



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

El método de Galerkin Discontinuo para ecuaciones de difusión en modelación oceánica

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

**Ciencias de la Computación y
Matemáticas Industriales**

Presenta

Fernando Emilio Romero de los
Santos

Director de Tesis:

Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez

Dr. Joaquín Peña Acevedo

**Autorización de la versión
final**

Guanajuato, Gto., 13 de
Septiembre de 2019

Resumen

Muchos procesos de la naturaleza son descritos por ecuaciones diferenciales. Para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) existe una gran cantidad de métodos analíticos y numéricos. El caso es diferente para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de las cuales los métodos analíticos son contados. Por lo mismo se han explorado y desarrollado una gran cantidad de métodos numéricos para la solución de EDP. Estos métodos se encuentran no solo con la dificultad intrínseca de las EDP sino que también se enfrentan a la complejidad del dominio donde se busca la solución o a la dificultad de las condiciones iniciales o de frontera.

En esta tesis se utilizan dos modelos oceánicos (simplificaciones de las ecuaciones de Navier-Stokes) los cuales son el canal rectangular (un sistema hiperbólico) y el modelo de las capas de Ekman (un sistema acoplado de ecuaciones de difusión). Para ambos modelos se desarrolló y programó el método numérico conocido como Galerkin discontinuo.

Los métodos numéricos más frecuentes al momento de resolver EDP son diferencias finitas, volumen finito y elemento finito. El método de Galerkin discontinuo (DG, por sus siglas en inglés) busca combinar las ventajas de los métodos de volumen finito (manejo de geometrías complejas, conservación local de cantidades, ser explícito en el tiempo) y de elemento finito (geometrías complejas, elementos de alto orden). El método de DG fue introducido por Reed y Hill (1973) y ha sido refinado a través de los años presentando Cockburn y Shu (2001) una compilación del método hasta ese momento. Con la teoría mostrada en la compilación se desarrolla el método para el canal rectangular y las capas de Ekman. Dentro de la tesis se presenta el concepto de flujo numérico, muy importante para el funcionamiento del método, y posteriormente se utilizan los flujos presentados en Cockburn y Shu (2001) para el caso del canal rectangular y el de Frank et al. (2015) para las capas de Ekman.

Agradecimientos

Agradecimientos al CONACYT por brindar la beca (número de becario 635095) que permitió los estudios de posgrado y la realización de esta tesis.

Agradecimientos también al CIMAT por permitir el desarrollo académico y del trabajo presentado de la mejor manera gracias a su personal académico, administrativo y manual así como a sus instalaciones y equipo provisto.

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	II
Introducción	1
1. Modelos	4
1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes	4
1.2. Canal rectangular	5
1.3. Capas de Ekman	8
2. Canal rectangular, sistemas hiperbólicos	11
2.1. Discretización espacial	11
2.1.1. Elementos lineales	14
2.2. Flujo numérico	17
2.3. Discretización temporal, el método de Runge-Kutta	20
2.4. Condiciones iniciales	20
2.5. Condiciones de frontera	21
2.6. Ejemplos	22
2.6.1. Fondo constante	22
2.6.2. Fondo inclinado	22
2.6.3. Fondo con discontinuidad	23
2.7. Resultados	24
2.7.1. Fondo constante	24
2.7.2. Fondo inclinado	24
2.7.3. Fondo discontinuo	25
2.7.4. Convergencia respecto a la malla	26
2.7.5. Resultados con otros flujos numéricos	26
2.7.6. Tiempos de ejecución	27
3. Capas de Ekman, operador de difusión	30
3.1. Discretización espacial	30
3.1.1. Elementos lineales	33
3.2. Flujos numéricos	35

3.3. Discretización temporal	35
3.4. Condiciones iniciales	36
3.5. Condiciones de frontera	36
3.5.1. Condiciones tipo Dirichlet	36
3.5.2. Condiciones tipo Neumann	37
3.6. Ejemplos	37
3.6.1. Capas de Ekman superficiales	37
3.6.2. Promedios	38
3.6.3. Hemisferio sur	38
3.7. Resultados	38
3.7.1. Capas de Ekman superficiales	38
3.7.2. Promedio	38
3.7.3. Hemisferio sur	38
3.7.4. Convergencia	39
Conclusiones y trabajo futuro	48

Introducción

En la naturaleza se presentan una vasta cantidad de fenómenos los cuales hemos sido capaces de modelar o aproximar su comportamiento, la mayoría de estos modelos son ecuaciones diferenciales. Para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias (aquellas que solo tienen una variable dependiente) existe una gran cantidad de métodos analíticos y otro tanto de métodos numéricos. Para el caso de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) la cantidad de métodos analíticos se reduce en gran medida. La necesidad de encontrar soluciones a problemas específicos y la falta de métodos analíticos que pueden aplicarse a la gran diversidad de EDP ha decantado en la exploración y creación de varios métodos numéricos para su solución, esto tomando en cuenta la pura dificultad de la ecuación. Otros problemas que aquejan a la búsqueda de soluciones es la complejidad del dominio donde se desea resolver alguna de estas EDP o la complejidad de las condiciones iniciales o de frontera que se impongan. Todos estos problemas son generales y aunado a ellos cada tipo de EDP contienen problemas propios para los que es necesario desarrollar diferentes metodologías.

Dentro de los fenómenos que se pueden modelar hay un gran interés en aquellos en los que la convección, el flujo preferencial de información de alguna variable, domina. La convección tiene un papel vital en problemas tan diversos como la meteorología, predicción del clima, oceanografía, dinámica de gases, flujo turbulento, flujo granular, simulaciones de extracción de petróleo, modelación de aguas someras, transporte de material en medios porosos, flujos viscoelásticos, simulación de semiconductores, magnetohidrodinámica y electromagnetismo entre muchas otras (Cockburn et al, 2000 [3]). Por la gran cantidad de problemas en los que tiene cabida es conveniente desarrollar métodos que sean precisos y eficientes al resolver los planteamientos.

Uno de los primeros métodos desarrollados para tratar estos problemas es el método de las diferencias finitas (DF), además de ser de los primeros métodos es de los más difundidos por su sencillez, tanto conceptual como al implementarlo. Se basa en la aproximación de las derivadas de cualquier orden y en cualquier dimensión a través de “diferencias” o restas, de ahí el nombre. Por otra parte, al ser un método relativamente sencillo cuenta con muchas desventajas para quien quiera trabajar problemas más difíciles en varios sentidos. A causa de que necesita cierta simplicidad en la forma de sus elementos y la forma en que estos están conectados unos con otros, que la malla sea estructurada, le es difícil manejar geometrías complejas.

Dentro de los métodos para resolver EDP el método de elemento finito (FEM, por sus siglas en inglés) es quizá el más popular de todos. FEM no necesita una malla estructurada y los elementos que componen la malla deben cumplir requisitos mínimos para que no se presenten problemas con el método, por lo que puede manejar geometrías complejas, además por las pocas imposiciones sobre los elementos con los que trabaja es posible utilizar elementos de alto orden logrando una mayor precisión. Dentro de los problemas que presenta es que siempre es un método implícito (que necesita resolver un sistema de ecuaciones) ya sea en problemas de estado estable o de evolución temporal, y este último es el mayor problema ya que la solución del sistema puede resultar muy costosa y se tendría que realizar en cada paso de tiempo. Por sí mismo el método no cumple con la conservación local y solo la cumple globalmente. Por su formulación, FEM tiene problemas cuando se encuentra frente a modelos con una fuerte componente de convección, esto es, cuando exista alguna variable con una dirección preferencial.

En los 70's aparece el método de volumen finito (FVM, por sus siglas en inglés) que es muy popular en el campo de la dinámica computacional de fluidos (CFD, por sus siglas en inglés) debido a sus propiedades. Así como con FEM, FVM puede trabajar con una malla no estructurada lo que permite a su vez que pueda aplicarse a problemas con geometrías complejas, aunque debido a su formulación le es difícil lograr altos ordenes, en el método esto requeriría un "stencil" más amplio. Los elementos que requiere necesitan cumplir más requisitos que FEM, pero aun así sigue siendo sencillo cumplirlos. Siguiendo con las ventajas del FVM es localmente estable y robusto por lo que es muy adecuado para leyes de conservación. Otra ventaja sobre FEM es que este método si es explícito en el tiempo, podríamos decir que en cada paso requiere hacer una multiplicación de matrices en lugar de resolver un sistema de ecuaciones, lo cual es mucho menos costoso.

El método que trabajamos busca sortear algunos de los problemas de los otros métodos al tiempo que busca integrar lo mejor de cada uno.

Una variante de la clase general de métodos conocidos como Galerkin discontinuo (DG, por sus siglas en inglés) fue introducida por primera vez en 1973 por Reed y Hill [8] para resolver un problema lineal de transporte de neutrones,

$$\sigma u + \nabla \cdot (\mathbf{a}u) = f, \quad \text{en } \Omega, \quad (1)$$

a pesar de que muchos conceptos que actualmente se manejan no habían sido introducidos para ese tiempo como los esquemas monótonos y flujos numéricos, puede entenderse que usaron un flujo numérico tipo *upwind*.

En [2] Chen et al mencionan que el método de Galerkin discontinuo ha sido introducido como una actualización al método de elemento finito y que la aplicación de estos métodos a los actuales modelos oceánicos costeros puede mejorar significativamente la precisión computacional y la eficiencia así como la conservación de la masa.

Actualmente la teoría desarrollada permite que el método pueda trabajar con geometrías complejas, alcanzar altos órdenes con facilidad, ser explícito en el tiempo y manejar leyes de

conservación. Por otro lado, los problemas que incluyen difusión necesitan ciertos arreglos para que el método pueda funcionar y el trabajo continúa cuando hablamos de problemas elípticos.

Una revisión de las publicaciones del primer semestre del año (2019), nos dan cuenta que la mayoría de ellas trata la aplicación y adecuación del método de DG a problemas de diversos campos.

Actualmente, los temas que se centran en la paralelización del método, que es precisamente una de las ventajas de DG por sus elementos *inconexos*, se orientan a que el método funcione con unidades de procesamiento de gráficas, GPU's.

En este trabajo se aplica el método de Galerkin discontinuo con Runge-Kutta para problemas de evolución temporal, con un enfoque particular a la modelación oceánica, se busca abarcar los principales operadores que aparecen en las ecuaciones diferenciales, como son la convección y la difusión. En el caso de la convección se trabaja además con coeficientes que dependan de la posición.

La tesis se estructurará de la siguiente manera, en el capítulo uno se presentarán los modelos a los que se aplicará el método, en el capítulo dos y tres se hará el desarrollo del método con el canal rectangular y las capas de Ekman, en estos capítulos se desarrollará la teoría que sustenta a los sistemas hiperbólicos y al operador de difusión dentro del marco de Galerkin discontinuo, se presentarán ejemplos de aplicación con los modelos descritos y los resultados obtenidos respectivamente, finalmente se presentarán las conclusiones y el trabajo a futuro.

Capítulo 1

Modelos

El método que se implementa en este trabajo es utilizado para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales (PDE, por sus siglas en inglés), que resultan ser el mejor medio de comunicación que tenemos actualmente con la naturaleza para poder interpretar los diferentes fenómenos que en ella se presentan.

En particular estamos interesados en los procesos que se dan en el océano y más aún en aquellos que se presentan en las regiones costeras, donde se dan interacciones con la geometría del lugar, esto da pie a utilizar las componentes de PDE's que se encuentran con mayor frecuencia en ámbitos muy distintos, (términos de advección-convección, difusión). Para poder llegar a los diferentes modelos con los que trabajamos, partimos de las ecuaciones de Navier-Stokes como las presenta Kämpf en [7].

1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes describen el movimiento de fluidos viscosos, éstas surgen a partir de varios principios físicos: conservación de momento, conservación de masa y conservación de campos como lo son la temperatura o la salinidad, a través de las ecuaciones de estado de dichas variables (Kämpf, 2010 [7]). Estas ecuaciones las podemos escribir de la siguiente manera en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \nabla \cdot (A_h \nabla u), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + V \cdot \nabla v + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + \nabla \cdot (A_h \nabla v), \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + V \cdot \nabla w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} g + \nabla \cdot (A_z \nabla w), \quad (1.3)$$

donde (x, y, z) es la posición, $V = (u, v, w)$ es el vector de velocidades, t es el tiempo, f es el parámetro de Coriolis, P es la presión dinámica, ρ es la densidad, ρ_0 es la densidad promedio y

g la aceleración debida a la gravedad.

El término $V \cdot \nabla(\cdot)$ es conocido como advección, y $\nabla \cdot (A_i \nabla(\cdot))$ es conocido como el término de difusión. A_h y A_z son las viscosidades turbulentas horizontal y vertical, respectivamente que parametrizan los efectos de la turbulencia.

Por sí solas las ecuaciones anteriores (conservación de momento) no describen en su totalidad a un fluido, por lo que es necesario considerar la conservación de la masa, y esto lo hacemos a través de la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.4)$$

Así mismo la densidad es una de las variables más importantes en lo que concierne la dinámica de fluidos, que podemos describir con la siguiente ecuación de conservación de la densidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \cdot \nabla(\rho) = \nabla \cdot (K \nabla(\rho)), \quad (1.5)$$

K contiene a K_h y K_z que son las difusividades turbulentas.

Como estamos trabajando sistemas que tienen sentido en el marco de la modelación oceánica necesitamos una ecuación adicional que describa la evolución de la superficie libre del mar (η), que da los valores de la frontera en la superficie para la presión dinámica en las ecuaciones de momento. Esta ecuación se puede derivar de la integración vertical de la ecuación de continuidad y está dada por,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial(h \langle u \rangle)}{\partial x} - \frac{\partial(h \langle v \rangle)}{\partial y} \quad (1.6)$$

donde h es la profundidad total del fluido, $\langle u \rangle$ y $\langle v \rangle$ son los componentes de la velocidad promediados sobre la profundidad.

1.2. Canal rectangular

En la Figura 1.1 se encuentra la versión más general del caso que trabajaremos,

Con dicho esquema podemos hacer las siguientes suposiciones. La primera es que el flujo en nuestro modelo lo consideramos independiente de la dimensión espacial horizontal y , por lo que nos quedamos con dos dimensiones, la horizontal x y la vertical z . También suponemos que no hay fenómenos de difusión. Tomamos en consideración el número de Rossby que está definido de la siguiente manera,

$$Ro = \frac{U}{Lf}$$

, donde U es la velocidad característica del sistema y L la escala de longitud del sistema. En este caso consideraremos $U = \sqrt{gh_0}$ (con h_0 constante y del valor más grande que pueda tener para los casos que no son constantes). A valores grandes de Ro los efectos producidos por la fuerza de Coriolis son despreciables, por el contrario la fuerza de Coriolis adquiere importancia si Ro

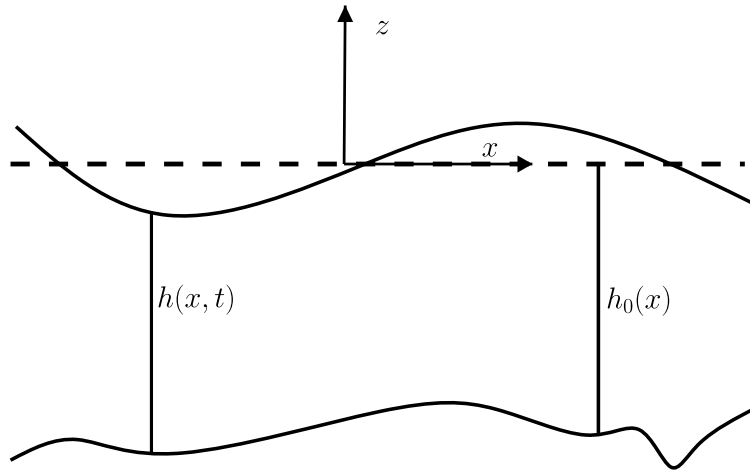


Figura 1.1: Esquema del canal rectangular

adquiere valores pequeños. Si consideramos el modelo situado en algún punto desde las latitudes medias hacia el ecuador entonces tenemos valores que van desde $f \approx 10^{-4} s^{-1}$ hasta $f = 0 s^{-1}$, y sabemos que $L \approx 10^5 m$ entonces el número de Rossby toma valores que van desde $Ro = 1.4$ hasta $Ro = \infty$. Por lo antes mencionado y para efectos de utilizar este modelo para probar el método podemos no tomar en cuenta los efectos de la fuerza de Coriolis. De esta manera las ecuaciones toman la siguiente forma,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} - g, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hw)}{\partial z} = 0. \quad (1.9)$$

Consideramos la densidad del agua como constante, por lo que el término que acompaña a la constante de gravedad en la ecuación (1.8) se simplifica y la ecuación de conservación de la densidad (1.5) no aparece.

