



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

---

# MÉTODOS EFECTIVOS PARA FOLIACIONES HOLOMORFAS EN EL PLANO PROYECTIVO

**T E S I S**

Que para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias**

con Orientación en

**Matemáticas Básicas**

Presenta

Petra Rubí Pantaleón Mondragón

**Director de Tesis:**

Dra. Claudia Reynoso Alcántara

Dr. Abraham Martín del Campo

---

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto., 16 de agosto de 2019



CIMAT

---

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

# MÉTODOS EFECTIVOS PARA FOLIACIONES HOLOMORFAS EN EL PLANO PROYECTIVO

**T E S I S**

Que para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias**

con Orientación en

**Matemáticas Básicas**

**Presenta**

Petra Rubí Pantaleón Mondragón

**Director de Tesis:**

Dra. Claudia Reynoso Alcántara

Dr. Abraham Martín del Campo

Guanajuato, Gto., 16 de agosto de  
2019





*Dedicado a  
Enrique*



# Agradecimientos

Quiero agradecer al CIMAT como institución por el apoyo brindado durante estos años.

Al CONACyT, por la beca otorgada durante el período de agosto 2015 a julio 2019 para realizar mis estudios de doctorado y por el apoyo recibido a través del proyecto 284424 Convocatoria de CB-2016-01.

A mi familia y amigos, en particular a Miguel Ángel Méndez por sus explicaciones y apoyo.

A mis sinodales, los doctores Xavier Gómez-Mont Ávalos, Diego Rodríguez Guzmán, Alexis Miguel García Zamora y Víctor Castellanos Vargas por sus sugerencias y correcciones en el trabajo. Un particular agradecimiento al doctor Diego Rodríguez por todas esas horas que estuvo haciendo comentarios y sugerencias durante este proceso.

Pero sobre todo, quiero ofrecer mi gratitud a dos personas muy importantes en este proceso:

- ★ A Claudia Reynoso por haber confiado en mi, por el tiempo en sus explicaciones y enseñanzas y por la amistad que me otorgó desde el día del examen de admisión.
- ★ A Abraham Martín del Campo, por unirse al equipo, por sus consejos, apoyo, dedicación y entusiasmo en nuestro proyecto.

MUCHAS GRACIAS A TODOS.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>Resumen</b>	<b>XV</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Bases de Gröbner . . . . .	1
1.2. Esquema de Hilbert de puntos . . . . .	10
<b>2. Foliaciones</b>	<b>15</b>
2.1. Definición de foliación . . . . .	15
2.2. Representación local de una foliación y el esquema de Hilbert de puntos sobre el plano . . . . .	16
2.3. Esquema singular de una foliación . . . . .	17
<b>3. Sicigias</b>	<b>21</b>
3.1. Definiciones y resultados sobre sicigias . . . . .	21
3.2. Condición de Euler y sicigias . . . . .	26
<b>4. Resultados y algoritmos</b>	<b>31</b>
4.1. Algoritmo de pertenencia . . . . .	31
4.2. Aplicación del algoritmo de pertenencia . . . . .	39
4.3. Algoritmo: Condición de Euler . . . . .	41
<b>Bibliografía</b>	<b>46</b>



# Introducción

Los esquemas de Hilbert fueron definidos en un contexto general en los *Éléments de géométrie algébrique*, o EGA, un tratado de 8 partes sobre Geometría Algebraica escrito por Alexander Grothendieck, y que fue publicado entre 1960 y 1967.

A grosso modo, los esquemas de Hilbert son espacios de parámetros cuyos puntos cerrados corresponden a subesquemas de un esquema con polinomio de Hilbert fijo. Si el polinomio de Hilbert es constante, entonces el esquema es llamado esquema de Hilbert de puntos. Uno de los esquemas de  $N$  puntos más estudiados es sobre el plano proyectivo complejo  $\mathbb{P}^2$ , el cual denotaremos por  $\mathbb{H}^N(\mathbb{P}^2)$ . A pesar de que hay una gran cantidad de resultados sobre su estructura, existen demasiados problemas de clasificación y cálculos explícitos no resueltos. Muchos de estos tienen que ver con calcular grupos de cohomología y funciones de Hilbert donde intervienen estos esquemas. El objetivo principal de esta tesis fue aplicar este tipo de cálculos sobre foliaciones en  $\mathbb{P}^2$  con singularidades aisladas.

Recordemos que un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$(\star) = \begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y, z) \\ \frac{dz}{dt} = g(y, z) \end{cases}$$

donde  $f(y, z), g(y, z) \in \mathbb{C}[y, z]$ , se puede interpretar como un campo vectorial polinomial  $v = f(y, z) \frac{\partial}{\partial y} + g(y, z) \frac{\partial}{\partial z}$  en  $\mathbb{C}^2$ . Las soluciones de  $(\star)$ , son curvas que son tangentes a este campo vectorial en cada punto de sus trayectorias. El teorema de Existencia y Unicidad de ecuaciones diferenciales holomorfas nos garantiza que por cada punto  $q \in \mathbb{C}^2$  pasa una única solución  $\sigma$  de  $(\star)$  satisfaciendo la condición inicial  $\sigma(0) = q$  salvo en los puntos singulares, es decir, los puntos donde  $f$  y  $g$  se anulan simultáneamente. En general, no se pueden encontrar explícitamente las ecuaciones de las soluciones. Por esta razón, los campos vectoriales polinomiales en el plano complejo han llegado a ser muy estudiados por un gran número de matemáticos y físicos desde finales del siglo *XIX*. Ante la imposibilidad de encontrar soluciones explícitas de las ecuaciones diferenciales, desde diferentes puntos de vista se comenzó a estudiar los comportamientos cualitativos de las soluciones y a clasificar dichas ecuaciones de acuerdo a sus propiedades globales.

Una forma de estudiar estos comportamientos es compactificar el plano afín para obtener una foliación holomorfa sobre el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ . En este contexto, uno puede usar técnicas de geometría algebraica

para obtener resultados sobre el comportamiento de las soluciones y sobre propiedades globales de los campos vectoriales.

Nosotros nos enfocamos en estudiar foliaciones de grado  $d \geq 2$  por curvas sobre  $\mathbb{P}^2$  con singularidades aisladas. Por tanto, cuando hablemos de foliaciones de grado  $d$ , si no especificamos lo contrario, nos referiremos a foliaciones de grado  $d \geq 2$  con singularidades aisladas sobre  $\mathbb{P}^2$ .

Usamos fuertemente las caracterizaciones dadas por Campillo y Olivares en [CO01] y que tienen sus antecedentes en [GMK89] por Gómez-Mont y Kempf. Los autores en [CO01] probaron que una foliación de grado  $d$  diferente de uno sobre  $\mathbb{P}^2$  está únicamente determinada por su subesquema singular, por lo cual, en este mismo artículo, dan caracterizaciones del subesquema singular proveniente de una foliación. Sin embargo, exponer la existencia de foliaciones no es trivial.

Por otro lado, el esquema singular de una foliación puede verse como un elemento en el esquema de Hilbert de  $d^2 + d + 1$  puntos sobre  $\mathbb{P}^2$ . Por la unicidad dada por Campillo y Olivares y la propiedad universal del esquema de Hilbert, podemos definir un morfismo de esquemas inyectivo entre el espacio de foliaciones con singularidades aisladas y el esquema de Hilbert de puntos sobre el plano proyectivo complejo. Por las mismas caracterizaciones dadas por Campillo y Olivares, se puede ver que este morfismo no es sobreyectivo al considerar elementos (ideales) monomiales en el esquema. Por esta razón, uno de nuestros objetivos particulares es estudiar la imagen de dicho morfismo y por el cual, una de las partes principales de nuestro trabajo fue dar métodos efectivos y programables computacionalmente para determinar condiciones en los elementos del esquema de Hilbert de  $d^2 + d + 1$  puntos que corresponden al esquema singular de una foliación de grado  $d$  obteniendo el siguiente resultado:

**Teorema (4.1).** *Dado  $d \geq 2$  y  $\bar{I} \in \mathbb{H}^{d^2+d+1}(\mathbb{P}^2)$  un ideal de intersección local completa, sea  $\mathcal{J}_{V(\bar{I})}$  el subesquema asociado al ideal  $\bar{I}$  de  $\mathbb{P}^2$ . El subesquema  $\mathcal{J}_{V(\bar{I})}$  es el subesquema singular de una foliación de grado  $d$  si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Existen tres polinomios  $f_1, f_2, f_3$  de grado  $d + 1$  linealmente independientes en  $\bar{I}$ , y  $d + 1$  es el grado mínimo con esta propiedad.*
2. *El número de Betti  $\beta_{2,d+2}$  de la resolución graduada del módulo  $M = \frac{\mathbb{C}[x,y,z]}{\langle f_1, f_2, f_3 \rangle}$  es diferente de cero.*
3. *La dimensión de  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial generado por las entradas de una columna de grado 1 de la presentación  $\varphi_2$  en la resolución graduada de  $M$  es tres.*

*Además, existe un algoritmo que calcula las ecuaciones de la 1-forma que define a la foliación de grado  $d$  sobre  $\mathbb{P}^2$ .*

Este teorema y el método programable mencionado, nos permitirán tener una herramienta para estudiar problemas importantes de clasificación y existencia en la teoría de foliaciones en  $\mathbb{P}^2$ , comenzando por dar ejemplos de foliaciones con una única singularidad, es decir, foliaciones con número de Milnor  $d^2 + d + 1$ . Para  $d \geq 2$ , existen varios trabajos relacionados a este tipo de foliaciones (por mencionar algunos [Alc18, Alc11, CDBM10]), por ejemplo, en [CDBM10] los autores prueban que, salvo conjugación, sólo existen 4 foliaciones con una única singularidad, pero en general, se desconoce.

Otro problema de existencia importante que está relacionado con el mencionado anteriormente, es dar ejemplos explícitos de foliaciones sin hojas algebraicas con una única singularidad. Este es un problema de existencia muy importante de foliaciones holomorfas sobre  $\mathbb{P}^2$  ya que actualmente se conocen muy pocos ejemplos. De hecho se sabe por el teorema de Jouanolou y Neto (Ver [Jou06]) que el conjunto de foliaciones sin hojas algebraicas es un abierto denso en el espacio de foliaciones, lo difícil aquí fue demostrar que dicho conjunto es no vacío, por lo tanto es muy importante poder encontrar ejemplos de este tipo de foliaciones.

También podríamos aplicar los algoritmos desarrollados para estudiar (de manera más combinatoria) el estrado del esquema de Hilbert que consiste de todos los ideales cuya función de Hilbert coincide con una función predeterminada  $\phi$  y que está asociada a la función de Hilbert del esquema singular de una foliación (ver [CO01, Got88, BNS03]).

Otro problema importante de existencia en el cual podríamos aplicar los algoritmos es para encontrar foliaciones con un conjunto mínimo no trivial (ver [CLNS88]), es decir, foliaciones con un subconjunto no vacío de  $\mathbb{P}^2$ , cerrado, invariante, mínimo con esta propiedad y que no sea un punto singular. Además, se sabe que si la foliación tiene un conjunto mínimo no trivial entonces no tiene soluciones algebraicas. Las foliaciones con una única singularidad con parte lineal no cero son buenos candidatos para intentar probar dicha existencia. De aquí la importancia de clasificar este tipo de foliaciones.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera, comenzaremos en el Capítulo 1 con algunos preliminares sobre bases de Gröbner, función de Hilbert y el esquema de Hilbert de puntos. El Capítulo 2 tiene tres secciones. En la Sección 2.1 discutiremos brevemente sobre foliaciones en  $\mathbb{P}^2$ , en la Sección 2.2 veremos la relación que existe entre las foliaciones y el esquema de Hilbert de puntos (de manera local) y para terminar este capítulo, en la Sección 2.3 mencionaremos algunas caracterizaciones dadas por Campillo y Olivares que nos permiten determinar foliaciones usando su subesquema singular y daremos un resultado sobre condiciones necesarias usando bases de Gröbner para obtener tales caracterizaciones. En el Capítulo 3 discutiremos sobre módulos de sicigias, las cuales son una herramienta importante para la parte teórica de nuestros algoritmos como veremos en el Teorema 3.2 y el Algoritmo 2. En este mismo capítulo daremos un resultado en términos de ciertos números de Betti de un ideal que contiene tres polinomios homogéneos, para que se satisfaga la condición de Euler, la cual es una condición suficiente para obtener foliaciones.

Para finalizar, en el Capítulo 4 daremos dos algoritmos; el Algoritmo 1 determina, dado un ideal  $I \subset \mathbb{C}[y, z]$  0-dimensional de grado  $N$ , todas las particiones de  $N$  cuyos monomios estándar asociados forman una base del  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $\frac{\mathbb{C}[y, z]}{I}$ . Poder identificar particiones es por sí solo un problema interesante (ver [HKP19]), pero para nuestros fines es muy importante poder determinar estas particiones, pues podríamos encontrar características en ellas asociadas a las representaciones locales de una foliación sobre  $\mathbb{P}^2$ . El segundo algoritmo determina si la homogenización de un ideal dado es el esquema singular de una foliación. Ambos fueron implementados en Macaulay2 ([GS]) y por medio de ejemplos explícitos explicaremos los pseudocódigos correspondientes.

Al final del Capítulo 4 daremos un ejemplo de una familia de foliación de grado 3, cuyo esquema es curvilíneo, es decir, cuyo ideal asociado en  $\mathbb{C}[y, z]$  es de la forma  $\langle z^N, y + \sum_{i=1}^{N-1} a_i z^i \rangle$  con  $a_i \in \mathbb{C}$ . Esta familia de foliaciones son ejemplos de foliaciones sin hojas algebraicas y con un punto singular del tipo nodo-silla

(ver [APM]). Actualmente, seguimos trabajando en este tipo de ideales para determinar condiciones sobre los coeficientes  $a_i$ 's para que la homogenización de este ideal sea o no el esquema singular de una foliación.

# Resumen

Los resultados originales que presentamos en este trabajo son los siguientes:

1. El Teorema 2.5, da caracterizaciones en la base de Gröbner de un ideal homogéneo 0-dimensional de grado  $d^2 + d + 1$ , para obtener en ella tres polinomios homogéneos de grado  $d + 1$ .
2. El Teorema 3.2, da condiciones sobre algunos números de Betti para que tres polinomios de grado  $d + 1$  linealmente independientes y sin factores en común o una combinación algebraica de ellos, satisfagan la condición de Euler.
3. El Algoritmo 1, determina todas las particiones del grado de un ideal fijo, tales que el ideal pertenece a abiertos indexados con dichas particiones. Dicho algoritmo está implementado en Macaulay2.
4. El Algoritmo 2 determina si dado un ideal 0-dimensional de grado  $N$  en  $\mathbb{C}[y, z]$ , su homogenización es el esquema singular de una foliación o no. Este algoritmo también está implementado en Macaulay2.
5. El Teorema 4.1 es el resultado principal del trabajo, aquí se encuentran involucrados los resultados anteriores.



# Preliminares

En este capítulo daremos conceptos y resultados básicos para el desarrollo de esta tesis, por lo que sólo en algunos resultados daremos un breve bosquejo de su demostración, pero las demostraciones pueden ser revisadas con más detalle principalmente en [CLO13] y [Stu96].

## 1.1. Bases de Gröbner

Comenzaremos con definiciones y ejemplos de conceptos que nos permitirán llegar a las definiciones y resultados apropiados para nuestros fines sobre bases de Gröbner. Al final de la sección, recordaremos algunos resultados sobre politopos convexos asociados a ideales, los cuales serán ilustrados en algunos ejemplos para mayor simplicidad.

**Definición 1.1.** Un *orden monomial* es una relación  $\succ$  sobre  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$  que satisface tres propiedades:

- $\succ$  es total, es decir, cualquiera dos elementos son comparables.
- Para  $\alpha, \beta$  y  $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ . Si  $\alpha \succ \beta$ , entonces  $\alpha + \gamma \succ \beta + \gamma$ .
- $\succ$  es bien ordenada, es decir, cualquier subconjunto de  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$  tiene un elemento mínimo.

Veamos algunos ejemplos. Sean  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$  y un vector  $w \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$  que llamaremos vector de peso.

**Ejemplo 1.1.** Orden graduado inverso lexicográfico  $\succ_{GRex}$ . Decimos que  $\alpha \succ_{GRex} \beta$  si  $|\alpha| := \sum_{i=1}^m \alpha_i > |\beta| := \sum_{i=1}^m \beta_i$ , o  $|\alpha| = |\beta|$  y la primera entrada de la derecha no cero de  $\alpha - \beta$  es negativa.

Por ejemplo:  $(3, 1) \succ_{GRex} (2, 2)$ . En efecto, aunque  $|(3, 1)| = 4 = |(2, 2)|$  en la diferencia  $(3, 1) - (2, 2) = (1, -1)$  la última entrada no cero es negativa.

**Ejemplo 1.2.** Orden por vector de peso  $\succ_w$ . Sea  $\succ$  un orden monomial cualquiera, decimos que  $\alpha \succ_w \beta$  si  $w \cdot \alpha > w \cdot \beta$  o  $w \cdot \alpha = w \cdot \beta$  y  $\alpha \succ \beta$ .

Por ejemplo: Si  $w = (0, 2)$ , entonces  $(2, 2) \succ_w (3, 1)$  para cualquier orden monomial  $\succ$ . En efecto, dado que primero comparamos con el producto punto entonces  $(0, 2) \cdot (2, 2) = 4 > 2 = (0, 2) \cdot (3, 1)$  sin importar en orden monomial  $\succ$ .

Recordemos que un monomio mónico en  $x_1, \dots, x_m$  es un producto de la forma  $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$ , donde  $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  para toda  $i = 1, \dots, m$ . Por tanto existe una biyección entre el conjunto de monomios mónicos de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  y los puntos en  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$  al envíar un monomio mónico  $x^\alpha$  al punto  $\alpha$ . Así que, se puede inducir un orden monomial sobre el conjunto de monomios mónicos de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  de la siguiente manera: para cualquier orden monomial  $\succ$ , decimos  $x^\alpha \succ x^\beta$  si, y sólo si  $\alpha \succ \beta$  donde  $x^\alpha, x^\beta$  son monomios mónicos en  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ . Diremos que un orden monomial  $\succ$  sobre  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  es un orden graduado si  $x^\alpha \succ x^\beta$  siempre que  $|\alpha| \succ |\beta|$ .

Una vez fijando un orden monomial, como el orden es total, se puede hablar del término mayor de un polinomio.

**Definición 1.2.** Sean  $f = \sum a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  un polinomio no cero y  $\succ$  un orden monomial fijo.

- El *soporte* de  $f$  es el conjunto

$$\text{Supp}(f) := \{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m : a_\alpha \neq 0\}.$$

- El *multigrado* de  $f$  es

$$\text{multideg}(f) := \max\{\alpha : \alpha \in \text{Supp}(f)\}$$

(el máximo con respecto al orden  $\succ$ ).

- El *término inicial* de  $f$  es el monomio dado por el *coeficiente inicial*  $a_{\text{multideg}(f)}$  y el *monomio inicial*  $x^{\text{multideg}(f)}$ , es decir,

$$\text{in}_\succ(f) := a_{\text{multideg}(f)} x^{\text{multideg}(f)}.$$

- Si  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  es ideal no cero, el *ideal inicial* de  $I$  es

$$\text{in}_\succ(I) := \langle \text{in}_\succ(f) : f \in I \rangle$$

Por definición de orden monomial, el ideal inicial es generado por monomios, es decir, es un ideal monomial. Además por el teorema de las bases de Hilbert este ideal es finitamente generado.

