Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

ESPACIOS PSEUDO-COARSE

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestría en Ciencias

con Orientación en

Matemáticas Básicas

Presenta

Lic. Jonathan Emmanuel Treviño Marroquín

Director de Tesis:

Dr. Antonio Peter Rieser

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto., 2 de agosto de 2019

Dedicado a mis padres

María del Carmen Marroquín Barrientos
& Abiel Treviño Torres.

Agradecimientos

A mi asesor, Doctor Antonio Peter Rieser, quien me otorgó mucho de su tiempo para lograr sacar adelante este trabajo y tuvo la paciencia necesaria para que continuáramos en el a pesar de las dificultades que se presentaron. Así como los miembros del jurado, Doctora Alejandra Trujillo Negrete y Doctor Noé Barcenas Torres, por sus observaciones al trabajo.

A mi familia y amistades que conocí en Monterrey, considero que gran parte de lo poco que he logrado hasta el momento se debe a que conocí a un conjunto de personas correctas, en el momento adecuado, las cuales fueron lo suficientemente insistentes para que intentara al menos un poco más. Espero esto no les sea suficiente.

Por último, a las instituciones que hicieron este proceso. CIMAT, por el apoyo moral, económico y profesional tanto de parte del personal docente, como el administrativo, realmente logran desarrollar un sentimiento de comunidad. CONACYT, por el apoyo brindado por medio de la beca no. 488354, esperemos vernos de nuevo.

Resumen

En el estudio del análisis topológico de datos se tiene la idea de buscar una estructura donde se puede estudiar los invariantes topológicos de un espacio a partir de una muestra de puntos. En este trabajo, introducimos a los espacios coarse al cual le quitamos un axioma, definiendo un nuevo tipo de espacio el cual buscamos estudiar.

Esta nueva estructura definida en un conjunto resulta ser bastante similar a los vértices y aristas en una gráfica, por lo que le hemos podido asignar una homotopía, como la que define Barcelo en uno de sus artículos sobre gráficas finitas, y una homología, del tipo Vietoris-Rips, logrando obtener resultados similares a sus análogos en espacios topológicos.

Índice general

Introducción

Con la idea de encontrar una estructura donde el análisis topológico de datos se desarrolle de manera más natural, es decir, donde se puedan estudiar invariantes topológicos de un espacio a partir de una nube de puntos, en Rieser (2019) se trabaja con espacios de Čech, también llamados espacios de cerradura. Siguiendo con esa intención, comenzamos a trabajar en la construcción de una estructura que cumpliera ciertas características a partir de los espacios mencionados. Sin embargo, observamos que esta nueva estructura podría ser aislada y estudiada por su cuenta.

La idea principal de esta tesis es introducir el concepto de espacio pseudo-coarse, así como analizar ciertas propiedades similares a las que se tienen en los espacios topológicos y semi-uniformes. En buena medida, las definiciones presentadas en este documento homologan los conceptos básicos en topología, por lo que estos resultarán bastante familiares.

En el primer capítulo introducimos los conceptos fundamentales de una estructura pseudo-coarse, tales como su categoría, las ideas de subespacio, producto cartesiano y de cociente a partir de una relación de equivalencia, o bien, desde una función sobreyectiva. También construimos un espacio pseudo-coarse desde un espacio métrico y un real no negativo, tal construcción nos da un espacio coarse en el límite de las estructuras inducidas.

En la búsqueda de algún invariante para este nuevo espacio, motivamos la definición de homotopía a partir de un artículo de Barcelo sobre gráficas finitas. Así, en el segundo capítulo, hablamos sobre esta relación de equivalencia, su no trivialidad y una secuencia larga exacta como la que se obtiene en los grupos de homotopía en topología.

Por último, nuevamente pensando en el parecido que tiene la estructura que estamos estudiando con las gráficas, en el tercer capítulo hablamos de una homología del tipo Vietoris-Rips, Además, discutimos que tan similar es a la homología generada por complejos de camarilla (clique complex) en gráficas finitas.

Motivando que el documento fuese autocontenido, se agregó el anexó sobre preliminares algebraicos. En ese anexo se habla sobre conjuntos, categorías, grupos y complejos de cadenas.

Capítulo 1

Espacios Pseudo-Coarse

Este capítulo tiene como objetivo principal introducir la definición de estructura pseudo-coarse para un conjunto X. En la Sección 1.1 se habla de lo que es una función bornologous, de la extensión producto de una estructura, y damos como ejemplo la construcción de un espacio pseudo-coarse a partir de un espacio métrico. Por otro lado, en la Sección 1.3, hablamos de como se define los cocientes y las uniones disjuntas en nuestros espacios, así como dar una construcción que va de espacios pseudo-coarse a coarse. Para terminar con el capítulo, en la Sección 1.5, se define el producto cartesiano arbitrario, y se estudian algunas propiedades de esa construcción.

1.1. Conceptos Fundamentales y Ejemplos

Empezaremos por fijar la notación que utilizaremos para la definición de nuestra estructura.

Definición 1.1.1
Sea X un conjunto. Denotemos por $\mathcal{P}(X)$ a la colección de todos los subconjuntos de X, entonces

- X^n *denotará* $X \times X \times \cdots \times X$ *con* n *factores.*
- $\Delta_X := \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ *será llamado* ***la diagonal de*** X.
- *Sea* $V \in \mathcal{P}(X \times X)$*, entonces* $V^{-1} := \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in V\}$ *será llamado* ***el inverso de*** V.
- *Sean* $V, W \in \mathcal{P}(X \times X)$*, entonces* $V \circ W := \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X, (x, z) \in V \text{ y } (z, y) \in W\}$ *será llamado* ***el producto de conjuntos de*** V ***y*** W.
- *Sean* Y *un conjunto,* $V \in \mathcal{P}(X \times X)$ *y* $f : X \to Y$*. Entonces*

  $$(f \times f)(V) := \{(f(x), f(y)) \in Y \times Y : (x, y) \in V\},$$

  que llamaremos ***la imagen de*** V ***por*** f.

Definición 1.1.2 (Espacio pseudo-coarse)
Llamaremos ***espacio pseudo-coarse*** *al par ordenado* $(X, \mathcal{V})$ *tal que* X *es un conjunto y* $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ *es una colección, que llamaremos* ***estructura pseudo-coarse****, que cumple que*

pc1. $\Delta_X \in \mathcal{V}$.

pc2. *Sea* $B \in \mathcal{V}$ *y* $A \subset B$*, entonces* $A \in \mathcal{V}$.

pc3. *Sean* $A, B \in \mathcal{V}$*, entonces* $A \cup B \in \mathcal{V}$.

pc4. *Sea* $A \in \mathcal{V}$*, entonces* $A^{-1} \in \mathcal{V}$.

Cuando sea claro en el contexto, expresaremos al espacio pseudo-coarse únicamente por X. A los elementos de la colección $\mathcal{V}$ les llamaremos ***conjuntos controlados por*** $\mathcal{V}$.

Sean $(X,\mathcal{V})$ y $(Y,\mathcal{W})$ espacios pseudo-coarse. Diremos que $f:(X,\mathcal{V})\to(Y,\mathcal{W})$ es una ***función bornologous en el sentido de pseudo-coarse*** *o bornologous, cuando el contexto lo permita, si $f\times f$ manda cada conjunto controlado por $\mathcal{V}$ a un conjunto controlado por $\mathcal{W}$, esto es, $(f\times f)(A)\in\mathcal{W}$ para cada $A\in\mathcal{V}$.*

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos estructuras pseudo-coarse de X, diremos que $\mathcal{V}'$ ***es más fino que*** *$\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}$* ***es más grueso que*** *$\mathcal{V}'$ si, y sólo si, $\mathcal{V}\subset\mathcal{V}'$.*

Además, si $\mathcal{V}$ cumple que

co5. Sean $A,B\in\mathcal{V}$, entonces $A\circ B\in\mathcal{V}$.

le llamaremos ***estructura coarse***, *$(X,\mathcal{V})$ será llamado* ***espacio coarse*** *[2.3; Roe (2003)].*

Observación: *Por el axioma pc3 y por inducción matemática, si N es un número natural y una colección de conjuntos controlados por $\mathcal{V}$, $\{A_1,\cdots,A_N\}$, entonces $\cup_{i=1}^{N}A_i\in\mathcal{V}$.*

Definición 1.1.3 (Extensión por producto de conjuntos)
Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse. Definamos la colección $\mathcal{V}^{EP}$ como los subconjuntos $C\in X\times X$ tal que están contenidos en algún conjunto de la forma $A\circ B$ con $A,B\in\mathcal{V}$, esto es,

$$\mathcal{V}^{EP}=\{C\subset X\times X:\exists A,B\in\mathcal{V}\ con\ C\subset A\circ B\}.$$

Al par ordenado $(X,\mathcal{V}^{EP})$ le llamaremos ***espacio extensión de $\mathcal{V}$ generado por el producto de conjuntos*** *o, simplemente* ***la extensión producto de $\mathcal{V}$***.

Para poder probar que $(X,\mathcal{V}^{EP})$ es un espacio pseudo-coarse, vamos a necesitar propiedades del inverso de conjuntos y producto de conjuntos.

Lema 1.1.4
Sean X un conjunto y $A,B\in\mathcal{P}(X\times X)$, entonces

(i) $A=(A^{-1})^{-1}$.

(ii) *Si $A\subset B$, entonces $A^{-1}\subset B^{-1}$.*

<u>Demostración:</u>
Sean X un conjunto y $A,B\in\mathcal{P}(X\times X)$, entonces

(i) Por definición tenemos que

$$\begin{aligned}(A^{-1})^{-1}:=&\{(x,y):(y,x)\in A^{-1}\}\\=&\{(x,y):(y,x)\in\{(a,b):(b,a)\in A\}\\=&\{(x,y):(x,y)\in A\}=A\end{aligned}$$

(ii) Sea $(x,y)\in A^{-1}$, entonces $(y,x)\in A$, por lo que $(y,x)\in B$, concluyendo que $(x,y)\in B^{-1}$. $\langle\clubsuit\rangle$

Lema 1.1.5
Sea X un conjunto y $A,B,C,D\in\mathcal{P}(X\times X)$, entonces

(i) $(A\circ B)^{-1}=B^{-1}\circ A^{-1}$.

(ii) $(A\circ B)\cup(C\circ D)\subset(A\cup C)\circ(B\cup D)$.

<u>Demostración:</u>
Sea X un conjunto y $A,B,C,D\in\mathcal{P}(X\times X)$, entonces

(i) Sea $(x,y) \in (A \circ B)^{-1}$, es decir, $(y,x) \in A \circ B$. Esto es equivalente a que existe $z \in X$ tal que $(y,z) \in A$ y $(z,x) \in B$, igual a que $(x,z) \in B^{-1}$ y $(z,y) \in A^{-1}$. Por definición eso es lo mismo que $(x,y) \in B^{-1} \circ A^{-1}$.

(ii) Sea $(x,y) \in (A \circ B) \cup (C \circ D)$, entonces $(x,y) \in A \circ B$ ó $(x,y) \in C \circ D$, por lo que existe $z \in X$ tal que $(x,z) \in A$ y $(z,y) \in B$, o $(x,z) \in C$ y $(z,y) \in D$, obteniendo que $(x,z) \in A \cup C$ y $(z,y) \in B \cup D$, o $(x,z) \in A \cup C$ y $(z,y) \in B \cup D$. Por lo tanto, $(x,y) \in (A \cup C) \circ (B \cup D)$. $\langle\clubsuit\rangle$

Observación: *En el punto (ii) del lema anterior, no es necesariamente cierta la otra inclusión. Sean A no vació, $D = A^{-1}$ y $B = C = \varnothing$, entonces $A \circ B = C \circ D = \varnothing$ y $(A \cup C) \circ (B \cup D) = A \circ A^{-1} \neq \varnothing$, por lo que $(A \circ B) \cup (C \circ D) \not\supseteq (A \cup C) \circ (B \cup D)$.*

Proposición 1.1.6
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse. Entonces, $(X, \mathcal{V}^{EP})$ es también un espacio pseudo-coarse.

<u>**Demostración:**</u>
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y $\mathcal{V}^{EP}$ como en Definición 1.1.3, entonces

pc1. Observemos que $\Delta_X = \Delta_X \circ \Delta_X$. Por ende $\Delta_X \in \mathcal{V}^{EP}$.

pc2. Sea $B \in \mathcal{V}^{EP}$ y $A \subset B$, entonces existen $A', B' \in \mathcal{V}$ tal que $A \subset B \subset A' \circ B'$, por lo que se sigue que $A \in \mathcal{V}^{EP}$.

pc3. Sea $A, B \in \mathcal{V}^{EP}$, entonces existen $A', B', A'', B'' \in \mathcal{V}$ tal que $A \subset A' \circ A''$ y $B \subset B' \circ B''$. Como $A' \cup B', A'' \cup B'' \in \mathcal{V}$, entonces $(A' \cup B') \circ (A'' \cup B'') \in \mathcal{V}^{EP}$. Luego, por el Lema 1.1.5, $A \cup B \subset (A' \cup B') \circ (A'' \cup B'')$. Por *pc2* concluimos que $A \cup B \in \mathcal{V}^{EP}$.

pc4. Sea $C \in \mathcal{V}^{EP}$, entonces existen $A, B \in \mathcal{V}$ tal que $C \subset A \circ B$, como $A^{-1}, B^{-1} \in \mathcal{V}$, por Lema 1.1.5, $C^{-1} \subset B^{-1} \circ A^{-1}$, concluyendo que $C^{-1} \in \mathcal{V}^{EP}$.

Por lo tanto $(X, \mathcal{V}^{EP})$ es un espacio pseudo-coarse. $\langle\clubsuit\rangle$

Observación: *Es claro que $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^{EP}$, se sigue de que $A \circ \Delta_X = A$ para cada $A \in \mathcal{P}(X \times X)$. Sea $\mathcal{PC}_X$ la colección de estructuras pseudo-coarse de X y $(\cdot)^{EP} : \mathcal{PC}_X \to \mathcal{PC}_X$ la operación definida por $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}^{EP}$, además definamos $\mathcal{V}^{nEP}$ a aplicarle n-veces esta operación a $\mathcal{V}$.*

De la observación anterior queda claro el porqué se le agregó el prefijo "pseudo" a nuestra nueva estructura. Al aplicarle el producto de conjuntos a los elementos controlados hace parecer que son controlados en el sentido de espacios coarse, pero lo que en realidad sucede es que caen en una estructura pseudo-coarse más fina. En un capítulo posterior, se dará un resultado para generar un espacio coarse a partir de esta operación.

A continuación haremos notar que la clase de los espacios pseudo-coarse con las funciones bornologous es una categoría.

Proposición 1.1.7
Sea $\mathcal{C}_{pc}$ tal que sus objetos $Ob(\mathcal{C}_{pc})$ es la clase de espacios pseudo-coarse y $Hom_{\mathcal{C}_{pc}}((X,\mathcal{V}),(Y,\mathcal{W}))$ sus morfismos, que es la colección de funciones bornologous desde $(X,\mathcal{V})$ hacia $(Y,\mathcal{W})$, para cada $(X,\mathcal{V})$, $(Y,\mathcal{W}) \in Ob(\mathcal{C}_{pc})$. Entonces, $\mathcal{C}_{pc}$ es una categoría.

<u>**Demostración:**</u>
Sea $\mathcal{C}_{pc}$ tal que sus objetos $Ob(\mathcal{C}_{pc})$ es la clase de espacios pseudo-coarse y $Hom_{\mathcal{C}_{pc}}((X,\mathcal{V}),(Y,\mathcal{W}))$ sus morfismos que es la colección de funciones bornologous desde $(X,\mathcal{V})$ hacia $(Y,\mathcal{W})$, para cada $(X,\mathcal{V})$, $(Y,\mathcal{W}) \in Ob(\mathcal{C}_{pc})$.

Sean $(X,\mathcal{X}), (Y,\mathcal{Y}), (Z,\mathcal{Z}), (W,\mathcal{W}) \in Ob(\mathcal{C}_{pc})$.

Ctg1. Empecemos por observar que si $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ y $g : (Y, \mathcal{Y}) \to (Z, \mathcal{Z})$, entonces $(f \times f)(A) \in \mathcal{Y}$ y $(g \times g)(B) \in \mathcal{Z}$ cuando A es controlado por $\mathcal{X}$ y B es controlado por $\mathcal{Y}$. Por lo que, $g \circ f : (X, \mathcal{X}) \to (Z, \mathcal{Z}) \in Hom_{\mathcal{C}_{pc}}((X, \mathcal{X}), (Z, \mathcal{Z}))$, porque por definición $(g \times g) \circ (f \times f) = (g \circ f \times g \circ f)(A) \in \mathcal{Z}$ si $A \in \mathcal{X}$.

Ctg2. Sea $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$, $g : (Y, \mathcal{Y}) \to (Z, \mathcal{Z})$ y $h : (Z, \mathcal{Z}) \to (W, \mathcal{W})$, entonces sabemos que $(h \times h) \circ (gf \times gf) = (h(gf) \times h(gf)) = ((hg)f \times (hg)f) = (hg \times hg) \circ (f \times f)$, obteniendo que los morfismos son asociativos.

Ctg3. Sea $i : (Y, \mathcal{Y}) \to (Y, \mathcal{Y})$ tal que $i(y) = y$, entonces i es bornologous. Además, para $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ y $g : (Y, \mathcal{Y}) \to (Z, \mathcal{Z})$, se sigue que $if = f$ y $gi = g$. Entonces para espacio pseudo-coarse $(Y, \mathcal{Y})$ existe la identidad.

Obteniendo que $\mathcal{C}_{pc}$ es una categoría. ⟨♣⟩

Los espacios semi-uniformes son trabajados en Čech (1966) y son una construcción que generaliza en algún sentido la noción de vecindades en un espacio topológico. Empecemos por dar la definición de filtro y de este tipo de espacios.

Definición 1.1.8
*Un **filtro** $\mathcal{U}$ en un conjunto S es una colección no vacía de subconjuntos de S con las propiedades:*

f1. si $A, A' \in \mathcal{U}$, entonces $A \cap A' \in \mathcal{U}$.

f2. si $A \in \mathcal{U}$ y $A \subset A'$, entonces $A' \in \mathcal{U}$.

*Una subcolección $\mathcal{U}_0$ de $\mathcal{U}$ es una **base de filtro** si, y solo si, cada elemento de $\mathcal{U}$ contiene algún elemento de $\mathcal{U}_0$.*

Definición 1.1.9 (Espacio Semi-Uniforme; Čech (1966), 23 A.3.)
*Sea X un conjunto y $\mathcal{U}$ un filtro en $X \times X$, llamaremos a $(X,\mathcal{U})$ **espacio semi-uniforme** si cumple que*

su1. cada elemento de $\mathcal{U}$ contiene a la diagonal.

su2. si $A \in \mathcal{U}$, entonces A^{-1} contiene un elemento de $\mathcal{U}$.

Como $\mathcal{U}$ es un filtro, la condición su2 puede ser reemplazada por

*su2'. si $A \in \mathcal{U}$, entonces $A^{-1} \in \mathcal{U}$. Llamaremos a $\mathcal{U}$ **estructura semi-uniforme de** X.*

Ahora bien, a partir de está definición podemos definir la siguiente estructura pseudo-coarse.

Definición 1.1.10 (Espacio pseudo-coarse inducido por un semi-uniforme)
Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio semi-uniforme, entonces definimos la colección

$$\mathcal{V}_{\mathcal{U}} := \{B \subset X \times X : B \subset A \quad \textit{para todo } A \in \mathcal{U}\}$$

*como la **estructura pseudo-coarse inducida por el espacio semi-uniforme** $\mathcal{U}$.*

Para proceder a mostrar que $\mathcal{V}_{\mathcal{U}}$ es una estructura pseudo-coarse de X necesitamos recordar el Lema 1.1.4.

Proposición 1.1.11
Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio semi-uniforme y $\mathcal{V}_{\mathcal{U}}$ la estructura pseudo-coarse inducida por el espacio semi-uniforme. Entonces, $(X, \mathcal{V}_{\mathcal{U}})$ es un espacio pseudo-coarse.

Demostración:
Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio semi-uniforme y $\mathcal{V}_{\mathcal{U}}$ la estructura pseudo-coarse inducida por el espacio semi-uniforme.

pc1. Por definición de espacio semi-uniforme tenemos que $\Delta_X \subset U$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Así, $\Delta_X \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}$.

pc2. Sea $B \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}$ y $B' \subset B$. Entonces $B' \subset B \subset A$ para cada $A \in \mathcal{U}$. Así $B' \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}$.

pc3. Sean $B, B' \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}$. Por definición tenemos que $B, B' \subset A$ para todo $A \in \mathcal{U}$, por lo que $B \cup B' \subset A \cup A = A$ para cada $A \in \mathcal{U}$. Así $B \cup B' \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}$.

pc4. Sea $B \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}$, entonces $B \subset A$ para cada $A \in \mathcal{U}$. Por el Lema 1.1.4, se tiene que $B^{-1} \subset A^{-1}$ para cada $A \in \mathcal{U}$, lo cuál es equivalente a que $B^{-1} \subset A$ para cada $A \in \mathcal{U}$ porque si $A \in \mathcal{U}$ implica que $A^{-1} \in \mathcal{U}$. Así $B^{-1} \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}$.

Obteniendo que $(X, \mathcal{V})$ cumple todos los axiomas para ser un espacio pseudo-coarse. ⟨♣⟩

Una observación interesante que une a los espacios pseudo-coarse y a los semi-uniformes es que son prácticamente duales. Se podría considerar que el primero observa el interior de un conjunto "frontera" en $X \times X$, mientras el otro observa el exterior. Esta observación motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.12 (Espacio semi-uniforme inducido por un pseudo-coarse)
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse, entonces definimos la colección

$$\mathcal{U}_{\mathcal{V}} := \{U \subset X \times X : V \subset U \quad \textit{para todo } V \in \mathcal{V}\}$$

*como la **estructura semi-uniforme inducida por el espacio pseudo-coarse**.*

Proposición 1.1.13
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y $\mathcal{U}_{\mathcal{V}}$ la estructura semi-uniforme inducida por el espacio pseudo-coarse. Entonces, $(X, \mathcal{U}_{\mathcal{V}})$ es un espacio semi-uniforme.

Demostración:
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y $\mathcal{U}_{\mathcal{V}}$ la estructura semi-uniforme inducida por el espacio pseudo-coarse. Entonces, procederemos a mostrar que $\mathcal{U}_{\mathcal{V}}$ es un filtro.

f1. Sea $A, A' \in \mathcal{U}_{\mathcal{V}}$, entonces $B \subset A$ y $B \subset A'$ para cada $B \in \mathcal{V}$, por lo que $B = B \cap B \subset A \cap A'$ para cada $B \in \mathcal{V}$. Así, $A \cap A' \in \mathcal{U}_{\mathcal{V}}$.

f2. Sea $A \in \mathcal{U}_{\mathcal{V}}$ y $A' \subset X \times X$ tal que $A \subset A'$. Por definición, $B \subset A \subset A'$ para cada $B \in \mathcal{V}$, concluyendo que $A' \in \mathcal{U}_{\mathcal{V}}$.

Ahora bien, veremos que cumple con los axiomas de estructura semi-uniforme.

su1. Dado que $\Delta_X \in \mathcal{V}$, entonces $\Delta_X \subset U$ para cada $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{V}}$.

su2'. Sea $A \in \mathcal{U}_{\mathcal{V}}$. Se sigue que $B^{-1} \subset A^{-1}$, equivalente a que $B \subset A^{-1}$, para cada $B \in \mathcal{V}$. Así, $A^{-1} \in \mathcal{U}_{\mathcal{V}}$.

Así, $(X, \mathcal{U}_{\mathcal{V}})$ es un espacio semi-uniforme. ⟨♣⟩

Con el resultado de la Definición 1.1.10, vamos a construir una colección particular de espacios pseudo-coarse, y posteriormente veremos que inducirán un espacio coarse. Nuestra construcción comenzará a partir de un espacio métrico (X, d) y un real no negativo r los cuales nos inducen un espacio semi-pseudométrico, para obtener así un espacio pseudo-coarse. Empezaremos por definir los nuevos conceptos.

Definición 1.1.14 (Semi-Pseudométrica; Čech (1966), 18 A.1.)
*Sea X un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una función, diremos que d es una **semi-pseudométrica para X** si satisface las siguientes condiciones:*

m1. Para cada $x \in X$, $d(x, x) = 0$.

m2. Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$.

Una semi-pseudométrica para X es una ***pseudométrica para*** *X si además*

m3. Para cada $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(x, z)$, es decir, cumple la desigualdad del triángulo.

Finalmente, una semi-pseudométrica y pseudométrica serán llamadas ***semi-métrica*** *y* ***métrica****, respectivamente, si también cumplen que*

m4. $d(x, y) = 0$ implica que $x = y$.

Un ***espacio semi-pseudométrico*** *es un par (X, d) donde X es un conjunto y d es una semi-pseudométrica para X. De manera similar para espacios semi-métricos, pseudométricos y métricos.*

Una manera de construir una semi-pseudométrica a partir de una métrica es la siguiente:

Definición 1.1.15
Sea (X, d) un espacio métrico y un real no negativo r. Definimos la función $d_r' : X \times X \to [0, \infty)$ tal que

$$d_r'(x, y) = 0 \text{ si } d(x, y) \leq r$$
$$d_r'(x, y) = 1 \text{ si } d(x, y) > r$$

con $(x, y) \in X \times X$.

Observación: *La función real d_r' cumple que $d_r'(x, x) = 0$ y $d_r'(x, y) = d_r'(y, x)$ por la simetría de la métrica. Por lo tanto, d_r' es un semi-pseudométrica en X.*

Siguiendo la referencia Čech (1966), en el ejemplo *23 A.7*, tenemos la siguiente construcción de un espacio semi-uniforme a partir de un espacio semi-pseudométrico.

Definición 1.1.16
Sea (X, d) un espacio semi-pseudométrico. Definimos $\mathcal{U}_d$ como la colección de todos los conjuntos que contengan algún conjunto de la forma $B_r = \{(x, y) : d(x, y) < r\}$, $r > 0$. A esta colección le llamaremos ***estructura semi-uniforme inducida por la semi-pseudométrica*** *d.*

Observación: *Sea (X, d) un espacio semi-pseudométrico, $\mathcal{U}_d$ es claramente un filtro. Esto es porque si $U, U' \in \mathcal{U}_d$, entonces existe r, r' tal que $U_r \subset U$ y $U_{r'} \subset U'$, obteniendo que $U_{\min\{r,r'\}} \subset U$ y $U_{\min\{r,r'\}} \subset U'$, cumpliendo f1 en Definición 1.1.8; de la misma definición, f2 se sigue de la cerradura sobre conjuntos que los contienen. A la vez, $\mathcal{U}_d$ es una estructura semi-uniforme, cumpliendo su1 por m1 de Definición 1.1.14, es decir, por anular la diagonal y su2 por m2 de Definición 1.1.14, es decir, por simetría.*

Sin embargo, en el caso de la semi-pseudométrica inducida por una métrica d, para $r \geq 0$, d_r' solamente toma los valores 0 y 1. Así, si $q \in (0, 1]$, entonces

$$\{(x, y) \in X \times X : d_r'(x, y) < q\} = \{(x, y) \in X \times X : d_r'(x, y) = 0\};$$

si $q \in (1, \infty)$, entonces $\{(x, y) \in X \times X : d_r'(x, y) < q\} = X \times X$. Concluyendo que $\mathcal{U}_{d_r'}$ es la colección de los conjuntos que contengan a $\{(x, y) \in X \times X : d_r'(x, y) = 0\}$.

