CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CLASIFICACIÓN DE HACES VECTORIALES SOBRE SUPERFICIES DE RIEMANN

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Matemáticas básicas

Presenta

Rocío Ríos Sierra

Director de Tesis:

Dra. Gloria Leticia Brambila Paz

Autorización de la versión

Guanajuato, Gto., 13 de Septiembre del 2019

Dedicatoria

A mis padres y hermanos.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres Lorenzo Ríos Suriano y Francisca Sierra Escobar por todas las enseñanzas a lo largo de mi vida, por su apoyo incondicional y confianza. Por ser un ejemplo de superación y preserverancia. Gracias por todos los consejos brindados y por nunca dejarme sola en esta gran decisión de continuar mis estudios. Por todo su amor, muchas gracias.

A mis hermanos Yavid Ríos Sierra y Arely Ríos Sierra por ser un ejemplo de superación. Por todo su apoyo durante mis años de estudio y por siempre escucharme en los momentos de estrés.

A Pedro Alfonso Valencia Esquipula por todo el cariño brindado. Gracias por ser mi apoyo en los momentos de ardúo trabajo y estrés. Por motivarme a nunca darme por vencida y ser mi compañero durante todos estos años.

A los miembros de sínodo, Dr. Leonardo Roa Leguizamón y Dr. Luis Nuñez Betancourt. Por su asesoramiento y el tiempo otorgado para la realización de este trabajo final, el cual, sin sus consejos y apoyo no hubiera sido posible.

A la Dra. Leticia Brambila Paz por ser mi guía y asesora en este trabajo. Gracias por todo el tiempo brindado en mi formación, por los consejos en momentos de insertidumbre, regaños cuando eran necesarios y motivaciones que me brindó durante mis estudios. Pero principalmente le agradezco por ser un ejemplo de dedicación, preserverancia y superación. Para mí, usted es un ejemplo de vida matemática al cual aspiro. Muchas gracias por creer en mi.

Agradezco a los investigadores y personal administrativo en CIMAT, por el apoyo durante mis años de estudio. Gracias por el tiempo otorgado en mi formación académica y por brindarme un lugar de confianza y amistad.

A mis amigos con los que comparti gratos momentos de trabajo y diversión. Gracias por brindarme esos momentos de relajación en tiempos de estrés. Pero sobre todo por su amistad y confianza.

Finalmente, agradezco A CONACYT, por el apoyo otorgado durante el tiempo que duro la realización de mi posgrado. Sin su ayuda, nada de esto seria posible.

Índice general

Introducción

El estudio de problemas de clasificación en geometría algebraica, motivó la creación de la teoría de espacios moduli. A mediados del siglo XIX, el matemático Bernhard Riemann, fué el primero en introducir el concepto de espacio moduli al clasificar superficies de Riemann de género fijo, pero no fue hasta los años 60's donde Munford establece la definición formal de los espacios moduli. La teoría de espacios moduli estudia las propiedades del espacio de clases de equivalencias de objetos algebraicos-geométricos. Encontrar la solución a un problema de clasificación suele resultar bastante complicado de estudiar, por lo que se establecen ciertos invariantes en los objetos, de tal manera que permitan tener un mayor control del problema.

El objetivo principal de la tesis es presentar una clasificación de haces vectoriales de rango 2 sobre superficies de Riemann compactas con ciertos invariantes. Los invariantes que se consideran para este problema en particular es el tener un subhaz vectorial de rango fijo.

En el capítulo 1, se introduce la definición de superficies de Riemann, se presentan distintos ejemplos y las propiedades de los morfismos entre superficies de Riemann. Además introducimos la teoría de gavillas sobre superficies de Riemann y mencionamos los resultados que utilizaremos a lo largo del trabajo.

En el capítulo 2, se establece el concepto de haces vectoriales sobre superficies de Riemann compactas y se estudian algunas propiedades de los morfismos entre estos. También establecemos la correspondencia entre haces vectoriales y elementos en el conjunto de cohomología $H^1(X, \mathscr{G}\mathscr{L}_n(\mathcal{O}_X))$. Para términar el capítulo introducimos el concepto de extensiones de haces vectoriales y se ven propiedades del espacio de clases de equivalencia de extensiones de dos haces simples.

Finalmente en el capítulo 3, introducimos el concepto de espacio moduli. Introducimos la clasificación de haces de rango 1 (haces lineales) e introducimos el grupo de Picard. Presentamos la clasificación de haces de rango 2 indescomponibles, se establecen propiedades en el conjunto de clases de haces vectoriales teniendo un subhaz fijo y damos algunos ejemplos. Por último, presentamos la construcción del espacio moduli fino del problema de clasificación de haces vectoriales de rango 2.

Capítulo 1

Superficies de Riemann y Gavillas

El objetivo de este capítulo es describir algunas propiedades de superficies de Riemann y de gavillas sobre estas superficies.

1.1. Superficies de Riemann

Una superficie topológica M, es un espacio topológico Hausdorff, paracompacto, segundo numerable y conexo, tal que para cada punto $p \in M$ existe una vecindad abierta $U_\alpha \subset M$ de p y un homeomorfismo $\theta_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ con $V_\alpha \subset \mathbb{C}$ subconjunto abierto. A la pareja $(U_\alpha, \theta_\alpha)$ se le llama una **carta coordenada** en M.

Sea M una superficie topológica. Un **atlas analítico** en M es una colección $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \theta_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de cartas coordenadas en M, que cumplen las siguientes propiedades:

a) $\mathbf{U} = \{U_\alpha\}$ forma una cubierta abierta de M.

b) Para cualquier intersección $U_\alpha \cap U_\beta$, las funciones $\{\theta_{\alpha\beta}\}$, dados por

$$\theta_{\alpha\beta} := \theta_\alpha \theta_\beta^{-1} : \theta_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \theta_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

son biholomorfismos y $\theta_{\alpha\alpha} = id$.
Las funciones $\theta_{\alpha\beta}$ son llamadas funciones coordenas.

c) Para cualquier triple intersección $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ se tiene que $\theta_{\alpha\beta}\theta_{\beta\gamma} = \theta_{\alpha\gamma}$.

Diremos que dos atlas analíticos en M son equivalentes si la unión es nuevamente un atlas analítico. La siguiente proposición demuestra que lo anterior es una relación de equivalencia.

Proposición 1.1. *La equivalencia entre atlas analíticos en una superficie M es una relación de equivalencia.*

Demostración: Sean $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \theta_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, $\mathcal{A}' = \{(U'_\alpha, \theta'_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ y $\mathcal{A}'' = \{(U''_\alpha, \theta''_\alpha)\}_{\alpha\in B}$ atlas analíticos en M. Las propiedades de reflexión y simetría se demuestran directamente de la definición. Para demostrar la transitividad, supongamos que $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}' \sim \mathcal{A}''$, queremos probar que $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}''$, es decir, $\mathcal{A}\cup\mathcal{A}''$ es un atlas analítico. Sean $(U_\alpha, \theta_\alpha)$, $(U'_\beta, \theta'_\beta)$ y $(U''_\gamma, \theta''_\gamma)$ cartas coordenadas tales que $U_\alpha \cap U'_\beta \cap U''_\gamma \neq \varnothing$. Como $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}' \sim \mathcal{A}''$, se tiene que las funciones coordenas definidas por $\theta_{\alpha\beta'} := \theta_\alpha \theta_\beta^{'-1}$ y $\theta_{\beta'\gamma''} := \theta'_\beta \theta_\gamma^{''-1}$ son biholomorfismos, por lo tanto

$$\theta_{\alpha\gamma''} = \theta_\alpha \theta_\gamma^{''-1} = (\theta_\alpha \theta_\beta^{'-1})(\theta'_\beta \theta_\gamma^{''-1}) = \theta_{\alpha\beta'}\theta_{\beta'\gamma''}$$

es un biholomorfismo. Por lo anterior se tiene que $\mathcal{A}\cup\mathcal{A}''$ es un atlas analítico en M y por lo tanto la equivalencia dada es efectivamente una relación de equivalencia. □

Una **estructura compleja** en una superficie topológica M, es una clase de equivalencia $[\mathcal{A}]$ de atlas analítico en M.

Definición 1.2. Una **superficie de Riemannn** es una pareja $(M, [\mathcal{A}])$ donde M es una superficie topológica y $[\mathcal{A}]$ es una estructura compleja en M.

Observación 1.3. Una superficie topológica puede tener distintas estructuras complejas, y por lo tanto definir distintas superficies de Riemann. Un problema interesante es el estudio de las distintas estructuras analíticas posibles en una superficie topológica. Este problema de clasificación, fué estudiado por primera vez por Riemann.

Daremos los siguientes ejemplos de superficies de Riemann.

Ejemplo 1.4. .

1. De manera natural los complejos $\mathbb{C}$ con el atlas $\mathcal{A} = (\mathbb{C}, id)$, es una superficie de Riemann.

2. Sea $(M, [\mathcal{A}])$ una superficie de Riemann y Y un subconjunto abierto y conexo de M. Las cartas coordenadas definidas por las restricciones $(U_\alpha \cap Y, \theta_\alpha|_{U_\alpha\cap Y})$ definen un atlas analítico $\mathcal{A}' = \{(U_\alpha \cap Y, \theta_\alpha|_{U_\alpha\cap Y})\}_{\alpha\in I}$ en Y. Por lo tanto $(Y, [\mathcal{A}'])$ es una superficie de Riemann.

3. Consideremos la esfera $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Si $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$, y $U_1 = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$, $U_2 = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ entonces U_1 y U_2 son abiertos tales que forman una cubierta abierta para $\mathbb{S}^2$. Sean $\theta_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\theta_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ los homomorfismos dados por

$$\theta_1(x,y,z) = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z} \text{ y } \theta_2(x,y,z) = \frac{x}{1+z} - i\frac{y}{1+z}.$$

   En la intersección $U_1 \cap U_2 = \{x \in \mathbb{S}^2 : x \neq (0,0,1), (0,0,-1)\}$ las funciones de coordenadas $\theta_{12} : \theta_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \theta_1(U_1 \cap U_2)$ y $\theta_{21} : \theta_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \theta_2(U_1 \cap U_2)$ están dados por $\theta_{12}(z) = \theta_{21}(z) = \frac{1}{z}$ las cuales son biholomorfismos. Se tiene entonces que $\mathcal{A} = \{(U_1, \theta_1), (U_2, \theta_2)\}$ es una atlas analítico en M y por lo tanto $(\mathbb{S}^2, [\mathcal{A}])$ es una superficie de Riemann llamada la **esfera de Riemann**.

4. Sea $\mathbb{C}_\infty$ la compactificación de los complejos agregando el punto al infinito. Los conjuntos abiertos en $\mathbb{C}_\infty$ son los conjuntos abiertos de $\mathbb{C}$ y conjuntos de la forma $V \cup \{\infty\}$, con $V \subset \mathbb{C}$ el complemento de un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Con esta topología se tiene que $\mathbb{C}_\infty$ es un espacio compacto (ver [4, Cáp.1], [15, Cáp.1]).
   Los abiertos $U_1 = \mathbb{C}_\infty \setminus \{\infty\}$ y $U_2 = \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$, forman una cubierta abierta de $\mathbb{C}_\infty$. Si $\theta_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ es la identidad y $\theta_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ está dada por
   $$\theta_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \text{ si } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 \text{ si } z = \infty \end{cases} .$$
   entonces las funciones de coordenadas $\theta_{12}(z) = \theta_{21}(z) = \frac{1}{z}$ con $z \in U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$ son biholomorfismos. El conjunto $\mathcal{A} = \{(U_1, \theta_1), (U_2, \theta_2)\}$ define un atlas analítico en $\mathbb{C}_\infty$ y por lo tanto $(\mathbb{C}_\infty, [\mathcal{A}])$ es una superficie de Riemann conocida como el **plano complejo extendido**.

5. Sea $\mathbb{P}^1 := (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})/\sim$, donde $x \sim y$ si y sólo si $x = \lambda y$, para $\lambda \in \mathbb{C}^*$. A las clases en $\mathbb{P}^1$ se les donota por $[x_0 : x_1]$ y son llamadas las coordenadas homogéneas del punto $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Si definimos U_i como $U_i = \{[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1 | x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^1$ con $i = 0, 1$ entonces U_0, U_1 son conjuntos abiertos tales que $\mathbf{U} = \{U_0, U_1\}$ forma una cubierta abierta de $\mathbb{P}^1$. Los homeomorfismos $\theta_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}$, dados por $\theta_i([x_0, x_1]) = \frac{x_j}{x_i}$ definen cartas coordenadas (U_i, θ_i) en $\mathbb{P}^1$, de tal manera que $\mathcal{A} = \{(U_0, \theta_0), (U_1, \theta_1)\}$ es un atlas analítico en $\mathbb{P}^1$. Por lo tanto $(\mathbb{P}^1, [\mathcal{A}])$ es una superficie de Riemann llamada la **línea proyectiva**.

   Más adelante, demostramos que las superficies definidas en 3, 4 y 5 definen la misma superficie de Riemann (Proposición 1.9), mediante la introducción de superficies de Riemann isomorfas.

6. El **Toro**. Realizaremos la construcción del toro a partir de una retícula.
   Sea $\Gamma = \{a\lambda_1 + b\lambda_2 | a, b \in \mathbb{Z}\}$ una retícula donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ son linealmente independientes. Diremos que $x, y \in \mathbb{C}$ son equivalentes módulo Γ si $x - y \in \Gamma$. Denotaremos el conjunto de clases de equivalencia por $T = \mathbb{C}/\Gamma$ y por $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ el morfismo proyección.

   Consideramos en T la topología cociente. Se define una estructura analítica en T de la siguiente forma: La imagen U_α bajo π de abiertos $V_\alpha \subset \mathbb{C}$ que no tienen elementos equivalentes módulo Γ, defininen homeomorfismos $\pi_\alpha = \pi|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow U_\alpha$. El conjunto $\mathbf{U} = \{U_\alpha\}$ de las imagenes, es una cubierta abierta de T y las parejas $(U_\alpha, \pi_\alpha^{-1})$ son cartas coordenadas en T. En la intersección $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ las funciones de coordenadas
   $$\pi_{\alpha\beta} = \pi_\alpha^{-1}\pi_\beta : \pi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$
   satisfacen lo siguiente. Para cada $p \in \pi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ se tiene que $\pi(\pi_{\alpha\beta}(p)) = \pi(p)$ entonces $\pi_{\alpha\beta}(p) - p = w(p)$, para algún $w(p) \in \Gamma$. La función $w : \pi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \Gamma$ es

continua y dado que Γ es un conjunto discreto se tiene que w es localmente constante en toda componente conexa de $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Por lo tanto, localmente existe $w \in \Gamma$ tal que $\pi_{\alpha\beta}(p) = p+w$ y así $\pi_{\alpha\beta}$ es biholomorfa. Por lo anterior $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \pi_\alpha^{-1})\}$ define un atlas analítico en T y por lo tanto el toro $(T, [\mathcal{A}])$ es una superficie de Riemann.

