Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

El Axioma de Consistencia en Juegos Cooperativos

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestría en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:

Joss Erick Sánchez Pérez

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Francisco Sánchez Sánchez

Julio de 2005 Guanajuato, Gto. México

Índice General

Capítulo 1

Introducción

El problema principal que se aborda en juegos cooperativos es la distribución de ganancias conjuntas o el reparto de costos comunes. La teoría más conocida que actualmente da una respuesta categórica a estos problemas es la de valores en juegos cooperativos. En ella se agrupan problemas (G), se definen soluciones concebibles y se pide que una solución satisfaga un conjunto de axiomas que la determinen unívocamente. El avance que se obtiene con esto es sustancial: se aceptan o se eliminan soluciones para toda una clase de problemas con sólo aceptar o no "simples" supuestos generales.

Como ejemplo de esta metodología, L. Shapley axiomatizó en 1953 el valor que lleva su nombre; Kalai y Samet el Valor de Shapley Ponderado en 1987 y Lehrer en 1988 axiomatizó el índice de Banzhaf.

El modelo clásico para juegos cooperativos inicia con un conjunto finito de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$ y se considera una función

$$v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $v(\phi) = 0$, donde $v(S)$ representa la ganancia conjunta que consiguen los jugadores que están en S ($S \subseteq N$) si juegan unidos (forman una coalición). Esta es la ganancia conjunta que debe ser repartida entre los jugadores en S y es con base en estas ganancias, variando S, que deben quedar determinadas las participaciones de los jugadores. Así, un juego es una pareja (N, v), a la que se le desea asignar un vector en $\mathbb{R}^n$ donde la i-ésima coordenada represente la ganancia asignada al jugador i en ese juego. Ahora, se define G como el conjunto de juegos con N fija y una solución como un operador

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^n$$

se prosigue estableciendo axiomas que se crea φ deba satisfacer. Un valor es una solución que ha sido determinado unívocamente por un conjunto de axiomas.

Una de las propiedades importantes al axiomatizar soluciones en juegos cooperativos es consistencia. Thomson fue el primero en introducir esta noción en 1980. La idea intuitiva de consistencia que originalmente dio Thomson es que, si en un juego se vuelve a repartir con φ lo que gana una coalición S, entre los jugadores de S, cada uno gana lo que originalmente le fue asignado.

Después, en 1989 Hart y Mas-Colell definen de otra manera consistencia, pero con el mismo espíritu: consistencia establece relación entre los vectores solución de un juego cooperativo y los de su juego reducido. Este último es obtenido del juego original removiendo uno o más jugadores y asignando sus pagos correspondientes de acuerdo a un principio específico (una solución propuesta φ). Entonces φ se dice consistente si, cuando es aplicado a cualquier juego reducido, se conservan los mismos pagos que en el juego original.

Formalmente: si φ es una solución, (N, v) un juego, e $i \in N$. Se define el juego reducido $(N\backslash\{i\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}})$ (en el juego reducido se supone que el jugador i ha salido) y se dice que la solución φ es consistente si, para todo juego (N, v) y toda coalición $N\backslash\{i\} \subset N$, se tiene:

$$\varphi_j(N\backslash\{i\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}}) = \varphi_j(N, v) \quad \text{para todo } j \in N\backslash\{i\}$$

El artículo de Hart y Mas-Colell ha impulsado una gran cantidad de nuevas investigaciones. Algunos de los trabajos recientes se han enfocado a dar generalizaciones de ciertas clases de soluciones, las cuales son axiomatizadas vía consistencia.

El axioma de consistencia es por sí solo el más ambicioso. Basta con que se tenga un axioma donde se especifique el comportamiento de la solución para juegos de dos jugadores y otro axioma de consistencia para poder extender tal solución al espacio de los juegos n-personales (procediendo de forma recursiva).

En la actualidad hay una gran diversidad de soluciones en juegos cooperativos; las cuales, no todas han sido axiomatizadas usando algún axioma de consistencia. Cabe mencionar que la consistencia en una solución, depende de la definición de su juego reducido; es decir, de su función característica (definiendo de alguna forma $v(S)$ para toda coalición $S \subseteq N\backslash\{i\}$ cuando el jugador i ha salido del juego) y como tal definición no es única, se pueden hallar soluciones consistentes con respecto a una gran variedad de juegos reducidos. Estas son algunas de las razones que motivan a la elaboración de este trabajo y a lo largo de él se presentan aportaciones interesantes, tales como una propuesta de axiomatización de una solución que no había sido axiomatizada usando la propiedad de consistencia, así como también nuevas ideas de juegos reducidos para otras soluciones.

En la sección 2 se presentan los conceptos básicos, definiciones y la axiomatización a la manera tradicional de tres valores: Valores de Shapley, Banzhaf y Shapley Ponderado; además de introducir el concepto de Potencial.

En la sección 3 se expone la consistencia de algunas soluciones específicas, tales como el Valor de Shapley, soluciones de división de excesos y soluciones que admiten un potencial. Así mismo en esta sección, se propone una definición de juego reducido para el Valor de Banzhaf; de hecho, un resultado importante que se obtiene es que se logra axiomatizar este valor con el uso de sólo dos axiomas (consistencia del valor y un axioma que determina cómo es el comportamiento de la solución en juegos de dos jugadores). También se proponen nuevas definiciones de juegos reducidos para dos soluciones en particular: CIS y $ENSC$, de tal manera que las soluciones sean consistentes con respecto a tales juegos reducidos.

La tesis concluye con un apéndice que contiene la programación en Maple para calcular el Valor de Shapley, el de Banzhaf, el de Shapley Ponderado y el de las soluciones CIS y $ENSC$. Dichos programas permiten el cálculo numérico y simbólico de cada uno de ellos con sólo dar como entrada los valores de la ganancia $v(S)$ para toda coalición $S \subseteq N$.

Capítulo 2

Valores en Juegos Cooperativos y Potencial

En esta sección se presentan tres de los principales valores que aparecen en la literatura de Juegos Cooperativos. Cada uno establece una solución axiomática para cada juego cooperativo. En lo sucesivo 2^N denota el conjunto potencia de N. Además, la cardinalidad de los conjuntos se denotará con la letra minúscula correspondiente, por ejemplo, $s = |S|$, $t = |T|$, $q = |Q|$.

Definición 1 *Por un juego en forma de función característica (y en lo sucesivo simplemente un juego) se denotará una pareja* (N, v) *, donde* $N = \{1, ..., n\}$ *es un conjunto finito de jugadores y* v *es una función* $v : 2^N \to \mathbb{R}$ *tal que* $v(\phi) = 0$.

A los subconjuntos S de N se les llama *coaliciones* y son subconjuntos de jugadores que potencialmente pueden jugar unidos. Si los jugadores que forman S juegan unidos tienen una valía $v(S)$. Como ejemplo, las cantidades $v(S)$ pueden ser ganancias conjuntas, costos comúnes o simplemente 1 o 0 dependiendo de si la coalición S logra o no mayoría en una votación. De cualquier forma a $v(S)$, siempre lo consideraremos como un número real. A este tipo de juegos se les conoce como juegos en forma de función característica con pagos laterales o transferibles.

Se supone que cada uno de los jugadores conoce la función v. Además, ellos negocian libremente para formar coaliciones. Si la coalición S se forma tiene una valía $v(S)$. Una coalición se considera formada no sólo cuando los jugadores que la constituyen han decidido jugar unidos, sino que también han acordado la forma de repartir la ganancia conjunta.

Claramente, los jugadores que pertenecen a coaliciones valiosas son valiosos en el juego, pero el problema es cuantificar esta valía. Se desea asignar a cada juego (N, v) un vector $x \in \mathbb{R}^n$, donde x_i sea o represente la valía "justa" del jugador i en el juego. Por esta razón, a cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$ se le llama vector de pago. Algunos conceptos de solución se limitan a asignar un conjunto de vectores de pago al juego. A grandes rasgos, este es el problema central que se aborda en este tipo de juegos.

Ejemplo 2 *El problema de la bancarrota.*

Un problema de bancarrota consiste esencialmente en un par (C, d), donde C es un número real positivo que representa el capital disponible para hacer frente a las demandas de un conjunto $N = \{1, ..., n\}$ de acreedores. Cada acreedor demanda una cantidad positiva d_i, $1 \leq i \leq n$, existiendo problema cuando no pueden cubrirse la totalidad de las demandas, esto es:

$$C < \sum_{i \in N} d_i$$

Para estudiar este tipo de situaciones, se propone un juego cooperativo con utilidad transferible definido en la forma

$$v(S) = \text{máx} \left\{ 0, C - \sum_{i \in N \setminus S} d_i \right\}, \quad \text{para todo } S \subseteq N$$

En esta definición, $v(S)$ representa la cantidad que los miembros de la coalición S pueden garantizarse en la situación más desfavorable para ellos, es decir, en el caso en que los acreedores de $N \setminus S$ reciben, si es posible, todas sus demandas.

Un caso particular de este problema podría ser aquel en que:

$$C = 100; \; d_1 = 25, \; d_2 = 50, \; d_3 = 75$$

La función característica para este supuesto es:

$$v(\{1\}) = 0 \qquad v(\{2\}) = 0 \qquad v(\{3\}) = 25$$

$$v(\{1, 2\}) = 25 \qquad v(\{1, 3\}) = 50 \qquad v(\{2, 3\}) = 75$$

$$v(\{1,2,3\}) = 100$$

Ejemplo 3 *Problemas de asignación de costos o reparto de beneficios.*

Bajo este epígrafe se recogen numerosas situaciones que se caracterizan por el hecho de que un grupo de usuarios comparte un servicio común o bien obtiene una serie de ventajas al actuar conjuntamente frente a una determinada oferta. En general, cada agente individual está interesado en obtener cierto bien o servicio y el hecho de actuar conjuntamente crea el problema de asignar los costos comunes de la obtención o, en forma paralela, de repartir los beneficios de la actuación conjunta.

Para concretar un caso particular se citará el siguiente: un distribuidor imputa un costo de 100 *unidades monetarias por el suministro de su materia a cada uno de los potenciales usuarios, que designaremos por* 1, 2, 3, 4*. Por las características de la distribución, ya sean geográficas o técnicas de infraestructura, el costo para el suministro conjunto a cada una de las agrupaciones de usuarios es el que se expresa mediante la siguiente función c de costos:*

$$c(\{1\}) = 100 \quad c(\{2\}) = 100 \quad c(\{3\}) = 100 \quad c(\{4\}) = 100$$

$$c(\{1,2\}) = 120 \quad c(\{1,3\}) = 150 \quad c(\{1,4\}) = 160$$

$$c(\{2,3\}) = 150 \quad c(\{2,4\}) = 150 \quad c(\{3,4\}) = 130$$

$$c(\{1,2,3\}) = 210 \quad c(\{1,2,4\}) = 220 \quad c(\{1,3,4\}) = 230$$

$$c(\{2,3,4\}) = 250 \quad c(\{1,2,3,4\}) = 250$$

Los usuarios pueden ser individuos, empresas o ciudades que desean recibir un determinado suministro de la materia que se considere. El juego recoge la situación que se ha planteado, tiene como conjunto de jugadores $N = \{1,2,3,4\}$ *y su función característica es c, donde cada* $c(S)$ *es el costo del suministro a la coalición* S*. Si se acepta la oferta de la empresa distribuidora para el suministro conjunto, el problema que se plantea es el de repartir entre los usuarios el costo global de las* 250 *unidades monetarias, de manera que dicho reparto pueda ser asumido por todos ellos.*

El enunciado anterior corresponde a la óptica del problema de reparto de costos entre usua-

rios de un servicio común. Desde otro punto de vista, por el hecho de actuar conjuntamente, se produce un beneficio para cada coalición que puede expresarse mediante la función

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)$$

Ahora el juego (N, v) *con* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *y función característica* v *recoge el beneficio que obtiene cada coalición de usuarios respecto al costo del suministro individual:*

$$v(\{1\}) = 0 \quad v(\{2\}) = 0 \quad v(\{3\}) = 0 \quad v(\{4\}) = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = 80 \quad v(\{1, 3\}) = 50 \quad v(\{1, 4\}) = 40$$

$$v(\{2, 3\}) = 50 \quad v(\{2, 4\}) = 50 \quad v(\{3, 4\}) = 70$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 90 \quad v(\{1, 2, 4\}) = 80 \quad v(\{1, 3, 4\}) = 70$$

$$v(\{2, 3, 4\}) = 50 \qquad v(1, 2, 3, 4\}) = 150$$

Con este planteamiento, el problema que surge es el de repartir el beneficio total de 150 *unidades monetarias entre los cuatro usuarios.*

2.1 Valor de Shapley

En 1953 Shapley enfoca el problema de la siguiente manera: forma el conjunto G de todos los juegos superaditivos[1] con n jugadores y define un operador

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^n$$

con lo que obtiene que cualquiera que éste sea, en menor o mayor medida resuelve todos los juegos en G y el problema de resolver todos los juegos en G lo cambia a seleccionar una "buena" φ. Para ello, pide que este operador satisfaga tres axiomas: simetría, aditividad, y un tercero que engloba eficiencia y nulidad, y demuestra que existe un único operador que los satisface. A

[1] Un juego v se dice superaditivo si y sólo si, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ para toda S y T en N tales que $S \cap T = \phi$.

continuación se presenta una variante de su trabajo.

Es fácil ver que, tanto el conjunto de juegos con espacio de jugadores $N = \{1, ..., n\}$, como el subconjunto de juegos superaditivos sobre el mismo espacio, forman un espacio vectorial sobre el campo de los números reales si se define la suma y el producto como sigue:

(a) $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$ para todo $v, w \in G$

(b) $(cv)(S) = cv(S)$ para todo $v \in G$ y $c \in \mathbb{R}$

donde G denota a cualquiera de estos conjuntos, convención que se mantendrá a lo largo del trabajo.

Definición 4 *Se dirá que φ es aditivo si y sólo si $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ para todo $v, w \in G$.*

Ahora considere un juego y suponga que los jugadores intercambian papeles. Adicionalmente, suponga que cualquier grupo de jugadores logra la misma ganancia que la que conseguían en el juego original los jugadores a los que sustituyen. El axioma de simetría pide que el vector de pagos asociado a este nuevo juego, sea la permutación correspondiente del vector de pago asociado al juego original; dicho brevemente, si los jugadores intercambian papeles, entonces deben intercambiar pagos. A continuación se precisa esta idea.