A partir de este punto, vamos a denotar como $\mathcal{U}_r$ al espacio semi-uniforme inducido por d_r', es decir, $\mathcal{U}_r$ es la colección de todos los subconjuntos de $X \times X$ que contienen a $\{(x, y) \in X \times X : d_r'(x, y) = 0\}$. Además denotaremos por $\mathcal{V}_r$ al espacio pseudo-coarse inducido por $\mathcal{U}_r$. Es claro que $\{(x, y) \in X \times X : d_r'(x, y) = 0\} \in \mathcal{U}_r$ y $\{(x, y) \in X \times X : d_r'(x, y) = 0\} \subset U$ para cada $U \in \mathcal{U}_r$, por lo que $\mathcal{V}_r$ se reduce a la colección de subconjuntos de $X \times X$ tales que están contenidos en $\{(x, y) \in X \times X : d_r'(x, y) = 0\}$.

Observación: *Sea $r, r' \in [0, \infty)$ tal que $r \leq r'$. Entonces $\mathcal{V}_r \subset \mathcal{V}'_r$, que son las estructuras pseudo-coarse inducidas por un espacio métrico y los números no negativos r y r', respectivamente. Esto se cumple simplemente porque*

$$\begin{aligned}\{(x,y) \in X \times X : d'_r(x,y) = 0\} =& \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) \leq r\}\\ \subset& \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) \leq r'\}\\ =& \{(x,y) \in X \times X : d'_{r'}(x,y) = 0\}\end{aligned}$$

Ejemplo:
Sea d la métrica usual para $\mathbb{R}$, es decir, $d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces, la estructura pseudo-coarse inducida por d y un real no negativo r, $\mathcal{V}_r$, es igual a los conjuntos contenidos en $\{(x,y) \in X \times X : d(x,y) \leq r\}$. En $\mathbb{R}^2$ ese conjunto es igual a unión de rectas de pendiente uno que pasan por el punto $(p, 0)$ con $-\sqrt{2}r \leq p \leq \sqrt{2}r$, es decir

$$\bigcup_{-\sqrt{2}r \leq p \leq \sqrt{2}r} \{(x+p, x) : x \in \mathbb{R}\} \qquad \langle \diamond \rangle$$

Ejemplo:
Sea N un número natural y $[N] = \{1, 2, \cdots, N\}$ y d la métrica discreta, es decir, $d(x,y) = 0$ si $x = y$ y $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$. Entonces, la estructura pseudo-coarse inducida por d y un real no negativo r, $\mathcal{V}_r$ es igual a $\mathcal{P}([N] \times [N])$ si $r \geq 1$ y es igual a $\Delta_{[N]}$ si $r < 1$. $\langle \diamond \rangle$

1.2. Subespacios

Ahora procederemos a construir espacios pseudo-coarse a partir de otros del mismo tipo, así como se realiza en otras estructuras. El primer ejemplo natural es definir un subespacio partiendo de un subconjunto de X.

Definición 1.2.1 (Subespacio pseudo-coarse)
Sean $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y Y un subconjunto de X. Definamos la colección

$$\mathcal{V}_Y := \{B \cap (Y \times Y) : B \in \mathcal{V}\}.$$

*Al par ordenado $(Y, \mathcal{V}_Y)$ le llamaremos **subespacio pseudo-coarse de** X y cuando sea claro en el contexto lo expresaremos únicamente por Y.*

Para probar que $\mathcal{V}_{\mathcal{Y}}$ es efectivamente una estructura pseudo-coarse de Y, mostraremos la siguiente propiedad.

Lema 1.2.2
Sea X un conjunto, Λ un conjunto de índices y $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de elementos de $\mathcal{P}(X \times X)$, entonces se cumple que

(i) $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda)^{-1} = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^{-1}$.

(ii) $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda)^{-1} = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^{-1}$.

Demostración:
Sea X un conjunto, Λ un conjunto de índices y $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de elementos de $\mathcal{P}(X, \times X)$, entonces

(i) Sea $(x,y) \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda)^{-1}$, es lo mismo que decir que existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $(x,y) \in (A_{\lambda_0})^{-1}$, esto es, $(y,x) \in A_{\lambda_0}$. Esto es equivalente a que $(y,x) \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, igual a decir que $(x,y) \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^{-1}$.

(ii) Sea $(x,y) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda)^{-1}$, es lo mismo que decir que para todo $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $(x,y) \in (A_{\lambda_0})^{-1}$, esto es, $(y,x) \in A_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Esto es equivalente a que $(y,x) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, igual a decir que $(x,y) \in \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^{-1}$. ⟨♣⟩

Proposición 1.2.3
Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y Y un subconjunto de X. El subespacio $(Y,\mathcal{V}_Y)$ es en efecto un espacio pseudo-coarse

Demostración:
Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y Y un subconjunto de X. Tomemos $\mathcal{V}_Y$ como en la Definición 1.2.1.

pc1. Observemos que $\Delta_Y = \Delta_X \cap (Y\times Y)$. Por ende $\Delta_Y \in \mathcal{V}_Y$.

pc2. Sea $A \in \mathcal{V}_Y$ y $A' \subset A$. Por definición, existe $B \in \mathcal{V}$ tal que $A = B\cap(Y\times Y)$. Definamos $B' := A'\cap B$, el cual es controlado por $\mathcal{V}$, por ser subconjunto de B, y $B'\cap(Y\times Y) = A'\cap B\cap(Y\times Y) = A'\cap A = A'$, por lo que $A' \in \mathcal{V}_Y$.

pc3. Sean $A, B \in \mathcal{V}_Y$, entonces existen $A', B' \in \mathcal{V}$ tal que $A = A'\cap(Y\times Y)$ y $B = B'\cap(Y\times Y)$. Por propiedades de la unión e intersección de conjuntos tenemos que $A\cup B = (A'\cup W')\cap(B\times Y)$, por lo tanto $A\cup B \in \mathcal{V}_Y$.

pc4. Sea $A \in \mathcal{V}_Y$, entonces existe $A' \in \mathcal{V}_Y$ tal que $A = A'\cap(Y\times Y)$, luego por Lema 1.2.2 se tiene que $A^{-1} = (A\cap(Y\times Y)^{-1} = A'^{-1}\cap(Y\times Y)^{-1} = A'^{-1}\cap(Y\times Y)$. Así, $A^{-1} \in \mathcal{V}_Y$.

Por lo tanto, $(Y,\mathcal{V}_Y)$ es un espacio pseudo-coarse. ⟨♣⟩

1.3. Espacios Cocientes

En otro tema, una estructura inducida que suele ser de bastante interés es la estructura más fina, o gruesa, que se le puede asignar a un conjunto Y a través de un espacio X y una función $g : X \to Y$ sobreyectiva para que g sea en algún sentido "continua". Para satisfacer esta necesidad, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.3.1 (Estructura pseudo-coarse inducido por una función)
Sean $(X,\mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse, Y un conjunto, y $g : X \to Y$ una función sobreyectiva, entonces definimos

$$\mathcal{V}_g := \{(g\times g)(V) : V \in \mathcal{V}\}.$$

*A está colección le llamaremos la **estructura pseudo-coarse cociente inducida por** g.*

Proposición 1.3.2
Sean $(X,\mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse, Y un conjunto y $g : X \to Y$ una función sobre. Entonces $(Y,\mathcal{V}_g)$ es un espacio pseudo-coarse. Además, $\mathcal{V}_g$ es la estructura pseudo-coarse más gruesa que logra hacer bornologous a g.

Demostración:
Sean $(X,\mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse, Y un conjunto y $g : X \to Y$ una función sobre. Si $\mathcal{V}_g$ es definido como en Definición 1.3.1, entonces:

pc1. Dado que g es sobre, entonces $g(X) = Y$, por lo que $(g \times g)(\Delta_X) = \Delta_Y$, obteniendo que $\Delta_Y \in \mathcal{V}_g$.

pc2. Sea $B \in \mathcal{V}_g$ y $A \subset B$. Entonces, existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $(f \times f)(W) = B$, por lo que para cada $(x, y) \in A$, existen $(x', y') \in W$ tal que $g(x') = x$ y $g(y') = y$ y definimos

$$A_g := \{(x, y) \in W : (g \times g)(x, y) \in A\}.$$

Por definición $A_g \subset W$, por lo que $A_g \in \mathcal{V}$, y $(g \times g)(A_g) = A$, por ende $A \in \mathcal{V}_g$.

pc3. Sean $A, B \in \mathcal{V}_g$. Entonces, existen $A', B' \in \mathcal{V}$ tal que $(g \times g)(A') = A$ y $(g \times g)(B') = B$. Así $A \cup B = (g \times g)(A') \cup (g \times g)(B') = (g \times g)(A' \cup B')$, por lo que $A \cup B \in \mathcal{V}_g$.

pc4. Sea $A \in \mathcal{V}_g$, entonces existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $(g \times g)(A) = W$, observemos que

$$\begin{aligned}(g \times g)(A^{-1}) =&\{(x, y) : \exists (x', y') \in A^{-1}, (g \times g)(x', y') = (x, y)\}\\ =&\{(x, y) : \exists (y', x') \in A, (g \times g)(x', y') = (x, y)\}\\ =&\{(x, y) : \exists (y', x') \in A^{-1}, (g \times g)(y', x') = (y, x)\}\\ =&((g \times g)(A))^{-1}.\end{aligned}$$

Por lo que $\mathcal{V}_g$ es efectivamente una estructura para Y.

Por definición, g es bornologous si, y solo si, para cada $A \in \mathcal{V}$ se cumple que $(g \times g)(A) \in \mathcal{V}_g$, esto es, g es bornologous si, y solo si, $\{(g \times g)(A) : A \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{V}_g$. Sin embargo, por definición $\{(g \times g)(A) : A \in \mathcal{V}\} = \mathcal{V}_g$, por lo que se sigue que es la estructura más gruesa que permite que g sea una función bornologous. $\langle\clubsuit\rangle$

Observación: *El lector podrá recordar que en los espacios topológicos, una topología cociente inducida por una función g sobreyectiva establecía en Y el espacio topológico más fino que hiciera a g continua. En el sentido de espacios pseudo-coarse, nuestra noción de continuidad lo da las funciones bornologous, por lo que haremos notar que el resultado anterior nos da lo opuesto, es decir, la estructura inducida es la más gruesa que hace a la función g continua.*

Teorema 1.3.3
Sean $(Y, \mathcal{V}_g)$ un espacio pseudo-coarse cociente inducido por una función g de X sobre Y y $(Z, \mathcal{Z})$ un espacio pseudo-coarse. Una función arbitraria $f : Y \to Z$ es bornologous si, y solamente si, $f \circ g : X \to Z$ es bornologous.

Demostración:
Sea $(Y, \mathcal{V}_g)$ un espacio pseudo-coarse cociente inducido por una función g de X sobre Y, $(Z, \mathcal{Z})$ un espacio pseudo-coarse y $f : Y \to Z$ una función.

($\Rightarrow$) Sea f bornologous y A un elemento controlado por $\mathcal{V}$, entonces por definición $(g \times g)(A) \in \mathcal{V}_g$, por lo que $(f \times f)(g \times g)(A) = (f \circ g \times f \circ g)(A)$ es un elemento controlado por $\mathcal{Z}$.

($\Leftarrow$) Sea $f \circ g$ bornologous y $A \in \mathcal{V}_g$. Entonces, existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $(g \times g)(W) = A$. Así $(f \times f)(A) = (f \circ g \times f \circ g)(W) \in \mathcal{Z}$, concluyendo que f es bornologous. $\langle\clubsuit\rangle$

Uno de los conceptos más importantes en topología es el poder “pegar” un espacio topológico por medio de una relación de equivalencia. La siguiente definición buscar ser un análogo de la categoría pseudo-coarse.

Definición 1.3.4 (Espacio cociente pseudo-coarse)
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Sea $(x, y), (x', y') \in X \times X$, entonces $(x, y) \sim (x', y')$ si, y solamente si, $x \sim x'$ y $y \sim y'$. Denotamos por $[x, y]$ a la clase de equivalencia de (x, y). Así, definimos para $A \subset X \times X$,

$$[A] := \{[x, y] : (x, y) \in A\},$$

por lo que podemos definir la colección

$$\mathcal{V}/ \sim := \{[B] : B \in \mathcal{V}\}.$$

*Al par ordenado $(X/ \sim, \mathcal{V}/ \sim)$ le llamaremos el **espacio cociente de X por la relación de equivalencia** $\sim$, donde $[x]$ es la clase de equivalencia de $x \in X$ y $X/ \sim := \{[x] : x \in X\}$.*

Proposición 1.3.5
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Entonces, $\mathcal{V}/ \sim$ es una estructura pseudo-coarse en $X/ \sim$.

Demostración:
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Entonces,

pc1. Observemos que por definición $[\Delta_X] = \{[x, x] : x \in X\} = \Delta_{X/\sim}$, por lo que $\Delta_{[X]} \in \mathcal{V}/ \sim$.

pc2. Sea $A \in \mathcal{V}/ \sim$ y $B \subset A$. Entonces existe $A' \in \mathcal{V}$ tal que $[A'] = A$, por lo que podemos definir el conjunto

$$B' := \{(x, y) \in A' : [x, y] \in B\}.$$

Por la forma en que se construyó, B' cumple que es un subconjunto de A' y $[B'] = B$. Así, $B \in \mathcal{V}/ \sim$.

pc3. Sea $A, B \in \mathcal{V}/ \sim$. Entonces existen $A', B' \in \mathcal{V}$ tal que $A = [A']$ y $B = [B']$. Así,

$$\begin{aligned}[V \cup W] =& \{[x, y] : (x, y) \in A' \cup B'\} \\ =& \{[x, y] : (x, y) \in A'\} \cup \{[x, y] : (x, y) \in B'\} \\ =& [A'] \cup [B'],\end{aligned}$$

lo que implica que $A \cup B \in \mathcal{V}/ \sim$.

pc4. Sea $A \in \mathcal{V}/ \sim$. Entonces existe $A' \in \mathcal{V}$ y, además,

$$\begin{aligned}[A'^{-1}] =& \{[x, y] : (x, y) \in A'^{-1}\} \\ =& \{[x, y] : (y, x) \in A'\} \\ =& [A']^{-1}.\end{aligned}$$

Por lo que, $A^{-1} \in \mathcal{V}/ \sim$.

Concluyendo que $\mathcal{V}_\sim$ es una estructura pseudo-coarse en $[X]$. ⟨♣⟩

Proposición 1.3.6
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse, $\sim$ una relación de equivalencia en X, y $p : X \to X/ \sim$ una función tal que $x \mapsto [x]$. Entonces, $\mathcal{V}/ \sim = \mathcal{V}_p$.

Demostración:
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse, $\sim$ una relación de equivalencia en X, y $p : X \to X/ \sim$ una función tal que $x \mapsto [x]$. Entonces,

($\subset$) Sea $A \in \mathcal{V}/\sim$, entonces existe $A' \in \mathcal{V}$ tal que $A = [A']$. Además, $[A'] = (p \times p)(A')$, por lo que $(p \times p)(A') = A$, concluyendo que $A \in \mathcal{V}_p$.

($\supset$) Sea $A \in \mathcal{V}_p$, entonces existe $A' \in \mathcal{V}$ tal que $(p \times p)(A') = A$. Por la definición de p, $(p \times p)(A') = [A']$, por lo que $(p \times p)(A') = A$, concluyendo que $A \in \mathcal{V}/\sim$. $\langle\clubsuit\rangle$

1.4. Espacio Coarse Inducido por Espacios Pseudo-Coarse

Para llegar a observar que el límite directo categórico de cierto tipo de espacios pseudo-coarse es un espacio coarse, tenemos que empezar por definir la estructura pseudo-coarse en una unión disjunta de espacios pseudo-coarse.

Definición 1.4.1
Sea Λ un conjunto de índices y $\{(X_\lambda, \mathcal{V}_\lambda)\}$ una colección de espacios pseudo-coarse indexados por Λ, entonces definimos la ***estructura pseudo-coarse de unión disjunta para*** *$\sqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, denotada por $\sqcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$, como la colección de conjuntos contenidos en algún conjunto de la forma*

$$\{(x_\alpha, x'_\alpha) : (x_\alpha, x'_\alpha) \in B_\alpha, \alpha \in \Lambda\},$$

dónde $B_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$, el cuál denotamos por $\sqcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$.

Proposición 1.4.2
Sea Λ un conjunto de índices, $\{(X_\lambda, \mathcal{V}_\lambda)\}$ una colección de espacios pseudo-coarse indexados por Λ y $\sqcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$ la estructura pseudo-coarse de unión disjunta para $\sqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Entonces, $(\sqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \sqcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda)$ es un espacio pseudo-coarse.

<u>**Demostración:**</u>
Sea Λ un conjunto de índices, $\{(X_\lambda, \mathcal{V}_\lambda)\}$ una colección de espacios pseudo-coarse indexados por Λ y $\sqcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$ la estructura pseudo-coarse de unión disjunta para $\sqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Entonces,

pc1 Observemos que $\Delta_{\sqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda} = \sqcup_{\lambda\in\Lambda}\Delta_\lambda \in \sqcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$.

pc2 Sea $A \in \sqcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$ y W subconjunto de A, entonces existe $\sqcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ con $A_\lambda \in \mathcal{V}_\lambda$ tal que $W \subset A \subset \sqcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Así $W \in \sqcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$.

pc3 Sean $A, W \in \vee_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$, entonces existen $\sqcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ y $\sqcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$ con $A_\lambda, W_\lambda \in \mathcal{V}_\lambda$ tal que $A \subset \sqcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ y $W \subset \sqcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$. Así que $A \cup W \subset \sqcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda \cup W_\lambda)$, concluyendo que $A \cup W \in \sqcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$.

pc4 Sea $A \in \sqcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$, entonces existe $\sqcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ con $A_\lambda \in \mathcal{V}_\lambda$ tal que $A \subset \sqcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Así

$$A^{-1} \subset (\sqcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^{-1} = \sqcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda)^{-1},$$

concluyendo que $A^{-1} \in \sqcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$.

Por lo tanto, $(\vee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \vee_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda)$ es un espacio pseudo-coarse. $\langle\clubsuit\rangle$

Para mostrar que el espacio pseudo-coarse anterior será el límite de alguna familia de espacios pseudo-coarse, tomaremos algunas definiciones y resultados de Sección A.1 y Sección A.2.

Definición 1.4.3
Sea Λ un conjunto dirigido. Llamaremos a $\{(X_\alpha, \mathcal{V}_\alpha), f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema dirigido de espacios pseudo si es un sistema dirigido de conjuntos, Definición A.1.4, y $(X_\alpha, \mathcal{V}_\alpha)$ son espacios pseudo-coarse para cada $\alpha \in \Lambda$. A su vez, definimos objetivo y objetivo universalmente repelente como en Definición A.2.2 en la categoría de espacios pseudo-coarse.

Lema 1.4.4
Sea Λ un conjunto dirigido, $\{(X_\alpha, \mathcal{V}_\alpha), f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema dirigido de espacios pseudo-coarse y $\sim$ una relación de equivalencia tal que para $x^\alpha \in X^\alpha$ y $x^\beta \in X^\beta$, $x^\alpha \sim x^\beta$ si, y solo si, existe $\gamma \in \Lambda$ cumpliendo que $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$ y $f_\alpha^\gamma x^\alpha = f_\beta^\gamma x^\beta$. Entonces,

$$\lim_{\rightarrow}\{(X_\alpha, \mathcal{V}_\alpha), f_\alpha^\beta, \Lambda\} = ((\sqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)/\sim, (\sqcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda)/\sim).$$

<u>Demostración</u>:
Sea Λ un conjunto dirigido, $\{(X_\alpha, \mathcal{V}_\alpha), f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema dirigido de espacios pseudo-coarse y $\sim$ una relación de equivalencia tal que para $x^\alpha \in X^\alpha$ y $x^\beta \in X^\beta$, $x^\alpha \sim x^\beta$ si, y solo si, existe $\gamma \in \Lambda$ cumpliendo que $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$ y $f_\alpha^\gamma x^\alpha = f_\beta^\gamma x^\beta$.

Entonces, por el Lema A.1.5, tenemos que para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $i_\alpha : X^\alpha \to \{X^\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$, y $i_\alpha = i_\beta \circ f_\alpha^\beta$ si $\beta \geq \alpha$. Estás funciones son claramente bornologous, por lo que $\{X, i_\alpha, \Lambda\}$ es un objetivo, por lo que solamente falta observar que es un objetivo universalmente repelente.

Sea $\{(Y, \mathcal{W}), \psi_\alpha, \Lambda\}$ un objetivo, nuevamente por el Lema A.1.5, existe $g : \lim_{\rightarrow}\{X^\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\} \to Y$ tal que $g \circ i_\alpha = \psi_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$, la cuál es bornologous por construcción. Por lo tanto,

$$\lim_{\rightarrow}\{(X_\alpha, \mathcal{V}_\alpha), f_\alpha^\beta, \Lambda\} = ((\sqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)/\sim, (\sqcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda)/\sim).$$

Así, tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X_\lambda, \mathcal{V}_\lambda) \arrow[rr, "f_\lambda^\alpha"] \arrow[dr, "i_\lambda"] \arrow[ddr, "\psi_\lambda"'] & & (X_\alpha, \mathcal{V}_\alpha) \arrow[dl, "i_\alpha"'] \arrow[ddl, "\psi_\alpha"] \\
& \left([\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda\right) \arrow[d, dashed, "g"] & \\
& (Y, \mathcal{W}) &
\end{tikzcd}$$

conmuta para $\alpha, \lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda \leq \alpha$. $\langle\clubsuit\rangle$

Lema 1.4.5
Sea Λ un conjunto dirigido, $(\mathcal{V}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ estructuras pseudo-coarse de X que cumple que $\mathcal{V}_{\lambda_1} \subset \mathcal{V}_{\lambda_2}$ si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\{(X, \mathcal{V}_\alpha), f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ el sistema dirigido tal que $f_\alpha^\beta = i : (X, \mathcal{V}_\alpha) \to (X, \mathcal{V}_\beta)$. Se sigue que

1. *$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda$ es una estructura pseudo-coarse de X.*

2. *El límite directo de $\{\mathcal{V}_\lambda, f_\lambda^\alpha, \Lambda\}$ dónde $f_\lambda^\alpha = i : (X, \mathcal{V}_\lambda) \to (X, \mathcal{V}_\alpha)$ es igual a $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda$.*

<u>Demostración</u>:
Sea Λ un conjunto dirigido, $(\mathcal{V}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ estructuras pseudo-coarse de X que cumple que $\mathcal{V}_{\lambda_1} \subset \mathcal{V}_{\lambda_2}$ si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\{(X, \mathcal{V}_\alpha), f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ el sistema dirigido tal que $f_\alpha^\beta = i : (X, \mathcal{V}_\alpha) \to (X, \mathcal{V}_\beta)$. Entonces:

pc1. Dado que Δ_X es un elemento de cualquier estructura pseudo-coarse, entonces en particular $\Delta_X \in \mathcal{V}_{\lambda_1}$ para $\lambda_1 \in \Lambda$. Por ende,

$$\Delta_X \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda.$$

pc2. Sea $B \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda$ y $A \subset B$, entonces existe $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $A \subset B \in \mathcal{V}_{\lambda_1}$, por lo que $A \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda$.

pc3. Sea $A, B \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda$, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tal que $A \in \mathcal{V}_{\lambda_1}$ y $B \in \mathcal{V}_{\lambda_2}$, obteniendo que existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $A, B \in \mathcal{V}_{\lambda_3}$, por lo que $A \cup B \in \mathcal{V}_{\lambda_3}$. Así, $A \cup B \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda$.

pc4. Sea $A \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda$, entonces existe $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $A \in \mathcal{V}_{\lambda_1}$, por lo que $A^{-1} \in \mathcal{V}_{\lambda_1}$. Así, $A^{-1} \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda$.

Por lo tanto $(X, \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda)$ es un espacio pseudo-coarse.

Definamos el objetivo $\{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda, \phi_\lambda, \Lambda\}$ dónde $\phi_\lambda = i : (X, \mathcal{V}_\lambda) \to (X, \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Es claro que $\phi_\lambda = \phi_\alpha f_\lambda^\alpha$ cuando $\alpha \geq \lambda$.

Sea $(\mathcal{W}, \psi_\lambda)$ otro objetivo. Como $\psi_\lambda = \psi_\alpha f_\lambda^\alpha$ para cada $\lambda \leq \alpha$, entonces existe $\psi : X \to X$ tal que $\psi_i = \psi : (X, \mathcal{V}_i) \to (X, \mathcal{W})$. Por lo anterior, es claro que $\psi : (X, \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda) \to (X, \mathcal{W})$, el cual es claramente bornologous, hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{V}_\lambda) \arrow[rr, "f_\lambda^\alpha"] \arrow[dr, "\phi_\lambda"] \arrow[ddr, "\psi_\lambda"'] & & (X, \mathcal{V}_\alpha) \arrow[dl, "\phi_\alpha"'] \arrow[ddl, "\psi_\alpha"] \\
& \left(X, \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda\right) \arrow[d, dashed, "\psi"] & \\
& (X, \mathcal{W}) &
\end{tikzcd}$$

Obteniendo que $(X, \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda)$ es el límite directo del sistema directo de estos espacios pseudo-coarse.$\langle\clubsuit\rangle$

Corolario 1.4.5.1
Sea Λ un conjunto dirigido, $(\mathcal{V}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ estructuras pseudo-coarse de X que cumplen que $\mathcal{V}_{\lambda_1} \subset \mathcal{V}_{\lambda_2}$ si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\{(X, V_\alpha), f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ el sistema dirigido tal que $f_\alpha^\beta = i : (X, \mathcal{V}_\alpha) \to (X, \mathcal{V}_\beta)$. Además el sistema dirigido cumple que para cada $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $V \in \mathcal{V}_{\lambda_1}$, $W \in \mathcal{V}_{\lambda_2}$, se cumple que existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $V \circ W \in \mathcal{V}_{\lambda_3}$, entonces $\lim\limits_{\to} \mathcal{V}_\lambda$ es una estructura coarse para X.

<u>**Demostración:**</u>
Por el Lema 1.4.5 es suficiente demostrar que la estructura pseudocoarse $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda$ cumple *cr5*, pero eso se sigue directamente de la condición adicional. $\langle\clubsuit\rangle$

A partir de este punto, denotaremos por $\mathcal{V}_\infty := \lim_{\to} \mathcal{V}_r$, del sistema directo descrito en el Lema 1.4.5. A continuación probaremos que esta estructura es en efecto una estructura coarse.

