos algunos tipos de acción de digrupo. Es decir, empezaremos con un digrupo $D = G \times E$ y una acción del grupo G sobre un conjunto M; luego daremos condiciones sobre el mapeo $\varepsilon : E \times M \to M$ que garanticen que este será equivariante y que cumplirá con la condición LZS. En general, encontrar mapeos explícitos que cumplan equivarianza y LZS no es una tarea fácil; sin embargo, como veremos, sí existen tipos interesantes de estos mapeos.

En lo siguiente, consideraremos al grupo G actuando en E vía $\cdot$, y en M vía $*$; también supondremos que existe $e \in E$ punto fijo respecto a $\cdot$ para así tener el digrupo $D = G \times E$.

Teniendo en cuenta que ε depende de dos variables (una en E y la otra en M), los casos más simples ocurren cuando ε sólo depende de una de esas variables; para esto, denotamos π_i a la proyección en el i-ésimo factor de $E \times M$ y llegamos a los siguientes tipos de acción, que son los más simples que se pueden concebir:

- Tipo 1: Si ε se factoriza en la proyección en E, esto es, ε está dada por una función equivariante $f : E \to M$ donde $\varepsilon(\alpha, m) = f \circ \pi_1(\alpha, m)$.
- Tipo 2: Si ε se factoriza en la proyección en M. Para este caso necesitamos una función equivariante $g : M \to M$, que sea además idempotente, es decir, $g \circ g = g$. Similar al Tipo 1 definimos $\varepsilon(\alpha, m) = g \circ \pi_2(\alpha, m)$.

Nota 35 *La diferencia entre estos dos tipos de acciones es que en las de Tipo 2 las unidades barra no juegan un papel importante, ya que el mapeo ε no depende de ellas, es decir, la familia $\{\varepsilon_\alpha\}$ es igual a $\{g\}$, lo cual implica que la acción del digrupo depende sólo de la acción del grupo y de los elementos del espacio homogéneo, mientras que en contraste, en las de Tipo 1, las unidades barra no actúan trivialmente sobre M, es decir, la familia $\{\varepsilon_\alpha\}$ no es constante: En este tipo de acciones las unidades barra sí cambian, según f, a los elementos de M.*

Pero veamos ante todo la demostración de que los mapeos descritos en los dos tipos de acciones de digrupos cumplen con las condiciones del Teorema 33.

Proposición 36 *Las condiciones descritas en los mapeos de tipos 1 y 2 inducen acciones de digrupos.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in E$; $m \in M$.
Para Tipo 1:

$$\varepsilon_\alpha(\varepsilon_\beta(m)) = \varepsilon(\alpha, f(\beta)) = f(\alpha) = \varepsilon_\alpha(m)$$

así tenemos la condición LZS. Además, como f es equivariante y ε no depende de m, entonces ε también es equivariante.
Para Tipo 2:

$$\varepsilon_\alpha(\varepsilon_\beta(m)) = g(g(m)) = g(m) = \varepsilon_\alpha(m)$$

Luego, ε tiene la propiedad LZS. Similar al Tipo 1, como g es equivariante y ε sólo depende de g, entonces ε es equivariante también.
De aquí que en cualquiera de los dos tipos se tienen acciones de digrupo. ■

Veamos ahora algunos ejemplos de estos tipos de acción:

Ejemplo 37 *Sean $G = S_n$ el grupo de permutaciones, $E = \mathbb{R}^{n+1}$ y $M = \mathbb{R}^n$. Supongamos que G actúa tanto en E como en M permutando las n primeras coordenadas y fijando la coordenada $n+1$ en el caso de E. Consideremos $f : E \to M$ como la proyección de las n primeras coordenadas. Así, es inmediato que f es equivariante y por lo tanto, definiendo $\varepsilon(\alpha, m) = f(\alpha)$ tenemos una acción del digrupo $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ sobre $\mathbb{R}^n$ la cual es del Tipo 1.*

Ejemplo 38 *Similar al ejemplo anterior, sean $G = S_n$, $E = R^n$, $M = R^n$ y la acción de G nuevamente las permutaciones en las componentes. Definiendo $g(m) = \frac{\|m\|}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)$, es obvio que g equivariante. Además, como las permutaciones son isometrías, entonces g es idempotente ya que*

$$\begin{aligned}
g(g(m)) &= g\left(\tfrac{\|m\|}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)\right) \\
&= \frac{\left\|\frac{\|m\|}{\sqrt{n}}(1,\ldots,1)\right\|}{\sqrt{n}}(1, ..., 1) \\
&= \tfrac{\|m\|}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1) \\
&= g(m)
\end{aligned}$$

Notemos ahora que en el Ejemplo 34 tenemos una acción que no es ni de Tipo 1 ni de Tipo 2, esto, por supuesto, quiere decir que hay más tipos de acciones, las cuales involucran tanto la parte de grupo como el halo del digrupo, lo que evidentemente las hace más interesantes que las anteriores. Aunque sería sin duda deseable llegar a una clasificación útil de los distintos tipos de acciones, tal tarea parece sumamente compleja; no obstante, en lo siguiente mostraremos otros tipos de acción en esta dirección.

Como ya hemos dicho, uno de los aspectos más importantes del estudio de los digrupos es su conexión con algunas álgebras, en especial, las álgebras de Leibniz (ver [9] y [11]). Pensando en esta relación en el caso de las acciones, en el próximo capítulo estudiaremos acciones suaves donde la parte de grupo del digrupo es un grupo de Lie y el espacio donde actúe linealmente tal grupo sea una variedad que, en la mayoría de los casos, será un $\mathbb{k}-$espacio vectorial donde $\mathbb{k}$ es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, es decir, consideraremos representaciones de G en E. Estas representaciones no sólo son interesantes desde el punto de vista geométrico, también existen algunas aplicaciones a la física de este concepto; por ejemplo en el caso de las álgebras de Leibniz (ver [16]), hay trabajos recientes basados en representaciones. Guiándonos en esa dirección, consideraremos algunas condiciones adicionales para las acciones de los digrupos; estudiaremos acciones sobre $\mathbb{k}$-espacios vectoriales con $\mathbb{k}$ un campo de característica cero.

Proposición 39 *Supongamos $D = G \times E$ es digrupo y que G actúa linealmente sobre un $\mathbb{k}$-espacio vectorial M. Sean $f : E \to M$ un mapeo equivariante y $g : M \to \mathbb{K}$ un mapeo lineal tal que para todo $m \in M$ y todo $A \in G$ se tiene que $g(A * m) = g(m)$ y $g \circ f \equiv 1$, entonces, el mapeo:*

$$\varepsilon(\alpha, m) := g(m) f(\alpha)$$

satisface las condiciones del Teorema 33 y por lo tanto induce una acción de D. Llamaremos a este tipo de acciones, ***Tipo 3.1***

Demostración. Sean $A \in G$; $\alpha, \beta \in E$ y $m \in M$.

1) LZS:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\alpha, \varepsilon(\beta, m)) &= \varepsilon(\alpha, g(m) f(\beta)) \\
&= g(g(m) f(\beta)) f(\alpha) \\
&= g(m) g(f(\beta)) f(\alpha) \\
&= g(m) f(\alpha) \\
&= \varepsilon(\alpha, m)
\end{aligned}$$

2) Equivarianza:

$$\begin{aligned}
A * \varepsilon(\alpha, m) &= A * g(m) f(\alpha) \\
&= g(m) f(A \cdot \alpha) \\
&= g(A * m) f(A \cdot \alpha) \\
&= \varepsilon(A \cdot \alpha, A * m)
\end{aligned}$$

Por el Teorema 33 tenemos la acción de D. $\blacksquare$

El Ejemplo 34 ilustra precisamente una acción del Tipo 3.1, donde $g \equiv \|.\| : M \to \mathbb{R}$ y f es la inclusión de E en M.

Proposición 40 *Supongamos, dada una representación de G en M, un mapeo equivariante $g : M \to M$, y un mapeo $f : E \to \mathbb{K}$ tal que para todo $A \in G$, $\alpha \in E$ y $m \in M$ se tiene $f(A \cdot \alpha) = f(\alpha)$ y $g(f(\alpha) g(m)) = g(m)$, entonces el mapeo*

$$\varepsilon(\alpha, m) = f(\alpha) g(m)$$

*satisface las condiciones del Teorema 33 y por lo tanto produce una acción de digrupo. Llamaremos a este tipo de acciones **Tipo 3.2**.*

Demostración. Sean $A \in G$; $\alpha, \beta \in E$ y $m \in M$.

1) LZS:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\alpha, \varepsilon(\beta, m)) &= \varepsilon(\alpha, f(\beta)g(m)) \\
&= f(\alpha)g(f(\beta)g(m)) \\
&= f(\alpha)g(m) \\
&= \varepsilon(\alpha, m)
\end{aligned}$$

2) Equivarianza:

$$\begin{aligned}
A * \varepsilon(\alpha, m) &= A * f(\alpha)g(m) \\
&= f(\alpha)(A * g(m)) \\
&= f(A \cdot \alpha)g(A * m) \\
&= \varepsilon(A \cdot \alpha, A * m)
\end{aligned}$$

Por el Teorema 33 tenemos la acción de D. ■

Finalmente, veamos el último tipo de acción que podemos describir con cierto grado de generalidad:

Proposición 41 *Sean D_1 y D_2 digrupos y sea $\Psi : D_1 \to D_2$ un homomorfismo de digrupos. Entonces para todo $(A_1, \alpha_1) \in D_1 = G_1 \times E_1$ y todo $x_2 \in D_2$ definimos:*

$$A_1 * x_2 = \Psi(A_1, e_1) \vdash_2 x_2$$

$$\varepsilon(\alpha_1, x_2) = \Psi(1_1, \alpha_1) \dashv_2 x_2$$

*Donde $\dashv_i$ and $\vdash_i$ denotan las operaciones del digrupo D_i, $i = 1, 2$. A este tipo de acciones las llamaremos **Tipo 4**.*

Demostración. Primero notemos que $*$ es una acción del grupo G_1 sobre D_2 ya que para todo $A_1, B_1 \in G_1$ y todo $x_2 \in D_2$ tenemos:

$$\begin{aligned}
A_1 * (B_1 * x_2) &= \Psi(A_1, e_1) \vdash_2 \Psi(B_1, e_1) \vdash_2 x_2 \\
&= \Psi((A_1, e_1) \vdash_1 (B_1, e_1)) \vdash_2 x_2 \\
&= \Psi(A_1 B_1, e_1) \vdash_2 x_2 \\
&= (A_1 B_1) * x_2
\end{aligned}$$

Además, como Ψ es homomorfismo de digrupos, entonces $\Psi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$ (en general $\Psi[G_1 \times \{e_1\}] \subseteq G_2$ y $\Psi[\{1_1\} \times E_1] \subseteq E_2$), luego $e_1 * x_2 = x_2$; es decir, $*$ es una acción de G_1 sobre D_2.

Por otro lado veamos que ε tiene la propiedad LZS y es equivariante:

LZS:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\alpha_1, \varepsilon(\beta_1, x_2)) &= \varepsilon(\alpha_1, \Psi(1_1, \beta_1) \dashv_2 x_2) \\
&= \Psi(1_1, \alpha_1) \dashv_2 (\Psi(1_1, \beta_1) \dashv_2 x_2) \\
&= \Psi((1_1, \alpha_1) \dashv_1 (1_1, \beta_1)) \dashv_2 x_2 \\
&= \Psi(1_1, \alpha_1) \dashv_2 x_2 \\
&= \varepsilon(\alpha_1, x_2)
\end{aligned}$$

Equivarianza:

$$\begin{aligned}
A_1 * \varepsilon(\alpha_1, x_2) &= A_1 * \Psi(1_1, \alpha_1) \dashv_2 x_2 \\
&= \Psi(A_1, e_1) \vdash_2 (\Psi(1_1, \alpha_1) \dashv_2 x_2) \\
&= \Psi((A_1, e_1) \vdash_1 (1_1, \alpha_1)) \dashv_2 x_2 \\
&= \Psi(A_1, A_1 \cdot \alpha_1) \dashv_2 x_2 \\
&= \Psi((1_1, A_1 \cdot \alpha_1) \dashv_1 (A_1, e_1)) \dashv_2 x_2 \\
&= \Psi(1_1, A_1 \cdot \alpha_1) \dashv_2 \Psi(A_1, e_1) \dashv_2 x_2 \\
&= \varepsilon(A_1 \cdot \alpha_1, \Psi(A_1, e_1) \dashv_2 x_2) \\
&= \varepsilon(A_1 \cdot \alpha_1, A_1 * x_2)
\end{aligned}$$

Lo cual implica que los homomorfismos de digrupos inducen una acción del primer digrupo en el segundo. ∎

Nota 42 *1. Como ilustración de los conceptos expuestos, el ejemplo anterior también se puede analizar directamente a partir de la Definición 25, definiendo de manera natural los mapeos:*

$$x_1 \ltimes x_2 := \Psi(x_1) \vdash_2 x_2; x_1 \rtimes x_2 := \Psi(x_1) \dashv_2 x_2$$

2. Hasta ahora hemos considerado acciones izquierdas de digrupo, pero para uso futuro y teniendo la definición de acción derecha, de manera similar a la Definición 25, se puede mostrar que un homomorfismo de digrupos también define una acción derecha de D_1 en D_2 definiendo:

$$x_2 \ltimes x_1 := x_2 \vdash_2 \Psi(x_1);\ x_2 \rtimes x_1 := x_2 \dashv_2 \Psi(x_1)$$

3. De (1) y (2) se puede demostrar entonces que los homomorfismos de digrupos inducen acciones bilaterales de D_1 en D_2 (daremos los detalles en el Apéndice A).

