



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

SEGUIMIENTO EN FORMACIÓN CON EVASIÓN DE OBSTÁCULOS PARA UN SISTEMA DE MÚLTIPLES AGENTES NO HOLÓNOMOS

T E S I S

Que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias
con Orientación en
Ciencias de la Computación

Presenta

José Bernardo Martínez Morales

Directores de Tesis:

Dr. Héctor Manuel Becerra Fermín
Dr. David Gómez Gutiérrez

**Autorización de la versión
final**

Guanajuato, Gto., 13 de Diciembre de 2019

AGRADECIMIENTOS

Primeramente quiero agradecer al Dr. Héctor M. Becerra, por sus consejos, su paciencia, sus enseñanzas y apoyo durante mis estudios de maestría. También agradezco al Dr. David Gómez Gutiérrez, al Dr. Israel Becerra Durán y al Dr. Jean-Bernard Hayet por todas sus observaciones y sugerencias que contribuyeron a mejorar el resultado final de este documento.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado para subsidiar mis estudios de maestría.

De igual forma, quiero agradecer a todos mis amigos de la maestría quienes me apoyaron de manera tanto moral como intelectual. De manera especial quiero agradecer a Charlie, quien siempre me escucha y me motiva a superarme.

Finalmente quiero agradecer a mi familia por todo su apoyo durante toda mi vida y por haberme brindado la confianza necesaria para salir adelante en los momentos difíciles. A Francisco Cárdenas quien es como parte de mi familia y me impulsó a dar este gran paso.

Seguimiento en formación con evasión de obstáculos para sistemas de múltiples agentes no holónomos

José Bernardo Martínez Morales

Resumen

En el control de consenso distribuido para sistemas de múltiples agentes (MASs), un conjunto de agentes cooperan para alcanzar un comportamiento colectivo conocido como consenso, utilizando solamente información local a través de una red de comunicación. Se dice que un sistema multi-agente ha alcanzado consenso cuando todos sus agentes han llegado a un acuerdo en cierta variable de interés. El valor alcanzado en dicha variable puede depender de las condiciones iniciales, un líder o una referencia externa predefinida.

En esta tesis se estudia el problema en el que un sistema multi-agente debe ser capaz de alcanzar una formación utilizando un protocolo de consenso con convergencia en tiempo asintótico, ser capaz de evadir obstáculos convexos modelados como círculos y de seguir una referencia variante en el tiempo que se le impone, la cual, es únicamente conocida por un agente. El problema se aborda para un conjunto de agentes no holónomos conocidos como robots de manejo diferencial (DDRs) los cuales se modelan a nivel cinemático y se considera que están conectados a través de una red con topología fija y que contiene un árbol de expansión tal que se transmita la referencia a todos los agentes. El problema se aborda como una combinación de objetivos (las cuales se denominan tareas), para lo cual utiliza un control basado en múltiples tareas que considera jerarquía entre ellas. Primero se resuelve el problema de lograr una formación deseada mientras los agentes evitan colisiones, ya sean entre agentes mismos o con obstáculos fijos. Posteriormente se utiliza un enfoque líder-seguidor para el seguimiento en formación donde la trayectoria de referencia sólo es conocida por un agente, proponiéndose controles diferentes para el líder y los seguidores. Se demuestra teóricamente la convergencia de los protocolos de control propuestos y se realizan pruebas en un simulador dinámico para verificar su desempeño con un grupo de robots.

Asesores de tesis:

Dr. Héctor Manuel Becerra Fermín (CIMAT)

Dr. David Gómez Gutiérrez (Intel Tecnología de México)

ÍNDICE

Agradecimientos	iii
Resumen	v
1 Introducción	1
1.1 Preliminares	1
1.2 Trabajo relacionado	3
1.3 Contribuciones	6
1.4 Estructura de la tesis	6
2 Antecedentes matemáticos	9
2.1 Teoría de grafos	9
2.2 Modelo de conectividad	10
2.2.1 Matriz de adyacencia	10
2.2.2 Matriz de grado	10
2.2.3 Matriz Laplaciana	11
2.3 Protocolo de consenso	11
2.4 El problema del control de formaciones	13
3 Control de formación y evasión de obstáculos	15
3.1 Robot de manejo diferencial	15
3.1.1 Cinemática de un DDR	15
3.2 Definición del problema	17
3.3 Control de formaciones	18
3.3.1 Consenso de los agentes virtuales	18
3.4 Evasión de obstáculos	21
3.4.1 Función de tarea	21
3.4.2 Control jerárquico	22

3.5	Propuesta de control de formación con evasión de obstáculos	24
3.5.1	Tarea prioritaria	24
3.5.2	Tarea secundaria	25
3.6	Resultados	29
4	Seguimiento en formación con evasión de obstáculos	43
4.1	Planteamiento del problema	44
4.2	Seguimiento de un agente no holónimo	44
4.3	Seguimiento con evasión de obstáculos de un agente no holónimo	45
4.4	Control de formación y seguimiento de trayectoria con evasión de obstáculos de un sistema multi-agente no holónimo	46
4.5	Resultados	52
4.5.1	Seguimiento de un robot no holónimo	53
4.5.2	Seguimiento de un robot no holónimo con evasión de obstáculos	54
4.5.3	Seguimiento en formación con evasión de obstáculos	57
4.5.4	Seguimiento en formación con evasión de obstáculos siguiendo una trayectoria dada por un planificador	62
5	Conclusiones y trabajo futuro	71
	Bibliografía	75

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1	Esquema del robot de manejo diferencial.	16
3.2	En la figura superior se muestra un ejemplo de una formación deseada con respecto a un marco de referencia O . Las flechas representan los vectores de traslación $\mathbf{z}_j, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$. En la figura central la línea negra continua representa al grafo original G y la línea punteada gris representa al grafo virtual G^* . En la figura inferior los robots virtuales convergen a un estado común mientras que los robots reales convergen a una formación deseada. Figura replicada de [14].	20
3.3	Condiciones iniciales de los robots en una simulación de Gazebo. A la izquierda una vista isométrica y a la derecha una vista superior.	29
3.4	Momentos clave en una simulación de Gazebo.	30
3.5	Condiciones finales de los robots una vez que alcanzaron la formación deseada.	31
3.6	Trayectorias caso 1. Arriba se muestran la trayectorias de los agentes reales para alcanzar la formación y abajo las trayectorias de los agentes virtuales para llegar a consenso.	33
3.7	Velocidades en caso 1. En la gráfica superior se muestran las velocidades lineales aplicadas a cada uno de los agentes y en la gráfica inferior las velocidades angulares aplicadas a los agentes para llegar a formación.	34
3.8	Caso 1. Activación del control multitarea para cada agente. Se muestra en qué momento está activa la tarea de evasión de obstáculos durante la simulación.	34
3.9	Errores de consenso en caso 1. En la gráfica superior se muestra el error de consenso con respecto al eje X y en la gráfica inferior el error de consenso con respecto al eje Y	35
3.10	Función $h(t)$	36
3.11	Trayectorias en caso 2. Arriba se muestran la trayectorias de los agentes reales para alcanzar la formación y abajo las trayectorias de los agentes virtuales para llegar a consenso.	37

3.12	Velocidades en caso 2. En la gráfica superior las velocidades lineales aplicadas a cada uno de los agentes y en la gráfica inferior las velocidades angulares aplicadas a los agentes para llegar a formación.	38
3.13	Caso 2. Función de activación $h(t)$ del control multitarea. Se muestra en qué momento está activa la tarea de evasión de obstáculos durante la simulación.	38
3.14	Errores de consenso en caso 2. En la gráfica superior se muestra el error de consenso con respecto al eje X y en la gráfica inferior el error de consenso con respecto al eje Y	39
3.15	Trayectorias en caso 3. Arriba se muestran la trayectorias de los agentes reales para alcanzar la formación y abajo las trayectorias de los agentes virtuales para llegar a consenso.	40
3.16	Velocidades en caso 3. En la gráfica superior se muestran las velocidades lineales aplicadas a cada uno de los agentes y en la gráfica inferior se muestran las velocidades angulares aplicadas a los agentes para llegar a formación.	41
3.17	Caso 3. Función de activación $h(t)$ del control multitarea. Se muestra en qué momento está activa la tarea de evasión de obstáculos durante la simulación.	41
3.18	Errores de consenso en caso 3. En la figura superior se muestra el error de consenso con respecto al eje X y en la figura inferior el error de consenso con respecto al eje Y	42
4.1	Resultados de utilizar un control de seguimiento de trayectoria en un solo agente sin obstáculos.	53
4.2	Error de seguimiento de trayectoria sin obstáculos.	54
4.3	Gráficas de velocidades al aplicar un control de seguimiento de trayectoria en un solo agente sin obstáculos.	55
4.4	Resultados de utilizar un control de seguimiento de trayectoria en un solo agente con obstáculos.	56
4.5	Resultados de utilizar un control de seguimiento de trayectoria en un solo agente con obstáculos.	56
4.6	Resultados de utilizar un control de seguimiento de trayectoria en un solo agente con obstáculos.	57
4.7	Seguimiento en formación con evasión de obstáculos. Arriba se muestran las trayectorias realizadas por los agentes reales y la formación resultante al terminar la simulación. Abajo las trayectorias de los agentes virtuales, las cuales muestran que no se mantuvo la formación a lo largo de toda la trayectoria debido a la evasión de obstáculos, pero se recupera posteriormente.	58

4.8	Función de activación $h(t)$ del control multitarea durante el seguimiento en formación para cada agente. Se muestra en qué momento está activa la tarea de evasión de obstáculos durante la simulación.	59
4.9	Velocidades durante el seguimiento en formación. En la gráfica superior se muestran las velocidades lineales aplicadas a cada uno de los agentes y en la gráfica inferior se muestran las velocidades angulares aplicadas a los agentes durante la simulación.	60
4.10	Errores de seguimiento de trayectoria por parte del agente líder.	60
4.11	Errores de consenso durante seguimiento en formación. En la figura superior se muestra el error de consenso con respecto al eje X y en la figura inferior el error de consenso con respecto al eje Y	61
4.12	Vista del RRT calculado para el agente líder.	63
4.13	Trayectoria calculada por el RRT.	64
4.14	Velocidades en lazo abierto dadas por el RRT. Arriba se muestra la velocidad lineal para obtener la trayectoria de referencia. Abajo se muestra la velocidad angular para obtener la trayectoria.	65
4.15	Seguimiento en formación con evasión de obstáculos al utilizar una trayectoria dada por un planificador. Arriba se muestran las trayectorias realizadas por los agentes reales y la formación resultante al terminar la simulación. Abajo las trayectorias de los agentes virtuales, las cuales muestran que no se mantuvo la formación a lo largo de toda la trayectoria debido a acciones de evasión de obstáculos.	66
4.16	Función de activación del control multitarea para cada agente durante el seguimiento en formación al utilizar una trayectoria dada por un planificador. Se muestra en qué momento está activa la tarea de evasión de obstáculos durante la simulación.	67
4.17	Velocidades durante el seguimiento en formación al utilizar una trayectoria dada por un planificador. En la gráfica superior se muestran las velocidades lineales aplicadas a cada uno de los agentes y en la gráfica inferior se muestran las velocidades angulares aplicadas a los agentes durante la simulación.	67
4.18	Errores de seguimiento de una trayectoria dada por un planificador por parte del agente líder.	68

4.19 Errores de consenso durante seguimiento en formación al utilizar una trayectoria dada por un planificador. En la figura superior se muestra el error de consenso con respecto al eje X y en la figura inferior el error de consenso con respecto al eje Y	69
--	----

INTRODUCCIÓN

Hoy en día los sistemas multi-agente han tomado mayor importancia. Múltiples agentes pueden resolver tareas más rápido y con un costo menor si trabajan cooperativamente comparado contra un solo agente intentando realizar las mismas tareas. Algunos de los principales temas y problemas de interés en el ámbito de investigación son: consenso, control de formaciones, vigilancia, movimiento coordinado, entre otros.

1.1 Preliminares

Un sistema multi-agente es un conjunto de agentes que interactúan entre sí, donde cada agente tiene su propia dinámica y estado (el cual, puede ser la configuración de un robot manipulador, posiciones, mediciones estimadas por sensores visuales o de distancia, orientaciones). En un sistema multi-agente, la comunicación entre agentes puede ser modelada con un grafo, donde las aristas representan los flujos de información permitidos entre agentes.

Un problema fundamental en el control de sistemas multi-agente es el diseño de algoritmos de consenso o protocolos de consenso (en la siguiente sección se especifica la definición formal). Se dice que un sistema multi-agente ha llegado a consenso cuando todos sus agentes llegan a un acuerdo en cierta variable de interés. El valor del estado de consenso puede depender del interés de todos los agentes (consenso sin líder) o puede ser dado por un agente, o múltiples agentes (consenso líder-seguidor). Un protocolo de

consenso permite a un sistema multi-agente alcanzar un objetivo deseado imponiendo dinámicas similares en el estado de cada agente. Comúnmente son utilizados dos enfoques en el diseño de protocolos de control para sistemas multi-agentes: un enfoque *centralizado* y un enfoque *decentralizado* o *distribuido*. En el enfoque *centralizado*, cada agente en la red puede comunicarse con una estación central, la cual, recolecta la información de todos los agentes y controla por completo el sistema multi-agente. Los principales inconvenientes son: un fallo de cualquier tipo con la estación central causará que toda la red falle y por otra parte no escala bien con el número de agentes. En el enfoque distribuido, únicamente es intercambiada información entre agentes vecinos, es decir, entre agentes conectados por la red. Además, el enfoque distribuido tiene varias ventajas: costos operacionales bajos, mayor robustez, flexibilidad a escalabilidad, menores requerimientos de sistema, entre otros.

Una formación es una forma o una figura construida por un conjunto de robots. Los algoritmos que se utilizan para alcanzar formaciones se conocen como algoritmos de control de formación y su objetivo principal es calcular las velocidades adecuadas para mover a un grupo de robots para que alcancen una formación deseada. Es posible abordar el problema de alcanzar una formación haciendo una extensión a un protocolo de consenso, es decir, adaptar la ley de control para que los agentes no converjan a un estado común (posición) sino a un valor desplazado con respecto a ese estado común, el cual pasaría a ser el marco relativo de la formación, comúnmente el centroide (aunque no siempre debe ser así). Es importante mencionar que al utilizar un control de formación basado en teoría de consenso es posible que los robots colisionen mientras intentan alcanzar su meta, ya sea con ellos mismos o con obstáculos del entorno en que se encuentren. Por lo anterior es necesario la inclusión de una estrategia de evasión de obstáculos dentro del control de formación.

En esta tesis, nos enfocaremos en el diseño de un algoritmo que busca llevar a un sistema multi-agente a una formación y a alcanzar una referencia variante en el tiempo, utilizando un protocolo de control distribuido considerando que el sistema multi-agente se comunica a través de una red bidireccional, es decir, el flujo de información va en ambos sentidos entre dos agentes conectados. Se supondrá que la topología de la red es fija, y que no hay pérdida de información en ningún momento en la comunicación entre agentes. El sistema multi-agente considerado está conformado por un conjunto de agentes iguales (sistema homogéneo), no holónomos (particularmente robots móviles de manejo diferencial), los cuales son modelados a nivel cinemático. Se considerará que el sistema multi-agente puede partir de cualquier conjunto de condiciones iniciales y que puede haber obstáculos fijos en el entorno. La estrategia de evasión de obstáculos que se incluirá es reactiva, por lo que no es necesario conocimiento previo del entorno, sin embargo únicamente será capaz de evadir

obstáculos con forma convexa. Algunas consideraciones extras se detallarán posteriormente.

1.2 Trabajo relacionado

Una de las principales áreas de trabajo en sistemas de múltiples agentes es realizar *movimiento coordinado*, lo cual hace referencia a la navegación estratégica de un grupo de agentes. Navegación estratégica se compone de tres diferentes objetivos: formación, seguimiento de una trayectoria (*tracking*) y evasión de obstáculos. En la última década, diferentes soluciones se han propuesto para hacer frente a estos objetivos, algunas de ellas consideran solo formación, formación con seguimiento de trayectoria, formación con evasión de obstáculos, muy pocas de ellas resolviendo los tres objetivos.

Una posible forma de enfrentar el problema de control de formación es por medio de teoría de consenso. En redes de agentes en las que cada agente es un sistema dinámico, *consenso* se refiere a llegar a un acuerdo sobre cierta cantidad de interés que depende del estado de todos los agentes [22]. Un *algoritmo de consenso* (o protocolo de consenso) es una regla de interacción que especifica el intercambio de información entre un agente y todos sus vecinos en la red. En [28] y [5] se proporciona un marco teórico para el análisis de algoritmos de consenso, un panorama general de los conceptos básicos de consenso en redes de información, análisis de desempeño y convergencia de los protocolos de consenso. Algunas variantes de algoritmos de consenso considerando el tiempo de convergencia o redes que cambian de topología debido a la conexión y desconexión de algunos agentes son explicadas en [23] y [35].

Existen muchos trabajos de consenso en donde se añade un segundo objetivo. Típicamente el segundo objetivo es resolver consenso con una referencia variante en el tiempo, lo que implica que los agentes tienen que alcanzar el consenso mientras se mueven en una trayectoria. A esto se le llama seguimiento en consenso (*consensus tracking*).

Resolver seguimiento en consenso toma importancia debido a que permite sincronizar a un grupo de agentes llevándolos a seguir una referencia única, la cual, es conocida por algunos de los agentes de la red o incluso puede ser conocida por un solo agente líder. En [37] se propone un esquema de solución a seguimiento en consenso donde se supone que la topología de la red de los agentes que no conocen la referencia es fija y fuertemente conectada (se entiende por topología fuertemente conectada a aquella en la que todos los agentes de una red conocen el estado de todos los demás agentes en la red). Seguimiento en consenso bajo topologías inter-vehículo dirigidas y variables se resuelve en [25]. En [19] se propone un protocolo de consenso que converge en tiempo finito. Se dice que un

sistema de múltiples agentes logra llegar a consenso en tiempo finito cuando bajo cualquier conjunto de condiciones iniciales se alcanza consenso en un tiempo finito. En [24] se parte del análisis de consenso con una referencia estática y posteriormente se estudia el caso de una referencia variante en el tiempo, teniendo como restricción que solo una parte de los agentes tienen acceso a la referencia.

Un algoritmo de consenso puede ser extendido para garantizar que las diferencias de los estados de los vehículos converjan a un valor deseado y consecuentemente los agentes alcancen una formación. Para ello, se debe agregar una distancia deseada entre agentes deseados al protocolo de consenso.

En [10] se propone una solución al problema de controlar un grupo de robots no holónomos para alcanzar una formación. La formación es descrita en términos de posiciones y orientaciones relativas deseadas que los robots deben mantener con respecto a cada uno de sus vecinos, además de que se supone que no hay una referencia global. En [8] se muestra una conexión entre la infactibilidad de una formación y las velocidades de los agentes. Dicha conexión es válida para agentes holónomos y no holónomos.

Cabe resaltar que la formación de un sistema de múltiples agentes obtenida mediante un protocolo de consenso en general no utiliza una referencia global, por lo que la formación final puede tener múltiples soluciones. Esto se debe a que las distancias entre agentes son relativas y la solución final dependerá de diversos factores como ganancias de control, topología de la red, entre otras. Una condición para obtener una solución única está dada en [17]. Una solución para intercambio de información limitada se presenta en [27].

El problema de seguimiento en formación (*formation tracking*), se refiere a que el grupo de agentes en formación siguen una referencia variante en el tiempo, la cual puede ser conocida por uno o varios agentes. Al buscar resolver seguimiento en formación pueden surgir aspectos a considerar, por ejemplo, es necesario considerar: espacios restringidos [20], comunicación limitada [9], agentes no holónomos, intercambio de información parcial [21] o conflicto entre objetivos [1], por ejemplo, la necesidad de romper la formación para seguir una trayectoria.

En seguimiento en formación es comúnmente utilizado un esquema líder-seguidor donde solo el líder busca seguir la trayectoria y los seguidores mantienen una formación. El esquema líder-seguidor implica que solo el líder puede conocer la trayectoria pero, si el líder no coopera con los seguidores para mantener la formación debido a que únicamente sigue la trayectoria, entonces la formación es alcanzada solo al final de la trayectoria. Por esta razón en [24] se propone una ley de control donde el líder además de seguir una trayectoria coopera con los seguidores para mantener la formación.

Teóricamente, una formación deseada puede ser lograda si se garantiza la estabilidad de un error definido en términos de medidas relativas. Sin embargo, en la práctica cada agente puede colisionar con otro agente o con obstáculos fijos durante el movimiento antes de lograr la formación, haciendo necesaria una estrategia de evasión de obstáculos. El problema de evasión de obstáculos es clásico en robótica y existen muchas estrategias para abordarlo [13]. En sistemas de múltiples agentes es importante resolver este problema utilizando información local a fin de mantener una implementación distribuida del esquema completo. Por ejemplo, en [15] se propuso una ley de control predictiva basada en un esquema líder-seguidor y en el modelo cinemático para seguimiento en formación. En [14] se presenta un algoritmo de control descentralizado para abordar el problema de controlar múltiples robots móviles no holónomos para alcanzar una formación libre de colisión y además consenso de orientación (*heading consensus*) (el cual hace referencia a consenso de la orientación del frente de un robot móvil) de manera simultánea. Por otra parte en [38] se aborda el mismo problema pero utilizando una estrategia de evasión de colisión diferente, la cual se basa en campos de potencial artificial.

Formación y seguimiento de trayectoria con evasión de obstáculos para robots no holónomos ha sido abordado en pocos trabajos. En [11] se diseña un modelo de aproximación para restricciones espaciales, el cual, proporciona una herramienta para control de seguimiento de trayectorias o planificación de caminos en espacios restringidos (para agentes holónomos). El problema de formación es abordado con un algoritmo de optimización mientras la evasión de obstáculos es resuelta con funciones de potencial artificial. En [29] se propone una estrategia de control descentralizado (dado que los agentes no tienen conocimiento global de la meta a alcanzar, solo conocen la posición y velocidad relativas de algunos agentes) que permite a un conjunto de agentes móviles seguir una trayectoria predeterminada mientras alcanzan una formación. A fin de lograr evasión de obstáculos, se agrega a la ley de control de formación y seguimiento de trayectoria un campo de potencial repulsivo.

En [39] se presenta un controlador basado en linearización por retroalimentación entrada-salida para robots no holónomos. Combinado con el algoritmo de evasión de obstáculos basado en campo de potencial artificial, dicho protocolo puede realizar con éxito la función de formación y seguimiento de trayectoria con evasión de obstáculos para múltiples robots.

1.3 Contribuciones

En el estado del arte es común encontrar trabajos que se enfocan en resolver dos objetivos de los que se abordan en esta tesis y son pocos los que resuelven los tres. En esta tesis se integra una solución al problema de seguimiento de trayectoria en formación con evasión de obstáculos, donde las tres tareas que resuelve el grupo de robots son: 1) un líder sigue una trayectoria deseada, 2) un grupo de seguidores debe alcanzar y mantener una formación deseada con respecto del líder y 3) todos los agentes deben evadir obstáculos que se presenten durante el movimiento coordinado. La ley de control planteada es distribuida, es decir, no hay necesidad de que alguno de los seguidores conozca un marco de referencia global. Así una contribución de esta tesis es que únicamente son necesarias distancias relativas (que pueden ser medidas con sensores a bordo de los robots).

Típicamente los esquemas de evasión de obstáculos que son reactivos realizan una conmutación de control al aparecer un obstáculo a evadir, lo cual genera discontinuidades en las velocidades de los robots. En este trabajo se ha introducido una estrategia basada en una función de transición que permite conmutar de controladores de forma suave y generar velocidades continuas, demostrando teóricamente la estabilidad del protocolo de control combinado incluso durante la transición de controles. Otra contribución de esta tesis es que la estrategia de evasión de obstáculos tiene un correcto desempeño a pesar de la restricción no holónoma presente en los robots de manejo diferencial.

Se implementaron dos protocolos de control distribuidos, uno que resuelve el control de formación con evasión de obstáculos y otro que resuelve el problema de seguimiento en formación con evasión de obstáculos, ambos utilizando el simulador dinámico Gazebo por medio de las funcionalidades del Robotics Operating System (ROS). Se presentan resultados del desempeño de los protocolos de control propuestos en diferentes pruebas, en particular para un grupo de cuatro robots, pero la simulación se puede extender para grupos más grandes. El correcto funcionamiento de la ley de control que se refleja en los resultados del simulador da pie a la posibilidad de emplearlo en escenarios reales una vez que se consideren algunos problemas prácticos como que no hay pérdida de comunicación entre agentes, ni retardo en el envío de datos y la comunicación es sincronizada, entre otros.

1.4 Estructura de la tesis

A continuación se presenta la estructura general de la tesis:

- Capítulo 1. Presenta una introducción general sobre el tema que se aborda en la tesis,

así como la literatura revisada.

- Capítulo 2. Se introducen conceptos y antecedentes que forman parte de la teoría de algebra de grafos, protocolos de consenso y algunas propiedades relacionadas, de interés, utilizadas posteriormente.
- Capítulo 3. Se presenta el problema de formación y evasión de obstáculos bajo un esquema que utiliza agentes virtuales, así como la ley de control que resuelve este problema con convergencia en tiempo asintótico, la cual está pensada para aplicarse a un sistema de múltiples agentes, en particular robots de manejo diferencial. La ley de control está basada en un esquema de múltiples tareas que utiliza un control jerárquico. La estabilidad del protocolo de control combinando el control de formación y evasión de obstáculos se demuestra mediante teoría de Lyapunov y propiedades de grafos. Se presentan resultados de la implementación del protocolo de control utilizando el simulador dinámico Gazebo.
- Capítulo 4. Se presenta el problema de seguimiento en formación con evasión de obstáculos. Utilizando el mismo enfoque de múltiples tareas y control jerárquico, se realiza una extensión al problema de formación para que además el sistema multi-agente pueda seguir una referencia variante en el tiempo. Para ello, el esquema anterior se combina con un esquema líder-seguidor de forma que un líder se encargue de seguir la referencia y los demás agentes (los seguidores) se encarguen de mantener la formación. La estabilidad del protocolo de control propuesto también se demuestra mediante análisis de Lyapunov y usando teoría de grafos. Se presentan resultados de la implementación en Gazebo del protocolo de control propuesto y se evalúan diferentes casos. Entre ellos se reporta una prueba para seguir una trayectoria dada por un planificador sencillo (el cual sí requiere de conocimiento del entorno) con el objetivo de aplicarlo a un caso más real.
- Capítulo 5. Se resumen los resultados y contribuciones de esta tesis además de señalar el posible trabajo a futuro.

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

Este capítulo presenta las notaciones, definiciones y algunos conceptos teóricos que se usarán a lo largo del presente trabajo. La interacción de los integrantes de un sistema de múltiples agentes se modela mediante un grafo de comunicación. Los grafos representan una red de comunicación que permite el flujo de comunicación entre agentes. En esta sección, se describe el modelo de conectividad utilizado, así como el álgebra que se involucra al utilizar este planteamiento. Posteriormente se presenta un protocolo de consenso básico y se dan a conocer algunas propiedades del mismo utilizando los conceptos de álgebra vistos durante el capítulo.