Siguiendo con las consideraciones, tomamos en cuenta que la aceleración vertical del agua es mucho menor que la aceleración debida a la gravedad, por lo tanto la ecuación (1.8) se reduce a

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_0 g \quad (1.10)$$

si consideramos que la presión es hidrostática, entonces (1.10) se resuelve fácilmente,

$$P = p_{atm} + \rho_0 g (h - h_0 - z) \quad (1.11)$$

y la ecuación que describe el movimiento de la superficie libre (1.9) se reduce a

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0. \quad (1.12)$$

La componente horizontal de la velocidad u , es aproximadamente uniforme en cualquier sección vertical del fluido, por lo tanto (1.7) se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (1.13)$$

En la ecuación anterior no hay derivadas sobre z por lo que la presión en este caso no dependerá de z , de tal manera que reescribimos la ecuación como,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (h - h_0)}{\partial x} = 0. \quad (1.14)$$

Finalmente hacemos las siguientes consideraciones para linearizar. La longitud característica de nuestro modelo se encuentra en el orden de las centenas de kilómetros ($10^5 m$) y la velocidad característica del sistema es, $u = \sqrt{gh_0} \approx 14 ms^{-1}$ (considerando una profundidad máxima de $h_0 = 20m$). Si ahora consideramos el kilómetro ($10^3 m$) como la unidad en la que trabajaremos nuestro sistema, entonces la longitud característica pasa a estar en el orden de $10^2 km$ y la velocidad característica a $10^{-2} kms^{-1}$, por lo tanto $u \ll 1$. De la misma manera la diferencia de la altura de la superficie libre respecto la superficie de referencia está en el orden de unidades de metro ($10^0 m$). Si lo traducimos a la nueva unidad que estamos manejando entonces estaría en el orden de $10^{-3} km$, por lo que podemos suponer que $h - h_0(x) = \zeta(x, t) \ll 1$, donde ζ representa la altura de la superficie libre del canal, de este modo obtenemos finalmente las ecuaciones del canal rectangular con las que trabajaremos,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (h_0 u)}{\partial x} = 0. \quad (1.16)$$

Este tipo de sistemas de PDE's se les conoce como *sistemas hiperbólicos*. Para ilustrar a que nos referimos consideramos el siguiente sistema de coeficientes constantes,

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x + \mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{F}(x, t)$$

decimos que es hiperbólico si existe una matriz Λ , tal que,

$$\Lambda = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$$

con $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ donde λ_i son los eigenvalores de \mathbf{A} y todos ellos son reales y diferentes de cero.

Si consideramos por ejemplo h_0 constante y positiva, entonces la matriz del canal rectangular es la siguiente,

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & g \\ h_0 & 0 \end{pmatrix}$$

tomando al vector de soluciones como $\mathbf{U} = (u, \zeta)^T$. Si calculamos los eigenvalores de esta matriz obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{gh_0}, \\ \lambda_2 &= -\sqrt{gh_0}, \end{aligned}$$

donde g es positiva, por lo tanto ambos eigenvalores son reales por lo que nuestro sistema es hiperbólico.

1.3. Capas de Ekman

Retomamos las ecuaciones de Navier-Stokes (1.1), (1.2) y (1.3) como punto de partida e iniciamos el proceso de simplificación. Consideramos que z es el eje vertical y que los ejes x y y son los horizontales como se ve en el esquema en la Figura 1.2. Si suponemos una homogeneidad horizontal en todas las variables entonces no existen cambios de éstas a lo largo de los ejes horizontales y por lo tanto las derivadas en tales ejes son iguales a cero, esto es,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Por medio de la ecuación de continuidad (1.4) y las condiciones anteriores, tenemos que

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

además esperamos que en el lecho marino w se haga cero debido a las condiciones de no deslizamiento, por lo tanto w debe de ser cero en todas partes.

Las ecuaciones de Navier-Stokes quedan entonces reducidas al siguiente sistema,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_h \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_h \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (1.18)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} - g. \quad (1.19)$$

Si consideramos densidad constante, la ecuación (1.19) se resuelve fácilmente, y sabemos que solo depende de z por lo tanto, los términos que incluyen derivadas de la presión en las coordenadas horizontales desaparecen, de este modo nos quedamos con el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = \frac{\partial}{\partial z} \left(A_h \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = \frac{\partial}{\partial z} \left(A_h \frac{\partial v}{\partial z} \right). \quad (1.21)$$

Estas ecuaciones son conocidas como el modelo de las capas de Ekman, descritas en 1902 por Walfrid Ekman en su trabajo “On the Influence of the Earth’s Rotation On Ocean-Currents”. Este modelo describe la corriente (representada por la velocidad) de acuerdo al balance de fuerzas existente entre el gradiente de presión, el arrastre causado por la turbulencia y la fuerza de Coriolis (de donde proviene la mención a la rotación de la tierra en el trabajo original).

Para tener un entendimiento de las capas usaremos las llamadas capas superficiales, que son causadas por la acción del viento sobre la superficie del oceano. En este caso el esfuerzo del viento sobre la superficie oceánica es balanceado con la fuerza de Coriolis y fuerzas de fricción, provocando que la corriente se dirija a 45° de la dirección del viento (hacia la derecha en el hemisferio norte y a la izquierda en el hemisferio sur). Conforme bajamos en profundidad la magnitud de la corriente disminuye debido a las condiciones de frontera (de movimiento en la superficie y de cero desplazamiento en el lecho marino) y desvía su curso de los 45° hasta llegar a ser antiparalela a la de la superficie (por los efectos de rotación que se hacen presentes en esta escala), hasta cierta profundidad límite y cayendo a cero después de dicha profundidad. Si estas corrientes (velocidades) son observadas a lo largo de la columna de agua, describen un comportamiento en espiral conocida como la *espiral de Ekman*, en la Figura 1.2 se puede ver un esquema de este comportamiento,

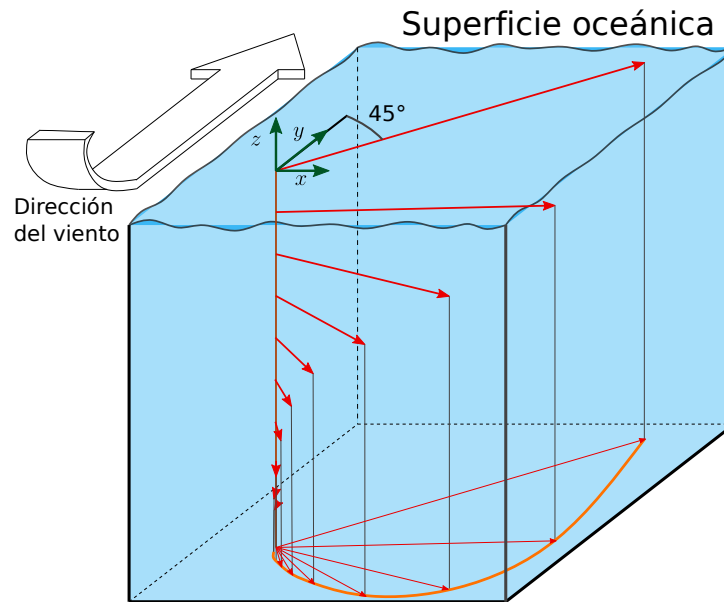


Figura 1.2: Diagrama de las capas de Ekman

A los términos de la derecha de estas ecuaciones los llamamos “términos difusivos” y a la operación que se aplica a las variables ($\nabla \cdot (A\nabla)$, de manera general) lo conocemos como “operador de difusión”. En general a las PDE’s en donde estos términos son los dominantes las conocemos como *difusivas*. Un prototipo de este tipo de ecuaciones es la ecuación de calor unidimensional,

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad (1.22)$$

que pertenece a un tipo más general de PDE’s, las denominadas **parabólicas**. En los casos lineales el comportamiento de estas PDE’s es intentar “subir” o “bajar” (en un sentido amplio de las palabras) el valor de la variable en un punto de acuerdo al promedio de los valores alrededor de este punto, este proceso se da en todas direcciones. Otra forma de ver el comportamiento es

que la PDE intenta suavizar las variables a las que se le aplica a través del tiempo hasta llegar a un estado de equilibrio determinado por las condiciones de frontera.

Capítulo 2

Canal rectangular, sistemas hiperbólicos

2.1. Discretización espacial

Tomamos la ecuación del canal rectangular para desarrollar el método de Galerkin discontinuo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(g\zeta)}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(H(x)u)}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

en el dominio

$$(0, L) \times (0, T), \quad (2.3)$$

con condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \zeta(x, 0) = 0, \quad (2.4)$$

y condiciones de frontera

$$u(0, t) = 0, \quad (2.5)$$

$$\zeta(L, t) = \zeta_0 \sin(\omega t). \quad (2.6)$$

Multiplicamos las ecuaciones (2.1) y (2.2) por una función de prueba v y las integramos sobre un elemento $K_j = \{x_j, x_{j+1}\} = \{x_l, x_r\}$ del dominio, donde x_j son los nodos de la malla,

$$\int_{K_j} v \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{K_j} v \frac{\partial(g\zeta)}{\partial x} dx = 0, \quad (2.7)$$

$$\int_{K_j} v \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx + \int_{K_j} v \frac{\partial(H(x)u)}{\partial x} dx = 0. \quad (2.8)$$

Los términos que contienen derivadas en el espacio (respecto a x) los integramos por partes,

$$\int_{K_j} v \frac{\partial u}{\partial t} dx + v(g\zeta)|_{x_l}^{x_r} - \int_{K_j} \frac{\partial v}{\partial x}(g\zeta) dx = 0, \quad (2.9)$$

$$\int_{K_j} v \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx + v(H(x)u)|_{x_l}^{x_r} - \int_{K_j} \frac{\partial v}{\partial x}(Hu) dx = 0. \quad (2.10)$$

Colocaremos del lado derecho de la ecuación la parte que ya está integrada. Sobre ésta parte, debido a la falta de condiciones en la solución local y las funciones de prueba, las soluciones en las interfaces entre elementos (x_l y x_r) están múltiplemente definidas y tenemos que elegir que solución o combinación de soluciones es la correcta. Nos referimos a ésta o éstas, cómo el flujo numérico y dependerá en gran parte del problema que estemos trabajando, que denotaremos como $(g\zeta)^*$ o $(Hu)^*$, tenemos entonces las siguientes ecuaciones,

$$\int_{K_j} v \frac{\partial u}{\partial t} dx - \int_{K_j} \frac{\partial v}{\partial x}(g\zeta) dx = -(g\zeta)^* v(x_r) + (g\zeta)^* v(x_l) \quad (2.11)$$

$$\int_{K_j} v \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx - \int_{K_j} \frac{\partial v}{\partial x}(Hu) dx = -(Hu)^* v(x_r) + (Hu)^* v(x_l). \quad (2.12)$$

Es posible que en una primera revisión la importancia del flujo numérico no sea obvia, pero es el punto central del método de Galerkin discontinuo y en la siguiente sección lo trabajaremos más a fondo.

Denominamos u_h^k a la aproximación de la solución u^k en el elemento K_i , la solución local, lo mismo aplica para ζ .

La solución local aproximada la logramos mediante un polinomio de orden n definido en el elemento K_i de la siguiente manera,

$$u_h^k(x, t) = \sum_{j=0}^n \hat{u}_j^k(t) \varphi_j(x) \quad (2.13)$$

y lo mismo para ζ ,

$$\zeta_h^k(x, t) = \sum_{j=0}^n \hat{\zeta}_j^k(t) \varphi_j(x). \quad (2.14)$$

Éstas funciones se ubican dentro del elemento K_j y los coeficientes \hat{u}_j^k no se corresponden necesariamente a los nodos x_i de la malla original (forma modal). Estas aproximaciones también pueden escribirse como un producto punto,

$$\begin{aligned} u_h^k &= (\varphi^k(x))^T \hat{\mathbf{u}}^k, \\ \zeta_h^k &= (\varphi^k(x))^T \hat{\boldsymbol{\zeta}}^k, \end{aligned}$$

donde $\hat{\mathbf{u}}^k = [\hat{u}_0^k, \hat{u}_1^k, \dots, \hat{u}_n^k]^T$, $\hat{\boldsymbol{\zeta}}^k = [\hat{\zeta}_0^k, \hat{\zeta}_1^k, \dots, \hat{\zeta}_n^k]$ y $\boldsymbol{\varphi}^k = [\varphi_0^k, \varphi_1^k, \dots, \varphi_n^k]^T$. Reescribimos las ecuaciones (2.11) y (2.12),

$$\int_{K_j} v(\boldsymbol{\varphi}^k)^T \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{u}}^k dx - \int_{K_j} g \frac{\partial v}{\partial x} (\boldsymbol{\varphi}^k)^T \hat{\boldsymbol{\zeta}}^k dx = -(g\zeta)^* v(x_r) + (g\zeta)^* v(x_l) \quad (2.15)$$

$$\int_{K_j} v(\boldsymbol{\varphi}^k)^T \frac{\partial}{\partial t} \hat{\boldsymbol{\zeta}}^k dx - \int_{K_j} H \frac{\partial v}{\partial x} (\boldsymbol{\varphi}^k)^T \hat{\mathbf{u}}^k dx = -(Hu)^* v(x_r) + (Hu)^* v(x_l). \quad (2.16)$$

De acuerdo al enfoque de Galerkin, las funciones de prueba v las tomamos como las mismas del espacio de soluciones, en este caso el espacio de polinomios de grado n ,

$$v(x) = \varphi_i^k(x), \quad (2.17)$$

si consideramos $i = 0, 1, \dots, n$ entonces tendríamos $n + 1$ ecuaciones para un polinomio de aproximación de orden n . Si desarrollamos para una de las ecuaciones obtenemos,

$$\begin{aligned} \int_{K_j} \varphi_0^k (\boldsymbol{\varphi}^k)^T \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{u}}^k dx - \int_{K_j} g \frac{\partial \varphi_0^k}{\partial x} (\boldsymbol{\varphi}^k)^T \hat{\boldsymbol{\zeta}}^k dx &= -(g\zeta)^* \varphi_0^k(x_r) + (g\zeta)^* \varphi_0^k(x_l) \\ \int_{K_j} \varphi_1^k (\boldsymbol{\varphi}^k)^T \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{u}}^k dx - \int_{K_j} g \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial x} (\boldsymbol{\varphi}^k)^T \hat{\boldsymbol{\zeta}}^k dx &= -(g\zeta)^* \varphi_1^k(x_r) + (g\zeta)^* \varphi_1^k(x_l) \\ &\vdots \\ \int_{K_j} \varphi_n^k (\boldsymbol{\varphi}^k)^T \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{u}}^k dx - \int_{K_j} g \frac{\partial \varphi_n^k}{\partial x} (\boldsymbol{\varphi}^k)^T \hat{\boldsymbol{\zeta}}^k dx &= -(g\zeta)^* \varphi_n^k(x_r) + (g\zeta)^* \varphi_n^k(x_l) \end{aligned}$$

que vectorialmente podemos escribir como,

$$\int_{K_j} \boldsymbol{\varphi}^k (\boldsymbol{\varphi}^k)^T \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{u}}^k dx - \int_{K_j} g \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^k}{\partial x} (\boldsymbol{\varphi}^k)^T \hat{\boldsymbol{\zeta}}^k dx = -(g\zeta)^* \boldsymbol{\varphi}^k(x_r) + (g\zeta)^* \boldsymbol{\varphi}^k(x_l) \quad (2.18)$$

lo mismo para la segunda ecuación del canal rectangular,

$$\int_{K_j} \boldsymbol{\varphi}^k (\boldsymbol{\varphi}^k)^T \frac{\partial}{\partial t} \hat{\boldsymbol{\zeta}}^k dx - \int_{K_j} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^k}{\partial x} (\boldsymbol{\varphi}^k)^T H(x) \hat{\mathbf{u}}^k dx = -(Hu)^* \boldsymbol{\varphi}^k(x_r) + (Hu)^* \boldsymbol{\varphi}^k(x_l) \quad (2.19)$$