**Ejemplo 1.3.** Sea  $f(x_1, x_2) = 4x_1^2x_2 - 15x_2^3 - x_1x_2 + x_1 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ . Como el soporte de  $f$  es el conjunto  $\{(2, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 0)\}$ , usando el orden monomial  $\succ_{\text{GRevLex}}$  tenemos  $(2, 1) \succ_{\text{GRevLex}} (0, 3) \succ_{\text{GRevLex}} (1, 1) \succ_{\text{GRevLex}} (1, 0)$ , entonces  $\text{in}_{\succ_{\text{GRevLex}}}(f) = 4x_1^2x_2$ .

**Ejemplo 1.4.** Sea  $I = \langle x_1^3 - 2x_1x_2, x_1^2x_2 - 2x_2^2 + x_1 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2]$  un ideal. Usando el orden monomial  $\succ_{\text{GRevLex}}$  tenemos:

$$\begin{aligned} \text{in}_{\succ_{\text{GRevLex}}}(x_1^3 - 2x_1x_2) &= x_1^3, \\ \text{in}_{\succ_{\text{GRevLex}}}(x_1^2x_2 - 2x_2^2 + x_1) &= x_1^2x_2. \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que  $I$  es ideal,  $-x_2(x_1^3 - 2x_1x_2) + x_1(x_1^2x_2 - 2x_2^2 + x_1) = x_1^2 \in I$ . Sin embargo,  $x_1^2 \notin \langle x_1^3, x_1^2x_2 \rangle$  el ideal generado por los términos iniciales de los generadores de  $I$ .

En este ejemplo podemos ver que dado un ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_t \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  y  $\succ$  un orden monomial fijo, el ideal inicial y el ideal generado por los términos iniciales de los generadores de  $I$  no necesariamente son iguales, es decir,  $in_{\succ}(I) \neq \langle in_{\succ}(f_1), \dots, in_{\succ}(f_t) \rangle$ . Como en el ejemplo, puede ocurrir que los generadores del ideal inicial de  $I$  se puedan obtener por cancelaciones de términos mayores, es decir, el conjunto de generadores de  $I$  podría no ser suficiente para que sus términos iniciales generen al ideal inicial. Por tanto, se tiene la siguiente definición, en donde la igualdad se obtiene.

**Definición 1.3.** Sea  $\succ$  un orden monomial fijo. Una *base de Gröbner* de un ideal  $I$  con respecto  $\succ$  es un subconjunto finito  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$  de  $I$  cuyos términos iniciales generan al ideal inicial de  $I$ , es decir,

$$\langle in_{\succ}(g_1), \dots, in_{\succ}(g_s) \rangle = in_{\succ}(I).$$

Buchberger demostró que todo ideal distinto del ideal cero en  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  tiene una base de Gröbner. Más aún, dio un algoritmo que calcula una base de Gröbner para un orden monomial fijo conteniendo al conjunto generador del ideal. La idea es agregar polinomios bajo una propiedad al conjunto de generadores. Esta propiedad se obtiene a partir de las siguientes definiciones.

**Definición 1.4.** Sean  $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  polinomios diferente del polinomio cero y  $\succ$  un orden monomial fijo.

i) Si  $multideg(f) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  y  $multideg(g) = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ . El *mínimo común múltiplo* de  $in_{\succ}(f)$  y  $in_{\succ}(g)$  es el monomio  $x^{\gamma} := x_1^{\gamma_1} \cdots x_m^{\gamma_m}$ , donde  $\gamma_i := \max(\alpha_i, \beta_i)$  para cada  $i$ .

ii) El *S-polinomio* de  $f$  y  $g$  es la combinación

$$S(f, g) := \frac{x^{\gamma}}{in_{\succ}(f)} \cdot f - \frac{x^{\gamma}}{in_{\succ}(g)} \cdot g$$

**Ejemplo 1.5.** Del Ejemplo 1.4 tenemos:

$$S(x_1^3 - 2x_1x_2, x_1^2x_2 - 2x_2^2 + x_1) = \frac{x_1^3x_2}{x_1^3} \cdot (x_1^3 - 2x_1x_2) - \frac{x_1^3x_2}{x_1^2x_2} \cdot (x_1^2x_2 - 2x_2^2 + x_1) = -x_1^2.$$

Observemos que justo el monomio  $x_1^2 \notin \langle x_1^3, x_1^2x_2 \rangle$  del Ejemplo 1.4 es un S-polinomio de los generadores del ideal  $I$ . De hecho, por el siguiente teorema, con los S-polinomios podemos encontrar una base de Gröbner del ideal.

**Teorema 1.1.** [CLO13, Teorema 6, capítulo 2, §6] Sea  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  un ideal no cero. Un conjunto finito  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\} \subset I$  es una base de Gröbner de  $I$  si, y sólo si para todo par  $i \neq j$ , el residuo de dividir el S-polinomio de  $g_i$  y  $g_j$  por  $\mathcal{G}$  (en algún orden), denotado por  $\overline{S(g_i, g_j)}^{\mathcal{G}}$ , es cero.

**Ejemplo 1.6.** Usaremos el algoritmo de Buchberger para calcular una base de Gröbner del ideal  $I$  dado en el Ejemplo 1.4. La idea es comenzar con el conjunto  $\mathcal{G}$  de generadores de  $I$  y calcular sus S-polinomios. Si los residuo con respecto a este conjunto  $\mathcal{G}$  son diferentes de cero, entonces se redefine el conjunto  $\mathcal{G}$  al agregar los S-polinomios, y se inicia con el proceso hasta que el conjunto obtenido satisfaga el teorema anterior.

1. Sea  $G = \{f_1, f_2\} \subset I$  donde  $f_1 = x_1^3 - 2x_1x_2$  y  $f_2 = x_1^2x_2 - 2x_2^2 + x_1$ . Del Ejemplo 1.5,  $S(f_1, f_2) = -x_1^2$ . Dado que  $in_{\succ_{GRex}}(f_1), in_{\succ_{GRex}}(f_2)$  no dividen a  $in_{\succ_{GRex}}(S(f_1, f_2))$ , entonces  $\overline{S(f_1, f_2)}^{\mathcal{G}} = -x_1^2 \neq 0$ . Por lo cual, redefinimos el conjunto  $\mathcal{G}$ .

2. Sea  $\mathcal{G} = \{f_1, f_2, f_3\}$  donde  $f_3 = S(f_1, f_2)$ . Es suficiente calcular  $\overline{S(f_1, f_3)}^{\mathcal{G}}$  y  $\overline{S(f_2, f_3)}^{\mathcal{G}}$ . Como  $S(f_1, f_3) = -2x_1x_2$  y  $S(f_2, f_3) = -2x_2^2 + x_1$ , entonces  $in_{>GRevLex}(S(f_1, f_3)) = S(f_1, f_2)$ ,  $in_{>GRevLex}(S(f_2, f_3)) = -2x_2^2$ . Podemos observar que ningún término inicial  $in_{>GRevLex}(f_1), in_{>GRevLex}(f_2), in_{>GRevLex}(f_3)$  divide a los términos iniciales  $in_{>GRevLex}(S(f_1, f_3)), in_{>GRevLex}(S(f_2, f_3))$ . Por tanto,  $\overline{S(f_1, f_3)}^{\mathcal{G}}, \overline{S(f_2, f_3)}^{\mathcal{G}} \neq 0$ .

3. Redefinimos  $\mathcal{G}$ . Sea  $\mathcal{G} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ , donde  $f_4 = S(f_1, f_3)$ ,  $f_5 = S(f_2, f_3)$ , cuyos términos iniciales son  $S(f_1, f_3)$  y  $-2x_2^2$  respectivamente. Para cada par  $i \neq j$ , calculamos  $\overline{S(f_i, f_j)}^{\mathcal{G}}$  obteniendo (salvo inversos aditivos) la siguiente lista:

- a)  $S(f_1, f_2) = f_3$ ,
- b)  $S(f_1, f_3) = f_4$ ,
- c)  $S(f_1, f_4) = x_2f_4$ ,
- d)  $S(f_1, f_5) = \frac{1}{2}x_1f_1 + f_2 + x_2^2f_4 - f_5$ ,
- e)  $S(f_2, f_3) = f_5$ ,
- f)  $S(f_2, f_4) = f_5$ ,
- g)  $S(f_2, f_5) = \frac{1}{2}f_1 + x_2f_5 - \frac{1}{2}f_4$ ,
- h)  $S(f_3, f_4) = 0$ ,
- i)  $S(f_3, f_4) = -\frac{1}{2}x_1f_3$ ,
- j)  $S(f_4, f_5) = \frac{1}{2}f_3$ .

Por tanto, los residuos de la división entre los  $S$ -polinomios con respecto al conjunto  $\mathcal{G}$  son cero, es decir,  $\overline{S(f_i, f_j)}^{\mathcal{G}} = 0$  para todo par  $i \neq j$ .

Por el teorema anterior, el conjunto  $\mathcal{G} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$  donde

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1^3 - 2x_1x_2, \\ f_2 &= x_1^2x_2 - 2x_2^2 + x_1, \\ f_3 &= -x_1^2, \\ f_4 &= -2x_1x_2, \\ f_5 &= -2x_2^2 + x_1, \end{aligned}$$

es una base de Gröbner del ideal  $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ .

Observemos que  $f_1 = -x_1f_3 + f_4$  y  $f_2 = -\frac{1}{2}x_1f_4 + f_5$ . Por tanto,  $\langle in_{>GRevLex}(f_1), \dots, in_{>GRevLex}(f_5) \rangle = \langle in_{>GRevLex}(f_3), in_{>GRevLex}(f_4), in_{>GRevLex}(f_5) \rangle$ . Es decir, el conjunto  $\mathcal{G}' = \{f_3, f_4, f_5\}$  también es una base de Gröbner del ideal  $I$  con el mismo orden monomial  $GRevLex$ . Una de las diferencias en estos conjuntos es la cardinalidad. Para evitar esto tenemos las siguientes dos definiciones.

**Definición 1.5.** Una *base de Gröbner mínima* para un ideal  $I$  es una base de Gröbner  $\mathcal{G}$  tal que:

- El coeficiente inicial de cada elemento en  $\mathcal{G}$  es 1.
- Para cada  $g \in \mathcal{G}$ ,  $\text{in}(g) \notin \langle \text{in}(\mathcal{G} - \{g\}) \rangle$ .

**Ejemplo 1.7.** Continuando con el Ejemplo 1.6. El conjunto  $\mathcal{G} = \{f_1, f_2, -f_3, -f_4, -\frac{1}{2}f_5\}$  es una base de Gröbner cuyos elementos son mónicos, pero no es una base de Gröbner mínima, pues,  $x_1^3 = \text{in}_{>_{\text{GRevLex}}}(f_1) = x_1 \text{in}_{>_{\text{GRevLex}}}(-f_3) \in \langle \mathcal{G} - \{f_1\} \rangle$ .

**Ejemplo 1.8.** La base de Gröbner  $\mathcal{G} = \{-f_3, -\frac{1}{2}f_4, -\frac{1}{2}f_5\} = \{x_1^2, x_1x_2, x_2^2 - \frac{1}{2}x_1\}$  es mínima, pues dado que  $x_1x_2$  y  $x_1^2$  son monomios y ninguno es múltiplo del otro, ellos mismos son términos iniciales y por tanto  $x_1x_2 \notin \langle \text{in}(\mathcal{G} - \{x_1x_2\}) \rangle$  y  $x_1^2 \notin \langle \text{in}(\mathcal{G} - \{x_1^2\}) \rangle$ , además  $\mathcal{G} - \{x_2^2 - \frac{1}{2}x_1\} = \{x_1x_2, x_1^2\}$  y dado que son monomios,  $\langle \text{in}(\mathcal{G} - \{x_2^2 - \frac{1}{2}x_1\}) \rangle = \langle x_1x_2, x_1^2 \rangle$ . Como  $x_2^2$  no es múltiplo de  $x_1x_2$  ni de  $x_1^2$  entonces  $x_2^2 \notin \langle x_1x_2, x_1^2 \rangle$ .

**Definición 1.6.** Una *base de Gröbner reducida* para un ideal  $I$  es una base de Gröbner  $\mathcal{G}$  tal que:

- El coeficiente inicial de cada elemento en  $\mathcal{G}$  es 1.
- Para cada  $g \in \mathcal{G}$ , los monomios que no están en el soporte de  $g$  pertenecen a  $\langle \text{in}(\mathcal{G} - \{g\}) \rangle$ .

Observemos que la segunda propiedad de una base de Gröbner reducida es equivalente a pedir que para cualesquiera dos elementos distintos  $g, g' \in \mathcal{G}$  ningún término de  $g'$  es múltiplo de  $\text{in}_{>}(g)$ . Por tanto, para ver que la base  $\mathcal{G} = \{x_1^2, x_1x_2, x_2^2 - \frac{1}{2}x_1\}$  del Ejemplo 1.8 es una base reducida basta verificar que  $-\frac{1}{2}x_1$  no es múltiplo de  $x_1x_2$  o de  $x_1^2$ , lo cual es claro.

Como acabamos de observar, un ideal puede tener más de una base aun fijando el orden monomial. La importancia de una base reducida está dada en el siguiente teorema.

**Proposición 1.1.** [CLO13, Proposición 6, §2.7] Sea  $I \neq \{0\}$  un ideal, entonces  $I$  tiene una única base de Gröbner reducida para un orden monomial dado.

Notemos que las bases de Gröbner dependen de un orden monomial, y recordemos que podemos definir órdenes monomiales usando vectores de pesos, por tanto, para  $m \geq 2$  existen una infinidad de órdenes monomiales. Sin embargo, uno puede ver de hecho que cada ideal tiene un número finito de ideales iniciales.

**Teorema 1.2.** [Stu96, Teorema 1.2] Cada ideal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  tiene un número finito de ideales iniciales distintos.

La idea de la demostración de este teorema es por contradicción, suponiendo que hay un número infinito de ideales iniciales entonces se puede formar una cadena de ideales ascendente no estacionaria, contradiciendo el hecho de que  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  es Noetheriano.

Para nosotros es muy importante saber, dado un ideal en  $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ , cuántos ideales iniciales tiene y cómo determinarlos. Esto está asociado a objetos combinatorios, los cuales podemos estudiar y obtener una herramienta para clasificar foliaciones como explicaremos en el Capítulo 4.

Para determinar cómo encontrar los ideales iniciales de un ideal dado, introduciremos mediante ejemplos conceptos y definiciones sobre teoría de polítopos.

**Definición 1.7.** Sea  $I \neq \{0\}$  un ideal. Un subconjunto finito  $\mathcal{U} \subset I$  es una *base de Gröbner universal* si es una base de Gröbner para  $I$  con respecto a todos los órdenes monomiales simultáneamente.

Observemos que todo ideal en  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  tiene una base de Gröbner universal, esto es consecuencia del hecho de que un ideal tiene un número finito de ideales iniciales distintos. Entonces tiene un número finito de bases de Gröbner reducidas. La unión de estas bases, el cual es un conjunto finito, es una base de Gröbner universal.

Ahora, regresemos a los vectores de peso y las definiciones de términos iniciales.

**Definición 1.8.** Sean  $w \in \mathbb{R}^m$ ,  $f = \sum a_i x^{\alpha(i)} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  un polinomio e  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  un ideal no cero.

- La *forma inicial* de  $f$  denotada por  $in_w(f)$  es la suma de todos los términos  $a_i x^{\alpha(i)}$  tales que el producto interno  $w \cdot \alpha(i)$  es máximo sobre los  $\alpha(i)$ .
- El *ideal inicial* de  $I$  con respecto a  $w$  denotado por  $in_w(I)$  es el ideal de formas iniciales de  $I$ , es decir,  $in_w(I) := \langle in_w(f) : f \in I \rangle$ .

**Ejemplo 1.9.** Sean  $f(x_1, x_2) = x_2^6 + 5x_1^4 x_2^4 - 3x_1^5 x_2^2 + x_1^4 + x_2 + x_1^2 x_2^5 + x_1 x_2^2$ ,  $w = (1, 2)$ ,  $w' = (1, 1)$  y  $w'' = (2, \frac{4}{3})$ . En la Tabla 1.1 se muestran los valores del producto interno de los elementos en el soporte de  $f$  y los vectores de peso  $w, w', w''$ .

$i$	$\alpha(i)$	$w \cdot \alpha(i)$	$w' \cdot \alpha(i)$	$w'' \cdot \alpha(i)$
1	(0, 6)	12	6	8
2	(4, 4)	12	8	$13 + \frac{1}{3}$
3	(5, 2)	9	7	$12 + \frac{2}{3}$
4	(4, 0)	4	4	8
5	(0, 1)	2	1	$1 + \frac{1}{3}$
6	(2, 5)	12	7	$10 + \frac{2}{3}$
7	(1, 2)	5	3	$4 + \frac{2}{3}$

Tabla 1.1: Producto interno:  $\alpha(i) \cdot$  vector de peso

Por tanto, obtenemos las siguientes formas iniciales de  $f$ :

$$in_w(f) = x_2^6 + 5x_1^4 x_2^4 + x_1^2 x_2^5,$$

$$in_{w'}(f) = 5x_1^4 x_2^4,$$

$$in_{w''}(f) = 5x_1^4 x_2^4.$$

En este ejemplo podemos ver que si  $I = \langle f(x_1, x_2) \rangle$ , dependiendo del peso que tomemos, su ideal inicial no es necesariamente monomial como sucedía con un ideal inicial obtenido con un orden monomial. Sin embargo, se tiene la siguiente proposición que respalda el abuso de notación y cuya demostración involucra técnicas de optimización de funciones lineales.

**Proposición 1.2.** [Stu96, Proposición 1.11] Para cualquier orden monomial  $\succ$  y cualquier ideal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  existe un vector  $w \in \mathbb{N}^m$  tal que  $\text{in}_w(I) = \text{in}_{\succ}(I)$ .

Regresando al Ejemplo 1.9, podemos ver que con los vectores de peso  $w'$  y  $w''$  obtuvimos la misma forma inicial de  $f$ . Así, podemos hablar de una relación de equivalencia entre los vectores de pesos.

**Definición 1.9.** Sea  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  un ideal. Dos vectores de peso  $w, w'$  en  $\mathbb{R}^m$  son equivalentes (respecto a  $I$ ) si  $\text{in}_w(I) = \text{in}_{w'}(I)$ . Denotaremos por  $\mathcal{C}[w] := \{w' \in \mathbb{R}^m : \text{in}_{w'}(I) = \text{in}_w(I)\}$  la clase del vector de peso  $w$ .

En general, se puede verificar que cada clase  $\mathcal{C}[w]$  se expresa como intersección de hiperplanos. Nosotros ilustraremos este hecho en el siguiente ejemplo sobre  $\mathbb{R}^2$ . Calcularemos los ideales iniciales del ideal del Ejemplo 1.9 y por tanto las clases  $\mathcal{C}[w]$  asociadas a dichos ideales iniciales.