Observación 1.5. Más ejemplos de superficies de Riemann compactas, se pueden obtener al considerar otras tecnica, algunas de ellas se mencionan a continuación.

1. Esferas con asas ó serie de identificación en poligonos: Esta construcción puede ser estudiado en [14, Cáp.1] y [5, Cáp.1].

2. **Extensión de funciones analíticas** ([1, Cáp.3]).

3. **Gráficas de funciones holomorfas**: Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ función holomorfa, con $U \subset \mathbb{C}$ un dominio. Consideremos la gráfica de f como $X = \{(z, f(z)) : z \in U\}$ con la topología inducida de $\mathbb{C}^2$, veremos que existe una estructura compleja en X de la siguiente manera. El morfismo proyección en la primera coordenada $\pi_X : X \longrightarrow U$, es un homeomorfismo, con inversa $\pi^{-1} : U \longrightarrow X$, dado por $\pi^{-1}(z) = (z, f(z))$. De lo anterior $\mathcal{A} = \{(X, \pi_X)\}$ define un atlas analítico en X y por lo tanto $(X, [A])$ es una superficie de Riemann.

4. **Curvas algebraicas**: Recordemos que dado un polinomio no singular e irreducible F en $\mathbb{C}[x, y]$. Los ceros del polinomio F es a lo que se le llama una curva plana afín, suave e irreducible de $\mathbb{C}^2$.

   Teorema 1.6. *Toda curva plana afín suave e irreducible en $\mathbb{C}^2$ es una superficie de Riemann.*

   Demostración: Sea X una curva plana afín suave e irreducible con la topología heredada de $\mathbb{C}^2$. Por lo tanto existe un polinomio no singular e irreducible $f \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z, w) = 0\}$. Como f es no singular, para cada punto $(a, b) = p \in X$ se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$ ó $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$. Por el teorema de la función implícita, existe una vecindad abierta $U_p \subset X$ de p tal que U_p es la gráfica de una función holomorfa. Sin pérdida de generalidad supongamos que el abierto U_p está dado por $U_p = \{(z, g(z)) \in X : z \in W\}$ para una función holomorfa $g : W \longrightarrow \mathbb{C}$ con $a \in W$. Por lo tanto, la pareja (U_p, π_p) con $\pi_p : U_p \longrightarrow V$ el morfismo proyección en la primera coordenada, define una carta coordenada en X. Veremos que el conjunto $A = \{(U_p, \pi_p)\}_{p \in X}$ es un atlás analítico en X.
   Consideremos las cartas coordenadas $(U_{p'}, \pi_{p'})$ y $(U_{p''}, \pi_{p''})$ tal que $U_{p'} \cap U_{p''} \neq \varnothing$. Supongamos que $U_{p'}$ y $U_{p''}$ son las gráficas de las funciones holomorfas $g : V_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ y $h : V_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ respectivamente. Se tienen los siguientes casos:

   a) $U_{p'} = \{(z, g(z)) \in X : z \in V_1\}$ y $U_{p''} = \{(z, h(z)) \in X : z \in V_2\}$. En este caso, $\pi_{p'}$ y $\pi_{p''}$ son el morfismo proyección en la primera entrada. Por lo anterior, la composición $\pi_{p'} \circ \pi_{p''}^{-1} : \pi_{p''}(U) \longrightarrow \pi_{p'}(U)$ es la función identidad, la cual es una función biholomorfa. El mismo resultado se obtiene para el caso $U_{p'} = \{(g(z), z) \in X : z \in V_1\}$ y $U_{p''} = \{(h(z), z) \in X : z \in V_2\}$.

b) $U_{p'} = \{(z, g(z)) \in X : z \in V_1\}$ y $U_{p''} = \{(h(z), z) \in X : z \in V_2\}$ entonces $\pi_{p'}$ es el morfismo proyección en la primera entrada y $\pi_{p''}$ el morfismo proyección en la segunda coordenada. Por lo tanto, el abierto

$$U_{p'} \cap U_{p''} = \{(z, w) \in X : z \in V_1, w \in V_2 \text{ y } z = g(w), w = g(z)\},$$

y así, las composiciones $\pi_{p'} \circ \pi_{p''}^{-1}(w) = \pi_{p'}(h(w), w) = h(w)$ y $\pi_{p''} \circ \pi_{p'}^{-1}(z) = g(z)$ son funciones biholomorfa.

Lo anterior nos dice que A define un atlás analítico en X. Dado que estamos considerando a X con la topología heredada de $\mathbb{C}^2$, se tiene que X es un espacio topológico segundo numerable, paracompacto y Hausdorff. El hecho de ser X una curva irreducible garantiza la conexidad de X. Por lo tanto $(X, [A])$ es una superficie de Riemann. $\square$

5. **Curvas proyectivas**: Consideremos al espacio $\mathbb{P}^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, ..., 0)\}/\sim$, donde $x \sim y$ si y sólo si $x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$. El abierto $U_i = \{[x_0 :, ..., : x_n] \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$ es homeomorfo a $\mathbb{C}^n$ bajo el morfismo $\phi_i([x_0 : \cdots : x_n]) = (\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i})$ para $i = 0, ..., n$. Por lo tanto, $\mathbf{U} = \{U_i\}_{i \in \{0,1,..,n\}}$ define una cubierta abierta de $\mathbb{P}^n$, es decir, $\mathbb{P}^n$ es un espacio compacto.

Recordemos que una curva proyectiva no singular en $\mathbb{P}^2$ es el conjunto de ceros de un polinomio homogéneo no singular $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Más aún, se tiene que $V \subset \mathbb{P}^2$ es una curva proyectiva no singular si y sólo si $V_i = \phi_i(U_i \cap V)$ es una curva suave e irreducible en $\mathbb{C}^2$ para $i = 0, 1, 2$ (ver [15, Lema.3.5]).

Teorema 1.7. *Toda curva proyectiva no singular en $\mathbb{P}^2$ es una superficie de Riemann compacta.*

Demostración: Sea V una curva proyectiva no singular en $\mathbb{P}^2$. Por lo anterior, los conjuntos $V_i = \phi_i(V \cap U_i) \subset \mathbb{C}^2$ son curvas algebraicas irreducibles y por lo tanto superficies de Riemann (Teorema 1.6). Sea $p = [x_0, x_1, x_2] \in V \cap U_i$ con $i = 0, 1, 2$, entonces para el punto $\phi_i(p) \in V_i$ existe una carta $\pi_{ip} : U_{ip} \longrightarrow \pi_i(U_{ip})$ (V_i son superficies de Riemann) con $\phi_i(p) \in U_{ip}$. Por lo tanto, la pareja (U'_{ip}, θ_{ip}) define una carta coordenada en V donde $U'_{ip} := \phi_i^{-1}(U_{ip})$ y $\theta_{ip} := \pi_{ip} \circ \phi_i$. Veremos que el conjunto $A = \{(U'_{ip}, \theta_{ip})\}_{p \in V}$ define un átlas analítico en V. Sea $p \in U_0 \cap U_1$. Queremos ver que los morfismos $\theta_{0p} \circ \theta_{1p'}^{-1}$ y $\theta_{1p} \circ \theta_{0p}^{-1}$ son biholomorfismos. Por el Teorema 1.6, se tiene que el abierto $U_{ip} \in V_i$ es la gráfica de alguna función holomorfa g_i para $i = 0, 1$. Supongamos que los abiertos U_{0p} y U_{1p} están dados por $U_{0p} = \{(z, g_0(z)) : z \in V_1\}$ y $U_{1p} = \{(g_1(z), z) : z \in V_2\}$. Por lo anterior, $\theta_{1p}^{-1}(z) = \phi_1^{-1} \circ \pi_{1p}^{-1}(z) = [g_1(z) : 1 : z]$ para cada $z \in V_1 \cap V_2$. Los morfimos, $\theta_{0p}([g_1(z) : 1 : z]) = \frac{1}{g_1(z)}$ y $\theta_{1p} \circ \theta_{0p}(z) = \frac{1}{z}$ son funciones biholomorfas puesto que $z \neq 0$ ($[g_1(z) : 1 : z], [1 : z : g_0(z)] \in U_0 \cap U_1$). Lo anterior nos garantiza que A define un atlás analítico en V y así $[A]$ una estructura compleja en V.

El subconjunto V es un conjunto cerrado en $\mathbb{P}^2$, así V es compacto. Más aún, es un espacio segundo numerable y Hausdorff. Por lo tanto $(V, [A])$ es una superficie de Riemann compacta. $\square$

1.1.1. Propiedades de morfismos entre superficies de Riemann

Una vez definido nuestros objetos, es natural preguntarse como definir un morfismo entre estos. En esta sección veremos algunos resultados importantes, para mayor información ver [15, Cáp.2], [8, Cáp.1].

Definición 1.8. Sean M, N dos superficies de Riemann y $f : M \longrightarrow N$ función continua. Diremos que f es holomorfa en $p \in M$ si existen cartas (U, θ) en M con $p \in U$ y (U', θ') en N con $f(U) \subset U'$ tales que la composición

$$\theta' \circ f \circ \theta^{-1} : \theta(U) \longrightarrow \theta'(U')$$

es una función holomorfa en $\theta(p)$. Diremos que f es holomorfa en M si es holomorfa en todo punto p de M.

Se dice que f es un isomorfismo si f es biyectiva y la inversa f^{-1} es una función holomorfa.

En particular una función $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama una **función $\mathbb{C}-$valuada** en M si es una función holomorfa en M.

Proposición 1.9. *Como superficies de Riemann la Esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$, el plano complejo extendido $\mathbb{C}_\infty$ y la linea proyectiva $\mathbb{P}^1$ son isomorfos.*

Demostración:

- $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{C}_\infty$: Consideremos la función $F : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ dado por

$$F(x, y, w) = \begin{cases} \frac{x}{1-w} + i\frac{y}{1-w}, & \text{si } (x, y, w) \neq (0, 0, 1) \\ \infty & \text{si } (x, y, w) = (0, 0, 1) \end{cases}.$$

Consideremos los atlas analíticos $\mathcal{A} = \{(U_1, \theta_1), (U_2, \theta_2)\}$ y $\mathcal{A}' = \{(U_1', \phi_1), (U_2', \phi_2)\}$ de $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{C}_\infty$ respectivamente (definidos en Ejemplo 1.4). Para obtener el resultado probaremos que F es biholomorfa. Como primer punto demostraremos que F es holomorfa. Observe que $F(U_i) \nsubseteq U_j$ para $i \neq j$ con $i, j = 1, 2$ y las composiciones $(\phi_i \circ F \circ \theta_i^{-1})(z) = z$ para cada $z \in \mathbb{C}$ con $i = 1, 2$. Por lo tanto F es holomorfa.
Sea $G : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dado por

$$G(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{2Re(z)}{1+|z|^2}, \dfrac{2Im(z)}{1+|z|^2}, \dfrac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right) & \text{si } z \neq \infty \\ (0, 0, 1) & \text{si } z = \infty \end{cases}.$$

Como $G \circ F = id_{\mathbb{S}^2}$ y $F \circ G = id_{\mathbb{C}_\infty}$, entonces F es una biyección. Para obtener el resultado bastá probar que G es una función holomorfa. Observe que $G(U_i') \nsubseteq U_j'$ para $i \neq j$ con $i, j = 1, 2$ y las composiciones $\theta_i \circ G \circ \phi_i^{-1}$ para $i = 1, 2$ son tales que $(\theta_i \circ G \circ \phi_i^{-1})(z) = z$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Por lo anterior G es holomorfa y con esto $\mathbb{S}^2$ es holomorfa a $\mathbb{C}_\infty$.

- $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{P}^1$: Sean $h : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1$, dado por

$$h(x,y,w) = \begin{cases} [1 : \frac{x}{1-w} + i\frac{y}{1-w}] & \text{si } (x,y,w) \neq (0,0,1) \\ [0:1] & \text{si } (x,y,w) = (0,0,1) \end{cases}$$

Probaremos que h es un biholomorfismo. Si consideramos $\mathcal{A} = \{(U_1, \theta_1), (U_2, \theta_2)\}$ y $\mathcal{A}'' = \{(U_1'', \psi_1), (U_2'', \psi_2)\}$ atlas analíticos de $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{P}^1$ respectivamente (Ejemplo 1.4) entonces las funciones $\psi_i \circ h \circ \theta_i^{-1}$ son tales que $(\psi_i \circ h \circ \theta_i^{-1})(z) = z$ para cada $z \in \mathbb{C}$ e $i = 1, 2$, con lo cual, los morfismos $\psi_i \circ h \circ \theta_i^{-1}$ son biholomorfismos. Por lo anterior h es una función holomorfa. Consideremos la función $H : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2$, dado por

$$H[x:y] = \begin{cases} (2Re(\frac{y}{x}), 2Im(\frac{y}{x}), |\frac{y}{x}|^2 - 1)/(|\frac{y}{x}|^2 + 1) & \text{si } [x:y] \neq [0:1] \\ (0,0,1) & \text{si } [x:y] = [0:1] \end{cases}$$

La función H es tal que $H \circ h = id_{\mathbb{S}^2}$ y $h \circ H = id_{\mathbb{P}^1}$, lo cual implica que h es una función biyectiva. Para obtener el resultado basta probar que H es holomorfa. Como $H(U_i'') \nsubseteq U_j$ para $i \neq j$ con $i, j = 1, 2$ y las composiciones $\theta_i \circ H \circ \psi_i^{-1}$, dadas por, $(\theta_i \circ H \circ \psi_i^{-1})(z) = z$ para cada $z \in \mathbb{C}$ e $i = 1, 2$ son biholomorfas entonces H es holomorfa. Por lo tanto $\mathbb{S}^2$ es isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

Por lo anterior, como superficies de Riemann, la esfera de Riemann, el plano complejo extendido y la linea proyectiva son isomorfos.