Concluimos esta sección con la siguiente observación: aunque las condiciones para una acción de digrupo parecen bastante restrictivas y en este punto estamos lejos de tener una clasificación satisfactoria para estas acciones, en realidad hay muchos ejemplos. De hecho, el siguiente ejemplo es de una acción de digrupo que no es de ninguno de los tipos anteriores. Además, este tipo de ejemplo parece interesante ya que el grupo subyacente es unitario, y por lo tanto podría tal vez encontrar algunas aplicaciones en física, por ejemplo en física cuántica, donde, como es bien sabido, los grupos unitarios aparecen como simetrías de las partículas elementales:

Ejemplo 43 *Sea $M = P(\mathbb{C}^2)$ el espacio de polinomios en $\mathbb{C}$ con dos variables y sea $D = G \times E$ el digrupo con parte de grupo $G = SU(2)$, y halo los polinomios de grado l, $E = P_l(\mathbb{C}^2) = \{p \in P(\mathbb{C}^2) : p(X,Y) = \sum_i a_i X^{l-i} Y^i\}$, con la acción de grupo natural por pullback, $\cdot : G \times E \to E$; es decir, para todo $A \in G$, $\alpha \in E$ tenemos:*

$$A \cdot \alpha(X,Y) = \alpha\left(A^{-1}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right)$$

(Para evitar complicaciones notacionales, identificaremos los vectores fila con los columna). Finalmente, en $M = P(\mathbb{C}^2)$ nuevamente hacemos actuar G por pullback. Ahora, para tener una acción de D sobre M necesitamos una función ε como en el

Teorema 33; la construimos de la siguiente manera: Sea $\varepsilon : E \times M \to M$ *definido por*

$$\varepsilon(\alpha(X,Y), p(X,Y)) := X^{|\phi(p)-l|}\alpha(X,Y) \ \forall \alpha(X,Y) \in E, p(X,Y) \in M$$

donde $\phi(p)$ *denota el grado del polinomio p; es decir,* $\phi(p) = degree(p)$. *Probemos ahora las condiciones LZS y equivarianza para* ε. *Sean* $\alpha(X,Y), \beta(X,Y) \in E$ *y* $p(X,Y) \in M$; *etonces tenemos:*
1) LZS:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\alpha(X,Y), \varepsilon(\beta(X,Y), p(X,Y))) &= \varepsilon(\alpha(X,Y), X^{|\phi(p)-l|}\beta(X,Y)) \\ &= \begin{cases} X^{\phi(p)-l}\alpha(X,Y) & si \quad \phi(p) - l > 0 \\ X^{l-\phi(p)}\alpha(X,Y) & si \quad \phi(p) - 2 < 0 \end{cases} \\ &= \varepsilon(\alpha(X,Y), p(X,Y)) \end{aligned}$$

2) Equivarianza: Para todo $A \in G$ *tenemos:*

$$\begin{aligned} A \cdot \varepsilon(\alpha(X,Y), p(X,Y)) &= A \cdot (X^{|\phi(p)-l|}\alpha(X,Y)) \\ &= (X^{|\phi(A \cdot p)-l|})(A \cdot \alpha(X,Y)) \\ &= \varepsilon(A \cdot \alpha(X,Y), A \cdot p(X,Y) \end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema 33, ε *induce una acción D sobre* M.
Notamos que como el mapeo ε *depende de las variables tanto en E como en M, entonces no es ni de Tipo 1 ni de Tipo 2. Además como ni E ni M son enviados a escalares, entonces tampoco es de Tipo 3.1 ni 3.2. Finalmente, como M no es un digrupo, entonces tampoco es de Tipo 4.*

3.4. Órbitas y estabilizadores

Como vimos en la sección anterior, hay varios tipos de acciones de digrupos que son interesantes y que no se reducen al concepto clásico de acción de grupo. Esto nos lleva a estudiar algunos conceptos relacionados con las acciones como lo son las órbitas y estabilizadores; pero por supuesto, la construcción es ahora algo más compleja, ya que ahora no se definen a partir de un mapeo (como en los grupos), sino respecto a los dos mapeos que definen la acción izquierda de un digrupo.

Definición 44 *Sea D un digrupo actuando en un conjunto M y sea $m \in M$. Denotamos las órbitas izquierdas y derechas para m, como $lorb(m)$ y $rorb(m)$ respectivamente, y las definimos como:*

$$lorb(m) = \{x \ltimes m : x \in D\}; rorb(m) = \{x \rtimes m : x \in D\}$$

Análogamente, definimos los estabilizadores izquierdo y derecho para m como:

$$lest(m) = \{x \in D : x \ltimes m := m\}; rest(m) = \{x \in D : x \rtimes m = m\}$$

Recordemos que M es un G-conjunto; así que adicionalmente tenemos órbitas y estabilizadores para esta acción de grupo que denotaremos como $orb_G(m)$ y $est_G(m)$ respectivamente. Veamos algunas propiedades de las órbitas del digrupo:

Proposición 45 *Sea $D = G \times E$ un digrupo actuando sobre un conjunto M. Entonces, para todo $m \in M$,*
1. $lorb(m) = orb_G(m)$
2. $rorb(m) = G \ltimes (E \rtimes \{m\})$.

Demostración. 1) Del Lema 29 y la Proposición 32 tenemos que el halo de D actúa trivialmente sobre M vía $\ltimes$; por lo tanto, $\ltimes$ depende sólo de G, es decir, $lorb(m) = orb_G(m)$.

2) Sabemos que todo $(A, \alpha) \in D$ puede ser escrito como $(A, \alpha) = (A, e) \vdash (1, A^{-1}\alpha)$. Usamos entonces la identidad (5) de la Definición 25 y así tenemos que:

$$\begin{aligned} (A,\alpha) \rtimes m &= ((A,e) \vdash (1, A^{-1} \cdot \alpha)) \rtimes m \\ &= (A,e) \ltimes ((1, A^{-1} \cdot \alpha) \rtimes m) \end{aligned}$$

Como $(A, e) \in G$ y $(1, A^{-1} \cdot \alpha) \in E$ entonces tenemos la igualdad de (2). ■

Veamos ahora algunas propiedades de los estabilizadores.

Lo primero que notamos es que el Lema 29 implica que el estabilizador izquierdo de m respecto a E, es decir, $lest_E(m) = \{\alpha \in E : (1, \alpha) \ltimes m = m\}$, es tal que $lest_E(m) = E$. Definamos entonces el estabilizador derecho de m respecto a E como:

$$rest_E(m) = \{\alpha \in E : (1, \alpha) \rtimes m = m\}.$$

Lema 46 *Sea $D = G \times E$ un digrupo actuando en M y sea $m \in M$. Luego se tiene:*
1. $lest(m) = est_G(m) \times E$.
2. Si $(A, \alpha) \in rest(m)$ entonces $\langle A \rangle \times \{\alpha\} \subseteq rest(m)$, donde $\langle A \rangle$ es el grupo cíclico generado por A. En particular, $\alpha \in rest_E(m)$.
3. Si $rest(m) \neq \emptyset$ entonces $est_G(m) \times rest_E(m) \subseteq rest(m)$.

Demostración. 1) Sabemos que E actúa trivalmente en M respecto a $\ltimes$. Luego si $(A, e) \rtimes m = m$ entonces $(A, \alpha) \rtimes m = m$ para todo $\alpha \in E$, ya que

$$\begin{aligned} (A, \alpha) \rtimes m &= ((1, \alpha) \dashv (A, e)) \rtimes m \\ &= (1, \alpha) \rtimes ((A, e) \rtimes m) \\ &= (A, e) \rtimes m \\ &= m \end{aligned}$$

Así que $lest(m) = est_G(m) \times E$.
2) Supongamos $(A, \alpha) \rtimes m = m$, luego tenemos:

$$(A^2, \alpha) \rtimes m = ((A, \alpha) \dashv (A, \alpha)) \rtimes m = (A, \alpha) \rtimes ((A, \alpha) \rtimes m) = m$$

Así que para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que $(A^n, \alpha) \in rest(m)$. Por otra parte, como $(A^2, \alpha) \rtimes m = m$, entonces:

$$(A^{-1}, \alpha) \rtimes m = (A^{-1}, \alpha) \rtimes ((A^2, \alpha) \rtimes m) = ((A^{-1}, \alpha) \dashv (A^2, \alpha)) \rtimes m = (A, \alpha) \rtimes m = m$$

De aquí que $\langle A\rangle \times \{\alpha\} \subseteq rest(m)$.
3) Finalmente, sea $\beta \in rest_E(m)$ ($rest_E(m) \neq \emptyset$ ya que suponemos que $rest(m) \neq \emptyset$); y sea $B \in lest_G(m)$, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}(B,\beta) \rtimes m &= ((1,\beta) \dashv (B,e)) \rtimes m \\ &= (1,\beta) \rtimes ((B,e) \rtimes m) \\ &= (1,\beta) \rtimes ((B,e) \ltimes m) \\ &= (1,\beta) \rtimes m \\ &= m\end{aligned}$$

Luego $(B,\beta) \in rest(m)$, es decir, $rest(m) \supseteq est_G(m) \times rest_E(m)$. ■

Proposición 47 *Sea D un digrupo actuando en M, y sea $m \in M$. Entonces $lest(m)$ es un subdigrupo de D, que también actúa en M; en particular, $E \subset lest(m)$. Más aún, si $rest(m) \neq \emptyset$, entonces $lest(m)$ también actúa como digrupo en $rest(m)$.*

Demostración. Para ver que $lest(m)$ es subdigrupo de D, notemos que $est_G(m)$ es un subgrupo de G y que también actúa en E, ya que G lo hace. Así, $lest(m) = est_G(m) \times E$ es subdigrupo de D.
Supongamos que $rest(m) \neq \emptyset$ y definamos una acción de $lest(m)$ en $rest(m)$ como sigue: $\ltimes', \rtimes' : lest(m) \times rest(m) \to rest(m)$:

$$\begin{aligned}&(A,\alpha) \ltimes' (B,\beta) := (A,\alpha) \vdash (B,\beta) \dashv (A^{-1},e) = (ABA^{-1}, A\cdot\beta) \\ &(A,\alpha) \rtimes' (B,\beta) := (1_G, A\cdot\beta)\end{aligned}$$

Para todo $(A,\beta) \in lest(m)$, $(B,\beta) \in rest(m)$.

Veamos primero que los mapeos están bien definidos: Para $\ltimes'$:

$$\begin{aligned}((A,\alpha)\ltimes'(B,\beta))\rtimes m &= ((A,\alpha)\vdash(B,\beta)\dashv(A^{-1},e))\rtimes m\\ &= (A,\alpha)\ltimes((B,\beta)\rtimes((A^{-1},e)\ltimes m))\\ &= (A,\alpha)\ltimes((B,\beta)\rtimes m)\\ &= (A,\alpha)\ltimes m\\ &= m\end{aligned}$$

Para $\rtimes'$: Acabamos de mostrar que $(ABA^{-1}, A\cdot\beta)\in rest(m)$ para todo $(A,\beta)\in lest(m)$, $(B,\beta)\in rest(m)$, entonces le aplicamos el numeral (2) del Lema 46 a $(ABA^{-1}, A\cdot\beta)$ y tenemos que $(1_G, A\cdot\beta)\in rest(m)$.
Veamos ahora que los dos mapeos son compatibles y para esto usaremos el Teorema 33. Es importante tener claro que el digrupo que actúa no es D, es $lest(m) = est_G(m)\times E$, por esta razón necesitaremos definir un nuevo mapeo (seguirá llamándose ε),

$$\varepsilon : E\times rest(m)\to rest(m) : \varepsilon(\alpha,(B,\beta)) = (1_G,\beta)$$

Es claro que este mapeo satisface la propiedad LZS, entonces queda mostrar sólo equivarianza: Sean $A\in est_G(m)$, $\alpha\in E$, $(B,\beta)\in rest(m)$, luego $A*(B,\beta) = (ABA^{-1}, A\cdot\beta)$; entonces:

$$\begin{aligned}A*\varepsilon((1_G,\alpha),(B,\beta)) &= A*(1_G,\beta)\\ &= (1_G, A\cdot\beta)\\ &= \varepsilon((1_G, A\cdot\alpha),(ABA^{-1}, A\cdot\beta))\\ &= \varepsilon(A*(1_G,\alpha), A*(B,\beta))\end{aligned}$$

Por lo tanto, ε satisface las condiciones del Teorema 33, que era lo que se quería demostrar. ■

Nota 48 *Esta acción de $lest(m)$ en $rest(m)$ es del Tipo 2, ya que ε proyecta $E\times rest(m)$ a $\{1_G\}\times rest_E(m)\subseteq rest(m)$ y ε depende sólo del factor $rest(m)$.*

Más aún, ya que no necesariamente existen elementos en D que actúen trivialmente sobre M respecto a $\rtimes$, es posible que $rest(m) = \emptyset$. Esto lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 49 *Sean $G = SO(2)$, $E = S^2$ y $M = \mathbb{R}^3$, con G actuando con rotaciones alrededor del eje z en ambos conjuntos E y M. Consideremos el mapeo $\varepsilon : E \times M \to M$ dado por $\varepsilon(\alpha, m) := -\alpha$. Para todo $\alpha \in E$ y todo $m \in M$. Es inmediato ver que ε cumple con las condiciones del Teorema 33, luego induce una acción que además es del Tipo 1. Veamos cómo son las órbitas y estabilizadores para un punto cualquiera $m = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.*
Órbitas:
- $lorb(m) = \{x \ltimes m : x \in D\} = \{A * m : A \in SO(2)\}$, *es la circunferencia en el plano $z = z_0$, con centro en $(0, 0, z_0)$ y que pasa por m.*
- $rorb(m) = \{x \rtimes m : x \in D\} = \{\varepsilon(\alpha, A * m) : A \in SO(2), \alpha \in S^2\} = \{-\alpha : \alpha \in S^2\} = S^2$

Estabilizadores:
- $lest(m) = \{x \in D : x \ltimes m = m\} = \begin{cases} D & \text{Si } m \text{ es uno de los polos de } S^2 \\ \{Id\} \times E & \text{En cualquier otro caso} \end{cases}$
- $rest(m) = \{y \in D : y \rtimes m = m\} = \begin{cases} G \times \{-m\} & \text{Si } m \in S^2 \\ \emptyset & \text{En cualquier otro caso} \end{cases}$

De este ejemplo podemos observar que se tiene la contención:

$$est_G(m) \times rest_E(m) \subseteq rest(m),$$

pero no necesariamente se tiene la igualdad entre estos conjuntos. Si hacemos, por ejemplo, $m = (0, 1, 0)$ tenemos que $est_G(m) = \{Id\}$ y $rest_E(m) = \{-m\}$ pero $rest(m) = SO(2) \times \{-m\}$, luego $est_G(m) \times rest_E(m) \not\supseteq rest(m)$.