En lo sucesivo se denotará por $\Theta = \{\theta \mid \theta : N \to N,\ \theta \text{ biyectiva}\}$ y por

$$\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}$$

Es decir Θ contiene todos los órdenes totales que se pueden definir sobre el conjunto N, o si se quiere, a todas las permutaciones de los n jugadores. Cada θ se interpretará como un intercambio de papeles en el juego, en particular el jugador i pasará a tomar el papel del jugador $\theta(i)$. A continuación se define formalmente el significado de las frases "formar un juego intercambiando papeles" y el de "intercambiar pagos".

Para cada pareja $(\theta, v) \in \Theta \times G$ se define un nuevo juego $\theta * v$ por:

$$(\theta * v)(S) = v(\theta^{-1}(S))$$

y para cada pareja $(\theta, x) \in \Theta \times \mathbb{R}^n$ se define un nuevo vector en $\mathbb{R}^n$, $\theta * x$ donde su i-ésima coordenada está dada por $(\theta * v)_i = x_{\theta(i)}$.

Estas definiciones se pueden interpretar como sigue: para $(\theta, v) \in \Theta \times G$ dado, se desea que $\theta * v$ represente el juego después de que los jugadores hayan intercambiado papeles de acuerdo a θ, como los jugadores en S suplantan a los que están en $\theta(S)$, entonces lo que debe poder conseguir S en $\theta * v$ es lo que podía conseguir $\theta(S)$ en v, es decir, $(\theta * v)(S) = v(\theta(S))$. Ahora, el pago que recibe el jugador i con $\theta * x$ es el que recibía $\theta(i)$ con x.

Definición 5 *Se dirá que φ satisface simetría si y sólo si $\varphi(\theta * v) = \theta\varphi(v)$ para todo $(\theta, v) \in \Theta \times G$.*

Es decir, la solución φ es simétrica si y sólo si para cualquier $(\theta, v) \in \Theta \times G$, el monto que le asigna φ a cada jugador i en $\theta * v$ (éste es $\varphi_i(\theta * v)$) es el mismo que el que φ le asigna al jugador que suplanta en v (es decir $\varphi_{\theta(i)}(v)$).

Definición 6 *Se dirá que φ es eficiente si y sólo si $\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v) = v(N)$ para todo $v \in G$.*

En otras palabras, el monto que se reparte entre todos los jugadores bajo φ es exactamente el monto $v(N)$ que puede conseguir la gran coalición.

Definición 7 *Se dirá que i es un jugador nulo en v si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N$.*

Definición 8 *Se dirá que φ satisface nulidad si y sólo si $\varphi_i(N, v) = 0$ cuando i es un jugador nulo en v.*

Alguien que sólo juegue el papel de observador del juego, debe ser excluido de la repartición.

Teorema 9 (Shapley, 1953) *Existe un único operador $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ que satisface aditividad, eficiencia, nulidad y simetría y está dado por:*

$$\varphi_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right]$$

A este operador se le conoce como el Valor de Shapley.

La solución $\varphi_i(N,v) = \sum\limits_{S\subseteq N\backslash\{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}\left[v(S\cup\{i\}) - v(S)\right]$ es un "compromiso razonable" para cada uno de los jugadores. Para comprender mejor su significado, considere el siguiente proceso aleatorio:

(a) Se elige la cardinalidad de una coalición que no contenga al jugador i de acuerdo a una distribución uniforme sobre el conjunto $\{0, ..., n-1\}$.

(b) Se elige aleatoriamente una coalición S con la cardinalidad dada en a), de acuerdo a una distribución uniforme sobre las $\binom{n-1}{s}$ coaliciones disponibles.

(c) Se le da al jugador i la utilidad marginal que aporta a $v(N)$ al incorporarse a S, es decir, $v(S\cup\{i\}) - v(S)$.

Entonces, $\varphi_i(N,v)$ es el pago esperado para el jugador i en este proceso.

Así, el pago que el Valor de Shapley asigna a cada jugador es una media ponderada de las contribuciones marginales de ese jugador a las coaliciones a las que se incorpora. Los factores de ponderación $\frac{1}{n\binom{n-1}{s}}$ forman una distribución de probabilidad sobre dichas coaliciones, al escoger de modo equiprobable el cardinal de la coalición y, posteriormente, una de las coaliciones de dicho cardinal.

Otra expresión para $\varphi_i(v)$ es:

$$\varphi_i(N,v) = \frac{1}{n!}\sum_R \left(v(P_i^R\cup\{i\}) - v(P_i^R)\right)$$

donde P_i^R es el conjunto de jugadores que preceden a i en el orden R. Para ver que estas expresiones son iguales, sólo hay que notar que

$$\left|\{R \mid P_i^R = S\}\right| = s!(n-s-1)!$$

Con esta expresión, si se elige al azar un orden R de N con una distribución uniforme sobre los $n!$ órdenes posibles y le da al jugador i la utilidad marginal que aporta a $v(N)$ cuando se incorpora a los jugadores que lo preceden, $\left(v(P_i^R\cup\{i\}) - v(P_i^R)\right)$, entonces, $\varphi_i(v)$ es el pago esperado que obtiene i.

Análogamente, el Valor de Shapley es el valor esperado por cada jugador cuando considerando todas las posibles ordenaciones de los jugadores de N como igualmente probables, cada jugador recibe como pago su contribución marginal a la coalición formada por todos los jugadores que le preceden.

Ejemplo 10 ***(a)*** *El Valor de Shapley para el juego de la bancarrota que se había considerado anteriormente, en el que* $C = 100$, $d = (25, 50, 75)$, *es:*

$$\varphi(N, v) = \left(\frac{50}{3}, \frac{175}{6}, \frac{325}{6}\right) \approx (16.6667, 29.1667, 54.1667)$$

Esta solución comparada con el reparto proporcional a las demandas $\left(\frac{50}{3}, \frac{100}{3}, 50\right) \approx (16.6667, 33.3333, 50)$, *beneficia al tercer jugador y perjudica al segundo.*

(b) *En el problema de asignación de costos planteado anteriormente, el reparto de las* 250 *unidades monetarias del costo global del suministro a los cuatro usuarios es, según la solución de Shapley, el siguiente:*

$$\varphi(N, v) = (55, 60, 65, 70)$$

Desde el enfoque del reparto de las 150 *unidades de beneficio que se genera por la contratación en común del suministro, el Valor de Shapley establece la siguiente solución:*

$$\varphi(N, v) = (45, 40, 35, 30)$$

Se observa que, como $\varphi_i(N, v) = c(\{i\}) - \varphi_i(N, c)$, *para cada jugador* i. *Este resultado era de esperar, por la propiedad de aditividad; de esta manera puede entenderse la asignación de costos y el reparto de beneficios como problemas complementarios uno del otro.*

Ejemplo 11 *Los organismos de decisión.*

La Teoría de Juegos dedica especial atención a modelar los sistemas de representación y de toma de decisiones que se rigen por mecanismos de votación, ya sean de carácter político, como parlamentos de diferentes naciones u organizaciones supranacionales, o de carácter económico, como consejos de administración de corporaciones o de empresas.

El análisis de estas situaciones se establece por medio de los índices de poder, que reflejan las posibilidades estratégicas de los diferentes miembros de un organismo en el sentido de influir *en el resultado de las decisiones que se adopten, a través de las coaliciones ganadoras a las que pertenecen. Los índices de poder muestran su utilidad a la hora de estudiar los efectos de los cambios de composición de los organismos o de la modificación de las reglas de votación.*

En el modelo de juego que se emplea para estas situaciones, el conjunto N de jugadores está formado por los miembros del organismo que se estudie (parlamentos, partidos políticos, paises, accionistas); la función de utilidad corresponde a un juego simple[2]*, de manera que $v(S) = 1$ si los miembros de S son capaces de aprobar por sí solos una propuesta, mientras que $v(S) = 0$, en caso contrario. Una coalición S es ganadora si $v(S) = 1$ y perdedora si $v(S) = 0$.*

Una clase especialmente interesante de juegos simples es la formada por los llamados juegos de mayoría ponderada; uno de tales juegos consiste en una terna (N, w, q) donde $N = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores, $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ con $w_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, es una distribución de pesos y $q > \frac{1}{2}\sum_{j \in N} w_j$ es la cuota. Habitualmente un juego de mayoría ponderada se representa por

$$[q; w_1, w_2, ..., w_n]$$

con función característica

$$v(S) = \begin{cases} 1 & si \sum_{j \in S} w_j \geq q \\ 0 & si \sum_{j \in S} w_j < q \end{cases}$$

Este tipo de juegos permite modelar situaciones en las que se supone disciplina de voto: los jugadores son partidos políticos o grupos del tipo unificado que sea, cuyos pesos corresponden al número de miembros de la agrupación en cuestión, siendo q la mayoría exigida para ganar la votación.

El índice de poder de Shapley-Shubik tiene por expresión

$$\varphi_i(v) = \sum_{\substack{S \text{ ganando} \\ S \backslash \{i\} \text{ perdiendo}}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

Considérese un ejemplo que concierne al Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas: Quince naciones pertenecen a tal consejo, cinco son miembros permanentes (China, Francia,

[2] *Se dice que un juego es simple ssi $v(S) = 0$ ó 1 para toda $S \subseteq N$ y $v(N) = 1$.*

Reino Unido, Unión Soviética y Estados Unidos), y 10 miembros no permanentes (Canadá, Colombia, Cuba, Etiopía, Finlandia, Costa de Marfil, Malasia, Rumania, Yemen y Zaire). La investigación de la disputa y aplicación de sanciones, las decisiones requieren voto a favor de al menos nueve miembros, incluyendo los cinco miembros permanentes. Si un miembro permanente vota en contra, la resolución no pasa. Este sistema, obviamente, da a cada miembro permanente un mayor poder que un miembro no permanente. Pero, ¿qué tan mayor?.

Este problema se puede modelar como un juego de mayoría ponderada. Cada miembro permanente espera siete votos, cada miembro no permanente un voto. La cuota es de 39 votos. Una resolución sólo pasará si los cinco miembros permanentes (35 votos) y por lo menos cuatro miembros no permanentes (4 votos) están a favor. Así pues, el juego se representa por

$$[39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

Aunque, como se verá, esto no significa que un miembro permanente sea siete veces más poderoso que un miembro no permanente.

Se tendrán coaliciones ganadoras siempre que contenga a los cinco miembros permanentes y al menos cuatro de los miembros no permanentes; entonces habrá coaliciones ganadoras de tamaño 9, *10, 11, 12, 13, 14 y* 15. *Por lo que el índice de poder de Shapley-Shubik para un miembro permanente está dado por*

$$\begin{aligned}\varphi_{perm}(v) &= \binom{10}{4}\frac{8!6!}{15!} + \binom{10}{5}\frac{9!5!}{15!} + \binom{10}{6}\frac{10!4!}{15!} + \binom{10}{7}\frac{11!3!}{15!} \\ &\quad + \binom{10}{8}\frac{12!2!}{15!} + \binom{10}{9}\frac{13!1!}{15!} + \binom{10}{10}\frac{14!}{15!}\end{aligned}$$

Así entonces,

$$\varphi_{perm}(v) = \frac{421}{2145} = 0.1962703963 \approx 19.627\%$$

Y para un miembro no permanente, el índice de poder es

$$\varphi_{no\ perm}(v) = \binom{9}{3}\frac{8!6!}{15!} = \frac{4}{2145} = 0.001864801865 \approx 0.18645\%$$

De lo que se concluye que un miembro permanente es aproximadamente 100 *veces más poderoso* *que un miembro no permanente.*

2.2 Valor de Banzhaf

Otro de los valores que por varios años se trató de axiomatizar es el Valor de Banzhaf. Owen (1982) propone una axiomatización que no lo determina unívocamente. Dubey y Shapley (1979) establecen algunas de sus propiedades. La axiomatización que se presenta en esta sección se debe a Lehrer (1988).

Definición 12 *Una solución* φ *es lineal en* G *si* $\varphi(N, av + bw) = a \cdot \varphi(N, v) + b \cdot \varphi(N, w)$ *para todo* $(N, v), (N, w) \in G$ *y* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $(N, av + bw) \in G$.

Definición 13 *Para cada coalición* $T \subseteq N$ *se deriva un juego* v_T *amalgamando los jugadores de* T *en uno solo; a este jugador se le llamará* T'. *El espacio de jugadores para* v_T *es* $N \backslash T \cup \{T'\}$, *y se define por:*

$$v_T(S) = v(S)$$

$$v_T(S \cup \{T'\}) = v(S \cup T)$$

donde $S \subseteq N \backslash T$.

Definición 14 *Se dirá que* φ *satisface el axioma de reducción si y sólo si* $\varphi_i(v) + \varphi_j(v) \leq \varphi_{T'}(v_T)$ *para cualquier coalición* $T = \{i, j\}$ *de dos jugadores.*

El axioma de reducción establece que para cualquier coalición de dos jugadores $T = \{i, j\}$ la suma de los valores de i y j en el juego original es menor o igual al valor de T' en el nuevo juego. Si φ satisface este axioma, amalgamar cualesquiera dos jugadores es productivo para ellos. El Valor de Banzhaf para el jugador i correspondiente al juego v con n jugadores es el siguiente:

$$\varphi_i(N, v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N \backslash \{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

En un juego simple, el Valor de Banzhaf del jugador i, es el número de coaliciones perdedoras que se vuelven ganadoras cuando se les incorpora el jugador i, dividido entre el número de coaliciones que no lo contienen (incluyendo al vacío), con el fin de que el valor quede entre 0 y 1. La expresión anterior es una forma de generalizar esta idea.