□

A continuación daremos algunos de los principales teoremas, acerca de morfismos entre superficies de Riemann. Realizaremos un bosquejo de las demostraciones, para mayor información ver [4],

Teorema 1.10 (Singularidades extraibles de Riemann)**.** *Sea M una superficie de Riemann y $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ función continua, con U abierto de M. Si $f : U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, $a \in U$, y f es acotado en alguna vecidad de a entonces f puede ser extendido de forma única a una función holomorfa en U.*

Demostración: (Ver [4, Teorema 1.8]).
Sea V vecindad abierta de a tal que $f(V)$ es acotada. Consideremos $\theta : U' \longrightarrow \mathbb{C}$ carta coordenada en M tal que $a \in U'$. La función $g := f \circ \theta^{-1} : \theta(V \cap U') \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función acotada y holomorfa en el conjunto $\theta(U' \cap V) \setminus \{\theta(a)\}$. Por el teorema de singularidades extraibles de Riemann en $\mathbb{C}$, la función g puede ser extendida a una única función holomorfa $\widetilde{g}$ en $\theta(U' \cap V)$, con lo cual $\widetilde{f} = \widetilde{g} \circ \theta$ es la función deseada. □

Teorema 1.11 (De identidad)**.** *Sean M, N superficies de Riemann y $f, g : M \longrightarrow N$ funciones holomorfas, tales que coinciden en un subconjunto A de X. Si A tiene un punto límite entonces $f \equiv g$.*

Demostración: (Ver [4, Teorema 1.11]).
Sea $B = \{x \in M | \exists U \subset M \text{abierto}, f(x) = g(x) \forall x \in U\}$. Por la definición B es un conjunto abierto. Para obtener el teorema veremos que B es un conjunto cerrado en M.
Sea $a \in M$ punto limite de B, es decir, existe $\{x_n\} \subset B$ sucesión tal que $x_n \longrightarrow a$. Para demostrar que $a \in B$ aplicamos las funciones continuas f y g a la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, como $f(x_n) = g(x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(a) = g(a)$.
Como a es punto limite de B, existe U conjunto abierto conexo de M tal que $a \in B \cap U$ y cartas coordenadas $\theta : U \longrightarrow V$, $\psi : U' \longrightarrow V'$ con $g(U), f(U) \subset U''$ de M y N respectivamente. Las funciones holomorfas $f_1 = \psi \circ f \circ \theta^{-1}$, $f_2 = \psi \circ g \circ \theta^{-1}$ satisfacen que $f_1(x) = f_2(x)$ para cada $x \in \theta(B \cap U)$. Por el teorema de identidad para funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ se concluye que $f_1 = f_2$ y por lo tanto $f(x) = g(x)$ para $x \in U$, es decir, $a \in B$. Por lo anterior B es un conjunto abierto y cerrado en M y al ser M un espacio conexo se tiene que $M = B$. Por lo tanto $f \equiv g$. □

Recordemos que topológicamente una superficie de Riemann compacta es una superficie con g hazas. El número de hazas es a lo que se le llama el **género geométrico** de la superficie. Si existe un morfismo entre superfices de Riemann, el teorema de Hurwitz nos brinda una relación entre el género de las superficies.

Teorema 1.12 (Hurwitz)**.** *Sean M y N superficies de Riemann compactas de género g y γ respectivamente. Si $f : M \longrightarrow N$ es una función holomorfa entonces*

$$g = n(\gamma - 1) + 1 + \frac{B}{2}$$

donde n es el grado de f y B es orden total de ramificación.

Demostración: Recordemos que si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo entre superficies de Riemann entonces f es un morfismo cubriente n:1 para $n > 1$([4, Teorema4.22]).
Sea $S = \{f(x) : x \text{ es punto de ramificación}\}$ entonces el conjunto S es cerrado y discreto ([4, 4.23]), y al ser N es compacto, S es finito. Sea T una triagulación en N tal que los puntos de S son vértices. Supongamos que la triangulación consta de F caras, E arístas y V vértices. Consideremos el levantamiento de la triangulación a M mediante f. Está triangulación en M tiene nF caras, nE arístas y $nV - B$ vértices.
La característica de Euler de N está dada por $\mathscr{X}_N = 2-2\gamma = F-E+V$ y la característica de Euler de M está dada por

$$\mathscr{X}_M = 2 - 2g = nF - nE + nV - B = n(F - E + V) - B = n(2 - 2\gamma) - B$$

de donde se obtiene el resultado. □

Teorema 1.13 (Comportamiento local de funciones holomorfas)**.** *Sean M, N superficies de Riemann y $f : M \longrightarrow N$ función holomorfa no constante. Consideremos $a \in M$ y $b = f(a)$, entonces existe $k \geq 1$ y cartas $\theta : U \longrightarrow V$, $\psi : U' \longrightarrow V'$ tales que:*

a) $a \in U$ con $\theta(a) = 0$; $b \in U'$ con $\psi(b) = 0$.

b) $f(U) \subset U'$.

c) La función $F = \psi \circ f \circ \theta^{-1} : V \longrightarrow V'$ esta dado por $F(z) = z^k$, para todo $z \in V$.

Demostración: Consideremos $\theta : U_1 \longrightarrow W$ y $\psi : U' \longrightarrow W'$ cartas de M, N respectivamente tales que $a \in U_1$, $b \in U'$ con $f(U_1) \subset U'$ y $\theta(a) = 0$, $\psi(b) = 0$.
Sea $f_1 = \psi \circ f \circ \theta^{-1} : W \longrightarrow V'$ función holomorfa. Al ser f función no constante se tiene que f_1 es no constante. Observemos que $f_1(0) = f_1(\theta(a)) = \psi(f(a)) = 0$ entonces 0 es una raiz de f_1. Por lo anterior, existe un entero $k \geq 1$ y una función holomorfa nunca nula $h : W \longrightarrow V'$ tales que $f_1 = z^k h$. Por lo tanto, existe una función holomorfa g, definida en una vecindad abierta de 0 tal que $g(z)^k = h(z)$.
La función $\gamma : V_2 \longrightarrow V$, dado por $\gamma(z) = zg(z)$, define un biholomorfismo en una vecindad abierta $V_2 \subset W$ de 0. Considerando $U := \theta^{-1}(V_2)$ y reemplazando θ por el morfismo $\alpha = \gamma \circ \theta : U \longrightarrow V$, se tiene que (U, α) es una carta coordenada con $a \in U$ satisfaciendo a), b) tal que la composición $F := \psi \circ f \circ \alpha^{-1} : V \longrightarrow V'$ satisface $F(z) = z^k$, para cada $z \in V$. □

De los resultados anteriores se obtienen propiedades de las funciones holomorfas entre superficies de Riemann, una de ellas es el siguiente corolario.

Corolario 1.14. *Toda función $\mathbb{C}-$valuada de una superficie de Riemann compacta M es constante.*

1.2. Gavillas

En esta sección presentamos las propiedades básicas de gavillas sobre superficies de Riemann, las cuales utilizaremos en el siguiente capítulo.

Definición 1.15. Sea M una superficie de Riemann. Una pregavilla de grupos abelianos $\mathscr{F}$ sobre M, consiste de la siguiente información:

a) Cada abierto $U \subset M$, está asociado con un grupo abeliano denotado por $\mathscr{F}(U)$. Donde el grupo asocidado al abierto $\varnothing$ es el grupo trivial.

b) Para cada inclusión $V \hookrightarrow U$ de conjuntos abiertos, existe un morfismo llamado morfismo de restricción $\rho^U_V : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{F}(V)$, tal que ρ^U_V es un morfismo de grupo satisfaciendo lo siguiente

- $\rho^U_U = Id_{\mathscr{F}(U)}$.
- Para cualesquiera inclusiones $W \hookrightarrow V \hookrightarrow U$ se tiene que

$$\rho^U_W = \rho^U_V \rho^V_W \tag{1.1}$$

Definición 1.16. Una pregavilla en una superficie de Riemann es una gavilla si satisface las siguientes condiciones complementarias. Para cada abierto $U \subset M$ y $\{U_i\}_{i\in I}$ cubierta abierta de U se tiene lo siguiente:

1.- Axioma de identidad: Si $f, g \in \mathscr{F}(U)$ son tales que $\rho^U_{U_i} f = \rho^U_{U_i} g$ para cada $i \in I$ entonces $f = g$.

2.- Axioma de pegado: Si $f_i \in \mathscr{F}(U_i)$ satisfacen que $\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j} f_i = \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j} f_j$ para cada $i, j \in I$, entonces existe $f \in \mathscr{F}(U)$ tal que $\rho^U_{U_i} f = f_i$, para toda $i \in I$.

Observación 1.17. .

1. De manera similar se puede definir una gavilla de anillos, A-modulos, etc.

2. Notese que una gavilla de grupos abelianos sobre M se puede definir también como un funtor contravariante de la categoría de los conjuntos abiertos de M a la categoría de grupos abelianos.

Definición 1.18. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla sobre M. Para cada $p \in M$ definimos la fibra en p, como: $\mathscr{F}_p = \bigcup\limits_{p\in U} \mathscr{F}(U)/_\sim$, donde $f \in \mathscr{F}(U)$ y $g \in \mathscr{F}(V)$ son equivalentes si y sólo si existe un conjunto abierto $W \subset U \cap V$ tal que $\rho^U_W f = \rho^V_W g$.

Ejemplo 1.19. Sea M un superficie de Riemann.

a) Sea G un grupo abeliano con la topología discreta. Para un abierto $U \subset$ de M definimos $G(U)$ como $G(U) = \{f : U \longrightarrow G : f \text{ es continua}\}$. Si ρ^U_V es la restricción de las funciones, entonces $\{(G(U), \rho^U_V)\}$ satisfacen las propiedades de la definición 1.16, por lo tanto determina una gavilla sobre M llamada la gavilla constante con coeficientes en G y es denotada como $\underline{G}$.

b) Supongamos que $\mathcal{P}$ es una propiedad de funciones en M definida inicialmente en puntos de M. Dado un abierto U de M, podemos extender la propiedad $\mathcal{P}$ en U al decir que una función f tiene la propiedad $\mathcal{P}$ en U si y sólo si f tiene la propiedad $\mathcal{P}$ en cada punto $p \in U$. Por lo anterior, definimos los conjuntos $\mathscr{F}_\mathcal{P}(U)$, mediante

$$\mathscr{F}_\mathcal{P}(U) : \{f : U \longrightarrow G : f \text{ tiene la propiedad } \mathcal{P} \text{ en } U\}.$$

Observe que lo anterior se comporta bien bajo restricción, es decir, si $V \subset U$ y f tiene la propiedad $\mathcal{P}$ en U entonces f tiene la propiedad $\mathcal{P}$ en V. Por lo tanto, si consideramos a ρ^U_V como la restricción de funciones se tiene que $\{(\mathscr{F}_\mathcal{P}(U)), \rho^U_V\}$ define una gavilla sobre M.

c) Dado un abierto U de M definimos $\mathcal{O}_M(U)$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{O}_M(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es holomorfa }\}.$$

Observe que $\mathcal{O}_M(U)$ tiene estructura de anillo. Si ρ^U_V es la restricción de funciones cuando $V \subset U$ entonces $\{(\mathcal{O}_M(U), \rho^U_V)\}$ cumplen las condiciones para determinar una gavilla de anillos, la cual denotamos por $\mathcal{O}_M$ llamada la **gavilla estructural**.

d) Sea U un conjunto abierto de M. Definimos por $GL_n(\mathcal{O}_M(U))$ el conjunto de matrices $n \times n$ invertibles con coeficientes funciones holomorfas en U. Si $V \subset U$ definimos los morfismos de restricción ρ_V^U como la restricción. Observemos que $GL_n(\mathcal{O}_M(U))$ no es un grupo abeliano, sin embargo, de la misma manera define una gavilla de grupos $\mathscr{G}\mathscr{L}_n(\mathcal{O}_M)$ sobre M.

Observación 1.20. .

1. La gavilla de funciones holomorfas nunca nulas $\mathcal{O}_M^*$, es un caso particular de la gavilla definida en el inciso b) del ejemplo anterior.

2. En el caso en que $n = 1$, la gavilla $\mathscr{G}\mathscr{L}_1(\mathcal{O}_M) = \mathcal{O}_M^*$.

1.2.1. Morfismos de gavillas

Definición 1.21. Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ gavillas de grupos abelianos sobre una superficie de Riemann M. Diremos que $\phi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ es un morfismo de gavillas si:

a) Para cada abierto $U \subset M$, se tiene que $\phi_U : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U)$ es un morfismo de grupos.

b) Para cada inclusión $V \hookrightarrow U$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\rho_V^U"] \\
\mathscr{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"] & \mathscr{G}(V).
\end{tikzcd}$$

Observe que la condición b) implica que si $\phi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ es un morfismo de gavillas, entonces induce un homorfismo en las fibras, $\phi_p : \mathscr{F}_p \longrightarrow \mathscr{G}_p$, para cada $p \in M$. Diremos que ϕ es un isomorfismo de gavillas si ϕ_p es un isomorfismo en la correspondiente categoría.

Sea $\phi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ morfismo de gavillas sobre M. De manera natural podemos definir las gavillas $Ker\phi$, $Im\phi$ y $Coker\phi$, asociadas al kernel, imagen y cokernel del morfismo respectivamente. De lo anterior diremos que un morfismo de gavillas $\phi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ es inyectivo si $Ker\phi = 0$ y sobreyectivo si $Im\phi = \mathscr{G}$.

Un complejo de gavillas, es una sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{i-2}} \mathscr{F}_{i-1} \xrightarrow{\delta_{i-1}} \mathscr{F} \xrightarrow{\delta_i} \mathscr{F}_{i+1} \xrightarrow{\delta_{i+1}} \mathscr{F}_{i+2} \xrightarrow{\delta_{i+2}} \cdots$$

de gavillas $\mathscr{F}_i$ tal que $\delta_{i+1} \circ \delta_i = 0$, es decir, $Im\delta_i \subset Ker\delta_{i+1}$. Diremos que la sucesión es exacta si $Im\delta_i = Ker\delta_{i+1}$.

Una sucesión exacta corta es una sucesión exacta de la siguiente forma

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\phi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{R} \longrightarrow 0.$$

donde 0 es la gavilla cero sobre M. Este caso implica que ϕ es un morfismo inyectivo y ψ es un morfismo sobreyectivo.