Para resumir nuestra discusión y enfatizar la forma en que las acciones de digrupos dan información adicional sobre las simetrías de sus espacios "homogéneos", enunciamos como nuestro resultado final:

Teorema 50 *En cualquier acción de digrupo, las órbitas derechas siempre son la unión de órbitas izquierdas. Por consiguiente, una acción no trivial de un digrupo produce particiones específicas del conjunto de órbitas de la parte de grupo acorde a las órbitas relacionadas a la acción derecha de las unidades barra del digrupo.*

La prueba de este teorema es ahora una implicación directa del numeral (2) del Lema 30, pero veamos este comportamiento en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 51 *Retomemos el Ejemplo 34: Recordemos que la acción de* $D = SO(n) \times S^n$ *sobre* $M = \mathbb{R}^{n+1}$ *está dada por:* $(A,\alpha) \ltimes m = A * m$ *y* $(A,\alpha) \rtimes m = \|m\|\alpha$ *para todo* $(A,\alpha) \in D$; $m \in M$. *Entonces, en el caso* $n = 2$, *es fácil ver que* $lorb(m) = \{A * m : A \in SO(2)\}$ *es un paralelo en la esfera* S^2, *mientras que* $rorb(m)$ *es la esfera completa* S^2. *Obviamente la esfera* $rorb(m)$ *puede ser vista como la unión de dichos paralelos.*
En este ejemplo también tenemos que:

$$lest(m) = \begin{cases} \{Id\} \times E & si \quad m_{n+1} \neq 0 \\ D & si \quad m_{n+1} = 0 \end{cases},$$

y

$$rest(m) = \begin{cases} G \times \{\frac{m}{|m|}\} & si \quad m \neq 0 \\ D & si \quad m = 0 \end{cases}.$$

Vale la pena notar que, en contraste al Ejemplo 49, todos los estabilizadores derechos son no vacíos.

Ejemplo 52 *Retomemos el Ejemplo 43, donde consideramos la acción de* $D = SU(2) \times P_2(\mathbb{C})$ *en* $P(\mathbb{C})$, *dada por:*

$$(A, \alpha(X,Y)) \ltimes p(X,Y) = p\left(A^{-1}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right)$$

y

$$(A, \alpha(X,Y)) \rtimes p(X,Y) = X^{|\phi(p)-2|}\alpha(X,Y),$$

donde $\phi(p) = degree(p)$ *para todo* $(A, \alpha(X,Y)) \in D$; $p(X,Y) \in M$. *Entonces, tenemos que:*

$$lorb(p(X,Y)) = \left\{ p\left(\begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right) : a\overline{a} + b\overline{b} = 1 \right\}$$

y $rorb(p(X,Y)) = \{X^{|\phi(p)-2|}\} \cdot E$. *La imagen geométrica aquí no es tan clara como en el ejemplo anterior, pero para ilustrar el teorema anterior, consideremos las órbitas de los monomios de la forma:* $X^{|\phi(p)-2|}\alpha(X,Y)$; *un cálculo directo muestra que:*

$$\begin{aligned} X^{|\phi(p)-2|}\alpha(X,Y) &= X^{|\phi(A\cdot p)-2|}\alpha(X,Y) \\ &= (A, \alpha(X,Y)) \rtimes p(X,Y) \\ &= ((A,0) \vdash (Id, A^{-1} \cdot \alpha(X,Y))) \rtimes p(X,Y) \\ &= (A,0) \ltimes ((Id, A^{-1} \cdot \alpha(X,Y)) \rtimes p(X,Y)) \end{aligned}$$

Por otro lado, para los estabilizadores derechos tenemos la siguiente descripción:

$$rest(p(X,Y)) = \begin{cases} G \times \{p(X,Y)\} & Si \quad p(X,Y) \in E \\ \emptyset & En\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}.$$

Para describir $lest(p(X,Y))$ *en el caso general se requiere una gran cantidad de cálculos pero para tener una idea de esto veamos el ejemplo de un polinomio específico:* $p(X,Y) = XY$. *Entonces, si* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix} \in est(p(X,Y))$ *tenemos:*

$$\overline{ab}X^2 + (a\overline{a} - b\overline{b})XY - abY^2 = XY;$$

luego, $b = 0$ *y* $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \in G$, *así que* $|a| = 1$. *Por lo tanto:*

$$lest(XY) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} : |a| = 1 \right\} \times E.$$

El estudio presentado aquí es sólo un primer paso. Aunque ya no proseguiremos en esta dirección de buscar análogos en el contexto de digrupos para muchas otras construcciones estándar de la teoría de acciones de grupos, sin duda se podría proseguir considerablemente en ella.

Capítulo 4

Versiones infinitesimales de acciones de digrupo

Como pudimos observar en el capítulo anterior, la componente algebraica de los digrupos es interesante por sí sola y aún hay mucho por hacer con los digrupos en ese campo; sin embargo, parte del atractivo que tienen los digrupos es la conexión que tienen con las álgebras de Leibniz; por tal motivo, en este capítulo estudiaremos algunos aspectos infinitesimales.

4.1. En Álgebras de Leibniz.

Tal como vimos en el Capítulo 1, un camino natural para conectar a los digrupos con las álgebras de Leibniz inicia conjugando las operaciones del digrupo para obtener el operador del rack y luego se deriva este mapeo dos veces para obtener el corchete de las álgebras de Leibniz. Siguiendo a [8], haremos uso de esta técnica para obtener acciones de álgebras de Leibniz a partir de acciones de digrupos.

Para ello, cabe observar que en la literatura las definiciones de acción de rack de Lie punteado y de acción de un álgebra de Leibniz usualmente se analiza en términos de acciones bilaterales, por tal razón, en el Apéndice A introducimos la definición correspondiente de acción bilateral de un digrupo, estudiando además algunas de sus propiedades más básicas, ya que es esta propiedad de bilateralidad nos permitirá relacionar las acciones de digrupos con acciones de rack de Lie y de álgebras de Leibniz.

Proposición 53 *1. Para todo rack de Lie punteado $(Q, \circ, 1)$, junto con su representación adjunta, se tiene que $(T_1Q; [\ ,\ ])$ es un álgebra de Leibniz, donde $[\ ,\ ]$ es la diferencial de la adjunta en el rack.*
2. La diferencial de una acción de un rack de Lie punteado $(Q, \circ, 1)$ sobre un espacio vectorial M en un punto fijo $m_0 \in M$ (respecto a la acción), es una acción del álgebra de Leibniz $(T_1Q; [\ ,\ ])$ sobre $T_{m_0}M \cong M$.

Demostración. 1. Es justo la prueba del Teorema 17.
2. Basta ver que la diferencial en 1 de una acción izquierda de un rack $(Q, \circ, 1)$, es una acción izquierda del álgebra de Leibniz $(T_1Q, [\ ,\ ])$ sobre el espacio tangente en un punto del espacio donde actúa el rack, ya que para el caso de acción derecha o acción bilateral, el análisis es similar. Supongamos que tenemos una acción izquierda de rack de Lie de Q en un espacio vectorial M, la cual llamaremos " $\cdot$ ". Luego, dados $x, y \in Q$; $m \in M$ y por propiedad de acción de rack tenemos la siguiente ecuación:

$$x \cdot (y \cdot m) = (x \circ y) \cdot (x \cdot m)\ (i)$$

Llamaremos ϕ_z al mapeo: $\phi_z : M \to M$ definido por $\phi_z(r) = z \cdot r$ para todo $z \in Q$ y todo $r \in M$ y de igual manera, llamaremos $\Phi z = D_n(\phi_z)$ Así la ecuación (i) se reescribe como

$$\phi_x(\phi_y(m)) = \phi_{x\circ y}(\phi_x(m)) \quad (ii)$$

Ahora, derivando en (ii) primero respecto a m en n y luego respecto a y, tenemos:

$$\Phi_x(Y * a)) = \Psi_x(Y) * \Phi_x(a)$$

Donde $\Psi_x(Y)$ es tomado como en la demostración de la parte 1, a es un elemento de T_nM y $* : T_1Q \times T_nM \to T_nM$. definido como $* = D_{(1,n)}$. Luego derivamos esta última ecuación respecto a x en 1 y tenemos:

$$X * (Y * a)) = X * (Y * a) + Y * (X * a)$$

Lo cual garantiza de que $*$ es una acción (izquierda), del álgebra de Leibniz T_1Q sobre M. ■

Esto lo que muestra es que el concepto de acción de digrupos, definido en este trabajo, es perfectamente compatible con la acción de álgebras de Leibniz. Veamos entonces un ejemplo para ilustrar la proposición anterior.

Ejemplo 54 *Consideremos el álgebra de Leibniz* $(\mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{R}^3, [\ ,\ ])$ *donde definimos* $[(a,x),(b,y)] = ([a,b]_{\mathfrak{so}(2)}, y)$ *para todo* $(a,x),(b,y) \in \mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{R}^3$. *Notemos que el corchete de Leibniz puede ser obtenido de la siguiente manera:*
1. Derivando la acción adjunta del rack de Lie $SO(2)$ *en la identidad se obtiene el corchete* $[\ ,\ ]_{\mathfrak{so}(2)}$; *es decir, la primera componente del corchete de Leibniz.*
2. Si tenemos cualquier acción (suave) del grupo de Lie $SO(2)$ *sobre* S^3 *con un punto fijo y la derivamos respecto a la identidad de* $SO(2)$ *y al punto fijo en* S^3, *lo que se obtiene es el mapeo proyección* $\pi : \mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *donde* $\pi(a,y) = y$ *para todo* $(a,y) \in \mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{R}^3$. *Notar que estamos identificando* $\mathbb{R}^3 \simeq T_{x_0}S^3$; *donde* $x_0 \in S^3$ *es el punto fijo.*
Con esto, es fácil ver que el álgebra de Leibniz $(\mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{R}^3, [\ ,\ ])$ *es el resultado de calcular el espacio tangente en* 1 *del rack de Lie* $(SO(2) \times S^3, \circ, 1)$ *donde* $1 = (Id, PN)$, *y* $\circ$ *está definido por:*

$$(A,\alpha) \circ (B,\beta) = (Adj_A B, \begin{bmatrix} A \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix})$$

Para todo $(A,\alpha),(B,\beta) \in SO(2) \times S^3$.
Además, se verifica fácilmente que tomando el mapeo $\cdot : (SO(2) \times S^3) \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *definido como:*

$$(A,\alpha) \cdot x = \begin{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ A^{-1} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

corresponde a una acción del rack $SO(2) \times S^3$ *sobre* $\mathbb{R}^4$ *con* $0 \in \mathbb{R}^4$ *un punto fijo respecto a esta acción.*
Por último, derivando $\cdot$ *en* $(1,0)$*, Tenemos*

$$* = D_{(1,0)} \cdot : (\mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{R}^3) \oplus \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

donde $*((a,\alpha),x) = x$ *para todo* $((a,\alpha),x) \in (\mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{R}^3) \oplus \mathbb{R}^4$. *Esto ya que se deriva* $\cdot$ *respecto a* $(1,0)$ *y* 0 *es un punto fijo respecto a* $\cdot$.

En el contexto de la teoría que hemos desarrollado, podemos entonces analizar el ejemplo anterior de la siguiente manera:

1. Tomando el digrupo $(D = SO(2) \times S^3, \vdash, \dashv, (ID, PN)$ donde se define para todo $(A,\alpha);(B,\beta) \in D$:

$$\begin{aligned} (A,\alpha) \vdash (B,\beta) &= (AB, \begin{bmatrix} A \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}) \\ (A,\alpha) \dashv (B,\beta) &= (AB,\alpha) \end{aligned}$$

y conjugando sus elementos, es decir, definiendo $(A,\alpha) \circ (B,\beta) := (A,\alpha) \vdash (B,\beta) \dashv (A,\alpha)^{-1}$, se obtiene el rack de Lie $(Q = SO(2) \times S^3, \circ, 1 = (ID, PN))$ del ejemplo anterior.

2. Si consideramos los mapeos $\ltimes_l; \rtimes_l : D\times\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ y $\ltimes_r; \rtimes_r : \mathbb{R}^4 \times D \to \mathbb{R}^4$definidos para todo $(A, \alpha) \in D$; $x \in \mathbb{R}^4$ por:

$$
\begin{aligned}
(A,\alpha) \ltimes_l x &= \begin{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\
(A,\alpha) \rtimes_l x &= x \\
x \rtimes_r (A,\alpha) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ A \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
x \ltimes_r (A,\alpha) &= x
\end{aligned}
$$

Se tiene que $(\ltimes_l, \rtimes_l)$ y $(\ltimes_r, \rtimes_r)$ son acción izquierda y derecha, respectivamente, de D sobre $\mathbb{R}^4$ (los detalles de este cálculo se harán en el Ejemplo 70 del Apéndice A).

3. La acción del rack, que está definida por

$$
(A,\alpha) \cdot x = \begin{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ A^{-1} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix},
$$

se puede obtener conjugando las acciones izquierda y derecha del digrupo de la siguiente manera:

$$
(A,\alpha) \cdot x = (A,\alpha) \ltimes_l x \rtimes_r (A,\alpha)^{-1},
$$

para todo $(A, \alpha) \in D$; $x \in \mathbb{R}^4$.

Un punto importante que se desprende de la discusión anterior es que en el proceso de conectar las acciones de digrupos con acciones de álgebras de Leibniz se pierde información de las primeras, debido a que las acciones bilaterales de los digrupos se conjugan y luego se derivan. Desde nuestra perspectiva, la parte de esta información que se pierde es la correspondiente a la acción derecha $\rtimes$, la cual está relacionada, según el Teorema 33, con el mapeo ε y sabemos que ε aporta la parte novedosa en la definición de acción de digrupo. Por este motivo, en la siguiente sección, se estudiarán directamente las derivaciones de las acciones de los digrupos sin tener que conjugarlas.

4.2. En Diálgebras

Como es bien sabido, una relación similar a la de digrupos y racks de Lie, se tiene para las diálgebras y álgebras de Leibniz, mediante una conjugación de sus mapeos; sin embargo, ya vimos que al tomar ese camino se pierde mucha información si partimos desde los digrupos. Parece entonces que no hacer uso de la relación entre diálgebras y álgebras de Leibniz pero sí de la relación entre digrupos y diálgebras es una buena opción. Por tal motivo, este es el camino que exploraremos en este apartado, y que procedemos a detallar.

Más precisamente, a continuación estudiaremos el espacio tangente $T_{\mathbf{e}}D = T_1G \oplus T_eE$, junto con los mapeos $\trianglerighteq = D_{(\mathbf{e},\mathbf{e})} \vdash ; \trianglelefteq = D_{(\mathbf{e},\mathbf{e})} \dashv$ y veremos que esto define una diálgebra.