2.1 Teoría de grafos

Un grafo G consiste en un conjunto de vértices $\mathcal{V}(G)$ y un conjunto de aristas $\mathcal{E}(G)$ donde una arista es un par de vértices distintos de G . Escribir (i, j) denota una arista, y $(j \sim i)$ denota que el vértice i y el vértice j son adyacentes o vecinos, es decir, existe una arista (i, j) . El conjunto de vecinos del vértice i en el grafo G está representado por $\mathcal{N}_i(G) = \{j : (j, i) \in \mathcal{E}(G)\}$.

Un grafo puede ser dirigido o no dirigido. En un grafo dirigido, una arista (i, j) denota que el vértice j puede obtener información del vértice i , pero no necesariamente viceversa mientras que en un grafo no dirigido una arista (i, j) denota que los vértices i y j pueden recibir información uno del otro.

Un camino de i a j en un grafo es una secuencia de diferentes vértices comenzando con i y finalizando con j tal que los vértices consecutivos son adyacentes. Si existe un

camino entre cualquier par de vértices de un grafo G no dirigido, entonces se dice que G está *conectado*, en caso de grafos dirigidos se dice que G está *fuertemente conectado* y en caso contrario se dice que está desconectado.

Un camino dirigido es una secuencia de aristas en un grafo dirigido. Un árbol dirigido es un grafo dirigido donde cada vértice tiene sólo un padre exceptuando uno llamado raíz, el cual tiene un camino dirigido a cualquier otro vértice. Un árbol de expansión dirigido de G es un árbol dirigido que contiene todos los vértices de G . Un grafo dirigido contiene un árbol de expansión dirigido si existe un subconjunto en el grafo dirigido, el cual tenga al menos un vértice que tiene un camino dirigido hacia los vértices restantes del grafo.

Un grafo no dirigido es *completo* si existe una arista entre cada par de vértices. En el caso de grafos dirigidos se dice que es *completo* si hay un par de aristas por cada par de vértices, una para cada dirección. Para mayor información sobre los conceptos revisados sobre grafos puede consultarse [24] [6].

2.2 Modelo de conectividad

En esta sección se presentan algunos de los principales conceptos sobre álgebra de grafos que serán utilizados para el análisis de convergencia para los algoritmos que se proponen posteriormente.

2.2.1 Matriz de adyacencia

La matriz de adyacencia de un grafo G con N vértices es una matriz cuadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, donde a_{ij} corresponde al peso de la arista (i, j) . Este trabajo se enfocará en grafos conectados y balanceados (es decir $\sum_{j \neq i} a_{ij} = \sum_{j \neq i} a_{ji}$) por lo que la matriz de adyacencia es simétrica y se define como:

$$(2.1) \quad \mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

2.2.2 Matriz de grado

La matriz de grado de un grafo es una matriz diagonal $\mathbf{D} = [d_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ que indica el número de aristas que tiene cada vértice en el grafo. Se puede definir como

$$(2.2) \quad \mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$$

donde

$$d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

2.2.3 Matriz Laplaciana

La matriz Laplaciana de un grafo G se define como:

$$(2.3) \quad \mathbf{L}(G) = \mathbf{D} - \mathbf{A},$$

donde \mathbf{D} es la matriz de grado y \mathbf{A} es la matriz de adyacencia definidas en (2.1) y (2.2) respectivamente.

Sus elementos pueden expresarse como:

$$(2.4) \quad l_{ij} = \begin{cases} |\mathcal{N}_i| & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } j \in \mathcal{N}_i \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

donde $|\mathcal{N}_i|$ representa el número de vértices adyacentes o vecinos al vértice i .

La matriz Laplaciana cuenta con las siguientes propiedades:

- Para grafos no dirigidos la matriz Laplaciana \mathbf{L} es una matriz semidefinida positiva y simétrica, por lo tanto sus valores propios son todos reales y no negativos.
- La suma de sus renglones es igual a cero, por lo que tiene un valor propio nulo $\lambda_1(\mathbf{L}) = 0$, el cual tiene correspondencia con el vector propio $\mathbf{1}_N = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^N$, es decir, $\ker(\mathbf{L}(G)) = \{x : x_1 = \dots = x_N\}$.
- El segundo más pequeño de los valores propios $\lambda_2(\mathbf{L})$, se conoce como conectividad algebraica. Este valor propio, en adelante λ_2 , es mayor que cero solamente si el grafo G es un grafo conectado. De hecho, la magnitud de este valor propio refleja que tan buena es la conectividad en el grafo.

2.3 Protocolo de consenso

Retomando la idea de consenso que se introdujo en el primer capítulo, donde consenso hace referencia la situación en la cual un conjunto de N agentes llega a un acuerdo en una cantidad de interés común, por ejemplo de su estado:

$$(2.5) \quad x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t).$$

Considere un sistema multi-agente que está conectado a través de una red de comunicación con cierta topología y en el que la dinámica de cada agente es de un integrador simple, esto es:

$$(2.6) \quad \dot{x}_i(t) = u_i, \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

donde $x_i(t), u_i(t) \in \mathbb{R}$ son el estado y la entrada de control del agente i , respectivamente. Las dinámicas del sistema de múltiples agentes (2.6) pueden escribirse de forma vectorial como:

$$(2.7) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{u}(t)$$

donde $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T \in \mathbb{R}^N$ es el vector de estados y $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)]^T \in \mathbb{R}^N$ es el vector de entradas de control de los agentes.

Un algoritmo básico de consenso presentado en [23], define una ley de control

$$(2.8) \quad u_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)), \quad i \in \{1, \dots, N\},$$

para que N agentes con dinámica de un integrador alcancen un estado común en tiempo asintótico, partiendo de condiciones iniciales arbitrarias.

La ley de control expresada en la ecuación (2.8) puede ser expresada en forma matricial como:

$$(2.9) \quad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(t).$$

Al sustituir la ecuación (2.9) en la ecuación (2.7) se obtiene la siguiente dinámica en lazo cerrado:

$$(2.10) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(t).$$

El sistema de la ecuación (2.10) tiene las siguientes propiedades [23]:

- El valor propio cero de la matriz \mathbf{L} corresponde al vector propio $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$, lo cual implica que (2.10) tiene un estado de equilibrio en el que: todos los agentes alcanzan consenso y permanecen en el mismo valor de manera indefinida de la forma $\mathbf{x}^* = [\beta, \beta, \dots, \beta]^T = \beta\mathbf{1}$.
- El valor de consenso es la media de las condiciones iniciales en el caso de grafos no dirigidos. Este valor es alcanzado de manera asintótica.
- La conectividad algebraica λ_2 cuantifica la velocidad de convergencia del algoritmo de consenso. Entre mayor sea su magnitud, más rápida será su convergencia hacia el estado de equilibrio.

2.4 El problema del control de formaciones

Los conceptos vistos en el presente capítulo se pueden utilizar para extender el problema de consenso y poder resolver formaciones. Una formación se alcanza cuando un conjunto de agentes mantiene un desplazamiento predefinido con respecto a sus vecinos o con respecto a un punto común, el cual puede ser un punto de equilibrio dado por la convergencia de un algoritmo de consenso. Posteriormente será revisado como se puede realizar esta extensión y algunas implicaciones a considerar, por ejemplo, múltiples configuraciones pueden satisfacer las condiciones de formación debido al Laplaciano asociado al grafo de comunicación.

A continuación se listan algunas de las suposiciones realizadas para abordar el problema de control de formaciones de robots móviles de manejo diferencial en el presente trabajo:

- La formación se alcanzará en posiciones relativas de los robots pero no en sus orientaciones relativas.
- Las formaciones son rígidas. Se entiende por formación rígida a aquella que satisface las restricciones de desplazamiento asociadas a las aristas del grafo de comunicación G de forma unívoca hasta una rotación o traslación [30].
- No hay retraso en tiempo en la comunicación entre robots.
- Todos los robots están sincronizados en tiempo, es decir, el tiempo inicial t_0 es el mismo para cada robot.
- El sensado de posición y orientación de todos los agentes es global (por ejemplo un sistema de captura de movimientos), es decir, no se dispone de sensado abordo de los robots.
- El cálculo de las leyes de control se considera que transcurren en un intervalo de tiempo insignificante.
- La topología del grafo G de comunicación entre agentes no cambia a lo largo de la evolución del experimento para alcanzar una formación. Lo anterior implica que no se considera pérdida de comunicación entre agentes.

Al realizarse las anteriores suposiciones se simplifica el problema. Sin embargo, más adelante serán discutidas posibilidades para relajar algunas como trabajo futuro.

CONTROL DE FORMACIÓN Y EVASIÓN DE OBSTÁCULOS

En este capítulo se desarrolla el control de formación para sistemas multi-agente así como la estrategia de evasión de obstáculos acoplada a agentes no holónomos.

3.1 Robot de manejo diferencial

Los robots no holónomos considerados en esta tesis son los robots de manejo diferencial (differential drive robots, DDR). Un DDR es un robot móvil el cual basa su movimiento en dos ruedas separadas en cada lado del robot. La principal característica a tomar en cuenta al trabajar con este tipo de robots es que no pueden desplazarse de manera lateral instantáneamente por lo que no es factible aplicarle un control diseñado para robots holónomos. A continuación se presentará el modelo cinemático de un DDR así como la manera que se utiliza en este trabajo para ejercer un control sobre el mismo.

3.1.1 Cinemática de un DDR

Sea $\mathcal{N} = \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ un conjunto de robots móviles de manejo diferencial moviéndose en el plano con pose $\mathbf{q}_i = [x_i, y_i, \theta_i]^T$, $i \in \{1, \dots, N\}$. El modelo cinemático para cada robot, de acuerdo a la Figura 3.1, está dado por:

$$(3.1) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_i) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix}, \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

donde $[x_i, y_i]$ son las coordenadas de la posición del centro de rotación del i -ésimo robot, θ_i la orientación medida con respecto al eje X , v_i es la velocidad longitudinal del centro de rotación del robot y w_i su velocidad angular.

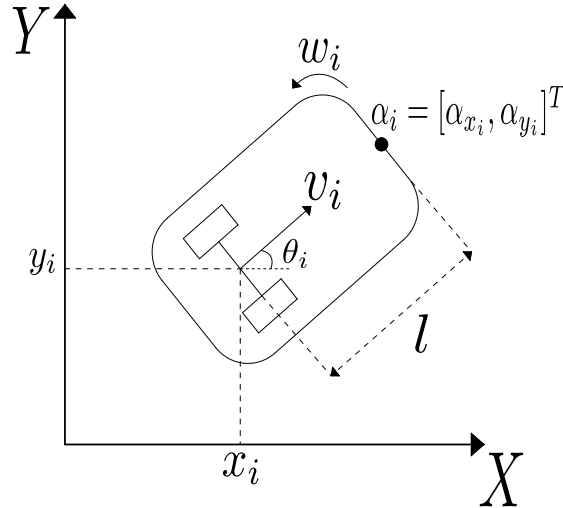


Figura 3.1: Esquema del robot de manejo diferencial.

La teoría de control de sistemas no lineales cuadrados, en los que se tiene el mismo número de entradas que de salidas, ha sido bien estudiada en la literatura [16], por lo que siempre se busca tener esa estructura cuadrada en los sistemas de control. Además, es bien sabido que para el sistema del robot de manejo diferencial, se cumple el teorema de Brockett [4], que establece que no es posible estabilizar el sistema (3.1) utilizando retroalimentación estática y controles suaves. Por esta razón, en nuestro caso tomamos como salida del sistema (3.1) la posición $\mathbf{p}_i = [x_i, y_i]^T$, debido a que sólo nos interesa realizar una formación con posiciones y no orientaciones. La ecuación por cada robot es de la forma:

$$(3.2) \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{M}_i(\theta_i) \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix}, \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

donde $\mathbf{M}_i(\theta_i)$ es la llamada matriz de desacoplamiento dada por:

$$(3.3) \quad \mathbf{M}_i(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_i) & 0 \end{bmatrix}.$$

Como se puede apreciar en este caso $\mathbf{M}_i(\theta_i)$ es una matriz singular. Por esta razón, es frecuente estudiar la cinemática de un punto α_i fuera del eje de las ruedas tal como se observa en la Figura 3.1. Por simplicidad en los cálculos, el nuevo punto α_i a estudiar se elige desplazado por una distancia l sobre el eje longitudinal que pasa sobre el punto \mathbf{p}_i

del robot, siendo l un valor pequeño para considerar un punto todavía en el interior de la periferia del robot. Las coordenadas del punto α_i están dadas por:

$$(3.4) \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} \alpha_{x_i} \\ \alpha_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i + l \cos(\theta_i) \\ y_i + l \sin(\theta_i) \end{bmatrix}.$$

La derivada con respecto al tiempo del punto α_i (3.4) está dada por:

$$(3.5) \quad \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{x_i} \\ \dot{\alpha}_{y_i} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_i(\theta_i) \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix},$$

donde la nueva matriz de desacoplamiento $\mathbf{M}_i(\theta_i)$, dada por

$$(3.6) \quad \mathbf{M}_i(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -l \sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & l \cos(\theta_i) \end{bmatrix},$$

y para cada robot R_i es no singular, ya que

$$\det(\mathbf{M}_i(\theta_i)) = l \neq 0.$$

3.2 Definición del problema

El problema de formación es abordado como un problema de consenso. Considérese el conjunto de robots anteriormente mencionado conectado a través de una red de comunicación tal que se intercambian información de posición entre ellos y tal que cada uno está gobernado por la ecuación (3.5). Se dice que se ha alcanzado la formación cuando:

$$(3.7) \quad \lim_{t \rightarrow t_s} a_{ij}(\alpha_i(t) - \alpha_j(t)) = \Delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j$$

donde Δ_{ij} es un desplazamiento deseado entre vecinos y t_s es el tiempo de convergencia a la formación que dependerá del protocolo de consenso. En esta tesis se presentarán protocolos de consenso con convergencia asintótica, por lo que $t_s = \infty$. Por otra parte, durante el trayecto para alcanzar la formación es posible que uno de los agentes pueda colisionar con un obstáculo fijo o incluso con otro agente, por lo que es necesario que se implemente alguna estrategia de evasión de obstáculos que garantice que se mantenga una distancia mayor o igual a una distancia mínima predefinida σ , es decir

$$(3.8) \quad \|\alpha_i(t) - \alpha_j(t)\| \geq \sigma_1, \quad i, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j, \forall t \geq 0.$$

$$(3.9) \quad \|\alpha_i(t) - \alpha_{o_k}\| \geq \sigma_2, \quad i \in \{1, \dots, N\}, k \in \{1, \dots, N_o\}, \forall t \geq 0.$$

donde α_{o_k} es la posición de los obstáculos fijos, N_o es el número de obstáculos fijos y $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$.

3.3 Control de formaciones

De acuerdo a [14], una formación de agentes puede ser especificada a través de un conjunto de vectores de traslación fijos $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^2$ con respecto a un marco de referencia común arbitrario, por lo tanto la posición del i -ésimo agente es trasladada por un vector de desplazamiento \mathbf{z}_i , generando un nuevo agente virtual con una nueva variable $\boldsymbol{\alpha}_{v_i}(t)$ definida como:

$$(3.10) \quad \boldsymbol{\alpha}_{v_i}(t) = \boldsymbol{\alpha}_i(t) + \mathbf{z}_i$$

donde $\boldsymbol{\alpha}_{v_i}(t) \in \mathbb{R}^2, i \in 1, \dots, N$.

La red de comunicación de los agentes virtuales define un grafo virtual G^* , el cual es equivalente al grafo G por lo que la red de los agentes virtuales tiene la misma matriz Laplaciana que la red original.

Dado que el vector \mathbf{z}_i es un vector constante entonces

$$(3.11) \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{v_i}(t) = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i(t) \implies \mathbf{u}_{v_i} = \mathbf{u}_i.$$

De acuerdo a la ecuación (3.5) la dinámica de los agentes virtuales está dada por

$$(3.12) \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{v_i}(t) = \mathbf{M}_i(\theta_i)\mathbf{u}_i(t).$$

Aplicando una entrada de control \mathbf{u}_i al sistema (3.5), la cual logre consenso en los agentes virtuales de la ecuación (3.12), entonces los agentes reales lograrán una formación con respecto al marco de referencia común de acuerdo a la ecuación (3.10).

3.3.1 Consenso de los agentes virtuales

Retomando la ecuación (3.12), el cálculo de la entrada \mathbf{u}_i es en términos de la función de error para lograr consenso de los agentes virtuales. El error de consenso para el i -ésimo agente virtual con respecto a sus vecinos es

$$(3.13) \quad \mathbf{e}_{v_i} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (a_{ij}(\boldsymbol{\alpha}_{v_j} - \boldsymbol{\alpha}_{v_i})) \in \mathbb{R}^2.$$

El vector de error de consenso es

$$(3.14) \quad \mathbf{e}_v = [\mathbf{e}_{v_1}, \mathbf{e}_{v_2}, \dots, \mathbf{e}_{v_N}]^T = -(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2)\boldsymbol{\alpha}_v(t) \in \mathbb{R}^{2N},$$

donde $\boldsymbol{\alpha}_v(t) = [\boldsymbol{\alpha}_{v_1}, \boldsymbol{\alpha}_{v_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{v_N}]^T = [\alpha_{vx_1}, \alpha_{vy_1}, \alpha_{vx_2}, \alpha_{vy_2}, \dots, \alpha_{vx_N}, \alpha_{vy_N}]^T$, $\mathbf{I}_2 \in \mathbb{R}^2$ representa la matriz identidad y \otimes denota el producto de Kronecker.

Si se busca imponer una dinámica para que el error converja en tiempo asintótico, se propone la siguiente entrada de control:

$$(3.15) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\alpha}}_v = k\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{e}_v,$$

donde

$$(3.16) \quad \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1(\theta_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2(\theta_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}_N(\theta_N) \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.1. *Considere una red de N agentes bajo un grafo de comunicación G que es no dirigido y conectado. Cada uno de los agentes virtuales tiene dinámicas como en la ecuación (3.12). Además, la matriz $(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ tiene un vector propio izquierdo $(\boldsymbol{\phi} \otimes \mathbf{1}_2) \in \mathbb{R}^{1 \times 2N}$ donde $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \dots, \phi_N] \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ que satisface $(\boldsymbol{\phi} \otimes \mathbf{1}_2)(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) = 0$. Al aplicar la ley de control dada por (3.15) bajo condiciones iniciales $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{s}$ entonces:*

1. *Para ganancias de control $k > 0$ el error de consenso de los agentes virtuales converge asintóticamente a cero, es decir la posición de los agentes virtuales llegará a un valor de consenso $\boldsymbol{\beta} = [\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2] \in \mathbb{R}^{2N}$ y los agentes reales alcanzarán la formación deseada.*
2. *El punto de equilibrio del grupo al resolver el problema de consenso es $\bar{\alpha}_1 = \sum_i w_i \mathbf{s}_x$ y $\bar{\alpha}_2 = \sum_i w_i \mathbf{s}_y$ con $\sum_i w_i = 1$.*
3. *Si el grafo no dirigido es balanceado, es decir $\sum_{j \neq i} a_{ij} = \sum_{j \neq i} a_{ji}$ para toda $i \in \mathcal{V}$, es alcanzado un consenso al valor medio de las condiciones iniciales.*

Demostración. 1. Las dinámicas de la red en lazo cerrado al utilizar la entrada de control (3.15) están dadas por $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -k(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2)\boldsymbol{\alpha}$. Considerando que la matriz $(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2)$ tiene dos valores propios $\lambda_1(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) = \lambda_2(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) = 0$ los cuales tienen asociados el vector propio $\mathbf{v}_1 = [1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0], \mathbf{v}_2 = [0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1] \in \mathbb{R}^{2N}$, entonces $\boldsymbol{\alpha}_{vx}(t) \rightarrow \bar{\alpha}_1 \mathbf{1}_N$ y $\boldsymbol{\alpha}_{vy}(t) \rightarrow \bar{\alpha}_2 \mathbf{1}_N$, donde $\bar{\alpha}_1$ y $\bar{\alpha}_2$ son constantes escalares que no dependen la una de la otra, lo que implica que $|\boldsymbol{\alpha}_{vi}(t) - \boldsymbol{\alpha}_{vj}(t)| \rightarrow 0$, si $t \rightarrow \infty$ para toda $i, j = 1, 2, \dots, N$. Al llegar a consenso los agentes virtuales, los agentes reales llegan a la formación deseada, tal como se muestra en la Figura 3.2.

El análisis de convergencia se concentra en las condiciones para asegurar que $\lambda_1(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) = \lambda_2(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) = 0$. De lo contrario no es garantizado que se llegue a consenso. En [34]

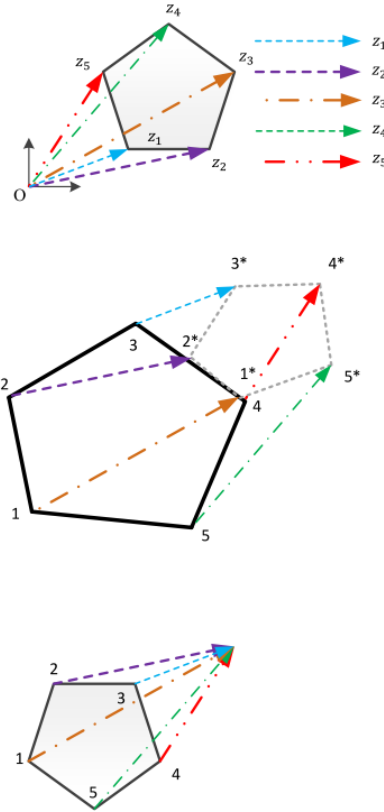


Figura 3.2: En la figura superior se muestra un ejemplo de una formación deseada con respecto a un marco de referencia O . Las flechas representan los vectores de traslación \mathbf{z}_j , $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$. En la figura central la línea negra continua representa al grafo original G y la línea punteada gris representa al grafo virtual G^* . En la figura inferior los robots virtuales convergen a un estado común mientras que los robots reales convergen a una formación deseada. Figura replicada de [14].

se demuestra que $\lambda_1(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) = \lambda_2(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) = 0$ si y sólo si el grafo dirigido tiene asociado un árbol de expansión dirigido. Lo anterior implica que un sistema llegará a consenso si y sólo si la topología de comunicación tiene un árbol de expansión dirigida o en el caso de una topología de comunicación no dirigida sea *conectada*.

2. Considérese que $y = (\boldsymbol{\phi} \otimes \mathbf{I}_2)\boldsymbol{\alpha}$ es una cantidad invariante dado que $\dot{y} = -(\boldsymbol{\phi} \otimes \mathbf{I}_2)(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2)\boldsymbol{\alpha} = 0, \forall \boldsymbol{\alpha}$. Así, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y(0)$, lo cual implica que

$$(3.17) \quad (\boldsymbol{\phi} \otimes \mathbf{I}_2)\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\phi} \otimes \mathbf{I}_2)\boldsymbol{\alpha}(0)$$

donde $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{1}_N \otimes \bar{\boldsymbol{\alpha}})$. Dado que $\bar{\alpha}_1$ es independiente de $\bar{\alpha}_2$, es posible desacoplar el sistema para las coordenadas x y y , reescribiéndose como

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\alpha}_1 \mathbf{1}_N) = \boldsymbol{\phi} \mathbf{s}_x,$$

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\alpha}_2 \mathbf{1}_N) = \boldsymbol{\phi} \mathbf{s}_y.$$

Resolviendo para $\bar{\alpha}_1$ se obtiene que $\bar{\alpha}_1 = (\boldsymbol{\phi} \mathbf{s}_x) / \sum_i \phi_i$. De manera homóloga para $\bar{\alpha}_2$ se obtiene que $\bar{\alpha}_2 = (\boldsymbol{\phi} \mathbf{s}_y) / \sum_i \phi_i$. Haciendo un cambio de variable $w_i = \phi_i / \sum_i \phi_i$, obtenemos que $\bar{\alpha}_1 = \mathbf{w} \mathbf{s}_x$ y $\bar{\alpha}_2 = \mathbf{w} \mathbf{s}_y$ donde $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_N]$.

3. Cuando el grafo no dirigido es balanceado entonces $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{1}_N$ y $w_i = 1/N, \forall i$ por lo que $\bar{\alpha}_1 = \frac{1}{N} \sum_i s_{x_i}$ y $\bar{\alpha}_2 = \frac{1}{N} \sum_i s_{y_i}$. ■

Cabe resaltar que el Teorema 3.1 también es válido para grafos dirigidos que además son *fuertemente conectados* [22].

3.4 Evasión de obstáculos

En la sección anterior se concluyó que al aplicar una entrada adecuada a los agentes virtuales con dinámica (3.12), estos llegarán a consenso, mientras que los agentes reales lograrán llegar a una formación. Sin embargo, durante la convergencia hacia la formación no existe la garantía de que los agentes puedan evitar entrar colisión. Por lo tanto, surge la necesidad de incorporar una acción de control de evasión que permita que los agentes reales no entren en colisión con obstáculos fijos o incluso con los mismos agentes.

Algunos trabajos como [13, 14, 38] han estudiado diversas estrategias para poder realizar evasión de obstáculos tales como: campos de potencial artificial, histogramas de campos vectoriales, método de restricción de obstáculos, aproximación de ventanas dinámicas, entre otros. En este trabajo se utiliza un control jerárquico basado en un esquema multitarea [7]. Esta estrategia de control permite combinar la resolución de diferentes tareas robóticas y en particular la tarea de evasión de obstáculos se puede formular de una manera sencilla, por lo cual se planteará esa estrategia para los problemas abordados. A continuación se introducirán algunos conceptos necesarios para su incorporación en el control de formación.

3.4.1 Función de tarea

Considérese un agente con alguna dinámica y con un vector de estados $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Cualquier tarea a ser realizada por el agente puede ser definida por un mapeo diferencial, denotado como $\mathbf{x}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m$, entre el espacio de estados y el espacio de la tarea. Para alcanzar un valor

deseado \mathbf{x}^d para una tarea, se define una función de error

$$(3.18) \quad \mathbf{e}(\mathbf{q}) = \mathbf{x}(\mathbf{q}) - \mathbf{x}^d.$$

La derivada con respecto al tiempo de (3.18) está dada por

$$(3.19) \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},$$

siendo $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz Jacobiana. De acuerdo a esta relación, para resolver $\dot{\mathbf{q}}$, puede utilizarse la pseudoinversa de Moore-Penrose como en [31]

$$(3.20) \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+(\mathbf{q})\dot{\mathbf{e}},$$

donde $\mathbf{J}^+(\mathbf{q}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

En (3.20), la dinámica del error es un parámetro de diseño que asigna una dinámica deseada de la función de error para garantizar su convergencia, por ejemplo

$$(3.21) \quad \dot{\mathbf{e}} = -\lambda\mathbf{e},$$

con $\lambda > 0$, lo cual lleva a convergencia exponencial de la función de tarea hacia el valor deseado. Así, la dinámica del vector de estados que se debe imponer como entrada de control está dada por

$$(3.22) \quad \dot{\mathbf{q}} = -\lambda\mathbf{J}^+(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{q}).$$

Nótese que la dimensión del espacio de tarea debe ser menor que la dimensión del espacio de estados, esto es $m < n$.