**Ejemplo 1.10.** Sea  $I = \langle x_2^6 + 5x_1^4x_2^4 - 3x_1^5x_2^2 + x_1^4 + x_2 + x_1^2x_2^5 + x_1x_2^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2]$  el ideal generado por el polinomio  $f$  del Ejemplo 1.9. Para calcular los ideales iniciales de  $I$ , seguiremos los siguientes pasos:

- Consideremos el polígono de Newton de  $f$  (el polígono sombreado en la Figura 1.1), es decir,

$$\text{New}(f) := \left\{ \sum_{i=1}^7 \lambda_i \alpha(i) : \lambda_1, \dots, \lambda_7 \in \mathbb{R}_{>0}, \sum_{i=1}^7 \lambda_i = 1 \right\}.$$

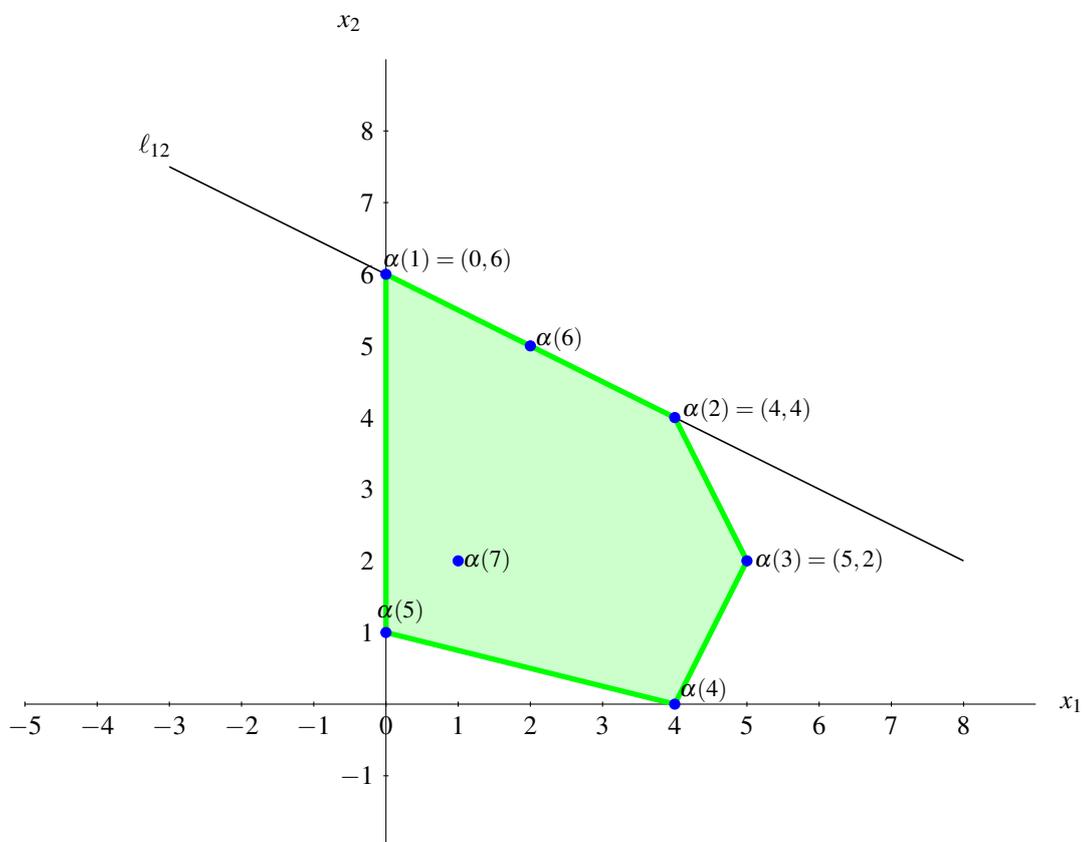


Figura 1.1: Polígono de Newton de  $f$

Se puede demostrar que  $New(f) = \{u \in \mathbb{R}^2 : A \cdot u \leq b\}$  donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Las entradas de la igualdad  $A \cdot u = b$  son las rectas que acotan al politopo  $New(f)$ , por tanto, intuitivamente,  $New(f)$  es la intersección de todos los hiperplanos definidos por las desigualdades dadas por  $A$  y  $b$ .

- Observemos que  $\alpha(1), \alpha(2)$  y  $\alpha(6)$  son colineales pues son puntos en la recta  $\ell_{12} : \{2x_2 + x_1 - 12 = 0\}$ .
- Una cara de  $New(f)$  está definida por

$$face_w(New(f)) := \{\beta \in New(f) : w \cdot \beta \geq w \cdot \alpha \text{ para toda } \alpha \in New(f)\}$$

para algún  $w \in \mathbb{R}^2$  y cuya dimensión es la dimensión del espacio que generan. Al realizar las cuentas y también de manera intuitiva uno puede ver que  $New(f)$  tiene 11 caras, las cuales corresponden a los vértices, las aristas y el polígono en sí de  $New(f)$ .

En la Tabla 1.2 podemos ver las caras de  $New(f)$  para un  $w$  particular, comenzando de mayor a menor dimensión.

dim	$w$	$face_w(New(f))$	dim	$w$	$face_w(New(f))$
2	(0,0)	$New(f)$	0	(0,1)	$\alpha(1)$
1	(1,2)	$\alpha(1)\alpha(2)$	0	(2,2)	$\alpha(2)$
1	(2,1)	$\alpha(2)\alpha(3)$	0	$(1, \frac{2}{5})$	$\alpha(3)$
1	(2,-1)	$\alpha(3)\alpha(4)$	0	(1,-1)	$\alpha(4)$
1	$(\frac{1}{4}, 1)$	$\alpha(4)\alpha(5)$	0	(-1,-1)	$\alpha(5)$
1	(-1,0)	$\alpha(5)\alpha(1)$			

Tabla 1.2: Caras de  $New(f)$

Aquí  $\alpha(i)\alpha(j)$  representa el segmento de recta entre los puntos  $\alpha(i)$  y  $\alpha(j)$ . Además podemos observar que ni  $\alpha(6)$ , ni  $\alpha(7)$  son caras de  $New(f)$ .

- Para cada cara  $F$  de  $New(f)$ , calculamos el cono normal de  $F$ , es decir,

$$\mathcal{N}_{New(f)}(F) := \{w \in \mathbb{R}^2 : face_w(New(f)) = F\}$$

cuya dimensión es  $2 - \dim F$ .

Los vectores  $w$  que presentamos en la Tabla 1.2 sólo son unos representantes para calcular las caras de  $New(f)$ . El cono normal de una cara calcula todos los vectores que representan a dicha cara. En la Figura 1.2 trazaremos los conos normales de las caras de dimensión 2 y 1 y en la Figura 1.3 los conos normales de las caras de dimensión 0.

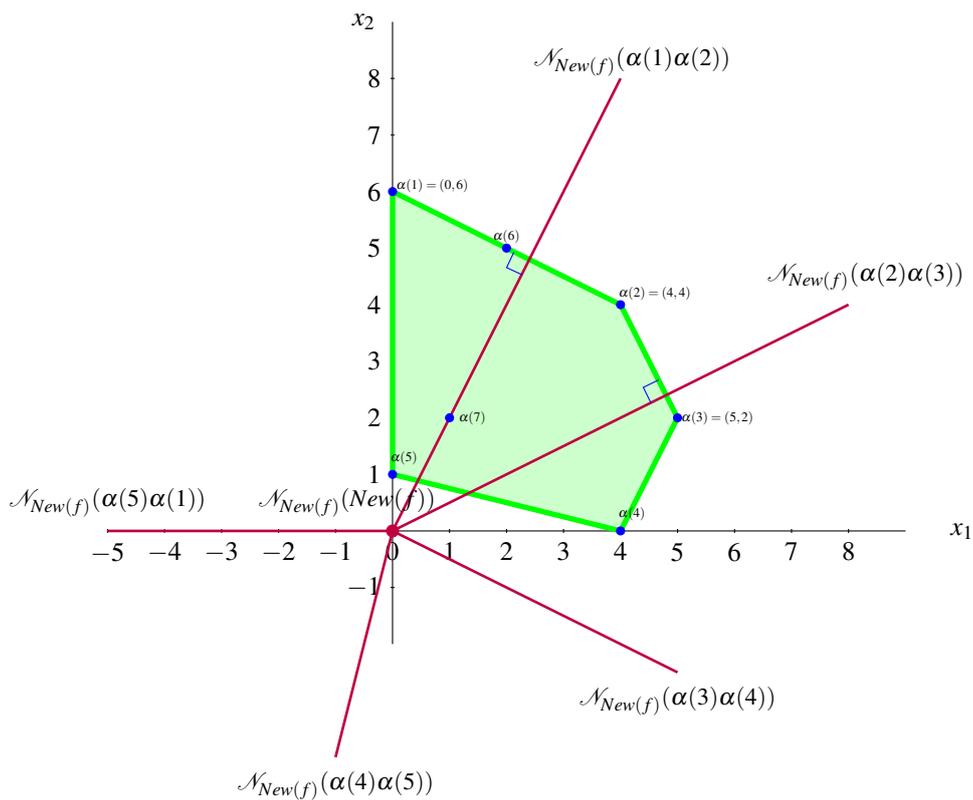


Figura 1.2: Conos normales de las caras de dimensión 2 y 1

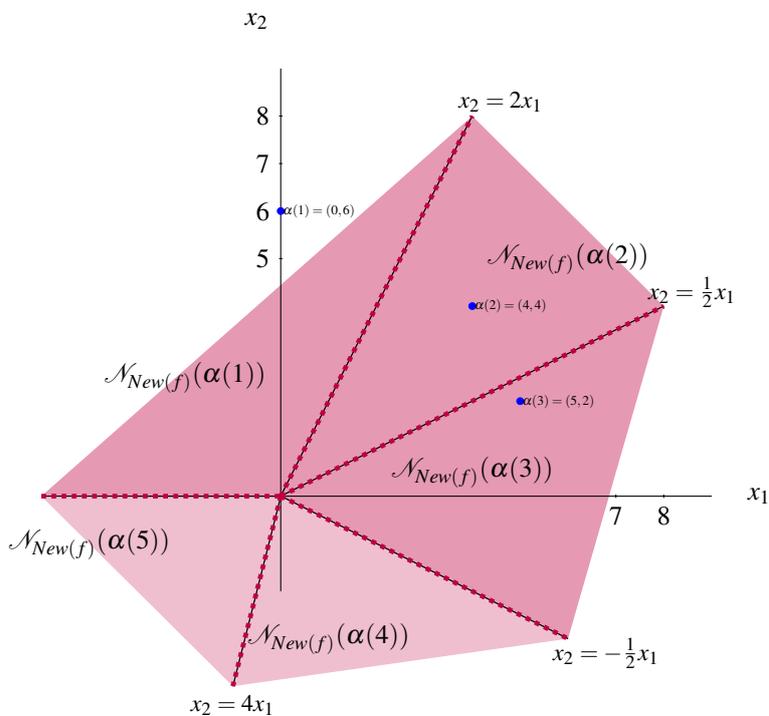


Figura 1.3: Conos normales de las caras de dimensión 0

- Observemos que para cualquier  $w \in \mathcal{N}_{New(f)}(\alpha(i)\alpha(j))$ , el ideal inicial de  $I$  con respecto a  $w$ , no es un ideal monomial, pues al menos  $w \cdot \alpha(i) = w \cdot \alpha(j)$ .
- Si  $w \in \mathcal{N}_{New(f)}(\alpha(i))$  para  $i = 1, \dots, 5$ , entonces por definición,  $\alpha(i) \cdot w > u \cdot w$  para todo  $u \in New(f) - \{\alpha(i)\}$ , en particular  $\alpha(i) \cdot w > \alpha(j) \cdot w$  para toda  $\alpha(j) \neq \alpha(i)$ . Por lo tanto,  $in_w(I) = \langle x^{\alpha(i)} \rangle$ .
- No existe un orden monomial  $\succ$  tal que  $in_{\succ}(I) = \langle x^{\alpha(4)} \rangle$  o  $in_{\succ}(I) = \langle x^{\alpha(5)} \rangle$ , pues de lo contrario, por la Proposición 1.2, existe un  $w \in \mathbb{N}^2$  tal que  $in_w(I) = in_{\succ}(I)$ , lo cual es una contradicción ya que  $\mathbb{N}^2 \cap \mathcal{N}_{New(f)}(\alpha(i)) = \emptyset$  para  $i = 4$  y  $5$ .

En conclusión, hay 11 ideales iniciales para  $I$ . Los únicos ideales iniciales que provienen de un orden monomial son 3:  $\langle x_2^6 \rangle$ ,  $\langle x_1^4 x_2^4 \rangle$  y  $\langle x_1^5 x_2^2 \rangle$ . Además  $\mathcal{C}[(0, 1)] = \mathcal{N}_{New(f)}(\alpha(1))$ ,  $\mathcal{C}[(2, 2)] = \mathcal{N}_{New(f)}(\alpha(2))$  y  $\mathcal{C}[(1, \frac{2}{5})] = \mathcal{N}_{New(f)}(\alpha(3))$ .

En [Stu96, Proposición 2.4], se prueba que el conjunto de la cerradura de clases  $\mathcal{C}(w)$  forma un abanico, el cual es llamado **abanico de Gröbner**.

El abanico de Gröbner de un ideal determina los ideales iniciales provenientes de órdenes monomiales. En general, para calcular el abanico de Gröbner con más de un generador, lo primero es encontrar el polígono de Newton asociado. Dicho polígono se obtiene de la suma de los polígonos de Newton de cada generador. Actualmente, en Singular, se puede calcular dicho abanico, incluyendo un vector de peso como representante.

## 1.2. Esquema de Hilbert de puntos

En esta sección recordaremos el concepto de esquema de Hilbert de puntos sobre un espacio proyectivo. Para ello iniciaremos con las definiciones de función y polinomio de Hilbert de un ideal, pues el polinomio de Hilbert da invariantes numéricos de los subesquemas cerrados del espacio proyectivo tales como la dimensión y el grado.

En el primer teorema daremos una serie de resultados que se obtienen de álgebra lineal.

**Teorema 1.3.** Sean  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  un ideal y  $s \in \mathbb{N}$ .

1. El conjunto de polinomios de grado  $\leq s$ , el cual denotaremos por  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]_{\leq s}$ , es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión  $\binom{m+s}{s}$ .
2. El conjunto de polinomios de grado menor o igual a  $s$  en  $I$  denotado por

$$I_{\leq s} := I \cap \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]_{\leq s}$$

es un  $\mathbb{C}$ -subespacio vectorial de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]_{\leq s}$ .

3. El conjunto de polinomios homogéneos de grado total  $s$ , denotado por  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]_s$ , junto con el polinomio 0 es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión  $\binom{m+s-1}{s}$ .

4. Si  $I$  es homogéneo, entonces el conjunto de polinomios de grado  $s$  unión el polinomio 0, denotado por

$$I_s := I \cap \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]_s,$$

es un  $\mathbb{C}$ -subespacio vectorial de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]_s$ .

**Definición 1.10.** Sea  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  un ideal. La *función de Hilbert afín* de  $I$  es la función sobre los enteros no negativos definida por

$$\begin{aligned} {}^aHF_I: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ s &\longmapsto \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]_{\leq s}}{I_{\leq s}}. \end{aligned}$$

Una forma de calcular la función de Hilbert afín de un ideal es usando ideales iniciales con un orden graduado  $\succ$ , como podemos ver en la siguiente proposición. Su demostración consiste en probar que para cualquier  $s$ , los subespacios  $I_{\leq s}$  y  $(in_{\succ}(I))_{\leq s}$  tiene la misma dimensión.

**Proposición 1.3.** [CLO13, Proposición 4, §9.3] Sean  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  un ideal y  $\succ$  un orden graduado sobre  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ . El ideal inicial  $in_{\succ}(I)$  tiene la misma función de Hilbert afín que  $I$ .

Antes de continuar con la función de Hilbert, retomemos algunos conceptos de la Sección 1.1.

**Definición 1.11.** Si  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  es un ideal monomial. Los monomios que no pertenecen a  $I$  son llamados *monomios estándar* de  $I$ .

Este conjunto de monomios puede ser finito o infinito, de hecho, si el ideal posee potencias puras en todas sus variables, el conjunto de monomios estándar es finito. Una característica importante del conjunto de monomios estándar está enunciada en el siguiente resultado debido a Macaulay.

**Teorema 1.4.** [Eis13, Macaulay, Teorema 15.3] Sean  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  un ideal monomial y  $\succ$  un orden monomial. Los monomios estándar de  $I$  forman una base del  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]/I$ .

Una consecuencia del teorema de Macaulay aplicada a la función de Hilbert afín para ideales monomiales es la siguiente: Si  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  es monomial entonces para todo  $s \geq 0$  se tiene

$$\begin{aligned} {}^aHF_I(s) &= |\text{monomios estándar de } I \text{ de grado } \leq s| \\ &= \binom{s+m}{s} - |\text{monomios de grado } \leq s \text{ en } I|. \end{aligned} \tag{1.1}$$

**Ejemplo 1.11.** Consideremos el ideal monomial  $I = \langle x_1^5, x_1^3x_2^2, x_1x_2^3, x_2^4 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2]$ . Tenemos las siguientes observaciones:

- $I$  tiene dos generadores de grado 4 y dos de grado 5, por tanto, los monomios de grado 0, 1, 2 y 3 son estándar. Por la ecuación (1.1) tenemos  ${}^aHF_I(s) = \binom{s+2}{s}$  para  $s = 0, 1, 2$  y 3.
- Dado que  $I$  es ideal y  $x_1x_2^3, x_2^4 \in I$ , entonces  $x_1^2x_2^3, x_1x_2^4, x_2^5 \in I$ . Además  $x_1^4x_2 \notin I$ , por tanto hay 5 monomios de grado 5 y 2 de grado 4 en  $I$ . Entonces por la ecuación (1.1)

$${}^aHF_I(4) = \binom{6}{4} - |\text{monomios de grado } \leq 4 \text{ en } I| = 15 - 2 = 13$$

y

$${}^aHF_I(5) = \binom{7}{5} - |\text{monomios de grado } \leq 5 \text{ en } I| = 21 - 7 = 14.$$

- Cualquier monomio de grado  $s \geq 6$  está en  $I$  pues puede escribirse como un múltiplo de los monomios de grado 5. Por tanto, para  $s \geq 6$

$${}^aHF_I(s) = \binom{s+2}{s} - (s+1) - |\text{monomios de grado } \leq s-1 \text{ en } I|.$$

Supongamos que para  $s-1$  se cumple que  ${}^aHF_I(s-1) = 14$ , es decir,

$$|\text{monomios de grado } \leq s-1 \text{ en } I| = \binom{s+1}{s-1} - 14.$$

Entonces

$${}^aHF_I(s) = \binom{s+2}{s} - (s+1) - \left( \binom{s+1}{s-1} - 14 \right) + 14 = \binom{s+1}{1} - (s+1) + 14 = 14.$$

Por tanto, para  $s \geq 5$ ,  ${}^aHF_I(s) = 14$ , es decir, es una función constante. Así que cualquier ideal en  $\mathbb{C}[x_1, x_2]$  con ideal inicial igual a  $I$  (con respecto a un orden graduado) tiene esta función de Hilbert afín.

De manera similar se puede definir la versión proyectiva de la función de Hilbert afín.

**Definición 1.12.** Sea  $\bar{I} \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  un ideal homogéneo. La *función de Hilbert* (proyectiva) de  $\bar{I}$  es la función sobre los enteros no negativos definida por

$$\begin{aligned} HF_{\bar{I}}: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ s &\longmapsto \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]_s}{\bar{I}_s} \end{aligned}$$

Un resultado análogo a la Proposición 1.3 para el caso proyectivo está dado por la siguiente proposición.

**Proposición 1.4.** [CLO13, Proposición 9, §9.3] Sean  $\bar{I} \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  un ideal homogéneo y  $\succ$  un orden monomial en  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ . El ideal inicial  $in_{\succ}(\bar{I})$  tiene la misma función de Hilbert que  $\bar{I}$ .