Lema 15 *Si φ es el Valor de Banzhaf, entonces $\varphi_i(N,v)+\varphi_j(N,v)\leq\varphi_T(v_T)$ para toda coalición $T=\{i,j\}$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
2^{n-1}\cdot\big(\varphi_i(N,v)+\varphi_j(N,v)\big) &= \sum_{S\subseteq N}[v(S\cup\{i\})-v(S)]+\sum_{S\subseteq N}[v(S\cup\{j\})-v(S)] \\
&= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}}[v(S\cup\{i\})-v(S)+v(S\cup\{i,j\})-v(S\cup\{j\})] \\
&\quad+\sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}}[v(S\cup\{j\})-v(S)+v(S\cup\{i,j\})-v(S\cup\{i\})] \\
&= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}}[v(S\cup\{i,j\})-v(S)]=2\cdot2^{n-2}\cdot\varphi_T(v_T)
\end{aligned}$$

■

Teorema 16 (Lehrer, 1988) *φ satisface los axiomas de nulidad, simetría, linealidad y reducción si y sólo si φ es el Valor de Banzhaf en G.*

El Valor de Banzhaf es, como el Valor de Shapley, una media ponderada de las contribuciones marginales de cada jugador a las coaliciones a las que se incorpora; en este caso, los coeficientes de ponderación son todos iguales a $\frac{1}{2^{n-1}}$, de forma que el peso de cada coalición a la que se le incorpora un jugador $i\in N$ es siempre el mismo.

Ejemplo 17 ***(a)*** *El Valor de Banzhaf para el juego de la bancarrota mencionado anteriormente es:*

$$\varphi(N,v)=\left(\frac{75}{4},\frac{125}{4},\frac{225}{4}\right)=(18.75,31.25,56.25)$$

de manera que las 100 unidades monetarias del capital C disponible se repartirían entre los acreedores en la forma

$$\left(\frac{300}{17},\frac{500}{17},\frac{900}{17}\right)=(17.6471,29.4118,52.9412)$$

este reparto beneficia a los dos primeros acreedores frente al tercero que recibe una cantidad ligeramente inferior a la que le correspondería por la solución de Shapley.

(b) *Para el problema de asignación de costos y reparto de beneficios, el Valor de Banzhaf del juego* v *correspondiente al reparto de beneficios es:*

$$\varphi(N,v) = \left(\frac{85}{2}, 40, 35, 30\right) = (42.5, 40, 35, 30)$$

lo cual supone el siguiente reparto proporcional de las 150 *unidades de beneficio entre los cuatro jugadores*

$$\left(\frac{2550}{59}, \frac{2400}{59}, \frac{2100}{59}, \frac{1800}{59}\right) = (43.2203, 40.6780, 35.5932, 30.5085)$$

Otra vez el jugador más beneficiado en la solución de Shapley resulta ligeramente desfavorecido en la solución de Banzhaf.

Ejemplo 18 *Considérese el ejemplo del Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas:*

Aquí, el índice de poder de Banzhaf tiene por expresión

$$\varphi(v) = \sum_{\substack{S \ ganando \\ S\backslash\{i\} \ perdiendo}} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Por lo que, es claro que el índice de poder de Banzhaf para un miembro permanente es:

$$\varphi_{perm}(v) = \frac{1}{2^{14}}\left[\binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}\right]$$

Así entonces,

$$\varphi_{perm}(v) = \frac{53}{1024} = 0.0517578125$$

mientras que para un miembro no permanente:

$$\varphi_{no\ perm}(v) = \frac{1}{2^{14}}\binom{9}{3} = \frac{21}{4096} = 0.005126953$$

En forma porcentual, el poder de un miembro permanente es aproximadamente del 16.6923% *y para un miembro no permanente es aproximadamente del* 1.6535%.

2.3 Valor de Shapley Ponderado

Uno de los principales axiomas que caracterizan el Valor de Shapley es el de simetría. La motivación que subyace para usar este axioma es el supuesto de que excepto por los parámetros del juego, los jugadores deben ser completamente simétricos. Por ejemplo, en el juego (N, v), donde $N = \{1,2\}$ y $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0$, $v(\{1,2\}) = 1$, el suponer simetría en el papel de los jugadores conduce a la solución $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Sin embargo la falta de simetría puede darse por ejemplo,

(a) Se requiere un esfuerzo mayor por parte de alguno de los jugadores.

(b) Un jugador puede representar a muchos agentes mientras que el otro sólo a pocos.

(c) Los jugadores tienen diferentes habilidades.

(d) Se pueden construir problemas de asignación de costos sin esta simetría.

Para corregir la distribución de las ganancias cuando se carezca de esta simetría, el Valor de Shapley Ponderado considera un vector de ponderaciones para los jugadores dado externamente.

De hecho, modifica las soluciones de los juegos de la base usual y por medio de la linealidad determina la solución de los demás.

Definición 19 *Se dirá que v es monótono si y sólo si $v(S) \leq v(T)$ para S y T tales que $S \subseteq T$.*

Definición 20 *Se dirá que φ es positivo si y sólo si cuando v sea monótono se tiene que $\varphi(v) \geq 0$.*

Definición 21 *Se dirá que S es una coalición natural de socios en el juego v, si para cada $T \subset S$ ($T \neq S$) y $R \subseteq N \backslash S$, $v(R \cup T) = v(R)$.*

Una coalición natural de socios se debe comportar como un solo individuo, ya que ninguna subcoalición propia tiene poder. En la siguiente definición $\varphi v(S)$ denota el real $\sum\limits_{k \in S} \varphi_k(v)$.

Definición 22 *Se dirá que φ satisface el axioma de sociedad si cada vez que S es una coalición natural de socios en v se tiene que $\varphi_i(v) = \varphi_i(\varphi v(S) u_S)$ para todo $i \in S$.*

La interpretación de este axioma es la siguiente: se espera que cada coalición natural de socios juegue como un solo individuo en v y negocie lo obtenido entre sus elementos en forma independiente.

Para cada $S \subseteq N$, el juego de unanimidad (N, u_S) se define como sigue: $u_S(T) = 1$ si $S \subseteq T$, y $u_S(T) = 0$ de otra forma.

Definición 23 *El Valor de Shapley Ponderado con un sistema de ponderación simple $w \in \mathbb{R}^n$, $w > 0$, es un mapeo lineal $Sh^w : G \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada juego de unanimidad u_S:*

$$Sh^w(N, u_S) = \begin{cases} \frac{w_i}{w(S)} & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde $w(S) = \sum\limits_{i \in S} w_i$.

Los pesos son exógenos y deben ser determinados por consideraciones tales como la habilidad de los jugadores al negociar o experiencia pasada. Los axiomas no proveen sugerencia alguna de cómo deban ser.

Teorema 24 (Kalai y Samet, 1987) *Una solución φ satisface los axiomas de eficiencia, aditividad, positividad, nulidad y sociedad si y sólo si existe $w > 0$ tal que $\varphi \equiv Sh^w$.*

2.4 Potencial

Considérese el problema de distribuir algún recurso (o costo, ganancia, etcétera) entre n participantes (agentes económicos, proyectos, departamentos,...). Supóngase que la situación es bien descrita como un juego n-personal en forma de función característica. El problema que se aborda es el de desarrollar principios generales para repartir $v(N)$ entre los jugadores.

Primeramente, se procedería asignando a cada jugador su contribución marginal a la gran coalición (i.e., el conjunto de todos los jugadores). Aunque, es obvio que en general, no es posible resolver el problema de esta forma. Esto es simplemente porque estas contribuciones marginales no suman exactamente la valía de la gran coalición.

Aquí, se introduce un nuevo concepto analítico con afinidades claras a la contribución marginal. Se propone que a cada problema descrito como un juego n-personal se le asigne un simple número (llamado el *Potencial* del juego) y que cada jugador reciba su contribución marginal (calculado de acuerdo a estos números). El hecho sorprendente es que uno puede repartir exactamente $v(N)$ entre todos los jugadores y además que este reparto es único. Más aún, la solución resultante es bien conocida: es el Valor de Shapley.

A continuación, se formalizan las ideas descritas anteriormente:

Sea G el conjunto de todos los juegos. Dada una función $P : G \to \mathbb{R}$ la cual asocia un número real[3] $P(N, v)$ a cada juego (N, v), la contribución marginal de un jugador en un juego es definida como

$$D^i P(N, v) = P(N, v) - P(N \backslash \{i\}, v),$$

donde (N, v) es un juego e $i \in N$; el subjuego $(N \backslash \{i\}, v)$ es la restricción de (N, v) a $N \backslash \{i\}$.

Una función $P : G \to \mathbb{R}$ con $P(\phi, v) = 0$ es llamada una *función potencial* si satisface la siguiente condición:

$$\sum_{i \in N} D^i P(N, v) = v(N) \tag{2.1}$$

para todo juego (N, v). Así, una función potencial es tal que la repartición de contribuciones marginales (de acuerdo a la función potencial) siempre suma exactamente la valía de la gran coalición.

Teorema 25 *Existe una única función potencial P. Para cada juego (N, v), el vector de pagos resultante $(D^i P(N, v))_{i \in N}$ coincide con el Valor de Shapley del juego.*

Demostración. La fórmula (2.1) puede ser reescrita como

$$P(N, v) = \frac{1}{n} \left[v(N) + \sum_{i \in N} P(N \backslash \{i\}, v) \right] \tag{2.2}$$

Empezando con $P(\phi, v) = 0$, se determina $P(N, v)$ recursivamente. Esto prueba la existencia de la función potencial P, y más aún que $P(N, v)$ es determinada unívocamente por (2.1) (o (2.2)) aplicado a (S, v) para todo $S \subset N$.

Luego, se expresa (N, v) como una combinación lineal de juegos de unanimidad: $v = \sum\limits_{T \subset N} a_T u_T$, donde u_T es el juego T-unanimidad, definido por $u_T(S) = 1$ si $S \subseteq T$ y $u_T(S) = 0$

[3] Por simplificación, escribimos $P(N, v)$ en vez de $P((N, v))$

de otra forma (esta descomposición existe y es única). Definimos $d_T = \frac{a_T}{t}$ y ponemos

$$P(N,v) = \sum_T d_T \tag{2.3}$$

Es fácil ver que (2.1) se satisface para esta P, por lo que (2.3) define la única función potencial. El resultado ahora sigue de que $Sh_i(N,v) = \sum_{T \ni i} d_T$. ■

Para otra interpretación del potencial, se deriva una fórmula explícita ((2.1) lo define sólo implícitamente). Considérese el siguiente modelo de escoger al azar un subconjunto S de un conjunto dado N con $n = |N|$ elementos: Primero, un tamaño $s \in \{1, 2, ..., n\}$ es tomado aleatoriamente (cada uno con probabilidad $\frac{1}{n}$). Segundo, un subconjunto S de N de tamaño s es tomado aleatoriamente (con probabilidad $\frac{1}{\binom{n}{s}}$, donde $s = |S|$). Equivalentemente, uno puede ordenar los n elementos (hay $n!$ órdenes), se escoge un tamaño s (hay n posibles), y se toman los primeros s elementos en el orden. Sea E la esperanza con respecto a esta distribución de probabilidad.

Proposición 26 *Sea P la función potencial. Entonces*

$$P(N,v) = E\left[\frac{n}{s}v(S)\right]$$

para cada juego (N,v).

Demostración. Usando las probabilidades explícitas descritas anteriormente, se tiene que mostrar que

$$P(N,v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v(S) \tag{2.4}$$

La contribución marginal $D^i P$ de (2.4) es fácil ver que conincide con el Valor de Shapley; por lo que (2.4) es la función potencial. ■

Ejemplo 27 *Si se considera el juego de la bancarrota con $(C;d) = (100; 25, 50, 75)$, los potenciales de este juego (N,v) y de todos sus subjuegos (S,v) con $S \subset N$, $S \neq \phi$, son:*

$$P(\{1\},v) = 0 \quad P(\{2\},v) = 0 \quad P(\{3\},v) = 25$$

$$P(\{1,2\},v)=\frac{25}{2}\quad P(\{1,3\},v)=\frac{75}{2}\quad P(\{2,3\},v)=50$$

$$P(\{1,2,3\},v)=\frac{200}{3}$$

Puede comprobarse que se cumple:

$$P(\{1,2,3\},v)-P(\{2,3\},v)=\frac{50}{3}=\varphi_1(N,v)$$

$$P(\{1,2,3\},v)-P(\{1,3\},v)=\frac{175}{6}=\varphi_2(N,v)$$

$$P(\{1,2,3\},v)-P(\{1,2\},v)=\frac{325}{6}=\varphi_3(N,v)$$

y lo mismo sucede con los valores de Shapley de todos los subjuegos de (N,v).

Capítulo 3

Consistencia

Una de las propiedades importantes en la tarea de axiomatizar soluciones en juegos cooperativos, es la de consistencia. En 1980 Thomson introdujo esta noción; él supone un juego (N, v) y que se paga a los jugadores en N de acuerdo a φ, entonces al aplicar de nuevo la solución φ y querer repartir $\sum_{i \in S} \varphi_j(N, v)$ entre los jugadores que pertenecen a S, coincide precisamente con la solución original.

Aquí en este trabajo, la forma de presentar el axioma de consistencia se debe al artículo de Hart y Mas-Colell. Consistencia puede ser descrita informalmente como sigue: sea φ una función que asocia un pago a cada jugador en cada juego. Para cada grupo de jugadores en un juego, se define un juego reducido entre ellos, dando al resto de los jugadores pagos de acuerdo a φ. Entonces φ se dice ser consistente si, cuando es aplicado a cada juego reducido, conserva los mismos pagos que en el juego original.

Formalmente, sean φ una función solución definida en G, (N, v) un juego, e $i \in N$. Se define el *juego reducido* $(N \backslash \{i\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}})$ (definir el juego reducido es saber qué valía tendrán las coaliciones $S \subset N \backslash \{i\}$) y se dice que la solución φ es consistente si, para todo juego (N, v) y toda coalición $N \backslash \{i\} \subset N$, se cumple que

$$\varphi_j(N\backslash\{i\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}}) = \varphi_j(N, v), \text{ para todo } j \in N\backslash\{i\} \tag{3.1}$$

3.1 Consistencia en el Valor de Shapley

Aquí se verá la axiomatización del Valor de Shapley basada en la propiedad de consistencia. Para ello, primero definiremos un juego reducido de la siguiente forma:

Definición 28 *Sea φ una función solución, (N, v) un juego (con $n \geq 3$) e $i \in N$. El juego reducido $(N \backslash \{i\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}})$ se define como*

$$v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}}(S) = v(S \cup \{i\}) - \varphi_i(S \cup \{i\}, v), \text{ para todo } S \subset N\backslash\{i\} \tag{3.2}$$

La interpretación es como sigue: dada una función solución φ, un juego (N, v) y una coalición $N\backslash\{i\} \subset N$, los miembros de $N\backslash\{i\}$ (o, más preciso, cada subcoalición de $N\backslash\{i\}$) necesitan considerar el pago total restante después de pagar a i de acuerdo a φ. Para calcular la valía de la coalición $S \subset N\backslash\{i\}$ (en el juego reducido), se supone que los miembros de $(N\backslash\{i\})\backslash S$ no están presentes; en otras palabras, se considera el juego $(S \cup \{i\}, v)$, en el que los pagos son distribuidos según φ. Lo apropiado de esta definición de juego reducido depende, por supuesto, en la situación particular que se esté modelando.