Recordemos en primer término que los mapeos $\vdash$ y $\dashv$ están definidos para todo $(A,\alpha),(B,\beta) \in D$ como:

$$\begin{aligned}(A,\alpha) \vdash (B,\beta) &= (AB, A\cdot\beta)\\ (A,\alpha) \dashv (B,\beta) &= (AB,\alpha)\end{aligned}$$

Así, al derivar cada uno de estos mapeos en el punto $(\mathbf{e},\mathbf{e}) \in D \times D$, lo que se obtiene es:

$$\begin{aligned}(a,\widehat{\alpha}) \trianglerighteq (b,\widehat{\beta}) &= (a+b, a\circ\widehat{\beta})\\ (a,\widehat{\alpha}) \trianglelefteq (b,\widehat{\beta}) &= (a+b, \widehat{\alpha})\end{aligned}$$

donde $\circ = D_{(1,e)}\cdot : T_1G \oplus T_eE \to T_eE$. Ahora, como $\circ$ es lineal por ser la diferencial de $\cdot$, y como $(a,\widehat{\beta}) = (a,0)+(0,\widehat{\beta})$ para todo $(a,\widehat{\beta}) \in T_1G \oplus T_eE$, entonces:

$$a\circ\widehat{\beta} = a\circ 0 + 0\circ\widehat{\beta}.$$

Luego, tomando flujos para cada sumando se tiene:

$$a\circ 0 + 0\circ\widehat{\beta} = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\gamma_G(t)\cdot e + \tfrac{d}{dt}|_{t=0}1\cdot\gamma_E(t),$$

donde:

$\gamma_G : (-\delta,\delta) \to G$ tal que γ_G es suave y $\gamma_G(0) = 1; \gamma'_G(0) = a$,

$\gamma_E : (-\delta,\delta) \to E$ tal que γ_E es suave y $\gamma_E(0) = e; \gamma'_E(0) = \widehat{\beta}$;

pero sabemos que $\cdot$ es una acción de grupo, luego tenemos:

$$\gamma_G(t)\cdot e = e \text{ y } 1\cdot\gamma_E(t) = \gamma_E(t) \text{ para todo } t.$$

Reemplazando, tenemos:

$$a\circ\widehat{\beta} = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}e + \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\gamma_E(t) = \widehat{\beta}.$$

Por último, nuestro nuevo mapeo quedaría definido como:

$$\circ : T_1G \oplus T_eE \to T_eE \text{ donde } a\circ\widehat{\beta} = \widehat{\beta}, \text{ para todo } (a,\widehat{\beta}) \in T_1G \oplus T_eE.$$

Por esta razón, los mapeos resultantes $\trianglerighteq, \trianglelefteq$ quedan definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(a,\widehat{\alpha}) \trianglerighteq (b,\widehat{\beta}) &= (a+b, \widehat{\beta})\\ (a,\widehat{\alpha}) \trianglelefteq (b,\widehat{\beta}) &= (a+b, \widehat{\alpha})\end{aligned}$$

Veamos entonces que el espacio al que llegamos con este procedimiento es una diálgebra.

Proposición 55 *La tripleta* $(A = T_1G \oplus T_eE, \trianglerighteq, \trianglelefteq)$ *es una diálgebra.*

Demostración. Veamos que se tienen los axiomas de diálgebras. Sean $(a,\widehat{\alpha})$, $(b,\widehat{\beta})$ y $(c,\widehat{\gamma}) \in A$.

1. Asociatividad:

$$\begin{aligned}(a,\widehat{\alpha}) \trianglelefteq ((b,\widehat{\beta}) \trianglelefteq (c,\widehat{\gamma})) &= (a,\widehat{\alpha}) \trianglelefteq (b+c,\widehat{\beta}) \\ &= (a+b+c,\widehat{\alpha}) \\ &= (a+b,\widehat{\alpha}) \trianglelefteq (c,\widehat{\gamma}) \\ &= ((a,\widehat{\alpha}) \trianglelefteq (b,\widehat{\beta})) \trianglelefteq (c,\widehat{\gamma})\end{aligned}$$

Para ver la asociatividad de $\trianglerighteq$ el procedimiento es más fácil que en $\trianglelefteq$, ya que sólo hay que tener en cuenta que la unidad barra no cambia.

Veamos ahora que se cumplen los demás axiomas de la definición de diálgebra:

$$\begin{aligned}2.\ ((a,\widehat{\alpha}) \trianglerighteq (b,\widehat{\beta})) \trianglerighteq (c,\widehat{\gamma}) &= (a+b+c,\widehat{\gamma}) \\ &= (a+b,\widehat{\alpha}) \trianglerighteq (c,\widehat{\gamma}) \\ &= ((a,\widehat{\alpha}) \trianglelefteq (b,\widehat{\beta})) \trianglerighteq (c,\widehat{\gamma}) \\ 3.\ (a,\widehat{\alpha}) \trianglelefteq ((b,\widehat{\beta}) \trianglelefteq (c,\widehat{\gamma})) &= (a+b+c,\widehat{\alpha}) \\ &= (a,\widehat{\alpha}) \trianglelefteq (b+c,\widehat{\gamma}) \\ &= (a,\widehat{\alpha}) \trianglelefteq ((b,\widehat{\beta}) \trianglerighteq (c,\widehat{\gamma})) \\ 4.\ (a,\widehat{\alpha}) \trianglerighteq ((b,\widehat{\beta}) \trianglelefteq (c,\widehat{\gamma})) &= (a,\widehat{\alpha}) \trianglerighteq (b+c,\widehat{\beta}) \\ &= (a+b+c,\widehat{\beta}) \\ &= (a+b,\widehat{\beta}) \trianglelefteq (c,\widehat{\gamma}) \\ &= ((a,\widehat{\alpha}) \trianglerighteq (b,\widehat{\beta})) \trianglelefteq (c,\widehat{\gamma})\end{aligned}$$

Luego, $(A = T_1G \oplus T_eE, \trianglerighteq, \trianglelefteq)$ es diálgebra. ■

Desafortunadamente y contrario a lo que intuitivamente se podría creer, no siempre que se deriva una acción de un digrupo se obtiene una acción de su respectiva diálgebra. Veamos el siguiente ejemplo para comprobar la anterior afirmación:

Ejemplo 56 *Sean el digrupo $(SO(2) \times S^2, \vdash, \dashv, (Id, PN))$; $M = \mathbb{R}^3$ y la acción del digrupo sobre M tal como se describe en el Ejemplo 49. Lo primero que notamos es que la derivada de la acción del grupo $SO(2)$ sobre M se calcula de la siguiente manera (véase el Capítulo 27 de [18]):*

$\circ := D_{(Id,m_o)}* : \mathfrak{so}(2) \oplus T_{m_0}M \to T_{m_0}M$ *y está dada por:*

$$\begin{aligned} a \circ \widehat{m} &= a \circ 0 + 0 \circ \widehat{m} \\ &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\gamma_1(t) * m_0 + \tfrac{d}{dt}|_{t=0} 1 * \gamma_2(t) \\ &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\cos t, sent, 0) + \widehat{m} \\ &= (0,1,0) + \widehat{m} \end{aligned}$$

donde γ_1 *y* γ_2 *son flujos en* G *y* M*, respectivamente, tales que* $\gamma_1(0) = 1; \gamma_1'(0) = a$ *y* $\gamma_2(0) = m_0; \gamma_2'(0) = \widehat{m}$.

Por lo tanto, derivando la acción $\ltimes$ *respecto a* $((Id, PN), m_0 = (1,0,0))$*, tenemos:*

$$\begin{aligned} (a, \widehat{\alpha}) \trianglerighteq \widehat{m} &= D_{((Id,PN),m_o)} * ((a,\widehat{\alpha}), \widehat{m}) \\ &= \circ(a, \widehat{m}) \\ &= (0,1,0) + \widehat{m} \end{aligned}$$

Luego, tomando $(a, \widehat{\alpha}), (b, \widehat{\beta}) \in \mathfrak{so}(2) \oplus T_{PN}S^2$ *y* $\widehat{m} \in T_{m_0}M$ *se tiene:*

$$\begin{aligned} (a, \widehat{\alpha}) \trianglerighteq ((b, \widehat{\beta}) \trianglerighteq \widehat{m}) &= (a, \widehat{\alpha}) \trianglerighteq ((0,1,0) + \widehat{m}) \\ &= (0,2,0) + \widehat{m} \end{aligned}$$

Por otro lado, haciendo $\Vdash := D_{((1,e),(1,e))} \vdash$*, tenemos:*

$$\begin{aligned} ((a, \widehat{\alpha}) \Vdash (b, \widehat{\beta})) \trianglerighteq \widehat{m} &= (a + b, \widehat{\beta}) \trianglerighteq \widehat{m} \\ &= (0,1,0) + \widehat{m} \end{aligned}$$

Es decir, $(a, \widehat{\alpha}) \trianglerighteq ((b, \widehat{\beta}) \trianglerighteq \widehat{m}) \neq ((a, \widehat{\alpha}) \Vdash (b, \widehat{\beta})) \trianglerighteq \widehat{m}$*; por lo tanto,* $(\trianglerighteq, \trianglelefteq)$ *no es una acción de la diálgebra* $\mathfrak{so}(2) \oplus T_{PN}S^2$ *sobre* $T_{m_0}M$ *.*

Ahora bien, analizando qué es lo que sucede, vemos que para en el ejemplo anterior sí se cumpliera el axioma 1 de la definición 22, sería necesario que se cumpliera para todo $a, b \in \mathfrak{so}(2)$ y todo $\widehat{m} \in T_{m_0}M$

$$(a + b, \widehat{\beta}) \trianglerighteq \widehat{m} = (a, \widehat{\alpha}) \trianglerighteq (b \circ \widehat{m});$$

es decir, se debería cumplir

$$(a + b) \circ \widehat{m} = a \circ (b \circ \widehat{m}).$$

Y en efecto, en el ejemplo anterior, vemos que esta última identidad no se cumple ya que:

$$
\begin{aligned}
(a+b)\circ\widehat{m} &= (0,1,0)+\widehat{m}\\
a\circ(b\circ\widehat{m}) &= a\circ((0,1,0)+\widehat{m})\\
&= (0,1,0)+((0,1,0)+\widehat{m})\\
&= (0,2,0)+\widehat{m}
\end{aligned}
$$

Pero cabe además notar que esta identidad depende, entre otros factores, del punto m_0 que se escoja para derivar la acción del digrupo. En efecto, si tomáramos $m_0 = 0 \in \mathbb{R}^3$, sí se cumpliría la identidad, ya que $a\circ\widehat{m} = \widehat{m}$ para todo $a \in \mathfrak{so}(2)$ y todo $m \in T_{m_0}M$, y esto se debe a que 0 es un punto fijo respecto a la acción de $\mathfrak{so}(2)$, mientras que $(1,0,0)$ no lo es.

Apoyándonos en esta discusión, en el siguiente apartado veremos un teorema que nos dará condiciones suficientes y necesarias para tener acciones de diálgebras a partir de acciones de digrupos.

4.3. Un teorema de caracterización de la versión infinitesimal de la acción de un digrupo.

Como ya vimos en la sección anterior, aunque el espacio tangente en la unidad barra marcada de un digrupo hereda de una manera natural una estructura de diálgebra, no toda acción de digrupo produce una acción de diálgebra cuando se deriva; por tal motivo, veremos un teorema que nos dará condiciones suficientes y necesarias para obtener acciones de diálgebras derivando acciones de digrupos.

En lo siguiente, partiremos de suponer que tenemos un digrupo $(D = G\times E, \vdash, \dashv (1,e))$ que está actuando por la izquierda sobre una variedad M, vía $(\ltimes, \rtimes)$ o, de manera equivalente gracias al Teorema 33, vía $(*, \varepsilon)$. Para esto, usaremos la siguiente notación:

1. G denotará un grupo de Lie actuando en la variedad E vía $\cdot$ con punto fijo e y en la variedad M vía $*$, ambas acciones izquierdas.

2. $\varepsilon : E \times M \to M$ será un mapeo equivariante (respecto a las acciones de 1) y LZS.

3. $(\ltimes, \rtimes)$ es la acción del digrupo $D = G \times E$ en M inducida por 1) y 2).

4. $\mathfrak{A} = T_{(1,e)}D$ denotará la diálgebra correspondiente al digrupo D.

5. $\trianglerighteq = D_{((1,e),m_o)}\ltimes$; $\trianglelefteq = D_{((1,e),m_o)}\rtimes$.

6. $\circ = D_{(1,m_0)}*$; $\varepsilon = D_{(e,m_0)}\widehat{\varepsilon}$.

De manera similar a como se desarrolló el Teorema 33 y con la notación anterior, observaremos en el siguiente lema la relación existente entre $(\trianglerighteq, \trianglelefteq)$ y $(\circ, \widehat{\varepsilon})$

Lema 57 *Para todo $(a, \widehat{\alpha}) \in \mathfrak{A}$, $\widehat{m} \in T_{m_0}M$. Se cumplen las siguientes propiedades:*
1. $(a, \widehat{\alpha}) \trianglerighteq \widehat{m} = a \circ \widehat{m}$,
2. $(0, \widehat{\alpha}) \trianglelefteq \widehat{m} = \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, \widehat{m})$,
3. $(a, \widehat{\alpha}) \trianglelefteq \widehat{m} = \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, a \circ \widehat{m})$.