En cualquier caso se prueba que para un  $s \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, llamado el índice de regularidad, la función de Hilbert es un polinomio, el cual denotaremos por  ${}^aHP_I$  y  $HP_I$  respectivamente y es llamado *polinomio de Hilbert* (afín o proyectivo). En el Ejemplo 1.11 vemos que  ${}^aHP_I = 14$ . Además, como  $I$  es monomial podemos ver que la homogenización  $\bar{I}$  de  $I$  con respecto a  $x_0$  en  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  es igual a  $I$ . Por el siguiente teorema tendremos que  $HP_{\bar{I}} = 14$  también.

**Teorema 1.5.** [CLO13, Teorema 12(ii), §9.3] Sean  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  un ideal y  $\bar{I} \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_m]$  su homogenización con respecto a  $x_0$ . Para  $s \geq 0$  se tiene  ${}^aHF_I(s) = HF_{\bar{I}}(s)$ .

Un resultado importante sobre los polinomios de Hilbert que los dota de un significado geométrico está dado por un ideal y su radical. Los grados de sus polinomios de Hilbert asociados coinciden. Dado que un ideal y su radical generan la misma variedad entonces se puede definir la dimensión de dicha variedad en términos del grado del polinomio de Hilbert.

**Definición 1.13.** La *dimensión* de una variedad afín  $V \subset \mathbb{C}^m$ , es el grado del polinomio de Hilbert afín del ideal correspondiente  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  a la variedad.

La *dimensión* de una variedad proyectiva  $V \subset \mathbb{P}^{m-1}$ , es el grado del polinomio de Hilbert del correspondiente ideal homogéneo  $\bar{I} \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  a la variedad.

Diremos que un *ideal es 0-dimensional*, si su polinomio de Hilbert es constante.

En el Ejemplo 1.11, la variedad afín definida por  $I \subset \mathbb{C}[x_1, x_2]$  es  $V(I) = \{(0, 0)\} \subset \mathbb{C}^2$ , y  $\deg({}^aHP_I) = 0$  pues es un polinomio constante. La variedad proyectiva  $V(\bar{I}) = \{[1 : 0 : 0]\} \subset \mathbb{P}^2$  definida por  $\bar{I} = I$  como ideal en  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ , es 0-dimensional. De hecho, nos interesa estudiar ideales similares a este ejemplo, es decir, ideales 0-dimensional en  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  que corresponden a puntos en  $\mathbb{P}^2$ . Para ello, recordemos los siguientes hechos en general sobre esquemas de Hilbert sobre  $\mathbb{P}^m$ .

A grosso modo, el esquema de Hilbert sobre  $\mathbb{P}^m$  parametriza subesquemas cerrados de  $\mathbb{P}^m$  con polinomio de Hilbert fijo. La estructura de esquema de este conjunto fue dada por A. Grothendieck en el EGA.

Él demostró que dado un subesquema  $\mathcal{J}$  de  $\mathbb{P}^m$  con polinomio de Hilbert  $P(t)$ , existe un esquema proyectivo  $\mathbb{H}^{P(t)}(\mathbb{P}^m)$ , llamado esquema de Hilbert, que parametriza subesquemas cerrados de  $\mathbb{P}^m$  con el mismo polinomio de Hilbert  $P(t)$  que  $\mathcal{J}$ . También probó que existe un subesquema universal

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \subset & \mathbb{P}^m \times \mathbb{H}^{P(t)}(\mathbb{P}^m) & \\ & \downarrow \pi & \\ & \mathbb{H}^{P(t)}(\mathbb{P}^m) & \end{array}$$

plano sobre  $\mathbb{H}^{P(t)}(\mathbb{P}^m)$  y cuyas fibras sobre puntos cerrados de  $\mathbb{H}^{P(t)}(\mathbb{P}^m)$  son subesquemas de  $\mathbb{P}^m$  con polinomio de Hilbert  $P(t)$ . Además este subesquema  $\mathcal{X}$  es universal en el siguiente sentido: si  $T$  es otro esquema y  $\mathcal{X}' \subset \mathbb{P}^m \times T$  es un subesquema cerrado plano sobre  $T$  cuyas fibras son subesquemas de  $\mathbb{P}^m$  con polinomio de Hilbert  $P(t)$ , entonces existe un único morfismo  $\Phi : T \rightarrow \mathbb{H}^{P(t)}(\mathbb{P}^m)$  tal que  $\mathcal{X}'$  es factorizado a través de  $\mathcal{X}$ , es decir,  $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathbb{H}^{P(t)}(\mathbb{P}^m)} T$  como subesquema de  $\mathbb{P}^m \times T$ . En otras palabras, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{P}^m \times T & \xrightarrow{\text{id} \times \Phi} & \mathbb{P}^m \times \mathbb{H}^{P(t)}(\mathbb{P}^m) \\ & \nearrow & & & \nearrow \\ \mathcal{X}' & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{X} & & \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \\ T & \xrightarrow{\quad \Phi \quad} & \mathbb{H}^{P(t)}(\mathbb{P}^m) & & \end{array}$$

esta propiedad es llamada [la propiedad universal del esquema de Hilbert](#).

Como nos interesa el esquema de Hilbert de  $\mathbb{P}^2$  con polinomio de Hilbert constante, recordemos una equivalencia de los elementos del esquema con ideales homogéneos saturados.

De manera general, denotemos por  $\mathfrak{M} = \langle x_0, \dots, x_m \rangle$  al ideal maximal de  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_m]$  correspondiente al punto  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{m+1}$ .

**Definición 1.14.** Sea  $\bar{I} \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_m]$  un ideal homogéneo. La *saturación* de  $\bar{I}$  con respecto a  $\mathfrak{M}$  es un ideal definido por

$$(\bar{I} : \mathfrak{M}^\infty) := \{f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_m] : f \cdot \mathfrak{M}^s \in \bar{I} \text{ para algún } s \gg 0\}.$$

Decimos que un ideal  $\bar{I}$  es *saturado* si  $\bar{I} = (\bar{I} : \mathfrak{M}^\infty)$ .

Observemos que  $\bar{I} \subset (\bar{I} : \mathfrak{M}^\infty)$  pues  $\bar{I}$  es ideal. Además  $\bar{I}$  y  $(\bar{I} : \mathfrak{M}^\infty)$  tienen el mismo polinomio de Hilbert, pues para un  $s \gg 0$ , tenemos  $\bar{I}_s = (\bar{I} : \mathfrak{M}^\infty)_s$ .

Un subesquema cerrado de  $\mathbb{P}^m$  corresponde a un ideal homogéneo de  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_m]$  que no está contenido en el ideal maximal  $\mathfrak{M}$  (ver [Har77, Eis13]). Sin embargo, esta correspondencia no es inyectiva. Dos ideales

corresponden al mismo subesquema si, y sólo si su saturación es la misma. De hecho la saturación de un ideal  $\bar{I}$  es el ideal más grande que corresponde al mismo subesquema que  $\bar{I}$ , por tanto, existe una correspondencia biyectiva entre los ideales homogéneos saturados de  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_m]$  y los subesquemas cerrados de  $\mathbb{P}^m$ . Por esta razón, optaremos por la siguiente definición del esquema de Hilbert con polinomio de Hilbert constante.

**Definición 1.15.** Para  $N \in \mathbb{N}$  fijo. El *esquema de Hilbert de  $N$  puntos sobre  $\mathbb{P}^m$*  se define por

$$\mathbb{H}^N(\mathbb{P}^m) := \{\bar{I} \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_m] \text{ ideal homogéneo saturado: } HP_{\bar{I}} = N\}$$

En general no se conoce bien la estructura de estos esquemas, los más estudiados son los de puntos en el plano pero aún hay muchos problemas abiertos. Al menos sobre  $\mathbb{P}^2$  y con polinomio de Hilbert constante  $N$ , el espacio es una variedad algebraica suave, irreducible de dimensión  $2N$  (ver [Fog68, MS04, ACG11]). De hecho Hartshorne en [Har66] demostró que  $\mathbb{H}^{P(t)}(\mathbb{P}^m)$  es conexo.

De manera similar se puede definir el esquema de Hilbert de  $N$  puntos sobre el plano complejo el cual denotaremos por  $\mathbb{H}^N(\mathbb{C}^2)$  y se define por  $\mathbb{H}^N(\mathbb{C}^2) = \{I \in \mathbb{C}[x_1, x_2] \text{ ideal : } {}^aHP_I = N\}$ . Este esquema tiene una cubierta  $\{U_\lambda\}$  por abiertos afines asociados a particiones  $\lambda$  de  $N$  los cuales discutiremos en la Sección 4.1 y cuya estructura de esquema está dada de manera explícita en [MS04].

# Foliaciones

Existen varias formas de definir una foliación holomorfa por curvas sobre  $\mathbb{P}^2$  (ver [MS03, Zak01]). Nosotros daremos la definición en el contexto de formas diferenciales pues es una manera de relacionar foliaciones y el esquema de Hilbert de puntos sobre  $\mathbb{P}^2$ . En este capítulo, presentaremos algunas caracterizaciones sobre esquemas que nos permitirán, junto con la propiedad universal del esquema de Hilbert, dar un morfismo inyectivo entre el esquema de las foliaciones de grado  $d$  con singularidades aisladas y el esquema de Hilbert de  $d^2 + d + 1$  puntos. Trabajaremos sobre los anillos de polinomios  $\mathbb{C}[x, y, z]$  y  $\mathbb{C}[y, z]$ .

## 2.1. Definición de foliación

Intuitivamente una foliación singular sobre una variedad compleja  $M$  es una descomposición de  $M - \text{Sing}(\mathcal{F})$  en subvariedades de la misma dimensión llamadas hojas de la foliación, donde  $\text{Sing}(\mathcal{F})$  es un subconjunto analítico de codimensión mayor o igual a 2. El número de puntos en los cuales una línea proyectiva genérica es tangente a las hojas de una foliación es llamado el grado de la foliación. En [Zak01, Teorema 1.18] podemos ver que una foliación holomorfa por curvas es de grado  $d$  si la 1-forma que la define tiene componentes de grado  $d + 1$ .

Nosotros trabajaremos con foliaciones singulares de grado  $d \geq 2$  por curvas sobre el plano proyectivo complejo  $\mathbb{P}^2$  con singularidades aisladas.

**Definición 2.1.** Sean  $[x : y : z]$  coordenadas homogéneas sobre  $\mathbb{P}^2$ .

- Una *foliación*  $\mathcal{F}^d$  (o  $\mathcal{F}_\Omega^d$  si queremos enfatizar la 1-forma  $\Omega$ ) de grado  $d \geq 2$  por curvas sobre  $\mathbb{P}^2$ , está dada (salvo factores escalares no nulos) por una 1-forma reducida homogénea

$$\Omega = Adx + Bdy + Cdz,$$

donde  $A, B$  y  $C \in \mathbb{C}[x, y, z]$  son polinomios homogéneos de grado  $d + 1$  sin factores en común, y que satisface la condición de Euler

$$Ax + By + Cz = 0.$$

- Los puntos de la variedad definida por el ideal generado por  $A, B$  y  $C$  son llamados *puntos singulares* de la foliación  $\mathcal{F}^d$  y lo denotaremos por  $Sing(\mathcal{F}^d) := V(\langle A, B, C \rangle)$ .

Con estructura de esquema, el conjunto singular es muy importante pues da condiciones necesarias y suficientes para caracterizar este tipo de foliaciones como veremos en la Sección 2.3.

Dado que  $A, B$  y  $C$  no tienen factores en común,  $Sing(\mathcal{F}^d)$  es un conjunto finito. Por tanto, bajo un cambio de coordenadas podemos suponer que las singularidades pertenecen al abierto afín de  $\mathbb{P}^2$  definido por  $U_0 := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : x \neq 0\} \cong \mathbb{C}^2$ . Entonces, podemos representar a la foliación de manera local por la 1-forma

$$\omega = f(y, z)dy + g(y, z)dz,$$

donde  $f(y, z) = C(1, y, z)$  y  $g(y, z) = -B(1, y, z) \in \mathbb{C}[y, z]$ . Bajo esta identificación, se puede probar que los puntos singulares de  $\mathcal{F}^d$  se identifican con los puntos de la variedad afín  $V(\langle f, g \rangle) \subset \mathbb{C}^2$ .

Denotaremos por  $\mathcal{F}(d, \mathbb{P}^2)$  el espacio de foliaciones de grado  $d$  con singularidades aisladas el cual es un abierto en el espacio de foliaciones de grado  $d$  sobre  $\mathbb{P}^2$  que es un espacio proyectivo de dimensión  $d^2 + 4d + 2$  (ver [GMOB04]).

## 2.2. Representación local de una foliación y el esquema de Hilbert de puntos sobre el plano

En esta sección veremos la relación entre la representación local de una foliación  $\mathcal{F}^d$  y los elementos del esquema  $\mathbb{H}^{d^2+d+1}(\mathbb{C}^2)$ . Para ello vamos a definir y calcular el número de Milnor asociado a los puntos singulares de la foliación.

Sea  $\mathcal{F}^d \in \mathcal{F}(d, \mathbb{P}^2)$ , salvo un cambio de coordenadas, asumiremos que  $Sing(\mathcal{F}^d) \subset U_0$ . Por tanto, sea  $\omega = f(y, z)dy + g(y, z)dz$  una representación local de  $\mathcal{F}^d$ .

**Definición 2.2.** El *número de Milnor* en una singularidad  $p = [1 : b : c]$  de  $\mathcal{F}^d$  está definido por

$$\mu_p(\mathcal{F}^d) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)}{\langle f, g \rangle \cdot \mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)},$$

donde  $q = (b, c) \in \mathbb{C}^2$  es el correspondiente punto  $p$  bajo la identificación de  $U_0$  con  $\mathbb{C}^2$  y  $\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)$  es el anillo de funciones regulares en  $q$ .

Podemos observar que para cualquier punto  $p \in Sing(\mathcal{F}^d)$ ,  $\mu_p(\mathcal{F}^d) \geq 1$ .

Ahora, dado que  $Sing(\mathcal{F}^d)$  es finito, entonces  $V(\langle f, g \rangle)$  es finito, por tanto, por [Ful69, Capítulo 2, Proposición 6] se tiene el siguiente isomorfismo de espacios vectoriales:

$$\frac{\mathbb{C}[y, z]}{\langle f, g \rangle} \cong \prod_{q \in V(\langle f, g \rangle)} \frac{\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)}{\langle f, g \rangle \cdot \mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[y,z]}{\langle f,g \rangle} &= \sum_{q \in V(\langle f,g \rangle)} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)}{\langle f,g \rangle \cdot \mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)} \\ &= \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}^d)} \mu_p(\mathcal{F}^d) \end{aligned} \quad (\text{por definición})$$

Dado que estamos suponiendo que  $\text{Sing}(\mathcal{F}^d) \subset U_0$ , se puede probar que  $f(y,z) = \sum_{i=0}^d a_i + zh$  y  $g(y,z) = \sum_{i=0}^d b_i + yh$ , donde  $a_i, b_i \in \mathbb{C}[y,z]$  son polinomios homogéneos de grado  $i$  y  $h \in \mathbb{C}[y,z]$  es de grado  $d$ . Por Bézout,  $f$  y  $g$  se intersectan en  $d^2 + 2d + 1$  puntos. Los puntos de esta intersección que pertenecen a  $U_0$  son puntos singulares de  $\mathcal{F}^d$ , pero los que intersectan a la recta al infinito no son puntos singulares de  $\mathcal{F}^d$  porque estamos suponiendo que  $\text{Sing}(\mathcal{F}^d) \subset U_0$ . Observemos que la homogenización de  $f$  y  $g$  con respecto a  $x$  son los polinomios  $\sum_{i=0}^d a_i x^{d+1-i} + zh$  y  $\sum_{i=0}^d b_i x^{d+1-i} + yh$ . Las curvas definidas por estas homogenizaciones, son curvas que intersectan a  $\{x=0\}$  en  $[0:1:0]$  y las raíces de  $h$  para la primera, y para la segunda en  $[0:0:1]$  y las raíces de  $h$ . Dado que  $h$  tiene grado  $d$ , entonces las dos curvas se intersectan en la recta al infinito en  $d$  puntos. Por tanto,  $\mathcal{F}^d$  tiene, contando con multiplicidad,  $d^2 + d + 1$  puntos. Por lo tanto,  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[y,z]}{\langle f,g \rangle} = d^2 + d + 1$ .

Es decir, el ideal generado por las componentes de la 1-forma que representa de manera local a la foliación  $\mathcal{F}^d \in \mathcal{F}(d, \mathbb{P}^2)$  es un elemento del esquema de Hilbert de  $d^2 + d + 1$  puntos sobre el plano  $\mathbb{C}^2$ .

## 2.3. Esquema singular de una foliación

Dada una foliación  $\mathcal{F}^d \in \mathcal{F}(d, \mathbb{P}^2)$ , el subesquema  $\mathcal{J}_{\text{Sing}(\mathcal{F}^d)}$  asociado al conjunto singular de una foliación  $\text{Sing}(\mathcal{F}^d)$ , el cual llamaremos subesquema singular de la foliación, está definido como el subesquema de  $\mathbb{P}^2$  dado por la gavilla de ideales  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$  cuyas fibras en los puntos  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}^d)$  son los ideales definidos por los germines de  $f$  y  $g$ .

En 1989, Gómez-Mont y Kempf demostraron en [GMK89] que el conjunto singular determina completamente una foliación cuando los puntos son diferentes. En 2001, Campillo y Olivares en [CO01] probaron que una foliación de grado diferente de uno, queda completamente determinada por su subesquema singular.

En esta sección mencionaremos algunos de estos resultados, los cuales son base de los algoritmos que se presentan más adelante.

**Teorema 2.1.** [GMK89] *Sea  $X$  un campo vectorial meromorfo de grado  $d > 0$  tal que todos sus ceros tienen multiplicidad uno entonces  $X$  es completamente determinada por su conjunto de ceros.*

**Teorema 2.2.** [CO01, Teorema 3.5] *Si  $d \geq 2$ , existe una única terna  $A, B, C$  (salvo múltiplo escalar) en  $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(d+1))$  satisfaciendo la condición de Euler  $xA + yB + zC = 0$ . En consecuencia, si  $d \geq 2$ ,  $\mathcal{F}^d$  es la única foliación en  $\mathcal{F}(d, \mathbb{P}^2)$  que tiene  $\mathcal{J}_{\text{Sing}(\mathcal{F}^d)}$  como subesquema singular, y es verdad también si  $d = 0$ .*

**Teorema 2.3.** [CO01, Teorema 4.5] *Para  $d \geq 2$ . Sea  $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$  una gavilla de ideales intersección local completa de longitud  $d^2 + d + 1$ . Entonces  $\mathcal{J}_0$  es la gavilla de ideales  $\mathcal{J}$  del subesquema singular  $\mathcal{J}_{\text{Sing}(\mathcal{F}^d)}$  de una foliación reducida  $\mathcal{F}^d$  (y por tanto única) de grado  $d$  sobre  $\mathbb{P}^2$  si, y sólo si se satisface lo siguiente:*

i)  $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_0(d+1)) \geq 3$  y las formas en  $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_0(d+1))$  no tiene factores en común.

ii)  $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}'(d)) = 0$  para cada gavilla de ideales  $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}'$  de longitud  $d^2 + d$ .