Nótese que uno usualmente cae en funciones soluciones eficientes. En este caso, (3.2) puede ser reescrita como

$$v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}}(S) = \sum_{j \in S} \varphi_j(S \cup \{i\}, v) \tag{3.3}$$

Además, si φ es una solución eficiente y consistente, entonces necesariamente

$$v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}}(N\backslash\{i\}) = \sum_{j \in N\backslash\{i\}} \varphi_j(N\backslash\{i\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}}) = \sum_{j \in N\backslash\{i\}} \varphi_j(N, v) = v(N) - \varphi_i(N, v)$$

que es exactamente (3.2) para $S = N\backslash\{i\}$. Si uno quiere la definición de $v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}}(S)$ que sea siempre de acuerdo a la misma regla, entonces (3.2) resulta para todo $S \subseteq N\backslash\{i\}$.

Proposición 29 *El Valor de Shapley es una función solución consistente con respecto al juego reducido (3.2).*

Demostración. Se usará el potencial P, como se definió en (2.1). Sea (N, v) un juego y sea $i \in N$; se escribirá v_{-i} en vez de $v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}}$, donde $\varphi = Sh$. Ya que Sh es eficiente, se tiene que para todo $S \subset N\backslash\{i\}$:

$$\begin{aligned} v_{-i}(S) &= v(S\cup\{i\}) - Sh_i(S\cup\{i\},v) = \sum_{j\in S} Sh_j(S\cup\{i\},v) \\ &= \sum [P(S\cup\{i\},v) - P(S\cup\{i\}\backslash\{j\},v)] \end{aligned}$$

Por el Teorema 25, la fórmula (2.1) aplicada a $(N\backslash\{i\}, v_{-i})$ y a todos sus subjuegos determina su potencial unívocamente. Comparando esto con las igualdades anteriores, se obtiene que $P(S, v_{-i})$ y $P(S\cup\{i\}, v)$ pueden diferir sólo por una constante[1]

$$P(S, v_{-i}) = P(S\cup\{i\}, v) + c$$

Así,

$$\begin{aligned} Sh_j(N\backslash\{i\}, v_{-i}) &= P(N\backslash\{i\}, v_{-i}) - P(N\backslash\{i,j\}, v_{-i}) \\ &= P(N,v) - P(N\backslash\{j\}, v) \\ &= Sh_j(N,v) \end{aligned}$$

■

Hay una definición alterna de juego reducido para poder hacer el Valor de Shapley una función solución consistente. Y es como se presenta a continuación:

Definición 30 *Con un juego n-personal (N,v), un jugador $i \in N$, y su pago $\varphi_i \in \mathbb{R}$ (con $n \geq 3$), hay un juego reducido asociado $(N\backslash\{i\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}})$ con conjunto de jugadores $N\backslash\{i\}$ definido por*

$$v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}}(S) = \frac{s}{n-1}\left[v(S\cup\{i\}) - \varphi_i(N,v)\right] + \frac{n-1-s}{n-1} v(S) \quad \text{para todo } S \subseteq N\backslash\{i\} \tag{3.4}$$

Teorema 31 (Sobolev, 1973) *El Valor de Shapley en G es consistente con respecto al juego reducido (3.4).*

[1] De que $P(\phi, v_{-i}) = 0$ se sigue que $c = -P(\{i\}, v)$

Lo que resta ahora, es mostrar de qué forma se axiomatiza una función solución usando la propiedad de consistencia. Para ello, se debe precisar el comportamiento de la solución en cuestión para juegos de dos jugadores.

Definición 32 *Una función solución φ es estándar para juegos de dos jugadores si*

$$\varphi_i(\{i,j\},v) = v(\{i\}) + \frac{1}{2}\left[v(\{i,j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})\right] \tag{3.5}$$

para todo $i \neq j$ y toda v.

Así, el excedente $[v(\{i,j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})]$ es repartido equitativamente entre los dos jugadores. La mayoría de las soluciones satisfacen esta propiedad, en particular, el Valor de Shapley.

Teorema 33 *Sea φ una función solución. Entonces:*

(i) *φ es consistente con respecto al juego reducido (3.2); y*

(ii) *φ es estándar para juegos de dos jugadores;*

si y sólo si φ es el Valor de Shapley.

Demostración. Una dirección es inmediata (considerando la última proposición).

Para la otra dirección, supóngase que φ satisface (i) y (ii). Primero, se pide que φ sea eficiente, i.e.,

$$\sum_{i\in N}\varphi_i(N,v) = v(N) \tag{3.6}$$

para todo juego (N,v). Esto efectivamente se cumple para $n=2$ por (3.5). Sea $n \geq 3$, y supóngase que (3.6) se cumple para todos los juegos con menos de n jugadores. Para un juego (N,v), sea $i \in N$; por consistencia

$$\sum_{j\in N}\varphi_j(N,v) = \sum_{j\in N\backslash\{i\}}\varphi_j(N\backslash\{i\},v_{-i}) + \varphi_i(N,v)$$

donde $v_{-i} = v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}}$. Por suposición, φ es eficiente para todo juego con $n-1$ jugadores; entonces

$$\sum_{j\in N}\varphi_j(N,v) = v_{-i}(N\backslash\{i\}) + \varphi_i(N,v) = v(N)$$

(por definición de v_{-i}). Por lo que, φ es eficiente para todo $n \geq 2$.

Finalmente, para $n = 1$, se tiene que mostrar que $\varphi_i(\{i\}, v) = v(\{i\})$. En efecto, sea $v(\{i\}) = c$, y considérese el juego $(\{i,j\}, \overline{v})$ (para alguna $j \neq i$), con $\overline{v}(\{i\}) = \overline{v}(\{i,j\}) = c$, $\overline{v}(\{j\}) = 0$. Por (ii), $\varphi_i(\{i,j\}, \overline{v}) = c$ y $\varphi_j(\{i,j\}, \overline{v}) = 0$; por lo que, $\overline{v}_{-j}(\{i\}) = c - 0 = c = v(\{i\})$, y $c = \varphi_i(\{i,j\}, \overline{v}) = \varphi_i(\{i\}, \overline{v}_{-i})$ por consistencia. Esto concluye la prueba de la eficiencia de φ.

Luego, se demostrará que φ admite un potencial. Para ese fin, se define la función Q en el conjunto de todos los juegos con a lo más dos jugadores por

$$\begin{aligned} Q(\phi, v) &= 0 \\ Q(\{i\}, v) &= v(\{i\}) \\ Q(\{i,j\}, v) &= \frac{1}{2}\left[v(\{i\}) + v(\{j\}) + v(\{i,j\})\right] \end{aligned}$$

para todo v y toda $i \neq j$. Es fácil ver que, para todo juego (N, v) con $n = 2$:

$$\varphi_i(N, v) = Q(N, v) - Q(N\backslash\{i\}, v) \tag{3.7}$$

para todo $i \in N$.

Ahora se mostrará que Q puede ser extendido a todos los juegos (N, v), en un sentido de que (3.7) siempre se cumpla. Junto con eficiencia (3.6), esto implica (2.1); por lo tanto Q es de hecho el potencial P, y φ es el Valor de Shapley.

Una vez más, se usa inducción: Sea $n \geq 3$, y supóngase que Q ha sido definida, y más aún que satisface (3.7), para todos los juegos de a lo más $n - 1$ jugadores. Fíjese un juego (N, v). Se tiene que mostrar que

$$\varphi_i(N, v) + Q(N\backslash\{i\}, v)$$

es el mismo para todo $i \in N$ (y entonces éste será $Q(N, v)$). Sea $i, j \in N$, $i \neq j$, y sea $k \in N$, $k \neq i, j$ (k existe, ya que $n \geq 3$).

Se tiene que (por consistencia y (3.7) para $n-1$)

$$\begin{aligned}
\varphi_i(N,v) - \varphi_j(N,v) &= \\
&= \varphi_i(N\backslash\{k\}, v_{-k}) - \varphi_j(N\backslash\{k\}, v_{-k}) \\
&= [Q(N\backslash\{k\}, v_{-k}) - Q(N\backslash\{i,k\}, v_{-k})] \\
&\quad - [Q(N\backslash\{k\}, v_{-k}) - Q(N\backslash\{j,k\}, v_{-k})] \\
&= [Q(N\backslash\{j,k\}, v_{-k}) - Q(N\backslash\{i,j,k\}, v_{-k})] \\
&\quad - [Q(N\backslash\{i,k\}, v_{-k}) - Q(N\backslash\{i,j,k\}, v_{-k})]
\end{aligned}$$

Aplicando de nuevo (3.7) (para $n-2$) y consistencia:

$$\begin{aligned}
&= \varphi_i(N\backslash\{j,k\}, v_{-k}) - \varphi_j(N\backslash\{i,k\}, v_{-k}) \\
&= \varphi_i(N\backslash\{j\}, v) - \varphi_j(N\backslash\{i\}, v) \\
&= [Q(N\backslash\{j\}, v) - Q(N\backslash\{i,j\}, v)] \\
&\quad - [Q(N\backslash\{i\}, v) - Q(N\backslash\{i,j\}, v)] \\
&= Q(N\backslash\{j\}, v) - Q(N\backslash\{i\}, v)
\end{aligned}$$

donde de nuevo se usó (3.7) (para $n-1$). Esto completa la demostración. ■

3.2 Consistencia en el Valor de Banzhaf

Recuérdese que el Valor de Banzhaf para el jugador i correspondiente al juego v con n jugadores es el siguiente:

$$\varphi_i(N,v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N\backslash\{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)] \qquad \text{para todo } \ i \in N$$

Para ver la consistencia en el Valor de Banzhaf considérese la siguiente definición de juego reducido:

Definición 34 *Sea φ una función solución y (N,v) un juego (con $n \geq 3$). Se define el juego* *reducido* $(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}})$ *como*

$$v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[v(N) + v(N\backslash\{k\}) - v(\{k\})\right] & si\ S = N\backslash\{k\} \\ \frac{1}{2}\left[v(S) - v(N\backslash S)\right] & si\ \phi \neq S \subset N\backslash\{k\} \\ 0 & si\ S = \phi \end{cases} \tag{3.8}$$

Es interesante poder axiomatizar este valor usando sólo dos axiomas (consistencia y solución estándar para juegos de dos jugadores); a continuación se muestra la forma de hacerlo en el siguiente teorema:

Teorema 35 *Sea φ una función solución. Entonces:*

(i) *φ es consistente con respecto al juego reducido (3.8); y*

(ii) *φ es estándar para juegos de dos jugadores;*

si y sólo si φ es el Valor de Banzhaf.

Demostración. Primero, supóngase que φ es exactamente el Valor de Banzhaf; así pues se tiene que demostrar que φ es consistente y que además es estándar para juegos de dos jugadores.

Para verificar que el Valor de Banzhaf es consistente, se aplicará este valor en el juego reducido $(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}})$. Nótese que al jugador j en $N\backslash\{k\}$ le corresponde

$$\varphi_j(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{S\subseteq N\backslash\{j,k\}} \left[v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S\cup\{j\}) - v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S)\right]$$

Así pues, usando la definición de juego reducido (3.8) en la expresión anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} 2^{n-2}\cdot\varphi_j(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) &= \sum_{S\subseteq N\backslash\{j,k\}} \left[v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S\cup\{j\}) - v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S)\right] \\ &= \sum_{\substack{S\subseteq N\backslash\{j,k\}\} \\ S\neq\phi, S\neq N\backslash\{j,k\}}} \left[v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S\cup\{j\}) - v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S)\right] + v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(\{j\}) \\ &\quad -v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(\phi) + v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(N\backslash\{k\}) - v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(N\backslash\{j,k\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \sum_{\substack{S\subseteq N\backslash\{j,k\}\}\\ S\neq\phi, S\neq N\backslash\{j,k\}}} \left[v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S\cup\{j\}) - v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S)\right] + \left[v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(\{j\}) - v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(\phi)\right] \\
& \quad + \left[v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(N\backslash\{k\}) - v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(N\backslash\{j,k\})\right] \\
= & \sum_{\substack{S\subseteq N\backslash\{j,k\}\\ S\neq\phi, S\neq N\backslash\{j,k\}}} \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} [v(S\cup\{j\}) - v(N\backslash S\cup\{j\})] - [v(S) - v(N\backslash S)] + v(\{j\}) - v(N\backslash\{j\}) \\ +v(N) + v(N\backslash\{k\}) - v(\{k\}) - v(N\backslash\{j,k\}) + v(\{j,k\}) \end{array}\right\} \\
= & \frac{1}{2}\left\{\sum_{S\subseteq N\backslash\{j,k\}} [v(S\cup\{j\}) - v(S)] + \sum_{S\ni\{j,k\}} [v(N\backslash S) - v(N\backslash S\cup\{j\})]\right\}
\end{aligned}$$

Véase que en la segunda suma, la valía $v(N\backslash S)$ corresponde a valías de coaliciones que contienen a $\{j,k\}$; mientras que la valía $v(N\backslash S\cup\{j\})$ corresponde a valías de coaliciones que contienen a $\{k\}$, pero no a $\{j\}$. Por lo que se puede hacer el siguiente cambio:

$$\begin{aligned}
\varphi_j(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{\{k\}}) &= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\sum_{S\subseteq N\backslash\{j,k\}} [v(S\cup\{j\}) - v(S)] + \sum_{S\subseteq N\backslash\{j\}, S\ni\{k\}} [v(S\cup\{j\}) - v(S)]\right\} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{S\subseteq N\backslash\{j\}} [v(S\cup\{j\}) - v(S)] \\
&= \varphi_j(N,v)
\end{aligned}$$

Y es fácil ver que el Valor de Banzhaf es estándar para juegos de dos jugadores, ya que para $N=\{i,j\}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_i(N,v) &= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}} [v(S\cup\{i\}) - v(S)] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{S\subseteq\{j\}} [v(S\cup\{i\}) - v(S)] \\
&= v(\{i\}) + \frac{1}{2}[v(\{i,j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})]
\end{aligned}$$

Finalmente, se demostrará la otra implicación. Aquí se supondrá que φ es consistente con respecto al juego reducido (3.8) y que es estándar para juegos de dos jugadores.