Retomemos la ecuación (2.18) y consideremos las multiplicaciones de los vectores $\boldsymbol{\varphi}^k$ y sus derivadas,

$$\boldsymbol{\varphi}^k (\boldsymbol{\varphi}^k)^T = \begin{bmatrix} \varphi_0^k \varphi_0^k & \varphi_0^k \varphi_1^k & \dots & \varphi_0^k \varphi_n^k \\ \varphi_1^k \varphi_0^k & \varphi_1^k \varphi_1^k & \dots & \varphi_1^k \varphi_n^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^k \varphi_0^k & \varphi_n^k \varphi_1^k & \dots & \varphi_n^k \varphi_n^k \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^k}{\partial x} (\boldsymbol{\varphi}^k)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_0^k}{\partial x} \varphi_0^k & \frac{\partial \varphi_0^k}{\partial x} \varphi_1^k & \dots & \frac{\partial \varphi_0^k}{\partial x} \varphi_n^k \\ \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial x} \varphi_0^k & \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial x} \varphi_1^k & \dots & \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial x} \varphi_n^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n^k}{\partial x} \varphi_0^k & \frac{\partial \varphi_n^k}{\partial x} \varphi_1^k & \dots & \frac{\partial \varphi_n^k}{\partial x} \varphi_n^k \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Por lo que reescribimos las ecuaciones (2.18) y (2.19) como,

$$\mathbf{M}^k \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{u}}^k - \mathbf{S}^k \hat{\boldsymbol{\zeta}}^k = -(g\zeta)^* \boldsymbol{\varphi}^k(x_r) + (g\zeta)^* \boldsymbol{\varphi}^k(x_l), \quad \text{y} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{M}^k \frac{\partial}{\partial t} \hat{\boldsymbol{\zeta}}^k - \mathbf{S}^k \hat{\mathbf{u}}^k = -(Hu)^* \boldsymbol{\varphi}^k(x_r) + (Hu)^* \boldsymbol{\varphi}^k(x_l), \quad (2.23)$$

donde

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_{K_j} \varphi_i^k \varphi_j^k dx,$$

y

$$\mathbf{S}_{ij} = \int_{K_j} s(x) \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x} \varphi_j^k dx,$$

donde $s(x)$ toma los valores que acompañan a las derivadas en el espacio, en este caso g o $H(x)$. Recordemos que $\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{u}}^k$, $\hat{\mathbf{u}}^k$, $\frac{\partial}{\partial t} \hat{\boldsymbol{\zeta}}^k$ y $\hat{\boldsymbol{\zeta}}^k$, no dependen de x y solo dependen del tiempo t .

Es el turno ahora de decidir quienes son los $\varphi_i(x)$, para este trabajo decidimos utilizar los polinomios de Lagrange debido a su propiedad de valer uno en su nodo correspondiente y cero en los demás, esto es,

$$\varphi_i(\xi_j) = \delta_{ij},$$

donde ξ_j indica puntos definidos dentro de un elemento K que no fueron definidos con la malla original y δ_{ij} la delta de Kronecker.

Discutiremos ahora casos particulares para ver como quedan las expresiones desarrolladas.

2.1.1. Elementos lineales

Consideremos el caso de un elemento lineal, esto es, $n = 1$, en el elemento $K_j = [x_l, x_r]$ por lo que tenemos las funciones de prueba $\varphi_0(x) = N_0(x)$ y $\varphi_1(x) = N_1(x)$, definidas en coordenadas cartesianas las podemos expresar como

$$N_0(x) = \frac{x_r - x}{x_r - x_l}, \quad (2.24)$$

$$N_1(x) = \frac{x - x_l}{x_r - x_l}. \quad (2.25)$$

Calculemos los coeficientes de las matrices \mathbf{M} y \mathbf{S} para este elemento. Más adelante estas matrices se definirán de manera automática y se utilizarán cuadraturas para su integración de modo que ya no tenga que calcularse nada de manera analítica. El integrando del primer elemento es,

$$\mathbf{M}_{00} = \int_{x_l}^{x_r} \frac{(x_r - x)^2}{(x_r - x_l)^2} dx,$$

definimos $l = x_r - x_l$ como la longitud del elemento y nos damos cuenta de que es una constante por lo que puede salir de la integral,

$$\mathbf{M}_{00} = \frac{1}{l^2} \int_{x_l}^{x_r} (x_r - x)^2 dx = \frac{l}{3}.$$

Es fácil reconocer que $\mathbf{M}_{01} = \mathbf{M}_{10}$ por lo que solo necesitamos calcular esta integral una vez,

$$\mathbf{M}_{10} = \mathbf{M}_{01} = \frac{1}{l^2} \int_{x_l}^{x_r} (x_r - x)(x - x_l) dx = \frac{l}{6},$$

y finalmente el término que contiene a $N_1 N_1$ es

$$\mathbf{M}_{11} = \frac{1}{l^2} \int_{x_l}^{x_r} (x - x_l)^2 dx = \frac{l}{3},$$

por lo tanto la matriz de masa para un elemento lineal queda de la siguiente manera,

$$\mathbf{M} = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Procedemos ahora al cálculo de \mathbf{S}_g con $s(x) = g$,

$$\mathbf{S}_{00} = \frac{g}{l^2} \int_{x_l}^{x_r} -(x_r - x) dx = -\frac{g}{2}$$

$$\mathbf{S}_{01} = \frac{g}{l^2} \int_{x_l}^{x_r} -(x - x_l) dx = -\frac{g}{2}$$

$$\mathbf{S}_{10} = \frac{g}{l^2} \int_{x_l}^{x_r} (x_r - x) dx = \frac{g}{2}$$

$$\mathbf{S}_{11} = \frac{g}{l^2} \int_{x_l}^{x_r} (x - x_l) dx = \frac{g}{2},$$

de tal manera que la matriz de amortiguamiento es

$$\mathbf{S} = \frac{g}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

La matriz \mathbf{S}_H con $s(x) = H(x)$ cambiará de acuerdo a la definición de $H(x)$.

Revisemos ahora los flujos numéricos. Los vectores del lado derecho que los acompañan serían

$$\begin{bmatrix} N_0(x_r) \\ N_1(x_r) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} N_0(x_l) \\ N_1(x_l) \end{bmatrix}$$

que por la propiedad de los polinomios de Lagrange se reducen a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, ¿cómo definimos $(g\zeta)^*$ y $(H(x)u)^*$ en x_l y x_r ? Primero hacemos que el flujo numérico dependa únicamente de dos valores de la aproximación en la discontinuidad, esto es,

$$(g\zeta)_{x_r}^* = \hat{f}(\zeta_h)(x_r) = \hat{f}(\zeta_h(x_r^-), \zeta_h(x_r^+)), \quad (2.28)$$

$$(H(x)u)_{x_r}^* = \hat{f}(u_h)(x_r) = \hat{f}(u_h(x_r^-), u_h(x_r^+)). \quad (2.29)$$

Sucede de la misma manera para el lado izquierdo x_l del elemento K_j . Donde ζ_h y u_h son las aproximaciones locales hechas en el elemento correspondiente.

Analicemos la primera de estas ecuaciones, la aproximación $\zeta_h(x_r^-)$ se corresponde con la aproximación de ζ hecha por la izquierdo de x_r , esto es en el elemento K , ζ_h^k . Por el otro lado $\zeta_h(x_r^+)$ corresponde a la aproximación de ζ por el lado derecho de x_r , que le corresponde a la aproximación de la solución en el elemento $K + 1$, ζ_h^{k+1} . Ambas aproximaciones son evaluadas en $x = x_r$, y recordando las propiedades de los polinomios de Lagrange, podemos ver que

$$\begin{aligned} \zeta_h^k(x_r^k) &= \hat{\zeta}_0^k N_0^k(x_r^k) + \hat{\zeta}_1^k N_1^k(x_r^k) = \hat{\zeta}_1^k \\ \zeta_h^{k+1}(x_r^k) &= \hat{\zeta}_0^{k+1} N_0^{k+1}(x_l^{k+1}) + \hat{\zeta}_1^{k+1} N_1^{k+1}(x_l^{k+1}) = \hat{\zeta}_0^{k+1} \end{aligned}$$

Por lo que los flujos numéricos se pueden reescribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\zeta_h)(x_r) &= \hat{f}(\hat{\zeta}_1^k, \hat{\zeta}_0^{k+1}) \\ \hat{f}(u_h)(x_r) &= \hat{f}(\hat{u}_1^k, \hat{u}_0^{k+1}) \end{aligned}$$

Así obtenemos las siguientes ecuaciones,

$$\frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \end{bmatrix} = \frac{g}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_0 \\ \hat{\zeta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{f}(\hat{\zeta}_1^{k-1}, \hat{\zeta}_0^k) \\ -\hat{f}(\hat{\zeta}_1^k, \hat{\zeta}_0^{k+1}) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_0 \\ \hat{\zeta}_1 \end{bmatrix} = \frac{-lH_0(x_l + 2x_r)}{6L} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{f}(\hat{u}_1^{k-1}, \hat{u}_0^k) \\ -\hat{f}(\hat{u}_1^k, \hat{u}_0^{k+1}) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

en este caso se consideró que $H(x) = xH_0/L$.

Podemos despejar el lado izquierdo de las ecuaciones anteriores, y suponiendo que la inversa de la matriz de masa existe, reescribiendo las ecuaciones como,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_h &= L_h(u_h, \zeta_h), \\ \frac{d}{dt} \zeta_h &= L_h(u_h, \zeta_h). \end{aligned}$$

2.2. Flujo numérico

Uno de los papeles que cumple el flujo numérico es la transmisión de información a través de los elementos que no tienen conexión unos con otros. Si revisamos a detalle podemos notar que las matrices de masa y amortiguamiento dependen únicamente de los valores locales que se encuentran dentro del elemento donde fueron calculadas, de tal manera que sin ninguna forma de comunicación los valores que tienen solo cambiarían internamente sin ser capaces de recibir o transmitir información de dichos valores. Esto implica que no se pueda recuperar la solución global de las soluciones locales. A grandes rasgos, las soluciones que podríamos obtener del método sin la presencia de los flujos numéricos, carecen fundamentalmente de sentido físico.

Otra de las funciones del flujo numérico, de gran importancia, es garantizar la estabilidad del método al simular el flujo de información de la PDE en la que se aplica.

Habiendo establecido la importancia del flujo numérico procedemos con las características que debe de cumplir,

- En las discontinuidades internas el flujo debe depender únicamente de dos valores de la solución aproximada, esto es

$$(u)_{x_j}^* = \hat{f}(u_h)(x_j) = \hat{f}(u_h(x_j^-), u_h(x_j^+)),$$

esta definición es conveniente para su implementación ya que podemos hacer funciones “receta” para la forma del flujo que deseamos de tal manera que el mapeo $(a, b) \mapsto \hat{f}(a, b)$, sea sencillo de evaluar sin importar la forma que tengan las soluciones locales.

- El flujo debe de ser consistente, esto es

$$\hat{f}(a, a) = f(a).$$

- El flujo debe elegirse de tal manera que cuando el método tienda a la aproximación de volumen finito, aproximación constante, el método debe dar pie a un esquema monótono. Esto por la propiedad de dichos esquemas de estabilidad y convergencia a la solución exacta.
- Para que el punto anterior se cumpla es necesario requerir que nuestro flujo sea no decreciente en el primer argumento, $a \mapsto \hat{f}(a, \cdot)$, y que el segundo argumento, $b \mapsto \hat{f}(\cdot, b)$, sea no creciente.

A continuación se presentan los principales flujos utilizados en ecuaciones escalares,

- Godunov:

$$\hat{f}(a, b) = \begin{cases} \min_{a \leq u \leq b} f(u), & \text{si } a \leq b \\ \max_{b \leq u \leq a} f(u), & \text{de otro modo} \end{cases}$$

- Lax-Friedrichs:

$$\hat{f}(a, b) = \frac{1}{2} [f(a) + f(b) - C(b - a)], \quad \text{con}$$

$$C = \max_{\inf u^0(x) \leq s \leq \sup u^0(x)} |f'(s)|$$

- Engquist-Osher:

$$\hat{f}(a, b) = \int_0^b \min(f'(s), 0) ds + \int_0^a \max(f'(s), 0) ds + f(0)$$

En nuestro caso estamos trabajando con sistemas de ecuaciones, y algunos de los flujos usados directamente en su forma escalar (aplicados a cada ecuación del sistema) nos conduce a soluciones inestables que no convergen, por lo tanto es necesario especificar los flujos para sistemas. Empezamos a definir el flujo numérico en el caso multidimensional como,

$$\widehat{f \cdot n_k}(u_h), \quad (2.32)$$

que se puede ver como un flujo unidimensional aplicado a la normal de la frontera donde se está aplicando. A continuación profundizaremos en los diferentes elementos que lo componen para poder ganar un mayor entendimiento del mismo. Si consideramos dos elementos adyacentes K^+ y K^- , con x un punto en la frontera que comparten ambos elementos de los cuales los vectores normales n_{K^\pm} se encuentran bien definidos, establecemos que,

$$u_h^\pm(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_h(x - \varepsilon n_{K^\pm})$$

que son los valores de la aproximación de u por la izquierda o la derecha y que llamaremos las trazas de u_h del interior de K^\pm . Así como para el caso unidimensional, donde el flujo en la discontinuidad dependía solo de dos valores, en este caso hacemos que dependa de las trazas en la discontinuidad x , esto es,

$$\widehat{f \cdot n_k^-}(u_h)(x) = \widehat{f \cdot n_k^-}(u_h^-(x), u_h^+(x)), \quad (2.33)$$

al que, como en el caso unidimensional también pedimos que sea consistente,

$$\widehat{f \cdot n_k^-}(a, a) = f(a) \cdot n_{K^-},$$

también queremos que en la aproximación constante, la discretización espacial de Galerkin discontinuo devenga a un esquema monótono de volumen finito, esto se logra cuando exigimos que el flujo numérico sea conservativo,

$$\widehat{f \cdot n_k^-}(u_h^-(x), u_h^+(x)) + \widehat{f \cdot n_k^+}(u_h^+(x), u_h^-(x)) = 0,$$

junto con las condiciones de crecimiento y decrecimiento, similares a las condiciones unidimensionales. Los flujos son similares al caso unidimensional con la cualidad de ser multiplicados

por el vector normal.

Para continuar el camino hacia la definición de un flujo numérico adecuado para nuestro problema de varias variables dependientes, el sistema del canal rectangular, definimos primero los operadores de promedio $\{\cdot\}$ y de salto $[\cdot]$, estos operadores son usados normalmente en la descripción de problemas elípticos, estos son,

$$\begin{aligned}\{u_h\} &= \frac{1}{2} (u_h^+ + u_h^-), \quad y \\ [u_h] &= u_h^+ n_{K^-} + u_h^- n_{K^+}.\end{aligned}$$

Cuando trabajamos con sistemas multidimensionales hiperbólicos, una elección conveniente es el flujo Lax-Friedrichs local, debido a que es fácilmente aplicado a cualquier sistema hiperbólico, es sencillo de calcular y en general brinda buenos resultados. Recordemos que para estos casos u es un vector y $f(u)$ es una matriz, de tal manera que definimos el flujo como,

$$\hat{f}_j(u_h^-, u_h^+) = \{f_j(u_h)\} - \frac{C}{2} [(u_h)_j]$$

donde j indica que nos referimos a la j -ésima fila del vector (o matriz).