**Teorema 2.4.** [CO01, Teorema 3.2] Sea  $\mathcal{F}^d$  una foliación reducida, sea  $\mathcal{I}$  la gavilla de ideales de su subesquema singular  $\mathcal{I}_{\text{Sing}(\mathcal{F}^d)}$ . Para cada  $s \geq 0$ , se tiene

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}(s)) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq d, \\ (t+1)(t+3) & \text{si } d+1 \leq s = t+d+1 \leq 2d, \\ \binom{s+2}{2} - (d^2+d+1) & \text{si } s > 2d. \end{cases}$$

La fórmula es válida si se reemplaza la cota  $2d$  por  $2(d-1)$ .

Recordemos que  $\mathcal{F}(d, \mathbb{P}^2)$  es un abierto de un espacio proyectivo, por tanto, es un esquema reducido. Sean  $\mathcal{X}' = \{(P, \mathcal{F}^d) \in \mathbb{P}^2 \times \mathcal{F}(d, \mathbb{P}^2) \mid P \in \text{Sing}(\mathcal{F}^d)\}$  un subesquema cerrado de  $\mathbb{P}^2 \times \mathcal{F}(d, \mathbb{P}^2)$  y  $\pi$  el morfismo proyección

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \subset & \mathbb{P}^2 \times \mathcal{F}(d, \mathbb{P}^2) \\ \downarrow \pi & & \\ \mathcal{F}(d, \mathbb{P}^2) & & \end{array}$$

Observemos que  $\pi^{-1}(\mathcal{F}^d) \cong \text{Sing}(\mathcal{F}^d) \in \mathbb{H}^{d^2+d+1}(\mathbb{P}^2)$  para toda  $\mathcal{F}^d \in \mathcal{F}(d, \mathbb{P}^2)$ . Por [ACG11, Proposición 2.2],  $\pi$  es plano si, y sólo si el polinomio de Hilbert de las fibras es localmente constante, es decir, las fibras tienen mismo polinomio de Hilbert. Por tanto,  $\pi$  es plano. Entonces, por la propiedad universal del esquema de Hilbert, existe un único morfismo de esquemas

$$\Phi : \mathcal{F}(d, \mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathbb{H}^{d^2+d+1}(\mathbb{P}^2).$$

De hecho, el Teorema 2.3 implica que el morfismo  $\Phi$  es inyectivo. Con este morfismo, podemos observar que la condición del Teorema 2.3 (ii) pueden ser dadas usando solamente el ideal asociado al subesquema y bases de Gröbner.

**Teorema 2.5.** Para  $d \geq 2$ . Sea  $\mathcal{G} \subset \mathbb{C}[y, z]$  una base de Gröbner mínima con respecto a un orden monomial graduado  $\succ$  de un ideal  $I \in \mathbb{H}^{d^2+d+1}(\mathbb{C}^2)$  y sea  $\bar{I} \subset \mathbb{C}[x, y, z]$  la homogenización de  $I$ .

Si existen tres polinomios de grado  $d+1$  en  $\mathcal{G}$  entonces  $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{V(\bar{I})}(d+1)) \geq 3$ . Si además la  $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{V(\bar{I})}(s)) = 0$  para todo  $s \leq d$ , entonces se cumple el inverso.

*Demostración:* Los elementos de la base de Gröbner son linealmente independientes sobre  $\mathbb{C}$  y la homogenización de elementos linealmente independientes en  $\mathcal{G}$  son linealmente independientes. Dado que la dimensión del espacio  $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{V(\bar{I})}(d+1))$  determina el número de formas de grado  $d+1$  en  $\bar{I}$  linealmente independientes, si suponemos que  $\mathcal{G}$  tiene tres polinomios de grado  $d+1$  entonces, por lo anterior,  $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{V(\bar{I})}(d+1)) \geq 3$ .

Para el regreso, supongamos que  $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{V(\bar{I})}(d+1)) \geq 3$  y  $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{V(\bar{I})}(s)) = 0$  para toda  $s \leq d$ . Observemos que  $\mathcal{G}$  no tiene polinomios de grado  $\leq d$ , pues la homogenización de un polinomio de grado  $k$  es de grado  $k$  y por hipótesis  $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{V(\bar{I})}(s)) = 0$  para toda  $s \leq d$ .

Procederemos por contradicción. Si  $\mathcal{G}$  no tiene polinomios de grado  $d+1$ , sea  $F(x,y,z) \in \bar{I}_{d+1}$  (existe por hipótesis), entonces  $F(1,y,z) \in I$  y  $\deg(F(1,y,z)) \leq d+1$ . Dado que  $\succ$  es un orden graduado,  $F(1,y,z)$  no puede ser generado por los elementos de  $\mathcal{G}$ , lo cual es una contradicción.

Si  $\mathcal{G} = \{f_1, g_2, \dots, g_s\}$  donde  $\deg(f_1) = d+1$  y  $\deg(g_i) \geq d+2$  para toda  $i = 2, \dots, s$ . Sea  $F_3 \in \bar{I}_{d+1}$  linealmente independiente con la homogenización  $\bar{f}_1$  de  $f_1$ . Observemos que si  $F_3 = \sum_{i=1}^{d+1} h_{d+1-i}(y,z)x^i$  donde  $h_{d+1-i}(y,z) \in \mathbb{C}[y,z]_{d+1-i}$  y  $h_{d+1}(y,z) = 0$  entonces  $\deg(F_3(1,y,z)) \leq d$  y determina un elemento que no puede ser generado por los elementos de  $\mathcal{G}$ . Por tanto,  $F_3 \in \bar{I}_{d+1}$  con  $\deg(F_3(1,y,z)) = d+1$ .

Definamos a  $f_3 := F_3(1,y,z) \in I$ , entonces  $\text{in}_{\succ}(f_3) = c_1 \text{in}_{\succ}(f_1)$ . Consideremos el  $S$ -polinomio de  $f_1$  y  $f_3$ , es decir,  $S(f_1, f_3) = f_1 - \frac{1}{c_1} f_3 \in I$ . Observemos que  $S(f_1, f_3) \neq 0$ , pues dado que  $\bar{f}_1$  y  $F_3$  son linealmente independientes y  $a\bar{f}_1 + bF_3 = a\bar{f}_1 + bF_3$ , entonces  $f_1$  y  $f_3$  son linealmente independientes.

Como  $\succ$  es un orden graduado,  $\deg(S(f_1, f_3)) \leq d+1$  y  $\text{in}_{\succ}(f_1) \succ \text{in}_{\succ}(S(f_1, f_3))$ . Si  $\deg(S(f_1, f_3)) \leq d$ , su homogenización tiene mismo grado, por tanto sería una contradicción con la hipótesis. Supongamos que  $\deg(S(f_1, f_3)) = d+1$ , dado que  $\text{in}_{\succ}(f_1) \succ \text{in}_{\succ}(S(f_1, f_3))$ , esto implicaría que  $\text{in}_{\succ}(S(f_1, f_3)) \in \text{in}_{\succ}(\mathcal{G} - \{f_1\})$ , lo cual es una contradicción porque  $\mathcal{G}$  es mínima.

Si  $\mathcal{G} = \{f_1, f_2, g_3, \dots, g_s\}$  donde  $\deg(f_1) = \deg(f_2) = d+1$  y  $\deg(g_i) \geq d+2$  para toda  $i = 3, \dots, s$ . Existe  $F_3 \in \bar{I}_{d+1}$  tal que  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, F_3$  son linealmente independientes y  $\deg(F_3(1,y,z)) = d+1$ . Sea  $f_3 := F_3(1,y,z) \in I - \mathcal{G}$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\text{in}_{\succ}(f_3) = c_1 \text{in}_{\succ}(f_1)$  para alguna  $c_1 \in \mathbb{C}^*$ .

Considerando el  $S$ -polinomio de  $f_1$  y  $f_3$ ;  $S(f_1, f_3)$  el cual es un polinomio no cero pues  $f_1$  y  $f_3$  son linealmente independiente,  $\deg(S(f_1, f_3)) \leq d+1$  y  $\text{in}_{\succ}(f_1) \succ \text{in}_{\succ}(S(f_1, f_3))$ .

Si  $\deg(S(f_1, f_3)) = d+1$ , dado que  $\text{in}_{\succ}(f_1) \succ \text{in}_{\succ}(S(f_1, f_3))$  y  $\deg(\text{in}_{\succ}(g_i)) \geq d+2$ , entonces  $\text{in}_{\succ}(S(f_1, f_3)) = c_2 \text{in}_{\succ}(f_2)$  para algún  $c_2 \in \mathbb{C}^*$ .

Consideremos el  $S$ -polinomio de  $f_2$  y  $S(f_1, f_3)$ , es decir,  $S_1 := S(f_2, S(f_1, f_3)) = f_2 - \frac{1}{c_2} S(f_1, f_3) = f_2 - \frac{1}{c_2} f_1 + \frac{1}{c_2 c_1} f_3 \in I$ . Observemos que  $S_1 \neq 0$ , pues  $f_1, f_2$  y  $f_3$  son linealmente independientes y  $\text{in}_{\succ}(h) \succ \text{in}_{\succ}(S_1)$  para toda  $h \in \mathcal{G}$ , esto implica que  $\text{in}_{\succ}(S_1) \notin \text{in}_{\succ}(I)$ , lo cual es una contradicción pues  $S_1 \in I$ .  $\square$

Observemos que el hecho de que tengamos tres polinomios de grado  $d+1$  en una base de Gröbner mínima, no necesariamente implica que se satisface la condición de Euler para estos tres polinomios.

**Ejemplo 2.1.** Consideremos el ideal  $I = \langle y^2z + z^3, yz - y^3 - z^2y \rangle \subset \mathbb{C}[y,z]$ . Los generadores de este ideal son las componentes de la 1-forma  $\omega_3 = yzdz + (y^2 + z^2)(zdy - ydz)$  que representa de manera local una foliación en  $\mathbb{P}^2$  de grado  $d = 2$  (ver [CDBM10]). Usando  $\succ_{GRevLex}$ , la base de Gröbner reducida (en particular, es una base mínima) para  $I$  está dada por

$$\mathcal{G}_I = \{yz^2, y^2z + z^3, y^3 - yz, z^4\}.$$

Al homogenizar los polinomios de grado 3 con respecto a  $x$  obtenemos el conjunto

$$\mathcal{G} = \{yz^2, y^2z + z^3, y^3 - xyz\}$$

y se puede comprobar que  $xf_1 + yf_2 + zf_3 \neq 0$  para toda  $f_j \neq f_i$ , donde  $f_i \in \mathcal{G}$ .

Sin embargo, si tomamos la siguiente base de Gröbner mínima

$$\{yz^2, y^2z + z^3, -y^3 - yz - z^2y, z^4\}$$

de  $I$ , obtenemos los siguientes polinomios homogéneos de grado 3

$$\{yz^2, y^2z + z^3, -y^3 - xyz - z^2y\}$$

y satisfacen

$$x(yz^2) + y(y^2z + z^3) + z(-y^3 - xyz - z^2y) = 0.$$

Por tanto es natural preguntarse por las condiciones que deben cumplirse en una base de Gröbner de un ideal como el del Teorema 2.5 para satisfacer la condición de Euler. La respuesta a esto la veremos en el capítulo siguiente.

# Capítulo 3

## Sicigias

En este capítulo desarrollaremos brevemente la teoría de sicigias la cual proporcionará una herramienta para desarrollar los algoritmos que presentaremos en el Capítulo 4.

### 3.1. Definiciones y resultados sobre sicigias

Vamos a suponer que  $R$  es un anillo Noetheriano.

**Definición 3.1.** Un *anillo graduado* es un anillo  $R$  junto con una descomposición en suma directa

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$$

de grupos abelianos tal que  $R_i R_j \subset R_{i+j}$  para  $i, j \geq 0$ .

Un *elemento homogéneo* de  $R$  es un elemento de uno de los grupos  $R_i$ .

Un *ideal homogéneo* de  $R$  es un ideal que es generado por elementos homogéneos.

**Ejemplo 3.1.** El anillo de polinomios  $\mathbb{C}[x, y, z]$  es un anillo graduado. Los elementos homogéneos de grado  $s$ , es decir, los elementos en  $\mathbb{C}[x, y, z]_s$  es el  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado  $s$  unión el polinomio 0.

**Definición 3.2.** Sea  $R$  es un anillo graduado. Un *módulo graduado* sobre  $R$  es un módulo  $M$  con una descomposición  $M = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} M_i$  de grupos abelianos tal que  $R_i M_j \subset M_{i+j}$  para toda  $i, j$ .

**Ejemplo 3.2.** Sea  $R = \bigoplus R_i$  un anillo graduado.

1. Los  $R$ -módulos libres  $R^m$  son módulos graduados pues  $R^m = \bigoplus (R^m)_i$ , donde  $(R^m)_i := (R_i)^m$ .
2. Si  $\{M_i\}_{i=1}^m$  son  $R$ -módulos graduados, entonces  $\bigoplus_{i=1}^m M_i$  es un  $R$ -módulo graduado.
3. Si  $\bar{I} \subset R$  es un ideal homogéneo, entonces  $\bar{I}$  es un  $R$ -módulo graduado. Pues  $\bar{I} = \bigoplus_{s=-\infty}^{\infty} \bar{I}_s$ , donde  $\bar{I}_s := \bar{I} \cap R_s$ .

4. Si  $M = \bigoplus M_s$  es un  $R$ -módulo graduado y  $t \in \mathbb{Z}$ , entonces  $M(t) := \bigoplus M(t)_s$  donde  $M(t)_s := M_{s+t}$  es un  $R$ -módulo graduado isomorfo a  $M$  llamado el **módulo recorrido** o **torcido**.

Observemos que el módulo torcido  $M(t)$  es un módulo isomorfo al módulo  $M$ , salvo que cambia la graduación de los elementos, por ejemplo, los elementos de grado 0 en  $M(t)$  son elementos de grado  $-t$  en  $M$ . Además, la suma directa de los módulos torcidos  $R(t_i)$  con  $t_i \in \mathbb{Z}$  es un  $R$ -módulo graduado libre.

**Definición 3.3.** Sean  $M$  y  $N$   $R$ -módulos graduados. Un homomorfismo  $\varphi : M \rightarrow N$  es un **homomorfismo de grado  $t$**  si  $\varphi(M_s) \subset N_{s+t}$  para toda  $s \in \mathbb{Z}$ .

**Ejemplo 3.3.** El homomorfismo  $\varphi : (\mathbb{C}[x, y, z](-4))^2 \rightarrow (\mathbb{C}[x, y, z](-3)) \oplus (\mathbb{C}[z, y, z](-2))$  definido por

$$\varphi = \begin{bmatrix} z & y \\ -y^2 & -xz \end{bmatrix}$$

es un homomorfismo de grado 0. En efecto, sea  $(m_1, m_2) \in (\mathbb{C}[x, y, z](-4))_s^2$ , es decir,  $m_1, m_2 \in \mathbb{C}[x, y, z]_{s-4}$ , entonces

$$\varphi \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & y \\ -y^2 & -xz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} zm_1 + ym_2 \\ -y^2m_1 - xzm_2 \end{bmatrix}$$

Por tanto,  $\deg(zm_1 + ym_2) = s - 4 + 1 = s - 3$  y  $\deg(-y^2m_1 - xzm_2) = s - 4 + 2 = s - 2$ . Es decir,  $zm_1 + ym_2 \in (\mathbb{C}[x, y, z](-3))_s$  y  $-y^2m_1 - xzm_2 \in (\mathbb{C}[x, y, z](-2))_s$ .

En general, un homomorfismo de grado 0

$$R(-t_1) \oplus \cdots \oplus R(-t_p) \xrightarrow{\varphi} R(-c_1) \oplus \cdots \oplus R(-c_m)$$

está definido por una matriz  $\varphi$  de tamaño  $m \times p$  cuya entrada  $ij$  es un elemento en  $R_{t_j - c_i}$  para cada  $i, j$ .

**Definición 3.4.** Sean  $R$  un anillo graduado y  $M$  un  $R$ -módulo graduado.

- Una **resolución libre graduada de  $M$**  es una resolución de la forma

$$F_\bullet : \cdots \xrightarrow{\varphi_n} F_n \cdots \rightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$$

donde cada  $F_i$  es un módulo torcido graduado libre, es decir,  $F_i = \bigoplus_j R(-s_{i,j})$  y cada homomorfismo  $\varphi_i$  es un homomorfismo graduado de grado cero que llamaremos **presentación**.

- La imagen del homomorfismo  $\varphi_i$  es llamado el  **$i$ -ésimo módulo de sicigias de  $M$** .
- Si para algún  $n$  se tiene  $F_{n+1} = 0$ , pero  $F_t \neq 0$  para toda  $0 \leq t \leq n$ , decimos que  $F_\bullet$  es una **resolución de longitud  $n$** .

Se puede ver que cada  $R$ -módulo graduado  $M$  admite una resolución libre graduada de la siguiente manera. Supongamos que  $M$  es un  $R$ -módulo generado por  $t_0$  elementos  $f_1, \dots, f_{t_0}$  y definamos el homomorfismo de  $R$ -módulos

$$\varphi_0 : R^{t_0} \longrightarrow M$$

$$e_i \longmapsto f_i$$

donde  $\{e_1, \dots, e_{t_0}\}$  son la base canónica ordenada del módulo libre  $R^{t_0}$ .

Denotamos por  $M_1 = \text{Ker}(\varphi_0)$ , y supongamos que este módulo es generado por  $t_1$  elementos. Procediendo como antes, tenemos un homomorfismo

$$\bar{\varphi}_1 : R^{t_1} \longrightarrow M_1$$

que envía la base canónica de  $R^{t_1}$  a los generadores de  $M_1$  obteniendo la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccc} R^{t_1} & \xrightarrow{\varphi_1 = i \cdot \bar{\varphi}_1} & R^{t_0} & \xrightarrow{\varphi_0} & M \\ & \searrow \bar{\varphi}_1 & \nearrow i & & \\ & & M_1 & & \end{array}$$

Así, podemos continuar el proceso, obteniendo una resolución libre del módulo  $M$ ,

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & R^{t_n} & \xrightarrow{\varphi_n} & R^{t_{n-1}} & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & \dots & \longrightarrow & R^{t_1} & \xrightarrow{\varphi_1} & R^{t_0} & \xrightarrow{\varphi_0} & M \\ & & \vdots & & \nearrow & & & & \vdots & & \searrow & & \\ & & \text{Ker}(\varphi_{n-1}) & & & & & & \text{Ker}(\varphi_0) & & & & \end{array}$$

Por lo regular, cuando trabajamos con un módulo de la forma  $M = R/\bar{I}$ , donde  $\bar{I}$  es un ideal homogéneo en el anillo  $R$  generado por  $f_1, \dots, f_t$  elementos y hablamos del **módulo de sicigias de  $M$**  nos vamos a referir al segundo módulo de sicigias de  $M$ , es decir,  $\text{im}(\varphi_2) = \text{Ker}(\varphi_1)$ , y lo denotaremos por  $\text{Syz}(M)$  o por  $\text{Syz}(f_1, \dots, f_t)$ .