Así entonces, como φ es estándar para dos jugadores, se cumple que para $k \in \{i, j\}$:

$$\begin{aligned}\varphi_k(\{i,j\}, v_1) &= v_1(\{k\}) + \frac{1}{2}\left[v_1(\{i,j\}) - v_1(\{i\}) - v_1(\{j\})\right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{S \ni k \\ S \subseteq \{i,j\}}} \left[v_1(S) - v_1(\{i,j\} \backslash S)\right]\end{aligned}$$

Si se hace $T_1 = \{i, j\}$ y usando la definición de juego reducido (3.8), se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi_k(T_1, v_1) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{S \ni k \\ S \subseteq T_1}} \left[v_1(S) - v_1(T_1 \backslash S)\right] \\ &= \frac{1}{2^2} \sum_{\substack{S \ni k \\ S \subseteq T_2}} \left[v_2(S) - v_2(T_2 \backslash S)\right] \\ &= \varphi_k(T_2, v_2)\end{aligned}$$

Nótese que al usar el juego reducido en un paso, ocasiona que tal solución se extienda al caso de $|T_2| = 3$ jugadores; de hecho, $T_1 \subset T_2$ y $|T_2 \backslash T_1| = 1$. Si se sigue este proceso aplicando la definición de juego reducido (según (3.8)) en $n-2$ pasos, sucede que

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2^3} \sum_{\substack{S \ni k \\ S \subseteq T_3}} \left[v_3(S) - v_3(T_3 \backslash S)\right] \\ &\ \vdots \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{\substack{S \ni k \\ S \subseteq T_{n-2}}} \left[v_{n-2}(S) - v_{n-2}(T_{n-2} \backslash S)\right] \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{S \ni k \\ S \subseteq T_{n-1}}} \left[v_{n-1}(S) - v_{n-1}(T_{n-1} \backslash S)\right] \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{S \ni k \\ S \subseteq N}} \left[v_{n-1}(S) - v_{n-1}(N \backslash S)\right]\end{aligned}$$

donde $N = T_{n-1}$, $|N| = |T_{n-1}| = n$. Además $T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \cdots \subset T_{n-2} \subset N$ y $|T_{l+1} \backslash T_l| = 1$ para $l = 1, 2, 3, ..., n-2$ (esto es, que en cada paso, se está considerando a un jugador más).

La demostración se concluye de que la última igualdad es una expresión alterna para el Valor de Banzhaf. ■

Ejemplo 36 *Considérese el juego de utilidad transferible de 3 jugadores:*

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	10	2	6	18	23	11	30

La solución al juego $(\{1,2,3\}, v)$ *según el Valor de Banzhaf es* $\varphi(\{1,2,3\}, v) = \left(\frac{31}{2}, \frac{11}{2}, 10\right)$.

Si ahora uno supone que el jugador 3 *sale del juego (asignándole el valor* 10 *de acuerdo al Valor de Banzhaf), y sólo se toma en cuenta el juego reducido* $(\{1,2\}, v^{\varphi}_{\{1,2\}})$. *Tal juego está definido por:*

$$v^{\varphi}_{\{1,2\}}(\{1,2\}) = \frac{1}{2}\left[v(\{1,2,3\}) + v(\{1,2\}) - v(\{3\})\right] = \frac{1}{2}\left[30 + 18 - 6\right] = 21$$

$$v^{\varphi}_{\{1,2\}}(\{1\}) = \frac{1}{2}\left[v(\{1\}) - v(\{2,3\})\right] = \frac{1}{2}\left[10 - 11\right] = -\frac{1}{2}$$

$$v^{\varphi}_{\{1,2\}}(\{2\}) = \frac{1}{2}\left[v(\{2\}) - v(\{1,3\})\right] = \frac{1}{2}\left[2 - 23\right] = -\frac{21}{2}$$

Véase que la solución de acuerdo al Valor de Banzhaf del juego $(\{1,2\}, v^{\varphi}_{\{1,2\}})$ es*:*

$$\varphi(\{1,2\}, v^{\varphi}_{\{1,2\}}) = \left(\frac{31}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

Que es precisamente el Valor de Banzhaf correspondiente al juego original.

3.3 Consistencia en soluciones de división de excesos

En esta sección se pretende unificar una clase de soluciones para juegos de utilidad transferible que sugieran algo de equidad, en el sentido de que se asigne a cada jugador algún pago inicial y reparta el resto de $v(N)$ en partes iguales entre todos los jugadores. Ejemplos de este tipo de soluciones son las soluciones CIS, $ENSC$ y la solución *Igualitaria* (EG). La solución CIS

asigna a cada jugador su valía individual y reparte por igual el resto de $v(N)$. La solución $ENSC$ asigna a cada jugador su contribución marginal a la gran coalición y reparte el resto de $v(N)$ por igual entre todos los jugadores; de hecho, es la solución CIS aplicada a su juego dual. La solución EG sólo reparte $v(N)$ equitativamente entre todos los jugadores.

La solución CIS está dada por

$$CIS_i(N,v) = v(\{i\}) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j\in N} v(\{j\})\right] \quad \text{para todo } i \in N$$

El juego dual (N, v^*) del juego (N, v) es el juego que asigna a cada coalición $S \subseteq N$ la ganancia que es perdida por la gran coalición N si la coalición S deja N, es decir,

$$v^*(S) = v(N) - v(N\backslash S) \quad \text{para todo } S \subseteq N$$

La solución $ENSC$ queda determinada por la solución CIS aplicada al juego (N, v^*), es decir,

$$\begin{aligned} ENSC_i(N,v) &= CIS_i(N,v^*) = v^*(\{i\}) + \frac{1}{n}\left[v^*(N) - \sum_{j\in N} v^*(\{j\})\right] \\ &= v(N) - v(N\backslash\{i\}) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j\in N}\left(v(N) - v(N\backslash\{j\})\right)\right] \\ &= -v(N\backslash\{i\}) + \frac{1}{n}\left[v(N) + \sum_{j\in N} v(N\backslash\{j\})\right] \quad \text{para todo } i \in N \end{aligned}$$

Las soluciones anteriores sugieren algo de equidad, en el sentido de que se reparte de forma equitativa el excedente que es dejado después de que todos los jugadores reciben algún pago individual. Ignorando tales pagos individuales, se obtiene la solución Igualitaria (EG), dada por

$$EG_i(N,v) = \frac{v(N)}{n} \quad \text{para todo } i \in N$$

Tómese un juego (N, v), un vector de pagos $x \in \mathbb{R}^n$, y un jugador $j \in N$. El conjunto de jugadores de un juego reducido es obtenido al remover al jugador j del conjunto original de jugadores N. Las valías de las coaliciones en este juego reducido refleja lo que éstas coaliciones pueden ganar si el jugador j deja el juego con su pago x_j. La valía de la coalición $N\backslash\{j\}$ en el juego reducido es igual a la valía de N menos el valor x_j asignado al jugador j. Claramente, esto es lo que tiene que ser repartido entre los jugadores en $N\backslash\{j\}$ después de que el jugador j sale del juego con su pago x_j. Para las otras coaliciones $S \subset N\backslash\{j\}$ supóngase que cada coalición que represente una mayoría tiene la cooperación del jugador j (pero tiene que pagar x_j a j) y cada coalición que represente una minoría no tiene tal cooperación, i.e. la coalición $S \subset N\backslash\{j\}$ gana $v(S \cup \{j\}) - x_j$, si $s > \frac{n-1}{2}$, y gana $v(S)$ si $s < \frac{n-1}{2}$. Si S no representa una mayoría o minoría, entonces se supondrá que con probabilidad $\beta \in [0,1]$ no tiene la cooperación del jugador j (y así gana $v(S)$) y con probabilidad $1-\beta$ tiene la cooperación del jugador j (y así gana $v(S \cup \{j\}) - x_j$). Esto lleva a la siguiente definición de juego reducido:

Definición 37 *Tómese $\beta \in [0,1]$. Dado un juego con $n \geq 3$, un jugador $j \in N$ y un vector de pagos $x \in \mathbb{R}^n$, el juego reducido con respecto a j y x es el juego $(N\backslash\{j\}, v^{x,\beta})$ dado por*

$$v^{x,\beta}(S) = \begin{cases} v(N) - x_j & si\ S = N\backslash\{j\} \\ v(S \cup \{j\}) - x_j & si\ \frac{n-1}{2} < s < n-1 \\ \beta v(S) + (1-\beta)(v(S \cup \{j\}) - x_j) & si\ s = \frac{n-1}{2} \\ v(S) & si\ s < \frac{n-1}{2} \end{cases} \tag{3.9}$$

Definición 38 *Sea ψ una función solución en G. Se dice que la solución ψ satisface β-consistencia si para cada juego (N,v) con $n \geq 3$, $j \in N$ y $x = \psi(N,v)$ se tiene que*

$$\psi_i(N\backslash\{j\}, v^{x,\beta}) = \psi_i(N,v) \quad para\ todo\ i \in N\backslash\{j\}$$

Consistencia implica que dado un juego (N,v), si x es un vector de pagos solución para (N,v), entonces para cada jugador $j \in N$, el vector de pagos $x_{N\backslash\{j\}}$ con pagos para los jugadores en $N\backslash\{j\}$, debe ser un vector de pagos solución para el juego reducido$(N\backslash\{j\}, v^{x,\beta})$.

Ahora, para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in [0,1]$, la solución queda determinada unívocamente por

$$\varphi_i^{\alpha,\beta}(N,v) = \lambda_i^{\alpha,\beta}(N,v) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j\in N}\lambda_i^{\alpha,\beta}(N,v)\right] \tag{3.10}$$

donde

$$\lambda_i^{\alpha,\beta}(N,v) = \alpha\left[\beta v(\{i\}) - (1-\beta)v(N\backslash\{i\})\right] \quad \text{para } i \in N$$

Se denota la clase de todas las soluciones que se obtienen de este modo por $\Phi = \{\varphi^{\alpha,\beta} \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in [0,1]\}$. Estas soluciones sugieren algo de "equidad": a cada jugador i en el juego (N,v) se le da el valor $\lambda_i^{\alpha,\beta}(N,v)$ y se reparte el resto de $v(N)$ en partes iguales entre todos los jugadores.

Es importante notar que un jugador i obtendrá por lo menos lo que puede obtener por su cuenta si, la gran coalición acuerda jugar con φ (según (3.10)) y que se cumpla que

$$\sum_{j\in N} v(\{j\}) \leq v(N)$$

Proposición 39 *Tómese cualquier $\beta \in [0,1]$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ la solución $\varphi^{\alpha,\beta}$ satisface β-consistencia (de acuerdo a (3.9))en la clase de todos los juegos en G.*

Demostración. Tómese cualquier $\beta \in [0,1]$, fíjese un $\alpha \in \mathbb{R}$ y considérese cualquier juego $(N,v) \in G$. Con un abuso de notación, se utilizará v^x en vez de $v^{x,\beta}$. Primero, supóngase que $n \geq 4$. Para $x = \varphi^{\alpha,\beta}(N,v)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\lambda_i^{\alpha,\beta}(N\backslash\{j\}, v^x) &= \alpha(\beta v^x(\{i\}) - (1-\beta)v^x(N\backslash\{i,j\})) && (3.11)\\
&= \alpha(\beta v(\{i\}) - (1-\beta)v(N\backslash\{i\}) - x_j) && (3.12)\\
&= \lambda_i^{\alpha,\beta}(N,v) + (1-\beta)x_j && (3.13)
\end{aligned}$$

ya que en ese caso $|\{i\}| < \frac{n-1}{2}$ y $|N\backslash\{i,j\}| > \frac{n-1}{2}$. Hacemos $\lambda_i = \lambda_i^{\alpha,\beta}(N,v)$ y $\lambda_i^x = \lambda_i^{\alpha,\beta}(N\backslash\{j\}, v^x)$ con $x = \varphi^{\alpha,\beta}(N,v)$, $i \in N$. Entonces de (3.11) se sigue que

$$\begin{aligned}
\varphi_i^{\alpha,\beta}(N\backslash\{j\}, v^x) &= \lambda_i^x + \frac{1}{n-1}\left(v^x(N\backslash\{j\} - \sum_{k\in N\backslash\{j\}} \lambda_k^x\right)\\
&= \lambda_i + (1-\beta)x_j + \frac{1}{n-1}\left(v(N) - x_j - \sum_{k\in N\backslash\{j\}} (\lambda_k + (1-\beta)x_j)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda_i + (1-\beta)x_j + \frac{1}{n-1}\left(v(N) - \lambda_j - \frac{1}{n}\left(v(N) - \sum_{k\in N}\lambda_k\right) - \sum_{k\in N\setminus\{j\}}\lambda_k\right) \\
&\quad -(1-\beta)x_j \\
&= \lambda_i + \frac{1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\left(v(N) - \sum_{k\in N}\lambda_k\right)\right) \\
&= \varphi_i^{\alpha,\beta}(N,v)
\end{aligned}
$$

Segundo, considérese el caso $n = 3$. Sea $x = \varphi^{\alpha,\beta}(N,v)$, $\overline{\beta} = 1-\beta$ y $N = \{i,j,k\}$. (Nótese que $n = 3$ implica que i, j y k son distintos jugadores). Obsérvese que

$$
\begin{aligned}
\varphi_i^{\alpha,\beta}(N,v) &= \alpha\left(\beta v(\{i\}) - \overline{\beta}v(N\setminus\{i\})\right) + \frac{1}{3}\left(v(N) - \sum_{l\in N}\alpha\left(\beta v(\{l\}) - \overline{\beta}v(N\setminus\{l\})\right)\right) \\
&= \alpha\left(\beta v(\{i\}) - \overline{\beta}v(\{j,k\})\right) \\
&\quad + \frac{1}{3}\left[\begin{array}{c} v(N) - \alpha\beta v(\{i\}) - \alpha\beta v(\{j\}) - \alpha\beta v(\{k\}) \\ +\alpha\overline{\beta}v(\{j,k\}) + \alpha\overline{\beta}v(\{k,i\}) + \alpha\overline{\beta}v(\{i,j\}) \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