Corolario 1.4.5.2
$(X, \mathcal{V}_\infty)$ *es un espacio coarse.*

<u>**Demostración:**</u>
Sea $\Lambda = (\mathbb{R}, \leq)$ y $\{\mathcal{V}_r, f_r^{r'}, \Lambda\}$ el sistema dirigido dado por la colección de estructuras pseudo-coarse inducida por una métrica d y $f_r^{r'} = i : (X, \mathcal{V}_r) \to (X, \mathcal{V}_{r'})$. Como ya hemos observado que $\mathcal{V}_r \subset \mathcal{V}_{r'}$ para $r \leq r'$, por Lema 1.4.5 ya tenemos que $\mathcal{V}_\infty$ es una estructura pseudo-coarse.

Además, sean $V, W \in \mathcal{V}_\infty$, entonces existen $r, r' \in [0, \infty)$ tal que, sin perdida de generalidad, $r \leq r'$, $V \in \mathcal{V}_r$ y $W \in \mathcal{V}_{r'}$, por lo que $V, W \in \mathcal{V}_{r'}$.

Así, sea $(x, y) \in V \circ W$, entonces existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in V$ y $(z, y) \in W$, por lo que $d'_{r'}(x, z) = 0 = d'_{r'}(y, z)$, obteniendo por definición se sigue que $d(x, z) \leq r'$ y $d(z, y) \leq r'$. Por la propiedad de desigualdad triangular tenemos que $d(x, y) \leq 2r'$ y $d'_{2r'}(x, y) = 0$. Por lo tanto,

$$V \circ W \subset \{(x, y) \in X \times X : d'_{2r'}(x, y) = 0\},$$

concluyendo que $V \circ W \in \mathcal{V}_{2r'}$ y por el Corolario 1.4.5.1, $(X, \mathcal{V}_\infty)$ es un espacio coarse. $\langle\clubsuit\rangle$

Ejemplo:
Retomemos el conjunto $\mathbb{R}$ con la métrica usual. Entonces, $\mathcal{V}_\infty$ es igual a la colección de conjuntos A contenidos en $\mathbb{R}^2$ tal que $\sup\{d(x, \Delta_\mathbb{R}) : x \in A\} < \infty$. Si A es un conjunto contenido en $\mathbb{R}^2$ tal que $\sup\{d(x, \Delta_\mathbb{R}) : x \in A\} < \infty$, entonces existe $0 < M < \infty$ tal que $d(x, \Delta_\mathbb{R}) < \sqrt{2}M$, por lo que $A \in \mathbb{V}_M$. Por otro lado, si A cumple que $\sup\{d(x, \Delta_\mathbb{R}) : x \in A\} = \infty$, entonces para todo $r > 0$ existirá un (x_r, y_r) tal que $\{(x_r, y_r)\} \notin \mathcal{V}_r$.

También hemos encontrado un ejemplo de estructura coarse que no es $\mathcal{P}(X \times X)$ ni solamente Δ_X.$\langle\diamond\rangle$

Ejemplo:
Sea N un número natural, retomemos el conjunto $[N]$ con la métrica discreta. Entonces, $\mathcal{V}_\infty = \mathcal{P}([N] \times [N])$. $\langle\diamond\rangle$

Corolario 1.4.5.3
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y el sistema dirigido $\{(X, \mathcal{V}^{nEP}), f_n^k, \mathbb{N}\}$ tal que $f_n^k = i : (X, \mathcal{V}^{nEP}) \to (X, \mathcal{V}^{kEP})$. Entonces, $\lim_\to \{(X, \mathcal{V}^{nEP}), f_n^k, \mathbb{N}\}$ es una estructura coarse.

Demostración:
La prueba se sigue de Corolario 1.4.5.1, de la definición de $(\cdot)^{n-EP}$ y que ya hemos mostrado que $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^{EP}$. $\langle\clubsuit\rangle$

1.5. Espacios Producto Pseudo-Coarse

Definición 1.5.1
Sean X y Y conjuntos, además tomemos $V \in \mathcal{P}(X \times X)$ y $W \in \mathcal{P}(Y \times Y)$. Definimos

$$V \boxtimes W := \{(a, b, c, d) \in (X \times Y)^2 : (a, c) \in V, (b, d) \in W\}$$

como el producto cartesiano cruzado de V y W.

Observación: *Sean X, Y y Z conjuntos y $V \in \mathcal{P}(X \times X)$, $W \in \mathcal{P}(Y \times Y)$ y $U \in \mathcal{P}(X \times X)$. Entonces tenemos que $(V \boxtimes W) \boxtimes U = V \boxtimes (W \boxtimes U)$, por lo que el producto cartesiano cruzado es asociativo.*

Definición 1.5.2 (Espacio producto pseudo-coarse)
Sean $(X, \mathcal{V})$ y $(Y, \mathcal{W})$ espacios pseudo-coarse. Definamos $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ como la colección de subconjuntos de uniones finitas de conjuntos de la forma $V \boxtimes W$, $V \in \mathcal{V}$, $W \in \mathcal{W}$.

*Al par ordenado $(X \times Y, \mathcal{V} \times \mathcal{W})$ le llamaremos **espacio producto pseudo-coarse de** $(X, \mathcal{V})$ **y** $(Y, \mathcal{W})$.*

Lema 1.5.3
Sean X y Y conjuntos, $A \subset X \times X$, $B \subset Y \times Y$, $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de subconjuntos de $X \times X$ indexada por Λ y $\{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una colección de subconuntos de $Y \times Y$ indexada por Γ. Entonces, se sigue que

(i) $(A \boxtimes B)^{-1} = A^{-1} \boxtimes B^{-1}$.

(ii) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \boxtimes B) = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \boxtimes B$.

(iii) $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \boxtimes B_\gamma) = A \boxtimes \left(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right)$.

<u>Demostración</u>:
Sean X y Y conjuntos, $A \subset X \times X$, $B \subset Y \times Y$, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una colección de subconjuntos de $X \times X$ indexada por Λ y $\{B_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una colección de subconuntos de $Y \times Y$ indexada por Γ. Entonces,

(i) Observemos que

$$\begin{aligned}(A \boxtimes B)^{-1} =&\{(x',y',x,y) : (x,x') \in A, (y,y') \in B\}\\ =&\{(x',y',x,y) : (x',x) \in A^{-1}, (y',y) \in B^{-1}\}\\ =&A^{-1} \boxtimes B^{-1}.\end{aligned}$$

(ii) Sea $(a,b,c,d) \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda \boxtimes B)$, entonces existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $(a,b,c,d) \in A_{\lambda_0} \boxtimes B$, obteniendo que $(a,c) \in A_{\lambda_0}$ y $(b,d) \in B$. Así, $(a,c) \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ y $(b,d) \in B$, concluyendo que $(a,b,c,d) \in \left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \boxtimes B$.

Sea $(a,b,c,d) \in \left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \boxtimes B$, es equivalente a que $(a,c) \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ y $(b,d) \in B$, entonces existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $(a,c) \in A_{\lambda_0}$ y $(b,d) \in B$, obteniendo que $(a,b,c,d) \in A_{\lambda_0} \boxtimes B$. Así, $(a,b,c,d) \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda \boxtimes B)$.

(iii) La prueba de esta proposición es análoga al inciso anterior. $\langle\clubsuit\rangle$

Proposición 1.5.4
Sean $(X,\mathcal{V})$ y $(Y,\mathcal{W})$ espacios pseudo-coarse. Entonces $(X \times Y, \mathcal{V}\times\mathcal{W})$ es un espacio pseudo-coarse.

<u>Demostración</u>:
Sean $(X,\mathcal{V})$ y $(Y,\mathcal{W})$ espacios pseudo-coarse y la colección $\mathcal{V}\times\mathcal{W}$ como en la Definición 1.5.2. Entonces:

pc1. Observemos que $\Delta_X \boxtimes \Delta_Y = \{(x,y,x,y) \in X \times Y \times X \times Y : x \in X, y \in Y\} = \Delta_{X\times Y}$.

pc2. Sea $A \in \mathcal{V}\times\mathcal{W}$ y $B \subset A$. Entonces, existen $n \in \mathbb{N}$, $\{V_1,...,V_n\} \subset \mathcal{V}$ y $\{W_1,...,W_n\} \subset \mathcal{W}$ tal que $B \subset A \subset \bigcup\limits_{1\leq k\leq n}(V_k \boxtimes W_k)$, por lo que $B \subset \mathcal{V}\times\mathcal{W}$.

pc3. Sean $A, B \in \mathcal{V}\times\mathcal{W}$. Entonces existen $M, N \in \mathbb{N}$, $\{V_1,\cdots,V_N\} \subset \mathcal{V}$ y $\{W_1,\cdots,W_N\} \subset \mathcal{W}$ tal que $N \geq 2$, $1 \leq M < N$ y $A \subset \bigcup\limits_{1\leq k\leq M}(V_k \boxtimes W_k)$, $B \subset \bigcup\limits_{M+1\leq k\leq N}(V_k \boxtimes W_k)$. Por lo que $A \cup B \subset \bigcup\limits_{1\leq k\leq N}(V_k \boxtimes W_k)$, obteniendo que $A \cup B \in \mathcal{V}\times\mathcal{W}$.

pc4. Sea $A \in \mathcal{V}\times\mathcal{W}$. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$, $\{V_1,...,V_n\} \subset \mathcal{V}$ y $\{W_1,...,W_n\} \subset \mathcal{W}$ tal que $A \subset \bigcup\limits_{1\leq k\leq n}(V_k \boxtimes W_k)$, por lo que $A^{-1} \subset \bigcup\limits_{1\leq k\leq n}(V_k^{-1} \boxtimes W_k^{-1})$, por Lema 1.2.2 y Lema 1.5.3.

Por lo que $\mathcal{V}\times\mathcal{W}$ es una estructura pseudo-coarse para $V \times W$. $\langle\clubsuit\rangle$

Es importante observar que este tipo de producto es asociativo, lo cuál da pie al siguiente resultado.

Lema 1.5.5
Sean $(X,\mathcal{V})$, $(Y,\mathcal{W})$ y $(Z,\mathcal{Z})$ espacios pseudo-coarse. Entonces $(\mathcal{V}\times\mathcal{W})\times\mathcal{Z} = \mathcal{V}\times(\mathcal{W}\times\mathcal{Z})$.

__Demostración:__
Sean $(X, \mathcal{V})$, $(Y, \mathcal{W})$ y $(Z, \mathcal{Z})$ espacios pseudo-coarse. Considere $A \in (\mathcal{V} \times \mathcal{W}) \times \mathcal{Z}$, entonces existen N natural, $\{D_n\} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ y $\{E_n\} \subset \mathcal{Z}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{N} (D_n \boxtimes E_n)$. Así, existen $\{K_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathbb{N}$, $\{B_{n_k}\}_{k\in 1}^{K_n} \subset \mathcal{V}$ y $\{C_{n_k}\}_{k\in 1}^{K_n} \subset \mathcal{W}$ tal que $D_n \subset \bigcup_{k=1}^{K_n} (B_{n_k} \boxtimes C_{n_k})$ para cada $n \in \{1, \cdots, N\}$. Obteniendo finalmente que $A \subset \bigcup_{n=1}^{N} \bigcup_{k=1}^{K_n} (B_{n_k} \boxtimes C_{n_k} \boxtimes E_n)$, por Lema 1.5.3. Observemos que son $\sum_{n=1}^{N} K_n$ uniones, por lo que es un número finito, además $(C_{n_k} \boxtimes E_n) \in \mathcal{W} \times \mathcal{Z}$ y $B_{n_k} \in \mathcal{V}$ para cada $k \in \{1, \cdots, K_n\}$, $n \in \{1, \cdots, N\}$, obteniendo que $A \in \mathcal{V} \times (\mathcal{W} \times \mathcal{Z})$. De forma completamente análoga obtenemos que $(\mathcal{V} \times \mathcal{W}) \times \mathcal{Z} \supset \mathcal{V} \times (\mathcal{W} \times \mathcal{Z})$. Así, ambas estructuras pseudo-coarse son iguales. $\langle \clubsuit \rangle$

Nuestra definición de espacio producto nos dice de forma explicita que cumple con la cerradura bajo uniones finitas y subconjuntos. Sin embargo, el siguiente nos dirá que basta con contener a los subconjuntos, lo cual nos ayudará a extender la definición para una mayor cantidad de coordenadas y simplificar las pruebas.

Lema 1.5.6
Sean $(X, \mathcal{V})$ y $(Y, \mathcal{W})$ espacios pseudo-coarse. $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ es igual a la colección de subconjuntos de conjuntos de la forma $V \boxtimes W$, $V \in \mathcal{V}$, $W \in \mathcal{W}$.

__Demostración:__
Sean $(X, \mathcal{V})$ y $(Y, \mathcal{W})$ espacios pseudo-coarse. Denotemos por $(\mathcal{V} \times \mathcal{W})^1$ a la colección de subconjuntos de conjuntos de la forma $V \boxtimes W$, $V \in \mathcal{V}$, $W \in \mathcal{W}$.

Dadas las definiciones, es claro que $(\mathcal{V} \times \mathcal{W})^1 \subset \mathcal{V} \times \mathcal{W}$. Por el otro lado, sea $A \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$, entonces existen N natural y los conjuntos $\{V_1, \cdots, V_N\} \in \mathcal{V}$ y $\{W_1, \cdots, W_n\} \in \mathcal{W}$ tal que $A = \bigcup_{k=1}^{N} (V_k \boxtimes W_k)$. Entonces, se obtiene lo siguiente

$$\bigcup_{k=1}^{N} V_k \in \mathcal{V}, \ \bigcup_{k=1}^{N} W_k \in \mathcal{W}, \ \bigcup_{k=1}^{N} (V_k \boxtimes W_k) \subset \left(\bigcup_{k=1}^{N} V_k \right) \boxtimes \left(\bigcup_{k=1}^{N} W_k \right).$$

Obteniendo que $A \in (\mathcal{V} \times \mathcal{W})^1$. $\langle \clubsuit \rangle$

Corolario 1.5.6.1
Sean $(X, \mathcal{V})$, $(Y, \mathcal{W})$ y $(Z, \mathcal{A})$ espacios pseudo-coarse. Entonces $f : (X \times Y, \mathcal{V} \times \mathcal{W}) \to (Z, \mathcal{A})$ es un función bornologous si, y solamente si, $f(B \boxtimes C) \in \mathcal{A}$ para cada $B \in \mathcal{V}$ y $C \in \mathcal{W}$.

Las siguientes definiciones buscan ser una analogía al producto caja y al producto de Tychonoff para espacios pseudo-coarse.

Definición 1.5.7
Sea Λ un conjuntos de indices y $\{(X_\lambda, \mathcal{V}_\lambda)\}$ una colección de espacios pseudo-coarse indexados por Λ, entonces

- *A la colección de subconjuntos de $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)^2$ tal que están contenidos en algún conjunto de la forma*

$$\left\{ (x, y) \in \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \right)^2 : (\pi_\lambda(x), \pi_\lambda(y)) \in A_\lambda \text{ para cada } \lambda \in \Lambda \right\}$$

  con $A_\lambda \in \mathcal{V}_\lambda$, le llamaremos ***estructura producto caja pseudo-coarse*** *y le denotaremos por $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda$. Para simplificar la notación, a los conjuntos de la forma antes mencionado los denotaremos por $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ tal que $A_\lambda \in \mathcal{V}_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$.*

- *A la colección de subconjuntos de* $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)^2$ *tal que están contenidos en algún conjunto de la forma*

$$\left\{(x,y)\in\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)^2 : (\pi_\lambda(x),\pi_\lambda(y))\in A_\lambda \text{ si } \lambda\in F,\ (\pi_\lambda(x),\pi_\lambda(y))\in\Delta_{X_\lambda} \text{ si } \lambda\in\Lambda\backslash F\right\}$$

con $F\subset\Lambda$ *un conjunto finito,* $A_\lambda\in\mathcal{V}_\lambda$*, le llamaremos* ***estructura producto Tychonoff pseudo-coarse*** *y le denotaremos por* $\prod^\tau_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$*.*

Proposición 1.5.8
Sea Λ *un conjunto de indices y* $\{(X_\lambda,\mathcal{V}_\lambda)\}$ *una colección de espacios pseudo-coarse indexados por* Λ*. Entonces* $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$ *es una estructura pseudo-coarse de* $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ *y* $\prod^\tau_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$ *es una estructura pseudo-coarse de* $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$*.*

Demostración:
Sea Λ un conjunto de índices y $\{(X_\lambda,\mathcal{V}_\lambda)\}$ una colección de espacios pseudo-coarse indexados por Λ. Tomemos $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$ como la estructura producto caja pseudo-coarse, entonces

pc1. $\Delta_{(\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda)}=\prod_{\lambda\in\Lambda}\Delta_{X_\lambda}\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$.

pc2. Sea $V\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$ y W subconjunto de V. Entonces existen $\{A_\lambda\}$ con $V_\lambda\in\mathcal{A}_\lambda$ tal que $W\subset V\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$, por lo que $W\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$.

pc3. Sean $V,W\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$. Entonces existen $\{A_\lambda\}$ y $\{B_\lambda\}$ con $A_\lambda,B_\lambda\in\mathcal{V}_\lambda$ tal que $V\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ y $W\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$. Así, $V\cup W\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cup B_\lambda)$, por lo que $V\cup W\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$.

pc4. Sea $V\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$. Entonces existen $\{A_\lambda\}$ con $A_\lambda\in\mathcal{V}_\lambda$ tal que $V\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$, por lo que $V^{-1}\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda)^{-1}$, obteniendo que $V^{-1}\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$.

Tomemos $\prod^\tau_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$ como la estructura producto Tychonoff pseudo-coarse, entonces

pc1. $\Delta_{(\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda)}=\prod_{\lambda\in\Lambda}\Delta_{X_\lambda}\in\prod^\tau_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$.

pc2. Sea $V\in\prod^\tau_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$ y W subconjunto de V. Entonces existen $\{V_\lambda\}$ con $V_\lambda\in\mathcal{V}_\lambda$ tal que una cantidad finita de $V_\lambda\neq\Delta_{X_\lambda}$ y $W\subset V\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$, por lo que $W\in\prod^\tau_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$.

pc3. Sean $V,W\in\prod^\tau_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$. Entonces existen $\{V_\lambda\}$ y $\{W_\lambda\}$ con $V_\lambda,W_\lambda\in\mathcal{V}_\lambda$ tal que a lo más una cantidad finita N cumple que $V_\lambda\neq\Delta_{X_\lambda}$, una cantidad finita M cumple que $W_\lambda\neq\Delta_{X_\lambda}$, $V\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$ y $W\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}W_\lambda$. Así, $V\cup W\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}(V_\lambda\cup W_\lambda)$ y a lo más una cantidad $M+N$ cumple que $V_\lambda\cup W_\lambda\neq\Delta_{X_\lambda}$, por lo que $V\cup W\in\prod^\tau_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$.

pc4. Sea $V\in\prod^\tau_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$. Entonces existen $\{V_\lambda\}$ con $V_\lambda\in\mathcal{V}_\lambda$ tal que una cantidad finita de $V_\lambda\neq\Delta_{X_\lambda}$ y $V\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$, por lo que $V^{-1}\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}(V_\lambda)^{-1}$, obteniendo que $V^{-1}\in\prod^\tau_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$. ⟨♣⟩

Proposición 1.5.9
Sean $(Y,\mathcal{W})$ *un espacio pseudo-coarse,* Λ *un conjunto de índices y* $\{(X_\lambda,\mathcal{V}_\lambda)\}$ *una colección de espacios pseudo-coarse indexados por* Λ*. Sea* $f:(Y,\mathcal{W})\to(\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda,\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda)$*,* f *es bornologous si, y sólo si,* $\pi_\lambda f$ *es bornologous para cada* $\lambda\in\Lambda$*.*

Demostración:
Sean $(Y,\mathcal{W})$ un espacio pseudo-coarse, Λ un conjunto de índices y $\{(X_\lambda,\mathcal{V}_\lambda)\}$ una colección de espacios pseudo-coarse indexados por Λ, además $f:(Y,\mathcal{W})\to(\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda,\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda)$.

($\Rightarrow$) Sea f bornologous, entonces $\pi_\lambda f$ es bornologous para cada $\lambda\in\Lambda$, por composición de funciones bornologous.

($\Leftarrow$) Suponga que $\pi_\lambda f$ es bornologous para cada $\lambda \in \Lambda$ y tomemos $V \in \mathcal{W}$, entonces $\pi_\lambda f(V) \in \mathcal{V}_\lambda$. Así $\prod_{\lambda\in\Lambda}(\pi_\lambda f(V)) \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$, por lo que f es una función bornologous. $\langle\clubsuit\rangle$

Observación: *Sea $\{x_\lambda\}$ tal que $\lambda \in \Lambda$ y $i_\gamma : X_\gamma \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ tal que $i_\gamma(z) = \{y_\lambda\}$ donde $y_\gamma = z$ y $y_\lambda = x_\lambda$ si $\lambda \neq \gamma$. Entonces $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$ es la estructura pseudo-coarse más fina y $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}_\lambda$ es la estructura pseudo-coarse más gruesa de $\prod^{\tau}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ que hacen que las funciones i_γ y π_γ sean bornologous para todo $\gamma \in \Lambda$.*

Observación: *Sea Λ un conjunto de índices tal que $\#(\Lambda) < \infty$, entonces el producto caja es igual al producto Tychonoff, igual al producto en Definición 1.5.2.*

Por último en este capítulo, hablaremos sobre la relación del producto e inducir un espacio a partir de otro. Para ello, daremos la definición de producto cartesiano en un espacio semi-uniforme.

Definición 1.5.10 (Producto Espacio Semi-Uniforme; Čech (1966), 23 D.10.)
*El producto de una familia $\{(X_a,\mathcal{U}_a) : a \in A\}$ de espacios semi-uniformes, denotada por $\prod_{a\in A}(X_a,\mathcal{U}_a)$ es definida como el espacio semi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ dónde X es el producto cartesiano de la familia $\{X_a\}$, y $\mathcal{U}$, llamada la **estructura producto semi-uniforme**, es la colección de todos los subconjuntos de $X \times X$ conteniendo un conjunto de la forma*

$$\{(x,y) \in X \times X : a \in F \Rightarrow (\pi_a(x), \pi_a(y)) \in U_a\}$$

*dónde F es un subconjunto finito de A y $U_a \in \mathcal{U}_a$. Los conjuntos de esa forma son llamados **elementos canónicos** de la estructura producto semi-uniforme.*

Lema 1.5.11
Sea $\{(X_a,\mathcal{U}_a)\}$ una colección de espacios semi-uniformes indexados por un conjunto A, $\mathcal{V}_a$ la estructura pseudo-coarse inducida por $\mathcal{U}_a$, $\mathcal{U}$ la estructura producto semi-uniforme y $\mathcal{V}$ la estructura pseudo-coarse inducida por $\mathcal{U}$. Entonces, $\mathcal{V} = \prod_{a\in A}\mathcal{V}_a$, Definición 1.5.7.

Demostración:
Sea $\{(X_a,\mathcal{U}_a)\}$ una colección de espacios semi-uniformes indexados por un conjunto A, $\mathcal{V}_a$ la estructura pseudo-coarse inducida por $\mathcal{U}_a$, $\mathcal{U}$ la estructura producto semi-uniforme y $\mathcal{V}$ la estructura pseudo-coarse inducida por $\mathcal{U}$. Entonces,

($\subset$) Sea $V \in \mathcal{V}$, entonces V está contenido en todos los elementos canónicos de la estructura producto semi-uniforme, que implica que $(\pi_a \times \pi_a)(V) \in U_a$ para cada $U_a \in \mathcal{U}_a$, por lo que $(\pi_a \times \pi_a)(V) \in \mathcal{V}_a$ para cada $a \in A$. Así concluimos que $V \in \prod_{a\in A}\mathcal{V}_a$.

($\supset$) Sea $V \in \prod_{a\in A}\mathcal{V}_a$, entonces $(\pi_a \times \pi_a)(V) \subset U_a$ para cada $U_a \in \mathcal{U}_a$. Así, para todo subconjunto finito F de A se tiene que $(\pi_a \times \pi_a)(V) \in U_a$ para cada $U_a \in \mathcal{U}_a$, por lo que U está contenido en cada elemento canónico de la estructura producto semi-uniforme. Por lo tanto, $V \in \mathcal{V}$. $\langle\clubsuit\rangle$

Al hacer el producto cartesiano de dos espacios semi-pseudométricos, obtenemos el siguiente y último resultado.

Lema 1.5.12
Sean (X,d) y (Y,δ) espacios métricos, r y s reales no negativos. Construyamos d'_r y δ'_s como en Definición 1.1.15, entonces

(i) Sean $\mathcal{U}_r$, $\mathcal{A}_s$ y $\mathcal{D}_{r,s}$ las estructuras semi-uniformes inducidas por d'_r, δ'_s y $d'_r \times \delta'_s := \max\{d'_r, \delta'_s\}$, respectivamente, obtenemos que $\mathcal{U}_r \times \mathcal{A}_s = \mathcal{D}_{r,s}$.

(ii) Sean $\mathcal{V}_r$, $\mathcal{W}_s$ y $\mathcal{Z}_{r,s}$ las estructuras pseudo-coarse inducidas por d'_r, δ'_s y $d'_r \times \delta'_s$, respectivamente, obtenemos que $\mathcal{V}_r \times \mathcal{W}_s = \mathcal{Z}_{r,s}$.

Demostración:
Sean (X, d) y (Y, δ) espacios métricos, r y s reales no negativo. Construyamos d'_r y δ'_s como en Definición 1.1.15, entonces

(i) Sean $\mathcal{U}_r$, $\mathcal{A}_s$ y $\mathcal{D}_{r,s}$ las estructuras semi-uniformes inducidas por d'_r, δ'_s y $d'_r \times \delta'_s = \max\{d'_r, \delta'_s\}$, respectivamente.

- ($\subset$) Sea $W \in \mathcal{U}_r \times \mathcal{A}_s$, por Definición 1.5.10 para sólo dos espacios semi-uniformes, existen $U \in \mathcal{U}_r$ y $A \in \mathcal{A}_s$ tal que $U \boxtimes A \subset W$. Entonces, $\{(x, x') : d'_r(x, x') = 0\} \boxtimes \{(y, y') : \delta'_s(y, y') = 0\} \subset W$, equivalente a que $\{(x, y, x', y') : d'_r \times \delta'_s(x, y, x', y') = 0\} \subset W$. Por lo tanto, $W \in \mathcal{D}_{r,s}$.
- ($\supset$) Sea $W \in \mathcal{D}_{r,s}$, es decir, $\{(x, y, x', y') : d'_r \times \delta'_s(x, y, x', y') = 0\} \subset W$, lo que es equivalente a $\{(x, x') : d'_r(x, x') = 0\} \boxtimes \{(y, y') : \delta'_s(y, y') = 0\} \subset W$. Por lo tanto, $W \in \mathcal{U}_r \times \mathcal{A}_s$.

(ii) Sean $\mathcal{V}_r$, $\mathcal{W}_s$ y $\mathcal{Z}_{r,s}$ las estructuras pseudo-coarse inducidas por d'_r, δ'_s y $d'_r \times \delta'_s$, respectivamente. Esta proposición se sigue del Lema 1.5.11 y del inciso *(i)* de este lema. $\langle\clubsuit\rangle$

Capítulo 2

Homotopía

Este capítulo estará dedicada a definir una homotopía en los espacios pseudo-coarse, así como sus grupos de homotopía. Eventualmente nos daremos cuenta que los espacios pseduo-coarse de cardinalidad finita son muy parecidos a las gráficas, por lo que no será sorpresa que los grupos de homotopía y la operación entre ellos sea motivada del trabajo de Barcelo en Babson et al. (2006).