**Ejemplo 3.4.** Consideremos el  $\mathbb{C}[x, y]$ -módulo  $\bar{I} = \langle x^4, x^2y^2, y^4 \rangle$  y consideremos el homomorfismo  $\varphi_0$  definido por

$$\begin{array}{ccc} \varphi_0 : \mathbb{C}[x, y]^3 & \longrightarrow & I \\ e_1 & \longmapsto & x^4 \\ e_2 & \longmapsto & x^2y^2 \\ e_3 & \longmapsto & y^4 \end{array}$$

Observemos que  $\text{Ker}(\varphi_0) = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$  donde

$$f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -y^2 \\ x^2 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -y^4 \\ 0 \\ -x^4 \end{bmatrix} \text{ y } f_3 = \begin{bmatrix} -y^2 \\ x^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, podemos definir el homomorfismo  $\bar{\varphi}_1$  definido por

$$\begin{array}{ccc} \bar{\varphi}_1 : \mathbb{C}[x, y]^3 & \longrightarrow & \text{Ker}(\varphi_0) \\ e'_i & \longmapsto & f_i \end{array}$$

con  $i = 1, 2, 3$ . Se puede probar que  $\text{Ker}(\bar{\varphi}_1) = \langle g \rangle$ , donde  $g = \begin{bmatrix} -x^2 \\ 1 \\ -y^2 \end{bmatrix}$ . Tomando el siguiente homomorfismo

inyectivo de módulos

$$\begin{array}{ccc} \bar{\varphi}_2 : \mathbb{C}[x, y] & \longrightarrow & \text{Ker}(\bar{\varphi}_1), \\ e & \longmapsto & g \end{array}$$

obtenemos la siguiente resolución libre del módulo  $I$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}[x,y] & \longrightarrow & \mathbb{C}[x,y]^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}[x,y]^3 \xrightarrow{\varphi_0} I. \\
 & & \searrow \varphi_2 & & \searrow \varphi_1 & & \\
 & & \text{Ker}(\varphi_1) & & \text{Ker}(\varphi_0) & & 
 \end{array}$$

Por otro lado, observemos que  $f_2 = y^2 f_1 + x^2 f_3$ . Por tanto,  $\text{Ker}(\varphi_0) = \langle f_1, f_3 \rangle$ . En este caso, si definimos el homomorfismo  $\varphi'_1$  de  $\mathbb{C}[x,y]^2$  al  $\text{Ker}(\varphi_0)$  que envía los elementos de la base canónica de  $\mathbb{C}[x,y]^2$  a  $f_1$  y  $f_3$ , tenemos la siguiente sucesión

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}[x,y]^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}[x,y]^3 \xrightarrow{\varphi_0} I. \\
 \downarrow \varphi'_1 & \nearrow & \\
 \text{Ker}(\varphi_0) & & 
 \end{array}$$

Se puede ver que  $\varphi'_1$  es inyectivo. Por tanto tenemos la siguiente resolución del  $\mathbb{C}[x,y]$ -módulo  $I$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}[x,y]^2 & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathbb{C}[x,y]^3 & \xrightarrow{\varphi_0} & I \\
 & & \downarrow \varphi'_1 & & \nearrow & & \\
 & & \text{Ker}(\varphi_0) & & & & 
 \end{array}$$

donde

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 0 & -y^2 \\ -y^2 & x^2 \\ x^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este ejemplo podemos ver que las resoluciones de un módulo no son únicas, pero uno puede hablar de “unicidad” bajo cierta relación como se verá más adelante. También observemos que las resoluciones no necesariamente tienen longitud finita. Sin embargo, cuando el anillo graduado es un anillo de polinomios se tiene el siguiente resultado dado por Hilbert.

**Teorema 3.1.** [Eis05, Teorema de Hilbert de Siciyas 3.8] Sea  $K$  un campo. Cada  $K[x_1, \dots, x_m]$ -módulo graduado finitamente generado tiene una resolución libre graduada finita de longitud a lo más  $m$ .

Ahora veamos a qué nos referimos con “unicidad” de resoluciones.

**Definición 3.5.** Una resolución graduada  $F_\bullet : \dots \rightarrow F_l \xrightarrow{\varphi_l} F_{l-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$  de  $M$  es *mínima* si para cada  $l \geq 0$ , las entradas no cero de la matriz  $\varphi_l$  tienen grados positivos.

**Ejemplo 3.5.** La resolución del módulo  $I = \langle x^4, x^2 y^2, y^4 \rangle$  del Ejemplo 3.4 dada por

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}[x,y] \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{C}[x,y]^3 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{C}[x,y]^3 \xrightarrow{\varphi_0} I$$

donde

$$\varphi_0 = \begin{bmatrix} x^4 & x^2 y^2 & y^4 \end{bmatrix}, \varphi_1 = \begin{bmatrix} 0 & -y^4 & -y^2 \\ -y^2 & 0 & x^2 \\ x^2 & -x^4 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \varphi_2 = \begin{bmatrix} -x^2 \\ 1 \\ -y^2 \end{bmatrix}$$

no es una resolución mínima.

**Definición 3.6.** Dos resoluciones graduadas de un  $R$ -módulo  $M$

$$\begin{aligned} F_\bullet : \cdots \xrightarrow{\varphi_1} F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0 \quad \text{y} \\ G_\bullet : \cdots \xrightarrow{\psi_1} G_2 \xrightarrow{\psi_2} G_1 \xrightarrow{\psi_1} G_0 \xrightarrow{\psi_0} M \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

son *isomorfas* si existen isomorfismos graduados  $F_i \xrightarrow{\alpha_i} G_i$  de grado cero tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & F_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & F_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & M \\ & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_1 \downarrow & & \alpha_0 \downarrow & & \nearrow \\ \cdots & \longrightarrow & G_2 & \xrightarrow{\psi_2} & G_1 & \xrightarrow{\psi_1} & G_0 & \xrightarrow{\psi_0} & M \end{array}$$

es decir,  $\psi_0 \circ \alpha_0 = \varphi_0$  y para cada  $i \geq 1$   $\alpha_{i-1} \circ \varphi_i = \psi_i \circ \alpha_i$ .

Una consecuencia de esta definición aplicada a módulos graduados finitamente generados es que cada módulo posee una única resolución graduada mínima salvo isomorfismo (ver [CLO06, Teorema 3.13]).

Regresando a la notación de la Definición 3.4. Si  $F_\bullet$  es una resolución libre graduada mínima de longitud  $t$  de un  $R$ -módulo  $M$ , entonces para cada  $i$ , podemos escribir  $F_i = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{ij}}$ .

Los números  $\beta_{ij}$  son llamados los **números de Betti graduados** de  $M$  e indican el número mínimo de generadores de grado  $j$  en  $F_i$ . Estos números pueden ser ordenados en una tabla de Betti que consiste de una tabla con  $t + 1$  columnas, etiquetadas por  $0, 1, \dots, t$  que corresponden a los módulos libres de  $F_\bullet$  como se muestra en la siguiente tabla:

	0	1	$\cdots$	$t = \text{longitud de } F_\bullet$
$i$	$\beta_{0,i}$	$\beta_{1,i+1}$	$\cdots$	$\beta_{t,i+t}$
$i + 1$	$\beta_{0,i+1}$	$\beta_{1,i+2}$	$\cdots$	$\beta_{t,i+1+t}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$j$	$\beta_{0,j}$	$\beta_{1,j+1}$	$\cdots$	$\beta_{t,j+t}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabla 3.1: Tabla de Betti del módulo  $M$

Un resultado importante sobre los números de Betti de módulos graduados sobre un anillo de polinomios y que nos facilitará calculos en el futuro desarrollo del trabajo es la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.** [Eis05, Proposición 1.9] Sean  $\{\beta_{ij}\}$  los números de Betti graduados de un  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ -módulo finitamente generado. Si para un  $i$  dado existe  $e$  tal que  $\beta_{ij} = 0$  para todo  $j < e$ , entonces  $\beta_{i+1,j+1} = 0$  para todo  $j < e$ .

**Ejemplo 3.6.** Consideremos los  $\mathbb{C}[x, y, z]$ -módulos definidos por

$$\bar{I} = \langle x^4y + x^3z^2 - y^5, x^2y^3 + 2xy^2z^2 + yz^4, x^2y^2z + 2xyz^3 + z^5 \rangle \quad \text{y} \quad M = \mathbb{C}[x, y, z]/\bar{I}.$$

Usando Macaulay2 obtenemos la siguiente resolución libre mínima de  $M$ .

$$F_{\bullet} : 0 \longrightarrow \mathbb{C}[x, y, z]^2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{C}[x, y, z]^3 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{C}[x, y, z] \xrightarrow{\varphi_0} M,$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \text{Ker}(\varphi_0) = \bar{I} \end{array}$$

donde

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} x^4y + x^3z^2 - y^5 & x^2y^3 + 2xy^2z^2 + yz^4 & x^2y^2z + 2xyz^3 + z^5 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } \varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 & -x^2y^2 - 2xyz^2 - z^4 \\ -z & x^4 - y^4 \\ y & x^3z \end{bmatrix}.$$

Su tabla de Betti está dada por

	0	1	2
0	1	.	.
1	.	.	.
2	.	.	.
3	.	.	.
4	.	3	1
5	.	.	.
6	.	.	.
7	.	.	1

Observemos que la longitud de la resolución de este módulo es 2. De hecho, esto sucede para ideales en el anillo de polinomios  $\mathbb{C}[x, y, z]$  que son 0-dimensionales.

**Proposición 3.2.** [Eis05, Proposición 3.1] Si  $\bar{I} \subset \mathbb{C}[x, y, z]$  es un ideal homogéneo de un conjunto finito de puntos en  $\mathbb{P}^2$ , entonces  $\bar{I}$  tiene una resolución libre de longitud 1.

De hecho, Hilbert (en casos especiales) y Burch (en general) probaron que los ideales con una resolución libre de longitud 1 son determinantes, es decir, ideales generados por menores del mismo tamaño de una matriz. Además, si la resolución de un ideal  $\bar{I}$  (como en la Proposición 3.2) es de la forma

$$0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow \bar{I}$$

y  $F$  es de rango  $t$  entonces  $G$  es de rango  $t + 1$ .

## 3.2. Condición de Euler y sicigias

Para finalizar este capítulo, en esta sección presentaremos una condición sobre algunos números de Betti que nos permitirá determinar si dado un ideal  $\bar{I} \subset \mathbb{C}[x, y, z]$  0-dimensional, generado por tres polinomios homogéneos de grado  $k \geq 3$ , estos polinomios o una combinación algebraica de ellos satisfacen la condición de Euler.



Si  $\dim_{\mathbb{C}} W = 1$ , entonces

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 m \\ \lambda_2 m \\ \lambda_3 m \end{bmatrix}$$

donde  $m$  es un generador de  $W$  y  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  para  $i = 1, 2, 3$ . Dado que los  $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = 0$ ,  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i m f_i = 0$ . Por tanto,  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i f_i = 0$ . Y dado que  $f_1, f_2$  y  $f_3$  son linealmente independientes, entonces  $\lambda_i = 0$  para  $i = 1, 2, 3$ . Por tanto,  $\dim_{\mathbb{C}} W$  es 2 o 3.

Para la segunda parte, supongamos que la tercia satisface la condición de Euler, es decir,  $x f_1 + y f_2 + z f_3 = 0$ , entonces  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \text{Syz}(f_1, f_2, f_3) = \text{Ker}(\varphi_1)$ . Si consideramos a  $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^{\top}$  como una columna de la presentación  $\varphi_2$ , entonces  $\dim_{\mathbb{C}} \langle x, y, z \rangle_{\mathbb{C}} = 3$ . Por otro lado, si  $W = \langle m_{12}, m_{22}, m_{32} \rangle_{\mathbb{C}}$  tiene dimensión 3 sobre  $\mathbb{C}$ , considerando a  $W$  como un  $\mathbb{C}[x, y, z]$ -módulo, podemos definir el  $\mathbb{C}[x, y, z]$ -homomorfismo  $\phi$  de  $W$  a  $\mathbb{C}[x, y, z]$  que envía a los generadores  $m_{12}, m_{22}, m_{32}$  a  $x, y, z$  respectivamente, entonces  $0 = \phi(0) = \phi(m_{12} f_1 + m_{22} f_2 + m_{32} f_3) = x f_1 + y f_2 + z f_3$ .  $\square$

**Ejemplo 3.7.** Consideremos el ideal  $\bar{I} = \langle x^4 y + x^3 z^2 - y^5, x^2 y^3 + 2xy^2 z^2 + yz^4, x^2 y^2 z + 2xyz^3 + z^5 \rangle$  del Ejemplo 3.6. La tabla de Betti de  $M = \mathbb{C}[x, y, z]/\bar{I}$ , está dada por

	0	1	2
0	1	.	.
1	.	.	.
2	.	.	.
3	.	.	.
4	.	3	$1 = \beta_{2,6}$
5	.	.	.
6	.	.	.
7	.	.	1

Observemos que los generadores de  $\bar{I}$  son de grado  $k = 5$  y que  $\beta_{2,6} = 1$ . Usando Macaulay2, el  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $W = \langle -z, y \rangle_{\mathbb{C}}$  tiene dimensión 2, en consecuencia, ni los generadores de  $\bar{I}$  y ninguna combinación de ellos satisfacen la condición de Euler.

**Ejemplo 3.8.** Consideremos el ideal  $\bar{I} = \langle yz^2, y^2 z + z^3, -xyz + y^3, z^4 \rangle$ , la homogenización del ideal  $I$  del Ejemplo 2.1. La tabla de Betti de  $\mathbb{C}[x, y, z]/\bar{I}$  está dada por

	0	1	2
0	1	.	.
1	.	.	.
2	.	3	$1 = \beta_{2,4}$
3	.	.	1

Los generadores de  $\bar{I}$  son de grado  $k = 3$  y  $\beta_{2,4} = 1$ . Tomamos de la resolución obtenida en Macaulay2 al

---

espacio  $W = \langle -z, -y, x+z \rangle_{\mathbb{C}}$  el cual es de dimensión 3. Por tanto, los generadores o una combinación de ellos satisfacen la condición de Euler, lo cual es lo esperado pues ellos provienen de una foliación.



# Capítulo 4

## Resultados y algoritmos

En este capítulo desarrollamos los algoritmos para determinar si dado un ideal en  $\mathbb{H}^{d^2+d+1}(\mathbb{P}^2)$  éste es el esquema singular de una foliación sobre  $\mathbb{P}^2$ . Veremos ejemplos interesantes que resultan de aplicar dichos algoritmos.

### 4.1. Algoritmo de pertenencia

Daremos algunas definiciones y resultados conocidos para plantear algunas preguntas sobre el esquema de Hilbert, que nos servirán para encontrar comportamientos y desarrollar el algoritmo (quizás más combinatorios) cuando trabajemos con foliaciones.

**Definición 4.1.** Sea  $N \in \mathbb{N}$  fijo. Una *partición* de  $N$ , denotada por  $\lambda \vdash N$ , es una sucesión  $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$  de enteros positivos decrecientes tal que  $\sum_{i=1}^s \lambda_i = N$ .

**Ejemplo 4.1.** En la tabla se muestran todas las particiones para  $N = 1, \dots, 5$ .

$N$	$\lambda \vdash N$
1	(1)
2	(2), (1, 1)
3	(3), (1, 1, 1), (2, 1)
4	(4), (1, 1, 1, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (3, 1)
5	(5), (1, 1, 1, 1, 1), (3, 2), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (3, 1, 1), (4, 1)

Un diagrama de Young es un objeto combinatorio que consiste en un arreglo de casillas por filas de modo que cada fila contiene una cantidad menor o igual de casillas a la anterior.

A cada partición se le puede asociar un diagrama de Young, por ejemplo, supongamos que tenemos la partición  $\lambda = (4, 3, 2, 2, 1) \vdash 13$ , entonces podemos asociar el diagrama de Young que sigue:

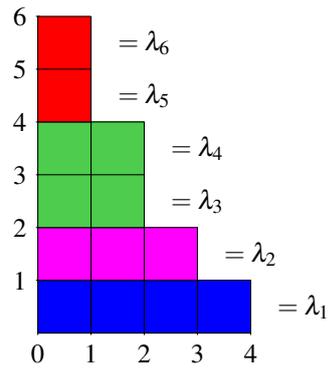


Figura 4.1: Escalera asociada a  $\lambda = (4, 3, 2, 2, 1, 1)$

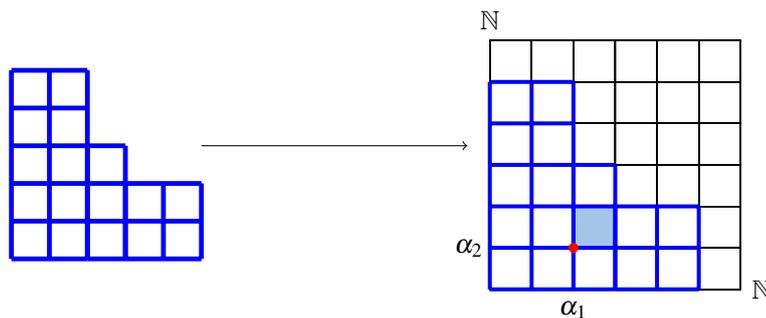
Estos diagramas son conocidos como *escalera asociada a la partición  $\lambda$* .

**Ejemplo 4.2.** En la siguiente tabla, se muestran las escaleras asociadas a las particiones del Ejemplo 4.1.

$N$	$\lambda \vdash N$
1	
2	
3	
4	
5	

Tabla 4.1: Escaleras

Observemos que una escalera es un subconjunto de  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Podemos pensarla como una cuadrícula de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Por tanto, a cada casilla se le puede asociar un punto  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , el cual es el vértice inferior de la casilla, como podemos ver en el siguiente diagrama.



Por la correspondencia entre los puntos  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  y los monomios en  $y^{\alpha_1} z^{\alpha_2} \in \mathbb{C}[y, z]$  podemos asociar a cada partición  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \vdash N$  (o escalera) dos conjunto de polinomios en  $\mathbb{C}[y, z]$ :

- El conjunto de  $N$  monomios que corresponden a las casillas de la escalera asociada a  $\lambda$ , es decir,

$$B_\lambda := \{y^\delta z^\gamma : 0 \leq \delta \leq \lambda_i - 1, 0 \leq \gamma \leq i - 1, \text{ para } i = 1, \dots, s\}.$$

- El ideal generado por los monomios que corresponden al borde de la escalera

$$I_\lambda := \langle y^{\lambda_i} z^{i-1}, z^s : i = 1, \dots, s \rangle.$$

Este ideal es llamado **el ideal asociado a la escalera  $\lambda$** .

No es difícil verificar que  $I_\lambda$  es un ideal monomial 0-dimensional en  $\mathbb{C}[y, z]$  pues contiene potencias puras en todas sus variables y que el conjunto  $B_\lambda$  es su conjunto de monomios estándar de  $I_\lambda$ . Podemos observar que el conjunto de elementos en el borde de la escalera no es un conjunto mínimo de generadores para  $I_\lambda$ .