De la definición de la solución y del juego reducido, y del hecho de que para este juego de 3 jugadores $|\{i\}| = |\{j\}| = \frac{n-1}{2}$ se tiene que para $x = \varphi^{\alpha,\beta}(N,v)$

$$
\begin{aligned}
\varphi_i^{\alpha,\beta}(N\setminus\{k\}, v^x) &= \varphi_i^{\alpha,\beta}(\{i,j\}, v^x) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(v^x(\{i\}) - v^x(\{j\})\right) + \frac{1}{2}v^x(\{i,j\}) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(\left(\beta v(\{i\}) + \overline{\beta}v(\{i,k\}) - \overline{\beta}x_k\right) - \left(\beta v(\{j\}) + \overline{\beta}v(\{j,k\}) - \overline{\beta}x_k\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} v(N) - \alpha\left(\beta v(\{k\}) - \overline{\beta}v(\{i,j\})\right) \\ -\frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} v(N) - \alpha\beta v(\{i\}) - \alpha\beta v(\{j\}) - \alpha\beta v(\{k\}) \\ +\alpha\overline{\beta}v(\{j,k\}) + \alpha\overline{\beta}v(\{k,i\}) + \alpha\overline{\beta}v(\{i,j\}) \end{array}\right) \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\alpha\beta v(\{i\}) - \alpha\overline{\beta} v(\{j,k\})\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} -\alpha\beta v(\{i\}) + \alpha\overline{\beta} v(\{i,k\}) \\ -\alpha\beta v(\{j\}) + \alpha\overline{\beta} v(\{j,k\}) \end{array}\right) \\
&\quad +\frac{1}{3}\left(v(N) - \alpha\beta v(\{k\}) + \alpha\overline{\beta} v(\{i,j\}))\right) \\
&\quad -\frac{1}{6}\left(-\alpha\beta v(\{i\}) - \alpha\beta v(\{j\}) + \alpha\overline{\beta} v(\{j,k\}) + \alpha\overline{\beta} v(\{k,i\})\right) \\
&= \alpha\left(\beta v(\{i\}) - \overline{\beta} v(\{j,k\})\right) + \frac{1}{3}\left(v(N) - \alpha\beta v(\{k\}) + \alpha\overline{\beta} v(\{i,j\})\right) \\
&\quad -\alpha\beta v(\{i\}) - \alpha\beta v(\{j\}) + \alpha\overline{\beta} v(\{j,k\}) + \alpha\overline{\beta} v(\{k,i\}) \\
&= \varphi_i^{\alpha,\beta}(N,v)
\end{aligned}
$$

Esto completa la demostración. ■

Véase que para valores particulares de α y β se obtienen algunas soluciones conocidas:

1. Si se toman $\alpha = \beta = 1$, se obtiene la solución

$$\varphi_i^{1,1}(N,v) = CIS_i(N,v)$$

2. Tomando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, se obtiene la solución

$$\varphi_i^{1,0}(N,v) = ENSC_i(N,v)$$

3. Claramente, la solución Igualitaria se obtiene tomando $\alpha = 0$. Es decir,

$$\varphi_i^{0,\beta}(N,v) = EG_i(N,v)$$

4. Si se toman $\alpha \in [0,1]$ y $\beta = 1$, esto determina una solución que asigna a cada jugador una fracción α de su valía individual y se reparte el resto de $v(N)$ en partes iguales entre todos los jugadores. Es decir,

$$\varphi_i^{\alpha,1}(N,v) = \alpha \cdot v(\{i\}) + \frac{1}{n}\left(v(N) - \sum_{j\in N} \alpha \cdot v(\{j\})\right)$$

Ahora bien, considérese en particular las soluciones CIS y $ENSC$. Se mostrará que tales soluciones son consistentes desde otra perspectiva en su definición de juego reducido.

Anteriormente se mencionó que la solución CIS asigna a cada jugador su valía individual y distribuye el excedente en partes iguales entre todos los jugadores. Es decir,

$$CIS_i(N,v) = v(\{i\}) + E(N,v) \qquad\qquad \text{para todo } \ i \in N$$

donde el operador $E : G \to \mathbb{R}$ denota la parte del excedente que le corresponde a cada jugador, la cual está dada por

$$E(N,v) = \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j\in N} v(\{j\})\right]$$

Así, esta solución es un concepto de solución central en términos de equidad. Más aún, es particularmente útil para clases de juegos en donde sólo se espera la completa cooperación de todos los jugadores o la no cooperación. Otra posible interpretación podría ser que sólo se tenga información acerca de los dos extremos del juego: los valores individuales y el valor de la gran coalición; o simplemente cuando uno no esté interesado en la cooperación parcial.

Ahora, se presenta una nueva definición de juego reducido con el fin de hacer la solución CIS consistente:

Definición 40 *Sea φ una función solución, (N,v) un juego ($n \geq 3$) y $T \subset N$. Definimos el juego reducido (T, v_T^{φ}) como*

$$v_T^{\varphi}(S) = \begin{cases} v(N) - \sum\limits_{i\in N\setminus T} \varphi_i(N,v) & si\ S = T \\ v(S) & si\ s = 1 \\ 0 & si\ S = \phi \end{cases} \tag{3.14}$$

Proposición 41 *La solución CIS es una función solución consistente con respecto al juego reducido (3.14).*

Demostración. Usando la solución CIS ($\varphi = CIS$) en el juego reducido (T, v_T^{φ}), a cada jugador en T le corresponde

$$\varphi_i(T, v_T^{\varphi}) = v(\{i\}) + E(T, v_T^{\varphi}) \tag{3.15}$$

donde,

$$E(T, v_T^{\varphi}) = \frac{1}{t}\left[v_T^{\varphi}(T) - \sum_{j\in T} v_T^{\varphi}(\{j\})\right] = \frac{1}{t}\left[\left(v(N) - \sum_{i\in N\setminus T}\varphi_i(N,v)\right) - \sum_{j\in T} v(\{j\})\right]$$

Nótese que, para demostrar que la solución CIS es una función solución consistente, basta con demostrar que $E(N,v) = E(T, v_T^{\varphi})$. En efecto, nótese que φ es eficiente, ya que

$$\sum_{i\in N}\varphi_i(N,v) = \sum_{i\in N}\left[v(\{i\}) + \frac{1}{n}\left(v(N) - \sum_{j\in N} v(\{j\})\right)\right] = v(N)$$

por lo que,

$$v(N) - \sum_{i\in N\setminus T}\varphi_i(N,v) = \sum_{i\in T}\varphi_i(N,v)$$

Además, por (3.15)

$$\sum_{i\in T}\varphi_i(N,v) = \sum_{j\in T} v(\{j\}) + t\cdot E(N,v)$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
E(T, v_T^{\varphi}) &= \frac{1}{t}\left[\left(v(N) - \sum_{i\in N\setminus T}\varphi_i(N,v)\right) - \sum_{j\in T} v(\{j\})\right] = \frac{1}{t}\left[\sum_{i\in T}\varphi_i(N,v) \quad - \sum_{j\in T} v(\{j\})\right] \\
&= \frac{1}{t}\left[\left(\sum_{j\in T} v(\{j\}) + t\cdot E(N,v)\right) - \sum_{j\in T} v(\{j\})\right] = \frac{1}{t}\left[t\cdot E(N,v)\right] \\
&= E(N,v)
\end{aligned}$$

Así pues, se concluye que

$$\varphi_i(T, v_T^{\varphi}) = \varphi_i(N,v)$$

■

Ejemplo 42 *Considérese el juego de utilidad transferible de 3 jugadores:*

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	10	2	6	18	23	11	30

La parte de excedente que le corresponde a cada jugador es:

$$E(\{1,2,3\},v) = \frac{v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}) - v(\{3\})}{3} = \frac{30 - 10 - 2 - 6}{3} = 4$$

Por lo que la solución CIS aplicada a este juego, es:

$$\begin{aligned} CIS_1(\{1,2,3\},v) &= v(\{1\}) + E(\{1,2,3\},v) = 10 + 4 = 14 \\ CIS_2(\{1,2,3\},v) &= v(\{2\}) + E(\{1,2,3\},v) = 2 + 4 = 6 \\ CIS_3(\{1,2,3\},v) &= v(\{3\}) + E(\{1,2,3\},v) = 6 + 4 = 10 \end{aligned}$$

Ahora, supóngase que primero se le paga al jugador 2 de acuerdo a la solución CIS; es decir, se le asigna $CIS_2(\{1,2,3\},v) = 6$ y se le considera fuera del juego. Así, el juego reducido resulta:

$$\begin{aligned} &v^{CIS}_{\{1,3\}}(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) - CIS_2(\{1,2,3\},v) = 30 - 6 = 24 \\ &v^{CIS}_{\{1,3\}}(\{1\}) = v(\{1\}) = 10 \\ &v^{CIS}_{\{1,3\}}(\{3\}) = v(\{3\}) = 6 \end{aligned}$$

Entonces, la parte de excedente para cada jugador en $\{1,3\}$ será:

$$E(\{1,3\},v^{CIS}_{\{1,3\}}) = \frac{v^{CIS}_{\{1,3\}}(\{1,3\}) - v^{CIS}_{\{1,3\}}(\{1\}) - v^{CIS}_{\{1,3\}}(\{3\})}{2} = \frac{24 - 10 - 6}{2} = 4$$

que coincide exactamente con $E(\{1,2,3\},v)$.
Finalmente, aplicando la solución CIS al juego $(\{1,3\},v^{CIS}_{\{1,3\}})$, resulta que

$$\begin{aligned} CIS_1(\{1,3\},v^{CIS}_{\{1,3\}}) &= v^{CIS}_{\{1,3\}}(\{1\}) + E(\{1,3\},v^{CIS}_{\{1,3\}}) = 10 + 4 = 14 \\ CIS_3(\{1,3\},v^{CIS}_{\{1,3\}}) &= v^{CIS}_{\{1,3\}}(\{3\}) + E(\{1,3\},v^{CIS}_{\{1,3\}}) = 6 + 4 = 10 \end{aligned}$$

que corresponde precisamente con $CIS_1(\{1,2,3\},v)$ y $CIS_3(\{1,2,3\},v)$, del juego original.

Por último, para la solución $ENSC$ también se propone otra definición de juego reducido, en donde se maneja la misma idea que para la solución CIS (se conserva la parte de excedente para cada jugador en el juego reducido). Así pues, la solución $ENSC$ asigna a cada jugador su contribución marginal a la gran coalición y reparte el resto de $v(N)$ por igual entre todos los jugadores:

$$ENSC_i(N, v) = -v(N\backslash\{i\}) + E'(N, v)$$

para todo $i \in N$ y donde el operador $E' : G \to \mathbb{R}$ denota la parte del excedente que le corresponde a cada jugador, la cual está dada por

$$E'(N, v) = \frac{1}{n}\left[v(N) + \sum_{j \in N} v(N\backslash\{j\})\right]$$

Definición 43 *Sea φ una función solución, (N, v) un juego $(n \geq 3)$ y $k \in N$. Se define el juego reducido $(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}})$ como*

$$v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S) = \begin{cases} v(N) - \varphi_k(N, v) & si\ S = N\backslash\{k\} \\ v(S \cup \{k\}) & si\ s = n-2 \\ 0 & si\ S = \phi \end{cases} \tag{3.16}$$

Proposición 44 *La solución $ENSC$ es una función solución consistente con respecto al juego reducido (3.16).*

Demostración. Usando la solución $ENSC$ ($\varphi = ENSC$) en el juego reducido $(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}})$, a cada jugador en $N\backslash\{k\}$ le corresponde

$$\begin{aligned} \varphi_i(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) &= -v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(N\backslash\{i,k\}) + E'(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) \\ &= -v(N\backslash\{i\}) + E'(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) \end{aligned}$$

donde,

$$E'(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) = \frac{1}{n-1}\left[v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(N\backslash\{k\}) + \sum_{j \in T} v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(N\backslash\{j,k\})\right]$$

De nuevo aquí, para demostrar que la solución $ENSC$ es una función solución consistente, basta con demostrar que coinciden las partes de excedente para los juegos (N, v) y $(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}})$. Es decir, demostrar que $E'(N, v) = E'(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}})$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
E'(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) &= \frac{1}{n-1}\left[v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(N\backslash\{k\}) + \sum_{j\in T} v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(N\backslash\{j,k\})\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[v(N) - \varphi_k(N,v) + \sum_{j\in N\backslash\{k\}} v(N\backslash\{j\})\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[v(N) + v(N\backslash\{k\}) - \frac{1}{n}\left(v(N) + \sum_{j\in N} v(N\backslash\{j\})\right) + \sum_{j\in N\backslash\{k\}} v(N\backslash\{j\})\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[v(N) + \sum_{j\in N} v(N\backslash\{j\}) - \frac{1}{n}\left(v(N) + \sum_{j\in N\backslash\{k\}} v(N\backslash\{j\})\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[v(N) + \sum_{j\in N} v(N\backslash\{j\})\right] \\
&= E'(N,v)
\end{aligned}$$

Así pues, se concluye que

$$\varphi_i(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) = \varphi_i(N, v)$$

■

Ejemplo 45 *Considérese el juego anterior de utilidad transferible de 3 jugadores. La parte de excedente que le corresponde a cada jugador es:*

$$E(\{1,2,3\}, v) = \frac{v(\{1,2,3\}) + v(\{2,3\}) + v(\{1,3\}) + v(\{1,2\})}{3} = \frac{30+11+23+18}{3} = \frac{82}{3}$$

Por lo que la solución $ENSC$ aplicada a este juego, es:

$$\begin{aligned}
ENSC_1(\{1,2,3\}, v) = -v(\{2,3\}) + E'(\{1,2,3\}, v) = -11 + \tfrac{82}{3} = \tfrac{49}{3} \\
ENSC_2(\{1,2,3\}, v) = -v(\{1,3\}) + E'(\{1,2,3\}, v) = -23 + \tfrac{82}{3} = \tfrac{13}{3} \\
ENSC_3(\{1,2,3\}, v) = -v(\{1,2\}) + E'(\{1,2,3\}, v) = -18 + \tfrac{82}{3} = \tfrac{28}{3}
\end{aligned}$$

Ahora, supóngase que primero se le paga al jugador 3 *de acuerdo a la solución $ENSC$; es decir,* *se le asigna* $ENSC_3(\{1,2,3\},v) = \frac{28}{3}$ *y se le considera fuera del juego. Así, el juego reducido resulta:*

$$v^{ENSC}_{\{1,2\}}(\{1,2\}) = v(\{1,2,3\}) - ENSC_3(\{1,2,3\},v) = 30 - \tfrac{28}{3} = \tfrac{62}{3}$$
$$v^{ENSC}_{\{1,2\}}(\{1\}) = v(\{1,3\}) = 23$$
$$v^{ENSC}_{\{1,2\}}(\{2\}) = v(\{2,3\}) = 11$$

Entonces, la parte de excedente para cada jugador en $\{1,2\}$ *será:*

$$E'(\{1,2\},v^{ENSC}_{\{1,2\}}) = \frac{1}{2}\left[v^{ENSC}_{\{1,2\}}(\{1,2\}) + v^{ENSC}_{\{1,2\}}(\{1\}) + v^{ENSC}_{\{1,2\}}(\{2\})\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{62}{3} + 23 + 11\right] = \frac{82}{3}$$

que coincide exactamente con $E'(\{1,2,3\},v)$.
Finalmente, el pago para los jugadores 1 *y* 2 *(en el juego* $(\{1,2\},v^{ENSC}_{\{1,2\}})$*), respectivamente, es:*

$$ENSC_1(\{1,2\},v^{ENSC}_{\{1,2\}}) = -v^{ENSC}_{\{1,2\}}(\{2\}) + E'(\{1,2\},v^{ENSC}_{\{1,2\}}) = -11 + \tfrac{82}{3} = \tfrac{49}{3}$$
$$ENSC_2(\{1,2\},v^{ENSC}_{\{1,2\}}) = -v^{ENSC}_{\{1,2\}}(\{1\}) + E'(\{1,2\},v^{ENSC}_{\{1,2\}}) = -23 + \tfrac{82}{3} = \tfrac{13}{3}$$

que corresponde precisamente con $ENSC_1(\{1,2,3\},v)$ *y* $ENSC_2(\{1,2,3\},v)$*, respectivamente.*

3.4 Consistencia para soluciones que admiten un potencial

Definición 46 *Sea* ψ *una solución en* G.