2.1. Clases de Homotopía

Para empezar esta sección, le asignaremos a los número enteros una estructura pseudo-coarse. Con esta estructura trabajaremos en todo el capítulo y podríamos decir que relaciona un número entero con el siguiente y el anterior.

Definición 2.1.1

- *Definimos el conjunto* $Ext(\mathcal{Z}) := \cup_{z\in\mathbb{Z}}\{(z, z-1), (z, z), (z, z+1)\} \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
- *Denotaremos por* $\mathcal{Z}$ *a la colección de todos los subconjuntos de* $Ext(\mathcal{Z})$*.*

Observación: $(\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ *es un espacio pseudo-coarse.*

Definición 2.1.2 (Homotopía en espacios pseudo-coarse)
Sean $(X, \mathcal{V})$ *y* $(Y, \mathcal{W})$ *espacios pseudo-coarse y* $f, g : (X, \mathcal{V}) \to (Y, \mathcal{W})$ *funciones bornologous. Diremos que* $f \simeq_{pc} g$ *si, y solamente si, existen* $H : (X \times \mathbb{Z}, \mathcal{V} \times \mathcal{Z}) \to (Y, \mathcal{W})$ *y* $N, M \in \mathbb{Z}$ *tal que* $N < M$*,* $H(x, n) = f(x)$ *si* $n \leq N$*, y* $H(x, n) = g(x)$ *si* $n \geq M$*.*

Diremos que ambos espacios pseudo-coarse son homotopicamente equivalentes cuando exista $f : (X, \mathcal{V}) \to (Y, \mathcal{W})$ *y* $g : (Y, \mathcal{W}) \to (X, \mathcal{W})$ *ambas bornologous tal que* $gf \simeq_{pc} id_X$ *y* $fg \simeq_{pc} id_Y$

Lema 2.1.3
$\simeq_{pc}$ *es una relación de equivalencia entre espacios pseudo-coarse.*

Demostración:
Sean $(X, \mathcal{V})$ y $(Y, \mathcal{W})$ espacios pseudo-coarse y $\simeq_{pc}$ como en la Definición 2.1.2. Probemos que efectivamente es una relación de equivalencia.

rel1. Sea $f : (X, \mathcal{V}) \to (Y, \mathcal{W})$ y $H : (X \times \mathbb{Z}, \mathcal{V} \times \mathcal{Z}) \to (Y, \mathcal{W})$ tal que $H(x, z) = f(x)$ para cada $z \in \mathbb{Z}$.

Por el Lema 1.5.6, basta probar que $(H \times H)(V \boxtimes Ext(\mathcal{Z})) \in \mathcal{W}$ para cada $V \in \mathcal{V}$. Sea V un elemento controlado por $\mathcal{V}$, entonces

$$\begin{aligned}(H\times H)(V\boxtimes Ext(\mathcal{Z})) =&\bigcup_{z\in\mathbb{Z}}(H\times H)(V\boxtimes\{(z,z-1),(z,z),(z,z+1)\})\\ =&\bigcup_{z\in\mathbb{Z}}(f\times f)(V)\\ =&(f\times f)(V)\in\mathcal{W}\end{aligned}$$

Así, H es bornologous y, sin perdida de generalidad, podemos tomar $N=-1$ y $M=1$, obteniendo que $f\simeq_{pc} f$.

rel2. Sean $f\simeq_{pc} g$, entonces existen $H:(X\times\mathbb{Z},\mathcal{V}\times\mathcal{Z})\to(Y,\mathcal{W})$, $N<M$ como en Definición 2.1.2.

Definamos $H'(x,n)=H(x,-n)$ para cada $x\in X$ y $z\in\mathbb{Z}$. Es claro que $H'(x,n)=g(x)$ para cada $x\in X$ si $n\leq -M$, $H'(x,n)=f(x)$ para cada $x\in X$ si $n\geq -N$. Además, sea $V\in\mathcal{V}$, y observando que si $(z,z')\in Ext(\mathcal{Z})$, entonces $z\in\mathbb{Z}$ y $z'=z+i$ con $i\in\{-1,0,1\}$ por lo que $(-z,-z')\in Ext(\mathcal{Z})$, obtenemos que

$$\begin{aligned}(H'\times H')(V\boxtimes Ext(\mathcal{Z})) =&\{(H'(x,z),H'(x',z')):(x,x')\in V,(z,z')\in Ext(\mathcal{Z})\}\\ =&\{(H(x,-z),H(x',-z')):(x,x')\in V,(z,z')\in Ext(\mathcal{Z})\}\\ =&\{(H(x,-z),H(x',-z')):(x,x')\in V,(-z,-z')\in Ext(\mathcal{Z})\}\\ =&(H\times H)(V\boxtimes Ext(\mathcal{Z})).\end{aligned}$$

Obteniendo que efectivamente H' es una función bornologous y por consiguiente $g\simeq_{pc} f$.

rel3. Sean $f\simeq_{pc} g$ y $g\simeq_{pc} h$, entonces existen $H_{fg}:(X\times\mathbb{Z},\mathcal{V}\times\mathcal{Z})\to(Y,\mathcal{W})$, $N_f<M_g$, $H_{gh}:(X\times\mathbb{Z},\mathcal{V}\times\mathcal{Z})\to(Y,\mathcal{W})$ y $N_g<M_h$ como en la Definición 2.1.2. Sin perdida de generalidad tomemos $N_f<0<M_g$ y $N_g<0<M_h$.

Definamos $H_{fh}:(X\times\mathbb{Z},\mathcal{V}\times\mathcal{Z})\to(Y,\mathcal{W})$ tal que $H_{fh}(x,0)=g(x)$ para cada $x\in X$, $H_{fh}(x,n)=H_{fg}(x,n+M_g+1)$ para cada $x\in X$ si $n\leq -1$, y $H_{fh}(x,n)=H_{gh}(x,n+N_g-1)$ para cada $x\in X$ si $n\geq 1$. Además definamos $N=N_f$ y $M=M_h$.

Empecemos observando que, si $(x,z,x',z')\in V\boxtimes(Ext(\mathcal{Z})\cap\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2:a\leq 0\})$ con $V\in\mathcal{V}$, entonces $z'=z+k$, dónde $k\in\{-1,0,1\}$ y

$$H_{fh}(V\boxtimes(Ext(\mathcal{Z})\cap\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2:a\leq 0\}))=H_{fg}(V\boxtimes(Ext(\mathcal{Z})\cap\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2:a\leq M_g\})),$$

por lo que $H_{fh}(V\boxtimes(Ext(\mathcal{Z})\cap\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2:a\leq 0\}))\in\mathcal{W}$.

De la misma forma, si $(x,z,x',z')\in V\boxtimes(Ext(\mathcal{Z})\cap\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2:a\geq 0\})$ con $V\in\mathcal{V}$, entonces $z'=z+k$, dónde $k\in\{-1,0,1\}$ y

$$H_{fh}(V\boxtimes(Ext(\mathcal{Z})\cap\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2:a\geq 0\}))=H_{gh}(V\boxtimes(Ext(\mathcal{Z})\cap\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2:a\leq N_g\})),$$

por lo que $H_{fh}(V\boxtimes(Ext(\mathcal{Z})\cap\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2:a\geq 0\}))\in\mathcal{W}$.

Por lo tanto, como

$$\begin{aligned}H_{fh}(V\boxtimes(Ext(\mathcal{Z})\cap\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2:a\leq 0\}))\cup H_{fh}(V\boxtimes(Ext(\mathcal{Z})\cap\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2:a\geq 0\}))\\ =H_{fh}(V\boxtimes Ext(\mathcal{Z}))\end{aligned}$$

para cada $V\in\mathcal{V}$, entonces H_{fh} es una función bornologous que cumple que $H_{fh}(x,z)=f(x)$ si $z\leq N$ y $H_{fh}(x,z)=h(x)$ si $z\geq M$, concluyendo que $f\simeq_{pc} h$. $\langle\clubsuit\rangle$

Observación: *Dado que solamente habrá una cantidad finita de funciones diferentes en la homotopía* H *para algún entero fijo, es suficiente mostrar que* $(H\times H)(V\boxtimes(z,z+1))$ *y* $(H\times H)(V\boxtimes(z,z-1))$ *son subconjuntos controlados de* $(Y,\mathcal{W})$ *para cada* $V\in\mathcal{V}$ *y* $z\in\mathbb{Z}$ *para que* H *sea una función bornologous, esto se da por la cerradura de uniones finitas de conjuntos controlados.*

De igual manera, y retomando la Definición 1.2.1, tenemos los siguiente

Definición 2.1.4 (Homotopía relativa en espacios pseudo-coarse)
Sean $(X,\mathcal{V})$ *y* $(Y,\mathcal{W})$ *espacios pseudo-coarse,* $A\subset X$ *con la estructura de subespacio, y* $f,g:(X,\mathcal{V})\to(Y,\mathcal{W})$ *funciones bornologous. Diremos que* $f\simeq_{pc} g\ rel(A)$ *si, y solamente si, existen* $H:(X\times\mathbb{Z},\mathcal{V}\times\mathcal{Z})\to(Y,\mathcal{W})$ *y* $N,M\in\mathbb{Z}$ *tal que* $N<M$, $H(x,n)=f(x)$ *si* $n\leq N$, $H(x,n)=g(x)$ *si* $n\geq M$ *y* $H(x,n)=f(x)=g(x)$ *para cada* $x\in A$ *y* $n\in\mathbb{Z}$.

Lema 2.1.5
Sean $(X,\mathcal{V})$ *y* $(Y,\mathcal{W})$ *espacios pseudo-coarse, además* $A\subset X$ *con la estructura de subespacio.* $\simeq_{pc} rel(A)$ *es una relación de equivalencia.*

Demostración:
La prueba es completamente análoga, sólo que se hace la observación extra de que efectivamente $H_{fh}(x,z)=f(z)$ para cada $x\in A$ y $z\in\mathbb{Z}$. $\langle\clubsuit\rangle$

Al igual que en topología algebraica, llamaremos espacio pseudo-coarse basado al par ordenado $((X,\mathcal{V}),*)$ dónde $*\in X$. Además, si $((X,\mathcal{V}),*)$ y $((Y,\mathcal{W}),*)$ espacios pseudo-coarse basados, diremos que $f:(X,\mathcal{V})\to(Y,\mathcal{W})$ es una función basada si $f(*)=*$, y diremos que H es una homotopía basada si es relativa a $*$. A su vez podemos tener más restricciones, por ejemplo $f:((X,\mathcal{V}),A,A')\to((Y,\mathcal{W}),B,B')$ dónde $B'\hookrightarrow B\hookrightarrow Y$ y $A'\hookrightarrow A\hookrightarrow X$, el cuál tiene un significado análogo.

2.2. Grupos de Homotopía

Para la construcción de los grupos de homotopía procederemos de la forma que lo hace Hatcher (2002), para ello vamos a construir cubos a partir de puntos con las estructuras pseudo-coarse y operaciones naturales. Para esto seguiremos la construcción que se realiza en A-homotopía de gráficas en Babson et al. (2006).

Definición 2.2.1
Sean n *y* m *naturales, entonces*

(1) Denotemos por I_m *al conjunto* $\{0,1,\cdots,m\}$ *que, al observar que existe la inclusión* $I_m\hookrightarrow\mathbb{Z}$*, es dotado con la estructura de subespacio pseudo-coarse.*

(2) Denotemos por I_m^n *al producto cartesiano de* n *espacios pseudo-coarse* I_m *con la estructura pseudo-coarse del producto.*

(3) Llamaremos frontera de I_m^n *al conjunto*

$$\{(i_1,\cdots,i_n):\exists k\in\{1,\cdots,n\}\text{ que cumple que } i_k\in\{0,m\}\}.$$

Este subcojunto de I_m^n *será denotado por* ∂I_m^n.

Considere n, m y m' naturales tal que $m'\geq m$, y $f:I_m^n\to(X,\mathcal{V})$ es una función bornologous, dónde $(X,\mathcal{V})$ es un espacio pseudo-coarse. Entonces podemos construir $(\phi_m^{m'})^n f:=f':I_{m'}^n\to(X,\mathcal{V})$ tal que $f'(i_1,\cdots,i_n)=f(j_1,\cdots,j_n)$ donde $j_k=i_k$ si $0\leq i_k\leq m$ y $j_k=m$ si $m<i_k\leq m'$ para cada $k\in\{1,\cdots,n\}$. Para mostrar que f' es una función bornologous basta ver que

$$(f'\times f')((Ext(\mathcal{Z})\cap I_{m'}^2)\boxtimes\cdots\boxtimes(Ext(\mathcal{Z})\cap I_{m'}^2))=(f\times f)((Ext(\mathcal{Z})\cap I_m^2)\boxtimes\cdots\boxtimes(Ext(\mathcal{Z})\cap I_m^2)),$$

esto es suficiente porque $(Ext(\mathcal{Z}) \cap I^2_{m'}) \boxtimes \cdots \boxtimes (Ext(\mathcal{Z}) \cap I^2_{m'})$ es un conjunto controlado y contiene al resto de conjuntos controlados en el espacio $I^n_{m'}$.

La contención del conjunto de la derecha en el de la izquerda se sigue por definición, por lo que solamente mostraremos la contención en el otro sentido. Sea

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n, a'_1, \cdots, a'_n) \in (Ext(\mathcal{Z}) \cap I^2_{m'}) \boxtimes \cdots \boxtimes (Ext(\mathcal{Z}) \cap I^2_{m'}),$$

donde $(a_i, a'_i) \in (Ext(\mathcal{Z}) \cap I^2_{m'})$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, entonces $a'_i = a_i + k_i$ donde

$$\begin{aligned} k_i \in \{-1, 0, 1\} &\text{ si } a_i \in \{1, \cdots, m' - 1\}, \\ k_i \in \{0, 1\} &\text{ si } a_i = 0, \\ k_i \in \{-1, 0\} &\text{ si } a_i = m', \end{aligned}$$

para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$. Observemos que tenemos los siguientes casos:

- Si $a_i \in \{0, \cdots, m - 1\}$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, entonces $(f' \times f')(a_1, \cdots, a_n, a'_1, \cdots, a'_n) = (f \times f)(a_1, \cdots, a_n, a'_1, \cdots, a'_n)$.

- Si existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $a_i \in \{m, \cdots, m'\}$, entonces $(f' \times f')(a_1, \cdots, a_n, a'_1, \cdots, a'_n) = (f \times f)(b_1, \cdots, b_n, b'_1, \cdots, b'_n)$ donde

$$(b_j, b'_j) = \begin{cases} (a_j, a'_j) & \text{si } 0 \leq b_j \leq m - 1 \\ (m, m - 1) & \text{si } b_j = m \text{ y } b'_j = b_j - 1 \\ (m, m) & \text{si } b_j = m, b'_j \in \{b_j, b_j + 1\} \text{ o } m < b_j \leq m' \end{cases}.$$

Por lo que ambos conjuntos son iguales y f' es efectivamente una función bornologous.

De lo anterior, tomando $n, m, m' \in \mathbb{N}$ con $m \leq m'$ y denotando por F^n_k al conjunto de funciones bornologous con dominio I^n_k e imagen en un espacio pseudo-coarse fijo, tenemos la función $(\phi^{m'}_m)^n F^n_m \to F^n_{m'}$. Así tenemos el sistema directo, Definición A.1.4,

$$\{F^n_m, (\phi^{m'}_m)^n, \mathbb{N}\}$$

con n fijo, donde los conjuntos son funciones. Entonces tenemos la relación de equivalencia $f \sim (\phi^{m'}_m)^n$ y

$$\lim_{\rightarrow} \{F^n_m, (\phi^{m'}_m)^n, \mathbb{N}\} = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} F^n_m / \sim$$

donde denotaremos por $\langle f \rangle$ a la clases de equivalencia.

$f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to ((X, \mathcal{V}), A, *)$ va a denotar que el mínimo m tal que $f' : I^n_m \to (X, \mathcal{V}) \in \langle f \rangle$ satisface que $f'(I^n_m, \partial I^n_m, J^{n-1}_m) \to ((X, \mathcal{V}), A, *)$, donde $J^{n-1}_m := (I^{n-1}_m \times \{m\}) \cup (\partial I^{n-1}_m \times I_m) \subset \partial I^n_m$ y $* \in A \subset X$. Observemos que si se cumple tal condición para f', entonces se satisface para $(\phi^{m'}_m)^n f'$.

Diremos que $\langle f \rangle \simeq_{pc} \langle g \rangle$ si existen m número natural, $f', g' : I^n_m \to (X, \mathcal{V})$ tal que $f' \in \langle f \rangle$, $g' \in \langle g \rangle$ y $f \simeq_{pc} g$.

Observación: *Si lo anterior se cumple para un m natural, claramente se seguirá cumpliendo para $m' < m$, restringiendo el dominio de la homotopía a $I^n_{m'} \subset I^n_m$. Además se cumplirá por $m' > m$ por la forma en que definimos la función $(\phi^{m'}_m)^n$.*

Definición 2.2.2
Sea $n \geq 1$ y $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse basado. Vamos a denotar por $\pi^{pc}_n((X, \mathcal{V}), *)$ al conjunto de las clases de homotopía de las funciones bornologous

$$\langle f \rangle : (I^n, \partial I^n) \to ((X, \mathcal{V}), *).$$

Para $n = 0$, denotaremos por $\pi_0^{pc}((X,\mathcal{V}),*)$ al conjunto de las clases de homotopías de las funciones bornologous

$$f : ((\{*,1\},\Delta_{\{*,1\}}),\{*\}) \to ((X,\mathcal{V}),*)$$

Además, sean $* \in A \subset X$, $n \geq 1$ y $J_m^{n-1} := (I_m^{n-1} \times \{m\}) \cup (\partial I_m^{n-1} \times I_m) \subset \partial I_m^n$, denotaremos por $\pi_n^{pc}((X,\mathcal{V}),A,*)$ al conjunto de las clases de homotopía de las funciones bornologous de la forma

$$\langle f \rangle : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to ((X,\mathcal{V}),A,*).$$

Una vez definidos estos conjuntos, para $n \geq 1$ (y para $n \geq 2$ en homotopía relativa), los dotaremos de una operación y mostraremos son grupos en el sentido algebraico. Previo a esto, completamente análogo a lo que se hace en topología, tenemos la siguiente definición de conexidad en espacios pseudo-coarse.

Definición 2.2.3
Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y $n \geq 0$ entero. Entonces, diremos que $(X,\mathcal{V})$ es $n-conexo$ si $\pi_n^{pc}((X,\mathcal{V}),*)$ es isormorfo a $\{0\}$. En particular, si $(X,\mathcal{V})$ es 0-conexo, solamente diremos que es conexo.

Con el fin de conectar el concepto anterior con su homologo en estructuras coarse, tenemos que:

Definición 2.2.4
Una estructura coarse en X es conexa si cada punto de $X \times X$ pertenece a algún conjunto controlado.

Proposición 2.2.5
Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio coarse. Entonces, es conexo en el sentido de estructuras coarse si, y sólo si, es conexo en el sentido de estructuras pseudo-coarse.

Demostración:
Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio coarse. Entonces,

($\Rightarrow$) Si es conexo en el sentido de estructuras coarse, entonces para cada $x_1, x_2 \in X$ existe un conjunto controlado E por $\mathcal{V}$ que contiene a (x_1,x_2), es decir, $\{(x_1,x_2)\} \in \mathcal{V}$.

En particular, si $x_2 = *$, entonces tenemos la función $H : (\{*,1\}\times\mathbb{Z}, \Delta_{\{*,1\}} \times \mathcal{Z}) \to (X,\mathcal{V})$ tal que $H(x,n) = f(x)$ si $n \leq 0$ y $H(x,n) = g(x)$ si $n \geq 1$, donde $f : ((\{*,1\},\Delta_{\{*,1\}}),\{*\}) \to ((X,\mathcal{V}),*)$ es tal que $f(*) = *$ y $f(1) = x_1$, $g : ((\{*,1\},\Delta_{\{*,1\}}),\{*\}) \to ((X,\mathcal{V}),*)$ es tal que $g(*) = g(1) = *$. Obteniendo que H es una homotopía entre f y g. Como x_1 fue arbitrario, entonces $\pi_0^{pc}((X,\mathcal{V},*)$ es isomorfo a $\{0\}$.

($\Leftarrow$) Si es conexo en el sentido de estructuras pseudo-coarse, entonces toda $f : ((\{*,1\},\Delta_{\{*,1\}}),\{*\}) \to ((X,\mathcal{V}),*) \simeq_{pc} *$ que es la función que manda a ambos puntos a $*$. Así, existe $H : (\{*,1\}\times\mathbb{Z},\Delta_{\{*,1\}}\times\mathcal{Z}) \to (X,\mathcal{V})$, $N < 0 < M$ tal que $H(x,n) = f(x)$ si $n \leq N$ y $H(x,n) = *$ si $m \geq M$.

Por producto de conjuntos, tenemos que

$$\begin{aligned}\{(H(2,N),H(2,N+1)\} \circ \{(H(2,N+1),H(2,N+2)\} \circ \cdots \circ \{(H(2,M-1),H(2,M)\} \\ = \{(H(2,N),H(2,M)\} \in \mathcal{V}\end{aligned}$$

Por lo que, para todo $x \in X$, $\{(x,*)\} \in \mathcal{V}$ y, nuevamente por producto de conjuntos, para todo $x,y \in X$, $\{(x,y)\} \in \mathcal{V}$. $\langle\clubsuit\rangle$

Observación: *Dado que $\pi_n^{pc}((X,\mathcal{V}),A,*) = \pi_n^{pc}((X,\mathcal{V}),*)$ en el caso particular de que $A = \{*\}$, durante el resto de la sección demostraremos para los grupos de homotopía relativa y agregaremos los casos faltantes de homotopía general.*

Definición 2.2.6
Sean $n \geq 1$ y $f,g : I_m^n \to (X,\mathcal{V})$ funciones bornologous, entonces definimos $f \star g : I_{2m}^n \to (X,\mathcal{V})$ como $f \star g(a_1,\cdots,a_n) = f(a_1,\cdots a_n)$ si $0 \leq a_k \leq m$ para cada $k \in \{1,\cdots,n\}$, $f \star g(a_1,\cdots,a_n) = g(a_1 - m,\cdots,a_n)$ si $m < a_1 \leq 2m$ y $0 \leq a_k \leq m$ para cada $k \in \{2,\cdots,n\}$, $f \star g(a_1,\cdots,a_n) = *$ en cualquier otra parte.

Lo natural será mostrar que, para n natural $(\pi_n^{pc}(X,\mathcal{V}),\star)$ es un grupo y para m natural mayor o igual que dos $(\pi_m^{pc}((X,\mathcal{V}),A,*),\star)$ es también un grupo. Para llegar a eso, vamos a detallar algunos resultados preliminares.

Observación: *A partir de este punto, denotaremos por* $Ext(\mathcal{Z}_m) := Ext(\mathcal{Z}) \cap I_m^2$ *y por* $Ext(\mathcal{Z}_m)^n := Ext(\mathcal{Z}) \cap I_m^2 \boxtimes \cdots \boxtimes Ext(\mathcal{Z}) \cap I_m^2$*, cuando ese tipo de producto tiene n factores. Siempre sobre entenderemos que* I_m^n *tiene como estructura pseudo-coarse la colección de subconjuntos de* $Ext(\mathcal{Z}_m)^n$*, salvo que se indique lo contrario.*

Lema 2.2.7
Sea $(X,\mathcal{V})$ *un espacio pseudo-coarse y* $n \geq 2$*. Si* $f,g : (I_m^n, \partial I_m^n, J_m^{n-1}) \to ((X,\mathcal{V}),A,*)$ *son funciones bornologous, entonces* $f\star g$ *es una función bornologous tal que* $f\star g(\partial I_{2m}^n) \subset A$ *y* $f\star g(J_{2m}^{n-1}) = \{*\}$*, por lo que* $f\star g : (I_{2m}^n, \partial I_{2m}^n, J_{2m}^{n-1}) \to ((X,\mathcal{V}),A,*)$.

Sean $f,g : (I_m, \partial I_m) \to ((X,\mathcal{V}),*)$ *funciones bornologous, entonces* $f\star g$ *es una función bornologous tal que* $f\star g(\partial I_{2m}^n) = \{*\}$*, por lo que* $f\star g : (I_m, \partial I_m) \to ((X,\mathcal{V}),*)$.

<u>**Demostración:**</u>
Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y $n \geq 2$. Sean $f,g : (I_m^n, \partial I_m^n, J_m^{n-1}) \to ((X,\mathcal{V}),*)$ funciones bornologous. Sea $(a_1,a_2,\cdots,a_n,a_1',\cdots,a_n') \in Ext(\mathcal{Z}_{2m})^n$, entonces $a_i' = a_i + k_i$ donde $k_i \in \{-1,0,1\}$ si $0 < a_i < 2m$, $k_i \in \{0,1\}$ si $a_i = 0$, $k_i \in \{-1,0\}$ si $a_i = 2m$, para cada $i \in \{1,\cdots,n\}$.

Si $0 \leq a_i < m$ para cada $i \in \{1,\cdots,n\}$, entonces

$$(f\star g \times f\star g)(a_1,\cdots,a_n,a_1',\cdots,a_n') = (f\times f)(a_1,\cdots,a_n,a_1',\cdots,a_n').$$

Por otro lado, si $a_1 = m$ y $0 \leq a_i \leq m$ para cada $i \in \{2,\cdots,n\}$, entonces: si $k_1 = -1$,

$$(f\star g \times f\star g)(m,\cdots,a_n,m+k_1,\cdots,a_n') = (f(m,\cdots,a_n), f(m+k_1,\cdots,a_n')),$$

donde $f(m,\cdots,a_n) = *$. Si $k_1 = 1$,

$$(f\star g \times f\star g)(m,\cdots,a_n,m+k_1,\cdots,a_n') = (g(m,\cdots,a_n), g(m+k_1,\cdots,a_n')),$$

donde $g(m,\cdots,a_n) = *$. Si $k_1 = 0$,

$$(f\star g \times f\star g)(m,\cdots,a_n,m+k_1,\cdots,a_n') = (*,*).$$

Además, sea $0 \leq a_1 \leq m$ y existe $i \in \{2,\cdots,n\}$ tal que $a_i = m$, entonces: si $k_i \in \{0,1\}$,

$$(f\star g \times f\star g)(a_1,\cdots,a_n,a_1',\cdots,a_n') = (*,*),$$

y si $k_i = -1$

$$(f\star g \times f\star g)(a_1,\cdots,a_n,a_1',\cdots,a_n') = (f(a_1,\cdots,a_n), f(a_1',\cdots,a_n')).$$

Por lo que el conjunto de $(f\times f)(a_1,\cdots,a_n,a_1',\cdots,a_n')$ tal que $0 \leq a_i \leq m$ para cada $i \in \{1,\cdots,n\}$ es controlado por $\mathcal{V}$.