Ejemplo 1.22. Sea $\mathcal{O}_M^*$ la gavilla de funciones holomorfas nunca nulas sobre M. Consideremos la función exponencial $exp : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*$, dada por $f \mapsto exp(2\pi i f)$ para cada $f \in \mathcal{O}_p$, $p \in M$. Se tiene que exp es un morfismo sobreyectivo de gavillas tal que $Ker(exp) = \underline{\mathbb{Z}}$. Por lo tanto se tiene la siguiente sucesión exacta corta de gavillas

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_M \xrightarrow{exp} \mathcal{O}_M^* \longrightarrow 0 \,. \tag{1.2}$$

1.2.2. Gavillas de $\mathcal{O}_M-$módulo.

En esta subsección introducimos la definición de gavillas de $\mathcal{O}_X-$modulos. Presentamos una breve introducción a gavillas localmente libres, coherentes sobre una superficie de Riemann y enunciaremos algunas propiedades de estas gavillas.

En el Ejemplo 1.19, establecimos que la gavilla $\mathcal{O}_M$ define una gavilla de anillos sobre M. Por lo tanto, diremos que una gavilla $\mathscr{F}$ es de $\mathcal{O}_M-$módulo, si para cada conjunto abierto U de M, $\mathscr{F}(U)$ tiene estructura de $\mathcal{O}_M(U)-$módulo y los morfismos ρ_V^U son morfismos de $\mathcal{O}_M(U)-$módulos.

Consideremos $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ gavillas de $\mathcal{O}_M-$módulo sobre M. Un morfimo de gavillas $\phi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ es un morfismo de gavillas de $\mathcal{O}_M-$módulos, si para cada conjunto abierto U de M el morfismo $\phi_U : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U)$ es un morfismo de $\mathcal{O}_M(U)-$módulo.

Es posible extender las operaciones de $R-$módulos, a gavillas de $\mathcal{O}_M-$módulos de la siguiente manera:

- La gavilla suma directa de $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ definida como $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$, es la gavilla asociada a la pregavilla $U \mapsto \mathscr{F}(U) \oplus \mathscr{G}(U)$ con morfismos de restricción $\rho_V^U \oplus \rho_V'^U$. Diremos que una gavilla es **libre** si es isomorfa a la gavilla $\mathcal{O}_M^r := \oplus^r \mathcal{O}_M(U_\alpha)$, para algún $r \in \mathbb{N}$.

- La gavilla producto tensorial $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$, como la gavilla asociada a la pregavilla definida por las fibras, $\mathscr{F}_p \oplus \mathscr{G}_p$.

Se tiene que las gavillas anteriores tienen una estructura de $\mathcal{O}_M-$módulo.

Definición 1.23. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla $\mathscr{F}$ de $\mathcal{O}_M-$módulo sobre M. Diremos que

a) $\mathscr{F}$ es una gavilla localmente libre si existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de M tal que $\mathscr{F}(U_\alpha) \cong \mathcal{O}_M^n(U_\alpha)$ para cada $\alpha \in I$.

b) $\mathscr{F}$ es una gavilla coherente, si para cada punto $p \in M$ existe una vecindad abierta $U \subset M$ de p tal que la restricción de $\mathscr{F}$ en U es el cokernel de un $\mathcal{O}_M-$homomorfismo de gavillas libres, es decir, existe una sucessión exacta de gavillas de la siguiente forma

$$\mathcal{O}_M^m|_U \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_M^n|_U \xrightarrow{\rho} \mathscr{F}|_U \longrightarrow 0$$

Observe que de la definición se tiene que toda gavilla localmente libre es coherente.

Proposición 1.24. *Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ gavillas coherentes sobre M. Las gavillas imagen, kernel y cokernel de un morfismo $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ son coherentes.*

Demostración: Sea $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un morfismo de gavilla. Se tiene que la gavilla imagen $\varphi(\mathscr{F})$ es localmente finita generada por lo tanto es una gavilla coherente (ver [9, Teo.2]). Consideremos las siguientes sucesiones exactas de gavillas

$$0 \longrightarrow Ker(\varphi) \xrightarrow{i} \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \varphi(\mathscr{F}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \varphi(\mathscr{F}) \xrightarrow{i} \mathscr{G} \xrightarrow{p} Coker(\varphi) \longrightarrow 0$$

Al ser las gavillas $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ y $\varphi(\mathscr{F})$ coherentes, se tiene que las gavillas $ker(\varphi)$ y $Coker(\varphi)$ son coherentes ([9, Teo.2]). $\square$

El siguiente resultado será de utilidad en este trabajo. A continuación presentamos un bosquejo de la prueba, para una mayor información ver [9, Teo.3].

Teorema 1.25. *En una superficie de Riemann, toda gavilla coherente subgavilla de una gavilla localmente libre es localmente libre.*

Demostración: Sea M un superficie de Riemann. Como la prueba es local, podemos suponer que $\mathscr{F} \subset \mathcal{O}_M^n$ es subgavilla coherente. Para cada punto p en la superficie, existe una vecindad abierta U tal que la gavilla es finitamente generada. Por lo tanto, existen secciones $S_i \in \mathcal{O}_M^n(U)$, con $i = 1, .., r$ tal que el morfismo $\varphi : \mathcal{O}_M^r(U) \longrightarrow \mathcal{O}_M^n(U)$ dado por $(f_1, ..., f_r) \mapsto \sum_{i=1}^{r} f_i S_i$ para cada $p \in U$ tiene por imagen a $\mathscr{F}$. El $ker(\varphi)$ es coherente y así es finitamente generado por secciones $F_i \in \mathcal{O}_M^r(U)$. Como las fibras $ker(\varphi)_p = 0$ entonces necesariamente todos los germenes $F_i = 0$, para cada $p \in U$. Así $\varphi : \mathcal{O}_M^r(U) \longrightarrow \mathscr{F}(U)$ es un isomorfismo. $\square$

Capítulo 2

Haces vectoriales

En este capítulo introduciremos la definición de haces vectoriales en superficies de Riemann compactas y presentamos diversas propiedades. En el trabajo nos enfocaremos en haces vectoriales holomorfos y por simplicidad les llamaremos haces vectoriales. A menos que se especifique lo contrario X denotará una superficie de Riemann compacta.

Consideremos la tripleta (I_n, X, π) donde $I_n := X \times \mathbb{C}^n$ y $\pi : X \times \mathbb{C}^n \longrightarrow X$, es el morfismo proyección en X. Esta tripleta se conoce como la familia trivial de espacios vectoriales parametrizados por X.
A continuación introducimos la definición de haces vectoriales sobre X (ver [13]).

Definición 2.1. Sea X una superficie de Riemann compacta. Un haz vectorial de rango n sobre X, es una terna (E, X, π), donde E es una variedad compleja y $\pi : E \longrightarrow X$ un morfismo satisfaciendo lo siguiente:

a) Para toda $x \in X$, la imagen inversa $\pi^{-1}(x)$ tiene una estructura de $\mathbb{C}-$espacio vectorial de dimensión n, se denota como E_x y es llamada la fibra en x.

b) Existe una cubierta abierta $\mathbf{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de X, tal que para todo abierto U_α existe un isomorfismo
$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n$$
de manera que el morfismo $\phi_{\alpha,x} = \phi_\alpha|_{E_x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^n$ es una transformación lineal para cada $x \in U_\alpha$. La pareja $(U_\alpha, \theta_\alpha)$ es llamada una trivialización de E sobre U_α y al conjunto $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ se le conoce como una trivialización de E.

c) Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ entonces

$$\begin{tikzcd}
 & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[dl, "\phi_\alpha"'] \arrow[dr, "\phi_\beta"] & \\
U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^n \arrow[rr, "\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}"] & & U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^n
\end{tikzcd}$$

el homorfismo $\widetilde{\phi_{\alpha\beta}} := \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ es un biholomorfismo y satisfacen las siguientes condiciones:

1.- $\widetilde{\phi_{\alpha\beta}} \circ \widetilde{\phi_{\beta\alpha}} = Id_{U_\alpha \cap U_\beta \times C^n}$.

2.- Para cualquier tiple intersección $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$, $\widetilde{\phi_{\alpha\gamma}} = \widetilde{\phi_{\alpha\beta}} \circ \widetilde{\phi_{\beta\gamma}}$.

Los homorfismos $\widetilde{\phi_{\alpha\beta}}$ son llamados funciones de transición de E.

Cuando no exista confusión los haces vectoriales (E, X, ϕ) los denotaremos por $E \xrightarrow{\pi} X$ ó simplemente por E y denotaremos el rango de E por $rk(E)$. Si $rk(E) = 1$ entonces E es llamado un **haz lineal** sobre X.

La familia trivial (I_n, π, X) es llamada el **haz trivial** de rango n sobre X. El haz vectorial cero, es el haz vectorial teniendo el espacio vectorial cero en las fibras.

Definición 2.2. Sean $E_1 \xrightarrow{\pi_1} X$, $E_2 \xrightarrow{\pi_2} X$ haces vectoriales de rango n y m respectivamente. Un morfismo de haces vectoriales $f : E \longrightarrow F$ es un morfismo tal que:

a) $\pi_1 = \pi_2 \circ f$.

b) Para todo $x \in X$, el morfismo $f_x := f|_{(E_1)_x} : (E_1)_x \longrightarrow (E_2)_x$ es una transformación lineal.

Diremos que f es inyectivo (respectivamente suprayectivo) si los morfismos $f_x : E_x \longrightarrow F_x$ son inyectivos (respectivamente suprayectivos) para cada $x \in X$. El morfismo f es un isomorfismo si para cada $x \in X$, $f_x : E_x \longrightarrow F_x$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Dado $f : E \longrightarrow F$ un morfismo de haces vectoriales, la propiedad $a)$ en la definición 2.2, es equivalente al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & F \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

donde $f(E_x) \subset F_x$.

Sea E un haz vectorial sobre X y $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una trivialización de E. Observe que para cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, las funciones de transición $\widetilde{\phi_{\alpha\beta}}$ son biholomorfismos, tales que

$$(\widetilde{\phi_{\alpha\beta}})_x := \widetilde{\phi_{\alpha\beta}}|_{\{x\} \times \mathbb{C}^n} : \{x\} \times \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n = \{x\} \times \mathbb{C}^n$$

son isomorfismos lineales, es decir, definen matrices $(\phi_{\alpha\beta})_x \in GL_n(\mathbb{C})$.

Por lo tanto, las funciones de transición $\widetilde{\phi_{\alpha\beta}}$ definen los siguientes morfismos

$$\phi^E_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL_n(\mathcal{O}_X).$$

tales que satisfacen lo siguiente

1. Para cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $\phi^E_{\alpha\beta}(x)\phi^E_{\beta\alpha}(x) = id$.

2. Para cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ se tiene que $\phi^E_{\alpha\gamma}(x) = \phi^E_{\alpha\beta}(x) \cdot \phi^E_{\beta\gamma}(x)$.

Los morfismos $\phi^E_{\alpha\beta}$ son llamados funciones de cociclos de E.

Observación 2.3. .

1. Si consideramos la gavilla $\mathscr{GL}_n(\mathcal{O}_X)$ (Ejemplo 1.19) sobre X, la colección de morfismos $(\phi^E_{\alpha\beta})$ definen un 1-cociclo en $H^1(X, \mathscr{GL}_n(\mathcal{O}_X))$ (ver [9, Cáp.1]), por lo que el nombre de funciones de cociclos surge de manera natural. Más aún, dados dos haces vectoriales isomorfos, las funciones de cociclos asociados a los haces vectoriales definen la misma clase de 1-cociclo en $H^1(X, \mathscr{GL}_n(\mathcal{O}_x))$.

2. Una clase de 1-cociclo $[(\psi_{\alpha\beta})] \in H^1(X, \mathscr{GL}_n(\mathcal{O}_X))$ define de manera natural biholomorfismos
$$\widetilde{\psi_{\alpha\beta}} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^n \longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^n$$
tales que satisfacen la propiedad c) en la Definición 2.1. Por lo tanto si consideramos el espacio
$$E = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times \mathbb{C}^n / \sim,$$
donde $(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ y $(y, w) \in U_\beta \times \mathbb{C}^n$ son equivalentes si y sólo si $x = y$ y $v = \widetilde{\psi_{\alpha\beta}}(x)w$, entonces E es un haz vectorial sobre X de rango n tal que los morfismos $\psi_{\alpha\beta}$ son las funciones de cociclos de E (ver [13, Secc.1.3]). Por simplicidad una clase de isomorfismos de haces vectoriales lo denotaremos por un haz vectorial E.

La observación previa nos sugiere que existe una relación entre clases de isomorfismos de haces vectoriales sobre X y elementos del primer conjunto de cohomología $H^1(X, \mathscr{GL}_n(\mathcal{O}_X))$. El siguiente teorema establece esta relación, siendo este resultado de suma importancia para el desarrollo de este trabajo.

Teorema 2.4. *Las clases de isomorfismos de haces vectoriales sobre X de rango n están en correspondencia 1-1 con elementos del primer conjunto de cohomología $H^1(X, \mathscr{GL}_n(\mathcal{O}_X))$.*

Observación 2.5. .

a) Recordemos de [9, Cáp.1], que las clases de isomorfismos de gavillas localmente libre sobre X de rango n están en correspondencia 1-1 con el conjunto $H^1(X, \mathscr{GL}_n(\mathcal{O}_X))$. Por lo tanto del Teorema 2.4, se tiene que existe una correspondencia 1-1 entre haces vectoriales sobre X de rango n y gavillas localmente libres.

b) Para $n = 1$ la gavilla $\mathscr{GL}(1, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}^*_X$ con $\mathcal{O}^*_X$ la gavilla de germenes de funciones holomorfas nunca nulas, la cual, tiene estructura de gavilla de grupos abelianos. Por lo tanto el primer conjunto de cohomología $H^1(X, \mathcal{O}^*_x)$ tiene una estructura de grupo. Del teorema anterior se tienen el siguiente resultado (ver [8, Cáp.4], [9, Cap.1]).

Corolario 2.6. *Las clases de isomorfismos de haces lineales sobre X están en correspondencia 1-1 con el primer grupo de cohomología $H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$.*

La identificación de haces vectoriales con elementos en el conjunto $H^1(X, \mathscr{GL}_n(\mathcal{O}_X))$, será la base para el problema de clasificación de haces lineales.

Definición 2.7. Sea E un haz vectorial sobre X. Un subhaz vectorial de E, es un haz vectorial F sobre X tal que la fibra F_x es un subespacio vectorial de E_x para cada $x \in X$. Definimos el haz vectorial cociente E/F como el haz vectorial con fibras E_x/F_x para cada $x \in X$.