Demostración. Sean $(a, \widehat{\alpha}) \in \mathfrak{A}$, $\widehat{m} \in T_{m_0}M$ y veamos que se cumple 1, 2 y 3:
1. Sabemos que para todo $(A, \alpha) \in G \times E = D$ y todo $m \in M$ se tiene que $(A, \alpha) \ltimes m = A * m$ donde $*$ es una acción del grupo G sobre M; es decir, $\ltimes$ sólo depende de la acción del grupo y no de las unidades barra del digrupo. Por tal motivo $(a, \widehat{\alpha}) \trianglerighteq \widehat{m} = aD_{(1,m_0)} * \widehat{m} = a \circ \widehat{m}$ para todo $(a, \widehat{\alpha}) \in \mathfrak{A}, \widehat{m} \in T_{m_0}M$.
2. Como $\trianglelefteq = D_{((1,e),m_0)}\rtimes$ es lineal, entonces $(0, \widehat{\alpha}) \trianglelefteq \widehat{m} = (0, \widehat{\alpha}) \trianglelefteq 0 + (0, 0) \trianglelefteq \widehat{m}$. Tomando flujos $\gamma_1 : (-\delta, \delta) \to E$ y $\gamma_2 : (-\delta, \delta) \to M$ tales que $\gamma_1(0) = e; \gamma_1(0) = \widehat{\alpha}$ ´y $\gamma_2(0) = m_0; \gamma_2'(0) = \widehat{m}$ entonces tenemos:

$$\begin{aligned}(0,\widehat{\alpha})\trianglelefteq\widehat{m} &= (0,\widehat{\alpha})\trianglelefteq 0+(0,0)\trianglelefteq\widehat{m}\\ &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(1,\gamma_1(t))\rtimes m_0+\tfrac{d}{dt}|_{t=0}(1,e)\rtimes\gamma_2(t)\\ &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varepsilon(\gamma_1(t),m_0)+\tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varepsilon(e,\gamma_2(t))\\ &= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},0)+\widehat{\varepsilon}(0,\widehat{m})\\ &= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},\widehat{m})\end{aligned}$$

3. Sabemos que $a\circ\widehat{m}=\frac{d}{dt}|_{t=0}\exp(ta)*m_0+\widehat{m}$. Denotemos $\frac{d}{dt}|_{t=0}\exp(ta)*m_0=\overline{a}_{m_0}\in T_{m_0}M$; luego, $a\circ\widehat{m}=\overline{a}_{m_0}+\widehat{m}$. De aquí tenemos que:

$$(a,\widehat{\alpha})\trianglelefteq\widehat{m} = (0,\widehat{\alpha})\trianglelefteq\widehat{m}+(a,0)\trianglelefteq 0 \quad (*)$$

Del numeral 2 tenemos que $(0,\widehat{\alpha})\trianglelefteq\widehat{m}=\widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},\widehat{m})$. Resta por calcular el término $(a,0)\trianglelefteq 0$, para esto haremos uso del flujo exponencial en el grupo de Lie G.

$$\begin{aligned}(a,0)\trianglelefteq 0 &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(ta),0)\rtimes m_0\\ &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varepsilon(e,\exp(ta)*m_0)\end{aligned}$$

De otro lado, se tiene que el mapeo $\gamma:(-\delta,\delta)\to M$ definido por $\gamma(t)=\exp(ta)*m_0$ es un flujo en M tal que $\gamma(0)=m_0$ y $\gamma'(0)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\exp(ta)*m_0=\overline{a}_{m_0}$, de aquí que $(a,0)\trianglelefteq 0=\widehat{\varepsilon}(0,\overline{a}_{m_0})$. Reemplazamos ahora este valor en $(*)$ y, por el numeral anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}(a,\widehat{\alpha})\trianglelefteq\widehat{m} &= (0,\widehat{\alpha})\trianglelefteq\widehat{m}+(a,0)\trianglelefteq 0\\ &= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},\widehat{m})+\widehat{\varepsilon}(0,\overline{a}_{m_0})\\ &= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},\overline{a}_{m_0}+\widehat{m})\\ &= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},a\circ\widehat{m})\end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado el lema. ■

Sabemos que en el caso clásico, no siempre que se deriva una acción de un grupo de Lie resulta una acción del álgebra de Lie correspondiente, ya que esto último depende del punto con respecto al que se va a derivar la acción del grupo; sin embargo, resulta interesante estudiar de qué depende esta relación y qué propiedades cumple tal derivada. En el caso de los digrupos, sucede algo similar, no siempre la derivada de una acción de digrupo resulta ser una acción de la diálgebra correspondiente, pero existen casos donde esto sí ocurre. A continuación veremos un teorema que nos dará condiciones suficientes y necesarias para que tengamos acciones de diálgebras que son obtenidas al derivar acciones de digrupos.

Teorema 58 $(\trianglerighteq;\trianglelefteq)$ *es acción de la diálgebra* $\mathfrak{A}$ *sobre* $T_{m_0}M$ *si y sólo si se cumplen:*
i) $a\circ(b\circ\widehat{m})=(a+b)\circ\widehat{m}$ *para todo* $a,b\in\mathfrak{g},\widehat{m}\in T_{m_0}M$.
ii) $\{\widehat{\varepsilon}_{\widehat{\alpha}}\}_{\widehat{\alpha}\in T_eE}$ *es una familia de mapeos con la propiedad LZS.*
iii) $a\circ\widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},\widehat{m})=\widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},a\circ\widehat{m})$ *para todo* $a\in\mathfrak{g},\widehat{\alpha}\in T_eE$ *y* $\widehat{m}\in T_{m_0}M$.

Demostración. Supongamos que $(\trianglerighteq;\trianglelefteq)$ es una acción de $\mathfrak{A}$ sobre $T_{m_0}M$. Sean $a,b\in\mathfrak{g}$, $\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\in T_eE$ y $\widehat{m}\in T_{m_0}M$, y veamos que se cumplen i), ii) y iii).
i) Sabemos que $(a,\widehat{\alpha})\trianglerighteq\widehat{m}=a\circ\,\widehat{m}$, así, como $(\trianglerighteq;\trianglelefteq)$ es acción entonces:

$$(a,\widehat{\alpha})\trianglerighteq((b,\widehat{\beta})\trianglerighteq\widehat{m})=(a+b,\widehat{\beta})\trianglerighteq\widehat{m},$$

así que $a\circ(b\circ\widehat{m})=(a+b)\circ\widehat{m}$.
ii) Tenemos que $(0,\widehat{\alpha})\trianglelefteq\widehat{m}=\widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},\widehat{m})$. Nuevamente, por propiedades de acción de diálgebra tenemos:

$$(0,\widehat{\alpha})\trianglelefteq((0,\widehat{\beta})\trianglelefteq\widehat{m})=(0,\widehat{\alpha})\trianglelefteq\widehat{m}.$$

Esta igualdad es equivalente a tener:

$$\widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},\widehat{\varepsilon}(\widehat{\beta},\widehat{m}))=\widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},\widehat{m}).$$

Por lo tanto tenemos la propiedad de LZS para $\{\widehat{\varepsilon}_{\widehat{\alpha}}\}_{\widehat{\alpha}\in T_eE}$.
iii) De acuerdo a los axiomas de acción de diálgebras, se tiene que:

$$(a,\widehat{\alpha})\trianglerighteq((0,\widehat{\beta})\trianglelefteq\widehat{m})=(a,\widehat{\beta})\trianglelefteq\widehat{m}.$$

Pero esto es lo mismo que tener:

$$a\circ\widehat{\varepsilon}(\widehat{\beta},\widehat{m})=\widehat{\varepsilon}(\widehat{\beta},a\circ\widehat{m}).$$

Por lo tanto tenemos i), ii) y iii).

En la otra dirección, supongamos que tenemos i), ii) y iii) y veamos que $(\trianglerighteq, \trianglelefteq)$ es una acción de $(\mathfrak{A}, \vdash, \dashv)$ sobre $T_{m_0}M$.

$$\begin{aligned}
A1.\ (a,\widehat{\alpha}) \trianglerighteq ((b,\widehat{\beta}) \trianglerighteq \widehat{m}) &= a \circ (b \circ \widehat{m}) \\
&= (a+b) \circ \widehat{m} \\
&= (a+b,\widehat{\beta}) \trianglerighteq \widehat{m} \\
&= ((a,\widehat{\alpha}) \vdash (b,\widehat{\beta})) \trianglerighteq \widehat{m} \\
A2.\ (a,\widehat{\alpha}) \trianglerighteq ((b,\widehat{\beta}) \trianglerighteq \widehat{m}) &= a \circ (b \circ \widehat{m}) \\
&= (a+b) \circ \widehat{m} \\
&= (a+b,\widehat{\alpha}) \trianglerighteq \widehat{m} \\
&= ((a,\widehat{\alpha}) \dashv (b,\widehat{\beta})) \trianglerighteq \widehat{m} \\
A3.\ (a,\widehat{\alpha}) \trianglelefteq ((b,\widehat{\beta}) \trianglelefteq \widehat{m}) &= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, a \circ \widehat{\varepsilon}(\widehat{\beta}, b \circ \widehat{m})) \\
&= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, \widehat{\varepsilon}(\widehat{\beta}, a \circ (b \circ \widehat{m}))) \\
&= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, a \circ (b \circ \widehat{m})) \\
&= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, (a+b) \circ \widehat{m}) \\
&= (a+b,\widehat{\alpha}) \trianglelefteq \widehat{m} \\
&= ((a,\widehat{\alpha}) \dashv (b,\widehat{\beta})) \trianglelefteq \widehat{m} \\
A4.\ (a,\widehat{\alpha}) \trianglelefteq ((b,\widehat{\beta}) \trianglelefteq \widehat{m}) &= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, a \circ \widehat{\varepsilon}(\widehat{\beta}, b \circ \widehat{m})) \\
&= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, \widehat{\varepsilon}(\widehat{\beta}, a \circ (b \circ \widehat{m}))) \\
&= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, a \circ (b \circ \widehat{m})) \\
&= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, a \circ ((b,\widehat{\beta}) \trianglerighteq \widehat{m})) \\
&= (a,\widehat{\alpha}) \trianglelefteq ((b,\widehat{\beta}) \trianglerighteq \widehat{m}) \\
A5.\ (a,\widehat{\alpha}) \trianglerighteq ((b,\widehat{\beta}) \trianglelefteq \widehat{m}) &= a \circ (\widehat{\varepsilon}(\widehat{\beta}, b \circ \widehat{m}) \\
&= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\beta}, a \circ (b \circ \widehat{m})) \\
&= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\beta}, (a+b) \circ \widehat{m}) \\
&= (a+b,\widehat{\beta})) \trianglelefteq \widehat{m} \\
&= ((a,\widehat{\alpha}) \vdash ((b,\widehat{\beta})) \trianglelefteq \widehat{m}
\end{aligned}$$

■

Con este teorema analizaremos las derivadas de los tipos de acciones de digrupos que estudiamos en el capítulo anterior y miraremos cuales de estas son acciones de las respectivas diálgebras.

Recordemos que para describir los tipos de acción de digrupos, hacemos uso del Teorema 33 y nos basta con estudiar sólo los mapeos ε. Sin embargo, para la versión infinitesimal de la acción del digrupo, no podemos centrarnos sólo en $\widehat{\varepsilon}$ ya que la condición 1 del Teorema 58 no siempre se cumple para la derivada de cualquier acción de grupo de Lie; por lo tanto, debemos considerar ambos mapeos ($\circ$ *y* $\widehat{\varepsilon}$), para analizar las derivadas de los cuatro tipos de acción de digrupos que estudiamos en el capítulo anterior.

Caso 59 *Tipo 1.*

En este tipo de acciones se tiene que el mapeo ε sólo depende del halo del digrupo, es decir, $\varepsilon(\alpha, m) = f(\alpha)$, donde $f : E \to M$ es equivariante.

Si analizamos la primera condición del Teorema 58, no necesariamente se cumple, ya que el m_0 que se escoge para derivar la acción del grupo no tiene alguna propiedad especial como la de ser punto fijo.

Para la segunda condición, derivando ε en $(e, f(e))$, tenemos que: $\widehat{\varepsilon} := D_{(e,f(e))}\varepsilon : T_eE \oplus T_{f(e)}M \to T_{f(e)}M$ está dado por $\widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, \widehat{m}) = D_ef(\widehat{\alpha})$. En este caso se conserva la propiedad de LZS ya que para todo $\widehat{\alpha} \in T_eE$ se tiene que $\widehat{\varepsilon}_{\widehat{\alpha}} : T_{f(e)}M \to T_{f(e)}M$ es el mapeo constante $\widehat{\varepsilon}_{\widehat{\alpha}}(\widehat{m}) = D_ef(\widehat{\alpha})$. Así, dados cualesquiera $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} \in T_eE$ se tiene que $\widehat{\varepsilon}_{\widehat{\alpha}} \circ \widehat{\varepsilon}_{\widehat{\beta}} = \widehat{\varepsilon}_{\widehat{\alpha}}$.

Por último, sean $a \in \mathfrak{g}, \widehat{\alpha} \in T_eE$ y $\widehat{m} \in T_{m_0}M$. Así tenemos que

$$a \circ \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, \widehat{m}) = \overline{a}_{m_0} + \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, \widehat{m}) = \overline{a}_{m_0} + D_ef(\widehat{\alpha});$$

Por otro lado se tiene que

$$\widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, a \circ \widehat{m}) = D_e f(\widehat{\alpha})$$

Así que en general tampoco se tiene la condición 3 del Teorema 58.

Sin embargo, si m_0 es punto fijo respecto a la acción de grupo, sí se tendrían las tres condiciones del Teorema 58, ya que $\overline{a}_{m_0} = 0$ y por tanto $a \circ \widehat{m} = \widehat{m}$ para todo $a \in \mathfrak{g}$ y $\widehat{m} \in T_{m_0}M$, en particular $a \circ \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, \widehat{m}) = \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, \widehat{m}) = \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, a \circ \widehat{m})$, y aplicando este teorema se concluye que $(\circ, \widehat{\varepsilon})$ corresponde a una acción de diálgebra.

Con todo esto podemos concluir que no siempre la derivada de una acción Tipo 1 es una acción de la diálgebra correspondiente, se necesitan condiciones adicionales para el punto m_0, como por ejemplo, pedir que m_0 sea punto fijo respecto a la acción del grupo.

Este tipo de acciones de digrupos no son muy interesantes ya que los mapeos ε_α son constantes y la condición de LZS se obtiene de manera casi que trivial. Sin embargo, tenemos una primera clase de acciones de digrupos que al derivarlas dan acciones de diálgebras, resultado que sí es importante.

Veamos ahora lo que sucede para el siguiente caso.

Caso 60 *Tipo 2.*

Para este tipo de acciones, teníamos $\varepsilon(\alpha, m) = g(m)$ donde $g : M \to M$, g equivariante y $g \circ g = g$.

Si llamamos $\widehat{g} := D_{m_o} g$ para algún $m_0 \in M$, entonces $\widehat{\varepsilon} : T_e E \oplus T m_0 M \to T m_0 M$ está dado por $\widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}, \widehat{m}) = \widehat{g}(\widehat{m})$. Para este caso, no se tiene la propiedad LZS como en el caso anterior, ya que no necesariamente $D_{m_0} g \circ D_{m_0} g = D_{m_0} g$. Sin embargo, si existe un punto fijo $m_0 \in M$ respecto a g y derivamos g en m_0 entonces sí se cumple la propiedad LZS.