3.4.2 Control jerárquico

Por la naturaleza del problema, al buscar agregar evasión de obstáculos a una formación, una de las posibles soluciones es implementar una ley de control jerárquico basado en un esquema multitarea [32]. En este esquema se establece una compensación entre todas las tareas, garantizando el cumplimiento de una tarea con mayor prioridad y realizando las demás tareas aunque sea sólo parcialmente. Este enfoque asigna una prioridad fija a cada tarea y la que tiene mayor prioridad se le llama tarea prioritaria o local. La solución de la tarea prioritaria siempre se usa en el cálculo de la entrada de control mientras que la solución de las otras tareas, llamadas secundarias o globales, se proyectan en el espacio nulo de la tarea prioritaria, evitando soluciones contradictorias. Así, las tareas de menor prioridad no influyen sobre la solución de la tarea prioritaria.

De acuerdo a [12], el espacio nulo de la k -ésima tarea, considerada como la tarea prioritaria, puede ser calculado como:

$$(3.23) \quad \mathbf{N}_k = \mathbf{I}_n - \mathbf{J}_k^+(\mathbf{q})\mathbf{J}_k(\mathbf{q}),$$

donde $\mathbf{N}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

3.4.2.1 Composición de tareas

Considérese el caso en el que se requiere realizar dos tareas a la vez \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , donde \mathbf{x}_1 tiene la mayor prioridad. De acuerdo a [2, 12] una acción de control que resuelve ambas tareas está dada por:

$$(3.24) \quad \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}}_2,$$

donde $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es la entrada de control del sistema, $\dot{\mathbf{q}}_1 = -\lambda_1 \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\alpha})^+ \mathbf{e}_1(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^n$ es la entrada calculada para \mathbf{x}_1 y $\dot{\mathbf{q}}_2 = -\lambda_2 \mathbf{J}_2(\boldsymbol{\alpha})^+ \mathbf{e}_2(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^n$ es la entrada calculada para \mathbf{x}_2 , tal como en (3.22).

Cuando sólo una tarea está activa, es aplicada una entrada de control de la forma (3.22). Cuando ambas tareas están activas se debe realizar un cambio hacia la ley de control que combina ambas tareas (3.24). Considere ahora la transición de controlar solamente la tarea \mathbf{x}_1 a controlar ambas tareas \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 de manera simultánea. En general la entrada de control deseada para realizar ambas tareas es diferente de la entrada de control para la primera tarea, por lo que la ley de control será discontinua cuando se agregue la segunda tarea. Para resolver lo anterior se puede usar una función de activación o función de transición de tareas h_i [18], la cual toma valores continuos entre cero y uno con respecto al tiempo, cero al iniciar la activación de la tarea o al llegar a la desactivación y uno cuando ambas tareas se están controlando. Cuando $0 < h_i < 1$ se dice que la tarea está en transición.

Cuando una tarea \mathbf{x}_1 con una mayor prioridad es agregada mientras una tarea \mathbf{x}_2 está siendo realizada, la entrada de control puede ser calculada como se propone en [18]

$$(3.25) \quad \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_1' + \dot{\mathbf{q}}_{2|1},$$

donde

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1' &= \mathbf{J}_1^+ \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_{2|1} &= (\mathbf{J}_2 \mathbf{N}_1)^+ (\dot{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{J}_2 \mathbf{J}_1^+ \dot{\mathbf{x}}_1) \\ \dot{\mathbf{x}}_1' &= h_1 \dot{\mathbf{x}}_1 + (1 - h_1) \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2^+ \dot{\mathbf{x}}_2. \end{aligned}$$

Cabe resaltar que en la ecuación (3.26) es donde la función h_1 tiene impacto para la transición suave entre tareas. En [18] se demuestra que si $h_1 = 0$ entonces $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_2^+ \dot{\mathbf{x}}_2$ que implica que únicamente se resuelve la tarea secundaria. Posteriormente se definirá la forma de h_1 explícitamente.

3.5 Propuesta de control de formación con evasión de obstáculos

A continuación se plantean las dos tareas de interés para el problema de formación de múltiples agentes con evasión de obstáculos, siendo la tarea prioritaria la evasión de obstáculos y la tarea secundaria la llegada al estado de formación.

3.5.1 Tarea prioritaria

Cada robot R_i debe evitar colisiones con obstáculos (otros agentes u obstáculos fijos) y para ello se propone que cada robot mantenga una distancia de seguridad σ con respecto a todos los obstáculos. La distancia σ no puede ser arbitraria debido a que debe ser lo suficiente para que un DDR pueda realizar su acción de evasión considerando sus limitaciones físicas (ya que su acción de evasión no es instantánea debido a la inercia del robot). Para lograr este objetivo, se define una tarea prioritaria $x_1^i = \rho(\alpha_i)$ que es la distancia entre α_i y la posición al obstáculo más cercano α_o

$$(3.27) \quad \rho(\alpha_i) = \|\alpha_i - \alpha_o\| \in \mathbb{R}.$$

Nótese que la distancia $\rho(\alpha_i)$ puede ser medida con un sensor abordo de cada uno de los robots R_i por lo que la posición global de los obstáculos no sería requerida. A partir de (3.27) se puede definir la siguiente función de error

$$(3.28) \quad e_{o_i} = \rho(\alpha_i) - \sigma \in \mathbb{R}.$$

La dinámica de la función de error es

$$(3.29) \quad \dot{e}_{o_i} = \frac{(\alpha_i - \alpha_o)^T}{\|\alpha_i - \alpha_o\|} \dot{\alpha}_i \in \mathbb{R},$$

la cual, de manera general puede ser representada como

$$(3.30) \quad \dot{e}_{o_i} = \mathbf{J}_{o_i}(\alpha) \dot{\alpha}_i.$$

Si se impone una dinámica deseada a (3.30) de la forma $\dot{e}_{o_i} = -\lambda e_{o_i}$ al resolver para $\dot{\alpha}_i$, se obtiene la siguiente ecuación de la velocidad de traslación para la tarea de evasión de obstáculos. Para hacer explícito que corresponde a la tarea de evasión, se denotará como $\dot{\alpha}_{o_i}$.

$$(3.31) \quad \dot{\alpha}_{o_i} = -\lambda \mathbf{J}_{o_i}^+(\alpha) e_{o_i}.$$

En adelante será removida la dependencia explícita de α en los Jacobianos. Si consideramos un vector de error de evasión de obstáculos para los N agentes $\mathbf{e}_o = [e_{o_1}, e_{o_2}, \dots, e_{o_N}]^T$, entonces se tiene:

$$(3.32) \quad \dot{\alpha}_o = -\lambda \mathbf{J}_o^+ \mathbf{e}_o,$$

donde

$$(3.33) \quad \mathbf{J}_o^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{o_1}^+ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{o_2}^+ & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_{o_N}^+ \end{bmatrix}.$$

La dinámica en lazo cerrado del vector de error de la tarea de evasión está dada por

$$(3.34) \quad \dot{\mathbf{e}}_o = -\lambda \mathbf{e}_o.$$

3.5.2 Tarea secundaria

Al saber que los agentes virtuales alcanzarán el estado de consenso, podemos proponer como tarea secundaria una función de tarea $\mathbf{x}_2^i = \alpha_{v_i}$ (la posición de los agentes virtuales) y el error de esta tarea como

$$(3.35) \quad \mathbf{e}_c = \alpha_v - (\mathbf{1}_N \otimes \alpha_v^*) \in \mathbb{R}^{2N},$$

donde α_v^* es un vector constante. Así, la correspondiente derivada temporal de la tarea de consenso está dada por

$$(3.36) \quad \dot{\mathbf{e}}_c = \mathbf{J}_c(\alpha) \dot{\alpha}_v$$

donde $\mathbf{J}_c(\alpha) = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{J}_{c_i}(\alpha)$ y, además $\mathbf{J}_{c_i}(\alpha) = \mathbf{I}_2$, debido a que el segundo término de la ecuación (3.35) es constante, por lo tanto, $\mathbf{J}_c(\alpha) = \mathbf{I}_{2N} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$, la cual, es la matriz Jacobiana de la tarea de consenso.

De acuerdo a la ecuación (3.15), el vector de velocidades de traslación para la tarea de consenso de los agentes virtuales se expresa a continuación. Para hacer explícito que corresponde a la tarea de consenso se denotará como $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_c = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_v$.

$$(3.37) \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_c = k\mathbf{e}_v,$$

La dinámica en lazo cerrado del vector de error de la tarea de consenso está dado por

$$(3.38) \quad \dot{\mathbf{e}}_c = k\mathbf{e}_v.$$

Teorema 3.2. *Considérese un sistema de múltiples agentes de robots de manejo diferencial modelados como sistemas de segundo orden como en (3.5), conectados por un grafo de comunicación no dirigido. Para este tipo de sistemas de múltiples agentes, la ley de control*

$$(3.39) \quad \mathbf{u} = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})(\dot{\boldsymbol{\alpha}}'_1 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{2|1}),$$

donde $\dot{\boldsymbol{\alpha}}'_1 = \mathbf{J}_o^+ \dot{\mathbf{e}}'_1$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{2|1} = (\mathbf{J}_c \mathbf{N}_o)^+ (\dot{\mathbf{e}}_c - \mathbf{J}_c \mathbf{J}_o^+ \dot{\mathbf{e}}'_1)$, $\dot{\mathbf{e}}'_1 = h\dot{\mathbf{e}}_o + (1-h)\mathbf{J}_o \mathbf{J}_c^+ \dot{\mathbf{e}}_c$, con $\dot{\mathbf{e}}_o$ dado en (3.34) y $\dot{\mathbf{e}}_c$ dado en (3.38), garantiza convergencia asintótica del error de consenso \mathbf{e}_c y convergencia asintótica a cero del error de evasión de obstáculos \mathbf{e}_o a pesar de que ambas tareas estén activas a través de una función de transición de tareas $0 < h(t) \leq 1$. El resto de las variables de (3.39) son:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{c_i} &= \mathbf{I}_2, \text{ de acuerdo a (3.36),} \\ \mathbf{J}_c \mathbf{N}_o)^+ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{J}_{c_1} \mathbf{N}_{o_1})^+ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\mathbf{J}_{c_2} \mathbf{N}_{o_2})^+ & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\mathbf{J}_{c_N} \mathbf{N}_{o_N})^+ \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}_o &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{o_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_{o_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{N}_{o_N} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{N}_{o_i} = \mathbf{I}_2 - \mathbf{J}_{o_i}^+ \mathbf{J}_{o_i} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $\mathbf{J}_{o_i} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ está dado por (3.30).

Demostración. Propongamos el siguiente error de forma extendida

$$(3.40) \quad \mathbf{e}' = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_c \\ \mathbf{e}_o \end{bmatrix}.$$

Ahora considérese la función candidata de Lyapunov

$$(3.41) \quad V = \frac{1}{2} \mathbf{e}'^T \mathbf{e}',$$

con derivada temporal

$$(3.42) \quad \dot{V} = \mathbf{e}'^T \dot{\mathbf{e}}'.$$

Para calcular \dot{V} , primero necesitamos las dinámicas en lazo abierto de $\dot{\mathbf{e}}_c$ y $\dot{\mathbf{e}}_o$ para la red completa. Por un lado, las dinámicas de $\dot{\mathbf{e}}_c$ están dadas por (3.36). Por otra parte, al expandir la tarea de error de evasión de obstáculos para N agentes obtenemos

$$(3.43) \quad \dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{J}_o \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{o_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{o_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_{o_N} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\alpha}},$$

donde $\mathbf{J}_o \in \mathbb{R}^{N \times 2N}$. Ahora se tiene:

$$(3.44) \quad \dot{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_c^T & \mathbf{e}_o^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_c \\ \mathbf{J}_o \end{bmatrix} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{u}.$$

Utilizando el protocolo de control jerárquico basado en tareas (3.39), entonces

$$(3.45) \quad \dot{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_c^T & \mathbf{e}_o^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi},$$

donde

$$(3.46) \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_c(\mathbf{J}_o^+ \dot{\mathbf{e}}_1') + \mathbf{J}_c((\mathbf{J}_c \mathbf{N}_o)^+ (\dot{\mathbf{e}}_c - \mathbf{J}_c \mathbf{J}_o^+ \dot{\mathbf{e}}_1')) \\ \mathbf{J}_o(\mathbf{J}_o^+ \dot{\mathbf{e}}_1') + \mathbf{J}_o((\mathbf{J}_c \mathbf{N}_o)^+ (\dot{\mathbf{e}}_c - \mathbf{J}_c \mathbf{J}_o^+ \dot{\mathbf{e}}_1')) \end{bmatrix}.$$

Expandiendo las expresiones usando $\dot{\mathbf{e}}_1'$ como en (3.39), tenemos

$$(3.47) \quad \Psi_1 = \mathbf{J}_c \mathbf{J}_o^+ [h(t) \dot{\mathbf{e}}_o + (1-h(t)) \mathbf{J}_o \mathbf{J}_c^+ \dot{\mathbf{e}}_c] + \mathbf{J}_c (\mathbf{J}_c \mathbf{N}_o)^+ \{ \dot{\mathbf{e}}_c - \mathbf{J}_c \mathbf{J}_o^+ [h(t) \dot{\mathbf{e}}_o + (1-h(t)) \mathbf{J}_o \mathbf{J}_c^+ \dot{\mathbf{e}}_c] \},$$

$$(3.48) \quad \Psi_2 = \mathbf{J}_o \mathbf{J}_o^+ [h(t) \dot{\mathbf{e}}_o + (1-h(t)) \mathbf{J}_o \mathbf{J}_c^+ \dot{\mathbf{e}}_c] + \mathbf{J}_o (\mathbf{J}_c \mathbf{N}_o)^+ \{ \dot{\mathbf{e}}_c - \mathbf{J}_c \mathbf{J}_o^+ [h(t) \dot{\mathbf{e}}_o + (1-h(t)) \mathbf{J}_o \mathbf{J}_c^+ \dot{\mathbf{e}}_c] \}.$$

De acuerdo a las propiedades $\mathbf{J}_o \mathbf{J}_o^+ = \mathbf{I}_N$, $\mathbf{J}_o \mathbf{N}_o = \mathbf{0}_{N \times 2N}$, $\mathbf{N}_o = \mathbf{N}_o^T$, y $\mathbf{N}_o \mathbf{N}_o = \mathbf{N}_o$, se puede reducir

$$(3.49) \quad \mathbf{J}_o (\mathbf{J}_c \mathbf{N}_o)^+ = \mathbf{J}_o \mathbf{N}_o^T (\mathbf{N}_o \mathbf{N}_o^T)^{-1} = \mathbf{J}_o \mathbf{N}_o (\mathbf{N}_o \mathbf{N}_o^T)^{-1} = \mathbf{0}_{N \times 2N},$$

$$(3.50) \quad (\mathbf{J}_c \mathbf{N}_o)^+ = (\mathbf{J}_c \mathbf{N}_o)^T ((\mathbf{J}_c \mathbf{N}_o) (\mathbf{J}_c \mathbf{N}_o)^T)^{-1} = \mathbf{N}_o (\mathbf{N}_o \mathbf{N}_o^T)^{-1} = \mathbf{I}_{2N}.$$

Así, Ψ_1 y Ψ_2 se simplifican de la siguiente manera:

$$(3.51) \quad \begin{aligned} \Psi_1 &= \dot{\mathbf{e}}_c, \\ \Psi_2 &= (1 - h(t))\mathbf{J}_o \dot{\mathbf{e}}_c + h(t)\dot{\mathbf{e}}_o. \end{aligned}$$

En estas expresiones, se deben introducir las dinámicas en lazo cerrado, esto es $\dot{\mathbf{e}}_o$ y $\dot{\mathbf{e}}_c$ dados por (3.34) y (3.38), respectivamente. De acuerdo a las propiedades de la matriz Laplaciana, tenemos

$$(3.52) \quad \mathbf{e}_v = -(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2)\mathbf{e}_c,$$

por lo tanto

$$(3.53) \quad \dot{\mathbf{e}}_c = -k(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2)\mathbf{e}_c.$$

De esta manera, la derivada temporal de la función de Lyapunov es

$$(3.54) \quad \dot{V} = - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_c^T & \mathbf{e}_o^T \end{bmatrix} \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_c \\ \mathbf{e}_o \end{bmatrix},$$

donde

$$(3.55) \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} k(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) & \mathbf{0}_{2N \times N} \\ k(1 - h(t))\mathbf{J}_o(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) & \lambda h(t)\mathbf{I}_N \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz \mathbf{P} dependen de los valores $k > 0$, $\lambda > 0$, de $h(t)$ y la matriz \mathbf{L} . La matriz \mathbf{L} representa un grafo no dirigido, conectado y balanceado, el cual, tiene un valor propio $\lambda_1(\mathbf{L}) = 0$ con un vector propio asociado $\mathbf{1}_N = [1, \dots, 1]^T$ tal que $\mathbf{L}\mathbf{1}^T = 0$ para cada coordenada (x, y) del error de consenso, como se mostró en el Teorema 3.1, lo cual implica que $\mathbf{e}_{c_1} = \dots = \mathbf{e}_{c_N}$. Por otra parte, dado que $\lambda > 0$ y $0 < h(t) \leq 1$, entonces la matriz \mathbf{P} es semidefinida positiva con dos de sus valores propios igual a cero y los otros positivos. Así, $\dot{V} < 0$ mientras $t \rightarrow \infty$ y $\dot{V} = 0$ cuando se llega a consenso y un obstáculo está presente con $h(t) > 0$. Además, \mathbf{e}_o converge asintóticamente cuando un obstáculo está presente y \mathbf{e}_c converge asintóticamente a un valor de consenso. Finalmente, si $\mathbf{e}_c = \boldsymbol{\beta}$ entonces $\mathbf{e}_v = 0$ por (3.52), y dado que $\mathbf{e}_v = -(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2)\boldsymbol{\alpha}_v = 0$, entonces $\boldsymbol{\alpha}_{v_1} = \dots = \boldsymbol{\alpha}_{v_N}$ lo que implica que el consenso de las posiciones de los agentes virtuales es alcanzado y por consiguiente la formación de los DDRs. ■

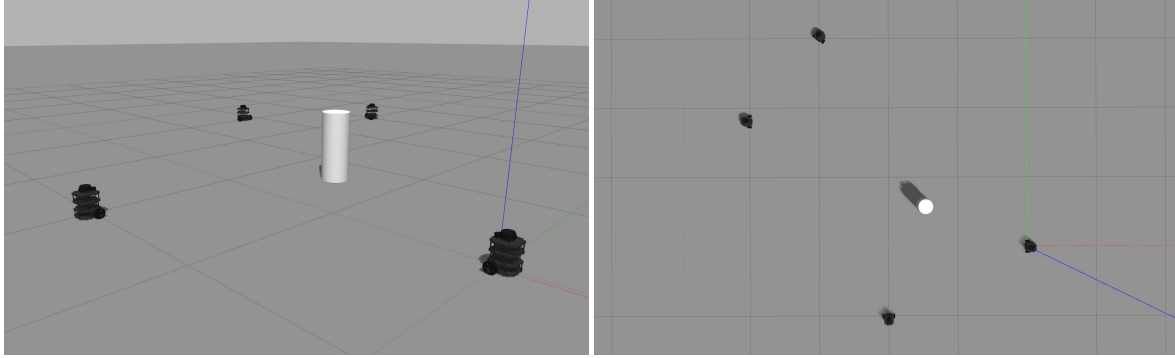


Figura 3.3: Condiciones iniciales de los robots en una simulación de Gazebo. A la izquierda una vista isométrica y a la derecha una vista superior.

3.6 Resultados

A continuación se presentarán algunos resultados para la ley de control propuesta en el presente capítulo. Las simulaciones se realizaron utilizando Gazebo, el cual es un simulador de robots que incluye la dinámica de los mecanismos. Su propósito es poder hacer pruebas de algoritmos, diseño de robots, entrenamiento de inteligencia artificial y pruebas en ambientes realistas. Además, la programación se realizó en C++ utilizando librerías de ROS (Robot Operating System), el cual es un framework para el desarrollo de software para robots que provee la funcionalidad de un sistema operativo.

Para los experimentos fueron utilizados 4 robots *turtlebot_3_burger* el cual es un robot con radio aproximado de 0.1 metros. Algunos parámetros de la simulación son $\|\mathbf{e}_v\| < 0.01$ como criterio de paro, un tamaño de paso $\delta t = 1/40$ segundos, así como las ganancias $\lambda = 0.9$ para la tarea de evasión y $k = 0.09$ para la tarea de formación. Las condiciones iniciales de los agentes son $\mathbf{q}_1 = [-2, -1, 1.6]^T$, $\mathbf{q}_2 = [-3, 3, 4.1]^T$, $\mathbf{q}_3 = [0, 0, 3.14]^T$ y $\mathbf{q}_4 = [-4, 1.8, 0]^T$. Se utilizó un obstáculo fijo posicionado en $\boldsymbol{\alpha}_o = [-1.5, 0.6]^T$ metros el cual es un cilindro centrado en $\boldsymbol{\alpha}_o$ y con radio de 0.1 metros. Para definir la formación deseada se utilizan como vectores de desplazamiento $\mathbf{z}_1 = [1.5 \cos(3\pi/2), 1.5 \sin(3\pi/2)]^T$, $\mathbf{z}_2 = [1.5 \cos(2\pi), 1.5 \sin(2\pi)]^T$, $\mathbf{z}_3 = [1.5 \cos(\pi/2), 1.5 \sin(\pi/2)]^T$ y $\mathbf{z}_4 = [1.5 \cos(\pi), 1.5 \sin(\pi)]^T$ metros los cuales generan un cuadro como formación deseada. Para la tarea de evasión el radio de seguridad considerado es $\sigma = 0.6$ metros tanto para obstáculos móviles como para obstáculos fijos. Cabe destacar que en todas las implementaciones realizadas se considera que el sensado es global, como el que sería dado por un sistema de captura de movimiento. La ley de control utiliza mediciones relativas entre agentes, por lo que en una implementación real sería ideal utilizar sensado a bordo en cada robot, pero por ahora se deja como trabajo futuro.

En la Figura 3.3 se pueden observar los robots vistos desde el simulador en las condicio-

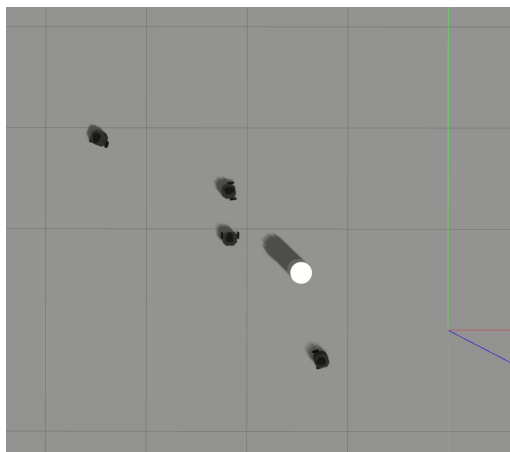
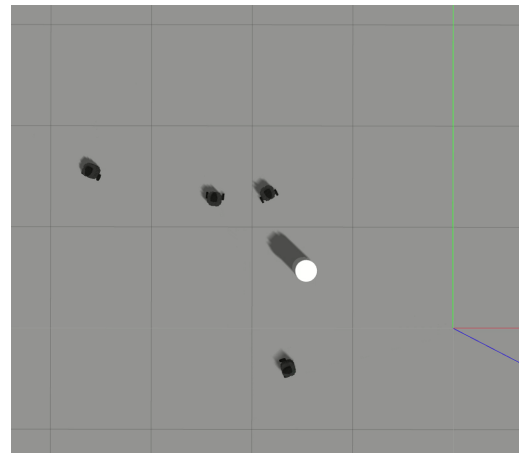
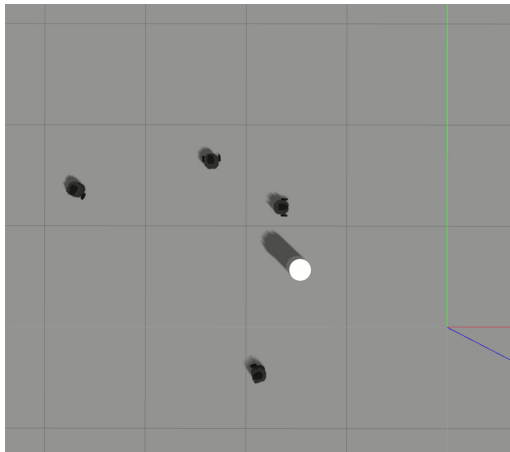
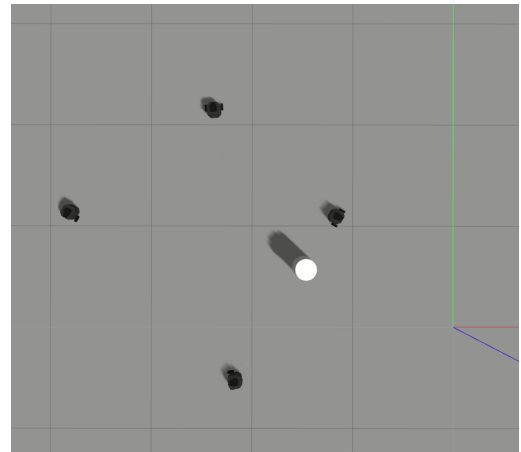
(a) Inicio de evasión mutua entre R_1 y R_4 .(b) Momento donde termina la evasión entre R_1 y R_4 .(c) Inicio de evasión de R_4 al obstáculo fijo .(d) Fin de evasión de R_4 al obstáculo fijo.

Figura 3.4: Momentos clave en una simulación de Gazebo.

nes iniciales así como el obstáculo fijo utilizado. Más adelante se mostrarán resultados del control de formación con evasión de obstáculos desde las condiciones iniciales mostradas. Sin embargo, de inicio se ha querido mostrar en la Figura 3.4, para alguno de los casos posteriores, cómo se observa el comportamiento del grupo de robots desde una vista aérea en algunos momentos clave en que existe un cambio de controlador, es decir, cuando se pasa de (3.15) a (3.39) o viceversa. En las imágenes superiores de la Figura 3.4 se muestra la evasión mutua entre los robots R_1 y R_4 , que son los que se ubican al centro de las imágenes. En las imágenes inferiores se muestran dos instantes de la evasión del obstáculo fijo por el robot R_4 , que hace una trayectoria en arco de círculo alrededor del obstáculo. Finalmente en la Figura 3.5 se muestran las posiciones finales a las que llegan los robots una vez que han alcanzado la formación. Nótese que los robots no parecen haber alcanzado una formación

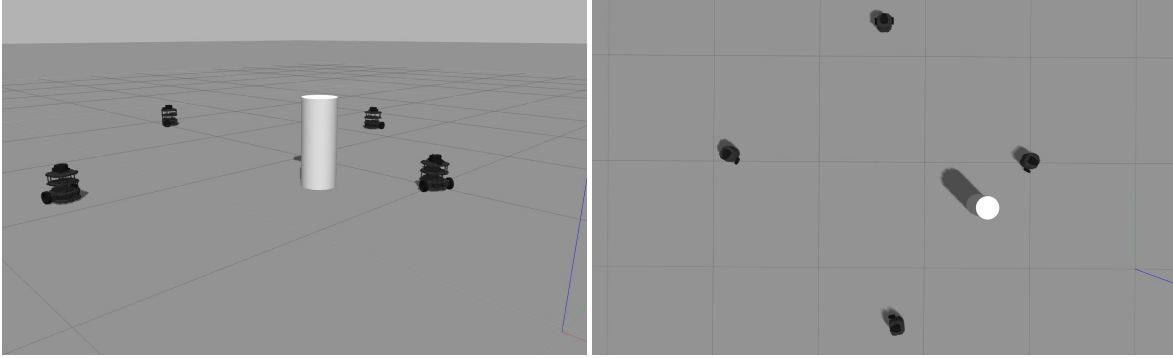


Figura 3.5: Condiciones finales de los robots una vez que alcanzaron la formación deseada.

perfecta, sin embargo, hay que recordar que lo que en realidad se está controlando es el punto de control α de cada robot por lo que son los puntos de control los que alcanzan la formación. Posteriormente aparecerán vínculos a videos de cada simulación reportada.