Observación 2.8. Sea E un haz vectorial sobre X, F subhaz vectorial de E y E/F haz vectorial cociente.

1. Es posible tomar refinamientos en cubiertas abiertas de X, de tal manera que las funciones de cociclos de E, F y E/F esten definidos.

2. Si $\{\phi^E_{\alpha\beta}\}$, $\{\phi^F_{\alpha\beta}\}$, $\{\phi^{E/F}_{\alpha\beta}\}$ son funciones de cociclos de los haces E, F y E/F respectivamente entonces las funciones de cociclos $\{\phi^E_{\alpha\beta}\}$ están dados de la siguiente manera ([7, Cáp.5])
$$\phi^E_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \phi^F_{\alpha\beta} & k_{\alpha\beta} \\ 0 & \phi^{E/F}_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$
para cada $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$.

Definición 2.9. Sea $E \xrightarrow{\pi} X$ un haz vectorial de rango n y U un abierto de X. Una sección de E sobre U, es un morfismo $s : U \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ s = Id_U$. Denotamos por $\Gamma(U, E)$ el conjunto de secciones de E sobre U. Cuando $U = X$ decimos que $\Gamma(X, E)$ es el conjunto de secciones globales de E.

Observemos que la condición $\pi \circ s = Id_U$ implica que $s(x) \in E_x$ para todo $x \in U$. El conjunto $\Gamma(U, E)$ tiene de manera natural una estructura de $\mathbb{C}-$espacio vectorial, dada por las operaciones:
$$(s + t)(x) = s(x) + t(x) \qquad \text{y} \qquad (\lambda \cdot s)(x) = \lambda s(x),$$
para $s, t \in \Gamma(U, E)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 2.10. Sea $I_n = X \times \mathbb{C}^n$ el haz trivial sobre X. El morfismo $s_i : X \longrightarrow I_n$ dado por $s_i(x) = \{x\} \times (0, .., i, ..., 0)$ es una sección global no nula para todo $i = 1, ..., n$.

En general, conocer cuando un haz vectorial tiene secciones no es sencillo de determinar. La teoría de Brill-Noether estudia este problema (ver [2, Cap.V]).

2.0.1. Operaciones entre haces vectoriales

La representación de haces lineales con funciones de cociclos, nos permite extender operaciones de espacios vectoriales a haces vectoriales de la siguiente manera.

Definición 2.11. Sean E y F haces vectoriales sobre X de rango n y m con funciones de cociclos $\{\phi^E_{\alpha\beta}\}$ y $\{\phi^F_{\alpha\beta}\}$ respectivamente. Definimos los siguientes haces vectoriales sobre X.

a) El haz dual E^* con fibras $(E^*)_x = (E_x)^*$ y funciones de cociclos $\phi^{E^*}_{\alpha\beta} := ((\phi^E_{\alpha\beta})^{-1})^t$.

b) El haz vectorial suma directa $E \oplus F$ con fibras $(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$ y funciones de cociclos $\phi^{E\oplus F}_{\alpha\beta}$ dadas por

$$\phi^{E\oplus F}_{\alpha\beta} := \begin{pmatrix} \phi^E_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \phi^F_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

Diremos que un haz vectorial es **descomponible** si es suma directa de haces vectoriales, en otro caso diremos que el haz vectorial es **indescomponible**.

c) El haz producto tensorial $E \otimes F$ con fibras $(E \otimes F)_x = E_x \otimes F_x$ y funciones de cociclos $\phi^{E\otimes F}_{\alpha\beta} := \phi^E_{\alpha\beta} \otimes \phi^F_{\alpha\beta}$.

d) El haz determinante $\det(E)$ mediante las funciones de cociclos $\phi^{\det(E)}_{\alpha\beta} := \wedge^n(\phi^E_{\alpha\beta})$. Observe que el haz determinante es un haz lineal sobre X.

e) El haz vectorial $Hom(E, F)$ con fibras $Hom(E, F)_x = Hom(E_x, F_x)$ y funciones de cociclos $\phi^{Hom(E,F)}_{\alpha\beta} := (\phi^E_{\alpha\beta})^* \otimes \phi^F_{\alpha\beta}$. De la definición se sigue que $Hom(E, F) \cong E^* \otimes F$. Si $F = E$, el haz vectorial $End(E) := Hom(E, E)$ es el haz de endomorfismos de E.

Observación 2.12. El espacio de secciones globales del haz vectorial $Hom(E, F)$ está en correspondencia 1-1 con el conjunto de morfismos $f : E \longrightarrow F$, es decir,

$$\mathcal{H}om(E, F) = \Gamma(X, Hom(E, F)).$$

Si $\Gamma(X, End(E)) = \mathbb{C}$ diremos que E es un haz vectorial **simple**.

2.1. Propiedades de morfismos de haces vectoriales

En esta sección se darán algunas propiedades de los momorfismos entre haces vectoriales que serán de importancia en los capítulos siguientes. Recordemos que dados dos haces vectoriales $E \xrightarrow{\pi_1} X$ y $F \xrightarrow{\pi_2} X$, un morfismo entre haces vectoriales es un morfimos $f : E \longrightarrow F$ tal que $\pi_1 = \pi_2 \circ f$ y para cada $x \in X$, $f_x := f|_{E_x}$ es una transformación lineal.

Observe que la $\dim kernel(f_x)$, para $x \in X$, no tiene porque ser constante, ni siquiera locamente constante. Diremos que f es un **morfismo estricto** si la $\dim kernel(f_x)$ es locamente constante.

Proposición 2.13. *(Ver [3, Cáp.1]) Si $f : E \longrightarrow F$ es un morfismo estricto de haces vectorales entonces*

1. $Kernel(f) = \bigcup_{x \in X} kernel(f_x)$ *es un subhaz vectorial de* E.
2. $Imagen(f) = \bigcup_{x \in X} imagen(f_x)$ *es un subhaz vectorial de* F.
3. $Cokernel(f) = \bigcup_{x \in X} cokernel(f_x)$ *es un haz vectorial.*

Un complejo de haces vectoriales (E_i, δ_i), es una sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{i-2}} E_{i-1} \xrightarrow{\delta_{i-1}} E_i \xrightarrow{\delta_i} E_{i+1} \xrightarrow{\delta_{i+1}} E_{i+2} \xrightarrow{\delta_{i+2}} \cdots$$

de haces vectoriales E_i con $i \in \mathbb{Z}$ y morfismos δ_i tales que $\delta_{i+1} \circ \delta_i = 0$, es decir, $Im(\delta_i) \subset Ker(\delta_{i+1})$. Diremos que la sucesión es exacta si $Im(\delta_i) = Ker(\delta_{i+1})$.

Una sucesión exacta corta de haces vectoriales, es una sucesión exacta de la siguiente forma

$$\rho: \qquad 0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\delta_1} E \xrightarrow{\delta_2} E_2 \longrightarrow 0 \; .$$

donde 0 denota el haz vectorial cero sobre X. Observe que de la sucesión anterior se tiene que $Kernel(\delta_1) = 0$ y la $Imagen(\delta_2) = E_3$ por lo tanto δ_1 es un morfismo inyectivo y δ_2 es un morfismo suprayectivo.

Observación 2.14. El haz vectorial E en la sucesión exacta corta ρ, se le llama **una extensión** de E_2 por E_1.

Ejemplo 2.15. Sea E un haz vectorial sobre X y F subhaz vectorial de E. Existe una sucesión exacta corta de la forma

$$\rho: \qquad 0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E/F \longrightarrow 0$$

Por lo tanto E es una extensión de E/F por F.

Diremos que dos extensiones E y E' de F_2 por F_1 son equivalentes, si existe un isomorfismo de haces vectoriales $f : E \longrightarrow E'$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\rho: & 0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & F_2 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
\rho': & 0 \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "p'"] & F_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

donde id denota el morfismo identidad. Al conjunto de las clases de equivalencia de extensiones deF_2 por F_1 lo denotaremos por $Ext^1(F_2, F_1)$.

El siguiente teorema establece una correspondencia entre clases de extensiones de haces vectoriales y elementos en un espacio vectorial (ver ([9, Cáp.5])).

Teorema 2.16. *Sean F_1, F_2 haces vectoriales sobre X de dimensión n_1 y n_2 respectivamente. Existe una correspondencia 1-1 entre las clases de extensiones $Ext^1(F_2, F_1)$ y el primer grupo de cohomología $H^1(X, F_2^* \otimes F_1))$. La clase $F_1 \oplus F_2$ corresponde con el elemento 0 del grupo.*

Demostración: Probaremos que cada clase de extensión está en correspondencia con un único elemento en $H^1(X, Hom(F_2, F_1))$. Dada una extensión

$$\rho : \qquad 0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} F_2 \longrightarrow 0\,. \tag{2.2}$$

de F_2 por F_1, existe una cubierta abierta $\mathbf{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de X tal que $(\phi^E_{\alpha\beta})$, $(\phi^{F_1}_{\alpha\beta})$ y $(\phi^F_{\alpha\beta})$ son los cociclos asociados a E, F_1 y F_2 respectivamente. Por la observación 2.8, el 1-cociclo $(\phi^E_{\alpha\beta})$ tiene la siguiente forma

$$\phi^E_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \phi^{F_1}_{\alpha\beta} & k_{\alpha\beta} \\ 0 & \phi^{F_2}_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

donde $k_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathscr{M}_{n_1 \times n_2}(\mathcal{O}_X)(U_\alpha \cap U_\beta)$ (la gavilla de matrices con coeficientes funciones holomorfas de tamaño $n \times m$ sobre X). Observe que para un refinamiento $\mathbf{V}$ de $\mathbf{U}$, los morfismos $k_{\alpha\beta}$ inducen de manera natural morfismos $k'_{\alpha\beta}$ describiendo los 1-cociclos $\phi^E_{\alpha\beta}$ en $\mathbf{V}$. Por lo tanto, la extensión E está determinada por los morfismos $(k_{\alpha\beta})$.

Sean $\phi_{1\beta}$ y $\phi_{2\beta}$ trivializaciones de F_1 y F_2 en el abierto U_β respectivamente. Si el morfismo $\widetilde{k_{\alpha\beta}} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^{n_2} \longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^{n_1}$ es el morfismo asociados a $k_{\alpha\beta}$ entonces la composición $\phi^{-1}_{1\beta} \circ \widetilde{k_{\alpha\beta}} \circ \phi_{2\beta}$ define un elemento en $\Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, Hom(F_2, F_1))$, los cuales los denotaremos nuevamente por $k_{\alpha\beta}$.

$$\begin{tikzcd} F_2|_{U_\alpha \cap U_\beta} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{2\beta}"] & F_1|_{U_\alpha \cap U_\beta} \arrow[d, "\phi_{1\beta}"] \\ U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^{n_2} \arrow[r, "\widetilde{k_{\alpha\beta}}"] & U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^{n_1} \end{tikzcd}$$

Observemos que la colección de morfismos $(k_{\alpha\beta})$ no satisfacen las condiciones de cociclos, esto nos motiva a definir los morfismos $\sigma_{\alpha\beta} := (\phi^{F_1}_{\alpha\beta})^{-1} k_{\alpha\beta}$. Por lo anterior, cada morfismo $\sigma_{\alpha\beta}$ define una sección en $\Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, Hom(F_2, F_1))$ denotada nuevamente por $\sigma_{\alpha\beta}$. Veremos que la colección de morfismos $(\sigma_{\alpha\beta})$ definen un 1-cociclo en $H^1(X, Hom(F_2, F_1))$.

En el abierto $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$ se tiene la relación $\phi^E_{\alpha\gamma} = \phi^E_{\alpha\beta} \cdot \phi^E_{\beta\gamma}$. Por lo tanto, los morfismos $k_{\alpha\beta}$ satisfacen la relación

$$k_{\alpha\gamma} = \phi^{F_1}_{\alpha\beta} \cdot k_{\beta\gamma} + k_{\alpha\beta} \cdot \phi^{F_2}_{\beta\gamma} \tag{2.4}$$

Reescribiendo la relación 2.4 para los morfismos $\sigma_{\alpha\beta}$ se tiene lo siguiente

$$\sigma_{\alpha\gamma} = \sigma_{\beta\gamma} + (\phi^{F_1}_{\beta\gamma})^{-1} \sigma_{\alpha\beta} \phi^{F_2}_{\beta\gamma}.$$

Observe que en el abierto $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$, los morfismos $\sigma_{\alpha\beta}(x)$, $(\phi^{F_1}_{\beta\gamma})^{-1} \cdot \sigma_{\alpha\beta} \cdot \phi^{F_2}_{\beta\gamma}$ definen el mismo elemento en $\Gamma(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma, Hom(F_2, F_1))$. Por lo anterior, para cada

$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$, los morfismos $(\sigma_{\alpha\beta})$ satisfacen la relación $\sigma_{\alpha\gamma} = \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\gamma}$. Con lo cual, $[(\sigma_{\alpha\beta})]$ determina un elemento en $H^1(X, Hom(F_2, F_1))$. Por lo anterior, cada extensión $[\rho] \in Ext^1(F_2, F_1)$ determina un 1-cociclo $(\sigma_{\alpha\beta})$ en $H^1(X, Hom(F_2, F_1))$.