No obstante, el hecho de que m_0 sea punto fijo respecto a g, tampoco garantiza que la derivada de la acción del grupo G en m_0 cumpla la condición 1 del Teorema 58, y esto quiere decir que la derivada para este tipo de acciones de digrupos, en general tampoco es necesariamente una acción de la diálgebra correspondiente. Miremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 61 *Consideremos el digrupo $D = SO(2) \times M_2(\mathbb{R})$ donde el grupo $SO(2)$ actúa sobre $M_2(\mathbb{R})$ por multiplicación izquierda, con la unidad barra marcada $(Id, 0_{2\times 2})$. También consideremos $M = \mathbb{R}^2$ y la acción de D sobre M dada por:*
1. $SO(2)$ actuando sobre M vía el mapeo $*$ que es simplemente la acción natural de multiplicar matriz por vector.
2. $\varepsilon : GL(2) \times M \to M$ dado por $\varepsilon(A, x) = x$ para todo $(A, x) \in GL(2) \times M$.
Claramente, esta acción de digrupo es del Tipo 2 donde $g = Id_M$. Consideremos ahora la derivada de esta acción en $(Id, 0_{2\times 2}), m_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Notemos que m_0 es punto fijo respecto al mapeo g pero veamos que eso no basta para que la derivada de la acción de digrupo sea acción de diálgebra:
Sean $a \in \mathfrak{so}(2); \widehat{m} \in T_{m_0}M, \circ = D_{\ (Id,m_0)} *$. Luego tenemos:

$$\begin{aligned} a \circ \widehat{m} &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(ta) * m_0 + \widehat{m} \\ &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \begin{bmatrix} \cos t & -sent \\ sent & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \widehat{m} \\ &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \begin{bmatrix} \cos t - sent \\ sent + \cos t \end{bmatrix} + \widehat{m} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \widehat{m} \end{aligned}$$

Así pues que $(a+b) \circ \widehat{m} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \widehat{m}$ mientras que $a \circ (b \circ \widehat{m}) = a \circ (\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \widehat{m}) =$

$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \widehat{m}$ *para todo* $a, b \in \mathfrak{so}(2); \widehat{m} \in T_{m_0}M$*. De aquí que no se cumple la condición 1 del Teorema 58 y por tanto, no se tiene una acción de la diálgebra* $so(2) \oplus T_0M_2(\mathbb{R})$ *en* $T_{m_0}\mathbb{R}^2$.

Analicemos a continuación las acciones del Tipo 3, recordando que en ellas el mapeo ε envía uno de los factores al campo y el otro al espacio homogéneo. Veamos cómo se comporta la derivada de ε en ambos casos.

Caso 62 *Tipo 3.1*

Las condiciones de este tipo son:

1. $f : E \to M$ equivariante,
2. $g : M \to \mathbb{k}$ lineal y tal que $g(A * m) = g(m)$ para toda $A \in G$ actuando en cualquier $m \in M$,
3. $g \circ f \equiv 1$,
4. $\varepsilon(\alpha, m) = g(m)f(\alpha)$.

Ya que en este tipo de acciones no hay restricciones ni para la acción del grupo en M ni para m_0, en general la primera condición del Teorema 58 no necesariamente se cumple.

Para la segunda condición, tomemos $a \in \mathfrak{g}$; $\widehat{\alpha} \in T_eE$; $\widehat{m} \in T_{m_0}M$ y sea γ un flujo en M tal que $\gamma(0) = m_0$ y $\gamma'(0) = \widehat{m}$; se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},\widehat{m}) &= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},0)+\widehat{\varepsilon}(0,\widehat{m})\\
&= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varepsilon(\exp(t\widehat{\alpha}),m_0)+\tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varepsilon(e,\gamma(t))\\
&= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}g(m_0)f(\exp(t\widehat{\alpha}))+\tfrac{d}{dt}|_{t=0}g(\gamma(t))f(e)\\
&= g(m_0)D_e f(\widehat{\alpha})+\tfrac{d}{dt}|_{t=0}g(\gamma(t))f(e)
\end{aligned}$$

El cálculo anterior muestra de hecho que no necesariamente se cumple ni la condición ii) ni la iii). Como consecuencia, la derivada de este tipo de acción rara vez resulta ser acción de la diálgebra correspondiente, y de hecho, hasta el momento no conocemos ningún ejemplo que sí lo sea.

Caso 63 *Tipo 3.2*

El análisis es muy similar al del caso anterior. En efecto, las condiciones de este tipo son:

1. $g: M \to M$ equivariante,
2. $f: E \to \mathbb{k}$ tal que $f(A\cdot\alpha)=f(\alpha)$ para toda $A\in G$ actuando en cualquier $\alpha\in E$,
3. $g(f(\alpha)g(m))=g(m)$ para todo $\alpha\in E$ y todo $m\in M$,
4. $\varepsilon(\alpha,m)=f(\alpha)g(m)$.

Nuevamente, tomemos $a\in\mathfrak{g}$; $\widehat{\alpha}\in T_eE$; $\widehat{m}\in T_{m_0}M$ y sea γ un flujo en M tal que $\gamma(0)=m_0$ y $\gamma'(0)=\widehat{m}$; entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},\widehat{m}) &= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha},0)+\widehat{\varepsilon}(0,\widehat{m})\\
&= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varepsilon(\exp(t\widehat{\alpha}),m_0)+\tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varepsilon(e,\gamma(t))\\
&= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}f(\exp(t\widehat{\alpha}))g(m_0)+\tfrac{d}{dt}|_{t=0}f(e)g(\gamma(t))\\
&= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}f(\exp(t\widehat{\alpha}))g(m_0)+f(e)\tfrac{d}{dt}|_{t=0}g(\gamma(t))\\
&= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}f(\exp(t\widehat{\alpha}))g(m_0)+f(e)D_{m_0}g(\widehat{m}).
\end{aligned}$$

Así pues, similar al Tipo 3.1, de nuevo es poco probable que la derivada de las acciones de este tipo sean acciones de las diálgebras correspondientes. Veamos ahora el último caso, el cual es el resultado de acciones obtenidas por homomorfismos.

Caso 64 *Tipo 4*

En contraste con lo observado para los tipos anteriores de acciones de digrupos, el Tipo 4 es el que más se relaciona con las acciones de diálgebras, ya que en en este caso no se necesitan condiciones adicionales, como sí sucedía en los casos anteriores, para obtener acciones de diálgebras. Debido a la importancia que en nuestra opinión reviste este hecho, lo analizaremos desde dos perspectivas: la primera de ellas con la siguiente proposición:

Proposición 65 *La diferencial de un homomorfismo de digrupos es un homomorfismo de diáglebras entre las respectivas diálgebras.*

Demostración. Sean $(D_i = G_i \times E_i, \vdash_i, \dashv_i, (1_i, e_i))$ digrupos, con $i = 1, 2$ y sea $f : (\varphi, \mu) : D_1 \to D_2$ un homomorfismo de digrupos. Luego (ver [13]), sabemos que $\varphi : G_1 \to G_2$ es un homomorfismo de grupos de Lie y $\mu : E_1 \to E_2$ es un mapeo suave y equivariante. Tomando la diferencial de f en $(1_1, e_1)$ se tiene:

$$F := D_{(1_1,e_1)} f = (D_{1_1}\varphi, D_{e_1}\mu) : T_{(1_1,e_1)} D_1 \to T_{(1_2,e_2)} D_2$$

Donde:

1. $F : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$, con $A_i := \mathfrak{g}_i \oplus T_{e_i} E_i \;\; i = 1, 2$,
2. $D_{1_1}\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ es homomorfismo de álgebras de Lie.

Por la Proposición 55, tenemos entonces que si llamamos $\trianglerighteq_i$: $D_{((1_i,e_i),(1_i,e_i))} \vdash_i$; $\trianglelefteq_i$: $D_{((1_i,e_i),(1_i,e_i))} \dashv_i$, entonces, para $i = 1, 2$, se tiene:

$$\begin{aligned}(a_i, \widehat{\alpha}_i) \;\; &\trianglerighteq \;\; _i(b_i, \widehat{\beta}_i) = (a_i + b_i, \widehat{\beta}_i),\\ (a_i, \widehat{\alpha}_i) \;\; &\trianglelefteq \;\; _i(b_i, \widehat{\beta}_i) = (a_i + b_i, \widehat{\alpha}_i).\end{aligned}$$

Luego, aplicando F a estas expresiones, tenemos:

$$\begin{aligned}
F((a_1,\widehat{\alpha}_1)\trianglerighteq_1(b_1,\widehat{\beta}_1)) &= F((a_1+b_1,\widehat{\beta}_1))\\
&= (D_{1_1}\varphi(a_1+b_1),D_{e_1}\mu(\widehat{\beta}_1))\\
&= (D_{1_1}\varphi(a_1)+D_{1_1}\varphi(b_1),D_{e_1}\mu(\widehat{\beta}_1))\\
&= (D_{1_1}\varphi(a_1),D_{e_1}\mu(\widehat{\alpha}_1))\trianglerighteq_2(D_{1_1}\varphi(b_1),D_{e_1}\mu(\widehat{\beta}_1))\\
&= F((a_1,\widehat{\alpha}_1))\trianglerighteq_2 F((b_1,\widehat{\beta}_1)).
\end{aligned}$$

De manera análoga, se tiene:

$$\begin{aligned}
F((a_1,\widehat{\alpha}_1)\trianglelefteq_1(b_1,\widehat{\beta}_1)) &= F((a_1+b_1,\widehat{\alpha}_1))\\
&= (D_{1_1}\varphi(a_1+b_1),D_{e_1}\mu(\widehat{\alpha}_1))\\
&= (D_{1_1}\varphi(a_1)+D_{1_1}\varphi(b_1),D_{e_1}\mu(\widehat{\alpha}_1))\\
&= (D_{1_1}\varphi(a_1),D_{e_1}\mu(\widehat{\alpha}_1))\trianglelefteq_2(D_{1_1}\varphi(b_1),D_{e_1}\mu(\widehat{\beta}_1))\\
&= F((a_1,\widehat{\alpha}_1))\trianglelefteq_2 F((b_1,\widehat{\beta}_1)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, F es homomorfismo de diálgebras y, como ya se vio en el ejemplo 23, F induce una acción de diálgebras de A_1 en A_2. ∎

Por otra parte, podemos hacer el análisis desde la perspectiva de los teoremas de caracterización que hemos probado aquí. En efecto, si hacemos uso del Teorema 58, del Lema 57 y tomamos $b_1,a_1\in\mathfrak{g}_1;(a_2,\widehat{\alpha}_2)\in\mathfrak{A}_2$ arbitrarios se cumple:

$$\begin{aligned}
b_1\circ(a_1\circ(a_2,\widehat{\alpha}_2)) &= F(b_1,0)\trianglerighteq_2(F(a_1,0)\trianglerighteq_2(a_2,\widehat{\alpha}_2))\\
&= (F(b_1,0)\trianglerighteq_2 F(a_1,0))\trianglerighteq_2(a_2,\widehat{\alpha}_2)\\
&= F((b_1,0)\trianglerighteq_1(a_1,0))\trianglerighteq_2(a_2,\widehat{\alpha}_2)\\
&= F(b_1+a_1,0)\trianglerighteq_2(a_2,\widehat{\alpha}_2)\\
&= (b_1+a_1)\circ(a_2,\widehat{\alpha}_2).
\end{aligned}$$

Esto muestra que se cumple la primera condición del Teorema 58.

Veamos que se cumplen las otras dos condiciones. Tomemos entonces $\widehat{\alpha}_1,\widehat{\beta}_1\in T_{e_1}E_1$.

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}_1,\widehat{\varepsilon}(\widehat{\beta}_1,(a_2,\widehat{\alpha}_2))) &= F(0,\widehat{\alpha}_1)\trianglelefteq_2(F(0,\widehat{\beta}_1)\trianglelefteq_2(a_2,\widehat{\alpha}_2))\\
&= (F(0,\widehat{\alpha}_1)\trianglelefteq_2 F(0,\widehat{\beta}_1))\trianglelefteq_2(a_2,\widehat{\alpha}_2)\\
&= F((0,\widehat{\alpha}_1)\trianglelefteq_1(0,\widehat{\beta}_1))\trianglelefteq_2(a_2,\widehat{\alpha}_2)\\
&= F(0,\widehat{\alpha}_1)\trianglelefteq_2(a_2,\widehat{\alpha}_2)\\
&= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}_1,(a_2,\widehat{\alpha}_2)).
\end{aligned}$$

Por tanto se tiene la propiedad LZS.

Por último veamos la tercera condición:

$$\begin{aligned}
a_1 \circ \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}_1, (a_2, \widehat{\alpha}_2)) &= F(a_1, 0) \trianglerighteq_2 (F(0, \widehat{\alpha}_1) \trianglelefteq_2 (a_2, \widehat{\alpha}_2)) \\
&= (F(a_1, 0) \trianglerighteq_2 F(0, \widehat{\alpha}_1)) \trianglelefteq_2 (a_2, \widehat{\alpha}_2) \\
&= F((a_1, 0) \trianglerighteq_1 (0, \widehat{\alpha}_1)) \trianglelefteq_2 (a_2, \widehat{\alpha}_2) \\
&= F(a_1, \widehat{\alpha}_1) \trianglelefteq_2 (a_2, \widehat{\alpha}_2) \\
&= F((0, \widehat{\alpha}_1) \trianglelefteq_1 (a_1, 0)) \trianglelefteq_2 (a_2, \widehat{\alpha}_2) \\
&= F(0, \widehat{\alpha}_1) \trianglelefteq_2 (F(a_1, 0) \trianglelefteq_2 (a_2, \widehat{\alpha}_2)) \\
&= F(0, \widehat{\alpha}_1) \trianglelefteq_2 (F(a_1, 0) \trianglerighteq_2 (a_2, \widehat{\alpha}_2)) \\
&= \widehat{\varepsilon}(\widehat{\alpha}_1, a_1 \circ (a_2, \widehat{\alpha}_2)).
\end{aligned}$$

Con todo esto, vemos que se cumplen las tres condiciones del Teorema 58.

Capítulo 5

Conclusiones

Si bien la noción de acción de digrupo que estudiamos en este trabajo es un concepto nuevo, han habido algunos pocos trabajos que se relacionan con esta idea. En lo siguiente, veremos cómo dos de estos trabajos se relacionan con las acciones de digrupos.