Si $m < a_1 \leq 2m$ y $0 \leq a_i \leq m$ para cada $i \in \{2,\cdots n\}$ se sigue por la definición que

$$(f\star g \times f\star g)(a_1,\cdots,a_n,a_1',\cdots,a_n') = (g\times g)(a_1 - m,\cdots,a_n,a_1' - m,\cdots,a_n').$$

Por último, en cualquier otro valor de a_i que no sea los mencionados, se tiene que

$$(f\star g \times f\star g)(a_1,\cdots,a_n,a_1',\cdots,a_n') = (*,*).$$

Por lo que finalmente obtenemos que $f\star g$ es una función bornologous.

Restar observar lo que sucede con $f\star g(\partial I_{2m}^n)$ y $f\star g(J_{2m}^{n-1})$. Suponga que existe $k \in \{1,\cdots,n\}$ tal que $a_k \in \{0,2m\}$, por lo que $(a_1,\cdots,a_n) \in \partial I_{2m}^n$ y tenemos los siguientes casos:

- Si $0 \leq a_i \leq m$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$. Entonces $a_k = 0$ y $f \star g(a_1, \cdots, a_n) = f(a_1, \cdots, a_n) \in A$. Si $(a_1, \cdots, a_n) \in J_{2m}^{n-1}$, se tiene que $f(a_1, \cdots, a_n) = *$, porque $a_n \neq 0$ o $a_n = 0$ y existe $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ tal que $a_i = 0$.

- Si $m < a_1 \leq 2m$ y $0 \leq a_i \leq m$ para cada $i \in \{2, \cdots, n\}$. Entonces $a_1 = 2m$ y $f \star g(a_1, \cdots, a_n) = g(a_1 - m, \cdots, a_n) \in A$, o $k \in \{2, \cdots, n\}$, $a_k = 0$ y $f \star g(a_1, \cdots, a_n) = g(a_1 - m, \cdots, a_n) \in A$. Si $(a_1, \cdots, a_n) \in J_{2m}^{n-1}$, se tiene que $g(a_1 - m, \cdots, a_n) = *$.

- En cualquier otra parte, $f \star g(a_1, \cdots, a_n) = *$, por lo que no hay nada que hacer.

Así, $f \star g(\partial I_{2m}^n) \subset A$ y $f \star g(J_{2m}^{n-1}) = \{*\}$.

Ahora bien, si $f, g : (I_m, \partial I_m) \to ((X, \mathcal{V}), *)$ son funciones bornologous, es claro que

$$f \star g(I_{2m}, \partial I_{2m}) \to ((X, \mathcal{V}), *)$$

y es suficiente observar que $(f \star g \times f \star g)(m, m+1) = (*, g(1))$, $(f \star g \times f \star g)(m, m) = (*, *)$ y $(f \star g \times f \star g)(m, m-1) = (*, f(m-1))$ para concluir que es una función bornologous. $\langle \clubsuit \rangle$

Observación: *Si uno quiere imaginar el procedimiento realizado hasta el momento, tome $n = m = 3$ y observe que primero vimos que la imagen del cubo $\{0, 1, 2\}^3$ fuera pseudo controlado, después la cara dónde se pegará el cubo de g, $\{3\} \times \{0, 1, 2, 3\}^2$, y por último el resto del cubo $\{0, 1, 2, 3\}^3$, de hecho un poco más, $\{0, 1, 2, 3\} \times \{3\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{3\}$.*

Definición 2.2.8
Sean $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo coarse, $f : I_m^n \to (X, \mathcal{V})$. Tomemos $n' \in \{1, \cdots, n\}$ y $m', m'' \in \{0, 1, \cdots, m\}$, definamos $R_{n'}^{(m', m'')}(f) : I_m^n \to (X, \mathcal{V})$ tal que

$$R_{n'}^{(m', m'')}(f)(a_1, \cdots, a_{n'}, \cdots, a_n) = f(a_1, \cdots, a_{n'}, \cdots, a_n)$$

si $a_{n'} \in \{0, \cdots, m''-1, m''+1, \cdots, m\}$, y

$$R_{n'}^{(m', m'')}(f)(a_1, \cdots, a_{n'}, \cdots, a_n) = f(a_1, \cdots, a_{n'} = m', \cdots, a_n)$$

si $a_{n'} = m'''$.

Lema 2.2.9
Sean $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo coarse, $f : I_m^n \to (X, \mathcal{V})$ función bornlogous y suponga que existe $n' \in \{1, \cdots, n\}$ y $m' \in \{0, 1, \cdots, m\}$ tal que $\{(f(a_1, \cdots, a_{n'} = m', \cdots, a_n), f(b_1, \cdots, b_{n'} = m'+2, \cdots, b_n))\} \in \mathcal{V}$ con $0 \leq a_i \leq m$, $a_i = b_i + k_i$ y $k_i \in \{-1, 0, 1\}$ para cada $i \in \{1, \cdots, n'-1, n'+1, \cdots, n\}$. Entonces, se tiene que $R_{n'}^{(m', m'+1)}(f)$ y $R_{n'}^{(m'+2, m'+1)}(f)$ son funciones bornologous, además $R_{n'}^{(m', m'+1)}(f) \simeq_{pc} f \simeq_{pc} R_{n'}^{(m'+2, m'+1)}$.

<u>**Demostración:**</u>
Sean $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo coarse, $f : I_m^n \to (X, \mathcal{V})$ función Bornlogous y sean $n' \in \{1, \cdots, n\}$ y $m' \in \{0, 1, \cdots, m\}$ tal que $\{(f(a_1, \cdots, a_{n'} = m', \cdots, a_n), f(a_1, \cdots, a_{n'} = m'+2, \cdots, a_n))\} \in \mathcal{V}$ con $0 \leq a_i \leq m$ para cada $i \in \{1, \cdots, n'-1, n'+1, \cdots, n\}$.

Haremos la prueba únicamente para $R_{n'}^{(m', m'+1)}(f)$, dado que el otro caso es completamente análogo. Sea $(a_1, \cdots, a_n, a'_1, \cdots, a'_n) \in Ext(\mathcal{Z}_m)^n$, entonces $a'_i = a_i + k_i$ con $k_i \in \{-1, 0, 1\}$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$. Observemos que los casos de interés son cuando $a_{n'} \in \{m', m'+1, m'+2\}$, dado que para el resto $(R_{n'}^{(m', m'+1)}(f) \times R_{n'}^{(m', m'+1)}(f))(a_1, \cdots, a_n, a'_1, \cdots, a'_n) = (f \times f)(a_1, \cdots, a_n, a'_1, \cdots, a'_n)$.

Sea $a_{n'} = m'$, entonces se tiene que

$$(R_{n'}^{(m', m'+1)}(f) \times R_{n'}^{(m', m'+1)}(f))(a_1, \cdots, a_n, a'_1, \cdots, a'_n) = (f \times f)(a_1, \cdots, a_n, a'_1, \cdots, a'_n)$$

si $k_i \in \{-1, 0\}$ y

$$(R_{n'}^{(m',m'+1)}(f) \times R_{n'}^{(m',m'+1)}(f))(a_1, \cdots, a'_n) = (f \times f)(b_1, \cdots, b'_1)$$

con $b_j = a_j$ y $b'_j = a'_j$ cuando $j \in \{1, \cdots, n'-1, n'+1, \cdots, n\}$ y $b_{n'} = m' = b'_{n'}$ si $k_i = 1$, donde ambos son elementos de un conjunto controlado de $\mathcal{V}$ por ser f una función bornologous.

Sea $a_{n'} = m' + 2$, entonces se tiene que

$$(R_{n'}^{(m',m'+1)}(f) \times R_{n'}^{(m',m'+1)}(f))(a_1, \cdots, a_n, a'_1, \cdots, a'_n) = (f \times f)(a_1, \cdots, a_n, a'_1, \cdots, a'_n)$$

si $k_i \in \{0, 1\}$, que es elemento de un conjunto controlado porque f es una función bornologous, y

$$(R_{n'}^{(m',m'+1)}(f) \times R_{n'}^{(m',m'+1)}(f))(a_1, \cdots, a'_n) = (f \times f)(b_1, \cdots, b'_1)$$

con $b_j = a_j$ y $b'_j = a'_j$ cuando $j \in \{1, \cdots, n'-1, n'+1, \cdots, n\}$ y $b_{n'} = m' + 2$ $b'_{n'} = m'$ si $k_i = 1$, que es un elemento de un conjunto controlado de $\mathcal{V}$ por hipótesis.

De igual forma, si $a_{n'} = m'+1$, entonces la imagen del punto será elemento de un conjunto controlado dado que f es una función bornologous si $k_i \in \{-1, 0\}$ y lo será por hipótesis si $k_i = 1$. Obteniendo que $R_{n'}^{(m',m'+1)}(f)$ es una función bornologous.

Para demostrar que $f \simeq_{pc} R_{n'}^{(m',m'+1)}(f)$ vamos a definir $H : I_m^n \times \mathbb{Z} \to (X, \mathcal{V})$ tal que $H(a, z) = f(a)$ si $z \leq 0$ y $H(a, z) = Re_{n'}^{(m',m'+1)}$ si $z > 0$, para toda $a \in I_m^n$.

Sea $(a_1, \cdots, a_n, z, a'_1, \cdots, a'_n, z') \in Ext(\mathcal{Z}_m)^n \boxtimes Ext(\mathcal{Z})$, entonces $a'_i = a_i + k_i$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ y $z' = z + k$. Nuevamente observemos que los casos interesantes son cuando $z \in \{0, 1\}$ y $a_{n'} \in \{m', m' + 1, m' + 2\}$.

Sea $z = 0$, entonces $(H \times H)(a_1, \cdots, z, a'_1, \cdots, z') = (f \times f)(a_1, \cdots, a'_n)$ si $k \in \{-1, 0\}$, por lo que el resultado es claro. Por otro lado, si $k = 1$, entonces

$$(H \times H)(a_1, \cdots, z, a'_1, \cdots, z') = (f \times R_{n'}^{(m',m'+1)}(f))(a_1, \cdots, a'_n).$$

Tomemos $a_{n'} = m'$, entonces

$$(f \times R_{n'}^{(m',m'+1)}(f))(a_1, \cdots, a'_n) = (f \times f)(a_1, \cdots, a'_n)$$

si $k_{n'} \in \{-1, 0\}$, por lo que es elemento de un conjunto controlado, y

$$(f \times R_{n'}^{(m',m'+1)}(f))(a_1, \cdots, a'_n) = (f \times f)(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b'_n)$$

si $k_{n'} = 1$ donde $b_i = a_i$ cuando $i \in \{1, \cdots, n'-1, n'+1, \cdots, n\}$ y $b'_{n'} = m'$, que ya hemos observado que se encuentra en un conjunto controlado.

Tomemos $a_{n'} = m' + 2$, entonces

$$(f \times R_{n'}^{(m',m'+1)}(f))(a_1, \cdots, a'_n) = (f \times f)(a_1, \cdots, a'_n)$$

si $k_{n'} \in \{0, 1\}$, por lo que es elemento de un conjunto controlado, y

$$(f \times R_{n'}^{(m',m'+1)}(f))(a_1, \cdots, a'_n) = (f \times f)(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b'_n)$$

si $k_{n'} = -1$ donde $b_i = a_i$ cuando $i \in \{1, \cdots, n'-1, n'+1, \cdots, n\}$ y $b'_{n'} = m'$, que ya hemos observado que se encuentra en un conjunto controlado por la hipótesis.

Observemos que los razonamientos son parecidos para $a_{n'} = m' + 1$. La prueba se sigue de forma análoga si $z = 1$. Así, $f \simeq_{pc} R_{n'}^{(m',m'+1)}$. $\langle\clubsuit\rangle$

Con esto, ya podemos demostrar que las clases de homotopía en $\pi_n^{pc}((X, \mathcal{V}), *)$ para un espacio pseudo-coarse conexo son iguales salvo isomorfismo cuando se le cambia el punto base.

Observación: *Suponiendo que $A \subset X$ con la estructura del subespacio pseudo-coarse es conexo, entonces podemos hacer un procedimiento similar para llegar al mismo resultado con los conjuntos de homotopía relativa.*

Corolario 2.2.9.1
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse, $n \geq 1$ y $f : (I^n_m, \partial I^n_m) \to ((X, \mathcal{V}), *)$ una función bornologous. Definimos, para cada $i = (i_1, \cdots, i_n)$ donde $i_k \in \{0, 1\}$, $f_i : (I^n_{m+1}, \partial I^n_m) \to ((X, \mathcal{V}), *)$ tal que $f_i(a_1 + i_1, \cdots, a_n + i_n) = f(a_1, \cdots, a_n)$ cuando $0 \leq a_k \leq m$ y $f_i(a_1, \cdots, a_n) = *$ en cualquier otra parte. Entonces, para cada $i \in \{0, 1\}^n$ se cumple que f_i es bornologous y $\langle f_i \rangle \simeq_{pc} \langle f \rangle$.

Sea $n \geq 2$ y $f : (I^n_m, \partial I^n_m, J^{n-1}_m) \to ((X, \mathcal{V}), A, *)$ una función bornologous. Definimos, para cada $i = (i_1, \cdots, i_{n-1})$ donde $i_k \in \{0, 1\}$, $f_i : (I^n_{m+1}, \partial I^n_m, J^{n-1}_m) \to ((X, \mathcal{V}), A, *)$ tal que $f_i(a_1 + i_1, \cdots, a_n) = f(a_1, \cdots, a_n)$ cuando $0 \leq a_k \leq m$ y $f_i(a_1, \cdots, a_n) = *$ en cualquier otra parte. Entonces, para cada $i \in \{0, 1\}^n$ se cumple que f_i es bornologous y $\langle f_i \rangle \simeq_{pc} \langle f \rangle$.

Demostración:
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse, $f : (I^n_m, \partial I^n_m) \to ((X, \mathcal{V}), *)$ una función bornologous. Definimos, para cada $i = (i_1, \cdots, i_n)$ donde $i_k \in \{0, 1\}$, $f_i : (I^n_{m+1}, \partial I^n_m) \to ((X, \mathcal{V}), *)$ tal que $f_i(a_1 + i_1, \cdots, a_n + i_n) = f(a_1, \cdots, a_n)$ cuando $0 \leq a_k \leq m$ y $f_i(a_1, \cdots, a_n) = *$ en cualquier otra parte.

Sea $f' \in \langle f \rangle$ tal que $f' : (I^n_{m+1}, \partial I^n_{m+1}) \to ((X, \mathcal{V}), *)$ y empecemos tomando $i = (i_1, \cdots, i_n)$ tal que $i_k = 0$ excepto en $i_{k'}$. Por el Lema 2.2.9, observando que $f'(a_1, \cdots, a_n) = *$ si $a_k \in \{m, m + 1\}$ para alguna $k \in \{1, \cdots, n\}$, tenemos que

$$f' \simeq_{pc} R^{(0,1)}_{k'} R^{(1,2)}_{k'} \cdots R^{(m-2,m-1)}_{k'} R^{(m-1,m)}_{k'}(f').$$

Además, si $a_k \in \{0, 1, \cdots, m + 1\}$, entonces

$$\begin{aligned}
R^{(a_k,a_k+1)}_{k'} \cdots R^{(m-1,m)}_{k'}(f')(a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_n) =& f'(a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_n)\\
R^{(a_k-1,a_k)}_{k'} \cdots R^{(m-1,m)}_{k'}(f')(a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_n) =& f'(a_1, \cdots, a_k - 1, \cdots, a_n)\\
R^{(0,1)}_{k'} \cdots R^{(m-1,m)}_{k'}(f')(a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_n) =& f'(a_1, \cdots, a_k - 1, \cdots, a_n)
\end{aligned}$$

Por lo que efectivamente $f' \simeq_{pc} f_i$. Si ahora tomamos $i' = (i'_1, \cdots, i'_n)$ tal que $i'_k = 0$ excepto en $i'_{k'}$ y $i'_{k''}$, entonces tendríamos que

$$f' \simeq_{pc} f_i \simeq_{pc} R^{(0,1)}_{k''} R^{(1,2)}_{k''} \cdots R^{(m-2,m-1)}_{k''} R^{(m-1,m)}_{k''}(f_i) = f_{i'}.$$

Por lo que, repitiendo esto un número finito de pasos, obtenemos lo deseado. El procedimiento es completamente análogo para $f : (I^n_m, \partial I^n_m, J^{n-1}_m) \to ((X, \mathcal{V}), A, *)$. $\langle\clubsuit\rangle$

Corolario 2.2.9.2
Sea $(X, \mathcal{E})$ un espacio coarse. Entonces $\pi^{pc}_n((X, \mathcal{E}), *) \approx \{0\}$ si $n \geq 1$.

Demostración:
Sea $(X, \mathcal{E})$ un espacio coarse y $[\langle f \rangle] \in \pi^{pc}_n((X, \mathcal{E}), *)$, entonces existe m natural tal que $f : (I^n_m, \partial I^n_m) \to ((X, \mathcal{V}), *)$. Como $\mathcal{E}$ es una estructura coarse, entonces por producto de conjuntos obtenemos que

$$\begin{aligned}
\{(f(a_1, \cdots a_i + 2, \cdots a_n), f(a_1, \cdots a_i, \cdots a_n))\} \in \mathcal{E}\\
\{(f(a_1, \cdots a_i - 2, \cdots a_n), f(a_1, \cdots a_i, \cdots a_n))\} \in \mathcal{E}
\end{aligned}$$

con $i \in \{1, \cdots, n\}$ fija y $a_i \in \{0, 1, \cdots, m\}$. Así aplicando el lema, obtenemos que $f \simeq_{pc} *$, concluyendo lo deseado. $\langle\clubsuit\rangle$

Teorema 2.2.10 (Grupos de homotopía)
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y n un número natural.

(a) *Sean* $n \geq 2$, $[f],[g] \in \pi_n^{pc}((X,\mathcal{V}),A)$. *Entonces* $(\pi_n^{pc}((X,\mathcal{V}),A),\star)$ *es un grupo dónde* $[f]\star[g] := [f\star g]$.

(b) *Sean* $n \geq 3$, $[f],[g] \in \pi_n^{pc}((X,\mathcal{V}),A)$. *Entonces* $(\pi_n^{pc}((X,\mathcal{V}),A),\star)$ *es un grupo abeliano.*

(c) *Sean* $n \geq 1$, $[\langle f\rangle],[\langle g\rangle] \in \pi_n^{pc}(X,\mathcal{V})$. *Entonces* $\pi_n^{pc}((X,\mathcal{V}),*)$ *es un grupo dónde* $[\langle f\rangle]\star[\langle g\rangle] := [\langle f\star g\rangle]$.

(d) *Sean* $n \geq 2$, $[\langle f\rangle],[\langle g\rangle] \in \pi_n^{pc}(X,\mathcal{V})$. *Entonces* $\pi_n^{pc}((X,\mathcal{V}),*)$ *es un grupo abeliano.*

Demostración:
Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y n un número natural. Empecemos por mostrar que $\star$ está bien definido en las clases de equivalencia.

Sean $n \geq 2$ y $[\langle f\rangle],[\langle g\rangle] \in \pi_n^{pc}((X,\mathcal{V}),A,*)$ y tomemos $\langle f'\rangle \in [\langle f\rangle]$ y $\langle g'\rangle \in [\langle g\rangle]$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f,f',g,g' : (I_m^n,\partial I_m^n,J_m^{n-1}) \to ((X,\mathcal{V}),A,*)$ y existe $H_{f,f'}$ y $H_{g,g'}$ homotopías relativas en ∂I_m^n entre f,f' y g,g', respectivamente. Entonces definimos $H' : I_{2m}^n \times \mathbb{Z} \to (X,\mathcal{V})$ tal que $H'(a,z) = H_{f,f'}(a,z)$ si $a = (a_1,\cdots a_n)$, $a_k \in \{0,\cdots,m\}$ si $k \in \{1,\cdots,n\}$ y $z \in \mathbb{Z}$, $H'(a,z) = H_{g,g'}(\hat{a},z)$ si $a = (a_1,\cdots a_n)$, $\hat{a} = (a_1 - m, a_2,\cdots,a_n)$, $a_1 > m$ $a_k \in \{0,\cdots,m\}$ si $k \in \{1,\cdots,n\}$ y $z \in \mathbb{Z}$, y $H'(a,z) = *$ en cualquier otra parte. Claramente H' es una homotopía entre $f\star g, f'\star g'$, por lo que $[\langle f\star g\rangle] = [\langle f'\star g'\rangle]$ (Completamente análogo si $n=1$ y $[\langle f\rangle],[\langle g\rangle] \in \pi_1^{pc}((X,\mathcal{V}),*)$).

Mostremos ahora que $(\pi_n^{pc}((X,\mathcal{V}),A,*),\star)$. Sean $[\langle f\rangle],[\langle g\rangle],[\langle h\rangle] \in \pi_n^{pc}((X,\mathcal{V}),A,*)$.

gp1. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $[\langle f\rangle],[\langle g\rangle],[\langle h\rangle] : (I_m^n,\partial I_m^n,J_m^{n-1}) \to ((X,\mathcal{V}),A,*)$. Tomemos $f' \in \langle f\rangle$ y $h' \in \langle h\rangle$ tal que $f,h : (I_{2m}^n,\partial I_{2m}^n,J_{2m}^n) \to ((X,\mathcal{V}),A,*)$. Entonces, por el Lema 2.2.9,

$$(f\star g)\star h' \simeq_{pc} R_1^{4m-2,4m-1}\cdots R_1^{3m-1,3m}((f\star g)\star h')\ rel(\partial I_{4m}^n, J_{4m}^{n-1})$$

Llamemos $D_1^i := R_1^{i+m-1,i+m}\cdots R_1^{i,i+1}$, entonces

$$\begin{aligned}(f\star g)\star h' &\simeq_{pc} D_1^{3m-1}((f\star g)\star h')\ rel(\partial I_{4m}^n, J_{4m}^{n-1})\\ &\simeq_{pc} D_1^{3m-2}D_1^{3m-1}((f\star g)\star h')\ rel(\partial I_{4m}^n, J_{4m}^{n-1})\\ \vdots &\simeq_{pc} \vdots\\ &\simeq_{pc} D_1^{m}\cdots D_1^{3m-2}D_1^{3m-1}((f\star g)\star h')\ rel(\partial I_{4m}^n, J_{4m}^{n-1})\\ &= f'\star(g\star h).\end{aligned}$$

Obteniendo que $([\langle f\rangle]\star[\langle g\rangle])\star[\langle h\rangle]) = [\langle f\rangle]\star([\langle g\rangle]\star[\langle h\rangle])$.

gp2. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $[\langle f\rangle],[\langle *\rangle] : (I_m^n,\partial I_m^n) \to ((X,\mathcal{V}),*)$. Claramente $f\star * \in \langle f\rangle$, por lo que $[\langle f\star *\rangle] \simeq_{pc} [\langle f\rangle]$. Por otro lado, por Lema 2.2.9,

$$*\star f \simeq_{pc} R_1^{2,1}\cdots R_1^{m+1,m}(*\star f)\ rel(\partial I_{4m}^n, J_{4m}^{n-1})$$

Volvamos a definir D_1^i de la siguiente forma, $D_1^i := R_1^{i+1-m,i-m}\cdots R_1^{i,i-1}$, entonces

$$\begin{aligned}*\star f &\simeq_{pc} D_1^{m+1}(*\star f)\ rel(\partial I_{4m}^n, J_{4m}^{n-1})\\ &\simeq_{pc} D_1^{m+2}D_1^{m+1}(*\star f)\ rel(\partial I_{4m}^n, J_{4m}^{n-1})\\ \vdots &\simeq_{pc} \vdots\\ &\simeq_{pc} D_1^{2m}\cdots D_1^{m+2}D_1^{m+1}(*\star f)\ rel(\partial I_{4m}^n, J_{4m}^{n-1})\\ &= f\star * \in \langle f\rangle.\end{aligned}$$

Obteniendo que $[\langle f\rangle]\star[\langle *\rangle]=[\langle f\rangle]=[\langle *\rangle]\star[\langle f\rangle]$.

gp3. Existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $f:(I^n_m,\partial I^n_m)\to((X,\mathcal{V}),*)$. Definamos $f^{-1}:(I^n_m,\partial I^n_m)\to((X,\mathcal{V}),*)$ tal que $f^{-1}(a_1,\cdots,a_n)=f(m-a_1,\cdots,a_n)$. Ahora definimos $D_1:=R_1^{m+1,m}$ y $D_i:=D_{i-1}R_1^{m-i,m+1-i}R_1^{m+i,m+i-1}$. Así, es fácil observar lo siguiente

$$\begin{aligned} f\star f^{-1} &\simeq_{pc} D_1(f\star f^{-1})\ rel(\partial I^n_{4m},J^{n-1}_{4m})\\ &\simeq_{pc} D_2D_1(f\star f^{-1})\ rel(\partial I^n_{4m},J^{n-1}_{4m})\\ \vdots &\simeq_{pc} \vdots\\ &\simeq_{pc} D_m\cdots D_2D_1(f\star f^{-1})\ rel(\partial I^n_{4m},J^{n-1}_{4m})\\ &= * \end{aligned}$$

Exactamente con los mismos pasos, $f^{-1}\star f\simeq_{pc} *$.

Con un procedimiento completamente análogo podemos mostrar que $\pi_1((X,\mathcal{V}),*)$ es un grupo bajo la operación $\star$.

Para probar que el grupo conmuta bajo $\star$ vamos a definir las siguiente operaciones. Sean $m',m''\in\{0,\cdots,m\}$ y $f:I^n_{2m}\to(X,\mathcal{V})$, tenemos las siguientes operaciones

- $R_{1,\leftrightarrow}^{(m',m'')}$ tal que si $a_1=m''$ y $a_2\in\{0,\cdots,m\}$, entonces

$$R_{1,\leftrightarrow}^{m',m''}(f)(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f(m',a_2,\cdots,a_n)$$

y en cualquier otro caso tenemos que

$$R_{1,\leftrightarrow}^{m',m''}(f)(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

- $R_{2,\leftrightarrow}^{(m',m'')}$ tal que si $a_1=m''$ y $a_2\in\{m+1,\cdots,2m\}$, entonces

$$R_{2,\leftrightarrow}^{m',m''}(f)(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f(m',a_2,\cdots,a_n)$$

y en cualquier otro caso tenemos que

$$R_{2,\leftrightarrow}^{m',m''}(f)(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

- $R_{1,\updownarrow}^{(m',m'')}$ tal que si $a_2=m''$ y $a_1\in\{0,\cdots,m\}$, entonces

$$R_{1,\updownarrow}^{m',m''}(f)(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f(a_1,m',\cdots,a_n)$$

y en cualquier otro caso tenemos que

$$R_{1,\updownarrow}^{m',m''}(f)(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

- $R_{2,\updownarrow}^{(m',m'')}$ tal que si $a_2=m''$ y $a_1\in\{m+1,\cdots,2m\}$, entonces

$$R_{2,\updownarrow}^{m',m''}(f)(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f(a_1,m',\cdots,a_n)$$

y en cualquier otro caso tenemos que

$$R_{2,\updownarrow}^{m',m''}(f)(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

Lema 2.2.11
Sea $f : I_{2m}^n$ una función bornologous y suponga que existe $m' \in \{0, 1, \cdots, 2m\}$ tal que

- $\{(f(m', a_2, \cdots, a_n), f(m'+2, a_2, \cdots, a_n))\} \in \mathcal{V}$ *con* $0 \leq a_i \leq m$ *para cada* $i \in \{2, 3, \cdots, n\}$. *Si* $\{(f(m', a_2, \cdots, a_n), f(m'+1, a_2+k_2, \cdots, a_n+k_n))\} \in \mathcal{V}$ *donde si* $a_i = 0$, $k_i = 0$ *y si* $a_i = m$, $k_i = 1$ *con* $0 \leq a_i \leq m$ *para cada* $i \in \{2, 3, \cdots, n\}$, *entonces se tiene que* $R_{1,\leftrightarrow}^{m',m'+1}(f) \simeq_{pc} f$. *Si* $\{(f(m'+2, a_2, \cdots, a_n), f(m'+1, a_2+k_2, \cdots, a_n+k_n))\} \in \mathcal{V}$ *donde si* $a_i = 0$, $k_i = 0$ *y si* $a_i = m$, $k_i = 1$ *con* $0 \leq a_i \leq m$ *para cada* $i \in \{2, 3, \cdots, n\}$, *entonces se tiene que* $R_{1,\leftrightarrow}^{m'+2,m'+1}(f) \simeq_{pc} f$.