**Ejemplo 4.3.** Si  $\lambda = (4, 3, 2, 2, 1, 1) \vdash 13$ , su escalera asociada es:

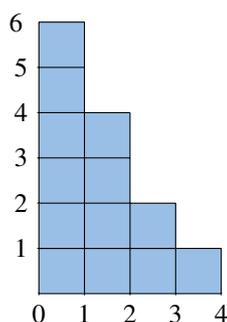


Figura 4.2:  $\lambda = (4, 3, 2, 2, 1, 1) \vdash 13$

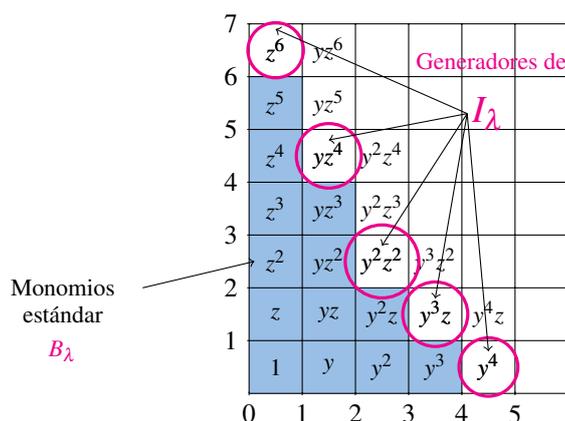


Figura 4.3:  $(4, 3, 2, 2, 1, 1) \vdash 13, I_\lambda, B_\lambda$

Entonces, de la Figura 4.3 tenemos que el conjunto de monomios estándar de  $I_\lambda$  es

$$B_\lambda = \{1, y, y^2, y^3, z, yz, y^2z, z^2, yz^2, z^3, yz^3, z^4, z^5\}.$$

Además, los generadores del ideal  $I_\lambda$  son por definición el conjunto

$$\{y^4, y^4z, y^3z, y^2z^2, y^3z^2, y^2z^3, yz^4, y^2z^4, yz^5, z^6, yz^6\}.$$

Sin embargo, observemos que los monomios de este conjunto que no están marcados en un círculo en la Figura 4.3 son múltiplos de los que sí lo están. Por tanto el ideal asociado a la partición está generado por los monomios  $y^4, y^3z, y^2z^2, yz^4$  y  $z^6$ , es decir,  $I_\lambda = \langle y^4, y^3z, y^2z^2, yz^4, z^6 \rangle$ .

Recordemos que por el Teorema 1.4, bajo el morfismo proyección  $\pi : \mathbb{C}[y, z] \rightarrow \mathbb{C}[y, z]/I_\lambda$ , el conjunto  $B_\lambda$  forma una base para el  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $\mathbb{C}[y, z]/I_\lambda$ . Por tanto, para un  $N$  fijo, cada partición  $\lambda \vdash N$  define un conjunto:

$$U_\lambda := \{I \in \mathbb{H}^N(\mathbb{C}^2) : \pi(B_\lambda) \text{ forma una base para el } \mathbb{C} \text{ - espacio vectorial } \mathbb{C}[y, z]/I\}.$$

Estos conjuntos abiertos son variedades afines que cubren a  $\mathbb{H}^N(\mathbb{C}^2)$ , su estructura de esquema está dada de manera explícita en [MS04, Capítulo 18].

Un problema que nos interesa en estos abiertos es determinar, dado un ideal  $I \in \mathbb{H}^N(\mathbb{C}^2)$ , todas las particiones  $\lambda \vdash N$  tales que  $I \in U_\lambda$ . Para nosotros es importante poder determinar esas particiones, pues esto nos permitirá por ejemplo poder determinar los abiertos  $U_\lambda$  que contenga ideales con función de Hilbert dada por la función  $\phi$  definida por

$$\phi(s) = \begin{cases} \binom{s+2}{2} & \text{si } s \leq d, \\ \binom{s+2}{2} - (t+1)(t+3) & \text{si } d+1 \leq s = t+d+1 \leq 2d, \\ d^2 + d + 1 & \text{si } s > 2d. \end{cases}$$

Esta función está relacionada a los ideales provenientes de foliaciones como podemos ver en el Teorema 2.4 y las cuales son de nuestro interés, además por sí solo es un problema interesante y reciente (ver [HKP19]).

**Ejemplo 4.4.** Consideremos el ideal  $I \in \mathbb{H}^5(\mathbb{C}^2)$  generado por los polinomios en  $\mathbb{C}[y, z]$

$$\begin{aligned} & y^3 - y, \\ & 2y^2z - z - z^2, \\ & 2yz - 2y - z + 2y^2 - z^2, \\ & 2yz^2 - 2y - z + 2y^2 - z^2, \\ & z^3 - z. \end{aligned}$$

Usando Singular, calculamos el abanico de Gröbner, y obtuvimos que  $I$  sólo tiene dos ideales iniciales diferentes obtenidas de las bases de Gröbner

$$\mathcal{G}_1 = \{z^3 - z, yz^2 - yz, y^2 + yz - \frac{1}{2}z^2 - y - \frac{1}{2}z\}$$

y

$$\mathcal{G}_2 = \{-2y^2 - 2yz + z^2 + 2y + z, y^2z - y^2 - yz + y, y^3 - y\}.$$

Para  $\mathcal{G}_1 = \{z^3 - z, yz^2 - yz, y^2 + yz - \frac{1}{2}z^2 - y - \frac{1}{2}z\}$ .

El conjunto de términos iniciales de esta base es  $\{z^3, yz^2, y^2\}$ . Por lo tanto, la partición asociada es  $(2, 2, 1)$ .

5						
4						
3	$z^3$					
2	$z^2$	$yz^2$				
1	$z$	$yz$				
0	$1$	$y$	$y^2$			

Figura 4.4:  $\lambda = (2, 2, 1) \vdash 5$

Para  $\mathcal{G}_2 = \{-2y^2 - 2yz + z^2 + 2y + z, y^2z - y^2 - yz + y, y^3 - y\}$ . El conjunto de términos iniciales es  $\{z^2, y^2z, y^3\}$ . Por lo tanto, está asociado a la partición  $(3, 2)$ .

5						
4						
3						
2	$z^2$					
1	$z$	$yz$	$y^2z$			
0	$1$	$y$	$y^2$	$y^3$		

Figura 4.5:  $\lambda = (3, 2) \vdash 5$

Con estos ideales iniciales, sabemos que  $I$  pertenece a  $U_{\begin{smallmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{smallmatrix}}$  y  $U_{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare \end{smallmatrix}}$ . Por otro lado, si calculamos una base de Gröbner universal de  $I$ , obtenemos la siguiente base:

$$\mathcal{G} = \{y^2z - y^2 - yz + y, y^3 - y, z^3 - z, yz^2 - yz, y^2 + yz - \frac{1}{2}z^2 - y - \frac{1}{2}z\}$$

Observemos que cada elemento de  $\mathcal{G}$  es una combinación de los elementos  $\{1, y, y^2, z, z^2\}$  más términos del conjunto  $\{y^3, yz, y^2z, yz^2, z^3\}$  que pertenecen al ideal  $\langle y^3, yz, z^3 \rangle$ , el cual está asociado a la partición  $(3, 1, 1)$  dada en la Figura 4.6. Por lo tanto  $I \in U_{\begin{smallmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{smallmatrix}}$ .

5						
4						
3	$z^3$	$yz^3$				
2	$z^2$	$yz^2$				
1	$z$	$yz$	$y^2z$			
0	$1$	$y$	$y^2$	$y^3$		

Figura 4.6:  $\lambda = (3, 1, 1) \vdash 5$

Sin embargo, no existe un orden monomial  $\succ$  tal que  $in_{\succ}(I) = I_{\begin{smallmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{smallmatrix}}$ . En efecto, supongamos que existe un orden monomial  $\succ$  tal que  $in_{\succ}(I) = \langle z^3, yz, y^3 \rangle$ , entonces  $in_{\succ}(y^2 + yz - \frac{1}{2}z^2 - y - \frac{1}{2}z) = yz$ . Además  $yz \succ y^2, z^2, y, z$ . Como  $\succ$  es orden monomial,  $yz \succ y^2$  implica que  $z \succ y$ , y  $yz \succ z^2$  esto implica que  $y \succ z$  así  $y = z$ , lo cual es una contradicción.

En resumen, el ideal  $I$  pertenece a los abiertos  $U_{\begin{smallmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{smallmatrix}}$ ,  $U_{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare \end{smallmatrix}}$  y  $U_{\begin{smallmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{smallmatrix}}$  y no todas estas particiones son obtenidas a partir de un orden monomial.

Del ejemplo anterior surgen dos preguntas naturales ¿estas son todas las particiones de 5 para los cuales  $I \in U_\lambda$ ? y si no, ¿cómo las podemos determinar todas?

Nosotros diseñamos un algoritmo implementado en *Macaulay2*, que calcula (dado un ideal) todas las particiones  $\lambda$ 's cuyos abiertos  $U_\lambda$  asociados contienen al ideal dado. Estos cálculos consideran aquellas particiones que no provienen de órdenes monomiales.

Antes del algoritmo recordemos otro invariante importante del polinomio de Hilbert de un ideal.

**Definición 4.2.** Sea  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  un ideal con polinomio de Hilbert

$$Nt^d + \text{términos de grado menor que } d$$

con  $N \neq 0$ . Definimos el **grado de  $I$**  como  $N/d!$ .

---

### Algoritmo 1 : Algoritmo de pertenencia

---

**Entrada:**  $I \subset \mathbb{C}[y, z]$ , ideal 0-dimensional.

**Salida:** Lista de todas las particiones  $\lambda$  del grado de  $I$ , tales que  $I \in U_\lambda$ .

- 1: Calcula una base ordenada  $\mathcal{B} = \{y^{\alpha_1} z^{\alpha_2} + I\}$  del  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $\mathbb{C}[y, z]/I$ .
  - 2: Calcular el conjunto de particiones  $\Lambda$  de  $N = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y, z]/I$ .
  - 3: Definir  $P := \{\}$ .
  - 4: Para cada  $\lambda \in \Lambda$ ;
  - 5: Calcular el ideal monomial  $I_\lambda$  asociado a la partición  $\lambda$ .
  - 6: Calcular el conjunto de monomios estándar  $B_\lambda$  de  $I_\lambda$ .
  - 7: Calcular  $\pi(B_\lambda)$ , donde  $\pi$  es el morfismo proyección de  $\mathbb{C}[y, z]$  a  $\mathbb{C}[y, z]/I$ .
  - 8: Definir la transformación  $T_\lambda : \mathbb{C}[y, z]/I \rightarrow \mathbb{C}[y, z]/I$  que envía los elementos de la base ordenada  $\mathcal{B}$  a los elementos de  $\pi(B_\lambda)$ .
  - 9: Definir  $r := \text{rank}(T_\lambda)$ .
  - 10: Si  $r = N$ , entonces agregar  $\lambda$  a  $P$ .
  - 11: Regresa  $P$ .
- 

*Prueba de validez.* Sean  $I \subset \mathbb{C}[y, z]$  un ideal 0-dimensional y  $\succ$  un orden monomial. Calculamos el ideal inicial de  $I$  con respecto al orden  $\succ$ . Como  $\text{in}_\succ(I)$  es monomial, sea  $\{y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}\}$  el conjunto de monomios estándar de  $\text{in}_\succ(I)$ . Por el isomorfismo entre  $\mathbb{C}[y, z]/\text{in}_\succ(I)$  y  $\mathbb{C}[y, z]/I$  (ver [CLO13]) entonces  $\mathcal{B} := \{y^{\alpha_1} z^{\alpha_2} + I\}$  es una base del espacio  $\mathbb{C}[y, z]/I$  y sin perder generalidad podemos suponer que es una base ordenada.

Sea  $N = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y, z]/I$ . Denotemos por  $\Lambda$  al conjunto de todas las particiones de  $N$ , es decir,

$$\Lambda := \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \mid \sum_{i=1}^s \lambda_i = N, \text{ con } \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s \geq 1 \right\}.$$

Sean  $\lambda \in \Lambda$  y  $B_\lambda := \{y^{\lambda_1} z^{\lambda_2}\}$  el conjunto de monomios estándar del ideal  $I_\lambda$ .

Consideremos el homomorfismo de anillos

$$\begin{aligned} \pi_\lambda : \mathbb{C}[y, z] &\rightarrow \mathbb{C}[y, z]/I \\ f &\mapsto f + I \end{aligned}$$

Denotaremos por  $\bar{B}_\lambda = \pi_\lambda(B_\lambda) \subset \mathbb{C}[y, z]/I$ . Observemos que la cardinalidad  $|\bar{B}_\lambda| = N$  (no necesariamente son independientes o diferentes de cero). Por tanto podemos definir la siguiente transformación lineal definida sobre la base  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{aligned} T_\lambda : \mathbb{C}[y, z]/I &\rightarrow \mathbb{C}[y, z]/I \\ y^{\alpha_1} z^{\alpha_2} + I &\mapsto \pi_\lambda(y^{\lambda_1} z^{\lambda_2}) \end{aligned}$$

Recordemos que  $T_\lambda$  es no singular si, y sólo si,  $T_\lambda$  es sobreyectiva. Por tanto, si  $\text{rank}(T_\lambda) = N$ , entonces  $T_\lambda$  es un isomorfismo, es decir,  $\bar{B}_\lambda$  es una base de  $\mathbb{C}[y, z]/I$ . Por tanto, por definición  $I \in U_\lambda$ .

Por otro lado, si  $\text{rank}(T_\lambda) < N$ , entonces  $\bar{B}_\lambda$  no es base de  $\mathbb{C}[y, z]/I$ , y por tanto,  $I \notin U_\lambda$ .  $\square$

**Ejemplo 4.5.** Aplicaremos el Algoritmo 1 al ideal dado en el Ejemplo 4.4, es decir,

$$I = \langle y^3 - y, 2y^2z - z - z^2, 2yz - 2y - z + 2y^2 - z^2, 2yz^2 - 2y - z + 2y^2 - z^2, z^3 - z \rangle \in \mathbb{H}^5(\mathbb{C}^2).$$

Definimos el anillo y el ideal. Usaremos el orden *GRevLex*.

```
i1: R=QQ[y,z]
i2: I=ideal(y^3-y, 2y^2-z-z^2, 2yz-2y-z+2y^2-z^2,
          2yz^2-2y-z+2y^2-z^2, z^3-z)
```

Verificamos que el ideal  $I$  es 0-dimensional.

```
i3: dim I
o3: 0
```

Definimos el módulo  $M$ .

```
i4: M=R/I
```

Calculamos una base  $\mathcal{B}$  de  $M$  con respecto al orden *GRevLex*.

```
o5: {1, y, yz, z, z^2}
```

Definimos a  $N$  como el grado de  $I$ , o equivalentemente el número de elementos en la base o5.

```
i6: N=5
```

Calculamos el conjunto  $\Lambda$  de particiones de  $N$

```
o7: {(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1),
      (1, 1, 1, 1, 1)}
```

Para cada partición, calculamos los bordes de las escaleras asociadas.

o8:  $\{\{y^{\{5\}}, z\}, \{y^{\{4\}}, yz, z^{\{2\}}\}, \{y^{\{3\}}, y^{\{2\}}z, z^{\{2\}}\}, \{y^{\{3\}}, yz, yz^{\{2\}}, z^{\{3\}}\},$   
 $\{y^{\{2\}}, y^{\{2\}}z, yz^{\{2\}}, z^{\{3\}}\}, \{y^{\{2\}}, yz, yz^{\{2\}}, yz^{\{3\}}, z^{\{4\}}\},$   
 $\{y, yz, yz^{\{2\}}, yz^{\{3\}}, yz^{\{4\}}, z^{\{5\}}\}\}$

Para cada partición, calculamos los monomios estándar.

o9:  $B = \{\{1, y, y^{\{2\}}, y^{\{3\}}, y^{\{5\}}\}, \{1, y, y^{\{2\}}, y^{\{3\}}, z\},$   
 $\{1, y, y^{\{2\}}, z, yz\}, \{1, y, y^{\{2\}}, z, z^{\{2\}}\}, \{1, y, z, yz, z^{\{2\}}\},$   
 $\{1, y, z, z^{\{2\}}, z^{\{3\}}\}, \{1, z, z^{\{2\}}, z^{\{3\}}, z^{\{4\}}\}\}$

Para cada elemento en cada lista de  $B$ , aplicamos el morfismo  $\pi$ .

o10:  $\{\{1, y, -yz+1/2z^{\{2\}}+y+1/2z, y, -yz+1/2z^{\{2\}}+y+1/2z\},$   
 $\{1, y, -yz+1/2z^{\{2\}}+y+1/2z, y, z\},$   
 $\{1, y, -yz+1/2z^{\{2\}}+y+1/2z, z, yz\}, \{1, y, -yz+1/2z^{\{2\}}+y+1/2z, z, z^{\{2\}}\},$   
 $\{1, y, z, yz, z^{\{2\}}\}, \{1, y, z, z^{\{2\}}, z\},$   
 $\{1, z, z^{\{2\}}, z, z^{\{2\}}\}\}$

Aplicamos la transformación  $T_\lambda$ .

o11:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el rango de cada transformación  $T_\lambda$

o12:  $\{3, 4, 5, 5, 5, 4, 3\}$

Por último, elegimos las particiones cuya transformación  $T_\lambda$  tengan rango máximo.

o12:  $\{\{3, 2\}, \{3, 1, 1\}, \{2, 2, 1\}\}$

Observemos que la lista obtenida da justamente las tres particiones que obtuvimos en el Ejemplo 4.4.

## 4.2. Aplicación del algoritmo de pertenencia

Sea  $d \in \mathbb{N}$  fijo. Consideremos la función:

$$\phi(s) = \begin{cases} \binom{s+2}{2} & \text{si } s \leq d, \\ \binom{s+2}{2} - (t+1)(t+3) & \text{si } d+1 \leq s = t+d+1 \leq 2d, \\ d^2 + d + 1 & \text{si } s > 2d. \end{cases}$$

Observemos que a partir de  $s = 2d - 1$ , la función  $\phi$  es constante igual a  $d^2 + d + 1$ .

Definiendo  $N = d^2 + d + 1$ . Podemos preguntarnos por los ideales  $\bar{I} \in \mathbb{H}^N(\mathbb{P}^2)$  tales que su función de Hilbert coincide con la función  $\phi$ , es decir,  $HF_{\bar{I}}(s) = \phi(s)$  para toda  $s \in \mathbb{N}$ .

Gotzmann en [Got88] demostró que para cualquier función  $\varphi$  el conjunto

$$\mathbb{H}_{\varphi}^N := \{\bar{I} \in \mathbb{H}^N(\mathbb{P}^2) : HF_{\bar{I}}(s) = \varphi(s)\}$$

es un subconjunto conexo y suave de  $\mathbb{H}^N(\mathbb{P}^2)$  si es diferente del vacío.

**Corolario 4.1.** *El conjunto  $\mathbb{H}_{\phi}^N = \{\bar{I} \in \mathbb{H}^N(\mathbb{P}^2) : HF_{\bar{I}}(s) = \phi(s)\}$  es no vacío.*

*Demostración.* Usar el Teorema 2.4. □

Como nuestro algoritmo funciona para ideales  $I \in \mathbb{H}^N(\mathbb{C}^2)$ , podemos aplicar el algoritmo de pertenencia, para obtener el conjunto de todas las particiones  $\lambda$  de  $N$  tales que  $I \in U_{\lambda}$ . Si además agregamos la condición que los ideales en ese conjunto tengan la función  $\phi$  como función de Hilbert, entonces, el conjunto que obtendríamos sería una mejor aproximación a la imagen del morfismo  $\mathcal{F}(d, \mathbb{P}^2) \rightarrow \mathbb{H}^N(\mathbb{P}^2)$ .

Dada una partición  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$  para algún natural  $N$  fijo, diremos que la escalera asociada a  $\lambda$  posee un **escalón** si para un  $1 \leq i \leq s-1$  existe  $j$  con  $i \leq j-1$  cuya diferencia  $j-i$  sea máxima entre todos los  $j$  con esta propiedad y tal que  $\lambda_i - \lambda_j \geq 1$ . Diremos que la **longitud** de este escalón es la diferencia  $j-i$ .

**Definición 4.3.** *Sea  $d \geq 2$  y  $N = d^2 + d + 1$ . Dada una partición  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \vdash N$ , decimos que  $\lambda$  **satisface la propiedad (P)** si satisface las siguientes tres propiedades.*

1.  $\lambda_1 = d + 1$ .
2. Existe un escalón de longitud 1 en la escalera  $\lambda$ .
3.  ${}^a HF_{I_{\lambda}} = \phi$ .