En (Cockburn y Shu, 2001), mencionan que es posible aplicar el método de Galerkin discontinuo de manera sencilla a ecuaciones hiperbólicas de alto orden (por ejemplo la ecuación de onda, $u_{tt} - c^2 u_{xx}$) si las reescribimos como un sistema de ecuaciones de primer orden de la siguiente manera,

$$U_t + \nabla \cdot F(U) = 0,$$

con

$$U = \begin{bmatrix} q \\ u \end{bmatrix}, \quad F(U) = - \begin{bmatrix} u & 0 \\ c^2 q & 0 \end{bmatrix},$$

que se ve como el siguiente sistema (considerando un problema en una dimensión),

$$\begin{aligned}q_t - u_x &= 0, \\ u_t - c^2 q_x &= 0,\end{aligned}$$

si observamos es muy similar a nuestro sistema del canal rectangular en las ecuaciones (2.1) y (2.2), el cual podemos reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}u_t + \zeta_x &= 0 \\ \zeta_t + c^2 u_x &= 0\end{aligned}$$

con $c = \sqrt{h_0 g}$ asumiendo en este caso que $H(x) = h_0$, es constante. Si desarrollamos nos encontramos que los flujos que tenemos que calcular son $\hat{\zeta}$ y $\widehat{c^2 u}$ que podemos encontrar fácilmente utilizando el flujo numérico $\hat{F}(U)$, por ejemplo, al flujo Lax-Friedrichs del término anterior le corresponden,

$$\hat{\zeta}_h = \{\zeta_h\} + \frac{|c|}{2} [u_h]$$

y

$$\widehat{c^2 u}_h = c^2 \{u_h\} + \frac{|c|}{2} [\zeta_h].$$

2.3. Discretización temporal, el método de Runge-Kutta

Discretizamos nuestro sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias por medio del siguiente método RK:

1. Hacer $u_h^{(0)} = u_h^{(n)}$ y $\zeta_h^{(0)} = \zeta_h^{(n)}$.
2. Para $i = 1, \dots, \nu$ calcular las funciones intermedias:

$$u_h^{(i)} = \sum_{l=0}^{i-1} \left(\alpha_{il} u_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t L_h(u_h^{(l)}, \zeta_h^{(l)}) \right),$$

$$\zeta_h^{(i)} = \sum_{l=0}^{i-1} \left(\alpha_{il} \zeta_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t L_h(u_h^{(l)}, \zeta_h^{(l)}) \right).$$

3. Hacer $u_h^{(n+1)} = u_h^{(\nu)}$ y $\zeta_h^{(n+1)} = \zeta_h^{(\nu)}$.

El RK de orden 1 es un Euler hacia atrás

$$u_h^{(1)} = u_h^{(0)} + \Delta t L_h(u_h^{(0)}, \zeta_h^{(0)}).$$

Presentamos también las expresiones para RK de orden 2,

$$u_h^{(1)} = u_h^{(0)} + \Delta t L_h(u_h^{(0)}, \zeta_h^{(0)}),$$

$$u_h^{(2)} = \frac{1}{2} u_h^{(0)} + \frac{1}{2} u_h^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t L_h(u_h^{(1)}, \zeta_h^{(1)}),$$

y para RK de orden 3,

$$u_h^{(1)} = u_h^{(0)} + \Delta t L_h(u_h^{(0)}, \zeta_h^{(0)}),$$

$$u_h^{(2)} = \frac{3}{4} u_h^{(0)} + \frac{1}{4} u_h^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L_h(u_h^{(1)}, \zeta_h^{(1)}),$$

$$u_h^{(3)} = \frac{1}{3} u_h^{(0)} + \frac{2}{3} u_h^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L_h(u_h^{(2)}, \zeta_h^{(2)}).$$

El mismo método en sus diferentes ordenes se utiliza para actualizar la solución ζ_h^{n+1} .

2.4. Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales las discretizamos de la siguiente manera,

$$\int_K u_h(x, 0) v(x) dx = \int_K u_0(x) v(x) dx, \quad (2.34)$$

donde recordamos que u_h es la expansión en x de la aproximación de la solución local, esto es

$$u_h(x, 0) = \sum_{i=0}^n \hat{u}_i(0) \varphi_i(x).$$

Caso lineal

Considerando de nuevo los polinomios de Lagrange, y el caso de $n = 1$ tenemos entonces el siguiente resultado para obtener los coeficientes modales de las condiciones iniciales,

$$\frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_0(0) \\ \hat{u}_1(0) \end{bmatrix} = \int_K u_0(x) \begin{bmatrix} \varphi_0(x) \\ \varphi_1(x) \end{bmatrix} dx, \quad (2.35)$$

donde los valores del lado derecho dependen claramente de la función de las condiciones iniciales.

2.5. Condiciones de frontera

Utilizaremos las condiciones que encontramos en las ecuaciones (2.5) y (2.6) para desarrollar el tratamiento que estas reciben en el método de Galerkin discontinuo. Nos concentramos en el elemento del extremo izquierdo, donde tenemos que $u(0, t) = 0$, la cual es una condición de tipo Dirichlet. Calculamos entonces el flujo numérico en el nodo $x = 0$ que es donde se aplica la condición de frontera,

$$\hat{f}(u_h)(0) = \hat{f}(u^-(0), u_h^+(0))$$

donde u_h^+ como ya sabemos corresponde con la aproximación por el lado derecho de u . Podrá notarse que para el lado izquierdo no se utilizó el subíndice h debido a que no usamos la aproximación en ese punto, sino que utilizamos el valor conocido de u dado por la condición de frontera, de tal manera que tenemos,

$$u^-(0) = u(0, t)$$

con lo que las ecuaciones que la incluyan quedan bien definidas.

Ahora encontramos que no tenemos información de ζ en el lado izquierdo, para solventar este problema usaremos un nodo fantasma a la izquierda de $x = 0$, que denotaremos como x_{-1} aunque no necesariamente se encuentre en $x = -1$ y extrapolaremos de manera lineal el valor que tiene ahí de la siguiente manera,

$$\zeta(x_{-1}) = 2\zeta(x = 0) - \zeta(x = 1)$$

y utilizamos este valor como ζ^- dentro del flujo numérico que lo utiliza

$$\hat{f}(\zeta)(0) = \hat{f}(\zeta^-, \zeta_h^+).$$

La aproximación por la derecha está bien definida en este caso.

Así aplicamos las condiciones Dirichlet en cualquiera de los extremos de nuestra malla.

2.6. Ejemplos

Trabajaremos tres ejemplos diferentes de la función $H(x)$ para presentar los resultados. Uno de ellos será un problema de valores iniciales y los otros dos un problema de valores en la frontera. Los tiempos en los que se muestran los resultados dependen del comportamiento que se espera ver para cada ejemplo.

2.6.1. Fondo constante

A este ejemplo le corresponde la siguiente función para la profundidad,

$$H(x) = H_0,$$

y en la figura 2.1 podemos apreciar un esquema del modelo. Para este ejemplo trabajamos un

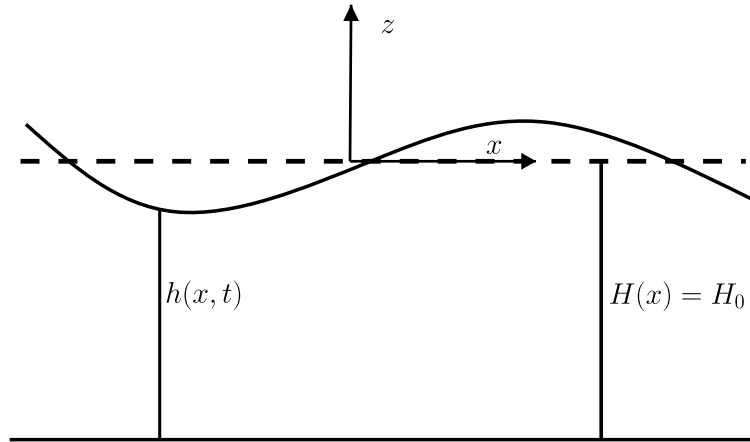


Figura 2.1: Esquema del canal rectangular con fondo constante

problema de valores iniciales y consideramos una frontera periódica. Las condiciones iniciales están dadas por,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x, 0) &= \exp(-0.5(x - L/2)^2) \\ \zeta(x, 0) &= \exp(-0.5(x - L/2)^2) \end{aligned}$$

2.6.2. Fondo inclinado

En este ejemplo la función que describe el fondo (o la profundidad) es

$$H(x) = \frac{xH_0}{L}.$$

En la figura 2.2 se muestra el diagrama de este modelo. Para este relieve resolvemos el problema de valores en la frontera con las condiciones (2.5) y (2.6). En este caso nos interesa la solución cuando se encuentra proxima al extremo izquierdo.

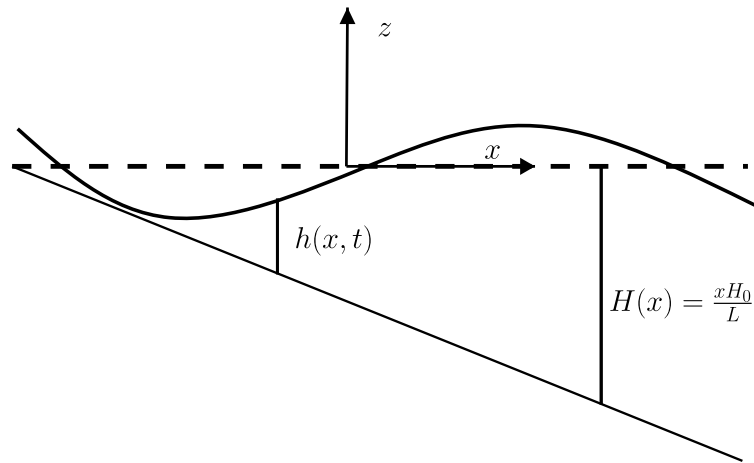


Figura 2.2: Esquema del canal rectangular con fondo inclinado

2.6.3. Fondo con discontinuidad

Para este ejemplo la función que nos describe el relieve del fondo la podemos escribir como,

$$H(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}H_0, & 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ H_0, & \frac{L}{2} \leq x < L \end{cases},$$

en la figura 2.3 se encuentra el esquema del modelo. Resolvemos el mismo problema de valores

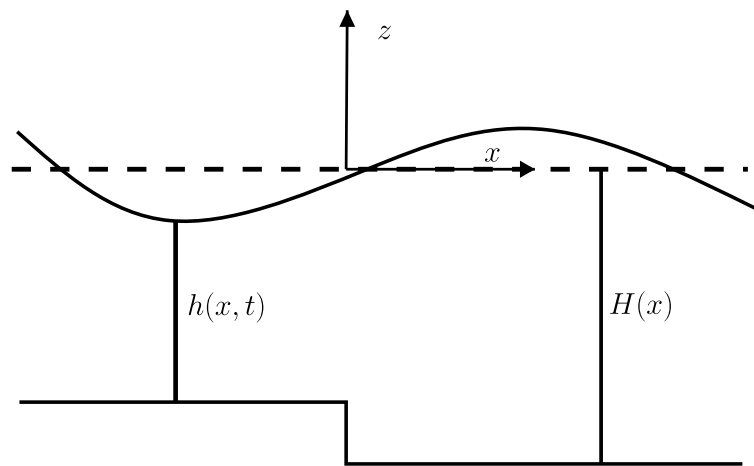


Figura 2.3: Esquema del canal rectangular con fondo discontinuo

en la frontera de la sección 2.6.2. En este ejemplo nos interesa la solución cuando se encuentra adelante (considerando de derecha a izquierda) de la discontinuidad.

2.7. Resultados

Primero mostraremos las soluciones obtenidas en distintos tiempos para los diferentes ejemplos.

2.7.1. Fondo constante

En la figura 2.4 podemos apreciar los resultados obtenidos de la sección 2.6.1, su comportamiento es, como cabe esperar, igual a la solución de un pulso de la ecuación de onda, que son dos ondas viajeras en sentidos contrarios de la misma forma pero de menor magnitud.

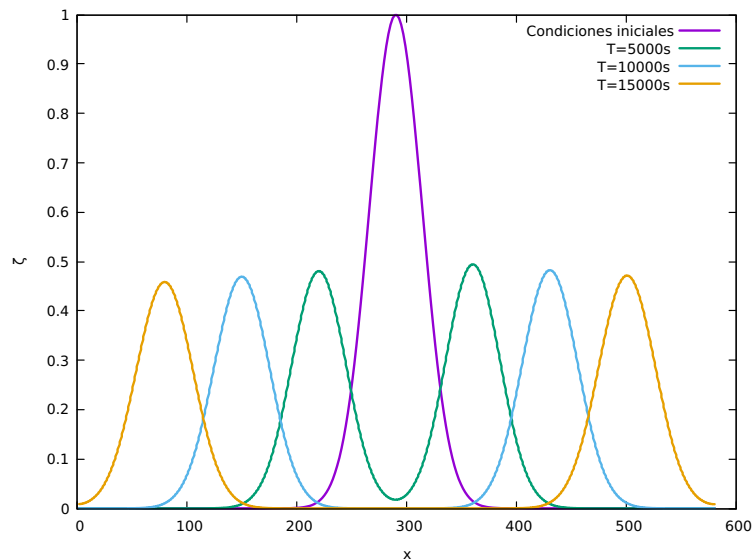


Figura 2.4: Resultados del canal rectangular con fondo constante a diferentes tiempos

En la figura 2.5 podemos observar la comparación en $T = 10000s$ con la solución exacta al mismo tiempo

2.7.2. Fondo inclinado

Los resultados de 2.6.2 se encuentran en la figura 2.6. De acuerdo con el modelo reportado en [1], la longitud de onda de cada “ola” se reduce al acercarse al lado izquierdo menos profundo, mientras que la amplitud va aumentando, este comportamiento se observa en la solución,

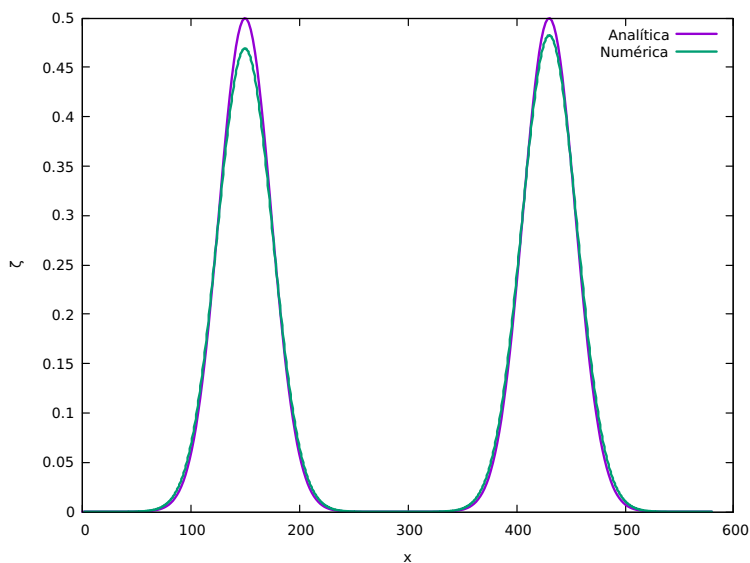


Figura 2.5: Comparación de la solución numérica y la solución exacta

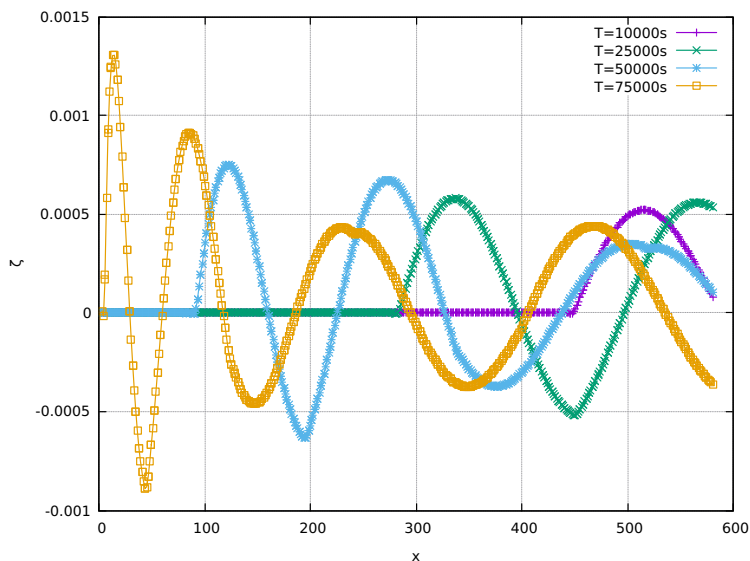


Figura 2.6: Resultados del canal rectangular con fondo inclinado a diferentes tiempos