En el resto de la sección, los resultados se dividirán en tres casos: primero un caso en el que no es considerada la función de transición de tareas $h(t)$ y por lo tanto la conmutación entre el control de formación y el control combinado formación más evasión se hace instantáneamente. En el segundo caso, se presentarán los resultados al introducir $h(t)$ y se discutirán las ventajas al utilizar esta función. Las imágenes de la simulación mostradas antes en las Figuras 3.3, 3.4 y 3.5 corresponden a este caso. Finalmente se presentará un caso en el que la conectividad entre agentes es menor y se analizará el efecto sobre los resultados. Las siguientes matrices Laplacianas modelan la conectividad entre agentes que se utiliza en las evaluaciones:

- \mathbf{L}_1 representa la mayor conectividad donde cada agente está conectado con los demás.

$$(3.56) \quad \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- \mathbf{L}_2 representa la menor conectividad donde cada agente está conectado únicamente a otros dos agentes.

$$(3.57) \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Caso 1: Sin función de transición suave

En la Figura 3.6 se pueden visualizar las trayectorias de los cuatro robots al ejecutar la simulación donde $h(t) = 1$ todo el tiempo y la ley de control conmuta entre el control de formación solo (3.15) y el control combinado (3.39). Esto se realiza para el modelo de conectividad descrito en (3.56). Por una parte, los marcadores \times muestran las posiciones iniciales de los robots, en la gráfica superior para los agentes reales (posiciones α) y en la gráfica inferior para los agentes virtuales (posiciones α_v). Las líneas continuas representan la trayectoria de cada uno de los agentes y en el caso de la gráfica superior los triángulos apuntan hacia la orientación θ de cada agente. Las circunferencias rojas representan el radio del obstáculo y su radio de seguridad (la circunferencia mayor). Como puede observarse, R_1 y R_4 tienen una variación en la dirección de su trayectoria inicial debido a que se evaden mutuamente. Posteriormente el punto de control α del robot R_4 pasa el radio de seguridad del obstáculo fijo, lo cual activa el control multitarea para evitar la colisión, por lo que comienza a moverse alrededor del radio de seguridad del obstáculo fijo. La formación alcanzada se muestra por las líneas punteadas en color magenta. En este caso la formación se ve cuadrada a diferencia de la simulación de Gazebo porque se están mostrando las posiciones α . Por otra parte, en la gráfica inferior se puede ver como las trayectorias de los agentes virtuales convergen hacia un estado común, es decir, llegando a consenso. Al observar ambas gráficas superior e inferior se puede apreciar que el movimiento de los agentes reales es igual al de los agentes virtuales sólo con un desplazamiento. Cabe aclarar que la posición de consenso de los agentes virtuales no corresponde al promedio de las condiciones iniciales como se establece en el Teorema 3.1 debido a que eso se cumple siempre que los robots no realicen movimientos de evasión de obstáculos.

Al analizar el comportamiento de las velocidades, las cuales se muestran en la Figura 3.7, se puede observar cómo la formación converge en un tiempo cercano a los 28 segundos. Además, cerca de 4 segundos de iniciada la simulación hay cambios bruscos en las velocidades de R_1 y R_4 . En la Figura 3.8 se muestran los intervalos de tiempo durante los cuales el control combinado se activa (gráfica toma un valor de 1) y se desactiva (gráfica toma un

valor de 0) para cada agente. Puede comprobarse cerca del segundo 4 que efectivamente en ese momento de la simulación ambos agentes entran en acción de evasión por el mismo intervalo de tiempo debido a que se estaban evadiendo mutuamente, lo cual explica el cambio de dirección de ambos robots observado en la Figura 3.6.

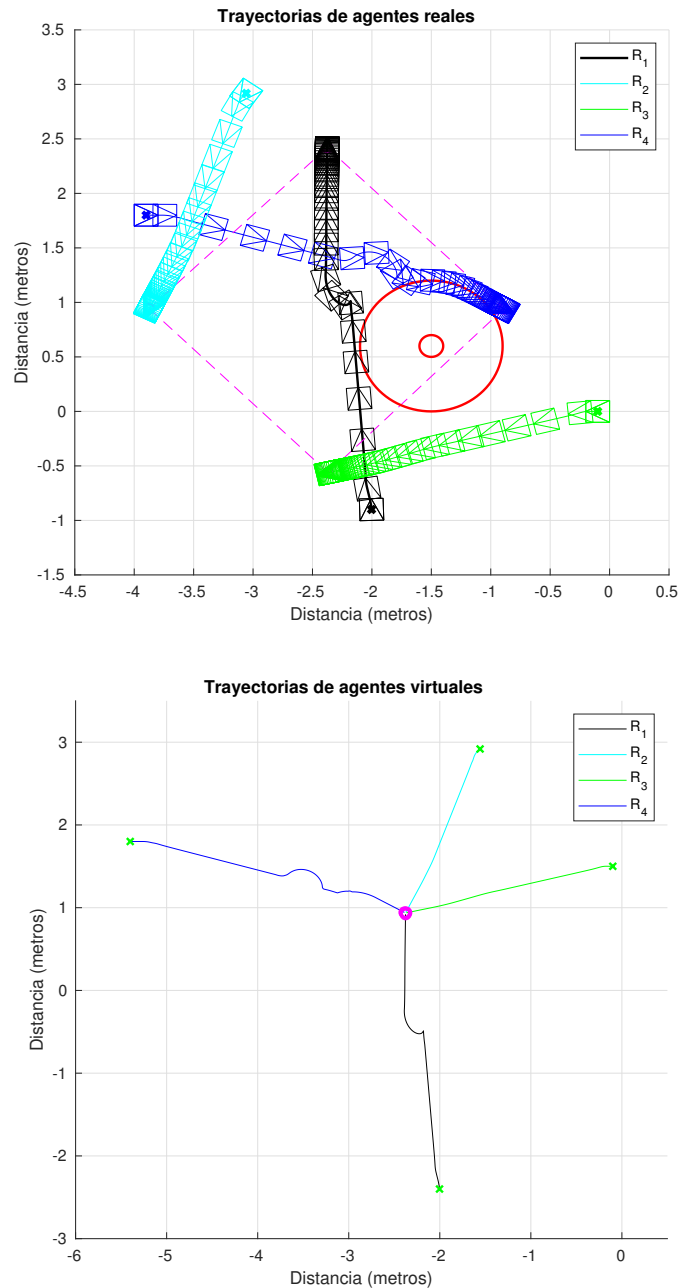


Figura 3.6: Trayectorias caso 1. Arriba se muestran las trayectorias de los agentes reales para alcanzar la formación y abajo las trayectorias de los agentes virtuales para llegar a consenso.

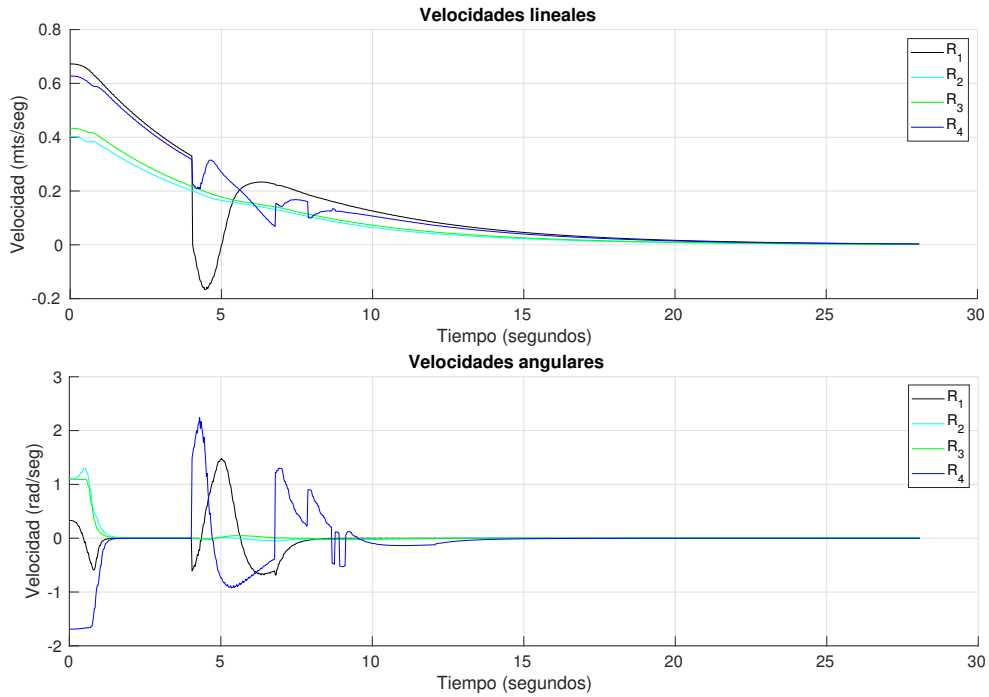


Figura 3.7: Velocidades en caso 1. En la gráfica superior se muestran las velocidades lineales aplicadas a cada uno de los agentes y en la gráfica inferior las velocidades angulares aplicadas a los agentes para llegar a formación.

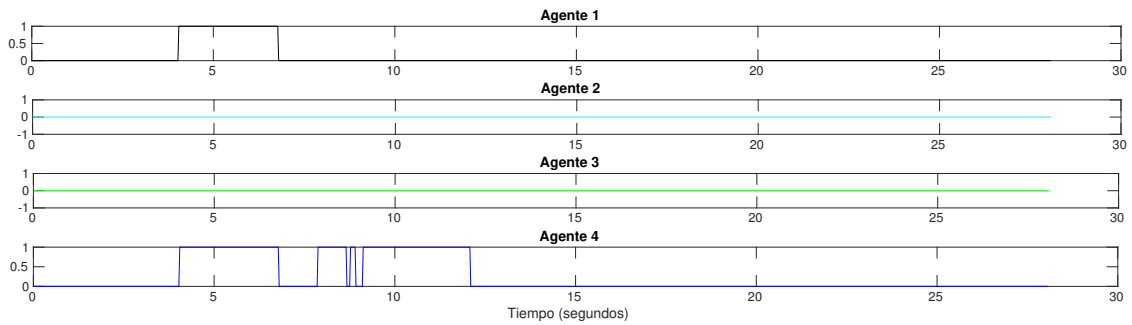


Figura 3.8: Caso 1. Activación del control multitarea para cada agente. Se muestra en qué momento está activa la tarea de evasión de obstáculos durante la simulación.

Por otra parte en la Figura 3.8 también se puede ver como R_4 tiene un segundo intervalo de activación para el control combinado. Este segundo intervalo empieza aproximadamente en el segundo 8 y termina un segundo después, pero un instante vuelve a activarse por alrededor de 3 segundos más. Lo anterior se ve reflejado en la gráfica inferior de la Figura 3.7, donde se pueden ver 2 discontinuidades en la velocidad angular de R_4 en los instantes de tiempo mencionados. Esto indica que en ese momento deja de realizar la tarea de evasión pero la formación hace que nuevamente R_4 se dirija hacia el obstáculo, generando esa

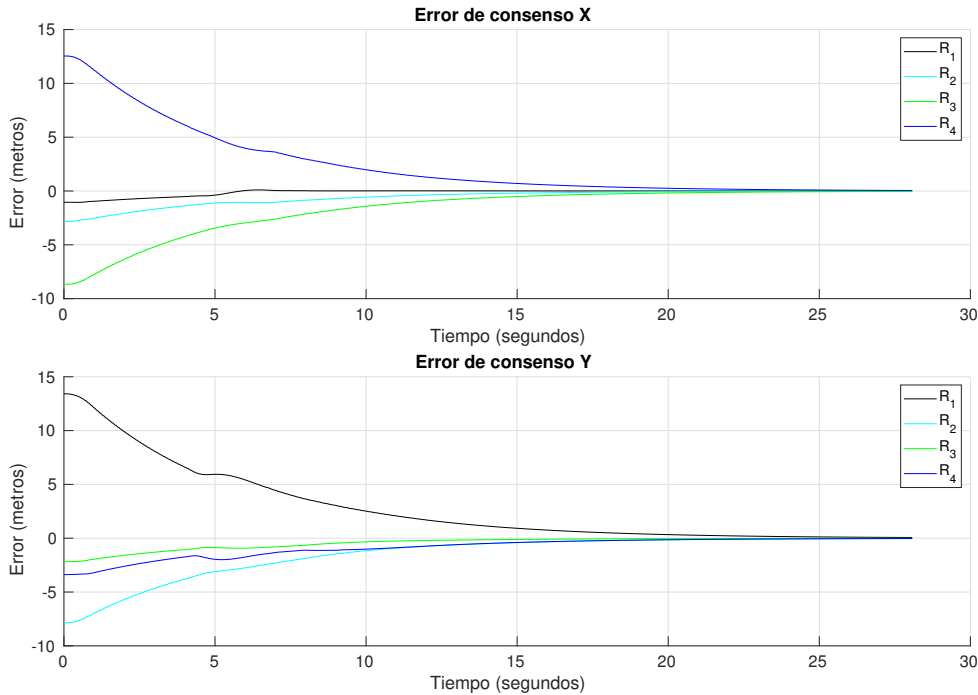


Figura 3.9: Errores de consenso en caso 1. En la gráfica superior se muestra el error de consenso con respecto al eje X y en la gráfica inferior el error de consenso con respecto al eje Y.

acción de oscilación entre los 2 tipos de controladores.

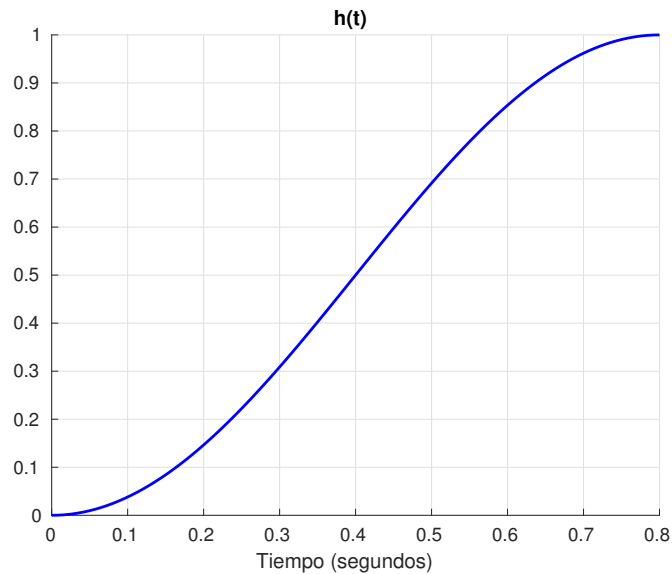
En la Figura 3.9 se muestra el error de consenso de los agentes virtuales en cada coordenada (x, y) . Se observa como en la gráfica superior R_1 y R_4 mantienen su error de consenso en Y por unos instantes (debido al cambio de controlador), llegando incluso a aumentar un poco alrededor del segundo 5, para finalmente continuar disminuyendo hasta cero de manera suave. El movimiento de los robots en el simulador Gazebo para este caso ya descrito se puede observar en el video del siguiente vínculo: https://drive.google.com/open?id=1Nns1spgegTmGXttKgEvQSg9CmxLk_3Hz.

Caso 2: Con función de transición suave

En el caso de utilizar ahora la función $h(t)$, la cual en este trabajo se define como

$$(3.58) \quad h(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi(t - t_o)}{t_f - t_o} \right) \right),$$

donde t_o es el instante de tiempo en el cual inicia la activación del control combinado y t_f el instante de tiempo en el cual se busca que ambas tareas estén completamente activas según (3.39), es decir $h(t) = 1$. Para los siguientes experimentos se utilizó un tiempo final de activación $t_f = 0.8$ segundos, el cual, es un tiempo razonable para que no sea instantáneo

Figura 3.10: Función $h(t)$.

el cambio de controlador sin comprometer la efectividad de la tarea de evasión. En la Figura 3.10 se muestran los valores de $h(t)$ desde el instante inicial de activación t_o hasta el tiempo final de activación t_f . Además, una vez que se termina la acción de evasión, es decir, cuando $e_{o_i} > 0$, se utiliza la misma función para la desactivación del control multitarea pero empleando $1 - h(t)$.

En la Figura 3.11 se puede observar que el comportamiento de las trayectorias es muy similar al caso en que no hay transiciones suaves de controladores. Además se puede ver que R_1 y R_4 entran en acción de evasión mutua (tal como el caso 1) debido al cambio repentino sobre la trayectoria de ambos, generando cada uno un arco fuera del radio de seguridad del obstáculo fijo.

En este caso, las velocidades de los agentes, las cuales se pueden observar en la Figura 3.12 muestran perfiles muy similares al caso 1 pero con comportamientos suaves, es decir, sin las discontinuidades generadas por el cambio de controlador, lo cual genera aceleraciones elevadas de forma puntual que no son deseables aplicar a los motores de los robots. Cabe resaltar que la convergencia es solo 0.075 segundos después que en el caso 1.

Por otra parte en la Figura 3.13 se puede comprobar como R_1 y R_4 entran en un intervalo de tiempo de activación del control multitarea en el segundo 4 alcanzando por completo la activación 0.8 segundos después. Al terminar la tarea de evasión aproximadamente 3 segundos después comienza a decrecer tardando nuevamente 0.8 segundos. Esto se debe a que al no detectarse obstáculos cerca la función $h(t)$ no se cambia a cero inmediatamente

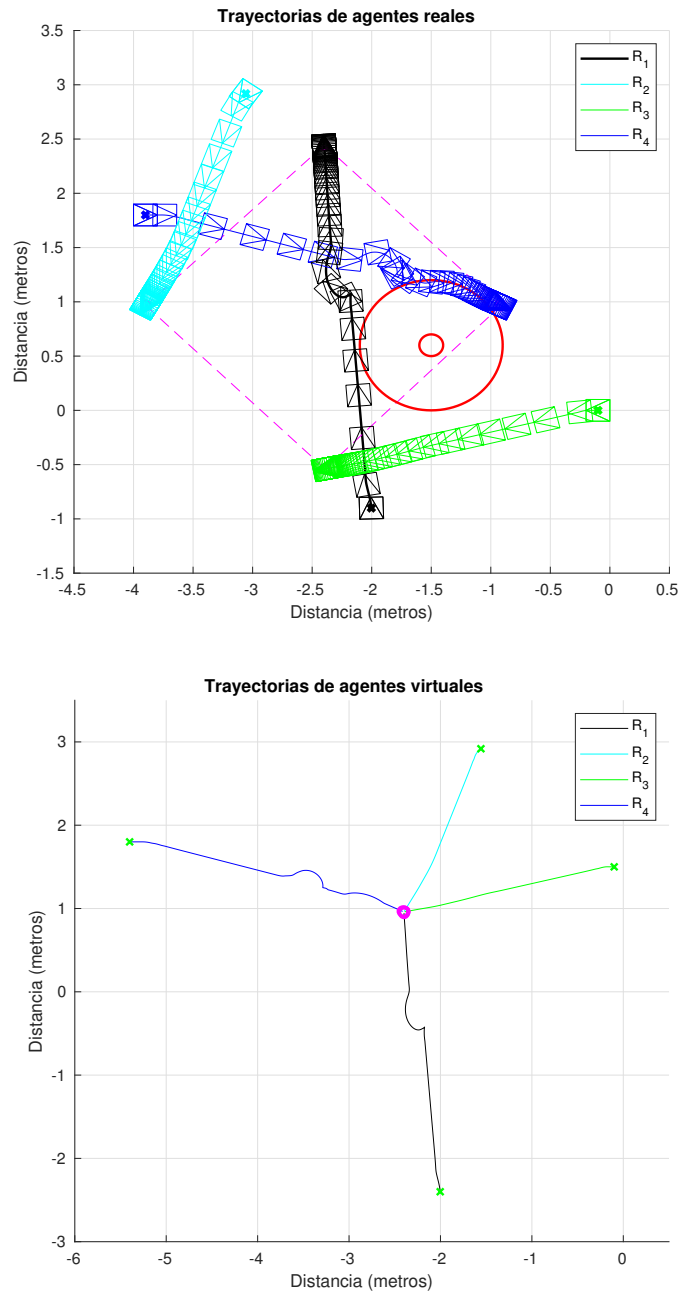


Figura 3.11: Trayectorias en caso 2. Arriba se muestran las trayectorias de los agentes reales para alcanzar la formación y abajo las trayectorias de los agentes virtuales para llegar a consenso.

sino que decrece de forma suave también tal como se ve en la Figura 3.13. En cuanto a R_4 , el control multitarea vuelve a activarse en el segundo 8.5 debido a que encuentra al obstáculo fijo.

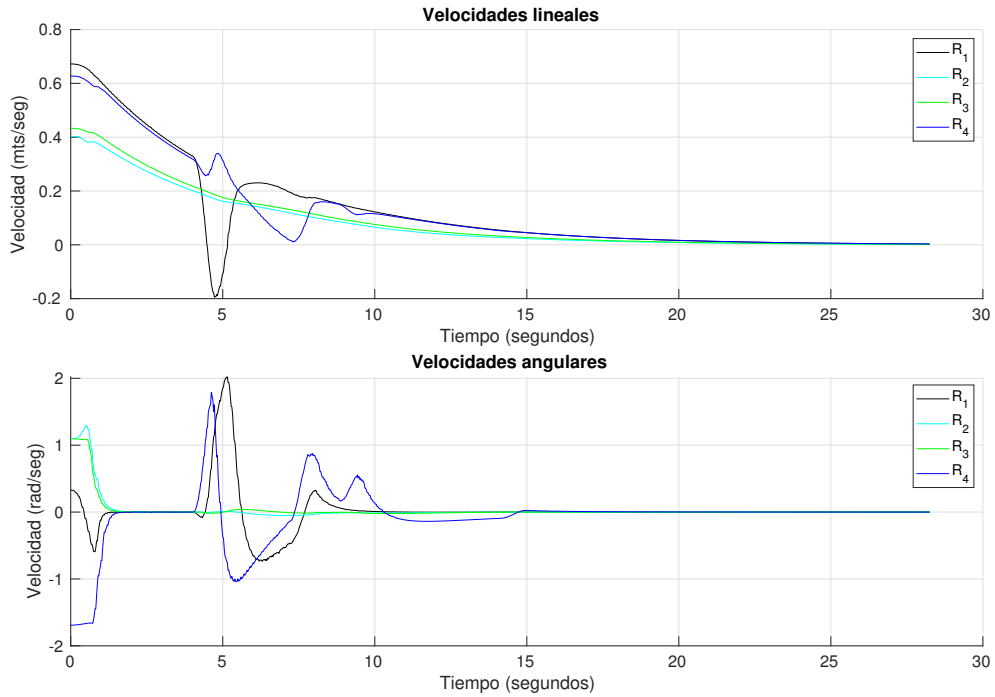


Figura 3.12: Velocidades en caso 2. En la gráfica superior las velocidades lineales aplicadas a cada uno de los agentes y en la gráfica inferior las velocidades angulares aplicadas a los agentes para llegar a formación.

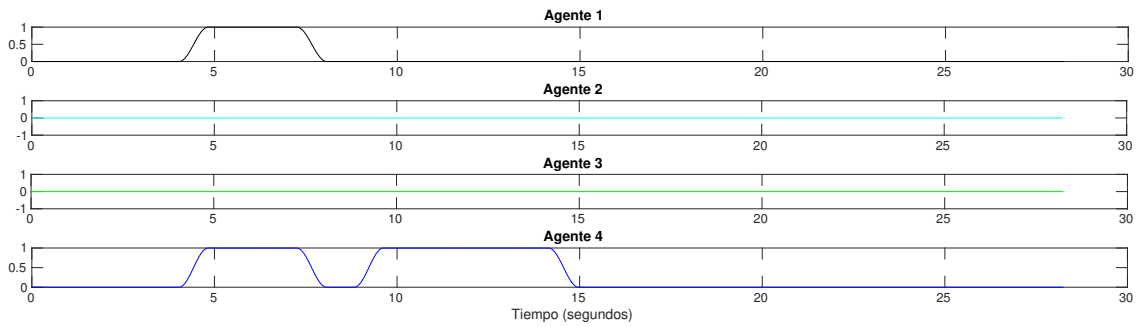


Figura 3.13: Caso 2. Función de activación $h(t)$ del control multitarea. Se muestra en qué momento está activa la tarea de evasión de obstáculos durante la simulación.

Finalmente en la Figura 3.14 se puede observar cómo todos los errores convergen asintóticamente a cero de una manera más suave que en el caso 1 en aproximadamente 28 segundos. Sin embargo, a diferencia del caso 1, en el error de consenso en X se refleja más el efecto de la función $h(t)$ debido a que al no desactivarse el control multitarea de manera inmediata le cuesta un poco más converger al error de consenso.

El movimiento de los robots en el simulador Gazebo para este caso ya descrito se puede observar en el video del siguiente vínculo: <https://drive.google.com/open?id=>

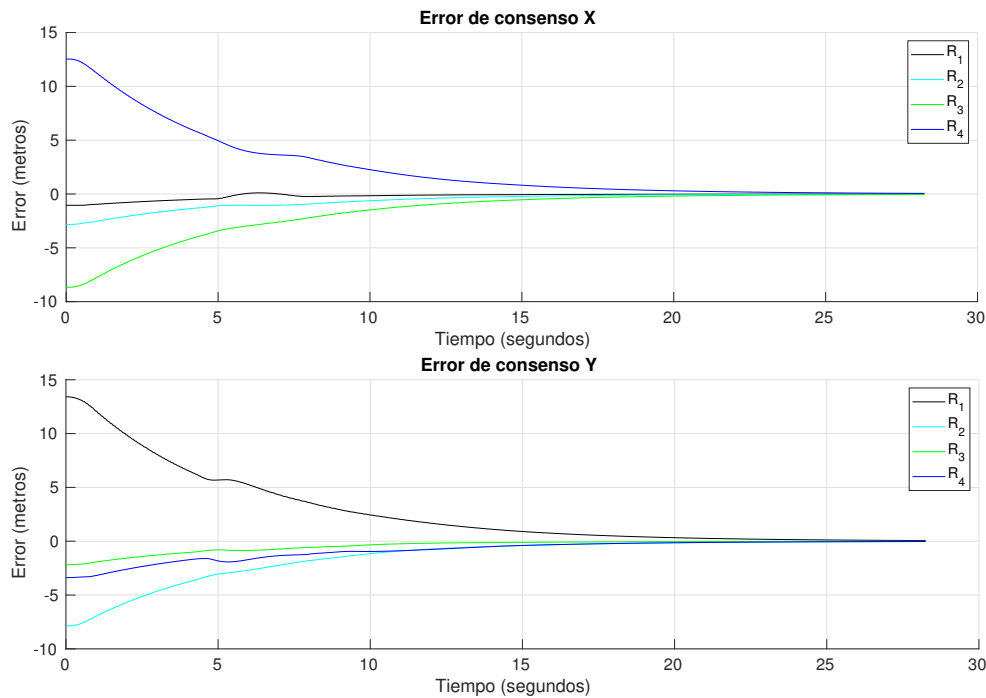


Figura 3.14: Errores de consenso en caso 2. En la gráfica superior se muestra el error de consenso con respecto al eje X y en la gráfica inferior el error de consenso con respecto al eje Y.