Denotaremos por  $IN(N, \phi)$ , el conjunto de todas las particiones de  $N$  que satisfacen la propiedad (P).

**Lema 4.1.** *La cardinalidad de  $IN(13, \phi)$  es 6.*

*Demostración.* Para  $N = 13$ , es decir,  $d = 3$ , los valores de la función  $\phi$  son los siguientes:

$s$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\phi(s)$	1	3	6	10	12	13	13	13	...

Con Macaulay2 podemos ver que hay 101 particiones  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$  de 13 de las cuales 18 cumplen con el punto 1 de la Definición 4.3, es decir,  $\lambda_1 = 4$ .

Observemos que de la Definición 1.10 y la tabla, los monomios de grado  $\leq 3$  son monomios estándar para cualquier partición  $\lambda \in IN(13, \phi)$ .

Dado que  $I_\lambda$  es 0-dimensional, existe  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  tal que  $z^k \in I_\lambda$ . Como  $\phi(3) = 10$ , entonces,  $k \geq 4$ .

Recordemos que en  $\mathbb{C}[y, z]$  hay 6 monomios de grado 5. Como  $\phi(5) + \phi(4) = 1$ , esto implica que asociado a  $\lambda$ , sólo hay un monomio de grado 5 como monomio estándar.

Dado que  $I_\lambda$  es ideal y  $y^4 \in I_\lambda$ , entonces  $y^5, y^4z \in I_\lambda$ . Por tanto, hay 4 formas de elegir un monomio de grado 5 como monomio estándar de  $I_\lambda$ .

Observemos que  $\phi(4) - \phi(3) = 2$ , entonces hay sólo 2 monomios de grado 4 en  $B_\lambda$ . Además, si  $y^\alpha z^\beta \in B_\lambda$  entonces  $y^\alpha z^{\beta-1}, y^{\alpha-1} z^\beta \in B_\lambda$  para  $\alpha \geq 1$ . Por tanto, procedamos por casos.

- a. Si  $y^3 z^2 \in B_\lambda$ , entonces  $y^3 z, y^2 z^2 \in B_\lambda$ , por tanto,  $\lambda = (4, 4, 4, 1)$ .
- b. Si  $y^2 z^3 \in B_\lambda$ , entonces  $y^2 z^2, y z^3 \in B_\lambda$ , por tanto,  $\lambda = (4, 3, 3, 3)$ .
- c. Si  $y z^4 \in B_\lambda$ , entonces  $y z^3, z^4 \in B_\lambda$ , por tanto,  $\lambda = (4, 3, 2, 2, 2)$ .
- d. Si  $z^5 \in B_\lambda$ , entonces  $z^4 \in B_\lambda$ , y existen 3 formas de elegir otro monomio de grado 4 como monomio estándar en  $I_\lambda$ , es decir, tenemos los siguientes casos.
  - a) Si  $yz^3 \in B_\lambda$ , entonces  $\lambda = (4, 3, 2, 2, 1, 1)$ .
  - b) Si  $z^2 y^2 \in B_\lambda$ , entonces  $\lambda = (4, 3, 3, 1, 1, 1)$ .
  - c) Si  $y^3 z \in B_\lambda$ , entonces  $\lambda = (4, 4, 2, 1, 1, 1)$ .

□

En general, para un  $d \geq 2$  fijo, y un ideal  $I \in \mathbb{H}^{d^2+d+1}(\mathbb{C}^2)$ , nos podemos plantear las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la cardinalidad del conjunto  $\{\lambda \vdash d^2 + d + 1 \mid I \in U_\lambda \text{ y } {}^a HF_I = \phi\}$ ?
2. ¿Es posible determinar las particiones de la pregunta anterior?

### 4.3. Algoritmo: Condición de Euler

Regresando al contexto de foliaciones, en la Sección 2.3 vimos que una foliación de grado  $\geq 2$ , queda determinada por su subesquema singular, el cual podemos ver como un elemento en el esquema de Hilbert  $\mathbb{H}^N(\mathbb{P}^2)$  con  $N = d^2 + d + 1$ . Además, algunas caracterizaciones sobre el esquema singular proveniente de foliaciones se pueden visualizar en el contexto de bases de Gröbner. Sin embargo, en este contexto de las bases de Gröbner, estas caracterizaciones no son suficientes para determinar una foliación como se vio en el Ejemplo 2.1, en el cual se da un ideal en  $\mathbb{H}^7(\mathbb{P}^2)$  con una base de Gröbner reducida que posee tres polinomios del grado 3 que no satisfacen la condición de Euler aunque dicho ideal proviene de una foliación de grado 2. Pero si considerabamos una base mínima la condición de Euler sí se cumplía. Por lo cual nos hacemos la siguiente pregunta, ¿cómo podemos determinar si al tomar una base de Gröbner mínima en ella existen tres polinomios de grado  $d + 1$  los cuales satisfacen la condición de Euler?

Nuestro siguiente algoritmo determina si dado un ideal  $I \in \mathbb{H}^{d^2+d+1}(\mathbb{C}^2)$ , su homogenización es el esquema singular de una foliación, y si es así también podemos determinar la 1-forma que la define.

---

#### Algoritmo 2 : Condición de Euler

---

**Entrada:** Sean  $I \in \mathbb{H}^{d^2+d+1}(\mathbb{C}^2)$  y  $\succ$  un orden monomial graduado.

**Salida:** Determinar si en  $\bar{I}$  existen tres polinomios de grado  $d + 1$  que satisfacen la condición de Euler, donde  $\bar{I}$  es la homogenización de  $I$ .

- 1: Calcula la tabla de Betti del módulo  $M = \mathbb{C}[x, y, z] / \langle \overline{\{\mathcal{G}\}} \rangle$ , donde  $\overline{\{\mathcal{G}\}}$  es la homogenización de los elementos de la base de Gröbner de  $I$  con respecto al orden monomial  $\succ$ .
- 2: Si los números de Betti  $\beta_{1,d+1} = 3$ ,  $\beta_{1,s} = 0$  para todo  $s < d + 1$  y  $\beta_{2,d+2} \neq 0$ , entonces:
- 3: Elige un elemento  $\ell \in \text{Syz}(\overline{\{\mathcal{G}\}})$  con entradas de grado 1.
- 4: Si la dimensión del  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial generado por las entradas de  $\ell$  es 3, entonces calcula la matriz  $D$  definida por la transformación lineal que envía  $x, y, z$  a las entradas de  $\ell$ .
- 5: Calcula la matriz

$$T := \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \cdot D^{-1}$$

donde  $B_i$  son los elementos de grado  $d + 1$  en  $\overline{\{\mathcal{G}\}}$ .

- 6: Definir  $A = T_1, B = T_2$  y  $C = T_3$ , donde  $T_i$  son las columnas de la matriz  $T$ .
  - 7: Imprimir  $(A, B, C)$
  - 8: **En otro caso** Imprimir “No existen tales polinomios”.
-

*Prueba de validez.* Supongamos que  $\beta_{1,d+1} = 3$  y  $\beta_{1,s} = 0$  para toda  $s < d + 1$ . Por la Proposición 3.1 los números  $\beta_{2,i+2} = 0$  para todo  $i \leq d - 1$ , por tanto, la tabla de Betti de  $M$  tiene la forma

	0	1	2
0	1	·	·
1	·	·	·
2	·	·	·
⋮	⋮	⋮	⋮
$d - 1$	·	·	·
$d$	·	3	$\beta_{2,d+2}$
$d + 1$	·	*	*
⋮	⋮	⋮	⋮

Es decir, existen tres formas independientes de grado  $d + 1$  y no hay de formas de grado menor en  $\bar{I}$ .

Dado que  $\beta_{2,d+2} \neq 0$ , entonces por el Teorema 3.2 existe  $\Lambda \in \text{Syz}(\overline{\{\mathcal{G}\}})$  con entradas de grado 1. Si la dimensión del espacio generado por las entradas de  $\Lambda$  es tres, por el Teorema 3.2, bajo el cambio lineal del paso 5 y el paso 6, en  $\bar{I}$  existen tres formas  $(A, B, C)$  de grado  $d + 1$  que satisfacen la condición de Euler.  $\square$

Ahora podemos completar la demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.** *Dado  $d \geq 2$  y  $\bar{I} \in \mathbb{H}^{d^2+d+1}(\mathbb{P}^2)$  un ideal de intersección local completa, sea  $\mathcal{J}_{V(\bar{I})}$  el subesquema asociado al ideal  $\bar{I}$  de  $\mathbb{P}^2$ . El subesquema  $\mathcal{J}_{V(\bar{I})}$  es el subesquema singular de una foliación de grado  $d$  si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Existen tres polinomios  $f_1, f_2, f_3$  de grado  $d + 1$  linealmente independientes en  $\bar{I}$ , y  $d + 1$  es el grado mínimo con esta propiedad.*
2. *El número de Betti  $\beta_{2,d+2}$  de la resolución graduada del módulo  $M = \frac{\mathbb{C}[x,y,z]}{\langle f_1, f_2, f_3 \rangle}$  es diferente de cero.*
3. *La dimensión de  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial generado por las entradas de una columna de grado 1 de la presentación  $\varphi_2$  en la resolución graduada de  $M$  es tres.*

*Además, existe un algoritmo que calcula las ecuaciones de la 1-forma que define a la foliación de grado  $d$  sobre  $\mathbb{P}^2$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{J}_{V(\bar{I})}$  es el esquema singular de una foliación por curvas de grado  $d$  sobre  $\mathbb{P}^2$ . Por el Teorema 2.2 y el Teorema 2.5, dado un orden monomial graduado, existen tres polinomios  $f_1, f_2, f_3$  de grado  $d + 1$  linealmente independientes en  $\bar{I}$ , y tres formas lineales  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  en  $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$  tal que  $\sum_{i=1}^3 \ell_i f_i = 0$ . Por el Teorema 3.2,  $\beta_{2,d+2} \neq 0$  y las formas lineales generan un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión 3. Del hecho de que en cualquier subesquema que contenga a  $\mathcal{J}_{V(\bar{I})}$  de longitud  $d^2 + d$  no existan polinomios de grado  $d$  (Teorema 2.3), entonces no existen polinomios de grado  $d$  en  $\bar{I}$ .

Por otro lado, si se satisfacen las condiciones 1,2 y 3 entonces (bajo una transformación lineal) existen tres polinomios  $A, B, C \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(d + 1))$  que satisfacen la condición de Euler. Así que por el Teorema 2.2,  $\mathcal{J}_{V(\bar{I})}$  es el esquema singular de una foliación.

Para la prueba de la última sentencia, observemos que pedir que se cumplan las condiciones 1,2,3 es equivalente a tener el paso 2 y el paso 3 del Algoritmo 2, por tanto, bajo la transformación lineal aplicada en el Algoritmo 2 obtenemos las ecuaciones de la 1-forma  $Adx + Bdy + Cdz$  que define a la foliación de grado  $d$  sobre  $\mathbb{P}^2$ .  $\square$

**Ejemplo 4.6.** 1. Consideremos el ideal  $I = \langle y^3 + 14yz^2 - 8z^3 + 8y^2 - z - 14, -9y^3 + 11yz^2 + 3z^3 - 3y^2 + 9z - 11, 7y^3 + yz^2 - 5z^3 + 5y^2 - 7z - 1 \rangle \in \mathbb{H}^7(\mathbb{C}^2)$ .

¿La homogenización de  $I$  determina el esquema singular de una foliación de grado 2?

Aplicando el Algoritmo 2 obtenemos lo siguiente:

Definimos el anillo y el ideal. Usaremos el orden graduado lexicográfico.

```
i1: R= QQ[y,z, MonomialOrder=> GLex]
i2: I=ideal(y^3+14yz^2-8z^3+8y^2-z-14,
           -9y^3+11yz^2+3z^3-3y^2+9z-11,
           7y^3+yz^2-5z^3+5y^2-7z-1)
```

Calculamos en grado del ideal.

```
i4: N=degree(I)
o4: N=7
```

Calculamos  $d$  (el grado de la foliación en caso de existir).

```
i5: d=(-1+sqrt(4*N-3))/2
o5: d=2
```

Definimos el anillo de polinomios en tres variables y continuaremos con el orden graduado lexicográfico.

```
i6: S=QQ[x,y,z, MonomialOrder => GLex]
```

Calculamos la homogenización  $\bar{I}$  de  $I$ , el cual está generado por los siguientes polinomios.

```
o7: ideal(-xy^2+z^3, -x^3+yz^2, -x^2z+y^3)
```

Verificamos que se satisfagan las condiciones 2 usando la tabla de Betti.

	0	1	2
0:	1	·	·
o8: 1:	·	·	·
2:	·	3	1
3:	·	·	1

Dado que en este ejemplo sí se satisface la condición 2, elegimos un elemento  $\ell$  de la primera sicigia de grado 1.

$$\text{o9: } \begin{bmatrix} -z & x & y \end{bmatrix}$$

Como el espacio generado por las entradas de la sicigia es tres, entonces aplicamos la transformación  $T$ .

$$\text{o10: } \begin{bmatrix} x^2z - y^3 & xy^2 - z^3 & -x^3 + yz^2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la tercia dada por  $A = x^2z - y^3$ ,  $B = xy^2 - z^3$  y  $C = -x^3 + yz^2$  satisface la condición de Euler y definen una foliación sobre  $\mathbb{P}^2$ .

De hecho, la foliación obtenida en este ejemplo, es una foliación de Jouanolou.

**Ejemplo 4.7.** Consideremos el siguiente ideal  $I = \langle y + a_2z^2 + a_5z^5 + a_8z^8, z^{13} \rangle \in \mathbb{H}^{13}(\mathbb{C}^2)$  donde  $a_2, a_5, a_8 \in \mathbb{C}^*$  y que satisfacen la ecuación  $a_2^2a_8^2 + 2a_2a_5^2a_8 - 3a_5^4 = 0$ .

Podemos verificar que la homogenización de  $I$  satisface las condiciones del Algoritmo 2, obteniendo los siguientes polinomios homogéneos que satisfacen la condición de Euler.

1.  $A = (9a_2^2a_5^3 - 7a_2^3a_5a_8)xy^3 + (3a_2^5a_5^2 - a_2^6a_8)x^2yz + (12a_2^3a_5^3 - 8a_2^4a_5a_8)y^2z^2 + (3a_2^6a_5^2 - a_2^7a_8)xz^3$ ,
2.  $B = (-9a_2^2a_5^3 + 7a_2^3a_5a_8)x^2y^2 + (-\frac{1}{3}a_2a_5^2a_8 - \frac{2}{3}a_2^2a_5^2)y^3z + (-16a_2^3a_5^3 + 13a_2^4a_5a_8)xyz^2 + (-7a_2^4a_5^3 + 6a_2^5a_5a_8)z^4$ ,
3.  $C = (-3a_2^5a_5^2 + a_2^6a_8)x^3y + (\frac{1}{3}a_2a_5^2a_8 + \frac{2}{3}a_2^2a_5^2)y^4 + (4a_2^3a_5^3 - 5a_2^4a_5a_8)xy^2z + (-3a_2^6a_5^2 + a_2^7a_8)x^2z^2 + (7a_2^4a_5^3 - 6a_2^5a_5a_8)yz^3$ .

La familia de foliación de grado 3 dada por estos polinomios tiene un único punto singular del tipo nodo-silla y es un ejemplo nuevo de una familia de foliaciones sin hojas algebraicas como se puede ver en [APM].

# Bibliografía

- [ACG11] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, and Phillip Griffiths. *Geometry of algebraic curves: volume II with a contribution by Joseph Daniel Harris*, volume 268. Springer Science & Business Media, 2011.
- [Alc11] Claudia R Alcántara. Geometric invariant theory for holomorphic foliations on  $\mathbb{C}P^2$  of degree 2. *Glasgow Mathematical Journal*, 53(1):153–168, 2011.
- [Alc18] Claudia R Alcántara. Foliations on  $\mathbb{C}P^2$  of degree  $d$  with a singular point with milnor number  $d^2 + d + 1$ . *Revista matemática Complutense*, 31(1):187–199, 2018.
- [APM] Claudia R Alcántara and Rubí Pantaleón-Mondragón. Foliations on  $\mathbb{C}P^2$  with a unique singular point without invariant algebraic curves. preprint.
- [BNS03] E Ballico, Roberto Notari, and ML Spreafico. On the hilbert function of curvilinear zero-dimensional subschemes of projective spaces. *Central European Journal of Mathematics*, 1(4):644–649, 2003.
- [CDBM10] Dominique Cerveau, Julie Déserti, D Garba Belko, and Rafik Meziani. Géométrie classique de certains feuilletages de degré deux. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 41(2):161–198, 2010.
- [CLNS88] Cesar Camacho, Alcides Lins Neto, and Paulo Sad. Minimal sets of foliations on complex projective spaces. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 68:187–203, 1988.
- [CLO06] David A Cox, John Little, and Donal O’shea. *Using algebraic geometry*, volume 185. Springer Science & Business Media, 2006.
- [CLO13] David Cox, John Little, and Donal OShea. *Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [CO01] Antonio Campillo and Jorge Olivares. Polarity with respect to a foliation and cayley-bacharach theorems. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 2001.

- [Eis05] David Eisenbud. *The geometry of syzygies: a second course in algebraic geometry and commutative algebra*, volume 229. Springer Science & Business Media, 2005.
- [Eis13] David Eisenbud. *Commutative Algebra: with a view toward algebraic geometry*, volume 150. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Fog68] John Fogarty. Algebraic families on an algebraic surface. *American Journal of Mathematics*, 90(2):511–521, 1968.
- [Ful69] William Fulton. *Algebraic Curves*. W.A.Benjamin. Inc., 1969.
- [GMK89] Xavier Gómez-Mont and George Kempf. Stability of meromorphic vector fields in projective spaces. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 64(1):462–473, 1989.
- [GMOB04] Xavier Gómez-Mont and Laura Ortiz-Bobadilla. Sistemas dinámicos holomorfos en superficies (spanish), volume 3 of *Aportaciones Matemáticas: Notas de Investigación*, 2004.
- [Got88] Gerd Gotzmann. A stratification of the hilbert scheme of points in the projective plane. *Mathematische Zeitschrift*, 199(4):539–547, 1988.
- [GS] D Grayson and M Stillman. Macaulay 2, a software system for research in algebraic geometry available at <http://www.math.uiuc.edu>.
- [Har66] Robin Hartshorne. Connectedness of the hilbert scheme. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 29:5–48, 1966.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry; Graduate Texts in Mathematics*, volume 52. Springer, 1977.
- [HKP19] Amir Hashemi, Martin Kreuzer, and Samira Pourkhajouei. Computing all border bases for ideals of points. *Journal of Algebra and Its Applications*, 18(06):1950102–1–1950102–23, 2019.
- [Jou06] Jean-Pierre Jouanolou. *Equations de Pfaff algébriques*, volume 708. Springer, 2006.
- [MS03] C Morales and B Scardua. Geometry, dynamics and topology of foliated manifolds. Technical report, IMPA-24 Colóquio Brasileiro de Matemática, 1st edição, 2003.
- [MS04] Ezra Miller and Bernd Sturmfels. *Combinatorial commutative algebra*, volume 227. Springer Science & Business Media, 2004.
- [Stu96] Bernd Sturmfels. *Gröbner bases and convex polytopes*, volume 8. American Mathematical Soc., 1996.
- [Zak01] Saeed Zakeri. Dynamics of singular holomorphic foliations on the complex projective plane. *Contemporary Mathematics*, 269:179, 2001.