2.7.3. Fondo discontinuo

En la figura 2.7 encontramos los resultados de la sección 2.6.3, el comportamiento esperado de acuerdo al desarrollo mostrado por Billingham en [1], es que la amplitud de la onda incidente del lado donde la profundidad es menor aumente respecto a la amplitud en la zona de mayor profundidad, que corresponde a los resultados mostrados en la figura 2.7. Los valores irregulares en la solución obtenida en $T = 25000s$ (curva verde) se encuentran al rededor de la discon-

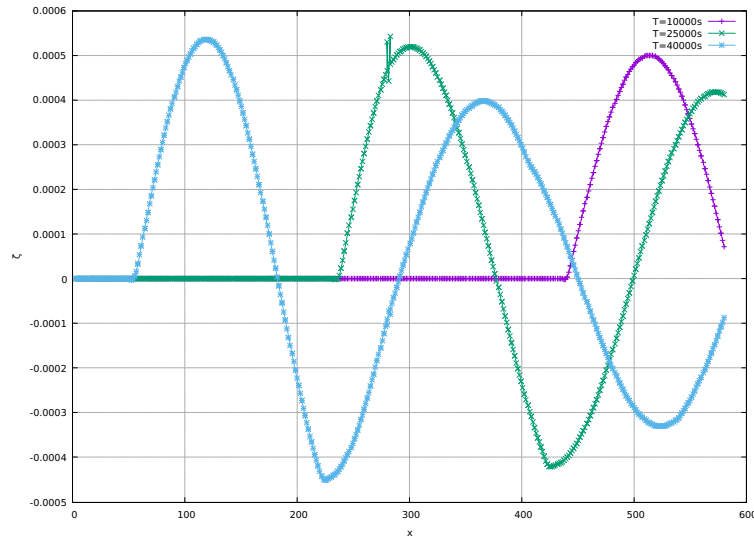


Figura 2.7: Resultados del canal rectangular con fondo discontinuo a diferentes tiempos

tinuidad, y al no recibir un tratamiento especial en este punto la solución intenta mantener sus propiedades por lo que se observa ese comportamiento, sin embargo la solución general no propaga este error y en $T = 40000s$ (curva azul) el comportamiento errático al rededor de la discontinuidad disminuye siendo apreciable unicamente con un acercamiento a los datos.

2.7.4. Convergencia respecto a la malla

En la figura 2.8 se muestra la convergencia de la solución de acuerdo al refinamiento de la malla utilizando el problema de la sección 2.6.2 en $T = s$, las simulaciones se realizaron con 100, 300, 700 y 1000 nodos, puede verse como a través del refinamiento de la malla la solución no sufre de grandes cambios ni de fase ni amplitud como uno esperaría si el método no fuera convergente.

2.7.5. Resultados con otros flujos numéricos

Como se ha mencionado, la elección del flujo numérico es crucial para el método, si el flujo no es el correcto se obtienen resultados que carecen de sentido, por lo tanto, a continuación y por completez se muestran resultados con un flujo numérico central a $t = 1000s$ en la Figura 2.9, $t = 10000s$ en la Figura 2.10 y para resaltar el hecho de que la solución pierde relación con la realidad también mostramos un resultado a $t = 50000s$ que se puede observar en la Figura 2.11. Se hacen comparaciones con un flujo Lax-Friedrichs local a los mismos tiempos. Es preciso notar que a los 50000s los valores de la altura de la superficie libre obtenidos con el flujo central rondan los $200km$ mientras que los valores esperados y los obtenidos con el flujo Lax-Friedrichs local son de el orden de $10^{-4}km$ (centímetros), estos últimos valores parecen constantes y cero cuando se comparan con la solución del flujo central.

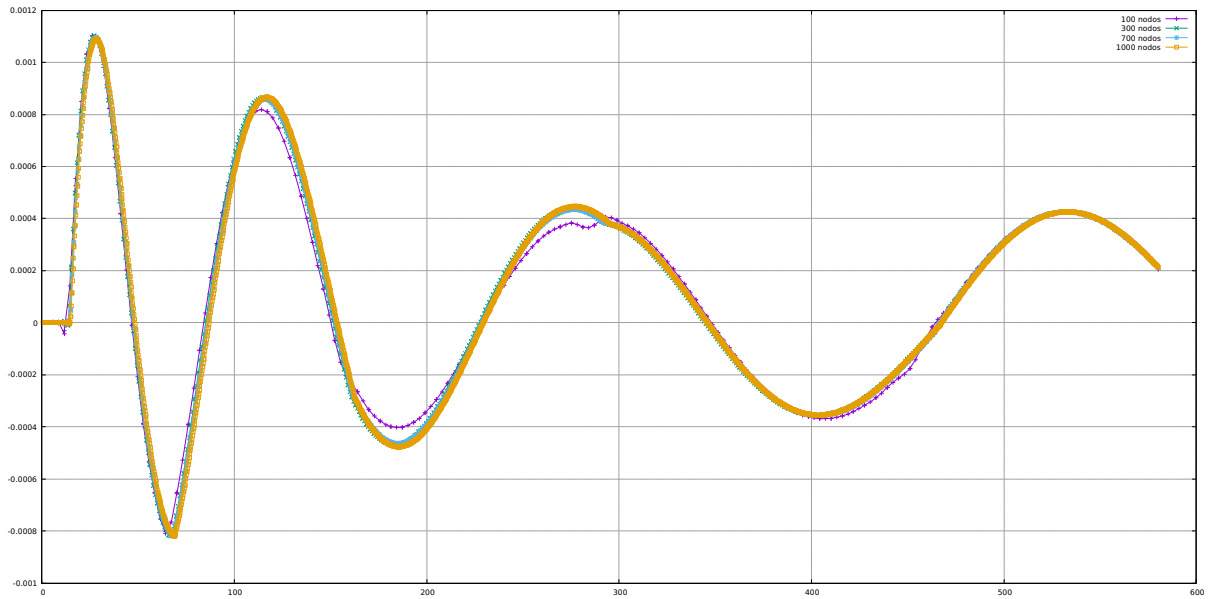


Figura 2.8: Convergencia de la solución al refinar la malla

2.7.6. Tiempos de ejecución

En la tabla 2.1 se muestran los tiempos promedio de las ejecuciones para 300 y 600 nodos a 10000s, 50000s y 100000s del sistema. Los datos se obtuvieron con el comando `time` de linux, haciendo 10 ejecuciones de cada caso y promediando los tiempos obtenidos.

Tabla 2.1: Tiempos promedio de ejecución.

	$T = 10000s$	$T = 50000s$	$T = 100000s$
300 nodos	0.0813s	0.3752s	0.7037s
600 nodos	0.2989s	1.4280s	2.7855s

Las ejecuciones se realizaron en un procesador Intel(R) Core(TM) i5-6300HQ CPU @ 2.30GHz de cuatro núcleos y un hilo por núcleo.

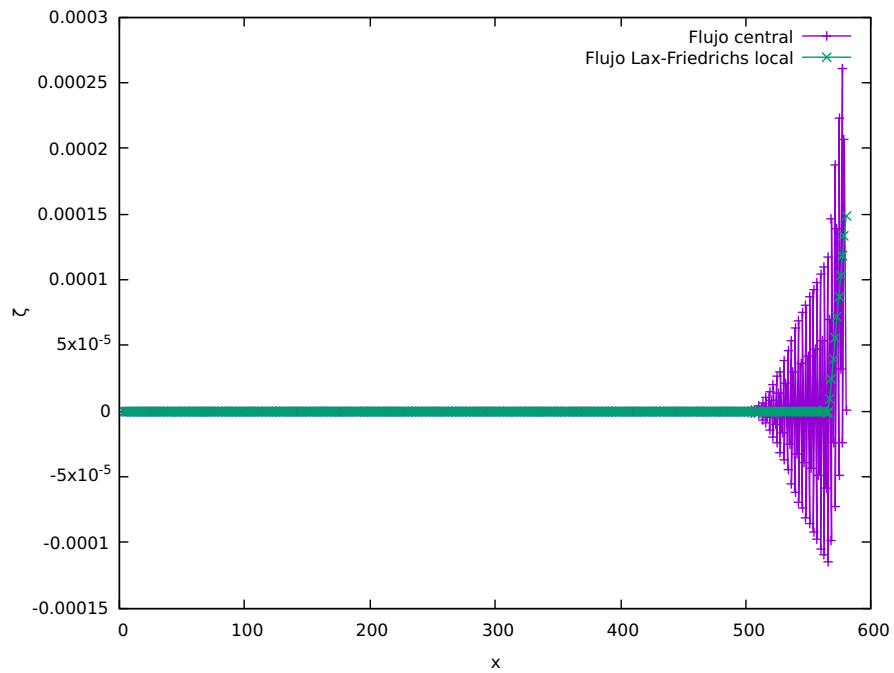


Figura 2.9: Comparación del flujo central y Lax-Friedrichs local a 1000 segundos

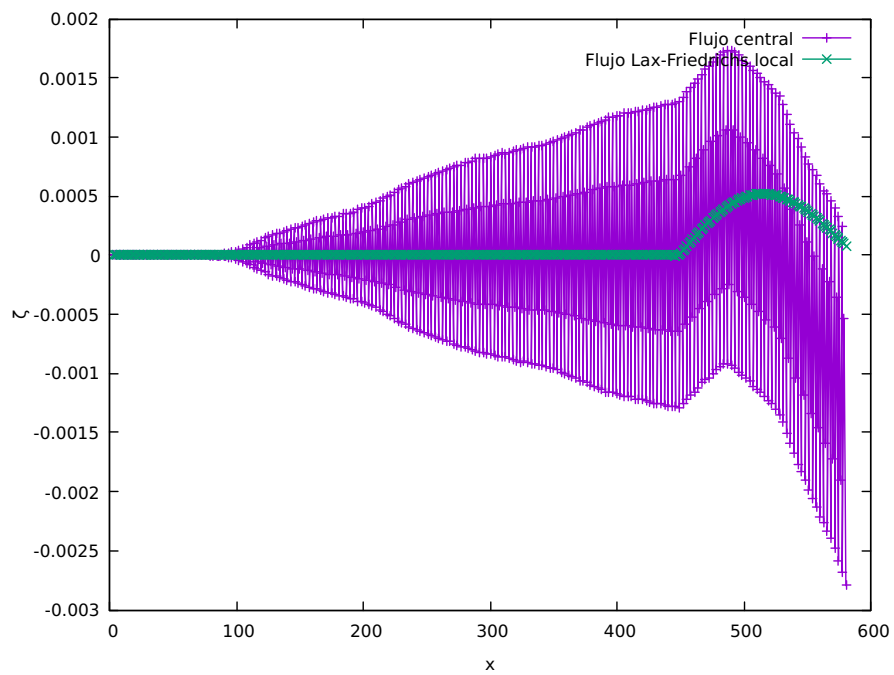


Figura 2.10: Comparación del flujo central y Lax-Friedrichs local a 10000 segundos

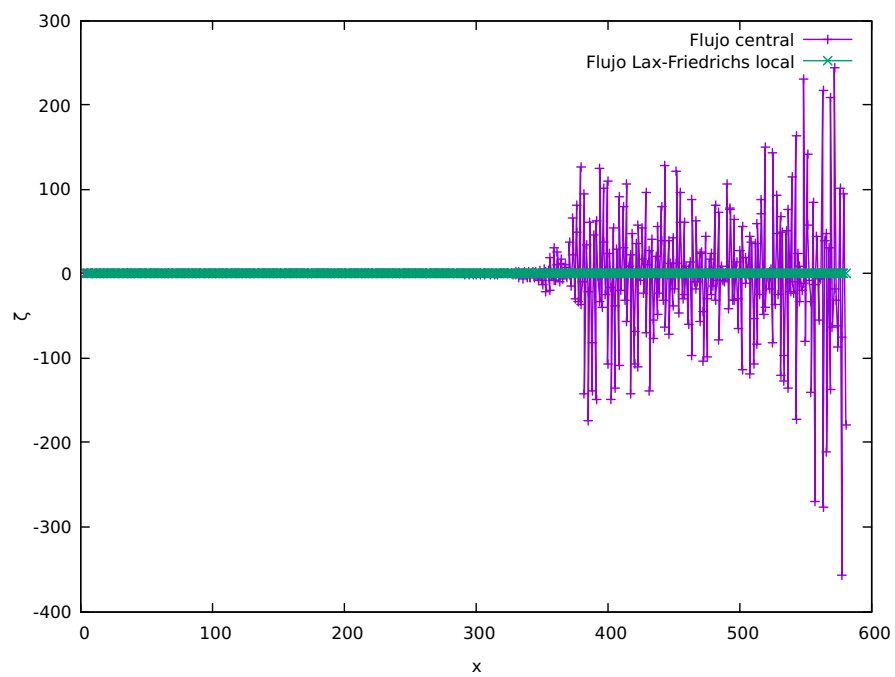


Figura 2.11: Comparación del flujo central y Lax-Friedrichs local a 50000 segundos

Capítulo 3

Capas de Ekman, operador de difusión

3.1. Discretización espacial

Retomando las ecuaciones de las capas de Ekman

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = fv, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -fu. \quad (3.2)$$

Este par de ecuaciones se pueden reescribir como un sistema de ecuaciones de primer orden si introducimos las variables auxiliares

$$\mu = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

y

$$\eta = -\frac{\partial v}{\partial z}$$

de tal manera que se obtiene

$$\mu + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (A_z \mu)}{\partial z} = fv, \quad (3.4)$$

$$\eta + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (A_z \eta)}{\partial z} = -fu. \quad (3.6)$$

Ya que tenemos este sistema, nos es posible apreciar que cada una de las variables pertenece a \mathbb{R} por lo que, siguiendo con el esquema de Galerkin discontinuo, podemos multiplicar por la

misma función de prueba w a todas las ecuaciones e integrar,

$$\begin{aligned} \int_K \left(\mu + \frac{\partial u}{\partial z} \right) w &= 0, \\ \int_K \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (A_z \mu)}{\partial z} - fv \right) w &= 0, \\ \int_K \left(\eta + \frac{\partial v}{\partial z} \right) w &= 0, \\ \int_K \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (A_z \eta)}{\partial z} + fu \right) w &= 0. \end{aligned}$$

Separando los términos e integrando por partes los términos con derivadas en el espacio,

$$\begin{aligned} \int_K w \mu dz - \int_K w_z u dz + \int_{\partial K} \hat{n}(u)^* w dz &= 0 \\ \int_K w u_t dz - \int_K w_z A_z \mu dz + \int_{\partial K} \hat{n}(A_z \mu)^* w dz &= \int_K w f v dz \\ \int_K w \eta dz - \int_K w_z v dz + \int_{\partial K} \hat{n}(v)^* w dz &= 0 \\ \int_K w v_t dz - \int_K w_z A_z \eta dz + \int_{\partial K} \hat{n}(A_z \eta)^* w dz &= - \int_K w f u dz \end{aligned}$$