1d2p6XX2wryXZM81hBd5Wk9sPuWpUU12.

Caso 3: Con función de transición suave y menor flujo de información

Este caso es similar al caso 2: parte de las mismas condiciones iniciales y además utiliza la función $h(t)$ tal como en (3.58). La única diferencia es que en lugar de utilizar el grafo representado por L_1 (3.56) se utiliza el grafo representado por L_2 (3.57). Lo anterior, implica que el R_1 no tiene comunicación con R_3 así como tampoco R_2 con R_4 .

En la Figura 3.15 se encuentran las trayectorias realizadas, en la gráfica superior la de los agentes reales y en la inferior la de los agentes virtuales. La primera diferencia que se puede observar comparando con el caso 2 es que R_3 se acerca al obstáculo fijo en su trayectoria por lo que tiene que evadirlo para alcanzar la formación. Por otra parte cabe resaltar que las trayectorias de R_2 y R_3 tienden a ser más curvas respecto al caso anterior.

En la Figura 3.16 se observan los perfiles de velocidades que son muy parecidos a los perfiles vistos en el caso 2. Sin embargo, existe una diferencia en las velocidades angulares que en este caso no convergen en el intervalo aproximado entre 2 y 4 segundos. Nótese que tal y como se esperaba (debido a que $\lambda_2(L_2) < \lambda_2(L_1)$), como se comentó en el capítulo

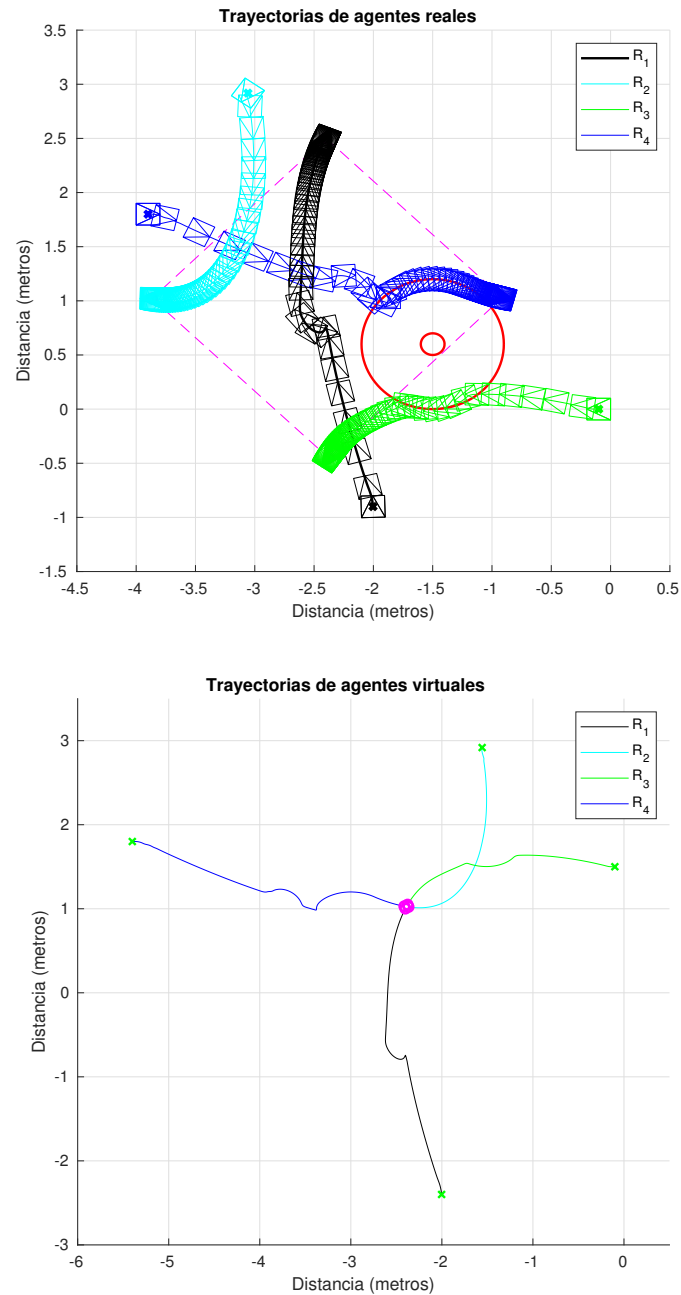


Figura 3.15: Trayectorias en caso 3. Arriba se muestran la trayectorias de los agentes reales para alcanzar la formación y abajo las trayectorias de los agentes virtuales para llegar a consenso.

anterior, el tiempo de convergencia es mucho mayor llegando aproximadamente a los 47 segundos.

En la Figura 3.17 se puede comprobar cómo R_3 entra por un periodo aproximado de

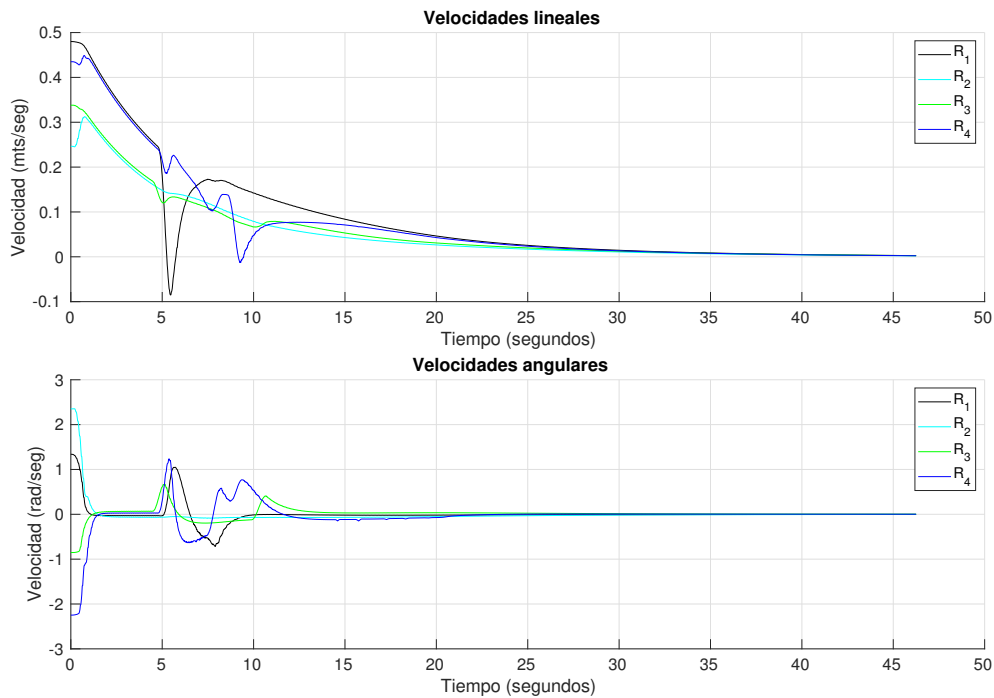


Figura 3.16: Velocidades en caso 3. En la gráfica superior se muestran las velocidades lineales aplicadas a cada uno de los agentes y en la gráfica inferior se muestran las velocidades angulares aplicadas a los agentes para llegar a formación.

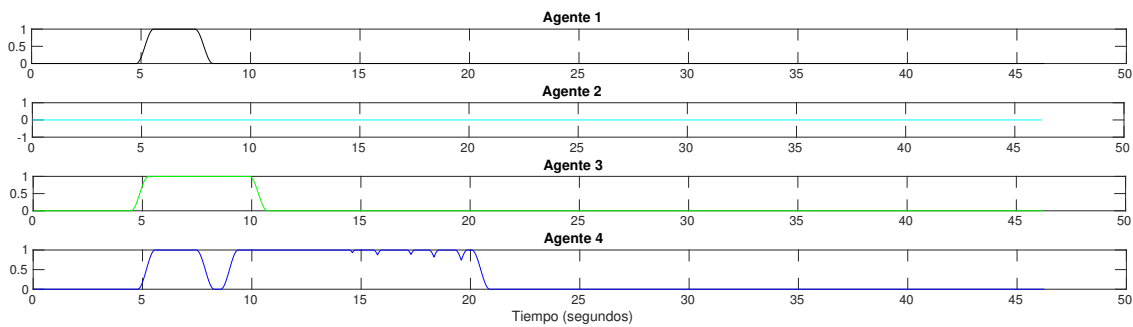


Figura 3.17: Caso 3. Función de activación $h(t)$ del control multitarea. Se muestra en qué momento está activa la tarea de evasión de obstáculos durante la simulación.

5 segundos en acción de evasión. Además, R_4 parece dejar en múltiples ocasiones por algunos instantes el radio de seguridad para después volver a el control multitarea debido a que el control de formación lo acerca al obstáculo fijo. Cabe resaltar que la activación y desactivación de las tareas se implementó de tal forma que no es necesario que la función $h(t)$ se reduzca a cero para volver a activarse, sino que puede volver a crecer desde un valor intermedio.

Finalmente en la Figura 3.18 se comprueba que aunque el tiempo de convergencia a

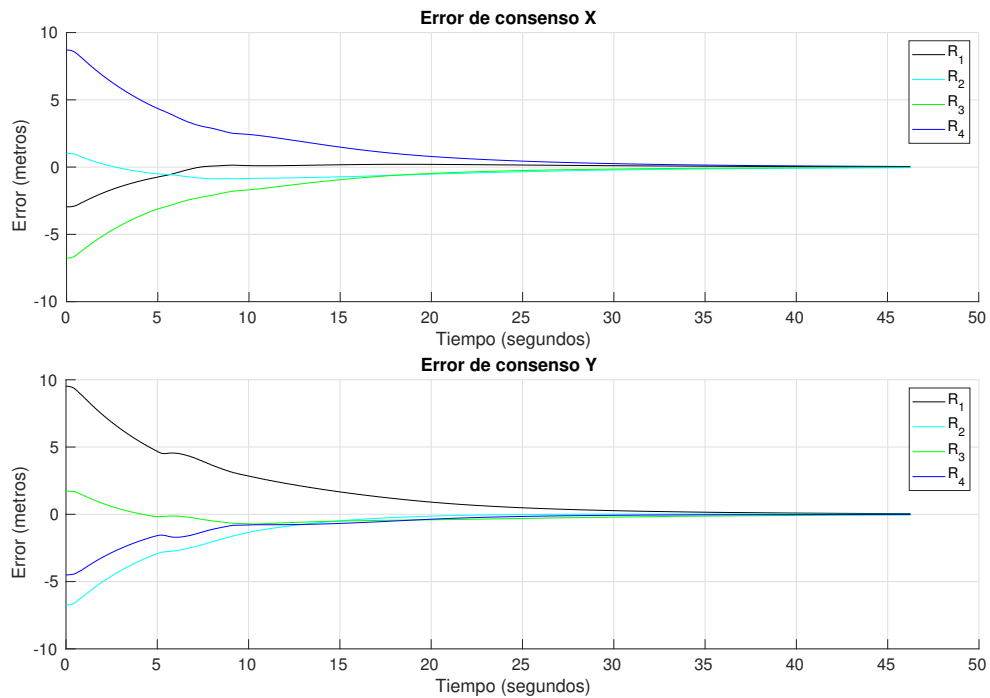


Figura 3.18: Errores de consenso en caso 3. En la figura superior se muestra el error de consenso con respecto al eje X y en la figura inferior el error de consenso con respecto al eje Y .

la formación es significativamente mayor al del caso anterior, el hecho de disminuir la conectividad no afecta a que eventualmente el sistema converge a la formación.

El movimiento de los robots en el simulador Gazebo para este caso ya descrito se puede observar en el video del siguiente vínculo: <https://drive.google.com/open?id=1gIWUDFdAIWaHe0wA6HL0n-QdTNxrLgfb>.

En este capítulo se presentaron resultados para un control donde la formación se alcanza alrededor de una posición arbitraria. De no haber obstáculos, el consenso en los agentes virtuales sería alcanzado en la posición dada por el promedio de las condiciones iniciales. Es posible extender el protocolo de control estudiado en este capítulo para que la formación se mueva si se controla la posición de uno de sus elementos para que siga una trayectoria. En el siguiente capítulo se estudiará el problema de seguimiento en formación con evasión de obstáculos para un sistema multi-agente no holónomo.

SEGUIMIENTO EN FORMACIÓN CON EVASIÓN DE OBSTÁCULOS

El control de sistemas de múltiples agentes ha tomado inspiración en el análisis del comportamiento de grupos biológicos, tales como las parvadas y cardúmenes, los cuales viajan en formación y actúan como una unidad. Hoy en día ha crecido el interés en la investigación de realizar movimiento coordinado debido a su viabilidad para realizar tareas de búsqueda y rescate, vigilancia, monitoreo ambiental, exploración, etc.

Como parte del problema general de movimiento coordinado se plantea un subproblema, el cual, consiste en la navegación de un sistema multi-agente que se encuentra realizando una formación y además se desplaza dentro de un entorno, de manera que sólo uno de los agentes, llamado líder, tiene conocimiento completo del mapa del entorno y los demás lo siguen buscando mantener la formación. En este capítulo se propone una extensión de la ley de control del capítulo anterior, permitiendo que la formación pueda seguir una trayectoria utilizando un esquema líder-seguidor.

Se entiende por seguimiento de trayectoria cuando la salida de un sistema, en este trabajo la posición del punto de control α de cualquier agente, como se mostró en la Figura 3.1, converge hacia un estado de referencia, es decir

$$(4.1) \quad \lim_{t \rightarrow t_f} (\alpha_i(t) - \mathbf{m}(t)) = 0$$

donde t_f es el tiempo que tarda en alcanzarse el estado de referencia, según el protocolo utilizado, y $\mathbf{m}(t)$ es el estado de referencia.

4.1 Planteamiento del problema

Considere un sistema de N robots de manejo diferencial, es decir, gobernados por la ecuación (3.5), conectados a través de una red de comunicación representada por un grafo no dirigido tal que la información de posición que se intercambia fluye en ambos sentidos. El objetivo es diseñar una ley de control distribuida y además basada en un enfoque líder-seguidor, donde únicamente el líder tiene acceso al estado de referencia y que permita

- Seguimiento de una trayectoria $\mathbf{m}(t)$ por parte de un robot líder

$$(4.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\alpha}_l(t) - \mathbf{m}(t)) = 0$$

donde $\boldsymbol{\alpha}_l(t)$ es la posición del punto de control del agente líder, en adelante R_1 .

- Alcanzar una formación por parte de los seguidores

$$(4.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a_{ij} (\boldsymbol{\alpha}_i(t) - \boldsymbol{\alpha}_j(t)) = \boldsymbol{\Delta}_{ij}, \quad i, j \in \{2, \dots, N\}, i \neq j$$

donde $\boldsymbol{\Delta}_{ij}$ es el desplazamiento deseado entre agentes.

- Mantener una trayectoria libre de colisiones entre agentes y con respecto a cualquier obstáculo fijo, manteniendo siempre una distancia de seguridad, tal como se expresa en (3.8) y (3.9).

El seguimiento de trayectoria es un problema muy estudiado en teoría de control, por lo que en adelante se revisarán casos de menor complejidad o casos base, es decir, con un agente y un estado de referencia invariante en el tiempo hasta el caso objetivo de esta tesis. En el resto del capítulo se irán introduciendo los resultados para diferentes casos: desde el seguimiento de trayectoria de un sólo agente hasta llegar al seguimiento en formación con evasión.

4.2 Seguimiento de un agente no holónimo

El problema de seguimiento de trayectoria consiste en diseñar una ley de control que permita que las dinámicas en lazo cerrado de un sistema lleven a los estados a converger a una referencia en tiempo asintótico. Siguiendo la metodología utilizada en el capítulo anterior, es necesario el planteamiento de una función de tarea como en el caso de evasión

de obstáculos y formación. Para el caso de seguimiento de trayectoria se propone la función de error

$$(4.4) \quad \mathbf{e}_t = \boldsymbol{\alpha}_i - \mathbf{m}(t)$$

dónde \mathbf{e}_t es el error de seguimiento de trayectoria. La derivada temporal de (4.4) es

$$(4.5) \quad \dot{\mathbf{e}}_t = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i - \dot{\mathbf{m}}(t).$$

Sustituyendo en la anterior $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i$ con su dinámica correspondiente en lazo abierto como en (3.5) se obtiene

$$(4.6) \quad \dot{\mathbf{e}}_t = \mathbf{M}_i(\theta_i)\mathbf{u}_i - \dot{\mathbf{m}}(t),$$

de manera que puede imponerse una dinámica en lazo cerrado $\dot{\mathbf{e}}_t = -\gamma\mathbf{e}_t$ utilizando la entrada de control de la forma

$$(4.7) \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{M}_i^{-1}(\theta_i)(-\gamma\mathbf{e}_t + \dot{\mathbf{m}}(t)).$$

La ley de control definida en (4.7) se puede utilizar para incorporarla en el esquema de control multitarea como se describe a continuación.

4.3 Seguimiento con evasión de obstáculos de un agente no holónomo

Una vez que se utiliza el control de la ecuación (4.7), es posible que el robot siga una trayectoria $\mathbf{m}(t)$ que se le imponga, sin embargo no existe la garantía de que el robot realice la tarea si existen obstáculos en el entorno. El planteamiento del enfoque multitarea también puede ser aplicado en este problema. Considérese nuevamente una tarea prioritaria dedicada a la evasión de obstáculos $\mathbf{x}_1 = \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_o\|$. Entonces, la función de error de la tarea prioritaria con respecto al obstáculo más cercano con posición $\boldsymbol{\alpha}_o$ está dada por

$$(4.8) \quad e_o = \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_o\| - \sigma,$$

siendo σ la distancia de seguridad hacia los obstáculos fijos y la dinámica de la función de error de esta tarea está dada por

$$(4.9) \quad \dot{e}_o = \mathbf{J}_o \dot{\boldsymbol{\alpha}}$$

donde $\mathbf{J}_o = (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_o)^T / \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_o\| \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$.

Por otra parte, la tarea secundaria $\mathbf{x}_2 = \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{m}(t)$ es la encargada del seguimiento de trayectoria, por lo que se emplea una función de error igual que la de (4.4). Nótese que en este caso el Jacobiano de la tarea $\mathbf{J}_t = \mathbf{I}_2$. De manera que al unir ambas tareas (utilizando un control jerárquico basado en el esquema multitarea) la ley de control resultante es

$$(4.10) \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{M}_i^{-1}(\theta)(\dot{\boldsymbol{\alpha}}'_1 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{2|1}),$$

donde $\dot{\boldsymbol{\alpha}}'_1 = \mathbf{J}_o^+ \dot{e}'_1$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{2|1} = (\mathbf{J}_t \mathbf{N}_o)^+ (\dot{\mathbf{e}}_t + \dot{\mathbf{m}} - \mathbf{J}_t \mathbf{J}_o^+ \dot{e}'_1)$, $\dot{e}'_1 = h \dot{e}_o + (1-h) \mathbf{J}_o \mathbf{J}_t^+ \dot{\mathbf{e}}_t$.

Se puede observar que a diferencia del control multitarea para un caso de una referencia constante (como el del Teorema 3.2), es necesario introducir la derivada de la referencia $\dot{\mathbf{m}}$ en el término de la proyección de la tarea secundaria sobre la tarea prioritaria.

Cabe recordar que el control dado por (4.10) se aplica solamente al momento que se requiere controlar ambas tareas, es decir, cuando se requiera realizar evasión de obstáculos (en este caso particular lo que se determina con la condición $e_o < 0$). De lo contrario se aplica el control dado por (4.7).

Utilizando en conjunto el control (4.7) en el caso de que solamente se este realizando el seguimiento de trayectoria, y el control (4.10) cuando se encuentre un obstáculo cerca, en conjunto solucionan el problema de seguimiento de trayectoria con evasión de obstáculos y se puede demostrar que ambos errores de tareas convergen a cero asintóticamente. Es posible extender lo anterior para la navegación de un sistema de múltiples robots por lo que en adelante se propondrá una solución para este problema.

4.4 Control de formación y seguimiento de trayectoria con evasión de obstáculos de un sistema multi-agente no holónimo

La mayoría de los algoritmos de consenso garantizan que el estado de cada agente converge a un valor común pero no permiten que se indique un valor particular al que se desea que converjan, ya que éste depende de las condiciones iniciales de los agentes y de la topología de conectividad entre ellos.

Es posible proponer una ley de control para que un sistema de múltiples agentes converjan hacia un estado en común de referencia, el cual puede ser invariante o variante en el tiempo.

A continuación se presentan diferentes variantes de protocolos de consenso, los cuales se proponen en [24] para que un sistema multi-agente pueda alcanzar un estado de referencia

o seguir una trayectoria en formación, donde cada agente tiene dinámica de un integrador simple. Las variantes de los protocolos basados en los de [24] se presentan de tal forma que son aplicables a robots de manejo diferencial y en particular para emplearse sobre los agentes virtuales que se definieron en el capítulo anterior, a diferencia de [24], donde se presentan utilizando desplazamientos deseados en la ley de control.

Si se busca llegar a una referencia invariante en el tiempo \mathbf{m} se propone

$$(4.11) \quad \mathbf{u} = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) [-(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) \boldsymbol{\alpha}_v - \gamma \mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{m})]$$

donde $\mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_N)$ y $c_i = 1$ si se tiene acceso a la referencia o $c_i = 0$ en caso contrario. Existe una condición necesaria y suficiente para garantizar convergencia de $\boldsymbol{\alpha}_v$ a \mathbf{m} , la cual es que debe existir un árbol de expansión dirigido con raíz en la referencia en el agente que establece la referencia \mathbf{m} .

En el caso de una referencia variante en el tiempo, en [26] se demuestra que es necesario que todos los agentes conozcan la referencia, es decir $c_i = 1, \forall i$. Adaptando la ley de control (4.11) a una referencia variante en el tiempo se propone

$$(4.12) \quad \mathbf{u} = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) [\dot{\mathbf{m}} - (\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) \boldsymbol{\alpha}_v - \gamma(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{m})].$$

Ahora considérese el caso en que sólo una porción de los vehículos conoce la referencia, la ley de control propuesta para cada agente es

$$(4.13) \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{M}_i^{-1}(\theta_i) \left\{ \frac{1}{|\mathcal{N}_i| + c_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [\dot{\boldsymbol{\alpha}}_j - k(\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_j)] + \frac{1}{|\mathcal{N}_i| + c_i} c_i [\dot{\mathbf{m}} - \gamma(\boldsymbol{\alpha}_i - \mathbf{m})] \right\},$$

donde $|\mathcal{N}_i|$ se refiere al número de vecinos que tiene cada uno de los agentes. Nótese que (4.13) depende de la información local de la posición de los vecinos que no conocen la referencia y sus velocidades, esta última para compensar la falta de información de la referencia.

Para este trabajo se propone un control basado en un esquema líder-seguidor en el que la referencia únicamente es conocida por un agente (el líder) y los demás agentes tienen el objetivo de alcanzar una formación y mantenerla a lo largo del seguimiento de la trayectoria de referencia. En el control propuesto se considera agregar un término al control del líder que corresponde a su respectivo error de consenso pero con una ganancia significativamente menor que la ganancia aplicada a la parte del control de seguimiento, esto para acelerar la convergencia del error de consenso a cero. Así, el control propuesto es de la forma

$$(4.14) \quad \mathbf{u}_l = \mathbf{M}_l^{-1}(\theta_l) \left[-\gamma(\boldsymbol{\alpha}_l - \mathbf{m}) + \dot{\mathbf{m}} - k \sum_{j \in \mathcal{N}_l} a_{lj}(\boldsymbol{\alpha}_{v_l} - \boldsymbol{\alpha}_{v_j}) \right], \quad l = 1,$$

$$(4.15) \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{M}_i^{-1}(\theta_i) \left\{ \frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left[\dot{\boldsymbol{\alpha}}_j - k(\boldsymbol{\alpha}_{v_i} - \boldsymbol{\alpha}_{v_j}) \right] \right\}, \quad i = 2, \dots, N,$$

donde (4.14) corresponde a la entrada de control que se debe emplear en el agente líder y (4.15) a la entrada de control que se debe aplicar a cada uno de los $N - 1$ agentes seguidores. Al igual que (4.13) el control para los agentes seguidores (4.15) utiliza información de las derivadas de los vecinos para alcanzar la formación siguiendo la referencia que solo conoce el líder, sin embargo, para poder alcanzar su objetivo es necesario que esa información fluya hacia todos los vehículos por lo que es necesario que exista un árbol de expansión hacia todos los agentes a partir del líder.

De lo anterior, es posible plantear las funciones de error bajo control. Para el caso del agente líder, su función de error \mathbf{e}_l está dada por

$$(4.16) \quad \mathbf{e}_l = \boldsymbol{\alpha}_l - \mathbf{m}, \in \mathbb{R}^2 \quad l = 1.$$

En el caso de los agentes seguidores la función de error correspondiente se encarga de seguir la formación, la cual es variante en el tiempo. La función de error \mathbf{e}_i para cada agente se define como

$$(4.17) \quad \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\alpha}_{v_i} - \frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\boldsymbol{\alpha}_{v_j}) \in \mathbb{R}^2, \quad i = 2, \dots, N.$$

Es posible incluir los errores de todo el sistema multi-agente definidos por (4.16) y (4.17) en un vector de error $\mathbf{e}_x = [\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N]^T$, el cual se puede escribir como

$$(4.18) \quad \mathbf{e}_x = \boldsymbol{\alpha}_v - \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2N},$$

donde $\mathbf{p} = \left[\mathbf{m} + \mathbf{z}_1, \frac{1}{|\mathcal{N}_2|} \sum_{j \in \mathcal{N}_2} a_{2j}(\boldsymbol{\alpha}_{v_j}), \frac{1}{|\mathcal{N}_3|} \sum_{j \in \mathcal{N}_3} a_{3j}(\boldsymbol{\alpha}_{v_j}), \dots, \frac{1}{|\mathcal{N}_N|} \sum_{j \in \mathcal{N}_N} a_{Nj}(\boldsymbol{\alpha}_{v_j}) \right]^T$ con \mathbf{z}_1 el desplazamiento constante del líder para llevarlo a su posición virtual, esto es $\boldsymbol{\alpha}_l = \boldsymbol{\alpha}_{v_l} - \mathbf{z}_1$.