(i) *Se dice que la solución* ψ *admite un potencial si existe una función* $P_\psi : G \to \mathbb{R}$ *que satisface*

$$P_\psi(N,v) - P_\psi(N\backslash\{i\},v) = \psi_i(N,v) \quad \text{para todo } (N,v) \in G, i \in N \tag{3.17}$$

(ii) *El mapeo* $F_\psi : G \to G$ *asocia con cada juego* (N,v) *su juego solución* (N,F^v_ψ)*; la función característica de éste último está definida por*

$$F^v_\psi(S) = \sum_{i\in S}\psi_i(S,v) \quad \text{para todo } S \subseteq N, S \neq \phi \tag{3.18}$$

En palabras, la función potencial P_ψ representa un escalar en el que la contribución marginal de cualquier jugador es exactamente el pago recibido de acuerdo a la solución ψ. Si el potencial existe, es determinado unívocamente por la fórmula recursiva

$$nP_\psi(N,v) - \sum_{i \in N} P_\psi(N\backslash\{i\},v) = F_\psi^v(N)$$

Usualmente, se supone que el potencial es cero-normalizado (i.e., $P_\psi(\phi, v) = 0$). La función potencial P_ψ (si es que existe) está dada por (ver Hart y Mas-Colell)

$$P_\psi(N,v) = \sum_{S \subseteq N, S \neq \phi} \frac{F_\psi^v(S)}{s\binom{n}{s}} \text{ para todo } (N,v) \in G, \text{ donde } P_\psi(\phi,v) = 0$$

De la ecuación (3.18), la valía $F_\psi^v(S)$ de la coalición S en el juego solución (N, F_ψ^v) representa la ganancia de los miembros de S al participar en el subjuego (S, v) (entendiéndose que los jugadores fuera de S no cooperan). Nótese que el juego solución y el juego inicial son el mismo si y sólo si la solución ψ es eficiente.

Teorema 47 *Considérese el conjunto de definiciones (3.17) y (3.18).*

(i)(Calvo y Santos, 1997) *Sea ψ una solución en G. Entonces ψ admite un potencial si y sólo si $\psi(N,v) = Sh_i(N, F_\psi^v)$ para dodo $(N,v) \in G$. En palabras, cualquier solución que admita un potencial es igual al Valor de Shapley del juego solución asociado.*

(ii)(Hart y Mas-Colell, 1989) *El Valor de Shapley es la única solución ψ en G que admite un potencial y es eficiente.*

Teorema 48 *Sea ψ una solución en G que admite un potencial. Supóngase que el mapeo $F_\psi : G \to G$ como fue dado en (3.18) es una biyección.*

Con un juego n-personal (N,v), un jugador $i \in N$, y su pago $y_i \in \mathbb{R}$ (con $n \geq 3$), hay un juego reducido modificado asociado $(N\backslash\{i\}, v_{N\backslash\{i\}}^{-y_i})$ con conjunto de jugadores $N\backslash\{i\}$, tal juego es definido implícitamente por su juego solución asociado $(N\backslash\{i\}, F_\psi^{(v_{N\backslash\{i\}}^{-y_i})})$, su función característica está definida por

$$F_\psi^{(v_{N\backslash\{i\}}^{-y_i})}(S) = \frac{s}{n-1}\left[F_\psi^v(S \cup \{i\}) - y_i\right] + \frac{n-1-s}{n-1} F_\psi^v(S) \quad \textit{para todo } S \subseteq N\backslash\{i\} \tag{3.19}$$

Entonces la solución ψ en G es consistente con respecto a este juego reducido modificado, i.e.,

$$\psi_j(N\backslash\{i\}, v_{N\backslash\{i\}}^{-\psi_i(N,v)}) = \psi_j(N,v) \quad \textit{para todo } (N,v) \in G, i \in N, j \in N\backslash\{i\} \tag{3.20}$$

Demostración. Fíjese un juego n-personal (N,v) y un jugador $i \in N$ (donde $n \geq 3$). Se escribirá w en vez de F_ψ^v. Como ψ admite un potencial, se sigue que, por el Teorema 47(i), $\psi(N,v) = Sh(N, F_\psi^v) = Sh(N,w)$. La parte esencial de la demostración consiste en que el juego solución (3.19) aplicado al juego reducido modificado coincide con el juego reducido (3.4) aplicado al juego solución inicial. Formalmente, se tiene lo siguiente:

$$(N\backslash\{i\}, F_\psi^{(v_{N\backslash\{i\}}^{-\psi_i(N,v)})}) = (N\backslash\{i\}, w_{N\backslash\{i\}}^{Sh_i(N,w)}) \tag{3.21}$$

Por lo que, de estos dos tipos de juego reducido, se deduce que para todo $S \subseteq N\backslash\{i\}$, se cumple que

$$\begin{aligned} F_\psi^{(v_{N\backslash\{i\}}^{-\psi_i(N,v)})}(S) &= \frac{s}{n-1}\left[F_\psi^v(S\cup\{i\}) - \psi_i(N,v)\right] + \frac{n-1-s}{n-1}F_\psi^v(S) \\ &= \frac{s}{n-1}\left[w(S\cup\{i\}) - Sh_i(N,w)\right] + \frac{n-1-s}{n-1}w(S) \\ &= w_{N\backslash\{i\}}^{Sh_i(N,w)}(S) \end{aligned}$$

Esto prueba (3.21). De aquí se deduce que las siguientes igualdades se cumplen:

$$\begin{aligned} \psi_j(N\backslash\{i\}, v_{N\backslash\{i\}}^{-\psi_i(N,v)}) &= Sh_j(N\backslash\{i\}, F_\psi^{(v_{N\backslash\{i\}}^{-\psi_i(N,v)})}) \\ &= Sh_j(N\backslash\{i\}, w_{N\backslash\{i\}}^{Sh_i(N,w)}) \\ &= Sh_j(N,w) \\ &= \psi_j(N,v) \text{ para todo } j \in N\backslash\{i\} \end{aligned}$$

donde la primera y última igualdad son debido al Teorema 47(i) y la tercera igualdad es debido al Teorema 31 considerando consistencia (3.1) para el Valor de Shapley. Esto completa la demostración de la consistencia en la solución ψ. ■

3.5 Dos teoremas importantes sobre consistencia

En esta sección se mencionarán dos resultados importantes sobre consistencia en soluciones. En el primero de ellos, se muestra que un particular tipo de consistencia, junto con algún tipo de estandaridad para juegos de dos personas, implican eficiencia, anonimidad[2] y linealidad:

Definición 49 *Se dice que un valor Φ es λ-estándar para juegos de dos personas (donde $\lambda \in \mathbb{R}$) si, para cada juego $(\{i,j\},v)$ se cumple que*

$$\Phi_k(\{i,j\},v) = \lambda \cdot v(\{k\}) + \frac{1}{2}\left[v(\{i,j\}) - \lambda \cdot v(\{i\}) - \lambda \cdot v(\{j\})\right] \quad \text{para } k \in \{i,j\} \tag{3.22}$$

Definición 50 *Sea Φ un valor en el espacio de juegos.*

(i) *Con un juego n-personal (N,v) (con $n \geq 3$), una coalición $S \subset N$, y los pagos $\overrightarrow{x} = (x_j)_{j \in N \setminus S} \in \mathbb{R}^{n-s}$ a los que no están en S, hay un juego reducido asociado $(S, v_S^{\overrightarrow{x}})$, la función característica está dada por*

$$v_S^{\overrightarrow{x}}(S) = v(N) - \sum_{j \in N \setminus S} x_j$$

$$v_S^{\overrightarrow{x}}(T) = \sum_{Q \subseteq N \setminus S} \alpha_{n,s,t,q} \left[v(T \cup Q) - \sum_{j \in Q} x_j \right] \quad \text{para todo } T \subset S,\ T \neq \phi \tag{3.23}$$

donde los números reales no negativos $\alpha_{n,s,t,q}$ son tales que:

$$\sum_{q=0}^{n-s} \binom{n-s}{q} \alpha_{n,s,t,q} = 1 \quad \text{para todo } s \in \{1,2,...,n-1\} \text{ y todo } t \in \{1,2,...,s-1\} \tag{3.24}$$

(ii) *Se dice que Φ posee la propiedad de juego reducido o que es consistente con respecto al juego reducido, si Φ satisface la siguiente condición: para cada juego n-personal (N,v) con $n \geq 3$ y cada coalición $S \subset N$,*

$$\Phi_i(S, v_S^{\overrightarrow{x}}) = \Phi_i(N,v) \quad \text{para todo } i \in S,\ \text{donde } \overrightarrow{x} = (\Phi_j(N,v))_{j \in N \setminus S} \tag{3.25}$$

Teorema 51 (Yanovskaya y Driessen, 2001) *Sea Φ un valor que es λ-estándar para juegos*

[2] Un valor Φ se dice *anónimo* si $\Phi_{\pi(i)}(N,\pi v) = \Phi_i(N,v)$ para todo juego (N,v), todo $i \in N$ y cada permutación π en N. Aquí, el juego $(N,\pi v)$ es definido por $(\pi v)(\pi S) = v(S)$ para toda $S \subseteq N$.

de dos jugadores y consistente en el sentido de (3.25) con respecto al juego reducido (3.23). Entonces el valor Φ es eficiente, anónimo, así como también lineal.

Ahora se considerará el caso en donde sólo sale el jugador i del juego, es decir, el caso en que $S = N\backslash\{i\}$. Además en las constantes $\alpha_{n,s,t,q}$ sólo se tomará dependencia en los parámetros t y q (ahora serán $\alpha_{t,q}$). Así pues, la función característica del juego reducido $\left(N\backslash\{i\}, v_{N\backslash\{i\}}^{\vec{x}}\right)$ está determinada por

$$v_{N\backslash\{i\}}^{\vec{x}}(T) = \alpha_{t,0} \cdot v(T) + \alpha_{t,1}\left[v(T \cup \{i\}) - x_i\right] \qquad \text{para todo } T \subseteq N\backslash\{i\},\, T \neq \phi$$

Y se muestra la siguiente tabla para algunos valores de λ, $\alpha_{t,0}$ y $\alpha_{t,1}$, en donde se obtienen diversas soluciones ya tratadas anteriormente:

λ	$\alpha_{t,0}$	$\alpha_{t,1}$	t	*Solución*
0	0	1	$t = n - 1$	*EG*
	1	0	$t \in \{1, 2, ..., n-2\}$	
1	0	1	$t = n - 1$	*CIS*
	1	0	$t \in \{1, 2, ..., n-2\}$	
1	0	1	$t \in \{1, 2, ..., n-1\}$	*ENSC*
1	$\frac{n-t-1}{n-1}$	$\frac{t}{n-1}$	$t \in \{1, 2, ..., n-1\}$	*Shapley*

Por último, se tiene un resultado en el que se caracteriza en forma única todas las soluciones que son eficientes, lineales y simétricas por medio de la propiedad de consistencia con respecto a un juego reducido apropiado, junto con un axioma referente a algún tipo de estandaridad para juegos de dos personas. A continuación se cita tal resultado:

Definición 52 *Denótese $M = \{2, 3, 4, ...\}$.*

Sea Φ un valor en el conjunto G de todos los juegos de utilidad transferible y sean $\mathcal{A} = \{A(k,w) \mid k \in M, w \in \{1,2,...,k\}\}$, $\mathcal{B} = \{B(k,w) \mid k \in M, w \in \{1,2,...,k\}\}$ dos colecciones de constantes. Dado un juego (N,v) con $n \geq 3$ y un jugador $i \in N$, el correspondiente juego reducido $\left(N\backslash\{i\}, v^{\Phi,i,\mathcal{A},\mathcal{B}}\right)$ asociado con Φ, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es definido como sigue:

$$v^{\Phi,i,\mathcal{A},\mathcal{B}}(S) = A(n-1,s) \cdot \left[v(S \cup \{i\}) - \Phi_i(S \cup \{i\}, v)\right] + B(n-1,s) \cdot v(S) \tag{3.26}$$

para todo $\phi \neq S \subseteq N\backslash\{i\}$. Se dice que Φ posee la propiedad de juego reducido o que es consistente con respecto al juego reducido (3.26) asociado con Φ, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ si satisface la siguiente condición: para cada juego (N,v) con $n \geq 3$ y para cada $i \in N$,

$$\Phi_j(N\backslash\{i\}, v^{\Phi,i,\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \Phi_j(N,v) \quad \text{para todo } j \in N\backslash\{i\} \tag{3.27}$$