Ahora representamos las soluciones locales para u , μ , v y η en términos de la base local de polinomios de orden N ,

$$\begin{aligned} u_h(z, t) &= \sum_{i=0}^N \hat{u}_i(t) \varphi(z), \\ \mu_h(z, t) &= \sum_{i=0}^N \hat{\mu}_i(t) \varphi(z), \\ v_h(z, t) &= \sum_{i=0}^N \hat{v}_i(t) \varphi(z), \\ \eta_h(z, t) &= \sum_{i=0}^N \hat{\eta}_i(t) \varphi(z), \end{aligned}$$

por lo que podemos expresar las soluciones como productos punto,

$$\begin{aligned} u_h(z, t) &= \boldsymbol{\varphi}(z) \mathbf{u}^T(t) \\ \mu_h(z, t) &= \boldsymbol{\varphi}(z) \boldsymbol{\mu}^T(t), \\ v_h(z, t) &= \boldsymbol{\varphi}(z) \mathbf{v}^T(t), \\ \eta_h(z, t) &= \boldsymbol{\varphi}(z) \boldsymbol{\eta}^T(t), \end{aligned}$$

con $\boldsymbol{\varphi}(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_N(z)]$, $\mathbf{u}(t) = [\hat{u}_0(t), \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N]$, $\boldsymbol{\mu}(t) = [\hat{\mu}_0(t), \hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_N]$, $\mathbf{v}(t) = [\hat{v}_0(t), \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_N]$ y $\boldsymbol{\eta}(t) = [\hat{\eta}_0(t), \hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_N]$. Ahora dentro de nuestro esquema consideramos que $w(z) = \varphi_i(z)$, con lo que obtenemos los siguientes sistemas,

$$\begin{aligned}
& \int_K \varphi_0(z) \boldsymbol{\varphi}(z) \boldsymbol{\mu}^T(t) dz - \int_K (\varphi_0(z))_z \boldsymbol{\varphi}(z) \mathbf{u}^T(t) dz + \int_{\partial K} \varphi_0 \hat{n}(u)^* dz = 0 \\
& \int_K \varphi_1(z) \boldsymbol{\varphi}(z) \boldsymbol{\mu}^T(t) dz - \int_K (\varphi_1(z))_z \boldsymbol{\varphi}(z) \mathbf{u}^T(t) dz + \int_{\partial K} \varphi_1 \hat{n}(u)^* dz = 0 \\
& \hspace{15em} \vdots \\
& \int_K \varphi_N(z) \boldsymbol{\varphi}(z) \boldsymbol{\mu}^T(t) dz - \int_K (\varphi_N(z))_z \boldsymbol{\varphi}(z) \mathbf{u}^T(t) dz + \int_{\partial K} \varphi_N \hat{n}(u)^* dz = 0 \\
& \int_K \varphi_0(z) \boldsymbol{\varphi}(z) \mathbf{u}_t^T(t) dz - \int_K (\varphi_0(z))_z \boldsymbol{\varphi}(z) A_z \boldsymbol{\mu}^T(t) dz + \int_{\partial K} \varphi_0 \hat{n}(A_z \boldsymbol{\mu})^* dz = \int_k \varphi_0(z) \boldsymbol{\varphi}(z) f \mathbf{v}^T(t) dz \\
& \int_K \varphi_1(z) \boldsymbol{\varphi}(z) \mathbf{u}_t^T(t) dz - \int_K (\varphi_1(z))_z \boldsymbol{\varphi}(z) A_z \boldsymbol{\mu}^T(t) dz + \int_{\partial K} \varphi_1 \hat{n}(A_z \boldsymbol{\mu})^* dz = \int_k \varphi_1(z) \boldsymbol{\varphi}(z) f \mathbf{v}^T(t) dz \\
& \hspace{15em} \vdots \\
& \int_K \varphi_N(z) \boldsymbol{\varphi}(z) \mathbf{u}_t^T(t) dz - \int_K (\varphi_N(z))_z \boldsymbol{\varphi}(z) A_z \boldsymbol{\mu}^T(t) dz + \int_{\partial K} \varphi_N \hat{n}(A_z \boldsymbol{\mu})^* dz = \int_k \varphi_N(z) \boldsymbol{\varphi}(z) f \mathbf{v}^T(t) dz \\
& \int_K \varphi_0(z) \boldsymbol{\varphi}(z) \boldsymbol{\eta}^T(t) dz - \int_K (\varphi_0(z))_z \boldsymbol{\varphi}(z) \mathbf{v}^T(t) dz + \int_{\partial K} \varphi_0 \hat{n}(v)^* dz = 0 \\
& \int_K \varphi_1(z) \boldsymbol{\varphi}(z) \boldsymbol{\eta}^T(t) dz - \int_K (\varphi_1(z))_z \boldsymbol{\varphi}(z) \mathbf{v}^T(t) dz + \int_{\partial K} \varphi_1 \hat{n}(v)^* dz = 0 \\
& \hspace{15em} \vdots \\
& \int_K \varphi_N(z) \boldsymbol{\varphi}(z) \boldsymbol{\eta}^T(t) dz - \int_K (\varphi_N(z))_z \boldsymbol{\varphi}(z) \mathbf{v}^T(t) dz + \int_{\partial K} \varphi_N \hat{n}(v)^* dz = 0 \\
& \int_K \varphi_0(z) \boldsymbol{\varphi}(z) \mathbf{v}_t^T(t) dz - \int_K (\varphi_0(z))_z \boldsymbol{\varphi}(z) A_z \boldsymbol{\eta}^T(t) dz + \int_{\partial K} \varphi_0 \hat{n}(A_z \boldsymbol{\eta})^* dz = - \int_k \varphi_0(z) \boldsymbol{\varphi}(z) f \mathbf{u}^T(t) dz \\
& \int_K \varphi_1(z) \boldsymbol{\varphi}(z) \mathbf{v}_t^T(t) dz - \int_K (\varphi_1(z))_z \boldsymbol{\varphi}(z) A_z \boldsymbol{\eta}^T(t) dz + \int_{\partial K} \varphi_1 \hat{n}(A_z \boldsymbol{\eta})^* dz = - \int_k \varphi_1(z) \boldsymbol{\varphi}(z) f \mathbf{u}^T(t) dz \\
& \hspace{15em} \vdots \\
& \int_K \varphi_N(z) \boldsymbol{\varphi}(z) \mathbf{v}_t^T(t) dz - \int_K (\varphi_N(z))_z \boldsymbol{\varphi}(z) A_z \boldsymbol{\eta}^T(t) dz + \int_{\partial K} \varphi_N \hat{n}(A_z \boldsymbol{\eta})^* dz = - \int_k \varphi_N(z) \boldsymbol{\varphi}(z) f \mathbf{u}^T(t) dz
\end{aligned}$$

Que se sintetizan en los siguientes sistemas

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\mu}^T(t) - \mathbf{S}_\mu \mathbf{u}^T(t) + \mathbf{F}(u) = 0 \quad (3.7)$$

$$\mathbf{M}\mathbf{u}_t^T(t) - \mathbf{S}_u \boldsymbol{\mu}^T(t) + \mathbf{F}(A_z \mu) = f \mathbf{M}\mathbf{v}^T(t) \quad (3.8)$$

y

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\eta}^T(t) - \mathbf{S}_\eta \mathbf{v}^T(t) + \mathbf{F}(v) = 0 \quad (3.9)$$

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_t^T(t) - \mathbf{S}_v \boldsymbol{\eta}^T(t) + \mathbf{F}(A_z \eta) = -f \mathbf{M}\mathbf{u}^T(t) \quad (3.10)$$

con

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_K \varphi_i(z) \varphi_j(z) dz,$$

$$\mathbf{S}_{aij} = \int_K s_a(z) \frac{\partial \varphi_i(z)}{\partial z} \varphi_j(z) dz,$$

y

$$\mathbf{F}_i(u) = \int_{\partial K} \varphi_i(z) \hat{n}(u)^*$$

Presentamos el caso de elementos lineales como ejemplo,

3.1.1. Elementos lineales

Consideramos de nuevo los polinomios de Lagrange de grado $n = 1$, de tal manera que tenemos $\varphi_0(x) = N_0(x)$ y $\varphi_1(x) = N_1(x)$ con

$$N_0(x) = \frac{x_r - x}{x_r - x_l}, \quad y$$

$$N_1(x) = \frac{x - x_l}{x_r - x_l}.$$

Calcularemos los coeficientes de las matrices de masa y amortiguamiento.

Podemos observar que la matriz de masa es la misma que se calculó en el capítulo 2, por lo tanto,

$$\mathbf{M} = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ahora calcularemos un par de las matrices de amortiguamiento, \mathbf{S}_μ y \mathbf{S}_u . En este caso los coeficientes que acompañan a las funciones de prueba y sus derivadas dentro de las integrales son constantes, por lo tanto es fácil ver (de acuerdo al procedimiento visto en el capítulo 2) que dichas matrices adquieren la forma,

$$\mathbf{S}_\mu = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{S}_u = \frac{A_z}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los flujos numéricos son acompañados de nuevo por los siguientes vectores,

$$\begin{bmatrix} N_0(x_r) \\ N_1(x_r) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} N_0(x_l) \\ N_1(x_l) \end{bmatrix}$$

que por defición de los polinomios de Lagrange adquieren la forma final de

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Recordamos que los flujos numéricos, en este caso, $(u)^*$, $(v)^*$, $(A_z\mu)^*$ y $(A_z\eta)^*$, deben estar definidos solo por dos valores de las aproximaciones en la discontinuidad. Debido a las propiedades de los polinomios de Lagrange, las aproximaciones por la izquierda y por la derecha dependen solo del valor que les corresponde en ese nodo, de la siguiente forma,

$$(u)^* = \hat{f}(u_h)(x_l) = \hat{f}(u_h(x_l^-), u_h(x_l^+)) = \hat{f}(u_1^{k-1}, u_0^k),$$

$$(A_z\mu)^* = \hat{f}(A_z\mu_h)(x_l) = \hat{f}(A_z\mu_h(x_l^-), A_z\mu_h(x_l^+)) = \hat{f}(A_z\mu_1^{k-1}, A_z\mu_0^k).$$

Teniendo todos estos ingredientes podemos reescribir las ecuaciones originales de la siguiente manera,

$$\frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu}_0 \\ \hat{\mu}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{f}(u_1^{k-1}, u_0^k) \\ -\hat{f}(u_1^k, u_0^{k+1}) \end{bmatrix},$$

$$\frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \end{bmatrix} = \frac{A_z}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu}_0 \\ \hat{\mu}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{f}(A_z\mu_1^{k-1}, A_z\mu_0^k) \\ -\hat{f}(A_z\mu_1^k, A_z\mu_0^{k+1}) \end{bmatrix} + \frac{fl}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix}.$$

Si consideramos que la inversa de la matriz de masa (\mathbf{M}^{-1}) existe, entonces reescribimos las ecuaciones como,

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu}_0 \\ \hat{\mu}_1 \end{bmatrix} = \frac{6}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{f}(u_1^{k-1}, u_0^k) \\ -\hat{f}(u_1^k, u_0^{k+1}) \end{bmatrix} \right), \quad (3.11)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \end{bmatrix} = \frac{6}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \left(\frac{A_z}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu}_0 \\ \hat{\mu}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{f}(A_z\mu_1^{k-1}, A_z\mu_0^k) \\ -\hat{f}(A_z\mu_1^k, A_z\mu_0^{k+1}) \end{bmatrix} \right) + f \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Estas ultimas son un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y las podemos sintetizar como

$$\mu_h = K_h(u_h), \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_h = L_h(\mu_h, v_h). \quad (3.14)$$

3.2. Flujos numéricos

Ya en el capítulo 2.2 se hizo mención de la importancia del flujo numérico, ahora presentaremos de manera directa el flujo que utilizamos para estos problemas, en particular el problema de difusión. Podríamos utilizar por ejemplo el flujo Lax-Friedrichs de la siguiente manera,

$$\hat{f}(u_h) = \{f(u_h)\} + \frac{C}{2} [u_h],$$

la parte que incluye el operador de salto hace referencia a procesos de “up-winding” (aquellos procesos que tienen una dirección preferencial), y en problemas que son esencialmente difusivos está parte no contribuye al flujo numérico por lo que podemos utilizar el flujo promedio o central,

$$\hat{f}(u_h) = \{f(u_h)\}.$$

De esta manera tenemos que los flujos a utilizar en nuestro problema, usando de ejemplo a $(u)^*$ y $(A_z \mu)^*$, son

$$\begin{aligned} \hat{f}(u) &= \{u_h\} = \frac{1}{2} (u_h^- + u_h^+), \quad y \\ \hat{f}(A_z \mu) &= \{A_z \mu_h\} = \frac{A_z}{2} (\mu_h^- + \mu_h^+). \end{aligned}$$

3.3. Discretización temporal

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes lo resolvemos con el método de Runge-Kutta de variación total decreciente (TVD, por sus siglas en inglés), como lo hicimos en la sección 2.3, con una ligera modificación por la aparición de los términos μ y η que no tienen derivadas respecto al tiempo,

1. Hacer $u_h^{(0)} = u_h^{(n)}$ y $v_h^{(0)} = v_h^{(n)}$.
2. Para $i = 1, \dots, \nu$ calcular las funciones intermedias

$$\begin{aligned} u_h^{(i)} &= \sum_{l=0}^{i-1} \left(\alpha_{il} u_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t L_h \left(\mu_h^{(l)}, v_h^{(l)} \right) \right), \\ v_h^{(i)} &= \sum_{l=0}^{i-1} \left(\alpha_{il} v_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t L_h \left(\eta_h^{(l)}, u_h^{(l)} \right) \right). \end{aligned}$$

Actualizar μ y η con sus ecuaciones correspondientes,

$$\begin{aligned} \mu_h^{(i)} &= K_h \left(u_h^{(i)} \right), \\ \eta_h^{(i)} &= K_h \left(v_h^{(i)} \right). \end{aligned}$$

3. Hacer $u_h^{(n+1)} = u_h^{(\nu)}$ y $v_h^{(n+1)} = v_h^{(\nu)}$.
4. Hacer $\mu_h^{(n+1)} = \mu_h^{(\nu)}$ y $\eta_h^{(n+1)} = \eta_h^{(\nu)}$.

3.4. Condiciones iniciales

Como en las secciones anteriores el proceso para discretizar las condiciones iniciales y adecuarlas a nuestro método es muy similar al visto en el capítulo 2,

$$\begin{aligned}\int_K u_h(x, 0)v(x) &= \int_K u_0(x)v(x)dx, \\ \int_K \mu_h(x, 0)v(x) &= \int_K \mu_0(x)v(x)dx,\end{aligned}$$

con u_h y μ_h las aproximaciones de la solución locales,

$$\begin{aligned}u_h(x, 0) &= \sum_{i=0}^n \hat{u}_i(0) \varphi_i(x), \\ \mu_h(x, 0) &= \sum_{i=0}^n \hat{\mu}_i(0) \varphi_i(x).\end{aligned}$$

Del lado izquierdo quedará la matriz de masa, mientras que el lado derecho depende de la función $u_0(x)$, y recordamos que la definición de la variable auxiliar es $\mu = -\frac{\partial u}{\partial x}$ y por lo tanto la ecuación para obtener las condiciones iniciales para μ las obtenemos con,

$$\int_K \mu_h(x, 0)v(x) = - \int_K \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} v(x)dx.$$

3.5. Condiciones de frontera

Para las condiciones de frontera utilizamos las mismas utilizadas por Frank et al. [4] para casos donde existe la variación temporal, para explicar el proceso adoptaremos su notación, de tal manera que utilizamos u_D para referirnos a las condiciones tipo Dirichlet, y g_N para las condiciones tipo Neumann. Para los elementos internos los términos

$$\int_{\partial K} \hat{n}(v)^* w dz, \quad y \tag{3.15}$$

$$\int_K w v_t dz - \int_K w_z A_z \eta dz + \int_{\partial K} \hat{n}(A_z \eta)^* w dz \tag{3.16}$$

se encuentran bien definidos, como se vio en la sección 3.2.