Sean E y E' extensiones isomorfas de F_2 por F_1. Para ver que la asignación anterior esta bien definida, probaremos que los 1-cociclos $[(\sigma_{\alpha\beta})]$, $[(\sigma'_{\alpha\beta})]$ son equivalentes. Consideremos los morfismos $(k_{\alpha\beta})$ y $(k'_{\alpha\beta})$ tales que determinan a las extensiones E y E' respectivamente. Como $E \sim E'$ existe un isomorfismo $f : E \longrightarrow E'$ tal que hace conmutar el diagrama 2.1. Por lo anterior, existen secciones $\theta_\alpha \in \mathscr{GL}_{n_1+n_2}(\mathcal{O}_X)(U_\alpha)$, tales que para todo $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ se tiene la relación

$$\theta_\alpha \phi^E_{\alpha\beta} = \phi^{E'}_{\alpha\beta}\theta_\beta. \tag{2.5}$$

Por lo tanto, los morfismos θ_α tienen la forma $\theta_\alpha = \begin{pmatrix} I_{n_1} & \lambda_\alpha \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}$, para alguna λ_α en $\mathscr{M}_{n_1 \times n_2}(\mathcal{O}_X)(U_\alpha)$. Por la relación 2.5, los morfismos $k_{\alpha\beta}$ en el abierto $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$ satisfacen la relación

$$k_{\alpha\beta} + \lambda_\alpha \phi^{F_2}_{\alpha\beta} = \phi^{F_1}_{\alpha\beta}\lambda_\beta + k'_{\alpha\beta}. \tag{2.6}$$

Las extensiones E y E' son equivalentes si y sólo si existen secciones λ_α en $\mathscr{M}_{n_1 \times n_2}(\mathcal{O}_X)(U_\alpha)$ tales que satisfacen 2.6. La condición de equivalencia anterior en términos de $\sigma_{\alpha\beta}$ se convierte en

$$\sigma_{\alpha\beta} + (\phi^{F_1}_{\alpha\beta})^{-1}\lambda_\alpha \phi^{F_2}_{\alpha\beta} = \lambda_\beta + \sigma'_{\alpha\beta}$$

Repitiendo los argumentos para el caso de los morfismos $k_{\alpha\beta}$, la colección de morfismos (λ_α) define un elemento en $\mathcal{C}^0(X, Hom(F_2, F_1))$. Por lo tanto, E y E' son equivalente si y sólo si $\sigma'_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta} = \lambda_\beta - \lambda_\alpha$, es decir, $[(\sigma_{\alpha\beta})] \sim [(\sigma'_{\alpha\beta})]$.

Observemos que si $[(\psi_{\alpha\beta})] \in H^1(X, Hom(F_2, F_1))$, los morfismos $k_{\alpha\beta} := \phi^{F_1}_{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta}$ satisfacen la relación 2.4. Por lo tanto, $(k_{\alpha\beta})$ definen una extensión en $Ext(F_2, F_1)$. $\square$

El teorema anterior es la herramienta principal para la clasificación de haces vectoriales sobre X de dimensión 2. El cual es uno de los objetivo de estudio del siguiente capítulo.

Note que las extensiones

$$\begin{array}{ll} \rho : & 0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} F_2 \longrightarrow 0 \\ \rho' : & 0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} F_2 \longrightarrow 0\ , \end{array}$$

pueden ser distintas y sin embargo los haces vectoriales E y E' ser isomorfos. Lo anterior motiva la siguiente definición

Definición 2.17. *Sean F_1 y F_2 haces lineales sobre X. Diremos que dos extensiones E, E' de F_2 por F_1 son isomorfas, si existen isomorfismos de haces vectoriales $f \in Hom(E, E')$, $\sigma_1 \in Aut(F_1)$ y $\sigma_2 \in Aut(F_2)$ tales que hacen conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \rho : & 0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\rho_1"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & F_2 \arrow[r] \arrow[d, "\rho_2"] & 0\ . \\ \rho' : & 0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "p'"] & F_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

Observación 2.18. *.*

1. Dos extensiones de haces vectoriales son isomorfas como extensiones si y sólo si son isomorfas como haces vectoriales.

2. El espacio $Ext^1(F_2, F_1)/Aut(F_1) \times Aut(F_2)$ parametriza el espacio de clases de equivalencia de isomorfismos de extensiones.

Recordemos que si F_2 y F_1 son haces vectoriales simples (Observación 2.12) entonces se tiene que $Aut(F_1) = \mathbb{C}^*$ y $Aut(F_2) = \mathbb{C}^*$. Esto motiva el siguiente resultado.

Teorema 2.19. *Sean F_1 y F_2 haces vectoriales simples sobre X de rango n_1 y n_2 respectivamente. El espacio $\mathbb{P}H^1(X, Hom(F_2, F_1))$ parametriza el conjunto de clases de equivalencia de isomorfismos de extensiones no triviales de F_2 por F_1.*

Demostración: Sea

$$\rho : \qquad 0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} L_2 \longrightarrow 0$$

una extensión de F_2 por F_1. Consideremos a $\mathbf{U} = \{U_\alpha\}$ cubierta abierta de X tal que $(\phi^E_{\alpha\beta})$, $(\phi^{F_1}_{\alpha\beta})$, $(\phi^{F_2}_{\alpha\beta})$ son los 1-cociclos asociados a E, F_1 y F_2 respectivamente. Por la observación 2.8, el 1-cociclo $\phi^E_{\alpha\beta}$ tiene la siguiente forma

$$\phi^E_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \phi^{F_1}_{\alpha\beta} & k_{\alpha\beta} \\ 0 & \phi^{F_2}_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

donde las funciones $k_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathscr{M}_{n_1 \times n_2}(\mathcal{O}_X)(U_\alpha \cap U_\beta)$. Más aún, los morfismos $\sigma_{\alpha\beta} := (\phi^{F_1}_{\alpha\beta})^{-1} k_{\alpha\beta} \in H^1(X, Hom(F_2, F_1))$ determinan a la extensión E (demostración del Teorema 2.16).

Si $\rho' : 0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} F_2 \longrightarrow 0$ es una extensión de F_2 por F_1 tal que E es isomorfo a E' entonces existen isomorfismos de haces vectoriales $f \in Hom(E, E')$, $\sigma_1 \in Aut(L_1)$ y $\sigma_2 \in Aut(L_2)$ tales que hacen conmutar el diagrama 2.7. Como F_1 y F_2 son simples existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $\rho_1(x) = ax$ y $\rho_2(y) = by$. Además existen morfismos $\theta_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{GL}(n_1 + n_2, \mathcal{O}_X))$ tales que para cada $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ satisfacen la relación

$$G'_{\alpha\beta}(x)\theta_\alpha(x) = \theta_\beta(x) G_{\alpha\beta}(x) \tag{2.8}$$

Dado que f satisface el diagrama 2.7, los morfismos θ_α tienen la siguiente forma

$$\theta_\alpha(x) = \begin{pmatrix} aI_{n_1} & \lambda_\alpha \\ 0 & bI_{n_2} \end{pmatrix}$$

donde I_n denota la matriz identidad y$\lambda_\alpha \in \mathscr{GL}_{n_1 \times n_2}(\mathcal{O}_X)(U_\alpha)$. Por la ecuación 2.8, los morfismos $k_{\alpha\beta}$ satisfacen la siguiente relación

$$\phi^{F_1}_{\alpha\beta} \lambda_\alpha + b k'_{\alpha\beta} = a k_{\alpha\beta} + \lambda_\beta \phi^{F_2}_{\alpha\beta} \tag{2.9}$$

Por lo tanto, reescribiendo la ecuación 2.9 en términos de los morfismos $\sigma_{\alpha\beta}$, se tiene que dos extensiones son isomorfas si y sólo si existen funciones $(\lambda_\alpha) \in \Gamma(\mathbf{U}, Hom(F_2, F_1))$ tales que

$$a\sigma_{\alpha\beta} - b\sigma'_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha + (\phi^{F_1}_{\alpha\beta})^{-1}\lambda_\beta\phi^{F_2}_{\alpha\beta}$$

es decir, $a[\sigma_{\alpha\beta}] = b[\sigma'_{\alpha\beta}]$. Por lo tanto, las extensiones ρ y ρ' son isomorfas si y sólo si definen el mismo elemento en el espacio proyectivo $\mathbb{P}H^1(X, Hom(F_2, F_1))$. $\square$

Capítulo 3

Clasificación de haces vectoriales

En este capítulo presentamos la clasificación de haces vectoriales de rango 1 y 2 sobre una superficie de Riemann compacta. En la primera sección definimos problema y espacio moduli. En la segunda sección clasificamos los haces lineales y en la sección 3 presentamos la clasificación de haces vectoriales de rango 2. En este capítulo X denotará una superficie de Riemann compacta.

3.1. Espacios moduli

Un problema de clasificación ó un problema moduli consiste de los siguientes objetos (ver [17, Cáp.1]):

a) Una colección de objetos A.

b) Una relación de equivalencia en la colección A, denotada por $\sim$ y

c) concepto de familias de objetos en A parametrizados por una variedad S.

La definición de familia, dependerá del problema a tratar. En general, toda familia A, debe satisfacer las siguientes propiedades:

a) Una familia de objetos de A parametrizada por un punto es un objeto en A.

b) Existe una noción de relación de equivalencia en familias parametrizadas por S, la cual se reduce a la relación dada en A cuando $S = \{pt\}$. Denotaremos esta relación por $\approx$.

c) Para cualquier morfismo $\phi : S' \longrightarrow S$ y cualquier familia F parametrizada por la variedad S, existe una familia inducida $\phi^* F$ parametrizada por la variedad S'. Además esta operación debe satisfacer propiedades funtoriales

$$(\phi \circ \phi')^* = \phi'^* \circ \phi^* \qquad \text{y} \qquad id_S^* = id$$

y es compatible con la relación $\approx$, es decir,

$$F \approx F' \Rightarrow \phi^* F \approx \phi^* F'.$$

Dado un problema moduli, estamos interesados en darle una estructura geométrico-algebraica al conjunto de clases de equivalencias $A/\sim$, de tal manera que refleje el concepto de familias de objetos en A parametrizados por una variedad. A continuación, daremos la definición de espacios moduli siguiendo [17]. La definición de espacios moduli puede ser dada a nivel funtorial, sin embargo para nuestro fin, trabajaremos sobre la siguiente definición.

Definición 3.1. Un **espacio moduli fino** para un problema moduli dado, consiste de una pareja $(M,\mathcal{U})$ donde M es una variedad de tal manera que $M \cong A/\sim$ y $\mathcal{U}$ es una familia parametrizada por M, tal que para toda familia F parametrizada por una variedad S, existe un único morfismo $\phi : S \longrightarrow M$ tal que $X \approx \phi^*\mathcal{U}$. A la familia $\mathcal{U}$ se le llama una **familia universal** del problema dado.

Observación 3.2. Dado un problema moduli, no necesariamente existe la familia universal, en este caso a M se le llama un espacio moduli grueso.

Ejemplo 3.3. *(ver [17])* Sea $A = \{V \subset \mathbb{P}^n : V \text{ es una hipersuperficie de grado } d\}$. Consideremos en A la relación de equivalencia dada por la igualdad, es decir, $V \sim V'$ si y sólo si $V = V'$. Definimos una familia de hipersuperficies de grado d parametrizada por una variedad S como una pareja (L, a) donde L es un haz lineal sobre S y a es un conjunto de índices

$$a = (a_{i_0 \dots i_n} : i_j \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, i_0 + \cdots + i_n = d)$$

de secciones de L tal que para todo $s \in S$. Denotamos por $(L, a)_s$ a la hipersuperficie definida por el polinomio homogéneo distinto de cero $f_{a,s}$, dado por

$$f_{a,s} := \sum a_{i_0 \dots i_n}(s) X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}.$$

Dos familias (L, a) y (L', a') parametrizadas por S son isomorfas si existe un isomorfismo de haces lineales $h : L \longrightarrow L'$ tal que $h(a) = a'$. Esta relación en familias, coincide con la relación en A para familias parametrizadas por un punto. Más aún, si $\phi : S' \longrightarrow S$ es un morfismo de variedades y (L, a) es una familia parametrizada por S, es posible construir una familia (ϕ^*L, ϕ^*a) parametrizada por S' ([3, Cáp.1]).

Toda hipersuperficie de grado d es representada por un polinomio de la forma

$$\sum b_{i_0 \dots i_n} X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n} \qquad i_0 + \cdots + i_n = d. \tag{3.1}$$

Si consideramos los coeficientes $b_{i_0 \dots i_n}$ como coordenadas homogéneas en un espacio proyectivo $\mathcal{P}$ entonces el polinomio en 3.1 define una familia de hipersuperficies de grado d parametrizada por P. En este caso, la familia esta dada por $\mathcal{U} = (H, a_P)$, donde H es el haz hiperplano en $\mathcal{P}$. Para una familia (L, a) parametrizada por S, las secciones $a_{i_0 \dots i_n}$ de L definen un morfismo $\phi : S \longrightarrow \mathcal{P}$ tal que $(L, a) \approx \phi^*\mathcal{U}$. Por lo tanto $(\mathcal{P}, H)$ es un espacio moduli fino de este problema en particular.

3.2. Clasificación de haces lineales

Por el Teorema 2.4 existe una correspondencia entre haces lineales y 1-cociclos en el grupo $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. La operación del grupo esta dado por la operación $\otimes$ y el inverso de un haz lineal L por L^*. En esta sección establecemos una estructura de variedad a el espacio de haces lineales, para ello seguimos las ideas presentadas en [8].

Consideremos la siguiente sucesión exacta (ver Ejemplo 1.22)

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathbf{e}} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

donde $\mathbf{e}(f) = \exp(2\pi i f)$, para cada $f \in (\mathcal{O}_X)_p$, $p \in X$.

La sucesión anterior induce la siguiente sucesión exacta de cohomología ([8, Teorema1])

$$0 \longrightarrow H^0(X, \underline{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{i^*} H^0(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\mathbf{e}^*} H^0(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{i^*} H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\mathbf{e}^*} H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{d} H^2(X, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \cdots$$

Como X es una superficie de Riemann compacta tiene dimensión 1 compleja. Por lo tanto, los términos $H^i(X, \mathcal{O}_X)$, $H^i(X, \mathcal{O}_X^*)$ y $H^j(X, \mathbb{Z})$ de la sucesión son cero para todo $i \geq 2$ y $j \geq 3$. Por lo anterior se tiene la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{d} H^2(X, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow 0. \tag{3.2}$$

Al ser X una superficie conexa, por la dualidad de Poincare ([11, Teorema.3.30]) tenemos que el grupo $H^2(X, \underline{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$.

El operador cofrontera $d : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow \mathbb{Z}$ asocia un haz lineal L con un entero $d(L)$, el cual es llamado el **grado** de L. Dados dos haces lineales L_1, L_2, el homomorfismo d satisface que $d(L_1 \otimes L_2) = d(L_1) + d(L_2)$ y $d(L^*) = -d(L)$. Denotamos por $Pic(X)$ el conjunto de clases de isomorfismos de haces lineales sobre X y por $Pic^d(X)$ el conjunto de haces lineales con grado d. Por lo anterior, se tiene que

$$Pic(X) \cong \mathbb{Z} \oplus Pic^0(X).$$

Observe que el conjunto $Pic^d(X)$ no tiene estructura de grupo excepto para $d = 0$.