- $\{(f(m', a_2, \cdots, a_n), f(m'+2, a_2, \cdots, a_n))\} \in \mathcal{V}$ *con* $m < a_2 \leq 2m$ *y* $0 \leq a_i \leq m$ *para cada* $i \in \{3, \cdots, n\}$. *Si* $\{(f(m', a_2, \cdots, a_n), f(m'+1, a_2+k_2, \cdots, a_n+k_n))\} \in \mathcal{V}$ *donde si* $a_2 = m+1$, $k_2 = -1$, *si* $a_2 = 2m$, $k_2 = 0$, *si* $a_i = 0$, $k_i = 0$ *y si* $a_i = m$, $k_i = 1$ *con* $0 \leq a_i \leq m$ *para cada* $i \in \{3, \cdots, n\}$, *entonces se tiene que* $R_{2,\leftrightarrow}^{m',m'+1}(f) \simeq_{pc} f$. *Si* $\{(f(m'+2, a_2, \cdots, a_n), f(m'+1, a_2+k_2, \cdots, a_n+k_n))\} \in \mathcal{V}$ *donde si* $a_2 = m+1$, $k_2 = -1$, *si* $a_2 = 2m$, $k_2 = 0$, *si* $a_i = 0$, $k_i = 0$ *y si* $a_i = m$, $k_i = 1$ *con* $0 \leq a_i \leq m$ *para cada* $i \in \{3, \cdots, n\}$, *entonces se tiene que* $R_{2,\leftrightarrow}^{m'+2,m'+1}(f) \simeq_{pc} f$.

- $\{(f(a_1, m', a_3, \cdots, a_n), f(a_1, m'+2, a_3, \cdots, a_n))\} \in \mathcal{V}$ *con* $0 \leq a_i \leq m$ *para cada* $i \in \{1, 3, \cdots, n\}$. *Si* $\{(f(a_1, m', a_3, \cdots, a_n), f(a_1+k_1, m'+1, a_3+k_3, \cdots, a_n+k_n))\} \in \mathcal{V}$ *donde si* $a_i = 0$, $k_i = 0$ *y si* $a_i = m$, $k_i = 1$ *con* $0 \leq a_i \leq m$ *para cada* $i \in \{1, 3, \cdots, n\}$, *entonces se tiene que* $R_{1,\updownarrow}^{m',m'+1}(f) \simeq_{pc} f$. *Si* $\{(f(a_1, m'+2, a_3, \cdots, a_n), f(a_1+k_1, m'+1, a_3+k_3, \cdots, a_n+k_n))\} \in \mathcal{V}$ *donde si* $a_i = 0$, $k_i = 0$ *y si* $a_i = m$, $k_i = 1$ *con* $0 \leq a_i \leq m$ *para cada* $i \in \{1, 3, \cdots, n\}$, *entonces se tiene que* $R_{1,\updownarrow}^{m'+2,m'+1}(f) \simeq_{pc} f$.

- $\{(f(a_1, m', a_3, \cdots, a_n), f(a_1, m'+2, a_3, \cdots, a_n))\} \in \mathcal{V}$ *con* $m < a_1 \leq 2m$ *y* $0 \leq a_i \leq m$ *para cada* $i \in \{3, \cdots, n\}$. *Si* $\{(f(a_1, m', a_3, \cdots, a_n), f(a_1+k_1, m'+1, a_3+k_2, \cdots, a_n+k_n))\} \in \mathcal{V}$ *donde si* $a_1 = m+1$, $k_1 = -1$, *si* $a_1 = 2m$, $k_1 = 0$, *si* $a_i = 0$, $k_i = 0$ *y si* $a_i = m$, $k_i = 1$ *con* $0 \leq a_i \leq m$ *para cada* $i \in \{3, \cdots, n\}$, *entonces se tiene que* $R_{2,\updownarrow}^{m',m'+1}(f) \simeq_{pc} f$. *Si* $\{(f(a_1, m'+2, a_3, \cdots, a_n), f(a_1+k_1, m'+1, a_3+k_3, \cdots, a_n+k_n))\} \in \mathcal{V}$ *donde si* $a_1 = m+1$, $k_1 = -1$, *si* $a_1 = 2m$, $k_1 = 0$, *si* $a_i = 0$, $k_i = 0$ *y si* $a_i = m$, $k_i = 1$ *con* $0 \leq a_i \leq m$ *para cada* $i \in \{3, \cdots, n\}$, *entonces se tiene que* $R_{2,\updownarrow}^{m'+2,m'+1}(f) \simeq_{pc} f$.

Observación: *La prueba tiene argumentos análogos a Lema 2.2.9. Además, podemos definir estás traslaciones y demostrar que son homotópicas para más coordenadas, sin embargo no lo necesitamos en esta prueba.*

grA Sea $n \geq 3$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f, g : (I_m^n, \partial I_n^m, J_m^{n-1}) \to ((X, \mathcal{V}), A, *)$. Entonces, por el lema recién escrito tenemos que

$$\begin{aligned} f \star g &\simeq_{pc} R_{2,\updownarrow}^{m,m+1}(f \star g) \\ &\simeq_{pc} R_{2,\updownarrow}^{m+1,m+2} R_{2,\updownarrow}^{m,m+1}(f \star g) \\ &\simeq_{pc} R_{2,\updownarrow}^{2m-1,2m} \cdots R_{2,\updownarrow}^{m+1,m+2} R_{2,\updownarrow}^{m,m+1}(f \star g) \end{aligned}$$

Llamemos $U^i := R_{2,\updownarrow}^{i+m-1,i+m} \cdots R_{2,\updownarrow}^{i+1,i+2} R_{2,\updownarrow}^{i,i+1}$ y $U := U^1 \cdots U^{m-1} U^m$. Obteniendo que $f \star g \simeq_{pc} U(f \star g)$. Además,

$$\begin{aligned} f \star g &\simeq_{pc} R_{2,\leftrightarrow}^{m,m-1} U(f \star g) \\ &\simeq_{pc} R_{2,\leftrightarrow}^{m-1,m-2} R_{2,\leftrightarrow}^{m,m-1} U(f \star g) \\ &\simeq_{pc} R_{2,\leftrightarrow}^{1,0} \cdots R_{2,\leftrightarrow}^{m-1,m-2} R_{2,\leftrightarrow}^{m,m-1} U(f \star g) \end{aligned}$$

Llamemos $L^i := R^{i-m+1,i-m}_{2,\leftrightarrow} \cdots R^{i-1,i-2}_{2,\leftrightarrow} R^{i,i-1}_{2,\leftrightarrow}$ y $L := L^{2m} \cdots L^{m+1} L^m$. Obteniendo que $f \star g \simeq_{pc} LU(f \star g)$. En el siguiente paso tenemos

$$\begin{aligned} f \star g &\simeq_{pc} R^{m,m+1}_{1,\leftrightarrow} LU(f \star g) \\ &\simeq_{pc} R^{m+1,m+2}_{1,\leftrightarrow} R^{m,m+1}_{1,\leftrightarrow} LU(f \star g) \\ &\simeq_{pc} R^{2m-1,2m}_{1,\leftrightarrow} \cdots R^{m+1,m+2}_{1,\leftrightarrow} R^{m,m+1}_{1,\leftrightarrow} LU(f \star g) \end{aligned}$$

Llamemos $R^i := R^{i+m-1,i+m}_{1,\leftrightarrow} \cdots R^{i+1,i+2}_{1,\leftrightarrow} R^{i,i+1}_{1,\leftrightarrow}$ y $R := R^0 \cdots R^{m-1} R^m$. Obteniendo que $f \star g \simeq_{pc} RLU(f \star g)$. Por último tenemos que

$$\begin{aligned} f \star g &\simeq_{pc} R^{m,m-1}_{1,\updownarrow} RLU(f \star g) \\ &\simeq_{pc} R^{m-1,m-2}_{1,\updownarrow} R^{m,m-1}_{1,\updownarrow} RLU(f \star g) \\ &\simeq_{pc} R^{1,0}_{1,\updownarrow} \cdots R^{m-1,m-2}_{1,\updownarrow} R^{m,m-1}_{1,\updownarrow} RLU(f \star g) \end{aligned}$$

Llamemos $D^i := R^{i-m+1,i-m}_{1,\updownarrow} \cdots R^{i-1,i-2}_{1,\updownarrow} R^{i,i-1}_{1,\updownarrow}$ y $D := D^{2m} \cdots D^{m+1} D^m$. Obteniendo que $f \star g \simeq_{pc} DRLU(f \star g) = g \star f$.

El procedimiento para $\pi_2^{pc}((X, \mathcal{V}), *)$ es completamente análogo, por lo cuál se omite. $\langle\clubsuit\rangle$

Una vez concluida la prueba del resultado anterior, ya podemos llamar al conjunto $\pi_n^{pc}((X, \mathcal{V}), *)$ el n-grupo de homotopía cuando $n \geq 1$ y al conjunto $\pi_n^{pc}((X, \mathcal{V}), A, *)$ el n-grupo de homotopía relativa a A cuando $n \geq 2$.

Vamos a concluir la sección observando que, en los grupos de homotopía, la selección del punto base no es importante cuando tenemos un espacio pseudo-coarse conexo.

Proposición 2.2.12
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse conexo y $*, *_1 \in X$. Entonces, $\pi_n^{pc}((X, \mathcal{V}), *) = \pi_n^{pc}((X, \mathcal{V}), *_1)$ si $n \geq 0$ salvo isomorfismos.

Demostración:
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse conexo y $*, *_1 \in X$ y $n \geq 2$. Existen una homotopía $H : (\{*, 1\} \times \mathbb{Z}, \Delta_{\{*,1\}} \times \mathbb{Z}) \to (X, \mathcal{V})$ y $N < M$ tal que H es una homotopía entre $*$ y $*_1$, es decir, $H(1, n) = *$ si $n \leq N$ y $H(1, n) = *_1$ si $n \geq M$. Sea $[\langle f \rangle] \in \pi_n^{pc}((X, \mathcal{V}), *)$, entonces existe $m \geq 2$ tal que $f : (I^n_m, \partial I^n_m) \to ((X, \mathcal{V}), *)$ y $f' : (I^n_{m+2(M-N)}, \partial I^n_m) \to ((X, \mathcal{V}), *) \in \langle f \rangle$. Así por el Lema 2.2.9, tenemos que

$$\begin{aligned} f' &\simeq_{pc} R_1^{m-1,m}(f') \\ &\simeq_{pc} R_1^{m,m+1} R_1^{m-1,m}(f') \\ &\simeq_{pc} \vdots \vdots \vdots \\ &\simeq_{pc} R_1^{m+M-N-2,m+M-N-1} \cdots R_1^{m,m+1} R_1^{m-1,m}(f'). \end{aligned}$$

Definimos $E_i^k := R_i^{k+M-N-1,k+M-N} \cdots R_i^{k+1,k+2} R_i^{k,k+1}$, entonces

$$\begin{aligned} f' &\simeq_{pc} E_1^{m-1}(f') \\ &\simeq_{pc} E_1^{m-2} E_1^{m-1}(f') \\ &\simeq_{pc} \vdots \vdots \vdots \\ &\simeq_{pc} E_1^0 \cdots E_1^{m-2} E_1^{m-1}(f'). \end{aligned}$$

Además definimos $D_i := E_i^0 \cdots E_i^{m-2} E_i^{m-1}$, entonces

$$\begin{aligned} f' \simeq_{pc} & D_1(f') \\ \simeq_{pc} & D_2 D_1(f') \\ \simeq_{pc} & \vdots \vdots \vdots \\ \simeq_{pc} & D_n \cdots D_2 D_1(f'). \end{aligned}$$

Definamos ahora $f_1 : (I^n_{m+2(M-N)}, \partial I^n_m) \to ((X, \mathcal{V}), *)$ tal que

$$f_1(a_1, \cdots a_n) = D_n \cdots D_2 D_1 f'(a_1, \cdots, a_n)$$

si $M - N \leq a_i \leq m + M - N$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ y

$$f_1(a_1, \cdots a_n) = H(1, N+1)$$

en cualquier otra parte y observamos que $f' \simeq_{pc} f_1$. Además, para cada $q \in \{2, \cdots, M-N\}$, definamos $f_q : (I^n_{m+2(M-N)}, \partial I^n_m) \to ((X, \mathcal{V}), *)$ tal que

$$f_q(a_1, \cdots a_n) = f_{q-1}(a_1, \cdots, a_n)$$

si $M - N - q + 1 \leq a_i \leq m + M - N + q - 1$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ y

$$f_q(a_1, \cdots a_n) = H(1, N+q+1)$$

en cualquier otra parte y observamos que $f' \simeq_{pc} f_q$. Por lo que hemos encontrado una función que manda clases de $\pi_n^{pc}((X, \mathcal{V}), *)$ a clases de $\pi_n^{pc}((X, \mathcal{V}), *_1)$. Haciendo algo análogo encontramos una funciona como inversa.

Definamos está construcción como $\kappa_n(f)$, por lo que $\kappa_n : \pi_n^{pc}((X, \mathcal{V}), *) \to \pi_n^{pc}((X, \mathcal{V}), *_1)$, al proceso inverso lo denotaremos por κ_n^{-1}. Es claro que $\langle \kappa_n^{-1} \kappa_n(f) \rangle \simeq_{pc} \langle f \rangle$ y $\langle \kappa_n \kappa_n^{-1}(g) \rangle \simeq_{pc} \langle g \rangle$, por lo que solamente demostrar que son homomorfismos. Sea $f, f' : (I^n_m, \partial I^n_m) \to ((X, \mathcal{V}), *)$, entonces $\kappa(f), \kappa(f') : (I^n_{m+2(M-N)}, \partial I^n_{m+2(M-N)}) \to ((X, \mathcal{V}), *_1)$. Así, por Lema 2.2.9 y dado que $\kappa(f)(m + 2(M-N) - i, a_2, \cdots, a_n) = \kappa(f')(i, a_2, \cdots, a_n)$ para cada $i \in \{0, \cdots, M-N\}$,

$$\kappa(f) \star \kappa(f') \simeq_{pc} R_1^{m+2(M-N)-1, m+2(M-N)}(\kappa(f) \star \kappa(f'))$$

Definiendo $U_1^i := U_i^{-1} R_1^{m+2(M-N)-i-1, m+2(M-N)-i} R_1^{m+2(M-N)+i+1, m+2(M-N)+i}$ con $i \in \{1, \cdots, M-N\}$ y $U_0 := R_1^{m+2(M-N)-1, m+2(M-N)}$, por lo que

$$\kappa(f) \star \kappa(f') \simeq_{pc} U_{M-N} \cdots U_1 U_0(\kappa(f) \star \kappa(f')),$$

para simplificar, definamos $U := U_{M-N} \cdots U_1 U_0$. Por último definamos

$$M_1^i := R_1^{i-(M-N), i-(M-N)-1} \cdots R_1^{i-1, i-2} R_1^{i, i-1}$$

con $i \in \{m + 3(M-N) + 1, \cdots, m + 4(M-N)\}$, por lo que

$$\kappa(f) \star \kappa(f') \simeq_{pc} M_1^{m+4(M-N)} \cdots M_1^{m+3(M-N)+2} M_1^{m+3(M-N)+1} U(\kappa(f) \star \kappa(f')),$$

Concluyendo que $\langle \kappa(f) \star \kappa(f') \rangle \simeq_{pc} \langle \kappa(f \star f') \rangle$. $\langle \clubsuit \rangle$

2.3. Espacio con Homotopía no Trivial

Claramente, después de la última definición en la sección anterior, queremos mostrar que existe al menos un espacio pseudo-coarse cuyos grupos de homotopía no son todos triviales. Para 0-ésimo grupo de homotopía esto es claro, basta tomar (X, Δ_X) tal que $\#(X) > 1$. Para el primer grupo de homotopía vamos a construir un ejemplo para el cuál vamos a necesitar el concepto de gráficas y su relación con espacios pseudo-coarse finitos.

Definición 2.3.1
Una gráfica G es un par ordenado $(V(G), E(G))$, dónde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío, cuyos elementos llamaremos vértices, y $E(G)$ es una colección de conjuntos $\{v_1, v_2\}$ dónde $v_1, v_2 \in V(G)$ y $v_1 \neq v_2$, cuyos elementos llamaremos aristas. Llamaremos orden de G a la cardinalidad de $V(G)$ y tamaño de G a la cardinalidad de $E(G)$. Dos vértices $u, v \in V(G)$ son llamados adyacentes cuando $e = \{u, v\} \in E(G)$.

Proposición 2.3.2
Sea $\mathcal{PCF}$ el conjunto de todos las espacios pseudo-coarse de la forma $(X, \mathcal{V})$ tal que $\#(X) < \infty$ y $\mathcal{G}$ el conjunto de todas las gráficas. Entonces $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{PCF}$ tal que para cada $(V(G), E(G)) \in \mathcal{G}$ $\phi(V(G), E(G)) = (V(G), \mathcal{V})$ dónde $\mathcal{V}$ es la colección de subconjuntos de $V(G) \times V(G)$ que están contenidos en el conjunto

$$\left(\bigcup_{v \in V(G)} (v, v)\right) \cup \left(\bigcup_{\{v_1, v_2\} \in E(G)} (v_1, v_2) \cup (v_2, v_1)\right)$$

está bien definida y es una función biyéctiva.

<u>**Demostración:**</u>
Sea $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{PCF}$ tal que para cada $(V(G), E(G)) \in \mathcal{G}$ $\phi(V(G), E(G)) = (V(G), \mathcal{V})$ dónde $\mathcal{V}$ es la colección de subconjuntos de $V(G) \times V(G)$ que están contenidos en el conjunto

$$Ext(G) \coloneqq \left(\bigcup_{v \in V(G)} (v, v)\right) \cup \left(\bigcup_{\{v_1, v_2\} \in E(G)} (v_1, v_2) \cup (v_2, v_1)\right)$$

Para observar que ϕ está bien definida, basta ver que llega a un espacio pseudo-coarse. Así, sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica y llamemos $\mathcal{V}$ a la estructura pseudo-coarse de $\phi(G)$, entonces

pc1. Observemos que $\Delta_{V(G)} = \cup_{v \in V(G)(v,v)} \subset Ext(G)$.

pc2. Sea $B \in \mathcal{V}$ y $A \subset B$, entonces $A \subset Ext(G)$, por lo que $A \in \mathcal{V}$.

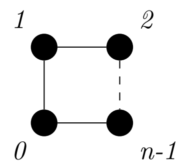
pc3. Sean $A, B \in \mathcal{V}$, entonces $A \subset Ext(G)$ y $B \subset Ext(G)$, obteniendo que $A \cup B \subset Ext(G)$, concluyendo que $A \cup B \in \mathcal{V}$.

pc4. Sea $A \in \mathcal{V}$, por definición $A \subset Ext(G)$, siguiendo que $A^{-1} \subset Ext(G)^{-1} = Ext(G)$, concluyendo que $A^{-1} \in \mathcal{V}$.

Ahora veremos la inyectividad. Sean F y G gráficas tal que $\phi(G) = \phi(F)$. Entonces tenemos que $V(G) = V(F)$. Supongamos que $E(G) \neq E(F)$, entonces se observa por definición que $Ext(F) \neq Ext(G)$, por lo que $\phi(G) \neq \phi(F)$, concluyendo que $E(G) = E(F)$.

Por último analizaremos que la función es sobre. Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse tal que $\#(X) < \infty$. Definamos $G := (V(G), E(G))$ tal que $V(G) = X$ y $E(G)$ es la colección de conjuntos $\{v_1, v_2\}$, con $v_1 \neq v_2$, tal que $\{(v_1, v_2)\} \in \mathcal{V}$, obtenemos que $\phi(G) = (X, \mathcal{V})$. $\langle\clubsuit\rangle$

Definición 2.3.3
Definimos $(C_n, \mathcal{C}_n)$ como el espacio pseudo-coarse producido al aplicarle ϕ a la gráfica G tal que $V(G) = \{0, 1, \cdots, n-1\}$ y $E(G) = \{\{v, (v+1) \ mod(n)\} : v \in V(G)\}$, es decir,



A este espacio pseudo-coarse le llamaremos n-ciclo

Observación: *Sea $(C_n, \mathcal{C}_n)$ el n-ciclo y $n \in \{1,2,3\}$, entonces se sigue que $\mathcal{C}_n$ es una estructura coarse conexa, en forma precisa $\mathcal{C}_n = \mathcal{P}(C_n \times C_n)$. Así, todos sus grupos de homotopía son triviales.*

Además, todo n-ciclo es un espacio pseudo-coarse conexo, la prueba se sigue directamente de observar que en la gráfica todo punto está conectado por una trayectoria finita de aristas.

Teorema 2.3.4
Sea $(C_4, \mathcal{C}_4)$ el espacio pseudo-coarse denominado 4-ciclo. Entonces, $\pi_1^{pc}(C_4, \mathcal{C}_4) \cong \mathbb{Z}$.

Previo a la demostración, vamos a necesitar demostrar los siguientes tres lemas, para lo cuál definiremos la función $p : (\mathbb{Z}, \mathcal{Z}) \to (C_4, \mathcal{C}_4)$ tal que $z \mapsto i$ si $z - i$ es divisible por 4 con $i \in \{0,1,2,3\}$. Esta función será llamada **proyección de los enteros en el 4-ciclo** o simplemente **proyección**. Además, es claro que p es una función bornologous.

Lema 2.3.5
Sea $f : I_m \to (C_4, \mathcal{C}_4)$ una función bornologous, con $f(0) = x_0$. Entonces, para cada $\hat{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ existe una única función bornologous $\hat{f} : I_m \to (\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ tal que $\hat{f}(0) = \hat{x}_0$ y $f = p \circ \hat{f}$.

Demostración:
Sea $f : I_m \to (C_4, \mathcal{C}_4)$ una función bornologous, con $f(0) = x_0$. Además consideremos $\hat{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.

Empecemos a probar que si existen dos funciones bornologous $\hat{f}, \hat{g} : I_m \to (\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ tales que $\hat{f}(0) = \hat{g}(0) = x_0$ y $f = p \circ \hat{f} = p \circ \hat{g}$, entonces $\hat{f} = \hat{g}$. Dado que $p \circ \hat{f} = p \circ \hat{g}$, entonces $\hat{f}(k) = \hat{g}(k) + 4q_k$ para cada $k \in \{0, \cdots, m\}$. Además, por hipótesis, $\hat{f}(0) = \hat{g}(0)$. Como ambas funciones son bornologous, entonces $\hat{f}(1) = \hat{f}(0) + i_0$ y $\hat{g}(1) = \hat{g}(0) + j_0$ con $i_0, j_0 \in \{-1, 0, 1\}$, obteniendo que $q_0 = 0$, es decir, $i_0 = j_0$, concluyendo que $\hat{f}(1) = \hat{g}(1)$. De manera inductiva, si $\hat{f}(k-1) = \hat{g}(k-1)$, entonces $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ por el mismo argumento realizado para $k = 1$. Así, $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ para cada $k \in \{0, \cdots, m\}$, es decir, $\hat{f} = \hat{g}$.

Ahora vamos a construir $\hat{f}$ que cumpla lo deseado. Definamos $\hat{f}(0) = \hat{x}_0$ y para $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$ definimos de manera inductiva $\hat{f}(k) = \hat{f}(k-1) + i_{k-1}$ donde

$$i_{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(k) \equiv (f(k-1) + 1) \; mod \; 4 \\ 0 & \text{si } f(k) \equiv (f(k-1)) \; mod \; 4 \\ -1 & \text{si } f(k) \equiv (f(k-1) - 1) \; mod \; 4 \end{cases}$$

Por lo que se sigue por construcción que $\hat{f}$ es una función bornologous, $\hat{f}(0) = \hat{x}_0$ y $p \circ \hat{f} = f$. ⟨♣⟩

Lema 2.3.6
Sean $f, g : (I_m, \{0\}, \{m\}) \to ((C_4, \mathcal{C}_4), \{x_0\}, \{x_m\})$ funciones bornologous y $H : I_m \times \mathbb{Z} \to (C_4, \mathcal{C}_4)$, $N < M$, una homotopía entre f y g tal que $H(0, z) = x_0$ y $H(m, z) = x_m$ para cada $z \in \mathbb{Z}$. Entonces, para cada $\hat{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, existe una única homotopía $\hat{H} : I_m \times \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ tal que $\hat{H}(0, z) = \hat{x}_0$ y $\hat{H}(m, N) = \hat{H}(m, z)$ para cada $z \in \mathbb{Z}$ y $p \circ \hat{H} = H$.

Demostración:
Sean $f, g : (I_m, \{0\}, \{m\}) \to ((C_4, \mathcal{C}_4), \{x_0\}, \{x_m\})$ funciones bornologous y $H : I_m \times \mathbb{Z} \to (C_4, \mathcal{C}_4)$, $N < M$, una homotopía entre f y g tal que $H(0, z) = x_0$ y $H(m, z) = x_m$ para cada $z \in \mathbb{Z}$. Además, consideremos $\hat{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.

Para cada $z \in \mathbb{Z}$, definamos $f_z(x) := H(x, z)$ con $x \in I_m$. Por el Lema 2.3.5, entonces existen funciones bornologous $\hat{f}_z : I_m \to (\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ para cada $z \in \mathbb{Z}$ tal que $p \circ \hat{f}_z = f_z$ y $\hat{f}_z(0) = \hat{x}_0$, por lo que podemos definir $\hat{H}(x,z) := \hat{f}_z(x)$ para cada $z \in \mathbb{Z}$ y $x \in I_m$. Bajo está construcción, se sigue que $p \circ \hat{H} = H$, $\hat{H}(0,z) = \hat{x}_0$ para cada $z \in \mathbb{Z}$, por lo que resta mostrar que H es bornologous.

Observemos primero que por construcción $\hat{H}(x,z) = \hat{f}(x)$ si $z \leq N$, $\hat{H}(x,z) = \hat{g}(x)$ si $z \geq M$ y $\{(\hat{H}(x,z), \hat{H}(x+1,z))\} \in \mathcal{Z}$ para cada $z \in \mathbb{Z}$ y $x \in \{0,1,\cdots,m-1\}$. Así, para mostrar $\hat{H}$ es bornologous, basta probar que

$$\{(\hat{H}(x,z), \hat{H}(x,z+1))\} \in \mathcal{Z}, \{(\hat{H}(x+1,z), \hat{H}(x+1,z+1))\} \in \mathcal{Z},$$
$$\{(\hat{H}(x,z), \hat{H}(x+1,z+1))\} \in \mathcal{Z}, \{(\hat{H}(x,z+1), \hat{H}(x+1,z))\} \in \mathcal{Z}.$$

para cada $x \in \{0,1,\cdots,m-1\}$ y $z \in \{N, N+1, \cdots, M-2, M-1\}$.