Al derivar (4.18) con respecto al tiempo se obtiene

$$(4.19) \quad \dot{\mathbf{e}}_x = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_v - \dot{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^{2N},$$

donde $\dot{\mathbf{p}} = \left[\dot{\mathbf{m}}, \frac{1}{|\mathcal{N}_2|} \sum_{j \in \mathcal{N}_2} a_{2j}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{v_j}), \frac{1}{|\mathcal{N}_3|} \sum_{j \in \mathcal{N}_3} a_{3j}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{v_j}), \dots, \frac{1}{|\mathcal{N}_N|} \sum_{j \in \mathcal{N}_N} a_{Nj}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{v_j}) \right]^T$. Dado que $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_v = \mathbf{M}\mathbf{u}$ las variaciones de este vector de error están relacionadas con las entradas de control en la forma

$$(4.20) \quad \dot{\mathbf{e}}_x = \mathbf{M}\mathbf{u} - \dot{\mathbf{p}}$$

Teorema 4.1. *Considere una red de N agentes no holónomos modelados como sistemas de segundo orden como en (3.5), bajo un grafo de comunicación G que es no dirigido y conectado.*

Cada uno de los agentes virtuales tiene dinámicas como en la ecuación (3.12). Para este tipo de sistemas de múltiples agentes, al aplicar una ley de control basada en un esquema líder-seguidor con (4.14) para el agente líder y (4.15) para los agentes seguidores garantiza convergencia a cero de manera asintótica de la función de error \mathbf{e}_x definida en (4.18).

Demostración. Al reescribir las expresiones de los controladores (4.14) y (4.15) en función de los errores se obtiene

- En el caso del líder

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{M}_l^{-1}(\theta_l) \left[-\gamma(\boldsymbol{\alpha}_{v_l} - \mathbf{z}_1 - \mathbf{m}) + \dot{\mathbf{m}} - k \sum_{j \in \mathcal{N}_l} a_{lj}(\boldsymbol{\alpha}_{v_l} - \boldsymbol{\alpha}_{v_j}) \right],$$

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{M}_l^{-1}(\theta_l) \left[-\gamma \mathbf{e}_l + \dot{\mathbf{m}} - k \sum_{j \in \mathcal{N}_l} a_{lj}(\boldsymbol{\alpha}_{v_l} - \boldsymbol{\alpha}_{v_j}) \right].$$

- En el caso de los seguidores

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{M}_i^{-1}(\theta_i) \left\{ \frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left[\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{v_j} - k(\boldsymbol{\alpha}_{v_i} - \boldsymbol{\alpha}_{v_j}) \right] \right\}, \quad k = 2, \dots, N,$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{M}_i^{-1}(\theta_i) \left[\frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{v_j} - \frac{k}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\boldsymbol{\alpha}_{v_i} - \boldsymbol{\alpha}_{v_j}) \right],$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{M}_i^{-1}(\theta_i) \left[\frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{v_j} - k \mathbf{e}_i \right].$$

Al expresar las entradas de control individuales en forma vectorial, el vector de control es de la forma

$$(4.21) \quad \mathbf{u} = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) [-\mathbf{K}\mathbf{e}_x + \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{q}],$$

donde $\mathbf{K} = \text{diag}(\gamma, \gamma, k, k, k, \dots, k) \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ y $\mathbf{q} = [k \sum_{j \in \mathcal{N}_l} a_{lj}(\boldsymbol{\alpha}_{v_l} - \boldsymbol{\alpha}_{v_j}), \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] \in \mathbb{R}^{2N}$.

Al sustituir (4.21) en (4.20) para obtener la dinámica en lazo cerrado se tiene

$$(4.22) \quad \dot{\mathbf{e}}_x = -\mathbf{K}\mathbf{e}_x - \mathbf{q},$$

donde \mathbf{q} puede ser considerada como una perturbación de la dinámica de \mathbf{e}_x . Al expandir (4.22) de forma que se tengan las dinámicas de error para líder y seguidores

$$(4.23) \quad \dot{\mathbf{e}}_l = -\gamma \mathbf{e}_l + k \sum_{j \in \mathcal{N}_l} a_{lj}(\boldsymbol{\alpha}_{v_j} - \boldsymbol{\alpha}_{v_l}),$$

$$(4.24) \quad \dot{\mathbf{e}}_i = -k \mathbf{e}_i.$$

En la dinámica del líder, el término de la derecha se puede interpretar como una perturbación que en forma vectorial aparece en \mathbf{q} . Si se elige una ganancia γ alta, de tal forma que la ganancia de consenso en el líder $k \ll \gamma$, la perturbación se puede rechazar y el vector de error \mathbf{e}_x converge asintóticamente. Lo anterior se puede asegurar debido a que el error de consenso está acotado ya que los seguidores están resolviendo la tarea de consenso (incluso si el líder permanece estático). En consecuencia el líder sigue la referencia y los seguidores logran la formación respecto al líder. ■

El teorema anterior demuestra la estabilidad del sistema multi-agente en lazo cerrado con el protocolo de control que resuelve el seguimiento en formación. A continuación se integra este resultado en un protocolo que incluye también la tarea de evasión de obstáculos.

Teorema 4.2. *Considérese un sistema de múltiples agentes de robots de manejo diferencial modelados como sistemas de segundo orden como en (3.5), conectados por un grafo de comunicación no dirigido. Para este tipo de sistemas de múltiples agentes, la ley de control*

$$(4.25) \quad \mathbf{u} = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})(\dot{\boldsymbol{\alpha}}'_1 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{2|1}),$$

donde $\dot{\boldsymbol{\alpha}}'_1 = \mathbf{J}'_o \dot{\mathbf{e}}'_1$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{2|1} = (\mathbf{J}_x \mathbf{N}_o)^+ (\dot{\mathbf{e}}_x + \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{J}_x \mathbf{J}'_o \dot{\mathbf{e}}'_1)$, $\dot{\mathbf{e}}'_1 = h \dot{\mathbf{e}}_o + (1 - h) \mathbf{J}'_o \mathbf{J}_x^+ \dot{\mathbf{e}}_x$, garantiza convergencia a cero de manera asintótica de la función de error \mathbf{e}_x la cual contiene el error de seguimiento para el agente líder y el error de consenso para los agentes virtuales en el caso de los seguidores, además de convergencia a cero del error de evasión de obstáculos \mathbf{e}_o a pesar de que ambas tareas esten activas a través de una función de transición de tareas $0 < h(t) \leq 1$.

Las variables de (4.25) son

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_o &= -\lambda \mathbf{e}_o \in \mathbb{R}^N, \text{ con } \mathbf{e}_o = [e_{o_1}^T, e_{o_2}^T, \dots, e_{o_N}^T]^T \text{ y } e_{o_i} = \|\boldsymbol{\alpha}_{v_i} - \mathbf{z}_i - \boldsymbol{\alpha}_o\| - \sigma \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{J}_{x_i} &= \mathbf{I}_2, \\ (\mathbf{J}_x \mathbf{N}_o)^+ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{J}_{x_1} \mathbf{N}_{o_1})^+ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\mathbf{J}_{x_2} \mathbf{N}_{o_2})^+ & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\mathbf{J}_{x_N} \mathbf{N}_{o_N})^+ \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}'_o &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}'_{o_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}'_{o_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}'_{o_N} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}_o &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{o_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_{o_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{N}_{o_N} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{J}'_{o_i} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ está dado por $\mathbf{J}'_{o_i} = (\boldsymbol{\alpha}_{v_i} - \mathbf{z}_i - \boldsymbol{\alpha}_o)^T / \|\boldsymbol{\alpha}_{v_i} - \mathbf{z}_i - \boldsymbol{\alpha}_o\|$, $\mathbf{N}_{o_i} = \mathbf{I}_2 - \mathbf{J}'_{o_i} \mathbf{J}'_{o_i} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, y el término $\dot{\mathbf{e}}_x$ está dado por (4.22).

Demostración. Para este caso en que se incluye la tarea de evasión de obstáculos se propone el siguiente error extendido

$$(4.26) \quad \mathbf{e}' = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_o \end{bmatrix}.$$

Ahora considérese la función candidata de Lyapunov

$$(4.27) \quad V = \frac{1}{2} \mathbf{e}'^T \mathbf{e}',$$

con derivada temporal

$$(4.28) \quad \dot{V} = \mathbf{e}'^T \dot{\mathbf{e}}'.$$

Al reescribir $\dot{\mathbf{e}}'$ con la dinámica en lazo abierto, se tiene

$$(4.29) \quad \dot{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x^T & \mathbf{e}_o^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{J}_x \\ \mathbf{J}'_o \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_v - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right).$$

Seguindo los mismos pasos de la demostración del Teorema 3.2 se llega a que

$$(4.30) \quad \dot{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x^T & \mathbf{e}_o^T \end{bmatrix} \left(\boldsymbol{\Psi} - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right),$$

donde

$$(4.31) \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_x + \dot{\mathbf{p}} \\ (1-h(t))\mathbf{J}_o \dot{\mathbf{e}}_x + h(t)\dot{\mathbf{e}}_o \end{bmatrix}.$$

Introduciendo las dinámicas en lazo cerrado dadas por (4.22) y $\dot{\mathbf{e}}_o = -\lambda \mathbf{e}_o$ en (4.31), la derivada temporal de la función de Lyapunov se reescribe como

$$(4.32) \quad \dot{V} = - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x^T & \mathbf{e}_o^T \end{bmatrix} \left(\mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right),$$

donde

$$(4.33) \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K} \otimes \mathbf{I}_2) & \mathbf{0}_{2N \times N} \\ (1-h(t))\mathbf{J}_o(\mathbf{K} \otimes \mathbf{I}_2) & \lambda h(t)\mathbf{I}_N \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz \mathbf{P} dependen de los valores $\lambda > 0$, de $h(t)$ y la matriz \mathbf{K} . La matriz \mathbf{K} es una matriz diagonal que contiene las ganancias de consenso y de seguimiento con valores mayores a cero. Por otra parte, dado que $\lambda > 0$ y $0 < h(t) \leq 1$, entonces la matriz \mathbf{P} es definida positiva. Al igual que en el caso sin evasión de obstáculos del Teorema 4.1, el vector \mathbf{q} se puede considerar una perturbación y al utilizar una ganancia de seguimiento mucho mayor a la de consenso en el caso del líder, es decir $\gamma \gg k$, se puede rechazar esta perturbación ya que el error de consenso está acotado al resolverse por los seguidores. Por lo tanto el error extendido converge asintóticamente a cero. En consecuencia el líder sigue la referencia, los seguidores logran la formación respecto al líder y realizan evasión de obstáculos de ser requerida. ■

4.5 Resultados

En esta sección se presentarán los resultados de la implementación del seguimiento de trayectoria en formación en el simulador Gazebo. Para los experimentos fueron utilizados también robots *turtlebot_3_burger*. En este caso la condición de paro es un tiempo de 200 segundos y el tamaño de paso $\delta t = 1/40$ segundos. Los resultados se dividirán en 4 casos: el primero para evaluar el control de seguimiento con un solo robot, el segundo para evaluar

el control de seguimiento cuando se considera evasión de obstáculos solo con un robot, el tercero presenta el desempeño del control de seguimiento en formación con evasión de obstáculos utilizando el enfoque líder-seguidor planteado en el Teorema 4.2. En estos primeros casos, la trayectoria predefinida a seguir es una rosa polar o cuadrifolium. Finalmente para mostrar que la trayectoria puede obtenerse de una etapa de planificación, se presenta el cuarto caso, el cual emplea el mismo control utilizado en el caso anterior sustituyendo la trayectoria de cuadrifolium por una obtenida de un planificador RRT (Rapidly-exploring Random Tree) de primer orden.

4.5.1 Seguimiento de un robot no holónimo

En este caso se utiliza una ganancia $\gamma = 3$ para el control de seguimiento presentado en la ecuación (4.7). Las condiciones iniciales del agente son $x = -0.5$ metros, $y = -0.5$ metros y $\theta = 0$ rad. La referencia está dada por $\mathbf{m}(t) = [4 \sin(4\pi t/P) \cos(2\pi t/P), 4 \sin(4\pi t/P) \sin(2\pi t/P)]^T$ donde P es el periodo de tiempo para completar la curva, en este caso 200 segundos.

En la Figura 4.1 se muestra la trayectoria realizada por el punto de control α del robot.

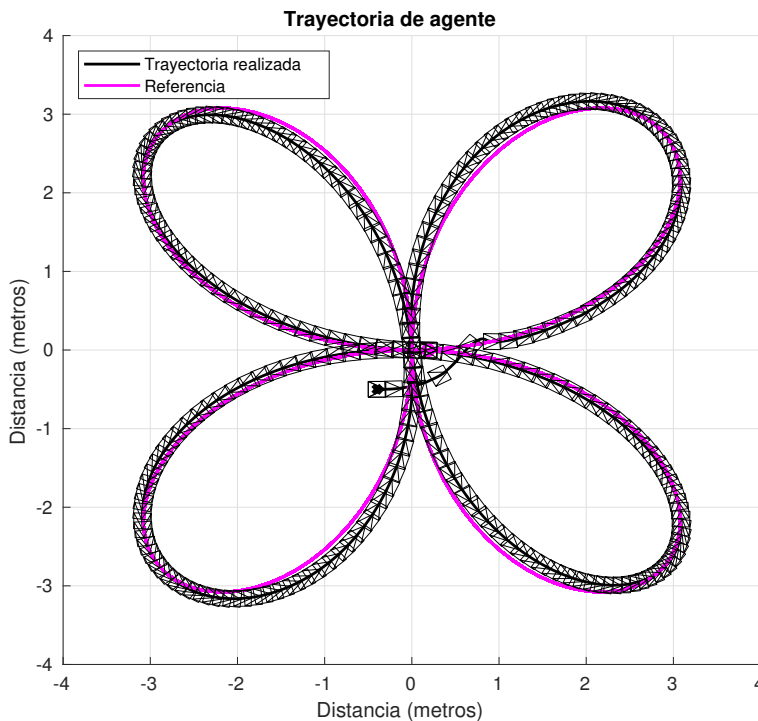


Figura 4.1: Resultados de utilizar un control de seguimiento de trayectoria en un solo agente sin obstáculos.

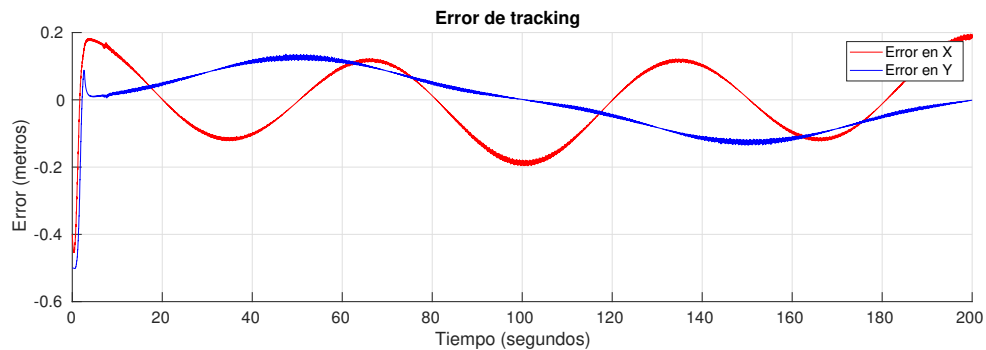


Figura 4.2: Error de seguimiento de trayectoria sin obstáculos.

Se puede ver como a pesar de que las condiciones iniciales están fuera de la trayectoria predefinida, el robot se aproxima rápidamente a $\mathbf{m}(t)$ generando una trayectoria suave hasta alcanzar la referencia. El controlador implementado en este caso, dado en la ecuación (4.7), es básicamente un controlador proporcional con compensación de la rapidez de cambio de la trayectoria de referencia y se puede observar en los resultados de la Figura 4.1 que el seguimiento de la trayectoria no es perfecto. La precisión en el seguimiento se puede mejorar aumentando la ganancia de control. Sin embargo, con una alta ganancia pueden generarse velocidades altas y el robot se vuelve muy reactivo a la corrección de error, lo que no es adecuado al momento de incluir la tarea de evasión de obstáculos. Una alternativa a la posibilidad de tener ganancias altas es explorar a futuro otros esquemas de control que mejoren la precisión del seguimiento de trayectoria, como puede ser un control super-twisting [3].

Por otra parte en la Figura 4.2 se muestra el error de seguimiento, donde se puede ver como al iniciar la simulación el error en Y es de 0.5 y en X de 0.4 (debido a que son calculados con respecto a el punto de control α y no respecto a las coordenadas del centro de rotación del robot p) pero rápidamente ambos disminuyen para oscilar entre valores entre -0.2 y 0.2 .

El cambio repentino al inicio de la simulación en los errores de seguimiento es coherente con la velocidad lineal al inicio de 1.4 m/s y la velocidad angular de 10 rad/s mostradas en la Figura 4.3, las cuales decrecen rápidamente para mantenerse con amplitud baja por el resto de la simulación.

4.5.2 Seguimiento de un robot no holónomo con evasión de obstáculos

En este caso se usaron las mismas condiciones iniciales que en el caso anterior, así como su referencia. Sin embargo, a diferencia del caso anterior la ganancia de seguimiento $\gamma = 2.5$,

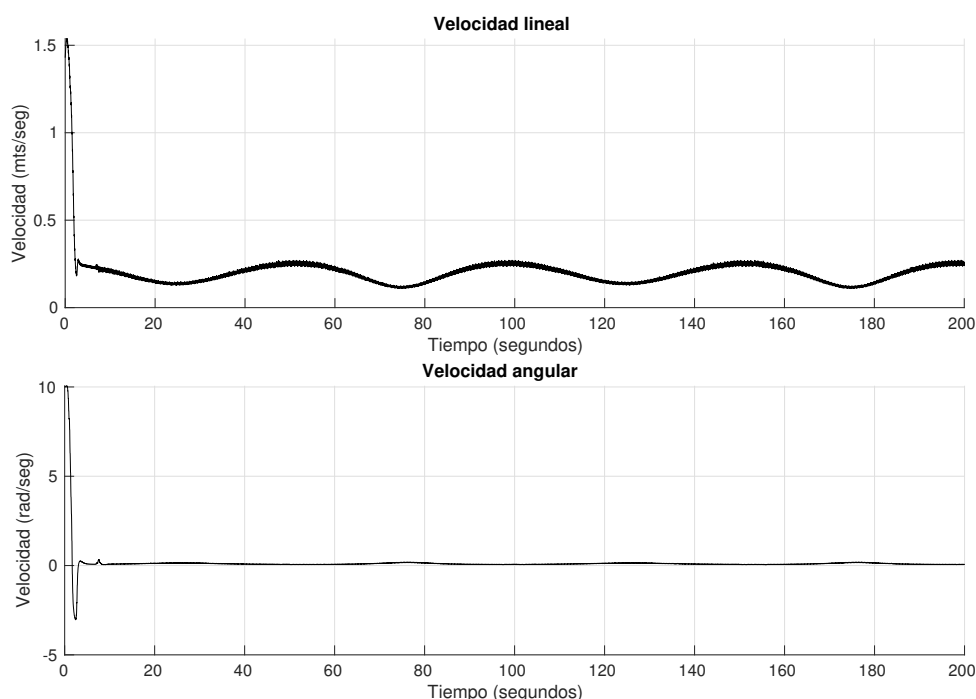


Figura 4.3: Gráficas de velocidades al aplicar un control de seguimiento de trayectoria en un solo agente sin obstáculos.

debido a que se prefirió sacrificar un poco más la precisión del seguimiento para no tener velocidades grandes al momento de las conmutaciones entre controladores cuando se requiere evadir obstáculos. Se utilizaron dos obstáculos fijos $\alpha_{o_1} = [3, 3]^T$, $\alpha_{o_2} = [-3, 1]^T$ metros los cuales nuevamente son cilindros centrados en α_o y con radio 0.1 metros.

Para la tarea de evasión, el radio de seguridad considerado es $\sigma = 0.6$ metros y la ganancia de la tarea de evasión es $\lambda = 0.5$, la cual se eligió pensando en no tener velocidades muy altas al realizar el cambio de controlador, debido a que al introducir velocidades angulares muy altas en el DDR dentro de la simulación le eran imposibles de seguir (probablemente por el controlador de bajo nivel del robot en el simulador) y el sistema podía volverse inestable intentando corregir la orientación del robot.

En la Figura 4.4 se puede observar cómo el desempeño del seguimiento de la trayectoria es peor al del caso anterior, tal como se esperaba al disminuir la ganancia de seguimiento γ , sin embargo en la Figura 4.5 se puede comprobar que aún así el error de seguimiento es bajo. Por otra parte, la tarea de evasión la realiza muy bien a pesar de que la ganancia de evasión λ es menor a γ y que la trayectoria de referencia entra al radio de seguridad de los obstáculos.

En la Figura 4.6 se pueden visualizar las velocidades aplicadas a lo largo del movimiento

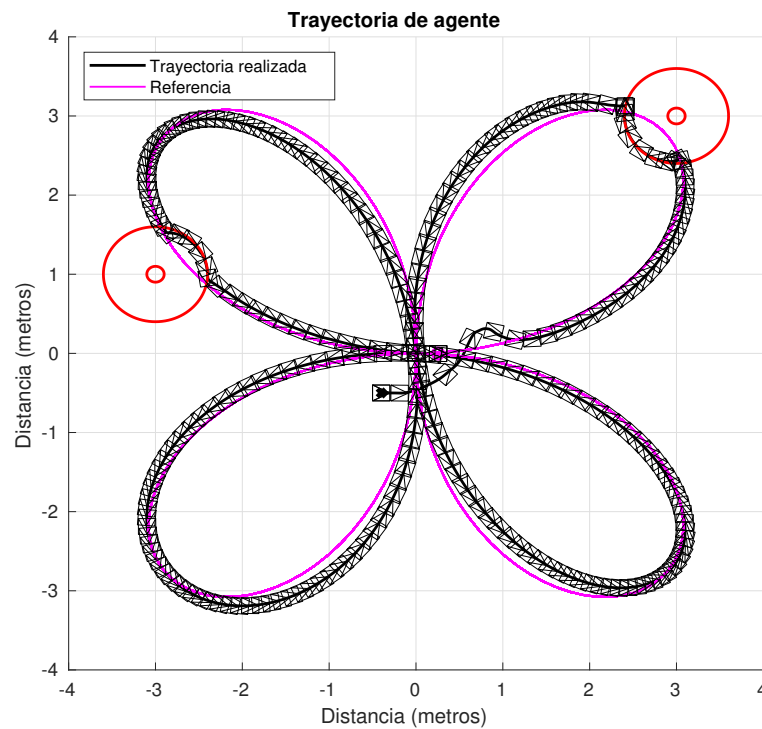


Figura 4.4: Resultados de utilizar un control de seguimiento de trayectoria en un solo agente con obstáculos.

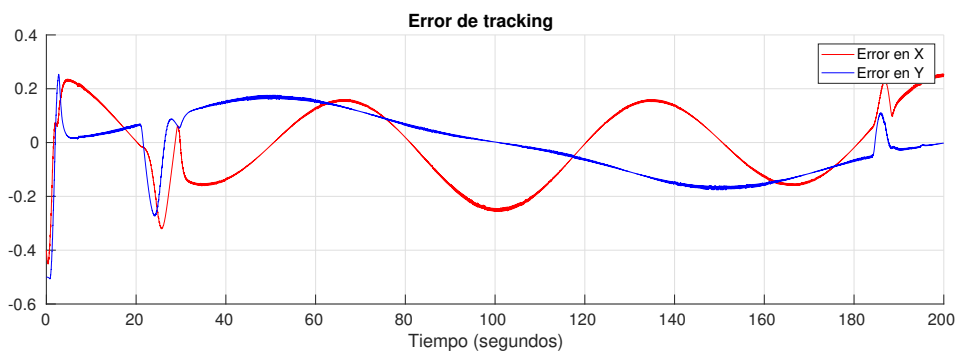


Figura 4.5: Resultados de utilizar un control de seguimiento de trayectoria en un solo agente con obstáculos.

del robot. Se puede comprobar, haciendo una ampliación a uno de los intervalos de tiempo donde se aplica el control multitarea, que el control de velocidad (tanto lineal como angular) aplicado es en todo momento suave gracias a la función $h(t)$ que se aplica tal como se definió en (3.10).

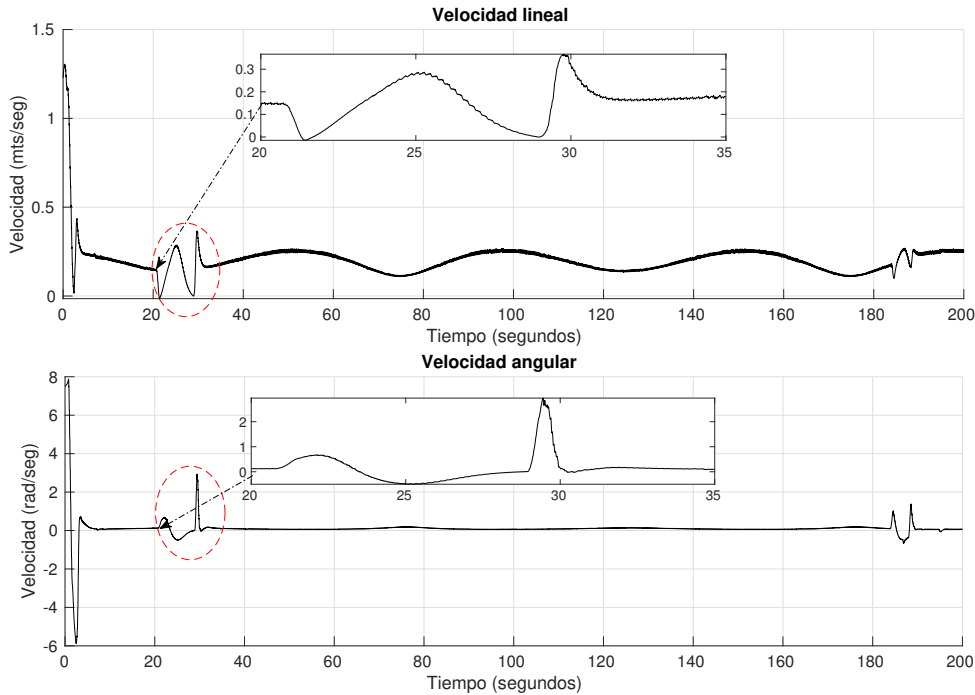


Figura 4.6: Resultados de utilizar un control de seguimiento de trayectoria en un solo agente con obstáculos.

4.5.3 Seguimiento en formación con evasión de obstáculos

Para el caso de seguimiento en formación con evasión de obstáculos se utilizaron $\gamma = 1$, $\lambda = 0.8$ y $k = 0.09$ como ganancias de seguimiento, evasión y consenso respectivamente. En este caso se permitió subir la ganancia de evasión para garantizar la efectividad de la tarea en todos los robots sacrificando nuevamente la precisión del seguimiento. Las condiciones iniciales de los agentes son $\mathbf{q}_1 = [0, 0, 0]^T$, $\mathbf{q}_2 = [-2, 1.8, -0.6]^T$, $\mathbf{q}_3 = [-3, -1, 1.14]^T$ y $\mathbf{q}_4 = [-1, -0.8, 0]^T$ y cabe resaltar que el líder es el agente R_1 . Se utilizó un obstáculo fijo posicionado en $\alpha_o = [0, -2]$ metros el cual es un cilindro centrado en α_o y con radio de 0.1 metros. Para definir la formación deseada se utilizan como vectores de desplazamiento $\mathbf{z}_1 = [1.5 \cos(3\pi/2), 1.5 \sin(3\pi/2)]^T$, $\mathbf{z}_2 = [1.5 \cos(2\pi), 1.5 \sin(2\pi)]^T$, $\mathbf{z}_3 = [1.5 \cos(\pi/2), 1.5 \sin(\pi/2)]^T$ y $\mathbf{z}_4 = [1.5 \cos(\pi), 1.5 \sin(\pi)]^T$ metros, lo cual representa que los 4 robots deben alcanzar una formación en cuadro. Para la tarea de evasión, el radio de seguridad considerado es $\sigma = 0.6$ metros tanto para obstáculos móviles como para obstáculos fijos.