3.5.1. Condiciones tipo Dirichlet

Para el término (3.15) en vez de calcular el flujo como lo indica la sección 3.2, lo reemplazamos directamente por u_D .

Con el término (3.16) utilizamos una de las trazas de $A_z \mu_h$ en específico nos referimos a $A_z \mu_h^-$ y sustituimos el flujo numérico por dicho valor, que podemos ver corresponde al nodo que se encuentra en la frontera con condiciones Dirichlet.

3.5.2. Condiciones tipo Neumann

La aplicación de este tipo de condiciones es muy similar a las anteriores. Para el primer término, (3.15), tomamos la traza interna de u_h , esto es, el valor de u_h en el nodo que encuentra en la frontera tipo Neumann y lo sustituimos directamente por el flujo numérico sin calcular nada más.

Para el segundo término, (3.16), sustituimos el flujo numérico directamente por el valor de la función g_N , de igual manera sin hacer uso de alguna función de flujo numérico.

3.6. Ejemplos

3.6.1. Capas de Ekman superficiales

Para mostrar los resultados utilizaremos una serie de problemas descritos en *Advance Ocean Modelling* [7] sobre las capas de Ekman. Para ello consideremos una columna de agua de 500m de profundidad. Tomamos como parámetro de Coriolis a $f = 1 \times 10^{-4}s^{-1}$, que le corresponde a latitudes medias del hemisferio norte (43°). Tenemos condiciones iniciales iguales a cero, esto es, la columna de agua que consideramos está inicialmente en reposo. Y el modelo es forzado mediante una corriente de viento proveniente del sur con un esfuerzo de $\tau_y = 0.5Pa$. La simulación considera cinco días (432000s) y la magnitud del esfuerzo del viento aumenta linealmente desde cero hasta su valor total durante los dos primeros días para poder evitar la aparición de oscilaciones inerciales fuertes.

Hay que considerar que el esfuerzo producido por el viento entra a nuestro esquema como condiciones de frontera tipo Neumann de la siguiente manera,

$$A_z \mu(0) = A_z \frac{\partial u(0)}{\partial z} = -\frac{\tau_x}{\rho_0},$$

$$A_z \eta(0) = A_z \frac{\partial v(0)}{\partial z} = -\frac{\tau_y}{\rho_0}.$$

En la descripción del problema no mencionan las características de la frontera en el fondo, así que consideramos que se encuentra con el fondo marino y utilizamos condiciones de no deslizamiento por lo que las condiciones que tenemos son de tipo Dirichlet,

$$u(500) = 0ms^{-1},$$

$$v(500) = 0ms^{-1}.$$

De esta manera tenemos definido el problema completamente. Haremos el ejercicio para dos coeficientes de difusividad turbulenta diferentes,

- $A_z = 5 \times 10^{-2}m^2s^{-1}$.
- $A_z = 4 \times 10^{-3}m^2s^{-1}$.

3.6.2. Promedios

Retomando los datos de velocidades (u y v) obtenidos en el ejercicio anterior, calculamos el promedio de las velocidades y la comparamos con la dirección del viento, la teoría sugiere que la dirección del promedio de las velocidades debe ser perpendicular a la dirección del viento, a la derecha en el hemisferio norte y la izquierda en el hemisferio sur.

3.6.3. Hemisferio sur

Repetimos algunos de los calculos hechos en los ejemplos anteriores pero ahora con $f = -1 \times 10^{-4} s^{-1}$ que corresponde a aproximadamente 43° de latitud en el hemisferio sur.

3.7. Resultados

3.7.1. Capas de Ekman superficiales

En la Figura 3.1 se muestra la espiral de Ekman para el primer caso así como los valores que tienen ambas componentes de la velocidad a través de los primeros $100m$ que es la zona afectada por este fenómeno, la llamada *profundidad de la capa de Ekman* definida como la profundidad a la que la velocidad se ha reducido a un 4% de su valor en la superficie y que se calcula como

$$\delta_E = \pi \sqrt{\frac{2A_z}{|f|}},$$

en la Figura 3.2 se muestran los resultados del segundo caso.

3.7.2. Promedio

En la Figura 3.3 se muestra la espiral de Ekman en color morado, junto con un vector que indica la dirección del viento utilizada hacia el norte y otro vector que indica la velocidad promedio sobre $100m$ de la columna de agua con dirección a la derecha de la dirección del viento. De acuerdo con la descripción del ejemplo de la sección 3.6.2 la teoría indica que este vector debe ser perpendicular a la dirección del viento, sin embargo el ángulo entre ambos vectores es de 106° .

3.7.3. Hemisferio sur

En la Figura 3.4 se muestra los resultados del primer caso del ejercicio 1 pero con un parámetro de Coriolis para el hemisferio sur. Se puede observar que la espiral ahora se expande hacia el lado izquierdo (al contrario que la espiral en el hemisferio norte con las mismas condiciones que se abre hacia la derecha). Si obtenemos el promedio de las velocidades podrá observarse que la predicción hecha por la teoría también es correcta ya que este vector promedio apunta hacia la izquierda de la dirección del viento con un ángulo entre ambos vectores de 100° y se puede apreciar en la Figura 3.5.

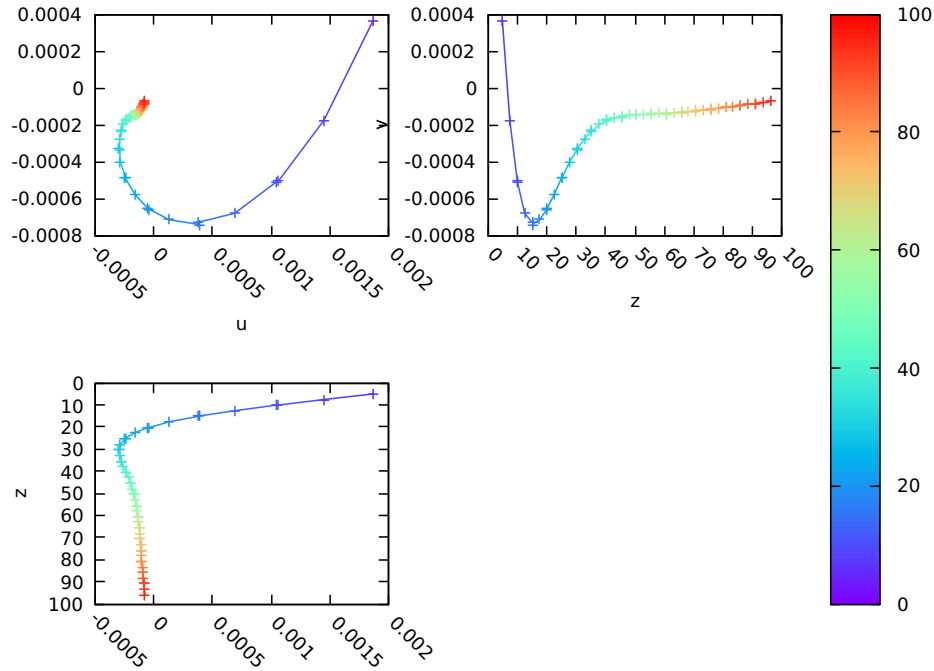


Figura 3.1: Resultados a 100m de las capas de Ekman superficiales, primer caso.

3.7.4. Convergencia

Los problemas de difusión necesitan de elementos de órdenes mayores para poder ser convergentes con el método de Galerkin discontinuo, como se pone de manifiesto en la Figura 3.6 dónde se utilizaron elementos constantes para la simulación y al ir refinando la malla la solución sigue “decreciendo” y aún en el caso de 900 nodos no alcanza el orden de magnitud de las soluciones con elementos de mayor orden.

Si usamos elementos lineales o cuadráticos podemos ver como el método si converge (ver figuras 3.7 y 3.8) ya que al refinar la malla la solución no sufre cambios bruscos y muchos valores coinciden. El refinamiento se hizo utilizando 100, 300, 600 y 900 nodos. En el caso lineal se puede observar un comportamiento con grandes saltos, producto del método intentando mantener el comportamiento de espiral con pocos elementos de primer orden, que aun así la sigue, este comportamiento disminuye al aumentar el número de elementos, pero se sigue manteniendo en menor medida en las zonas de mayor curvatura. Los elementos cuadráticos no parecen mostrar ninguno de los problemas anteriores, es de esperar que elementos parabólicos puedan ajustarse a las zonas con mayor curvatura mejor que elementos lineales. Hay que mencionar que existen esquemas de Galerkin discontinuo para ecuaciones de difusión que tienen soluciones convergentes y que sin embargo no se corresponden con la solución verdadera. La solución a la que convergen también varía con el orden de las soluciones usadas, como lo muestran Cockburn y Shu en [3]. Por ello se muestran en la Figura 3.9 las soluciones obtenidas con elementos lineales y cuadráticos con 900 nodos, donde podemos apreciar que en ambos casos convergen a la misma solución.

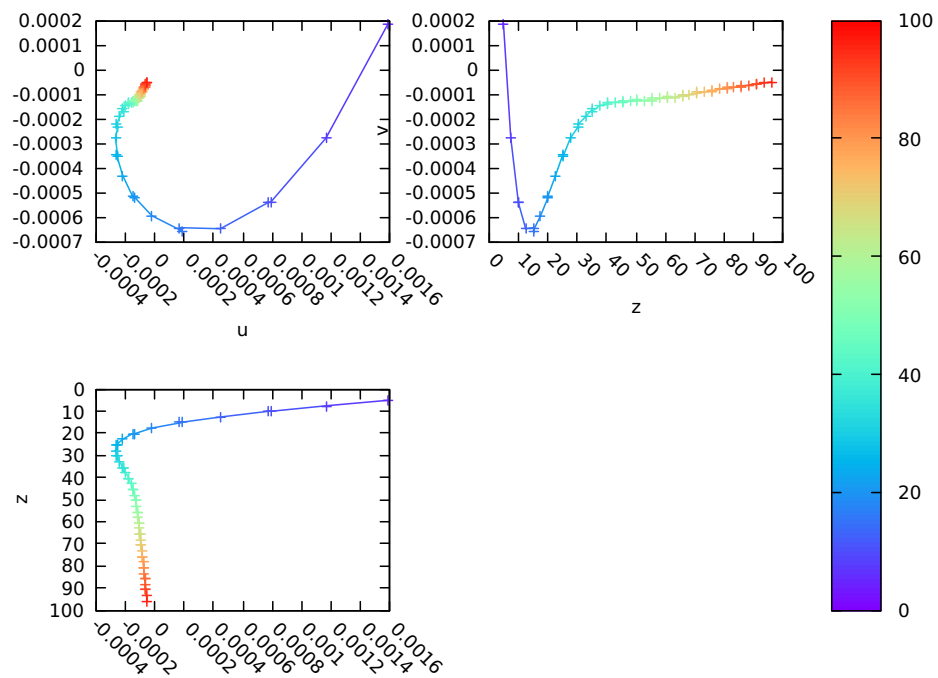


Figura 3.2: Resultados a 100m de las capas de Ekman superficiales, segundo caso.

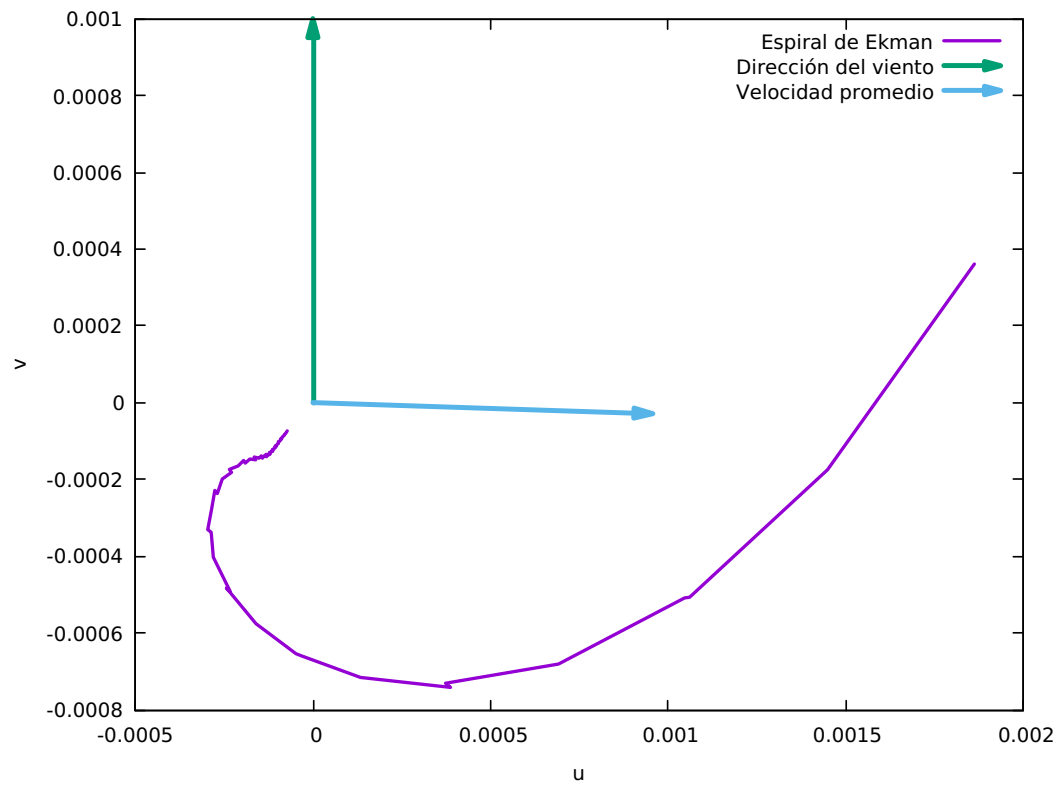


Figura 3.3: Promedio de las velocidades, no es perpendicular a la dirección del viento.

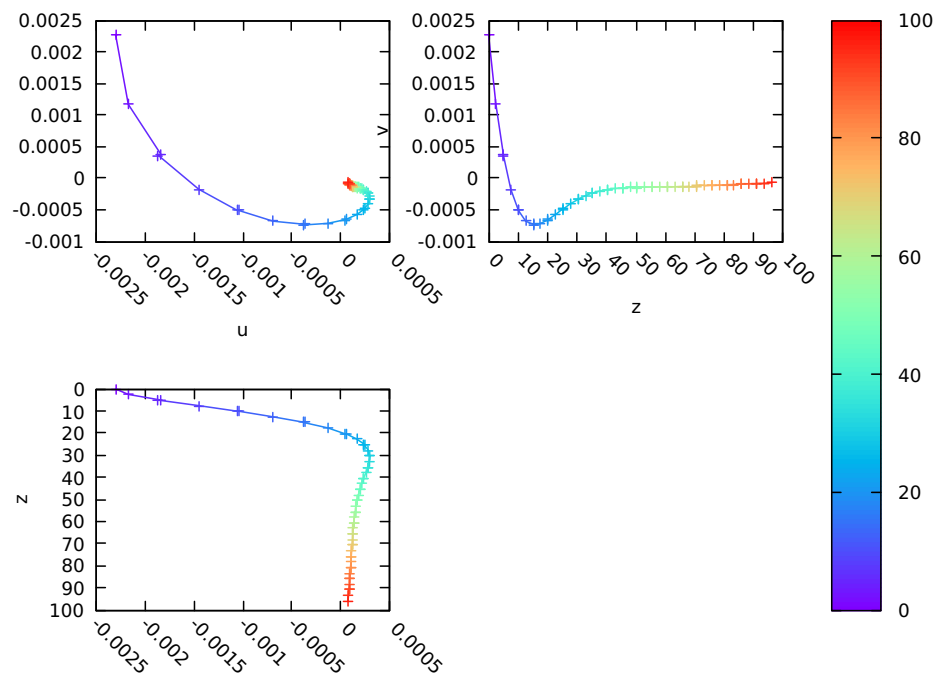


Figura 3.4: Resultados a $100m$ de las capas de Ekman superficiales, primer caso, en el hemisferio sur.