Como paso base tomemos $x = 0$ y $z \in \{N, N+1, \cdots, M-2, M-1\}$. Entonces, $\hat{f}_z(x) = \hat{f}_{z+1}(x) = \hat{x}_0$, además por construcción tenemos que $\hat{f}_z(x+1) = \hat{f}_z(x) + i_{z,x,\rightarrow}$ y $\hat{f}_{z+1}(x+1) = \hat{f}_{z+1}(x) + i_{z+1,x,\rightarrow}$ tal que $i_{z+1,x,\rightarrow}, i_{z,x,\rightarrow} \in \{-1,0,1\}$. Además, como H ya es una función bornologous, tenemos las siguientes congruencias

$$\begin{aligned} f_{z+1}(x+1) &\equiv (f_z(x) + i_{z,x,\nearrow}) \ mod\ 4 \\ f_z(x+1) &\equiv (f_{z+1}(x) + i_{z+1,x,\searrow}) \ mod\ 4 \\ f_{z+1}(x+1) &\equiv (f_z(x+1) + i_{z,x+1,\uparrow}) \ mod\ 4 \end{aligned}$$

con $i_{z,x,\nearrow}, i_{z,x+1,\searrow}, i_{z,x+1,\uparrow} \in \{-1,0,1\}$. Como ya observamos que $\hat{f}_z(x) = \hat{f}_{z+1}(x) = \hat{x}_0$, entonces $i_{z,x,\nearrow} = i_{z+1,x\rightarrow}$ y $i_{z+1,x,\searrow} = i_{z,x,\rightarrow}$. Por lo que solamente resta ver que $\{(f_z(x+1), f_{z+1}(x+1))\} \in \mathcal{Z}$, pero por la congruencias tenemos que

$$i_{z+1,x\rightarrow} - i_{z,x,\rightarrow} \equiv i_{z,x+1,\uparrow} \ mod\ 4.$$

Sin embargo, por los valores que pueden tomar estos números enteros, $i_{z+1,x\rightarrow} - i_{z,x,\rightarrow} = i_{z,x+1,\uparrow}$, por lo que $\hat{f}_{z+1}(x+1) = \hat{f}_z(x+1) + i_{z,x+1,\uparrow}$, obteniendo que los conjuntos mencionados son controlados cuando $x = 0$.

Suponga que los conjuntos son controlados para $x = k-1$, tendremos que demostrar entonces que lo son para $x = k$. Dado que es cierto para $k-1$, entonces tenemos que $\hat{f}_{z+1}(k) = \hat{f}_z(k) + i_{z,k,\uparrow}$, además por construcción tenemos que $\hat{f}_z(k+1) = \hat{f}_z(k) + i_{z,k,\rightarrow}$ y $\hat{f}_{z+1}(k+1) = \hat{f}_{z+1}(k) + i_{z+1,k,\rightarrow}$ tal que $i_{z+1,k,\rightarrow}, i_{z,k,\rightarrow}, i_{z,k,\uparrow} \in \{-1,0,1\}$. Además, como H ya es una función bornologous, tenemos las siguientes congruencias

$$\begin{aligned} f_{z+1}(k+1) &\equiv (f_z(k) + i_{z,k,\nearrow}) \ mod\ 4 \\ f_z(k+1) &\equiv (f_{z+1}(k) + i_{z+1,k,\searrow}) \ mod\ 4 \\ f_{z+1}(k+1) &\equiv (f_z(k+1) + i_{z,k+1,\uparrow}) \ mod\ 4 \end{aligned}$$

con $i_{z,x,\nearrow}, i_{z,x+1,\searrow}, i_{z,x+1,\uparrow} \in \{-1,0,1\}$. Entonces, se sigue que $i_{z,k,\nearrow} = i_{z,k,\rightarrow} + i_{z,k+1,\uparrow}$, $i_{z+1,k,\searrow} = -i_{z,k,\uparrow} + i_{z,k,\rightarrow}$ y $i_{z,k+1,\uparrow} = -i_{z,k,\rightarrow} + i_{z,k,\uparrow} + i_{z+1,k,\rightarrow}$. Obteniendo que los conjuntos son controlados.

Observe que a la vez se ha mostrado que $\hat{f}_{z+1}(m) = \hat{f}_z(m) + i_{z,m,\rightarrow}$ con $i_{z,m,\rightarrow} \in \{-1,0,1\}$ y $p \circ \hat{f}_{z+1}(m) = p \circ \hat{f}_z(m)$, por lo que $\hat{f}_{z+1}(m) = \hat{f}_z(m)$. $\langle\clubsuit\rangle$

Lema 2.3.7
Sea $f : I_m \to (\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ y $g : I_n \to (\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ funciones bornologous tales que $f(0) = g(0)$ y $f(m) = g(n)$, entonces $\langle f \rangle \simeq_{pc} \langle g \rangle$.

Demostración:
Sea $f : I_m \to (\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ y $g : I_n \to (\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ funciones bornologous tales que $f(0) = g(0)$ y $f(m) = g(n)$. Para probar lo deseado, vamos a construir un $h : I_{m'} \to (\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ tal que $\langle f \rangle \simeq_{pc} \langle h \rangle$ y

$$\begin{array}{ll} m' = 0 & \text{si } f(0) = f(m) \\ h(k) < h(k+1),\ k \in \{0,\cdots,m'-1\} & \text{si } f(0) < f(m) \\ h(k) > h(k+1),\ k \in \{0,\cdots,m'-1\} & \text{si } f(0) > f(m) \end{array}$$

Para construir esa función h, empezaremos por tomar el subconjunto ordenado de $\{0,1,\cdots,m\}$, digamos $\{k_1,\cdots,k_{m'}\}$ tal que cumple que $f(k_i)=f(k_i+1)$ para cada $i\in\{1,\cdots,m'\}$. Entonces, por Lema 2.2.9, tenemos que

$$f \simeq_{pc} R_1^{m,m-1}\cdots R_1^{k_1+2,k_1+1}R_1^{k_1+1,k_1}(f).$$

Así, $R_1^{m,m-1}\cdots R_1^{k_1+2,k_1+1}R_1^{k_1+1,k_1}(f)(m)=R_1^{m,m-1}\cdots R_1^{k_1+2,k_1+1}R_1^{k_1+1,k_1}(f)(m-1)$, por lo que existe $f_1\in\langle R_1^{m,m-1}\cdots R_1^{k_1+2,k_1+1}R_1^{k_1+1,k_1}(f)\rangle$ tal que $f_1:I_{m-1}\to(X,\mathcal{V})$ y $\langle f_1\rangle\simeq_{pc}\langle f\rangle$. Pensando de manera similar, para $i\in\{1,\cdots,m'-1\}$, entonces

$$f_i \simeq_{pc} R_1^{m-i,m-1-i}\cdots R_1^{k_i+2-i,k_i+1-i}R_1^{k_i+1-i,k_i-i}(f_i).$$

Así, $R_1^{m-i,m-1-i}\cdots R_1^{k_i+2-i,k_i+1-i}R_1^{k_i+1-i,k_i-i}(f_i)(m-i)=R_1^{m-i,m-1-i}\cdots R_1^{k_i+2-i,k_i+1-i}R_1^{k_i+1-i,k_i-i}(f_i)(m-1-i)$, por lo que existe $f_{i+1}\in\langle R_1^{m-i,m-1-i}\cdots R_1^{k_i+2-i,k_i+1-i}R_1^{k_i+1-i,k_i-i}(f_i)\rangle$ tal que $f_1:I_{m-i-1}\to(X,\mathcal{V})$ y $\langle f_{i+1}\rangle\simeq_{pc}\langle f_i\rangle$. Obteniendo que $\langle f_m\rangle\simeq_{pc}\langle f\rangle$.

En el siguiente paso, tomaremos el subconjunto ordenado de $\{0,1,\cdots,m-m'\}$, digamos $\{k_1,\cdots,k_{m''}\}$ tal que cumple que $f(k_i)=f(k_i+2)$ para cada $i\in\{1,\cdots,m''\}$. A cada uno de los $i\in\{1,\cdots,m''\}$ le vamos a asociar un número q_i tal que es el máximo natural tal que $f(k_i+1-q_i)=f(k_i+1+q_i)$. Entonces, nuevamente por Lema 2.2.9, y definiendo $D^i=R_1^{i-1,i-2}R_1^{i,i-1}$

$$f_{m'} \simeq_{pc} D^{m-m'}\cdots D^{k_1+3}D^{k_1+2}(f_{m'})$$

y tenemos que $D^m\cdots D^{k_1+3}D^{k_1+2}(f_{m'})(m)$ es igual a $D^{m-m'}\cdots D^{k_1+3}D^{k_1+2}(f_{m'})(m-m'-1)$ e igual a $D^m\cdots D^{k_1+3}D^{k_1+2}(f_{m'})(m-m'-2)$, por lo que existe $g_{1,1}\in\langle D^{m-m'}\cdots D^{k_1+3}D^{k_1+2}(f_{m'})\rangle$ y $g_{1,1}:I_{m-m'-2}\to(X,\mathcal{V})$. Podemos realizar el procedimiento análogo para construir

$$g_{1,1},\cdots,g_{1,q_1},g_{2,1},\cdots,g_{2,q_2},\cdots,g_{m'',1},\cdots,g_{m'',q_{m''}}.$$

Definiendo

$$h=g_{m'',q_{m''}}:I_{m-m'-2(q_1+\cdots+q_{m''})}\to(X,\mathcal{V}),$$

observando que $\langle f\rangle\simeq_{pc}\langle h\rangle$ y por la construcción h es monótona decreciente o monótona decreciente.

Con este resultado, entonces $\langle f\rangle\simeq_{pc}\langle h\rangle\simeq_{pc}\langle g\rangle$. $\langle\clubsuit\rangle$

Definición 2.3.8
Sean $f,g:I_m\to(X,\mathcal{V})$ tal que $f(m)=g(0)$. Definimos $f\star g:I_{2m}\to(X,\mathcal{V})$ tal que $(f\star g)(k)=f(k)$ con $k\in\{0,1,\cdots,m\}$ y $(f\star g)(k)=g(k-m)$ con $k\in\{k+1,k+2,\cdots,2m\}$.

Observación: *Sean $f,g:I_m\to(X,\mathcal{V})$ funciones bornologous tal que $f(m)=g(0)$. $f\star g$ es bornologous.*

Demostración:
[**Teorema 2.3.4**] Sea $(C_4,\mathcal{C}_4)$ el 4-ciclo. Empecemos por definir $\phi:\mathbb{Z}\to\pi_1^{pc}(C_4,\mathcal{C}_4)$ tal que $z\mapsto[\langle w_z\rangle]$ dónde $w_z:I_{4z}\to C_3$ tal que $k\mapsto i$ si $k-i$ es divisible por 4 con $i\in\{0,1,2,3\}$ cuando $n\geq 0$ y $w_z:I_{-4z}\to C_3$ tal que $k\mapsto i$ si $k+i$ es divisible por 4 con $i\in\{0,1,2,3\}$ cuando $n<0$. Observemos w_z es una función bornologous para cada $z\in\mathbb{Z}$.

Ahora demostraremos que ϕ es un homomorfismo de grupos. Definamos $\hat{w}_z:I_{4z}\to\mathbb{Z}$ tal que $a_1\mapsto a_1$ cuando $z\geq 0$ y $w_z:I_{-4z}\to\mathbb{Z}$ tal que $a_1\mapsto -a_1$ cuando $z<0$. Es claro que $w_z=p\circ\hat{w}_z$. También definimos $\tau_m:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tal que $z\mapsto z+4m$, que es bornologous por construcción, por lo que obtenemos que $p\circ\tau_m\hat{w}_n=p\circ\hat{w}_n$ y $\hat{w}_m\star\tau_m\hat{w}_n\simeq_{pc}\hat{w}_{m+n}$ por medio de una homotopía H, por Lema 2.3.7, además

$p \circ \hat{w}_m \star p \circ \tau_m \hat{w}_n \simeq_{pc} p \circ \hat{w}_{m+n}$ por medio de $p \circ H$. De esta forma, tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\phi(m) \cdot \phi(n) = [\langle w_m \rangle] \star [\langle w_n \rangle] =& [\langle p \circ \hat{w}_m \rangle] \star [\langle p \circ \hat{w}_n \rangle] \\ =& [\langle p \circ \hat{w}_m \rangle] \star [\langle p \circ \tau_m \hat{w}_n \rangle] \\ =& [\langle p \circ \hat{w}_m \star p \circ \tau_m \hat{w}_n \rangle] \\ =& [\langle p \circ (\hat{w}_m \star \tau_m \hat{w}_n) \rangle] \\ =& [\langle p \circ \hat{w}_{m+n} \rangle] \\ =& [\langle w_{m+n} \rangle] \\ =& \phi(m+n).\end{aligned}$$

Para mostrar que ϕ es sobre, tomemos $[\langle f \rangle] \in \pi_1^{pc}(C_4, \mathcal{C}_4)$. Tomemos $f : I_{4m} \to C_4$ con punto base $f(0) = f(4m) = 0$ y observemos que $0 \in p^{-1}(\{0\}) = 4\mathbb{Z}$. Por lo tanto, por el Lema 2.3.5 existe $\hat{f}$ tal que $\hat{f}(0)$ y $f = p \circ \hat{f}$. Como $(p \circ \hat{f})(4m) = f(4m) = 0$, vemos que $\hat{f}(4m) = 4q$ con $q \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $\hat{f} \simeq_{pc} \hat{w}_q$ por Lema 2.3.7 y así

$$f = p \circ \hat{f} \cong_{pc} p \circ \hat{w}_n = w_n$$

Con esto se concluye que $[\langle f \rangle] = [\langle w_n \rangle] = \phi(q)$, concluyendo que ϕ es sobre.

Para mostrar que ϕ es inyectiva, supongamos que $\phi(q) = \phi(k)$, así se tiene que $\langle w_q \rangle \simeq_{pc} \langle w_k \rangle$ para algunos $q, k \in \mathbb{Z}$. Sea H, $N < M$, la homotopía relativa a la frontera desde w_q a w_k, se observa que $H(0,n) = 0 \in C_4$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. También notemos que $0 \in p^{-1}(\{0\}) = 4\mathbb{Z}$.

Por Lema 2.3.6, existe una única homotopía tal que $H = p \circ \hat{H}$ y $\hat{H}(0,n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Por la unicidad de la homotopía tenemos que $\hat{w}_q(i) = \hat{H}(i,N)$ y $\hat{w}_k(i) = \hat{H}(i,M)$. Además, como $\hat{w}_q(4m) = \hat{H}(4m,N) = \hat{H}(4m,M) = \hat{w}_k(4m)$. Obteniendo que $k = q$ y concluyendo la inyectividad. $\langle \clubsuit \rangle$

Observación: *El resultado anterior se puede probar de forma análoga para C_n con $n \geq 4$.*

2.4. Sucesión Exacta Larga en Homotopía

En el mismo tenor, procederemos a realizar las siguientes definiciones que nos ayudaran a probar un resultado fundamental: la sucesión exacta larga en los conjuntos de homotopía relativa.

Definición 2.4.1
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y $(A, \mathcal{V}_A)$ un subespacio pseudo-coarse. Entonces,

- *La función bornologous $r : X \to A$ es una retracción si cumple que $r \circ i = id_A$, dónde $i : A \to X$ cumple que $i(a) = a$ para cada $a \in A$.*
- *Una función bornologous $F : (X \times \mathbb{Z}, \mathcal{V} \times \mathcal{Z}) \to (X, \mathcal{V})$ es una retracción por deformación de X sobre A si existe $N < 0 < M$ tal que, para cada $x \in X$ y $a \in A$, $F(x,z) = x$ si $z \leq N$, $F(x,z) \in A$ y $F(a,z) = a$ si $z \geq M$.*
- *Si además F cumple que $F(a,z) = a$ para cada $z \in \mathbb{Z}$, entonces F es llamada retracción fuerte por deformación.*

Lema 2.4.2
Sea n natural y m un entero no negativo, entonces existe una retracción fuerte por deformación de I_m^n sobre $\{*\}$.

Demostración:
Sea n natural y m un entero no negativo y consideremos $* \in I_m^n$, entonces $* = (k_1, \cdots, k_n)$ donde $k_i \in \{0, 1, \cdots, m\}$ fijo para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}1_{I_m^n} \simeq_{pc} & R_1^{1,0} 1_{I_m^n} \\ \simeq_{pc} & R_1^{1,0} R_1^{2,1} R_1^{1,0} 1_{I_m^n}.\end{aligned}$$

Por ese procedimiento, podemos definir $D_j^i := R_j^{i,i-1} \cdots R_j^{2,1} R_j^{1,0}$ y $D_j := D_j^{k_j} \cdots D_j^2 D_j^1$, además de $I_j^i := R_j^{i,i+1} \cdots R_j^{m-2,m-1} R_j^{m-1,m}$ y $I_j := I_j^{k_j} \cdots I_j^{m-2} I_j^{m-1}$. De esta forma, obtenemos que

$$\begin{aligned} 1_{I_m^n} &\simeq_{pc} I_n D_n \cdots I_2 D_2 I_1 D_1 1_{I_m^n} \\ &= * . \end{aligned} \qquad \langle\clubsuit\rangle$$

Lema 2.4.3 (Criterio de compresión)
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y $* \in A \subset X$. Entonces una función $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, *)$ representa a cero en $\pi_n((X, \mathcal{V}), A, *)$ si, y sólo si, es homotópico relativo en ∂I^n a una función con imagen contenida en A.

Demostración:
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse, $* \in A \subset X$ y $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, *)$.

($\Leftarrow$) Suponga que $g : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, *)$, $g(I^n) \subset A$ y $f \simeq_{pc} g \; rel(\partial I^n)$, por lo que $[\langle f \rangle] = [\langle g \rangle]$. Tomemos $(k_1, \cdots, k_n)$ tal que $k_n = m$, entonces $g(k_1, \cdots, k_n) = *$. Del lema anterior, $D_n^i := R_n^{i,i-1} \cdots R_n^{2,1} R^{1,0}$ y $D_n := D_n^m \cdots D_n^1$, por lo que hacemos notar que $g \simeq_{pc} D_n(g)$. Por otro lado, $D_1(g)(k_1, \cdots, k_n = 0) = g(k_1, \cdots, k_n = 0) \in A, \cdots, D(g)(k_1, \cdots, k_n = 0) = * \in A$, por lo que $D(g) = *$ y $g \simeq_{pc} D(g)$. Concluyendo que $[\langle f \rangle] = [\langle * \rangle] \in \pi_n((X, \mathcal{V}), A)$.

($\Rightarrow$) Suponga que $[\langle f \rangle] = [\langle * \rangle]$. Entonces existe una $H : I_m^n \times \mathbb{Z} \to (X, \mathcal{V})$ y $N < 0 < M$ tal que $H(x, z) = f(x)$ si $z \leq N$ y $x \in I_m^n$, $H(x, z) = *$ si $z \geq M$ y $x \in I_m^n$. Tomemos $f' : (I_{m+1}^n, \partial I_{m+1}^n, J_{m+1}^{n-1}) \to ((X, \mathcal{V}), A, *) \in \langle f \rangle$ y $f'' : (I_{m+1}^n, \partial I_{m+1}^n, J_{m+1}^{n-1}) \to ((X, \mathcal{V}), A, *)$ tal que

$$f''(k_1, \cdots, k_n) = f(k_1, k_2, \cdots, k_n - 1)$$

si $1 \leq k_n \leq m + 1$ y $0 \leq k_i \leq m$ para cada $i \in \{1, \cdots, n - 1\}$,

$$f''(k_1, \cdots, k_{n-1}, 0) = f(k_1, \cdots, k_{n-1}, 0)$$

si $0 \leq k_i \leq m$ para cada $i \in \{1, \cdots, n - 1\}$ y $f''(k_1, \cdots, k_n) = *$ en cualquier otra parte, que es Bornologous por Corolario 2.2.9.1. Además definimos $f_1 : (I_{m+1}^n, \partial I_{m+1}^n, J_{m+1}^{n-1}) \to ((X, \mathcal{V}), A, *)$ tal que

$$f_1(k_1, \cdots, k_n) = R_{n+1}^{N+1,N} H(k_1, k_2, \cdots, k_n - 1, N) = H(k_1, k_2, \cdots, k_n - 1, N + 1)$$

si $1 \leq k_n \leq m + 1$ y $0 \leq k_i \leq m$ para cada $i \in \{1, \cdots, n - 1\}$ y

$$f_1(k_1, \cdots, k_n) = f''(k_1, \cdots, k_n)$$

en cualquier otra parte. Obteniendo que $f' \simeq_{pc} f_1 \; rel(\partial I_{m+1}^n)$.

Así, para $j \in \{1 \cdots, M - N\}$, definimos $f'_{j-1} : (I_{m+j}^n, \partial I_{m+j}^n, J_{m+j}^{n-1}) \to ((X, \mathcal{V}), A, *) \in \langle f_{j-1} \rangle$ y $f''_{j-1} : (I_{m+j}^n, \partial I_{m+j}^n, J_{m+j}^{n-1}) \to ((X, \mathcal{V}), A, *)$ tal que

$$f''_{j-1}(k_1, \cdots, k_n) = f_{j-1}(k_1, k_2, \cdots, k_n - j)$$

si $j \leq k_1 \leq m + j$ y $0 \leq k_i \leq m$ para cada $i \in \{2, \cdots, n\}$,

$$f''_{j-1}(k_1, \cdots, k_{n-1}, w) = f_{j-1}(k_1, \cdots, k_{n-1}, w)$$

si $w \in \{0, \cdots, j - 1\}$, $0 \leq k_i \leq m$ para cada $i \in \{2, \cdots, n\}$, y $f''_{j-1}(k_1, \cdots, k_n) = *$ en cualquier otra parte, que es bornologous por Corolario 2.2.9.1. Además definimos $f_j : (I_{m+j}^n, \partial I_{m+j}^n, J_{m+j}^{n-1}) \to ((X, \mathcal{V}), A, *)$ tal que

$$f_j(k_1, \cdots, k_n) = R_{n+1}^{N+j,N+j-1} H(k_1, \cdots, k_{n-1}, k_n - j, N + j - 1) = H(k_1, \cdots, k_{n-1}, k_n - j, N + j)$$

si $j \leq k_n \leq m+j$ y $0 \leq k_i \leq m$ para cada $i \in \{2, \cdots, n\}$ y $f_j(k_1, \cdots, k_n) = f''_{j-1}(k_1, \cdots, k_n)$ en cualquier otra parte. Obteniendo que $f'_{j-1} \simeq_{pc} f_j \ rel(\partial I^n_{m+1})$, por lo que definimos $f_0 = f$, tendríamos que $\langle f \rangle \simeq_{pc} \rangle f_{M-N} \ rel(\partial I^n)$, en donde hacemos notar que por la definición de la homotopía $f_{M-N}(I^n_{m+M-N}) \subset A$ y $f_{M-N}(I^{n-1}_{m+M-N} \times \{m+M-N\}) = \{*\}$. $\langle \clubsuit \rangle$

Definición 2.4.4
Sean $(X, \mathcal{V})$ y $(Y, \mathcal{W})$ espacios pseudo-coarse y $f : ((X, \mathcal{V}), A, *) \to ((Y.\mathcal{W}), B, *)$ una función Bornologous. Entonces, definimos $f_* : \pi^{pc}_*((X, \mathcal{V}), A, *) \to \pi^{pc}_*((Y, \mathcal{W}), B, *)$ como $f_*([\langle h \rangle]) = [\langle f \circ h \rangle]$ para cada $[\langle h \rangle] \in \pi^{pc}_*((X, \mathcal{V}), A, *)$.

Observación: *Sean $(X, \mathcal{V})$ y $(Y, \mathcal{W})$ espacios pseudo-coarse y $f : ((X, \mathcal{V}), A, *) \to ((Y.\mathcal{W}), B, *)$ una función Bornologous (basada). Entonces f_* está bien definida y es un homomorfismo. Está bien definida por que, si tomamos $\langle g \rangle \in [\langle h \rangle] \in \pi^{pc}_*((X, \mathcal{V}), A, *)$, entonces existe una homotopía H entre ellos, por lo que $f \circ H$ es una homotopía entre $\langle f \circ h \rangle$ y $\langle f \circ g \rangle$. Sean $[\langle h \rangle], [\langle g \rangle] \in \pi^{pc}_*((X, \mathcal{V}), A, *)$. Es un homomorfismo porque $f \circ (g \star h) = f \circ g(k_1, \cdots k_n)$ si $0 \leq k_i \leq m$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, $f \circ (g \star h) = f \circ h(k_1, \cdots k_n)$ si $m < k_1 \leq 2m$ $0 \leq k_i \leq m$ para cada $i \in \{2, \cdots, n\}$, y $f \circ (g \star h) = f(*)$ en cualquier otra parte, que es lo mismo que $(f \circ g) \star (f \circ h)$.*

Teorema 2.4.5 (Sucesión exacta larga de los conjuntos de homotopía)
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y $* \in A \subset X$. Además $i : (A, *) \to (X, *)$, $j : (X, *) \to (X, A)$ inclusiones. Entonces existe un homomorfismo $\partial_n : \pi^{pc}_n((X, \mathcal{V}), A) \to \pi^{pc}_n(A, *)$ tal que la secuencia larga

$$\cdots \xrightarrow{j_*} \pi^{pc}_{n+1}((X, \mathcal{V}), A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi^{pc}_n(A, *) \xrightarrow{i_*} \pi^{pc}_n((X, \mathcal{V}), *) \xrightarrow{j_*} \pi^{pc}_n((X, \mathcal{V}), A) \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{j_*} \pi^{pc}_1((X, \mathcal{V}), A)$$

es exacta.

Demostración:
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y $* \in A \subset X$. Además $i : (A, *) \to (X, *)$, $j : (X, *) \to (X, A)$ inclusiones. Vamos a definir $\partial_n : \pi^{pc}_n((X, \mathcal{V}), A) \to \pi^{pc}_n(A, *)$ como $f \mapsto f|_{I^{n-1} \times \{0\}}$, el cuál claramente está bien definido y es un homomorfismo.