En la Figura 4.7 se puede visualizar en la gráfica superior las trayectorias de los agentes reales realizadas en la simulación. El agente R_1 , realiza la trayectoria más apegada al quadri-folium predefinido mientras que los demás agentes, los seguidores, siguen una trayectoria

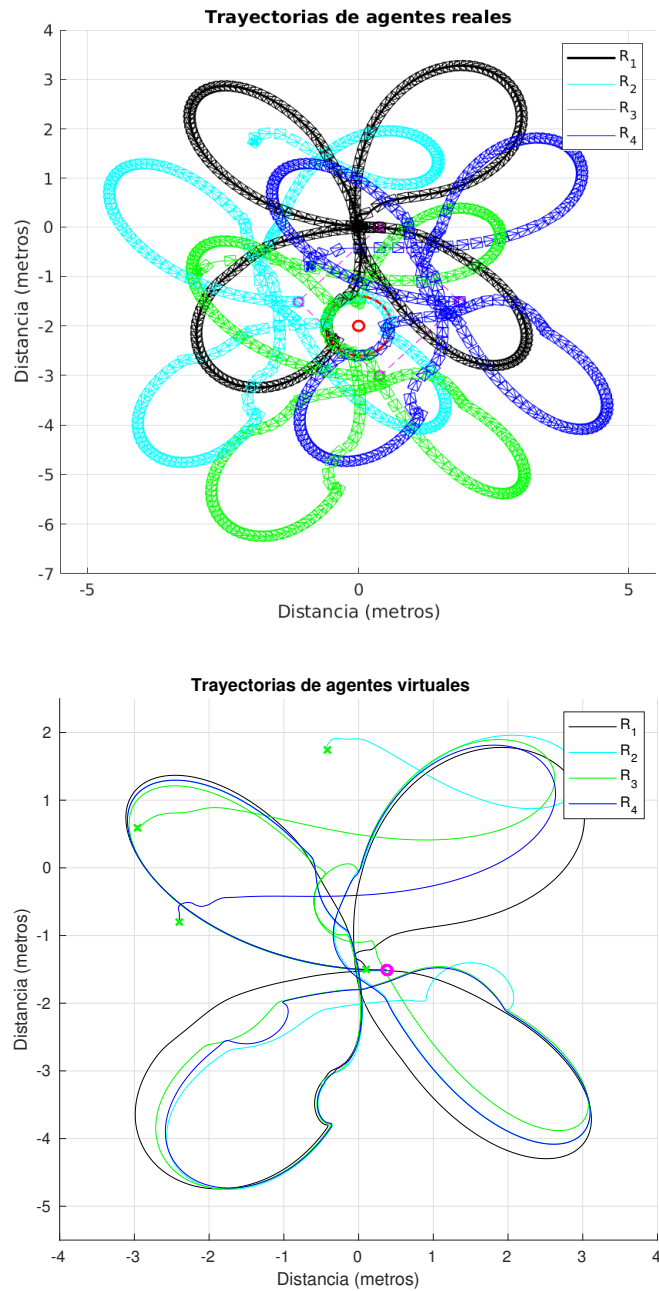


Figura 4.7: Seguimiento en formación con evasión de obstáculos. Arriba se muestran las trayectorias realizadas por los agentes reales y la formación resultante al terminar la simulación. Abajo las trayectorias de los agentes virtuales, las cuales muestran que no se mantuvo la formación a lo largo de toda la trayectoria debido a la evasión de obstáculos, pero se recupera posteriormente.

similar pero deformada. En rojo se muestran las circunferencias correspondientes al obstáculo y su radio de seguridad. Se puede observar que durante la simulación los agentes

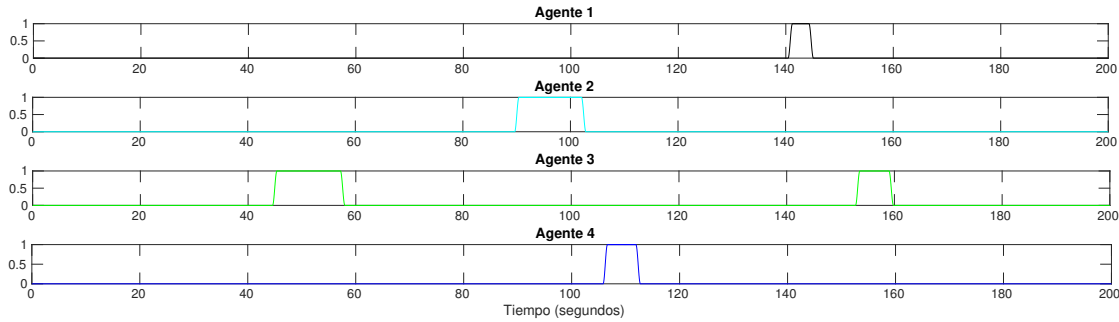


Figura 4.8: Función de activación $h(t)$ del control multitarea durante el seguimiento en formación para cada agente. Se muestra en qué momento está activa la tarea de evasión de obstáculos durante la simulación.

evadieron correctamente al obstáculo. En la gráfica inferior se muestran las trayectorias de los agentes virtuales, las cuales muestran que durante ciertos momentos de la trayectoria la formación debe romperse para poder realizar acciones de evasión. Nótese que en ciertos momentos de la simulación únicamente el líder rompe la formación cuando los demás agentes realizan una acción de evasión (debido a que la ganancia de formación es mucho menor a la ganancia de seguimiento y su control se compone de ambos términos) mientras que cuando el líder evade los seguidores realizan un movimiento similar. Cabe resaltar que al final de la trayectoria se vuelve a alcanzar la formación, la cual, se muestra en línea punteada color magenta en la gráfica superior de la Figura 4.7.

En la Figura 4.8 se muestra que cada uno de los agentes tiene que activar el control multitarea al menos una vez durante la simulación y además el intervalo de tiempo en el que dura activo este control es variable. Por otra parte, en la Figura 4.9 se muestran las velocidades aplicadas a cada uno de los agentes durante la simulación. Al inicio de la simulación, en los primeros 5 segundos se muestran cambios rápidos de velocidad debido a que los agentes buscan sincronizarse en orientación para posteriormente comenzar a moverse en la dirección que impone la referencia, disminuyendo el error de consenso. A partir del segundo 45 de la simulación se puede apreciar que hay un cambio brusco tanto en velocidades angulares como en velocidades lineales debido a que el agente R_3 activa su control multitarea. En la gráfica superior de la Figura 4.9 se muestra el efecto mencionado anteriormente: las velocidades de los agentes R_2 y R_4 se ven influenciadas por el cambio en la velocidad del agente R_3 , el cual no es instantáneo gracias a la función $h(t)$. Sin embargo, aunque sí existe influencia en la velocidad lineal del agente R_1 , el impacto es significativamente menor ya que tiene como prioridad seguir la trayectoria al ser el agente líder. En ambas gráficas, superior e inferior, se realiza un acercamiento para poder

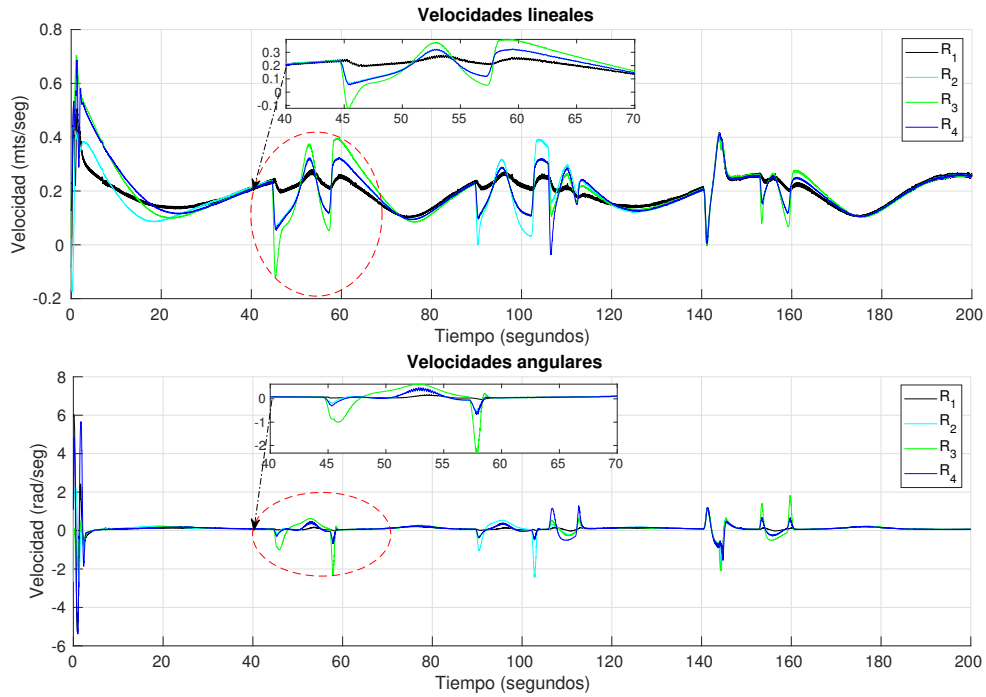


Figura 4.9: Velocidades durante el seguimiento en formación. En la gráfica superior se muestran las velocidades lineales aplicadas a cada uno de los agentes y en la gráfica inferior se muestran las velocidades angulares aplicadas a los agentes durante la simulación.

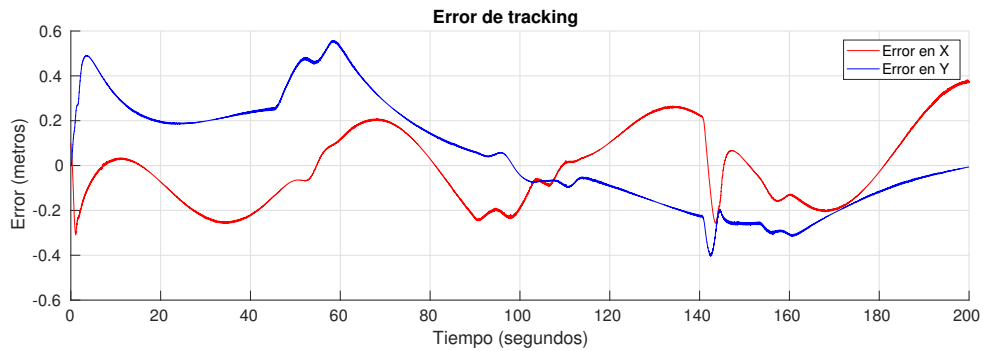


Figura 4.10: Errores de seguimiento de trayectoria por parte del agente líder.

comprobar como ninguna velocidad aplicada tiene un cambio instantáneo.

En la Figura 4.10 se muestran los errores de seguimiento por parte del líder R_1 los cuales, aunque las amplitudes son mayores a las de los casos anteriores, son relativamente bajas. Nótese que el perfil de error no comparte mucha similitud con los casos anteriores por la influencia del término de consenso en el controlador (que involucra las evasiones de los agentes seguidores). Cerca del segundo 140 de la simulación se pueden observar los efectos del cambio de controlador en el líder ya que son los cambios más grandes en los errores

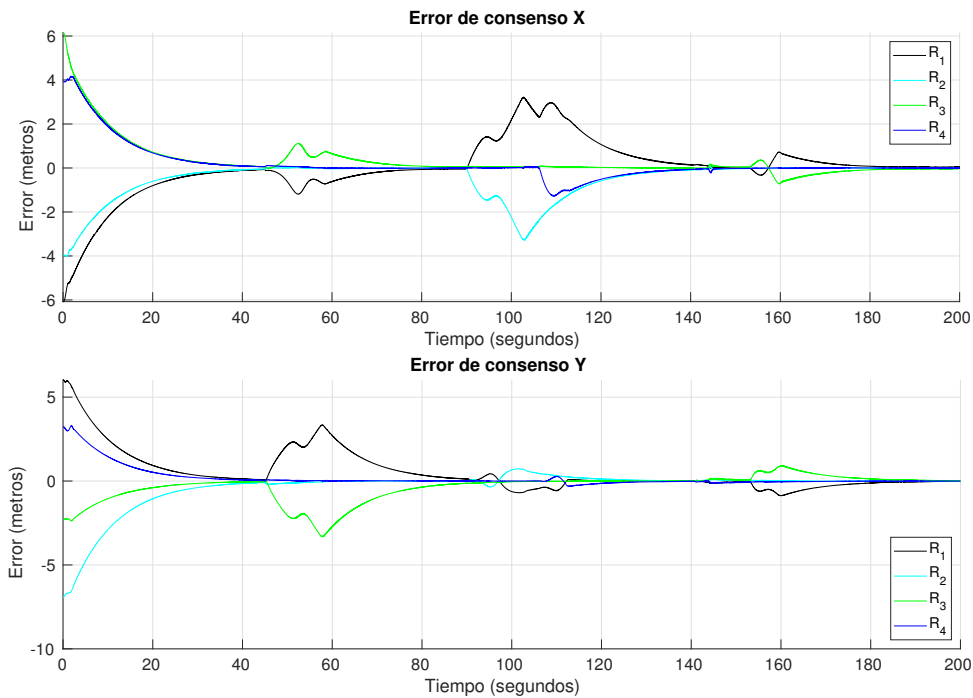


Figura 4.11: Errores de consenso durante seguimiento en formación. En la figura superior se muestra el error de consenso con respecto al eje X y en la figura inferior el error de consenso con respecto al eje Y.

porque en ese caso el agente R_1 realiza una evasión del obstáculo.

Analizando los errores de consenso en la Figura 4.11 se ve que los errores convergen a cero y en el segundo 45 aproximadamente (momento en que el agente R_3 activa el control multitarea) los errores de consenso comienzan a crecer ya que los agentes deben romper la formación para que R_3 evada el obstáculo fijo. Posteriormente los agentes están cerca de alcanzar la formación de nuevo y al activarse el control multitarea (cerca del segundo 90) en el agente R_2 la formación vuelve a romperse. En el segundo 110 se puede ver como hay un cambio en los errores de consenso de R_4 debido a que tiene que entrar en acción de evasión justo cuando R_2 termina la suya. En el segundo 152 de la simulación R_3 debe activar nuevamente su control multitarea por lo que la formación es alcanzada nuevamente desde que se rompió en el segundo 45 hasta el segundo 180 aproximadamente. Cabe resaltar que en el segundo 140 cuando el líder activa el control multitarea el error de consenso no aumenta significativamente como cuando lo hacen los seguidores debido a que en este caso los seguidores realizan un movimiento similar a él al intentar mantener la formación.

En el video del siguiente vínculo se muestra el movimiento de los robots en el simulador Gazebo: https://drive.google.com/open?id=1w_KXSMYJjBYTUaTL8nXHIRpk-EqHUMKO.

4.5.4 Seguimiento en formación con evasión de obstáculos siguiendo una trayectoria dada por un planificador

En el caso anterior se verificó que las leyes de control (4.14) y (4.15) para líder y seguidores respectivamente resuelven la tarea de seguimiento en formación. En caso de que se acerquen a un obstáculo es posible plantear un control multitarea donde la tarea secundaria es la tarea a resolver por el líder (4.14) y por los seguidores (4.15), a la par de una tarea de evasión de obstáculos como tarea primaria para resolver finalmente el problema de seguimiento en formación con evasión de obstáculos. Buscando acercarse más a una implementación real considerando un entorno con varios obstáculos, se probó la misma ley de control para el caso en que la trayectoria de referencia para el líder está dada por un planificador de movimiento.

Tal como se mencionó anteriormente, el planificador de movimiento utilizado es un RRT, el cual es un algoritmo que genera una estructura que contiene trayectorias en lazo abierto para sistemas no lineales con restricciones de estado [33]. Los RRT son particularmente adecuados para problemas de planificación de movimientos que involucran obstáculos y restricciones diferenciales (no holonómicas o kinodinámicas). En este caso se implementó un RRT básico de primer orden, por lo que utiliza primitivas de movimiento que dependen únicamente de velocidades. Cabe resaltar que el objetivo es mostrar que el esquema de control de formación con evasión de obstáculos funciona para diferentes tipos de trayectorias para el líder, como las generadas por cualquier planificador. Es por esto que se utilizó un RRT básico por su simplicidad, sin embargo las trayectorias obtenidas por este método no son óptimas, como se observará en los resultados. Existe una variante llamada RRT* [36] que involucra criterios de optimalidad que se podría implementar para generar trayectorias de referencia óptimas para el líder como trabajo futuro.

Para este nuevo caso de estudio se utilizaron $\gamma = 1$, $\lambda = 0.8$ y $k = 0.09$ como ganancias de seguimiento, evasión y consenso respectivamente. Se permitió subir la ganancia de evasión para garantizar la efectividad de la tarea en todos los robots sacrificando un poco la precisión del seguimiento. En este cuarto caso la condición de paro depende de la duración de la trayectoria obtenida por el planificador. Las condiciones iniciales de los agentes son $\mathbf{q}_1 = [6, -6.2, 3.14]^T$, $\mathbf{q}_2 = [5, -8, 2.5]^T$, $\mathbf{q}_3 = [7, -8.8, 3.1]^T$ y $\mathbf{q}_4 = [8, -7.5, 3.4]^T$ y cabe resaltar que el líder es el agente R_1 . Se utilizaron 5 obstáculos fijos posicionados en $\alpha_{o_1} = [2, -6]^T$, $\alpha_{o_2} = [8, -2]^T$, $\alpha_{o_3} = [6, -2]^T$, $\alpha_{o_4} = [-2, 6]^T$, $\alpha_{o_5} = [-2, 0]^T$ metros, los cuales son cilindros centrados en α_{o_i} y con radios dados por $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.6$, $r_3 = 0.6$, $r_4 = 0.8$, $r_5 = 1.0$ metros.

En la Figura 4.12 se muestra el RRT obtenido al ejecutar el planificador. Como pun-

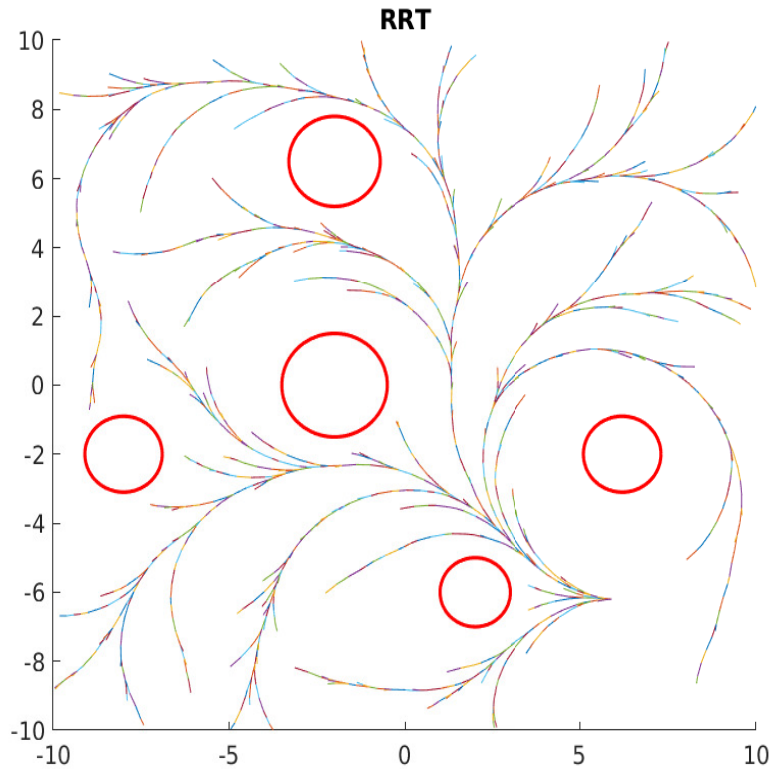


Figura 4.12: Vista del RRT calculado para el agente líder.

to de partida se utiliza $\mathbf{q}_o = \mathbf{q}_1$ y a partir de ahí se calcula una trayectoria hacia $\mathbf{q}_f = [-7.23, 5.81, 4.35]^T$. El RRT se calcula bajo las condiciones iniciales anteriormente mencionadas y se calcula utilizando 6 diferentes primitivas de movimiento en 3000 iteraciones. Las primitivas de movimiento utilizadas son:

$$(4.34) \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_6 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix},$$

las cuales fueron elegidas utilizando 2 criterios. El primer criterio es que el robot siempre avance hacia adelante. El segundo criterio fue que al saber que las velocidades que entregará como resultado el planificador son discontinuas, se buscó mitigar el efecto de cambios repentinos en las velocidades que se apliquen al robot que seguirá la trayectoria.

La trayectoria resultante se muestra en la Figura 4.13 la cual se utiliza posteriormente como $\mathbf{m}(t)$ en el control (4.14), además, tal como se anticipó, la trayectoria no es óptima ni en distancia ni en cualquier otro criterio. Por otra parte las velocidades que se utilizan para lograr la anterior trayectoria son velocidades discontinuas (Figura 4.14) ya que el RRT es de primer orden, sin embargo, para mitigar el efecto de dichas discontinuidades en las

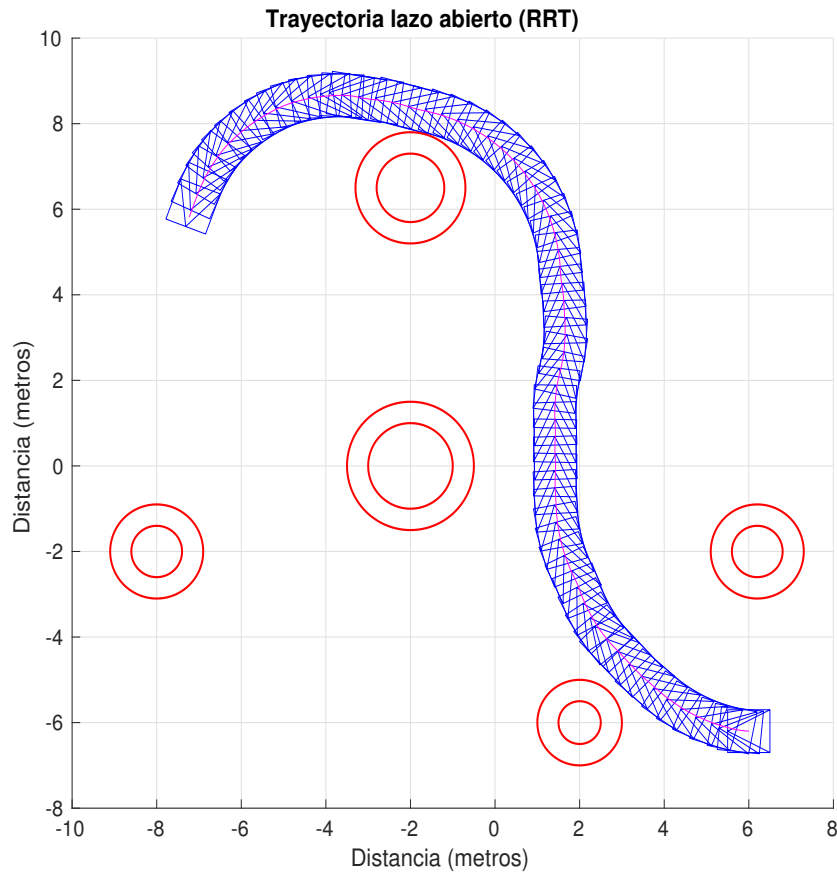


Figura 4.13: Trayectoria calculada por el RRT.

velocidades se decidió utilizar primitivas de movimiento con magnitudes de velocidad pequeñas. Cabe resaltar que aunque las velocidades son discontinuas la trayectoria $\mathbf{m}(t)$ si es continua.

Para definir la formación deseada se utilizan como vectores de desplazamiento $\mathbf{z}_1 = [1.5 \cos(3\pi/2), 1.5 \sin(3\pi/2)]^T$, $\mathbf{z}_2 = [1.5 \cos(2\pi), 1.5 \sin(2\pi)]^T$, $\mathbf{z}_3 = [1.5 \cos(\pi/2), 1.5 \sin(\pi/2)]^T$ y $\mathbf{z}_4 = [1.5 \cos(\pi), 1.5 \sin(\pi)]^T$ metros que generan la misma formación deseada en cuadro que en los casos anteriores. Para la tarea de evasión, los radios de seguridad considerados son $\sigma_{2_1} = 1.0$, $\sigma_{2_2} = 1.1$, $\sigma_{2_3} = 1.1$, $\sigma_{2_4} = 1.3$, $\sigma_{2_5} = 1.5$ metros en el caso de obstáculos fijos, el cual es diferente para cada uno debido a que el radio de los obstáculos es variable también, y $\sigma_1 = 0.6$ para el caso de obstáculos móviles.

En la gráfica superior de la Figura 4.15 se muestran las trayectorias realizadas por los agentes reales, donde como era de esperar, el líder no necesita activar el control multitarea, sin embargo, los seguidores deben activar el control multitarea al menos una vez. Cabe

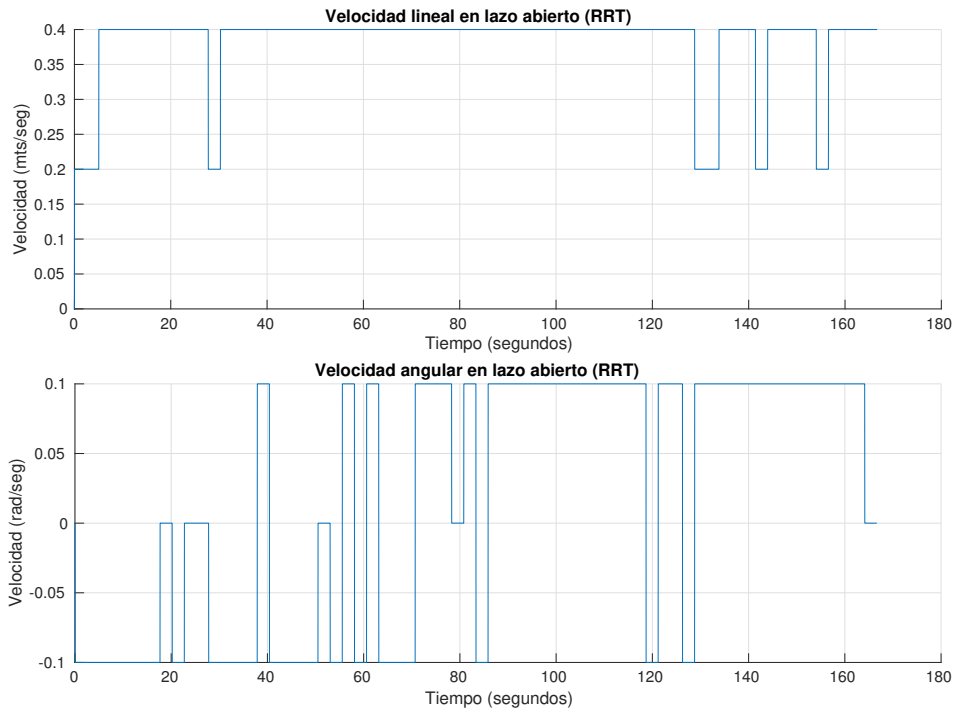


Figura 4.14: Velocidades en lazo abierto dadas por el RRT. Arriba se muestra la velocidad lineal para obtener la trayectoria de referencia. Abajo se muestra la velocidad angular para obtener la trayectoria.

destacar que debido a que buscan mantener la formación todo el tiempo, al encontrar un obstáculo el control de evasión los dirige por la dirección en que el error de consenso aumente menos, la cual, no es la misma para todos los agentes que realizan evasión. Por otra parte, en la gráfica inferior, se muestran las trayectorias de los agentes virtuales, donde se muestra que los momentos donde se rompe la formación son precisamente donde se realiza una acción de evasión por parte de algún agente, sin embargo al final de la trayectoria se vuelve a alcanzar la formación.