Recordemos de [8, Cáp.7,8] que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio vectorial de dimensión g (g el género geometríco de X) y $H^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) \subset H^1(X, \underline{\mathbb{C}})$ forma una retícula de dimensión $2g$. Observemos que para género $g = 0$ el grupo $Pic^0(X)$ consiste del haz trivial. Por lo tanto, si $g \geq 1$ el cociente $H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ es un toro complejo el cual puede ser encajado en un espacio proyectivo (ver [8, Cáp.8]). De lo anterior, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.4. *([8, Lema.22]) Para una superficie de Riemann X con género $g \geq 1$, $Pic^0(X)$ tiene estructura de variedad abeliana de dimensión g, es decir, $Pic^0(X)$ es una variedad algebraica irreducible sobre $\mathbb{C}$ con una operación de grupo.*

Observación 3.5. *Dado un haz lineal L_0 de grado d existen morfismos naturales*

$$\phi_{L_0} : Pic(X)^d \longrightarrow Pic(X)^0 \qquad\qquad \psi_{L_0} : Pic^0(X) \longrightarrow Pic^d(X)$$

dados por $\phi_{L_0}(L) = L \otimes L^*$ y $\psi_{L_0}(L) = L \otimes L_0$.

El siguiente teorema establece una estructura de variedad en el conjunto de haces lineales de grado d. Una demostración de este resultado puede ser estudiado en [2, Cáp.IV].

Teorema 3.6. *El espacio $Pic^d(X)$ es el espacio moduli fino al problema de clasificación de haces lineales de grado d.*

3.3. Clasificación de haces de rango 2

En esta sección presentamos una clasificación de haces vectoriales de rango 2 al fijar ciertos invariantes. Para el caso de la línea proyectiva, el Teorema de Grothendieck (ver [18, Teo.2.1.1]) clasifica los haces vectoriales como suma directa de haces lineales. Por lo tanto, en esta sección estudiaremos el caso en que X tiene género $g \geq 1$. Dado un haz vectorial E sobre X de rango n, definimos el grado $\deg(E)$ de E como el grado del haz lineal $\det(E)$ y la pendiente $\mu(E)$ de E como el número racional

$$\mu(E) := deg(E)/rk(E).$$

Los haces vectoriales sobre superficies de Riemann compactas tienen secciones meromorfas no triviales (ver [9, Teo.9]), está propiedad nos permite el siguiente resultado.

Teorema 3.7. *([9, Teo.10]) Todo haz vectorial de rango $n > 1$ sobre una superficie de Riemann compacta tiene un subhaz lineal.*

Demostración: Sea E un haz vectorial de rango n sobre X. Consideremos una cubierta abierta de X, $\mathbf{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $(\phi^E_{\alpha\beta})$ es el 1-cociclo asociado a E. Sea $F = (F_\alpha)$ en $\Gamma(\mathbf{U}, \mathscr{M}^n_X)$ sección meromorfa no trivial de E. Podemos suponer que F_α es holomorfa en U_α excepto quizas en un punto. Sea z_α carta coordenada en U_α tal que el punto excepcional es $z_\alpha^{-1}(0)$, entonces existe un entero r_α tal que $z_\alpha^{r_\alpha} F_\alpha$ es holomorfa y no singular en todo U_α. Refinando $\mathbf{U}$ si es necesario, existen matrices no singulares $\psi_\alpha \in GL(m, \mathcal{O}_X)$ tales que $\psi_\alpha z_\alpha^{r_\alpha} F_\alpha = E_1$, donde $E_1 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n$.
Por lo anterior, E está determinado por el 1-cociclo $\phi'^E_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \phi^E_{\alpha\beta} \psi_\beta^{-1}$. La sección F queda representada en términos de los cociclos $\phi'^E_{\alpha\beta}$, por las funciones $F'_\alpha = \psi_\alpha F_\alpha = z_\alpha^{-r_\alpha} E_1$. Para cada intersección $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ se tiene la relación $z_\alpha^{r_\alpha} E_1 = \phi'^E_{\alpha\beta} z_\beta^{r_\beta} E_1$. Lo anterior nos dice que el 1-cociclo $\phi'^E_{\alpha\beta}$ tiene la siguiente forma

$$\phi'^E_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \phi_{\alpha\beta} & * & \cdots \\ 0 & * & \cdots \\ \cdots & * & \cdots \\ 0 & * & \cdots \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el 1-cociclo $(\phi_{\alpha\beta})$ representa un subhaz lineal L en E. $\square$

Dado un haz vectorial E de rango 2 sobre X, el teorema anterior nos garantiza la existencia de un subhaz lineal L en E. Por lo tanto, existe una sucesión exacta ρ de haces vectoriales de la siguiente forma

$$\rho : \qquad 0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E/L \longrightarrow 0\ . \tag{3.3}$$

Por lo anterior obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.8. *Todo haz vectorial de rango 2 sobre X es una extensión de dos haces lineales.*

Una forma de estudiar las propiedades de un haz vectorial de rango dos, es por medio de extensión de haces lineales. Fijando un haz lineal L sobre X, definimos el conjunto $A(L)$ de la siguiente manera

$$A^d(L) = \left\{ \begin{array}{c} E : E \text{ es un haz vectorial indescomponible },rk(E) = 2, \deg(E) = d \\ \text{y } \ L \xrightarrow{i} E\ , \text{ para algún morfismo inyectivo i.} \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

donde $E \sim E'$ si y sólo si E y E' son isomorfos. Por lo tanto, el conjunto $A^d(L)$ parametriza las clases de isomorfismos de haces vectoriales indescomponibles de rango 2 con grado d sobre X, tales que tienen por subhaz al haz lineal L. De aquí en adelante, nos concentraremos en el estudio del conjunto $A^d(L)$.

Recordemos del Teorema 2.16 que el espacio $Ext(L_2, L_1)$ parametriza las clases de extensiones de L_2 por L_1. Sin embargo, pueden existir dos extensiones no equivalentes y ser haces vectoriales isomorfos (Definición 2.17). De la Observación 2.18, el espacio $Ext(L_2, L_1)/Aut(L_1) \times Aut(L_2)$ parametriza el conjunto de clases de isomorfismos de extensiones de L_2 por L_1.

Dados dos haces lineales L_1 y L_2, definimos el conjunto $A(L_1, L_2)$ mediante

$$A(L_2, L_1) := \{E : E \text{ es haz vectorial indescomponible } rk(E) = 2, E \in Ext^1(L_2, L_1)\}/\sim .$$

donde $E \sim E'$ si y sólo si son isomorfos.

Observación 3.9. Todo haz lineal es simple. Por lo tanto, del Teorema 2.19 se tiene lo siguiente

$$A(L_2, L_1) = \mathbb{P}H^1(X, Hom(L_2, L_1)).$$

Un estudio mayor del espacio $A^d(L)$ es posible, al introducir la noción de estabilidad en haces vectoriales.

Definición 3.10. Diremos que E es una haz **semiestable** (resp. **estable**) si para cada subhaz vectorial propio $F \subseteq E$ se tiene que $\mu(F) \leq \mu(E)$ (resp. $\mu(F) < \mu(E)$). En otro caso diremos que E es un haz **inestable**.

Observación 3.11. Todo haz lineal es un haz estable.

Los siguientes resultados, son una herramienta en el estudio de las propiedades del espacio $A^d(L)$. Una demostración de ellos pueden ser estudiados en [13, Cáp.5].

Proposición 3.12. *Sean E y F haces vectoriales semiestables sobre X. Si $Hom(E,F) \neq 0$ entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$. Más aún si E y F son estables con la misma pendiente, se tiene que todo morfismo $f : E \longrightarrow F$ distinto de cero es un isomorfismo.*

Corolario 3.13. *Sea E un haz vectorial estable sobre X. Los únicos endomorfismos de E son múltiplos escalares del morfismo identidad.*

Proposición 3.14. *Dada una suceción exacta de haces vectoriales*

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

Se tiene que

a) $\mu(F) < \mu(G)$ *si y sólo si* $\mu(F) < \mu(E)$ *y* $\mu(E) < \mu(G)$.

b) $\mu(F) > \mu(G)$ *si y sólo si* $\mu(F) > \mu(E)$ *y* $\mu(E) > \mu(G)$.

c) $\mu(F) = \mu(G)$ *si y sólo si* $\mu(F) = \mu(E) = \mu(G)$.

Demostración:

a) Demostraremos que si $\mu(F) < \mu(G)$ entonces $\mu(F) < \mu(E)$ y $\mu(E) < \mu(G)$, la otra implicación es inmediata. Sea $\mu(E) = \deg(E)/rk(E)$ entonces $\mu(E) = \dfrac{\deg(F) + \deg(G)}{rk(F) + rk(G)}$. Como

$$\frac{\deg(F)}{rk(F)} = \mu(F) < \mu(G) = \frac{\deg(G)}{rk(G)},$$

entonces $rk(G)\deg(F) < rk(F)\deg(G)$. Tenemos que

$$(rk(F) + rk(G))\deg(F) < rk(F)(\deg(F) + \deg(G))$$
$$rk(G)(\deg(F) + \deg(G)) < (rk(G) + rk(F))\deg(G).$$

Por lo anterior, se tiene que $\mu(F) < \mu(E) < \mu(G)$.

La demostración de los incisos b) y c) prosiguen de manera similar. $\square$

Teorema 3.15. *Sea L un haz lineal sobre X de grado d_1 y $d \in \mathbb{Z}$. Si $d_1 \geq d$ entonces*

$$A^d(L) = \bigsqcup_{L' \in Pic^{d-d_1}(X)} A(L', L).$$

Demostración: Sea $E \in A^d(L)$, entonces existe un morfismo inyectivo $i : L \longrightarrow E$. Por lo anterior, $E \in Ext(E/i(L), L)$ y más aún, para cada $L' \in Pic^{d-d_1}(X)$ se tiene que el espacio $A(L', L) \subset A^d(L)$. Por lo tanto

$$A^d(L) = \bigcup_{L' \in Pic^{d-d_1}(X)} A(L', L).$$

Probaremos que la unión es disjunta. Supongamos que existen haces lineales L_1, L_2 en $Pic^{d-d_1}(X)$ tales que $A(L_1, L) \cap A(L_2, L) \neq \varnothing$. Veremos que $L_1 \cong L_2$.
Sea $E \in A(L_1, L) \cap A(L_2, L)$ entonces existen las siguientes sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p_1} L_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p_2} L_2 \longrightarrow 0$$

a) Si $d_1 > d$ entonces $\deg(L) > \deg(L_2) = \deg(L_1)$ (Proposición 3.14), por lo tanto $Hom(L, L_2) = 0$ (Proposición 3.12). De las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow L_1^* \otimes L_2 \longrightarrow E^* \otimes L_2 \longrightarrow L^* \otimes L_2 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow L_2^* \otimes L_2 \longrightarrow E^* \otimes L_2 \longrightarrow L^* \otimes L_2 \longrightarrow 0$$

se tiene que $Hom(L_1, L_2) \cong End(L_2) = \mathbb{C}$ (usando sucesiones largas de cohomología y $Hom(L, L_2) = 0$). Por la Proposición 3.12 se tiene que $L_1 \cong L_2$.

b) Supongamos que $d_1 = d$ entonces $d_1 = \deg(L_2) = \deg(L_1)$ (Proposición 3.14). Si $Hom(L, L_1) = 0$ ó $Hom(L, L_2) = 0$ repitiendo el análisis del inciso anterior se concluye que $L_1 \cong L_2$. Supongamos que $Hom(L, L_1) \neq 0$ y $Hom(L, L_2) \neq 0$. Por la Proposición 3.12 se tendría que $L \cong L_1$ y $L \cong L_2$, es decir, $L_1 \cong L_2$.

Por lo anterior, $A(L_1, L) \cap A(L_2, L) \neq \varnothing$ si y sólo si $L_1 \cong L_2$. Esto nos dice que la unión es disjunta y por lo tanto se tiene el resultado. □

La fórmula de Riemann-Roch y la dualidad de Serre, proporcionan herramientas para un mayor análisis del conjunto $A^d(L)$. Proseguimos a enunciar estos resultados, una prueba de ellos pueden ser estudiados en [9, Cáp.4] y [10, Cáp.2].

Teorema 3.16 (Dualidad de Serre)**.** *Sea X una superficie de Riemann compacta y E un haz vectorial sobre X. Se tiene que los espacios $H^1(X, E)$ y $H^0(X, K \otimes E^*)$ son canónicamente duales.*

Teorema 3.17 (Riemann-Roch)**.** *Para una superficie de Riemann compacta X de género g y un haz vectorial E sobre X, tenemos que*

$$\dim H^0(X, E) - \dim H^1(X, E) = \deg(E) + rk(E)(1 - g).$$

Por los resultados anteriores, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.18. *Sea L un haz lineal de grado d_1 y d un entero. Se tiene lo siguiente*

a) Si $d < 2(d_1 - g + 1)$ entonces $A^d(L) = \varnothing$.

b) Si $d = 2(d_1 - g + 1)$ entonces $A^d(L) = A(L \otimes k^*, L)$, donde k representa el haz canónico en X.

Demostración: Para demostrar $a)$ supongamos que $d < 2(d_1 - g + 1)$. Para todo haz lineal $L' \in Pic^{d-d_1}(X)$ tenemos que $\deg(L') < d_1 + 2(1-g)$. Por lo tanto, el haz lineal $k \otimes L' \otimes L^*$ tiene grado negativo. Esto nos dice que el espacio de secciones globales $H^0(X, k \otimes L' \otimes L^*)$ es trivial. Por dualidad de Serre tenemos que

$$\dim H^1(X, L \otimes (L')^*) = \dim H^0(X, k \otimes L' \otimes L^*).$$

Por lo anterior, $H^1(X, L \otimes (L')^*) =< \{L \oplus L'\} >$, es decir $A^d(L) = \varnothing$.

Para probar $b)$ supongamos que $d = 2(d_1 - g + 1)$ entonces el haz lineal $k \otimes L' \otimes L^*$ tiene grado cero. Observe que la dimensión del espacio $H^0(X, k \otimes L' \otimes L^*)$ es distinto de cero únicamente cuando $k \otimes L' \otimes L^*$ es isomorfo a el haz trivial. De lo anterior y por dualidad de Serre se tiene que $\dim H^1(X, L \otimes L_2) \neq 0$ si y sólo si $L' \cong L \otimes k^*$. Por lo tanto, $A^d(L) = A(L \otimes k^*, L)$. $\square$

Teorema 3.19. *Sea L un haz lineal de grado d_1 y $d \in \mathbb{Z}$.*

a) Si $d = 2d_1$ entonces todo $E \in A^d(L)$ es semiestable.

b) Si $d < 2d_1$ entonces todo $E \in A^d(L)$ es inestable.