Proposición 53 *Un valor en G es eficiente, lineal y simétrico si y sólo si existe una (única) colección de constantes $\{b(n,s) \mid n \in M, w \in \{1,2,...,n\}\}$, con $b(n,n) = 1$, tal que, para cada juego n-personal (N,v) con al menos dos jugadores y para todo $i \in N$, se cumple*

$$\Phi_i(N,v) = \sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}} n^{-1}\binom{n-1}{s}^{-1} \cdot [b(n,s+1)\cdot v(S\cup\{i\}) - b(n,s)\cdot v(S)] \tag{3.28}$$

Teorema 54 (Driessen y Radzik) *Supóngase que un valor Φ en G es eficiente, lineal y simétrico (dado como en (3.28)), asociado con la colección de constantes $\{b(n,w) \mid n \in M, w \in \{1,2,...,n\}\}$, donde $b(n,n) = 1$ para todo $n \in M$. Para cada $k \in M$, sea la colección de números reales $\{x(k,w) \mid w \in \{0,1,...,k\}\}$ la única solución del siguiente sistema de ecuaciones:*

$$x(k,k) = k+1$$

y

$$x(k,w) = (w+1)\cdot \sum_{r=w+1}^{k} \frac{b(r+1,w+1)}{r(r+1)} \cdot x(k,r) \quad \text{para todo } w \in \{0,1,...,k-1\}$$

Sean $\mathcal{A} = \{A(k,w) \mid k \in M, w \in \{1,2,...,k\}\}$, $\mathcal{B} = \{B(k,w) \mid k \in M, w \in \{1,2,...,k\}\}$ dos colecciones (desconocidas) de constantes, donde $A(k,k) = 1$, $B(k,k) = 0$ para todo $k \in M$. Entonces Φ es consistente con respecto al juego reducido (3.26) asociado con Φ, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ si y sólo si las dos colecciones $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones: para todo $k \in M$ y toda $w \in \{1,2,...,k-1\}$

$$b(k,w)\cdot A(k,w) = x(k,w)$$

y

$$b(k,w)\cdot B(k,w) = b(k+1,w) - x(k,w-1)$$

De igual forma, se presentan diversas soluciones para diferentes colecciones de constantes $\{b(n,s) \mid n \in M, s \in \{1,2,...,n\}\}$, $\{A(k,w) \mid k \in M, w \in \{1,2,...,k\}\}$ y $\mathcal{B} = \{B(k,w) \mid k \in M, w \in \{1,2,...,k\}\}$:

$b(n,w)$	$A(n-1,w)$	$B(n-1,w)$	*Solución*
1 si $w = n-1$ 0 de otra forma	1 si $w = n-1$ 0 de otra forma	0 si $w = n-1$ 1 de otra forma	*EG*
$n-1$ si $w = n-1$ 0 de otra forma	1 si $w = n-1$ 0 de otra forma	0 si $w = n-1$ 1 de otra forma	*CIS*
$n-1$ si $w = n-1$ 0 de otra forma	1, $w \in \{1,...,n-1\}$	0, $w \in \{1,...,n-1\}$	*ENSC*
1, $w \in \{1,...,n\}$	$\frac{s}{n-1}$, $w \in \{1,...,n-1\}$	$\frac{n-s-1}{n-1}$, $w \in \{1,...,n-1\}$	*Shapley*

Capítulo 4

Comentarios finales

Para un juego (N, v) y una solución φ consistente, el juego reducido $(N\backslash\{i\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}})$ no está determinado unívocamente. Por ejemplo, el Valor de Shapley es una función consistente con respecto al juego reducido (ver sección 3.1)

$$v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}}(S) = v(S \cup \{i\}) - \varphi_i(S \cup \{i\}, v) \quad \text{para todo } S \subseteq N\backslash\{i\}$$

y también es consistente con respecto al juego reducido

$$v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}}(S) = \frac{s}{n-1}\left[v(S \cup \{i\}) - \varphi_i(N, v)\right] + \frac{n-1-s}{n-1}v(S) \quad \text{para todo } S \subseteq N\backslash\{i\}$$

En el proceso de axiomatizar soluciones en juegos cooperativos, una de las propiedades importantes es la de consistencia. Esta noción establece relación entre los vectores solución de un juego cooperativo y los de su juego reducido.

El estudio del axioma de consistencia es prometedor, interesante y versátil. Este axioma para una solución en particular puede ser de importancia para el desarrollo de la teoría de la misma solución, así como también puede ser útil en la tarea de determinar la solución "consistente" de un problema real.

También, a manera de conclusiones en esta sección se presentan las aportaciones de esta tesis. La primera de ellas, fue el proponer un juego reducido donde el Valor de Banzhaf es consistente. Se logró axiomatizar tal valor con el uso de sólo dos axiomas (consistencia del valor y un axioma que determina cómo es la solución en juegos de dos jugadores), cabe mencionar que en la actualidad no hay literatura que axiomatice esta función solución usando un axioma de consistencia (de ahí la importancia de este resultado). La propuesta para el juego reducido fue la siguiente:

$$v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[v(N) + v(N\backslash\{k\}) - v(\{k\})\right] & \text{si } S = N\backslash\{k\} \\ \frac{1}{2}\left[v(S) - v(N\backslash S)\right] & \text{si } \phi \neq S \subset N\backslash\{k\} \\ 0 & \text{si } S = \phi \end{cases}$$

donde se supone que el jugador k sale del juego.

La siguiente aportación fue el proponer (desde otra perspectiva) una función característica para el juego reducido, tal que la solución CIS fuese consistente. En donde se propone ver tal solución como

$$CIS_i(N, v) = v(\{i\}) + E(N, v) \qquad \text{para todo } \; i \in N$$

donde el operador $E : G \rightarrow \mathbb{R}$, denota la parte de excedente que le corresponde a cada jugador $i \in N$. La idea principal es que al aplicar la solución al juego reducido

$$v^{\varphi}_{T}(S) = \begin{cases} v(N) - \sum\limits_{i \in N\backslash T} \varphi_i(N, v) & \text{si } S = T \\ v(S) & \text{si } s = 1 \\ 0 & \text{si } S = \phi \end{cases} \qquad \text{para } S \subseteq T$$

conserve igual la parte del excedente que en el juego original, es decir, $E(N, v) = E(T, v^{\varphi}_{T})$. Se demostró que la solución CIS sí es consistente siguiendo esta filosofía.

Siguiendo una idea análoga a la anterior, también se demostró que la solución

$$ENSC_i(N, v) = -v(N\backslash\{i\}) + E'(N, v) \qquad \text{para todo } \; i \in N$$

donde E' es la parte de excedente que le corresponde a cada jugador en el juego original, es consistente con respecto al juego reducido

$$v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S) = \begin{cases} v(N) - \varphi_k(N,v) & \text{si } S = N\backslash\{k\} \\ v(S \cup \{k\}) & \text{si } s = n-2 \\ 0 & \text{si } S = \phi \end{cases}$$

e igualmente la parte de excedente para un jugador en el juego original coincide con la parte de excedente en el juego reducido.

Dado que no hay unicidad en los juegos reducidos para una determinada solución, como trabajo futuro sería interesante el determinar si existe alguna relación entre tales juegos reducidos y discutir acerca de los criterios o mecanismos (en forma general) que hay que tomar en cuenta para definir un juego reducido para que una solución sea consistente.

Capítulo 5

Apéndice

5.1 Cálculo del Valor de Shapley

```
restart:
   p:=proc(n,s)
   local i:
   if s=n then 1/n:
   else i:=op(1,N minus S):
   p(n-1,s)-p(n,s+1):
   fi:
   end:
   Pot:=proc(N)
   local i,S,dum,P:
   P:={{}}:
   for i in N do
     dum:=P:
     for S in dum do P:=P union {S union {i}}:
     od:
   od:
   end:
   Sh:=proc(N)
```

```
global v:
local PotN,sum,S,i,sec:
for i from 1 to nops(N) do:
  PotN:=Pot(N minus {i}):
  sum[i]:=0:
  v({}):=0:
  for S in PotN do
        sum[i]:=sum[i]+p(nops(N),nops(S)+1)*(v(S union {i})-v(S)):
  od:
sec:=seq(sum[i],i=1..nops(N));
end do:
sh(N,v)=sec:
end:
```

5.2 Cálculo del Valor de Banzhaf

```
restart:
  Coal:=proc(N)
  local i,S,dum,P:
  P:={{}}:
  for i in N do
    dum:=P:
      for S in dum do P:=P union {S union {i}}:
      od:
  od:
  end:
  Bz:=proc(N)
  global v:
  local CN,sum,s1,S,i,sec:
  for i from 1 to nops(N) do
```

```
        CN:=Coal(N minus {i}):
        sum[i]:=0:
        v({}):=0:
        for S in CN do
            sum[i]:=sum[i]+v(S union {i})-v(S):
            s1[i]:=(sum[i])/(2^(nops(N)-1)):
        od:
        sec:=seq(s1[i],i=1..nops(N));
    end do:
    bz(N,v)=sec:
    end:
```

5.3 Cálculo del Valor de Shapley Ponderado

```
restart:
    suma:=proc(S)
    global w:
    local i,sum:
    sum:=0:
    for i in S do
      sum:=sum+w[i]:
    od:
    1/sum:
    end:
    g:=proc(N,S)
    local i:
    option remember:
    if S=N then suma(N):
    else i:=op(1,N minus S):
    g(N minus {i},S) - g(N,S union {i}):
```

```
fi:
end:
Pot:=proc(N)
local i,S,dum,P:
P:={{}}:
for i in N do dum:=P:
  for S in dum do
     P:=P union {S union {i}}:
  od:
od:
end:
Shw:=proc(N)
global w,v:
local PotN,sum,S,i,sec:
for i from 1 to nops(N) do:
  PotN:=Pot(N minus {i}):
  sum[i]:=0:
  v({}):=0:
  for S in PotN do
     sum[i]:=sum[i] + w[i]*g(N,S union {i})*(v(S union {i}) - v(S)):
  od:
sec:=seq(sum[i],i=1..nops(N));
end do:
shw(N,v):=sec:
end:
```

5.4 Cálculo de la solución CIS

```
cis:=proc(N)
    global v:
```

```
    local S,i,j,e,sec1,suma:
    for j from 1 to nops(N) do:
      suma:=0:
      v({}):=0:
      for i from 1 to nops(N) do:
          suma:=suma+v({i}):
     end do:
     e[j]:=v({j}) + (v(N)-suma)/nops(N):
      sec1:=seq(e[j],j=1..nops(N)):
    end do:
    CIS(N,v)=sec1;
    end:
```

5.5 Cálculo de la solución ENSC

```
ensc:=proc(N)
    global v:
    local S,i,j,e,sec1,suma:
    for j from 1 to nops(N) do:
      suma:=0:
      v({}):=0:
      for i from 1 to nops(N) do:
          suma:=suma+v(N minus {i}):
      end do:
      e[j]:=-v(N minus {j}) + (v(N)+suma)/nops(N):
      sec1:=seq(e[j],j=1..nops(N)):
    end do:
    ENSC(N,v)=sec1;
    end:
```

Bibliografía

[1] Brink R. van den and Funaki Y. (2004), "Axiomatizations of a Class of Equal Surplus Sharing Solutions for Cooperative Games with Transferable Utility", Mimeo.

[2] Calvo E. and Santos J. (1997), "Potentials in cooperative TU-games", Mathematical Social Sciences, 34, 175-190.

[3] Driessen T.(2002), "Consistency and Potentials in Cooperative TU-Games: Sobolev's Reduced Game Revived", University of Twente, pp. 99-120.

[4] Driessen T., " A Survey of Consistency Properties in Cooperative Game Theory", Society for Industrial and Applied Mathematics, 33, 43-59.

[5] Driessen T., Radzik T., "Consistency à la Hart and Mas-Colell of efficient, linear, and symmetric Values for TU-Games", University of Twente and Technical University of Wroclaw.

[6] Dubey P. y Shapley L. (1984), "Totally balanced games arising from controlled programming problems", Journal of Mathematical Programming, 245-267.

[7] Funaki Y., "Dual Axiomatizations of Solutions of Cooperative Games", Working Paper, Waseda University.

[8] Hart, S., and A. Mas-Colell (1989), "Potencial, Value, and Consistency", Econometrica, 57, 589-614.

[9] Ju Y., Borm P. and Ruys P. (2004), "The Consensus Value: A New Solution Concept for Cooperative Games", Discussion Paper, Tilburg University.

[10] Kalai E. and Samet D. (1987), "On weighted Shapley values", International Journal of Game Theory, 16, 205-222.

[11] Lehrer E. (1988), "An axiomatization of the Banzhaf value", International Journal of Game Theory, 15, 89-99.

[12] Lemaire J., "Cooperative game theory and its insurance applications", Invited Paper, University of Pennsylvania.

[13] Orshan G., (1993), "The Prenucleolus and the Reduced Game Property: Equal Treatment Replaces Anonymity", International Journal of Game Theory, 22, 241-248.315-327.

[14] Owen G. (1978), "Characterization of the Banzhaf-Coleman index", Journal of Applied Mathematics, 35,

[15] Owen G., "Consistency in values", Naval Postgraduate School.

[16] Peleg B. (1985), "On the Reduced Game Property and its Converse", International Journal of Game Theory, 15, 187-200.

[17] Shapley L. (1953), "A value for n-person games", Contribution to the Theory of Games, 2, 307-317.

[18] Sánchez S. F. (1997), "Balanced Contributions Axiom in the Solution of Cooperative Games", Games and Economic Behavior, 20, 161-168.

[19] Sobolev A., (1973), "The functional equations that give the payoffs of the players in an n-person game", Advances in Game Theory. Vilkas E. (ed), 151-153.

[20] Thomson W. and Myerson R. (1980), "Monotonicity and independence axioms", International Journal of Game Theory, 9, 37-49.

[21] Thomson W. (1996), "Consistent Allocation Rules", Rochester Center for Economic Research, Working Paper No. 418.

[22] Yanovskaya E. (2003), "Consistent and covariant solutions for TU games", International Journal of Game Theory, 32, 485-500.

[23] Yanovskaya E. and Driessen T. (2001), "On linear consistency of anonymous values for TU-games", International Journal of Game Theory, 30, 601-609.