En la Figura 4.16 se muestran los momentos en los que se activó el control multitarea durante la simulación. Nótese que en algunos momentos algún agente ya había terminado de realizar su acción de evasión, sin embargo, al entrar en acción de evasión otro agente puede volver a acercarse a algún obstáculo al intentar mantener la formación todo el tiempo. En estos casos la función de transición no alcanza a reducirse a cero antes de reactivarse, como se aprecia en el segundo 27 para R_2 .

En la Figura 4.17 se muestran las velocidades aplicadas a cada uno de los agentes durante la simulación. Al hacer una ampliación en el momento en que se realizaron más cambios de controlador, como es alrededor de los 125 segundos, se puede ver como las transiciones no

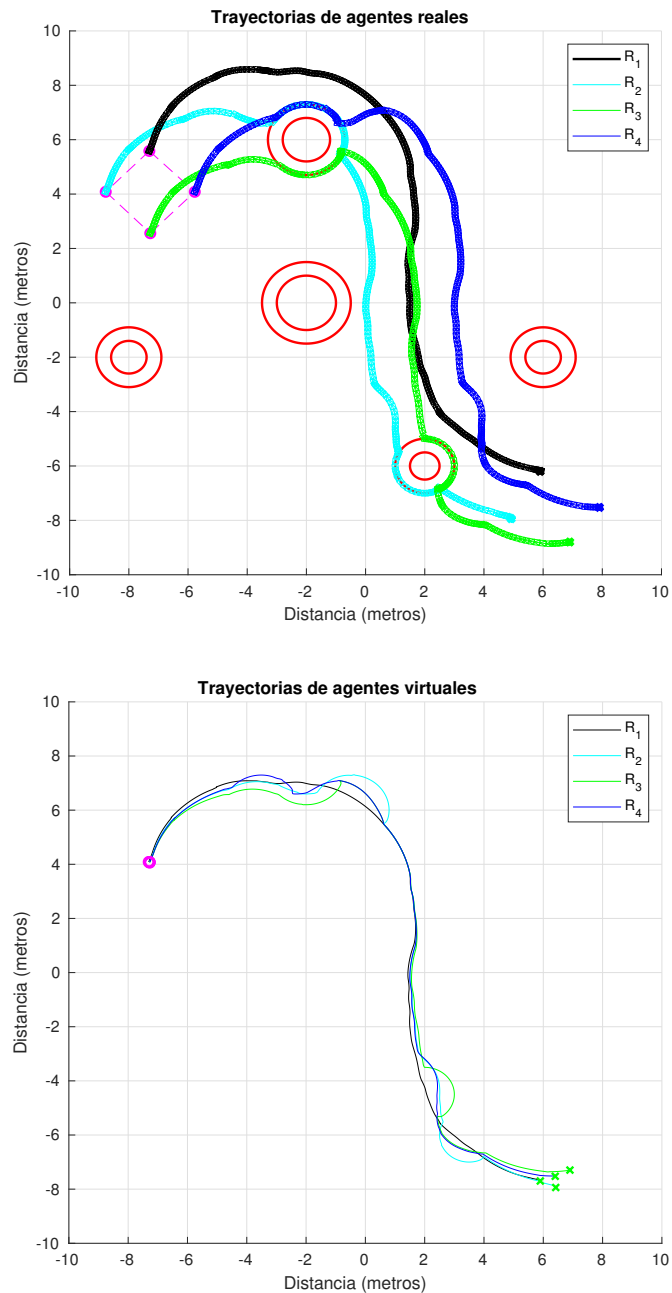


Figura 4.15: Seguimiento en formación con evasión de obstáculos al utilizar una trayectoria dada por un planificador. Arriba se muestran las trayectorias realizadas por los agentes reales y la formación resultante al terminar la simulación. Abajo las trayectorias de los agentes virtuales, las cuales muestran que no se mantuvo la formación a lo largo de toda la trayectoria debido a acciones de evasión de obstáculos.

son discontinuas. Sin embargo, en el caso del líder R_1 algunas velocidades son discontinuas, lo cual tiene sentido debido a que la derivada de la referencia generada por el planificador,

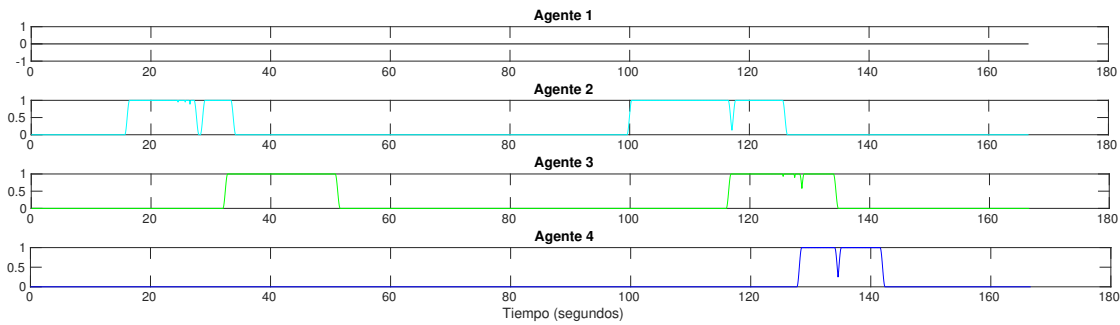


Figura 4.16: Función de activación del control multitarea para cada agente durante el seguimiento en formación al utilizar una trayectoria dada por un planificador. Se muestra en qué momento está activa la tarea de evasión de obstáculos durante la simulación.

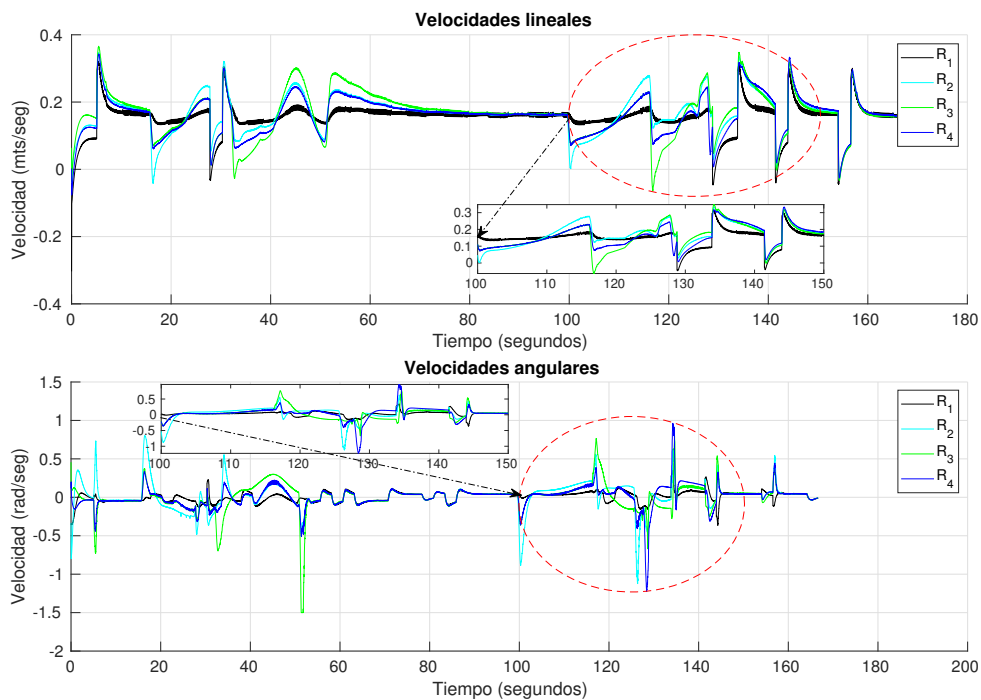


Figura 4.17: Velocidades durante el seguimiento en formación al utilizar una trayectoria dada por un planificador. En la gráfica superior se muestran las velocidades lineales aplicadas a cada uno de los agentes y en la gráfica inferior se muestran las velocidades angulares aplicadas a los agentes durante la simulación.

es decir, $\mathbf{m}(t)$ es discontinua, tal como se puede intuir al observar los perfiles de velocidad planificados de la Figura 4.14.

Por otra parte, los errores de seguimiento, que se muestran en la Figura 4.18, son menores comparados al caso anterior a pesar de utilizar las mismas ganancias en los controladores. Esto se debe a que las primitivas de movimiento emplean velocidades de baja magnitud,

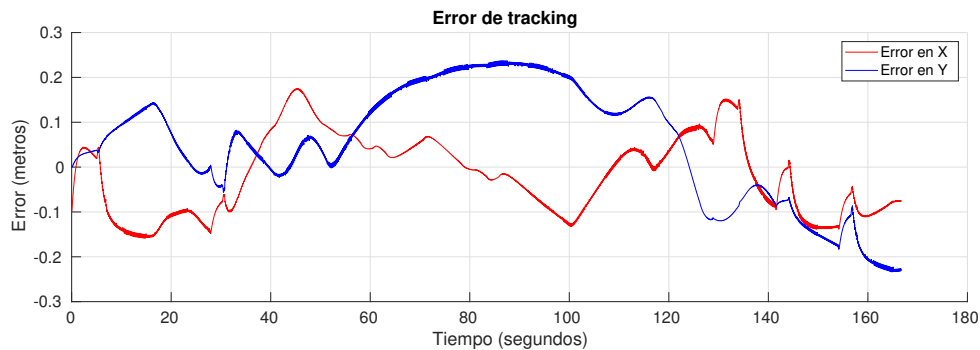


Figura 4.18: Errores de seguimiento de una trayectoria dada por un planificador por parte del agente líder.

por lo tanto las derivadas de la trayectoria son menores en general durante la simulación, es decir, es una trayectoria más fácil de seguir que la trayectoria rosa polar.

Finalmente, en la Figura 4.19 se muestran los errores de consenso. Inicialmente empiezan a converger a cero hasta aproximadamente el segundo 18 donde R_3 tiene que activar su acción de evasión debido a que se aproxima a un obstáculo, el cual le toma evadir cerca de 10 segundos pero justo cuando comienza a abandonar el obstáculo la formación lo hace que vuelva a entrar al radio del obstáculo y que conmute nuevamente al control multitarea. Este efecto se repite en la segunda acción de evasión de R_2 , la segunda evasión de R_3 y en la única de R_4 tal como se muestra en la Figura 4.16. Nótese las magnitudes máximas de los errores de consenso (sin contar los primeros segundos de la simulación debido a que esto es por condiciones iniciales) son mayores a el caso anterior. Esto se debe a que los radios de seguridad de estos obstáculos son mayores al radio del obstáculo en el caso anterior lo cual obliga a romper "más" la formación. A pesar de ello se alcanza la formación entre el segundo 90 y 100 para después volver a romperse debido a el cambio de controlador. Cabe resaltar que al final de la simulación no se alcanza la formación debido a que la condición de paro era el tiempo de la trayectoria, sin embargo con unos segundos más y dejando la referencia fija en el último punto de la trayectoria se hubiera alcanzado.

El movimiento de los robots en el simulador Gazebo para este caso se puede observar en el video del siguiente vínculo: https://drive.google.com/open?id=1Iny9IAZ0gv_6CxU9kRqb6ZtBCE4YPzGi.

En este capítulo se presentaron los resultados para un control de seguimiento en formación con evasión de obstáculos. El sistema multi-agente tiene un único líder que sigue una referencia variante en el tiempo y los efectos en los movimientos de los seguidores tiene muy poco efecto sobre él. Cuando el líder tiene que hacer un cambio de controlador se ve reflejado en los seguidores. Por otra parte los seguidores se encargaban de alcanzar y

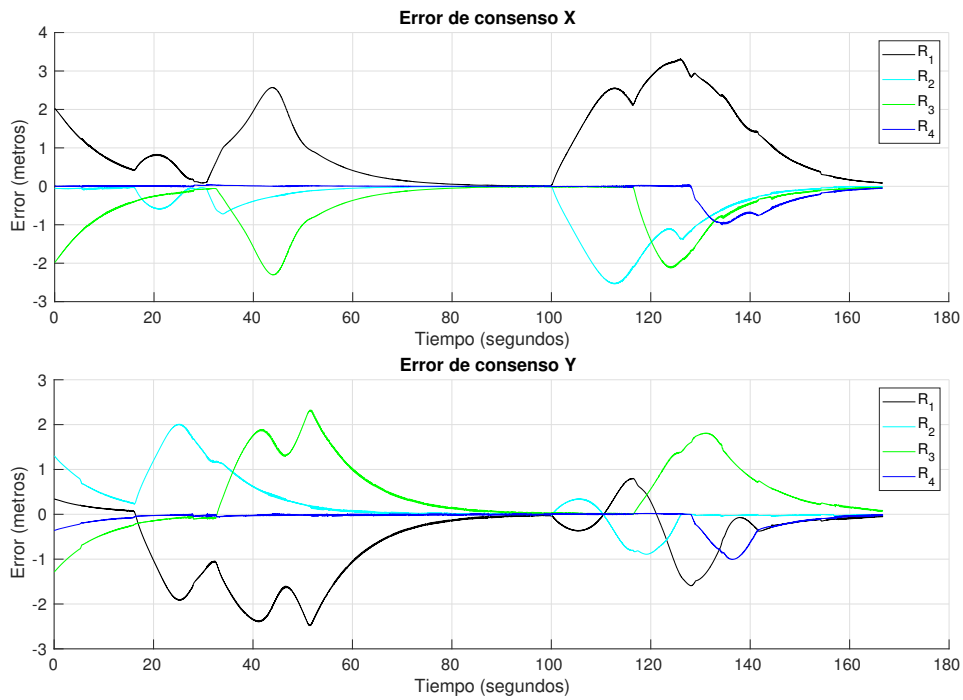


Figura 4.19: Errores de consenso durante seguimiento en formación al utilizar una trayectoria dada por un planificador. En la figura superior se muestra el error de consenso con respecto al eje X y en la figura inferior el error de consenso con respecto al eje Y .

mantener una formación y cuando un seguidor tiene que evadir un obstáculo el cambio de controlador genera un gran efecto en los demás seguidores.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En esta tesis se abordaron dos problemas principales en el contexto del control de sistemas de múltiples agentes. El primer problema fue el control de formación con evasión de obstáculos, el cual tiene como objetivo llevar a un sistema multi-agente desde sus condiciones iniciales hasta alcanzar una formación deseada, considerando que ciertos obstáculos fijos en el entorno o condiciones iniciales del sistema pueden causar colisiones, y el segundo problema es el control de seguimiento de una trayectoria en formación con evasión de obstáculos, el cual es una extensión del problema anterior ya que además de alcanzar una formación tiene como objetivo que se alcance una referencia variante en el tiempo.

Ambos problemas se abordaron mediante teoría de consenso, donde el control es distribuido, por lo que los objetivos se cumplen utilizando información local. La red de comunicación se modeló mediante un grafo con topología fija y flujo bidireccional. Los controles propuestos fueron diseñados para ser aplicados a agentes no holónomos, en particular robots de manejo diferencial (DDRs), bajo la consideración que el sistema multi-agente es homogéneo, es decir, todos los robots son del mismo tipo. El protocolo de control se diseñó a partir del modelo cinemático de cada uno de los robots, el cual, tiene tres estados $[x_i, y_i, \theta_i]^T$ y únicamente dos entradas de control $[u_i, w_i]^T$. Lo anterior, en adición a la restricción de movimiento de no holonomía de los robots de manejo diferencial, llevó a la necesidad de formular todo en términos de un punto de control en el que sólo se controla posición y no orientación.

Es importante evitar que los agentes colisionen entre ellos durante su movimiento y que

puedan evadir obstáculos fijos del entorno. Para esto se formuló la integración del control de los problemas de formación y seguimiento en formación con un esquema de evasión de obstáculos usando un enfoque de múltiples tareas. La estrategia de evasión de obstáculos utilizada es de tipo reactiva, por lo que no es necesario tener conocimiento de la ubicación de los obstáculos. Sin embargo, dicha estrategia únicamente es capaz de cumplir su objetivo cuando se trata de obstáculos con forma convexa, de lo contrario, existe la posibilidad de quedarse en un mínimo local.

Para resolver el primer problema en el cual se quiere alcanzar una formación teniendo la capacidad de evadir obstáculos cuando se requiera, se propuso una ley de control basada en un esquema de múltiples tareas que considera jerarquía de las mismas. Se demostró teóricamente que la ley de control propuesta permite a un sistema múlti-agente alcanzar una formación y evadir obstáculos en tiempo asintótico, sin importar las condiciones iniciales de cada agente siempre y cuando el grafo que modela la red de comunicación sea *conectado*. Además, a pesar de que se realiza un cambio de controlador para incluir la tarea de evasión se cumplen ambos objetivos todo el tiempo. También se introdujo el uso de una función de transición entre controladores para evitar cambios bruscos en las velocidades empleadas a cada agente, generando velocidades continuas como entradas de control para cada uno de los robots. Se analizaron los casos en los que se cambiaba la conectividad del grafo y se comprobó que disminuir la conectividad aumenta el tiempo de convergencia de la formación.

En el segundo problema abordado se extendieron los resultados de formación con evasión al caso en que la formación debe desplazarse en un entorno donde puede haber obstáculos fijos convexos. Para lograrlo se consideró el caso en que la trayectoria solo es conocida por un agente por lo que se utilizó un esquema líder-seguidor para el diseño de la ley de control. Posteriormente se demostró teóricamente que a pesar de tener objetivos diferentes (líder y seguidores) e integrarlos con la estrategia de evasión de obstáculos se lograron los objetivos en tiempo asintótico. Finalmente al evaluar el desempeño de los controladores con una trayectoria dada por un planificador se cumplieron los objetivos. Cabe resaltar que los modelos utilizados en el planificador fueron de primer orden y la ley de control se probó en un simulador que considera dinámicas de alto orden por lo que existe robustez en la ley de control.

En este trabajo se consideró la solución de los tres objetivos: formación, seguimiento y evasión de obstáculos en tiempo asintótico por lo que posteriormente podría considerarse una extensión para que al menos uno de los tres objetivos se realice en tiempo finito o en tiempo predefinido, debido a que con los controles propuestos no se tiene certeza sobre

el momento en que se cumplen los objetivos por lo que si existe una restricción de tiempo no hay garantía de que pueda ser cumplida. Por otra parte todos los controles empleados son controles proporcionales, los cuales se caracterizan por dar mejores resultados según se aumenta la ganancia proporcional, sin embargo, tener ganancias grandes implica que las entradas de control también lo sean, lo cual no es factible debido a que en todos los sistemas existen limitaciones físicas por lo que otra extensión sería considerar las restricciones físicas del sistema, específicamente en los DDRs las máximas velocidades que puede alcanzar.

A pesar de que los controles están diseñados con un enfoque distribuido las simulaciones fueron realizadas con información global proporcionada por el simulador por lo que sería interesante evaluar los resultados si se utilizan únicamente sensores a bordo, ya sean sensores de distancia que de alguna forma identifiquen con cual agente u obstáculo se está midiendo o con cámaras. El enfoque utilizado parte de asumir que la topología de comunicación es fija sin retrasos en el tiempo de flujo de información por lo que vale la pena considerar un caso que no tenga estas restricciones.

Finalmente, valdría la pena explorar el caso en que se realice consenso en un sistema multi-agente formado por DDRs en los tres estados de cada uno de los robots, es decir, que exista consenso en posición y se llegue a una formación (tal como se formuló en esta tesis) y además se alcance consenso en la orientación de los DDRs.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] G. ARECHAVALETA, A. MORALES-DÍAZ, H. PÉREZ VILLEDA, AND M. CASTELÁN, *Hierarchical task-based control of multirobot systems with terminal attractors*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 25 (2016), pp. 1–8.
- [2] F. ARRICHIELLO AND S. CHIAVERINI, *Experiments of formation control with multirobot systems using the null-space-based behavioral control*, Control Systems Technology, IEEE Transactions on, 17 (2009), pp. 1173 – 1182.
- [3] H. M. BECERRA, J. A. COLUNGA, AND J. G. ROMERO, *Simultaneous convergence of position and orientation of wheeled mobile robots using trajectory planning and robust controllers*, International Journal of Advanced Robotic Systems, 15 (2018).
- [4] R. W. BROCKETT, *Asymptotic stability and feedback stabilization*, in Differential Geometric Control Theory, Birkhauser, 1983, pp. 181–191.
- [5] Y. CAO, W. YU, W. REN, AND G. CHEN, *An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination*, IEEE Transactions on Industrial Informatics, 9 (2012).
- [6] F. R. K. CHUNG, *Spectral Graph Theory*, vol. 92, 1997.
- [7] M. L. B. CLAUDE SAMSON, BERNARD ESPIAU, *Robot Control: The Task Function Approach*, Oxford University Press, 1991.
- [8] D. DIMAROGONAS AND K. KYRIAKOPOULOS, *A connection between formation infeasibility and velocity alignment in kinematic multi-agent systems*, Automatica, 44 (2008), pp. 2648–2654.
- [9] X. DONG AND G. HU, *Time-varying formation tracking for linear multiagent systems with multiple leaders*, IEEE Transactions on Automatic Control, PP (2017), pp. 1–1.

- [10] M. S. EDUARDO MONTIJANO, DINGJIANG ZHOU AND C. SAGUES, *Distributed formation control without a global reference frame*, 2014 American Control Conference (ACC) June 4-6, 2014. Portland, Oregon, USA.
- [11] S. GE, X. LIU, C.-H. GOH, AND L. XU, *Formation tracking control of multiagents in constrained space*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 24 (2015), pp. 1–1.
- [12] S. C. GIANLUCA ANTONELLI, FILIPPO ARRICHELLO, *The null-space-based behavioral control for autonomous robotic systems*, Intelligent Service Robotics, (2007).
- [13] F. L. JAVIER MINGUEZ AND J. P. LAUMOND, *Handbook of Robotics*, Springer, 2008, ch. Motion Planning and Obstacle Avoidance, pp. 827–852.
- [14] J. JIN AND N. GANS, *Collision-free formation and heading consensus of nonholonomic robots as a pose regulation problem*, Robotics and Autonomous Systems, September 2017.
- [15] M. A. KAMEL AND Y. ZHANG, *Decentralized leader-follower formation control with obstacle avoidance of multiple unicycle mobile robots*, The IEEE 28th Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering Halifax, Canada, May 3-6, 2015.
- [16] H. KHALIL, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
- [17] M. E. B. LAURA KRICK AND B. A. FRANCIS, *Stabilization of infinitesimally rigid formations of multi-robot networks*, Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control Cancun, Mexico, Dec. 9-11, 2008.
- [18] J. LEE, N. MANSARD, AND J. PARK, *Intermediate desired value approach for task transition of robots in kinematic control*, Robotics, IEEE Transactions on, 28 (2012), pp. 1260–1277.
- [19] Z. LI AND H. JI, *Finite-time consensus and tracking control of a class of nonlinear multi-agent systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, PP (2018), pp. 1–1.
- [20] X. LIU, S. GE, C.-H. GOH, AND Y. LI, *Event-triggered coordination for formation tracking control in constrained space with limited communication*, IEEE Transactions on Cybernetics, PP (2018), pp. 1–12.

-
- [21] M. N. MAHYUDDIN AND T. TIANG, *Distributed cooperative formation control of a generic nonholonomic multi-agent system*, Indian Journal of Geo-Marine Sciences, 46 (2017), pp. 2502–2509.
- [22] R. OLFATI-SABER, J. A. FAX, AND R. M. MURRAY, *Consensus and cooperation in networked multi-agent systems*, Proceedings of the IEEE, 95 (2007), pp. 215–233.
- [23] R. OLFATI-SABER AND R. MURRAY, *Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays*, IEEE Transactions on Automatic Control, 49 (2004).
- [24] W. REN, *Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state*, Systems Control Letters, 56 (2007), pp. 474–483.
- [25] ———, *Consensus tracking under directed interaction topologies: Algorithms and experiments*, vol. 18, 07 2008, pp. 742 – 747.
- [26] W. REN AND R. W. BEARD, *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control*, Springer, 2008.
- [27] W. REN AND N. SORENSEN, *Distributed coordination architecture for multi-robot formation control*, Robotics and Autonomous Systems, (2007).
- [28] J. A. F. REZA OLFATI-SABER AND R. M. MURRAY, *Consensus and cooperation in networked multi-agent systems*.
- [29] J. SANTIAGUILLO-SALINAS AND E. ARANDA-BRICAIRE, *Time-varying formation tracking with collision avoidance for multi-agent systems*.
- [30] F. SCHIANO, *Bearing-based Localization and Control for Multiple Quadrotor UAVs*, PhD thesis, 2018.
- [31] B. SICILIANO, *Kinematic control of redundant robot manipulators: A tutorial*, Journal of Intelligent and Robotic Systems, September 1990.
- [32] B. SICILIANO AND J.-J. SLOTINE, *A general framework for managing multiple tasks in highly redundant robotic systems*, Pisa, Italy, 1991, IEEE International Conference on Advanced Robotics, pp. 1211–1216.
- [33] J. J. K. J. STEVEN M LAVALLE, *Randomized kinodynamic planning*, The international journal of robotics research, 2001, pp. 378–400.

- [34] R. W. B. W. REN AND T. W. MCLAIN., *Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems.*, vol. 309, Springer, Berlin, Heidelberg, 2005, pp. 171–188.
- [35] L. WANG AND F. XIAO, *Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents*, (2007).
- [36] D. WEBB AND J. VAN DEN BERG, *Kinodynamic rrt*: Optimal motion planning for systems with linear differential constraints*, (2012).
- [37] G. WEN, Z. DUAN, G. CHEN, AND W. YU, *Consensus tracking of multi-agent systems with lipschitz-type node dynamics and switching topologies*, Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on, 61 (2014), pp. 499–511.
- [38] G. Q. J. Z. YING ZHANG, GUANGMING SONG AND J. PENG, *Consensus and obstacle avoidance for multi-robot systems with fixed and switching topologies*, International Conference on Robotics and Biomimetics December 5-10,2014, Bali, Indonesia.
- [39] L. X. ZHANG YING, *Leader-follower formation control and obstacle avoidance of multi-robot based on artificial potential field*, 2015 27th Chinese Control and Decision Conference.