Demostración:

a) Sea $E \in A^d(L)$, entonces existe $L_1 \in Pic^{d_1}(X)$ tal que E es una extensión de L_1. Por la Proposición 3.14, se tiene que $\mu(L_1) = \mu(E) = \mu(L)$, es decir, E no es estable. Supongamos que $E \in A^d(L)$ es un haz inestable, entonces existe un subhaz lineal L' de E tal que $\mu(E) < \mu(L')$.

$$\begin{tikzcd} & & L' \arrow[d, "j"] \arrow[dr, "p\circ j"] & & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "p"] & L_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

Si $p \circ j \neq 0$ entonces por la Proposición 3.12 se tendría que $\mu(L') \leq \mu(L_1)$. Por hipótesis tenemos las siguientes desigualdades

$$\mu(E) < \mu(L') \leq \mu(L_1) = \mu(E),$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto, $p \circ j = 0$. Si $p \circ j = 0$ entonces L' es un subhaz de $Ker(p) = i(L)$, de donde $L' \cong L$. Por lo anterior tenemos que

$$\mu(E) < \mu(L') = \mu(L_1) = \mu(E)$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto E no es inestable. Concluimos así, que E es un haz semiestable.

b) La proposición se sigue inmediatamente de la desigualdad

$$\mu(L) = d_1 > \frac{d}{2} = \mu(E).$$

Por lo tanto E es inestable.

$\square$

Para el caso $d > 2d_1$, no es posible concluir directamente alguna propiedad en E. Sin embargo, para todo haz lineal $L_1 \in Pic^{d-d_1}(X)$ se tiene que $\deg(L_1^* \otimes L) < 0$. Por lo tanto el espacio $H^0(X, L_1^* \otimes L) = 0$. Por el teorema de Riemann-Roch, es posible calcular la dimensión del espacio $H^1(X, L_1^* \otimes L)$ el cual está dado de la siguiente manera

$$\dim H^1(X, L_1^* \otimes L) = -\deg(L_1^* \otimes L) + g - 1.$$

Lo anterior nos dice que el espacio $A^d(L)$ es nunca nulo.

El siguiente ejemplo muestra distintos resultados para el caso $d > 2d_1$.

Ejemplo 3.20. Sea L un haz lineal sobre X y $E \in A^8(L)$. Por lo tanto existe una sucesión exacta corta de la siguiente manera

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} L_1 \longrightarrow 0 \tag{3.4}$$

donde L_1 es el haz cociente $E/i(L)$.

a) Supongamos que $\deg(L) = 3$ entonces $\deg(L_1^* \otimes L) = -2 < 0$. Por el Teorema de Riemann-Roch, la dimensión del espacio de extensiones $H^1(X, L_1^* \otimes L)$ está dado por

$$\dim H^1(X, L_1^* \otimes L) = -\deg(L_1^* \otimes L) + g - 1 = g + 1.$$

Lo anterior garantiza la existencia extensiones de L_1 por L distintas a $L \oplus L_1$. Por lo tanto $A^8(L) \neq \varnothing$.

Supongamos que E es un haz inestable entonces existe un subhaz lineal L' de E tal que $\mu(E) < \mu(L')$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & & L' \arrow[d, "j"] & & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "p"] & L_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Si el morfismo $p \circ j \neq 0$, la Proposición 3.12 implica que $\mu(L') \leq \mu(L_2)$. Con lo cual, de las siguientes desigualdades

$$4 = \mu(E) < \mu(L') \leq \mu(L_1) = 5,$$

se tiene que $\mu(L') = 5$. Por lo tanto $L' \cong L_2$(Proposición 3.12), es decir, $E \cong L \oplus L_1$, lo cual es una contradicción. Si $p \circ j = 0$ entonces L' es un subhaz de $i(L)$. Por lo tanto

$L' \cong i(L)$ y $4 < \mu(L') = \mu(i(L)) = 3$ lo cual es nuevamente una contradicción. De lo anterior se tiene que E no es inestable. Esto nos dice que todo $E \in A^8(L)$ es estable o semiestable.

Supongamos que E es un haz semiestable entonces existe un subhaz lineal L' de E tal que $\mu(L') = \mu(E)$. Afirmamos que $Hom(L', L_1) \neq 0$. Para ello consideremos el morfismo $p \circ j' : L' \longrightarrow L_1$ donde j' es el morfismo inclusión. Si $p \circ j' = 0$ entonces L' es subhaz de $i(L)$, con lo cual, se tiene que $L' \cong i(L)$ y $4 = \mu(L') = \mu(i(L)) = 3$, lo cual es una contradicción. Concluimos así que $0 \neq p \circ j' \in Hom(L', L_1)$.

b) Supongamos que $\deg(L) = -5$ entonces $\deg(L_1) = 11$. Si E es un haz inestable entonces tiene un subhaz lineal L' tal que $\mu(E) \leq \mu(L')$. Afirmamos que el grado de L' está acotado por $4 \leq \deg(L') \leq \deg(L_1)$.

Observemos que si $j : L' \longrightarrow E$ es el morfismo inclusión entonces el morfismo $p \circ j$ es distinto de cero, en caso contrario se tendría que el morfismo j induce un morfismo $j : L' \longrightarrow L$. Por la Proposición 3.12 se tendría que

$$4 = \mu(E) \leq \deg(L') \leq \deg(L) = -5$$

lo cual es una contradicción. Por lo anterior, $p \circ j \neq 0$ y por lo tanto

$$4 = \mu(E) < \deg(L') \leq \mu(L_1) = 11.$$

Para este caso en particular, es necesario una mayor información para concluir estabilidad en E.

3.3.1. Clasificación de extensiones isomorfas de haces lineales

Dados dos haces lineales L_1, L_2 sobre X, en esta sección estudiaremos propiedades del espacio $A(L_1, L_2)$. Narasimhan y Seshadri (ver [16]) demostraron la existencia de una extensión universal que parametriza las clases de extensiones de dos haces vectoriales sobre una superficie de Riemann. En esta sección, realizaremos la construcción de la extensión universal para haces lineales y con ello demostrar que $A(L_2, L_1)$ es un espacio moduli fino.

Definición 3.21. Sean L_1 y L_2 haces lineales sobre X. Una familia de extensiones de L_2 por L_1 parametrizadas por una variedad S, es una sucesión exacta

$$\rho : 0 \longrightarrow p_1^*(L_1) \longrightarrow \xi \longrightarrow p_1^*(L_2) \otimes p_2^*(L) \longrightarrow 0 \,.$$

de haces vectoriales sobre $X \times S$, donde p_1, p_2 son el morfismo proyección de $X \times S$ en X y S respectivamente, y L es un haz lineal sobre S.

Observación 3.22. Dada $\rho : 0 \longrightarrow p_1^*(L_1) \longrightarrow \xi \longrightarrow p_1^*(L_2) \otimes p_2^*(L) \longrightarrow 0$ una familia de extensiones parametrizada por la variedad S, para cada $s \in S$, la restricción de la sucesión exacta ρ al espacio $X \times \{s\}$ induce una extensión $\xi_s \in H^1(X, Hom(L_2^*, L_1))$

$$\rho_s : 0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow \xi_s \longrightarrow L_2 \longrightarrow 0 \,.$$

Por lo anterior, existe un morfismo natural

$$\begin{aligned} H^1(X \times S, p_1^*(L_1) \otimes p_1^*(L_2^*) \otimes p_2^*(L^*)) &\longrightarrow H^0(S, L \otimes R^1_{p_{2*}}(p_1^*(Hom(L_2, L_1)))) \\ \xi \mapsto \delta(\xi) : S &\longrightarrow R^1_{p_{2*}}(p_1^*(Hom(L_2, L_1))) \end{aligned}$$

donde para cada $s \in S$, $\delta(\xi)(s) = \xi_s$.

Teorema 3.23. *Sean L_1, L_2 haces lineales sobre X. Si $Hom(L_2, L_1) = 0$ entonces el conjunto $A(L_1, L_2)$ es un espacio moduli fino. Es decir, existe una familia parametrizada por $A(L_2, L_1)$ con propiedades universales.*

Demostración: Denotemos por T al espacio de extensiones $H^1(X, Hom(L_2, L_1))$ entonces por la Observación 3.9 se tiene que $A(L_1, L_2) = \mathbb{P}T$. Consideremos los morfismos de proyección p_1, p_2 del espacio $X \times \mathbb{P}T$ en X y $\mathbb{P}T$ respectivamente. Sea H el haz hiperplano sobre $\mathbb{P}T$.

Las i-ésimas imagenes directas $R^i_{p_2*}(p_1^*(Hom(L_2, L_1)) \otimes p_2^*(H))$ (ver [10]) del haz vectorial $p_1^*(Hom(L_2, L_1)) \otimes p_2^*(H)$ sobre $X \times \mathbb{P}T$ determinan un haz vectorial sobre $\mathbb{P}T$ (la dimensión del espacio $H^i(X, Hom(L_2, L_1))$ es independiente de cada $s \in \mathbb{P}T$, ver[10, Coro.12.9]). Por la sucesión espectral de Leray (ver [6]) se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^1(\mathbb{P}T, p_{2*}(p_1^*(Hom(L_2, L_1)) \otimes p_2^*(H))) \longrightarrow H^1(X \times \mathbb{P}T, p_1^*(Hom(L_2, L_1)) \otimes p_2^*(H))$$

$$\longrightarrow H^0(\mathbb{P}T, R^1_{p_{2*}}(p_1^*(Hom(L_2, L_1)) \otimes p_2^*(H))) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}T, p_{2*}(p_1^*(Hom(L_2, L_1)) \otimes p_2^*(H)))$$

Observemos que los haces vectoriales $R^i_{p_{2*}}(p_1^*(Hom(L_2,L_1)))$ tienen por fibras al espacio $H^i(X, Hom(L_2,L_1))$. Por hipótesis, $H^0(X, Hom(L_2,L_1)) = 0$ por lo tanto el haz vectorial $p_{2*}(p_1^*(Hom(L_2,L_1)) \otimes p_2^*(H))$ es el haz cero. Por lo anterior, los grupos de cohomología $H^1(\mathbb{P}T, p_{2*}(p_1^*(Hom(L_2,L_1)) \otimes p_2^*(H)))$ y $H^2(\mathbb{P}T, p_{2*}(p_1^*(Hom(L_2,L_1)) \otimes p_2^*(H)))$ son triviales. Por lo tanto,

$$H^1(X \times \mathbb{P}T, p_1^*(Hom(L_2,L_1)) \otimes p_2^*(H)) \cong H^0(\mathbb{P}T, R^1_{p_{2*}}(p_1^*(Hom(L_2,L_1)) \otimes p_2^*(H))).$$

El grupo $H^0(\mathbb{P}T, R^1_{p_{2*}}(p_1^*(Hom(L_2,L_1)) \otimes p_2^*(H)))$ satisface que

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}T, R^1_{p_{2*}}(p_1^*(Hom(L_2,L_1)) \otimes p_2^*(H))) &\cong H^0(\mathbb{P}T, R^1_{p_{2*}}(p_1^*(Hom(L_2,L_1))) \otimes H) \\ &\cong H^1(\mathbb{P}T, H^1(X, Hom(L_2,L_1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}T}) \otimes H) \\ &\cong H^1(X, Hom(L_2,L_1)) \otimes H^0(\mathbb{P}T, H) \\ &\cong End(T) \end{aligned}$$

($H^0(\mathbb{P}T, H) = H^1(X, Hom(L_2,L_1))^*$, ver [7]). Por lo anterior y la Observación 3.22, el elemento identidad $Id \in End(T)$ está en correspondencia con una extensión

$$\xi_0 \in H^1(X \times \mathbb{P}T, p_1^*(Hom(L_2,L_1)) \otimes p_2^*(H))$$

tal que para cada $t \in \mathbb{P}T$ se tiene que $\delta(\xi_0)(t) \in [t]$ (Observación 3.22).

Si F es una familia de extensiones de L_2 por L_1 parametrizada por una variedad S, entonces existe un morfismo $\phi : S \longrightarrow \mathbb{P}T$, dado por $\phi(s) = [F_s]$, más aún, $F \approx \phi^*(\xi_0)$. Por lo tanto, $(A(L_2,L_1), \xi_0)$ es espacio moduli fino. $\square$

Bibliografía

[1] Ahlfors, Lars V., *Complex Analysis*, McGraw-Hill, Inc. 1979.

[2] Albarello, Enrico; Cornalba, Maurizio; Griffiths, Phillip and Harris, J., *Geometry of Algebraic Curves*, Springer Science and Bussines Media, LLC, New York, 1985.

[3] Atiyah, Michael F., *K-Theory*, W. A. Benjamin, Inc. New York, Amsterdam, 1967.

[4] Forster, Otto, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, New York Inc. 1981.

[5] Farkas, Hershel M. and Kra, Irwin, *Riemann Surface*, Springer-Verlag, New york Heidelberg Berlin, 1980.

[6] Greenberg, Matthew, *Spectral Sequences*, http://www.math.mcgill.ca/goren/SeminarOnCohomology/specseq.pdf

[7] Griffiths, Phillip and Harris, Joseph, *Principles of Algebraic Geometry*, John wiley and Sons, Inc. 1978.

[8] Gunning, Robert C., *Lectures on Riemann Surface*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1966.

[9] Gunning, Robert C., *Lectures on Vector Bundles Over Riemann Surfaces*, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1967.

[10] Hartshorne, Robin, *Algebraic Geometry*, Graduate Text in Mathematics 52, Springer, Editorial Board, 1977.

[11] Hatcher, Allan, *algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.

[12] Lang, Serge, *Abelian Varieties*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1959.

[13] Le Potier, Joseph, *Lectures on Vector Bundles*, Cambridge studies in advanced mathematics 54, Editorial Board, 1997.

[14] Massey, William S., *Algrebaic Topology: An Introduction*, Graduate Text in Mathematics 56, Springer, Editorial Board, 1991.

[15] Miranda, Rick, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 5, Editorial Board, 1995.

[16] Narasimhan, M. and Seshadri, C.S., *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface.* Ann of Math 82, 1965.

[17] Newstead, Peter E., *Introduction to Moduli Problems and Orbits Spaces*, Tata Institute of Fundamental Researsch, 1978.

[18] Okonek, Christian, *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*, Springer Science+Business Media, LLC, 1952.

[19] Shafarevich, Igor R., *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1994.