Empecemos con [3] donde se define el concepto de *representación principal de un digrupo*. Veremos de manera abreviada que esto es un caso particular de las acciones de digrupo del Tipo 4.

Comenzamos con un $\mathbb{C}-$espacio vectorial V, un producto punto $<,>: V \times V \to \mathbb{C}$ y un vector unitario $e_0 \in V$, para este producto punto.

A V lo dotaremos de estructura de diálgebra definiendo los mapeos $\vdash, \dashv: V \times V \to V$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} x \vdash y & := & < x, e_0 > y \\ x \dashv y & := & < y, e_0 > x \end{array} \quad \text{para todo } x, y \in V.$$

Fácilmente se muestra que $(V, \vdash, \dashv, e_0)$ es una diálgebra unitaria, la cual es llamada *diálgebra principal de* V y será denotada por $V(e_0)$.

Tomamos ahora cualquier diálgebra $(U, \vdash, \dashv)$ y decimos que un elemento $x \in U$ es *regular respecto a una unidad barra* **e**, si x es invertible. Adicionalmente, dada una diálgebra principal $V(e_0)$, denotamos por $L(V(e_0))$ al conjunto de todos los operadores lineales de V en sí mismo y decimos que $A \in L(V(e_0))$ es una transformación lineal regular respecto a e_0 si $A(e_0)$ es regular en $V(e_0)$. Llamaremos $R(V(e_0))$ al conjunto de todas las trasnsformaciones lineales regulares respecto a e_0, es decir, $R(V(e_0)) = \{A \in L(V(e_0)) : A \text{ es regular respecto a } e_0\}$. Finalmente, dotamos a $R(V(e_0))$ de una estructura de digrupo definiendo los mapeos $\trianglerighteq, \trianglelefteq$: $R(V(e_0)) \times R(V(e_0)) \to R(V(e_0))$, para todo $A, B \in R(V(e_0))$ y todo $x \in V(e_0)$ como:

$$\begin{array}{rcl} (A \trianglelefteq B)(x) & = & A(x) \dashv B(e_0) \\ (A \trianglerighteq B)(x) & = & A(e_0) \vdash B(x) \end{array}.$$

Así, $(R(V(e_0)), \trianglerighteq, \trianglelefteq, Id)$ es un digrupo.

Con estas definiciones, R. Felipe introduce la noción de Representación Principal de un digrupo de la siguiente manera:

Definición 66 *Sean $(D, \vdash, \dashv, e)$ un digrupo, V un $\mathbb{C}-$espacio vectorial de dimensión finita y $L(V(e_0))$ su diálgebra principal. Una representación principal de D en V es un homomorfismo de digrupos $T : D \to R(V(e_0))$.*

Por lo tanto, dado que una representación principal de un digrupo D es simplemente un homomorfismo de digrupos de D al digrupo particular $R(V(e_0))$, es claramente un ejemplo particular de lo que hemos llamado acciones de digrupos del Tipo 4. Pero además, parece claro que el concepto de representación de un digrupo D sobre un espacio vectorial V podría definirse más en general. De hecho, dados los resultados sobre la descomposición de los digrupos, conjeturamos que para una representación de un digrupo D sobre un espacio vectorial V, la única restricción natural es que el digrupo objetivo debe tener una descomposición en forma de producto donde la parte de grupo es $GL(V)$; pero aún queda por encontrar las condiciones adecuadas para la parte del módulo donde $GL(V)$ actúa.

El segundo trabajo que consideraremos es [7]. Aquí, Liu propone la noción de *Digrupo de Transformaciones* e intenta establecer un análogo del clásico Teorema de Cayley. El concepto central de este trabajo se basa en proporcionar una estructura de digrupo generalizado a un producto de dos conjuntos. Específicamente, en la Proposición 2.3 de [7], se define un Digrupo de Transformaciones para cualquier conjunto $\Delta \times \Gamma$, como sigue:

Definición 67 *1. Una $l_{s,f}$-función en $\Delta \times \Gamma$ es una función $l : \Delta \times \Gamma \to \Delta \times \Gamma$ y un elemento $(s, f) \in \Delta \times Sym(\Gamma)$ tales que $l(a, b) = (s, f(b))$ para todo $(a, b) \in \Delta \times \Gamma$.*
2. Sean G un subgrupo de $Sym(\Gamma)$ y $\theta : G \to Sym(\Gamma)$ un homomorfismo de grupos. Entonces definimos el conjunto $l_{\Delta\times G} := \{l_{sf} : (s, f) \in \Delta \times G\}$ y los mapeos $\rightharpoonup, \leftharpoonup$: $l_{\Delta\times G} \times l_{\Delta\times G} \to l_{\Delta\times G}$ tales que para todo $l_{s,f}, l_{t,g} \in l_{\Delta\times G}$ se tiene:

$$\begin{aligned} l_{s,f} \rightharpoonup l_{t,g} &= l_{s,f\circ g} \\ l_{s,f} \leftharpoonup l_{t,g} &= l_{\theta(f)(t),f\circ g}. \end{aligned}$$

Es fácil mostrar que la construcción de Liu corresponde a un digrupo generalizado, donde los inversos en ambos lados no necesariamente coinciden. Tal digrupo generalizado tiene como halo al conjunto $l_{\Delta\times\{Id\}}$. Este digrupo es llamado por Liu el *digrupo simétrico* de $\Delta \times \Gamma$; cualquier subdigrupo $(l_{\Delta\times G}, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ es llamado entonces el Digrupo de Transformaciones de $\Delta \times \Gamma$ inducido por (G, θ).

Para relacionar esta construcción con la nuestra, veremos que esta también puede ser vista como un caso especial de las acciones de digrupo Tipo 4. De hecho, resulta ser relativamente restrictivo, ya que el espacio homogéneo y el halo del digrupo deben coincidir. Específicamente, si en la definición anterior suponemos que tenemos un punto fijo, es decir, un elemento $0 \in \Delta$ tal que para todo $f \in G$ se tiene que $\theta(f)0 = 0$, entonces $(l_{\Delta\times G}, \rightharpoonup, \leftharpoonup, l_{0,Id})$ es un digrupo estándar. Siendo este el caso, entonces observamos que una acción de digrupo de $(l_{\Delta\times G}, \rightharpoonup, \leftharpoonup, l_{0,Id})$ en $\Delta\times\Gamma$, puede ser definida como sigue:

Para todo $(a,b)\in\Delta\times\Gamma; l_{s,f}\in l_{\Delta\times G}$:

$$\begin{aligned} l_{s,f} \ltimes (a,b) &= (\theta(f)(a), f(b)) \\ l_{s,f} \rtimes (a,b) &= (s, f(b)). \end{aligned}$$

También podemos observar que la acción derecha $\rtimes$ de $l_{\Delta\times\{Id\}}$ en $\Delta\times\Gamma$ es poco interesante, ya que $l_{s,Id}\rtimes(a,b)=(s,b)$ para todo $l_{s,Id}\in l_{\Delta\times\{Id\}}$; $(a,b)\in\Delta\times\Gamma$. Esto quiere decir que todos los elementos de $l_{\Delta\times\{Id\}}$ fijan a todos los elementos de Δ y actúan como la identidad sobre Γ.

La estructura de los digrupos generalizados es bastante similar a la de los digrupos; en particular, existe un teorema de caracterización para digrupos generalizados, como un producto de un grupo que actúa sobre su halo, como en el teorema de Kinyon. Por lo tanto, muchos resultados se pueden extender a este caso y esto nos lleva a esperar que las acciones de los digrupos generalizados también presenten una descomposición similar, como una combinación de una acción de grupo estándar y una familia de mapeos equivariantes.

Una diferencia importante entre los digrupos generalizados y los digrupos es que, en el primero, la condición de punto fijo con respecto a la acción de grupo no es necesaria, que por supuesto esto los hace más generales. Sin embargo, la ausencia de un punto fijo también significa que, por lo general, no hay un punto preferido para intentar una linealización de las operaciones de digrupo, y esto por supuesto vuelve casi imposible establecer conexiones con las diálgebras y las álgebras de Leibniz, que era uno de los objetivos centrales de este trabajo. Por esta razón es que elegimos permanecer en el contexto de los digrupos estándar.

Apéndice A

Acción bilateral de digrupos

Sabemos que las dos operaciones de un digrupo deben tener una compatibilidad entre ellas, basta con observar el numeral (3) de la Definición 1. Esto muestra que si queremos una acción bilateral de un digrupo, necesitaremos cuatro mapeos, dos para acción izquiera y dos para derecha, que tengan compatibilidades similares a las de la Definición 1.

Por otro lado, es común encontrar en la literatura las definiciones de acción de rack de Lie punteado y de acción de un álgebra de Leibniz, donde las acciones son bilaterales, por tal razón, introducimos la definición correspondiente de acción bilateral de un digrupo, la cual estaremos interesados en relacionarla con acciones (bilaterales) de rack de Lie y de álgebras de Leibniz.

Definición 68 *Una acción (bilateral) de un digrupo* $(D, \vdash, \dashv, \mathbf{e})$ *sobre un conjunto* M*, es una* $4-tupla$ *de mapeos:* $\ltimes, \rtimes : D \times M \to M$; $\trianglerighteq, \trianglelefteq : M \times D \to M$ *tales que* $\forall x, y \in D$ *y* $\forall m \in M$ *se tiene:*

1. $(\ltimes, \rtimes)$ *es acción izquierda del digrupo* D *en* M*.*

2. $(\trianglerighteq, \trianglelefteq)$ *es acción derecha del digrupo* D *en* M*.*

3. $x \ltimes (m \trianglelefteq y) = (x \ltimes m) \trianglelefteq y$

4. $x \rtimes (m \trianglelefteq y) = x \rtimes (m \trianglerighteq y)$
5. $(x \ltimes m) \trianglerighteq y = (x \rtimes m) \trianglerighteq y$

Para mostrar que las condiciones anteriores son las adecuadas, mostraremos a continuación que, de igual manera que se obtienen racks de Lie punteados a partir de digrupos, también se obtienen acciones de racks de Lie a partir de acciones bilaterales de digrupos, tal como se nota en la Definición 11.

Si tomamos una acción bilateral de un digrupo D sobre un conjunto M, llamémosla $((\ltimes, \rtimes); (\trianglerighteq, \trianglelefteq))$ y basándonos en el camino para conectar a los digrupos con los racks, expuesto en [8], formemos el mapeo $* : D \times M \to M$ definido como: $x * m = x \ltimes m \trianglelefteq x^{-1}$. Notamos que para todo $x, y \in D$ y para todo $m \in M$ se tiene:

$$\begin{aligned} x * (y * m) &= x \ltimes (y \ltimes m \trianglelefteq y^{-1}) \trianglelefteq x^{-1} \\ &= (x \vdash y) \ltimes m \trianglelefteq (y^{-1} \dashv x^{-1}) \\ &= (x \vdash y) * m \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} (x \circ y) * (x * m) &= (x \vdash y \dashv x^{-1}) * (x \ltimes m \trianglelefteq x^{-1}) \\ &= (x \vdash y \dashv x^{-1}) \ltimes (x \ltimes m \trianglelefteq x^{-1}) \trianglelefteq ((x^{-1})^{-1} \dashv (y^{-1} \vdash x^{-1})) \\ &= (x \vdash y \vdash x^{-1}) \ltimes (x \ltimes m \trianglelefteq x^{-1}) \trianglelefteq ((x^{-1})^{-1} \dashv (y^{-1} \dashv x^{-1})) \\ &= (x \vdash y) \ltimes ((x^{-1} \vdash x) \ltimes m \trianglelefteq (x^{-1} \dashv (x^{-1})^{-1})) \trianglelefteq (y^{-1} \dashv x^{-1})) \\ &= (x \vdash y) \ltimes m \trianglelefteq (y^{-1} \dashv x^{-1})) \\ &= (x \vdash y) * m \end{aligned}$$

Así que $x * (y * m) = (x \circ y) * (x * m)$. Esto quiere decir que si a un digrupo lo dotamos de estructura de rack de Lie con la conjugación usual entonces, con la misma idea de conjugar, las acciones de digrupo se transforman en acciones del rack de Lie asociado sobre el mismo conjunto donde actuaba el digrupo inicial.

Proposición 69 *Dado un digrupo $D = G \times E$; una acción de grupo izquierda $*$ y otra derecha $\circ$ de G sobre un mismo conjunto M y un par de mapeos $\varepsilon_l : E \times M \to M$; $\varepsilon_r : M \times E \to M$. tales que:*

1) $(*, \varepsilon_l)$ $(\circ, \varepsilon_r)$ *son acciones izquierda y derecha, respectivamente, de* D *sobre* M*.*

2) Para todo $A, B \in G$ *y todo* $m \in M$ *se tiene:* $A * (m \circ B) = (A * m) \circ B$

Para todo $(A, \alpha), (B, \beta) \in D$ *y todo* $m \in M$ *se tiene:*

3) $\varepsilon_l(\alpha, A * \varepsilon_r(m \circ B, \beta)) = \varepsilon_l(\alpha, A * (m \circ B))$

4) $\varepsilon_r(\varepsilon_l(\alpha, A * m) \circ B, \beta) = \varepsilon_r((A * m) \circ B, \beta)$

5) $A * \varepsilon_r(m, \beta) = \varepsilon_r(A * m, \beta)$

6) $\varepsilon_l(\alpha, m) \circ B = \varepsilon_l(\alpha, m \circ B)$,

entonces el par $((*, \varepsilon_l); (\circ, \varepsilon_r))$ *induce una acción bilateral de* D *sobre* M*.*

Demostración. Definimos las acciones para cada $(A, \alpha) \in D$ y todo $m \in M$:

$$\begin{aligned}
(A, \alpha) \ltimes m &:= A * m \\
(A, \alpha) \rtimes m &:= \varepsilon_l(\alpha, A * m) \\
m \trianglelefteq (A, \alpha) &:= m \circ A \\
m \trianglerighteq (A, \alpha) &:= \varepsilon_r(m \circ A, \alpha)
\end{aligned}$$

Veamos que se cumplen las identidades de la Definición 68: Sean $(A, \alpha), (B, \beta) \in D$ y sea $m \in M$

Asociatividad (izq):

$$\begin{aligned}
((A, \alpha) \ltimes m) \trianglerighteq (B, \beta) &= (A * m) \trianglerighteq (B, \beta) \\
&= \varepsilon_r((A * m) \circ B, \beta) \\
(A, \alpha) \ltimes (m \trianglerighteq (B, \beta)) &= (A, \alpha) \ltimes \varepsilon_r(m \circ B, \beta) \\
&= A * \varepsilon_r(m \circ B, \beta)
\end{aligned}$$

Por 2) y 5) se tiene la igualdad.