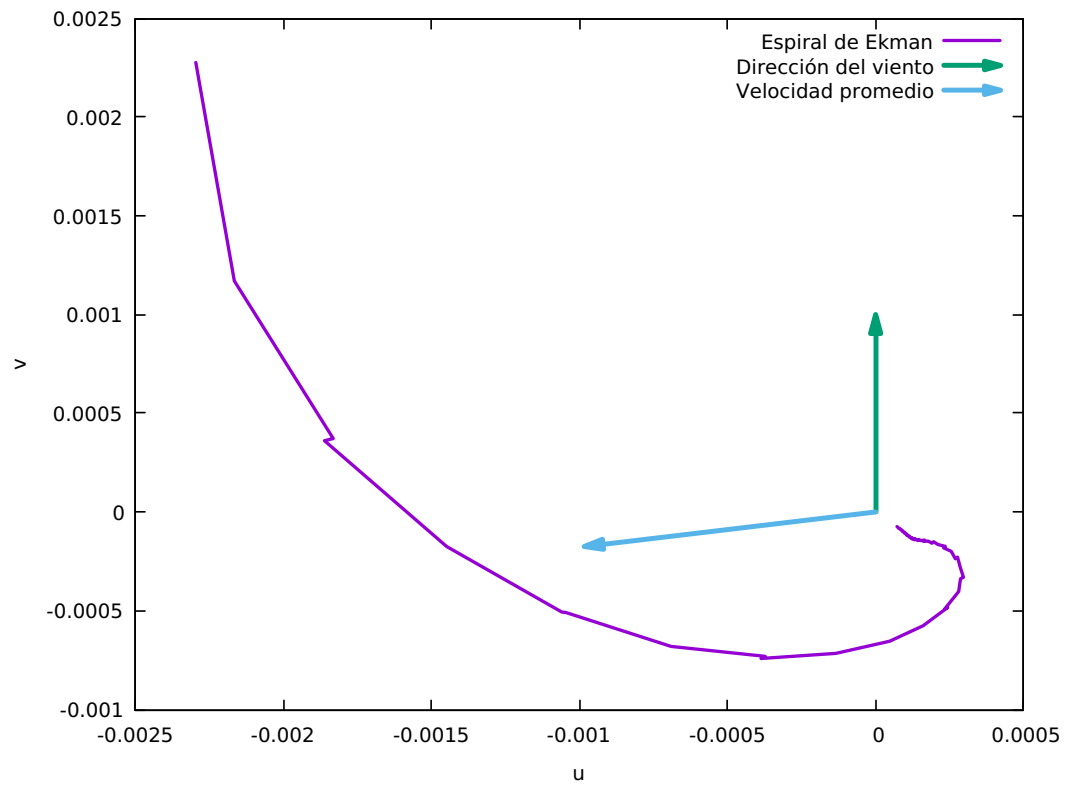


Figura 3.5: Promedio de las velocidades, no es perpendicular a la dirección del viento pero se aproxima, hemisferio sur.

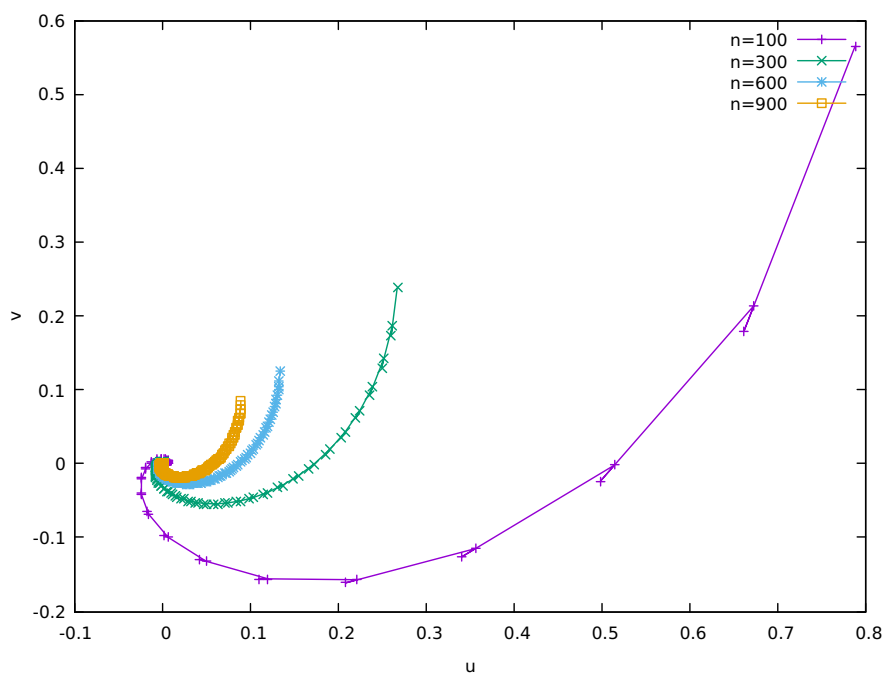


Figura 3.6: No convergencia del método de Galerkin discontinuo en problemas de difusión

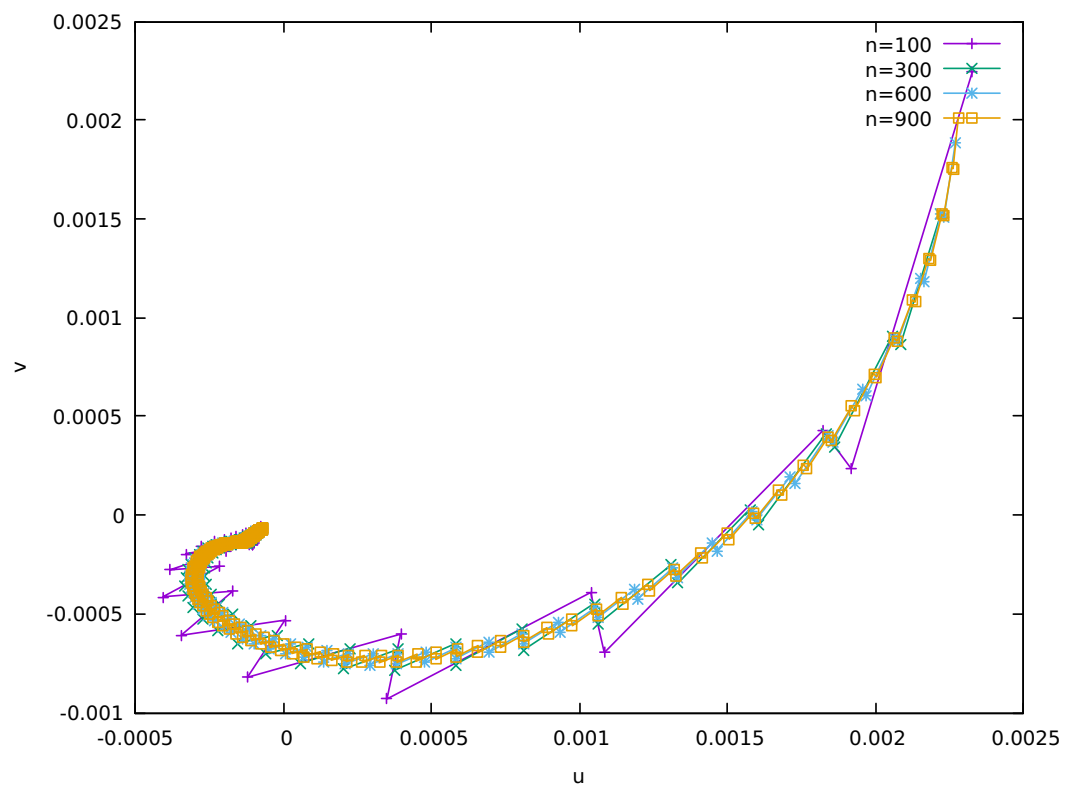


Figura 3.7: Convergencia del método de Galerkin discontinuo en problemas de difusión, elementos lineales

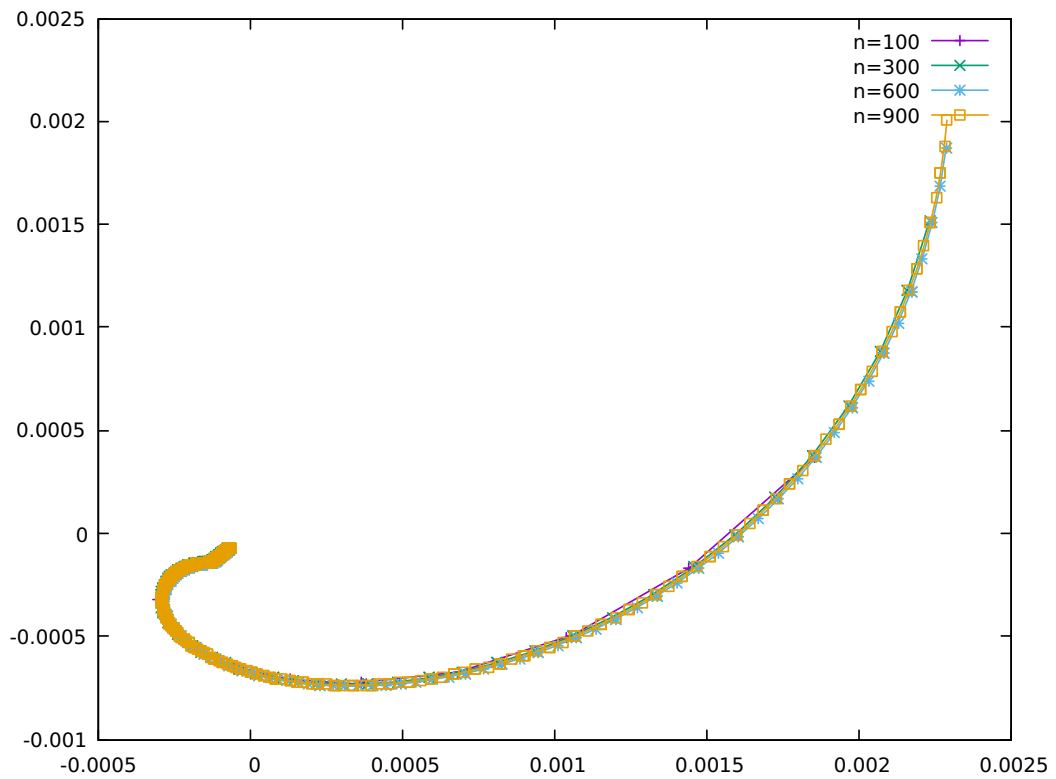


Figura 3.8: Convergencia del método de Galerkin discontinuo en problemas de difusión, elementos cuadráticos

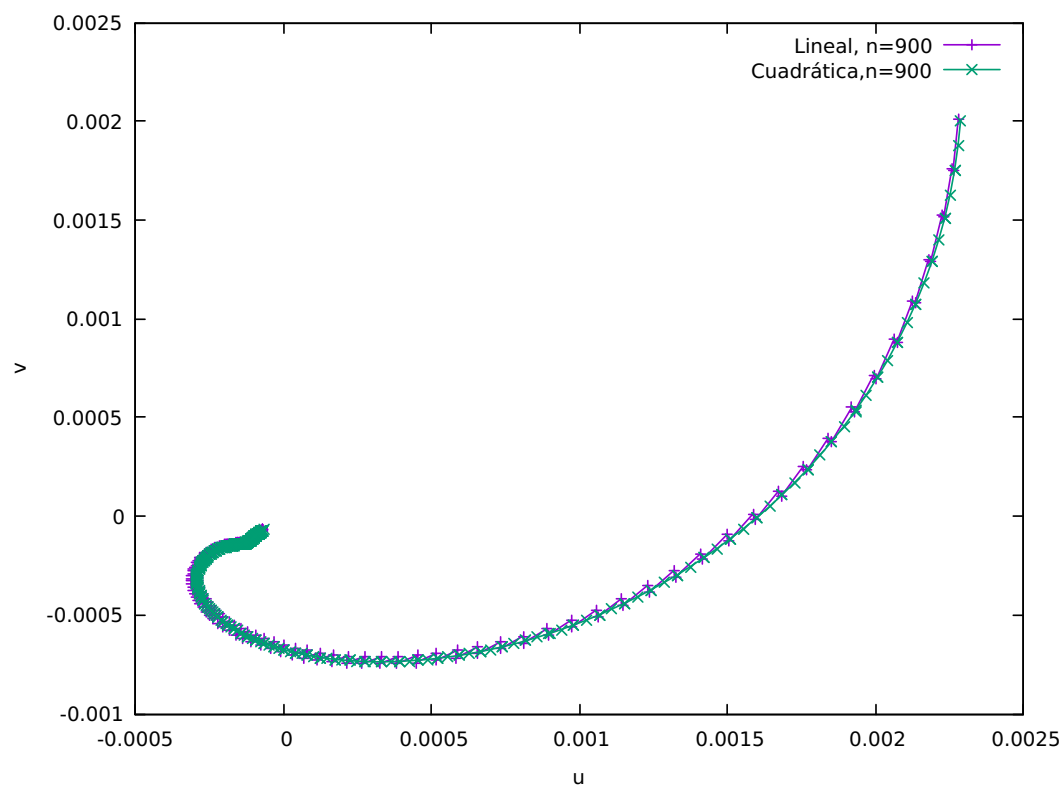


Figura 3.9: Comparación de la solución lineal y cuadrática

Conclusiones y trabajo futuro

- El método es estable y convergente para los casos de sistemas hiperbólicos y ecuaciones de difusión. Los resultados obtenidos corresponden con los predichos por la teoría.
- La dependencia del flujo numérico es enorme. Con el flujo incorrecto se obtienen soluciones que carecen de sentido físico y más aún de sentido alguno.
- La elección del flujo numérico debe tomar en cuenta la ecuación con la que se trabaja, si es posible con la ayuda de un análisis cualitativo previo.
- El trabajo a futuro tiene dos caminos a seguir:
 - Un paso natural sería trabajar en problemas de mayor dimensión, esto es, problemas en dos y tres dimensiones, asegurando el correcto funcionamiento de todos los componentes del método.
 - Durante el desarrollo se nota que para cada elemento solo se necesita cierta cantidad de información del paso anterior, y que los pasos internos del Runge-Kutta generan la nueva información que necesita el elemento antes de la actualización. Teniendo esto en cuenta, es natural pensar que en cada instante de tiempo es posible resolver cada elemento por separado. Esto conduce a la paralelización del método, aprovechando los recursos de computadoras multinúcleo o GPU's para acelerar el procesamiento. Es posible abordar este problema en un futuro cercano empezando desde lo implementado en este trabajo.

Bibliografía

- [1] J. BILLINGHAM AND A. C. KING, *Wave motion*, Springer, New York, NY, 2008.
- [2] C. CHEN, H. HUANG, R. C. BEARDSLEY, H. LIU, Q. XU, AND G. COWLES, *A finite volume numerical approach for coastal ocean circulation studies: Comparisons with finite difference models*, *Journal of Geophysical research*, 112 (2007), p. 34.
- [3] B. COCKBURN AND C.-W. SHU, *Runge-kutta discontinuous galerkin methods for convection-dominated problems*, *Journal of Scientific Computing*, 16 (2001), pp. 173–261.
- [4] F. FRANK, B. REUTER, V. AIZINGER, AND P. KNABNER, *Festung: A matlab/gnu octave toolbox for the discontinuous galerkin method, part i: Diffusion operator*, *Computer & Mathematics with Applications*, 70 (2015), pp. 11–46.
- [5] M. S. GOCKENBACH, *Understanding and Implementing the Finite Element Method*, Society for Industrial and Applied Mathematics, U.S., 2006.
- [6] J. S. HESTHAVEN AND T. WARBURTON, *Nodal Discontinuous Galerkin Methods. Algorithms, Analysis, and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
- [7] J. KÄMPF, *Advanced Ocean Modelling*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [8] W. REED AND T. HILL, *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*.
- [9] M. ZHANG AND C.-W. SHU, *An analysis of three different formulations of the discontinuous galerkin method for diffusion equations*, *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 13 (2003), pp. 395–413.