Asociatividad (der):

$$\begin{aligned}
((A, \alpha) \rtimes m) \trianglelefteq (B, \beta) &= \varepsilon_l(\alpha, A * m) \trianglelefteq (B, \beta) \\
&= \varepsilon_l(\alpha, A * m) \circ B \\
(A, \alpha) \rtimes (m \trianglelefteq (B, \beta)) &= (A, \alpha) \rtimes (m \circ B) \\
&= \varepsilon_l(\alpha, A * (m \circ B))
\end{aligned}$$

Por 2) y 6) se tiene la igualdad.

$$\begin{aligned} A1.\ ((A,\alpha)\ltimes m)\trianglerighteq(B,\beta) &= (A*m)\trianglerighteq(B,\beta)\\ &= \varepsilon_r((A*m)\circ B,\beta)\\ ((A,\alpha)\rtimes m)\trianglerighteq(B,\beta) &= \varepsilon_l(\alpha,A*m)\trianglerighteq(B,\beta)\\ &= \varepsilon_r(\varepsilon_l(\alpha,A*m)\circ B,\beta) \end{aligned}$$

Usando 4) se tiene la igualdad.

$$\begin{aligned} A2.\ (A,\alpha)\rtimes(m\trianglelefteq(B,\beta)) &= (A,\alpha)\rtimes(m\circ B)\\ &= \varepsilon_l(\alpha,A*(m\circ B))\\ (A,\alpha)\rtimes(m\trianglerighteq(B,\beta)) &= (A,\alpha)\rtimes\varepsilon_r(m\circ B,\beta)\\ &= \varepsilon_l(\alpha,A*\varepsilon_r(m\circ B,\beta)) \end{aligned}$$

Usando 3) se demuestra la igualdad.

$$\begin{aligned} A3.\ (A,\alpha)\ltimes(m\trianglelefteq(B,\beta)) &= (A,\alpha)\ltimes(m\circ B)\\ &= A*(m\circ B)\\ ((A,\alpha)\ltimes m)\trianglelefteq(B,\beta) &= (A*m)\trianglelefteq(B,\beta)\\ &= (A*m)\circ B \end{aligned}$$

Usando 2) tenemos la igualdad. ∎

Los siguientes dos ejemplos nos ayudarán a ver cómo aplicar esta proposición.

Vimos en la nota seguida al Ejemplo 54 que obteníamos una acción de rack de Lie, conjugando una acción bilateral de digrupos. Veamos que, efectivamente, los mapeos descritos corresponden a una acción bilateral de digrupos.

Ejemplo 70 *Consideremos el digrupo $D=SO(2)\times S^3$ tal como se describe en el Ejemplo 54. Si consideramos los mapeos $\ltimes_l;\rtimes_l\ :\ D\times\ \mathbb{R}^4\ \to\ \mathbb{R}^4$ y $\ltimes_r;\rtimes_r:\mathbb{R}^4\times D\to\mathbb{R}^4$ definidos para todo $(A,\alpha)\in D$; $x\in\mathbb{R}^4$ por:*

$$(A,\alpha)\ltimes_l x = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
(A,\alpha) \rtimes_l x &= x \\
x \rtimes_r (A,\alpha) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ A\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
x \ltimes_r (A,\alpha) &= x
\end{aligned}
$$

La demostración de que estos mapeos inducen una acción bilateral de digrupos es relativamente fácil, la clave está en hacer uso del Teorema 33; no obstante, por completez daremos a continuación los detalles.

Así pues, tenemos para todo $(A,\alpha) \in D$ *y todo* $x \in \mathbb{R}^4$*:*

$$
A * x = (A,e) \ltimes_l x = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \varepsilon_l(\alpha,x) = (1,\alpha) \rtimes_l x = x.
$$

$$
x \circ A = x \rtimes_r (A,e) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ A\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}; \varepsilon_r(x,\alpha) = x \ltimes_r (1,\alpha) = x.
$$

Es claro que $(*,\varepsilon_l)$ $(\circ,\varepsilon_r)$ *son acciones izquierda y derecha, respectivamente, de* D *sobre* M

Si tomamos cualquier $B \in SO(2)$ *se tiene:*

$$
A * (x \circ B) = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ B \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} \end{bmatrix} = (A * x) \circ B.
$$

Por otro lado, tanto ε_l como ε_r son proyecciones en $M = \mathbb{R}^4$; es decir, $\varepsilon_r(x, \alpha) = \varepsilon_l(\alpha, x) = x$ para todo $\alpha \in S^3$ y todo $x \in \mathbb{R}^4$, así que las demás identidades de la Proposición 69 se verifican de manera inmediata.

Ejemplo 71 *Sean $(D_1 = G_1 \times E_1, \vdash, \dashv, \mathbf{e}_1 = (1, e_1)); (D_2, \triangleright, \triangleleft, \mathbf{e}_2)$ digrupos y consideremos el digrupo producto $D = D_1 \times D_2$ con los operadores $\trianglerighteq \equiv (\vdash, \triangleright); \trianglelefteq \equiv (\dashv, \triangleleft)$ y la unidad barra $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Podemos poner a D_1 a actuar (en ambos lados) sobre D definiendo para todo $(A_1 \alpha_1), \in D_1; (y_1, y_2) \in D$ los siguientes mapeos:*

$$
\begin{array}{ll}
* : G_1 \times D \to D & A_1 * (y_1, y_2) := ((A_1, e_1) \vdash y_1, y_2) \\
\varepsilon_i : E_1 \times D \to D & \varepsilon_i(\alpha_1, (y_1, y_2)) := ((1, \alpha_1) \dashv y_1, (y_2^{-1})^{-1}) \\
\varepsilon_d : D \times E_1 \to D & \varepsilon_d((y_1, y_2), \alpha_1) := (y_1 \vdash (1, \alpha_1), (y_2^{-1})^{-1}) \\
\circ : D \times G_1 \to D & (y_1, y_2) \circ A_1 := (y_1 \dashv (A_1, e_1), y_2)
\end{array}
$$

Para ver que estos cuatro mapeos forman una acción bilateral de D_1 en D, mostraremos las 6 condiciones de la proposición anterior, para esto tomemos arbitrarios $A_1, B_1 \in G_1; \alpha_1, \beta_1 \in E_1$ y $(y_1, y_2) \in D$.

1. Notamos que tanto para $*$ como para $\circ$, el grupo G_1 actúa trivialmente sobre la segunda componente de D; además, sobre la primera componente lo hace vía los operadores del mismo digrupo D_1, lo cual produce acción izquierda y derecha, respectivamente de G_1 sobre D.

$$
\begin{aligned}
2.\ (A_1 * (y_1, y_2)) \circ B_1 &= ((A_1, e_1) \vdash y_1, y_2) \circ B_1 \\
&= ((A_1, e_1) \vdash y_1) \dashv B_1, y_2) \\
&= (A_1, e_1) \vdash (y_1 \dashv B_1), y_2) \\
&= A_1 * (y_1 \dashv B_1, y_2) \\
&= A_1 * ((y_1, y_2) \circ B_1)
\end{aligned}
$$

3. $\varepsilon_i(\alpha_1, A_1 * \varepsilon_d((y_1, y_2) \circ B_1, \beta_1))$

$= \varepsilon_i(\alpha_1, A_1 * \varepsilon_d((y_1, y_2) \circ B_1, \beta_1))$

$= \varepsilon_i(\alpha_1, A_1 * \varepsilon_d((y_1 \dashv (B_1, e_1), y_2), \beta_1))$

$= \varepsilon_i(\alpha_1, A_1 * ((y_1 \dashv (B_1, e_1)) \vdash (1, \beta_1), (y_2^{-1})^{-1}))$

$= \varepsilon_i(\alpha_1, ((A_1, e_1) \vdash ((y_1 \dashv (B_1, e_1)) \vdash (1, \beta_1)), (y_2^{-1})^{-1}))$

$= ((1, \alpha_1) \dashv ((A_1, e_1) \vdash ((y_1 \dashv (B_1, e_1)) \vdash (1, \beta_1)), (y_2^{-1})^{-1}))$

$= ((1, \alpha_1) \dashv ((A_1, e_1) \vdash y_1 \vdash (B_1, e_1) \vdash (1, \beta_1)), (y_2^{-1})^{-1}))$

$= ((1, \alpha_1) \dashv ((A_1, e_1) \vdash y_1 \vdash (B_1, e_1) \dashv (1, \beta_1)), (y_2^{-1})^{-1}))$

$= ((1, \alpha_1) \dashv ((A_1, e_1) \vdash y_1 \vdash (B_1, e_1)), (y_2^{-1})^{-1}))$

$= \varepsilon_i(\alpha_1, ((A_1, e_1) \vdash y_1 \vdash (B_1, e_1), y_2))$

$= \varepsilon_i(\alpha_1, A_1 * (y_1 \vdash (B_1, e_1), y_2))$

$= \varepsilon_i(\alpha_1, A_1 * ((y_1, y_2) \circ B_1))$

4. $\varepsilon_d(\varepsilon_i(\alpha_1, A_1 * (y_1, y_2)) \circ B_1, \beta_1)$

$= \varepsilon_d(\varepsilon_i(\alpha_1, ((A_1, e_1) \vdash y_1, y_2)) \circ B_1, \beta_1)$

$= \varepsilon_d((((1, \alpha_1) \dashv ((A_1, e_1) \vdash y_1), (y_2^{-1})^{-1})) \circ B_1, \beta_1)$

$= \varepsilon_d(((((1, \alpha_1) \dashv ((A_1, e_1) \vdash y_1)) \dashv (B_1, e_1), (y_2^{-1})^{-1})), \beta)$

$= (((((1, \alpha_1) \dashv ((A_1, e_1) \vdash y_1)) \dashv (B_1, e_1)) \vdash (1, \beta_1), (y_2^{-1})^{-1}))$

$= (((((1, \alpha_1) \vdash ((A_1, e_1) \vdash y_1)) \dashv (B_1, e_1)) \vdash (1, \beta_1), (y_2^{-1})^{-1}))$

$= ((A_1, e_1) \vdash y_1 \dashv (B_1, e_1)) \vdash (1, \beta_1), (y_2^{-1})^{-1}))$

$= \varepsilon_d(((A_1, e_1) \vdash y_1 \dashv (B_1, e_1), y_2), \beta_1)$

$= \varepsilon_d(((A_1, e_1) \vdash y_1, y_2) \circ B_1, \beta_1)$

$= \varepsilon_d((A_1 * (y_1, y_2)) \circ B_1, \beta_1)$

5.
$$\begin{aligned}
A_1 * \varepsilon_d((y_1, y_2), \beta_1) &= A_1 * (y_1 \vdash (1, \beta_1), (y_2^{-1})^{-1}) \\
&= ((A_1, e_1) \vdash y_1 \vdash (1, \beta_1), (y_2^{-1})^{-1}) \\
&= \varepsilon_d(((A_1, e_1) \vdash y_1, y_2), \beta_1) \\
&= \varepsilon_d(A_1 * (y_1, y_2), \beta_1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
6.\ \varepsilon_i(\alpha_1,(y_1,y_2))\circ B_1 &= ((1,\alpha_1)\dashv y_1,(y_2^{-1})^{-1})\circ B_1\\
&= ((1,\alpha_1)\dashv y_1\dashv (B_1,e_1),(y_2^{-1})^{-1})\\
&= \varepsilon_i(\alpha_1,(y_1\dashv (B_1,e_1),y_2))\\
&= \varepsilon_i(\alpha_1,(y_1,y_2)\circ B_1).
\end{aligned}
$$

Usando finalmente la proposición anterior tenemos de nuevo que estos cuatro mapeos inducen una acción bilateral de D_1 sobre D.

Bibliografía

[1] Sh. A. Ayupov and B. A. Omirov, *On Leibniz algebras*, Algebra and Operators Theory, Proceedings of the Colloquium in Tashkent (Kluwer, Dordrecht, 1998), pp. 1–13.

[2] A. Crans, F. Wagemann, *Crossed modules of racks*, (2013) arxiv:1310.4705.

[3] R. Felipe, *Digroups and their linear representations*, East-West J. of Mathematics: Vol. 8, No 1 (2006) pp. 27-48.

[4] A. Fialowski, and É.Z. Mihálka, *Representations of Leibniz Algebras* (2015) **18**: 477.

[5] V. V. Gorbatsevich, *On some basic properties of Leibniz algebras*, (2013) arxiv:1302.3345v2

[6] S. Govez, *The Local Integration of Leibniz Algebra*. Ann Inst. Fourier (Grenoble) **63** (2013) No 1, 1-35.

[7] K. Liu, *Transformation Digroups*, arXiv:math/0409265.

[8] M. Kinyon, *Leibniz algebras, Lie Racks, and Digroups*, Journal of Lie Theory, **17** No. 4 (2007), 99-114.

[9] J. L. Loday, *Dialgebras*, Lectures notes in Mathematics, vol 1763, Springer Verlag, 2001, pp 7-6.

[10] J. L. Loday, *Une version non commutative des algebres de Lie: les algebres de Leibniz*, Enseign. Math. (2), 1993, 39(3-4):269-293.

[11] J. L. Loday, T. Pirashvili: *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*. Math. Ann. 296(1), 139–158 (1993).

[12] J. Monterde and F. Ongay, *On Integral Manifolds for Leibniz Algebras*, Algebra, vol. (2014), Article ID 875981.

[13] F. Ongay, R. Velásquez, L.A. Wills-Toro *Normal subdigroups and the isomorphism theorems for digroups*, Algebra and Discrete Math. (2017).

[14] J. Phillips, *A Short Basis for the Variety of Digroups*, Semigroup Forum 70 (2005), 466-470.

[15] J.Renshaw, *Monoids, acts and categories: With applications to wreath products and graphs*, Semigroup Forum (2003) 66: 489.

[16] A. Rezaei-Aghdam, GH. Haghighatdoost, L. Sedghi-Ghadim, *Leibniz bialgebras*,(2017) arXiv:1401.6845v4.

[17] A. Rogers, *Supermanifolds. Theory and applications.* World Scientific Publishing Co., (2007). ISBN 978-981-02-1228-5; 981-02-1228-3

[18] L. W. Tu, *Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes*, Springer Cham, Vol 275 (2017). ISBN 978-3-319-55084-8.