Ahora probaremos que la secuencia larga es exacta:

- $(Im(i_*) \subset Ker(j_*))$ Sean $n \geq 1$ y $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (A, *, *) \in \pi^{pc}_n(A, *)$, entonces $j \circ i \circ f \in \pi^{pc}_n(X, A)$, así por el criterio de compresión tenemos que $[\langle f \rangle] = [\langle * \rangle]$.
- $(Im(i_*) \supset Ker(j_*))$ Sean $n \geq 1$ y $[\langle f \rangle] \in \pi^{pc}_n((X, \mathcal{V}), *)$ tal que $j_*[\langle f \rangle] = [\langle * \rangle]$. Entonces por el criterio de compresión, $\langle f \rangle \simeq_{pc} \langle g \rangle \ rel(\partial I^n)$, dónde la imagen de g está contenida en A, por ende $[\langle g \rangle] = [\langle f \rangle] \in \pi^{pc}_n((X, \mathcal{V}), *)$ está en la imagen de i_*.
- $(Im(j_*) \subset Ker(\partial))$ Sean $n \geq 2$ y $[\langle f \rangle] \in \pi^{pc}_n((X, \mathcal{V}), *)$, entonces $\partial j \langle f \rangle = \langle f|_{I^{n-1} \times \{0\}} \rangle = \langle * \rangle$, por lo que claramente $\partial j_*[\langle f \rangle] = [\langle * \rangle]$.
- $(Im(j_*) \supset Ker(\partial))$ Sean $n \geq 2$ y $[\langle f \rangle] \in \pi^{pc}_n((X, \mathcal{V}), A)$ tal que $\partial[\langle f \rangle] = [\langle * \rangle]$. Entonces $f|_{I^{n-1} \times \{0\}}$ es homotópico precisamente a $\langle * \rangle$ precisamente por el teorema de comprensión a través de una homotopía $H : I^{n-1}_m \times \mathbb{Z} \to A \ rel(\partial I^{n-1}_m)$, $N < 0 < M$ tal que $H(x, z) = *$ si $z \leq N$ y $H(x, z) = f|_{I^{n-1} \times \{0\}}(x, z)$ si $z \geq M$. Definamos $g : (I^n_{m+M-N}, \partial I^n_{m+M-N}, J^{n-1}_{m+M-N}) \to ((X, \mathcal{V}), A, *)$ tal que

  $$g(k_1, \cdots, k_n) = H(k_1, \cdots, k_{n-1}, z = k_n)$$

  con $0 \leq k_i \leq m$ cuando $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ y $0 \leq k_n \leq M - N$,

  $$g(k_1, \cdots, k_n) = f(k_1, \cdots, k_{n-1}, k_n - M + N)$$

  con $0 \leq k_i \leq m$ cuando $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ y $M - N + 1 \leq k_n \leq M - N + m$, y $g(k_1, \cdots, k_n)$ en cualquier otra parte. Así, se observa que $g(\partial I^n_{m+M-N}) = *$, es decir, $[\langle g \rangle] \in Im(j_*)$, y $[\langle f \rangle] = [\langle g \rangle]$.

- **($Im(\partial) \subset Ker(i_*)$)** Sean $n \geq 2$ y $f : (I_m^n, \partial I_m^n, J_m^{n-1}) \to ((X, \mathcal{V}), A, *)$. Entonces, definiendo $H : I_m^{n-1} \times Z \to (X, \mathcal{V})$ como $H(k_1, \cdots, k_n) = f(k_1, \cdots, k_n)$ con $0 \leq k_n \leq m$, $H(k_1, \cdots, z) = f(k_1, \cdots, k_{n-1}, 0)$ si $z \leq 0$, y $H(k_1, \cdots, z) = f(k_1, \cdots, k_{n-1}, m)$ si $z \geq m$, obtenemos que $f|_{I_m^{n-1} \times \{0\}}$ es homotópico relativo a $*$ vía H. Así, $i_* \partial[\langle f \rangle] = [\langle * \rangle]$ por el Lema 2.4.3.

- **($Im(\partial) \supset Ker(i_*)$)** Sean $n \geq 2$ y $f : (I_m^n, \partial I_m^n, J_m^{n-1}) \to (A, *, *)$ tal que $i_*([\langle f \rangle]) = [\langle * \rangle]$, entonces tenemos una homotopía entre f y $*$, que nos da una función $F : (I_{M-N}^{n+1}, \partial I_{M-N}^{n+1}, J_{M-N}^n) \to ((X, \mathcal{V}), A, *)$ tal que $\partial[\langle F \rangle] = [\langle f \rangle]$. $\langle \clubsuit \rangle$

Capítulo 3

Homología

En la última sección le daremos una homología del tipo Vietoris-Rips a los espacios pseudo-coarse, definiendo los simplejos y por ende la homología. El resultado final es observar que la homología en espacios pseudo-coarse finitos es isomorfo a la homología de camarilla (*clique homology*) en gráficas finitas.

3.1. Homología simplicial

Definición 3.1.1
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y E un conjunto controlado. Además, definimos una relación tal que $x\mathcal{R}y$ si, y sólo si, $(x, y) \in E$ con $x, y \in X$. Entonces definimos lo siguiente

- $\Sigma_E^{(0)} := \{\{x\} : x \in X\}$, *a está colección la llamaremos 0-esqueleto.*
- *Denotaremos por $\Sigma_E^{(n)}$ a la colección de $\{x_0, \cdots, x_n\} \subset X$ tal que $x_i\mathcal{R}x_j$ para cada $i, j \in \{0, \cdots, n\}$ y $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.*
- *Llamaremos n-esqueleto a la colección $\cup_{i=0}^{n} \Sigma_E^{(i)}$.*
- *A un elemento $\sigma \in \Sigma_E^{(n)}$ le llamaremos n-simplejo asociado a E.*
- *La colección de conjuntos $\Sigma_E := \cup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \Sigma_{E,(n)}$ será llamada el complejo simplicial asociado a E.*

Observación: *Es claro que la definición de la colección Σ_E y el conjunto X cumplen con la definición de complejo simplicial, Definición A.4.1, ya que $\Sigma_E^{(0)}$ contiene todos los conjuntos de un vértices y todo subconjunto de un simplejo es un simplejo por tener todos sus elementos relacionados.*

A partir de la observación anterior, usaremos las definiciones y resultados descrito en la Sección A.4, donde se habla del procedimiento para definir una homología a través de un complejo simplicial, como el que ya hemos definido.

Definición 3.1.2
Definimos $[v_0, v_1, \cdots, v_q]$ como cero si los vértices no son distintos y $[v_0, v_1, \cdots, v_q]$ como el q-simplejo orientado si son distintos, Definición A.4.5. Denotaremos por $C_q(X, E)$ al grupo abeliano libre de $[v_0, v_1, \cdots, v_q]$ tal que $v_0, v_1, \cdots, v_q$ son elementos no necesariamente distintos de un simplejo. Así, como en Definición A.4.6, $C(X, E) := \{C_q(X, E), \partial_q\}$ y $H(X, E) := \{H_q(X, E) := H_q(C_q(X, E))\}$.

Lema 3.1.3
Sean $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y E, E' conjuntos controlados tal que $E \subset E'$. Entonces, existe un homomorfismo $i_* : H(X, E) \to H(X, E')$ tal que $i_*([\sigma]) = [\sigma] \in H(X, E')$ para cada $[\sigma] \in H(X, E)$.

__**Demostración:**__
Sean $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse y E, E' conjuntos controlados tal que $E \subset E'$. Sea $i : E \to E'$ la inclusión de E en E', la cual es claramente bornologous, entonces definimos $(i_\#)_q : C_q(X, E) \to C_q(X, E')$ tal que $(i_\#)_q[x_0, \cdots, x_q] = [i(x_0), \cdots, i(x_q)] = [x_0, \cdots, x_q]$, que claramente cumple que $\partial_{E'} i_\# = i_\# \partial_E$, por lo que si $\partial_E \sigma = 0$, entonces $\partial_{E'} i_\# \sigma = 0$ para cada $\sigma \in C_q(X, E)$ y si $\sigma \in Im(\partial_E)$, entonces $i_\# \sigma \in Im(\partial_{E'})$. Observemos que $(i_\#)_q : C_q(X, E) \to C_q(X, E')$ es un homomorfismo entre grupos por construcción para cada $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definamos $i_* : H(X, E) \to H(X, E')$ tal que $i_*[\sigma] = [i_\#(\sigma)] = [\sigma] \in H(X, E')$ el cuál ya es un homomorfismo y está bien definido por que acabamos de observar que $\sigma \in Ker(\partial_E)$ implica que $i_\# \sigma \in Ker(\partial_{E'})$ y $\sigma \in Im(\partial_E)$ implica que $i_\# \sigma \in Im(\partial_{E'})$. $\langle\clubsuit\rangle$

Definición 3.1.4
Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio pseudo-coarse, $\mathcal{V}$ con el orden que proporciona la contención. Entonces, denotaremos por $H(X, \mathcal{V})$ a $\lim\limits_{\rightarrow}\{H(X, E), \pi_E^{E'}, \mathcal{V}\}$, donde $\pi_E^{E'} = i_* : H(X, E) \to H(X, E')$ del lema anterior. Llamando a este grupo, el grupo de homología del espacio pseudo-coarse $(X, \mathcal{V})$.

Observación: *Para efectos de este capítulo, denotaremos por $[x]_E \in H(X, E)$ cuando se encuentre en la suma directa y por $\langle [x]_E \rangle$ a su clase de equivalencia inducida por el cociente con el grupo R Definición A.3.8.*

Podemos observar que el conjunto de n-simplejos no tendrá elementos a menos que existan elementos simétricos en E y elementos en Δ_X. Para resolver esta situación daremos una colección de elementos de $\mathcal{V}$ que sí tengan estas propiedades. Llamemos $\mathcal{V}_\mathcal{S}$ a la colección de $E \cup E^{-1} \cup \Delta_X$ con $E \in \mathcal{V}$. Se tiene que $\mathcal{V}_\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{V}$ y $\mathcal{V}_\mathcal{S}$ con el orden inducido por la inclusión es cofinal en $\mathcal{V}$, ver Definición A.3.11. De esta manera, y por el resultado Teorema A.3.12, tenemos que

$$\lim_{\rightarrow}\{H(X, E), \pi_E^{E'}, \mathcal{V}\} \cong \lim_{\rightarrow}\{H(X, E), \pi_E^{E'}, \mathcal{V}_\mathcal{S}\}.$$

Ahora bien, demostraremos que la homología pseudo-coarse es covariantemente funtorial, Definición A.2.3, para funciones Bornologous, empezando con la observación que lo es para un conjunto controlado fijo.

Lema 3.1.5
Sean $(X, \mathcal{V})$ y $(X, \mathcal{W})$ espacios pseudo-coarse, E controlado por $\mathcal{V}$ y $f : (X, \mathcal{V}) \to (Y, \mathcal{W})$ una función bornologous. Entonces,

(i) $f_\# : C(X, E) \to C(Y, (f \times f)(E))$ donde $(f_\#)_n[x_0, \cdots, x_n] = [f(x_0), \cdots, f(x_n)]$ es una función de cadena.

(ii) $f_* : H(X, E) \to H(Y, (f \times f)(E))$ es un homomorfismo de grupos, donde $(f_*)_n[\sigma^n] = [(f_\#)_n \sigma^n]$.

__**Demostración:**__
Sean $(X, \mathcal{V})$ y $(Y, \mathcal{W})$ espacios pseudo-coarse, E controlado por $\mathcal{V}$ y $f : (X, \mathcal{V}) \to (Y, \mathcal{W})$ una función bornologous. Como f es una función Bornologous, entonces $\{(f(x), f(y))\} \in (f \times f)(E) \in \mathbb{W}$ si $\{(x, y)\} \in E$, por lo que f induce una función simplicial. Así,

(i) Por Lema A.4.7, definimos $f_\# \coloneqq C(f)$, por lo que $f_\#$ es una función de cadena tal que

$$(f_\#)_n[x_0, \cdots, x_n] = [f(x_0), \cdots, f(x_n)].$$

(ii) Por Lema A.4.3, definimos $f_* \coloneqq (f_\#)_*$ es un homomorfismo y está definido como

$$(f_*)_n[\sigma^n] = [(f_\#)_n \sigma^n]. \qquad \langle\clubsuit\rangle$$

Observación: *El resultado anterior también se cumple para* $f_\# : C(X,E) \to C(Y,A)$ *y* $f_* : H(X,E) \to H(Y,A)$ *tal que* $A \supset (f\times f)(E)$ *es controlado por* $\mathcal{W}$. *Se sigue del lema anterior y Lema 3.1.3.*

Teorema 3.1.6
La homología pseudo-coarse es covariantemente funtorial para funciones bornologous.

Demostración:
Sean $(X,\mathcal{V})$ y $(Y,\mathcal{W})$ espacios pseudo-coarse y $f:(X,\mathcal{V})\to(Y,\mathcal{W})$ una función bornologous. Sean $\{H(X,E),\pi_E^{E'},\mathcal{V}\}$ y $\{H(Y,E),\pi_E^{E'},\mathcal{W}\}$ los sistemas dirigidos de los grupos de homología con los conjuntos dirigidos $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ por el orden de contención, respectivamente.

Observemos que, dado que $(f\times f)(A)\subset(f\times f)(B)$ si $A\subset B$ para cada par de conjuntos $A,B\in X\times X$, entonces $(f\times f)$ es una función que preserva el orden de $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$. Así, para cada $E,E'\in\mathcal{V}$ tal que $E\subset E'$ se sigue que

$$\begin{tikzcd} H(X,E) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\pi_E^{E'}"'] & H(Y,(f\times f)(E)) \arrow[d, "\pi_{(f\times f)(E)}^{(f\times f)(E')}"'] \\ H(X,E') \arrow[r, "f_*"] & H(Y,(f\times f)(E')) \end{tikzcd}$$

Por lo que se induce un homomorfismo F que llamamos el homomorfismo entre los límites directos, es decir,

$$F:\lim_{\rightarrow}\{H(X,E),\pi_E^{E'},\mathcal{V}\}\to\lim_{\rightarrow}\{H(Y,E),\pi_E^{E'},(f\times f)(\mathcal{V})\}.$$

Además, observemos que $(f\times f)(\mathcal{V})\subset\mathcal{W}$, por lo que por la inclusión podemos extender F a otro homomorfismo, que llamaremos igual,

$$F:\lim_{\rightarrow}\{H(X,E),\pi_E^{E'},\mathcal{V}\}\to\lim_{\rightarrow}\{H(Y,E),\pi_E^{E'},\mathcal{W}\}.$$ $\langle\clubsuit\rangle$

Teorema 3.1.7
Sean $(X,\mathcal{V})$ *y* $(Y,\mathcal{W})$ *espacios pseudo-coarse. Si* $f,g:(X,\mathcal{V})\to(Y,\mathcal{W})$ *son funciones homotopas, entonces los homomorfismo inducidos* $f_*,g_*:H_*(X,\mathcal{V})\to H_*(Y,\mathcal{W})$ *son iguales.*

Demostración:
Sean $(X,\mathcal{V})$ y $(Y,\mathcal{W})$ espacios pseudo-coarse. Si $f,g:(X,\mathcal{V})\to(Y,\mathcal{W})$ son funciones homotopas, entonces existen una función bornologous

$$H:(X\times\mathbb{Z},\mathcal{V}\times\mathcal{Z})\to(Y,\mathcal{W})$$

y enteros $N<0<M$ tal que $H(x,z)=f(x)$ si $z\le N, x\in X$ y $H(x,z)=g(x)$ si $z\ge M, x\in X$. Denotaremos por $h_z(x)\coloneqq H(x,z)$ para $x\in X$ y $z\in\{N+1,N+2,\cdots,M-2,M-1\}$.

Observaremos que sucede con los homomorfismos inducidos por f y h_{N+1}. Entonces, para cada E controlado por $\mathcal{V}$, definamos $(\Psi_E)_q:C_q(X,E)\to C(Y,H(E,\mathbb{Z}))$ tal que

$$(\Psi_E)_q[x_0,\cdots,x_q]\coloneqq\sum_{i=0}^{q}(-1)^i[f(x_0),\cdots,f(x_i),h_{N+1}(x_i),\cdots,h_{N+1}(x_q)].$$

Es claro que Ψ_E es una homotopía de cadena entre las funciones de cadenas inducidas por f y h_{N+1}, $f_\#$ y $(h_{N+1})_\#$, por lo que $f_*=(h_{N+1})_*:H(C(X,E))\to H(C(Y,H(E,\mathbb{Z})))$. Así, por argumentos similares al teorema anterior, obtenemos que

$$f_*=(h_{N+1})_*:H(C(X,\mathcal{V}))\to H(C(Y,\mathcal{W})).$$

Podemos repetir el mismo procedimientos para h_i y h_{i+1} con $i\in N+1,\cdots M-1$, obteniendo finalmente que

$$f_*=g_*:H(C(X,\mathcal{V}))\to H(C(Y,\mathcal{W})).$$ $\langle\clubsuit\rangle$

3.2. Gráficas y su Relación con Espacios Pseudo-Coarse

Una vez introducidos los conceptos básicos de la homología Vietoris-Rips en espacios pseudo-coarse, ahora compararemos estos espacios cuando tienen cardinalidad finita con gráficas con una cantidad finita de vértices con la homología Vietoris-Rips de los complejos de camarillas (clique complex). Para esto introduciremos ciertas definiciones y posteriormente daremos un isomorfimo entre ambas colecciones.

Definición 3.2.1
Recordemos desde Definición 2.3.1 que una gráfica G es un par ordenado $(V(G), E(G))$, dónde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío, cuyos elementos llamaremos vértices, y $E(G)$ es una colección de conjuntos $\{v_1, v_2\}$ dónde $v_1, v_2 \in V(G)$ y $v_1 \neq v_2$, cuyos elementos llamaremos aristas. Llamaremos orden de G a la cardinalidad de $V(G)$ y tamaño de G a la cardinalidad de $E(G)$. Dos vértices $u, v \in V(G)$ son llamados adyacentes cuando $e = \{u, v\} \in E(G)$.

Una gráfica es llamada completa si cada par de sus vértices son adyacentes. Una gráfica F es una subgráfica de G si $V(F) \subset V(G)$ y $E(F) \subset E(G)$. Una camarilla (clique) en G es un vértice, o bien una subgráfica completa de G, y es máximal si no es una subgráfica propia de otra camarilla.

Vamos a definir los complejos de cadena de camarilla, y por ende la homología, de las gráficas finitas.

Definición 3.2.2
Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica. Entonces definimos $C_q(G)$ como el grupo abeliano generado por las camarillas de dimensión $q+1$, observemos que $C_0(G)$ está generado por los vértices. A la vez, construimos la homología de camarilla como en Definición A.4.2, denotando estos grupos por $H(G)$.

Por último, recordando Proposición 2.3.2, vamos a ver que existe un isomorfismo entre los grupos de homología en gráficas y los que se definen en espacios pseudo-coarse finitos.

Teorema 3.2.3
Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica y $\phi(G) = (V(G), \mathcal{V})$ su espacio pseudo-coarse asociado por ϕ. Entonces, $H(V(G), \mathcal{V}) \cong H(G)$.

Demostración:
Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica y $\phi(G) = (V(G), \mathcal{V})$ su espacio pseudo-coarse asociado por ϕ. Empecemos por observar que $\cup_{E \in \mathcal{V}} E \in \mathcal{V}$, por lo que ese conjunto es un conjunto dirigido cofinal a $\mathcal{V}$ con el orden que nos proporciona la inclusión. Así,

$$\lim_{\rightarrow} \{H(X, E), f_E^{E'}, \mathcal{V}\} = H\left(X, \bigcup_{E \in \mathcal{V}} E\right),$$

por lo que sólo tenemos que observar el complejo de cadenas para este elemento controlado.

Definamos $\iota : C(X, \cup_{E \in \mathcal{V}} E) \to C(G)$ tal que $\iota_q([x_0, \cdots, x_q]) = [x_0, \cdots x_q]$ si todos los elementos son distintos y $\iota_q([x_0, \cdots, x_q]) = 0$ si al menos un par de elementos son iguales. Observemos que ι está bien definido cuando todos los elementos son distintos porque $x_i \mathcal{R} x_j$ para cada $i, j \in \{0, 1, \cdots, q\}$, por lo que $\{x_i, x_j\} \in V(G)$ cuando $i \neq j$, concluyendo que $\{x_0, \cdots, x_q\}$ es un clique con $q + 1$ elementos en G.

Por otro lado, definamos $\kappa : C(X, \cup_{E \in \mathcal{V}} E) \to C(G)$ tal que $\kappa_q([x_0, \cdots, x_q]) = [x_0, \cdots, x_q]$. Por el argumento de la función anterior, es claro que κ esta bien definido. Además, $\iota \circ \kappa = 1_{C(X, \cup_{E \in \mathcal{V}} E)}$ y $\kappa \circ \iota = 1_{C(G)}$, por lo que $C(X, \cup_{E \in \mathcal{V}} E) \cong C(G)$, concluyendo que $H(V(G), \mathcal{V}) \cong H(G)$. ⟨♣⟩

Capítulo 4

Conclusiones

En este capítulo de cierre del trabajo vamos a hablar sobre ciertas rutas que deseamos seguir en esta estructura en particular, la cuales terminan siendo preguntas abiertas para nuestro trabajo.

Siguiendo el camino se trabaja en espacios coarse (Roe, 2003), buscaremos definir para nuestra estructura un análogo de conjuntos acotados y conjuntos co-controlados. Esto con el fin de poder dar a nuestra estructura una Cohomología de Čech o Alexander-Spanier.

Por otro lado, en el capítulo dos se abren un par de preguntas. La primera es encontrar un invariante, en particular una homotopía, que caracterice a los espacios coarse, dado que sólo hemos obtenido que si el espacio es de ese tipo, entonces los grupos de homotopía son triviales, que no es una condición necesaria.

La segunda cuestión se encuentra al trabajar el ejemplo no trivial de la homotopía. Es claro que invita a pensar en los espacios recubridores. Sin embargo, para llegar a tal concepto ocupamos encontrar una noción validad de vecindades en nuestro espacio, definición que esperamos se encuentra en a fuerte relación entre espacios semi-uniformes y espacios pseudo-coarse.

Esa misma cuestión, la de espacios recubridores, nos podría dar bases para pensar en levantamientos, lo que naturalmente señala el camino a hablar de funciones pullback y pushout y otra colección de posibilidades a estudiar.

El capítulo de homología nos da una interpretación de los espacios pseudo-coarse finitos, mas no nos da una descripción de aquellos que posean cardinalidad infinita. Es posible que podamos trabajar en desarrollar herramientas para calcular con mayor facilidad la homología, tal como se hace en las homologías de espacios topológicos.

Por último, pero siendo la razón por la que iniciamos la investigación de este tema, buscamos encontrar propiedades que nos permitan garantizar que este es un mejor entorno para trabajar el análisis topológico de datos, aunque a la conclusión de este trabajo no sabemos en que sentido queremos que sea mejor al resto de estructuras que hemos mencionado.

Apéndice A

Preliminares algebraicos

En este apéndice vamos hablar sobre conceptos que se utilizaron en la tesis, pero está de más mencionar de forma explícita durante el desarrollo de la tesis. Usaremos como textos de referencia los textos (Spanier, 1966; Wallace, 1970).

A.1. Conjuntos

Nosotros usaremos la siguiente notación fija:

$$\begin{aligned}
\varnothing &= \text{Conjunto vacío.}\\
\mathbb{R} &= \text{Conjunto de los números reales.}\\
\mathbb{Z} &= \text{Conjunto de los números enteros.}\\
\mathbb{N} &= \text{Conjunto de los números naturales o enteros positivos.}\\
\times &= \text{Producto cartesiano de conjuntos}\\
\vee &= \text{Unión disjunta de conjuntos}
\end{aligned}$$

Definición A.1.1
Sea X un conjunto y $\sim$ una relación dos elementos. Diremos que $\sim$ es una ***relación de equivalencia en*** *X si para cada $x, y, z \in X$ satisface que:*

rel1. $x \sim x$ (Relación reflexiva).

rel2. Si $x \sim y$, entonces $y \sim x$ (Relación simétrica).

rel3. Si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces $x \sim z$ (Relación transitiva).

Definición A.1.2
Sea X un conjunto y $\leq$ una relación entre dos elementos. Diremos que $\leq$ es un ***orden parcial en*** *X si cumple rel1 y rel3. Si además cumple que*

rel4. Para $x, y \in X$ tal que $x \neq y$, entonces $x \leq y$ o, en caso contrario, $y \leq x$ (Relación antisimétrica).

$\leq$ es llamado ***orden total****.*
Un ***conjunto parcialmente ordenado*** *es un conjunto con un orden parcial, y un* ***conjunto totalmente ordenado*** *es un conjunto con un orden total.*

Además daremos por hecho el lema de Zorn, que como ya sabemos es equivalente al axioma de elección

Lema A.1.3 (0.1.1; Spanier (1966))
Un conjunto parcialmente ordenado en el cuál cada subconjunto simplemente ordenado tiene una cota superior contiene un elemento máximo.

Definición A.1.4 (0.1.1; Spanier (1966))
Sea Λ una conjunto de índices, definimos lo siguiente

- Λ *es un* ***conjunto dirigido*** *si es un conjunto parcialmente ordenado por $\leq$ tal que para $\alpha, \beta \in \Lambda$ existe $\gamma \in \Lambda$ que cumple que $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$.*
- *Un* ***sistema dirigido de conjuntos*** *$\{A^\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ consiste de una colección de conjuntos $\{A^\alpha\}$ indexados por un conjunto dirigido Λ y una colección de funciones $f_\alpha^\beta : A^\alpha \to A^\beta$ para cada $\alpha \leq \beta$ tal que*

  sd1. $f_\alpha^\alpha = 1_{A^\alpha}$ *para todo* $\alpha \in \Lambda$.
  sd2. $f_\alpha^\gamma = f_\beta^\gamma \circ f_\alpha^\beta : A^\alpha \to A^\gamma$ *para* $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ *en* Λ.

- *El* ***límite directo*** *del sistema dirigido, denotado por $\text{lím}_\to\{A^\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$, es el conjunto de clases de equivalencia de $\vee A^\alpha$ con respecto a la relación de equivalencia $a^\alpha \sim a^\beta$, con $a^\alpha \in A^\alpha$ y $a^\beta \in A^\beta$, si existe λ con $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$ tal que $f_\alpha^\gamma a^\alpha = f_\beta^\gamma a^\beta$.*

Lema A.1.5 (0.1.1, 0.1.2; Spanier (1966))
Sea $\{A^\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un conjunto dirigido. Entonces,

(i) *Para cada $\alpha \in \Lambda$ existe una función $i_\alpha : A^\alpha \to \text{lím}_\to\{A^\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$, y si $\alpha \leq \beta$, entonces $i_\alpha = i_\beta \circ f_\alpha^\beta$.*

(ii) *Dados un conjunto B y para cada $\alpha \in \Lambda$ una función $g_\alpha : A^\alpha \to B$ tal que $g_\alpha = g_\beta \circ f_\alpha^\beta$ si $\alpha \leq \beta$, entonces existe una única función $g : \text{lím}_\to\{A^\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\} \to B$ tal que $g \circ i_\alpha = g_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$.*

A.2. Categorías

Esta sección se evocará al concepto de categoría, funtores y el concepto de naturalidad.

Definición A.2.1 (1.1; Spanier (1966))
Una categoría $\mathcal{C}$ está compuesta de:

- *Una clase de objetos $Ob(\mathcal{C})$.*
- *Para cada par ordenado de objetos X y Y, un conjunto $hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de morfismos con dominio X y rango Y; si $f \in hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, escribimos $f : X \to Y$ o $X \xrightarrow{f} Y$.*

Los cuales satisfacen las siguientes codiciones

Ctg1. *Para cada terna ordenada de objetos X, Y, y Z, una función una función asociando un par de morfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ su composición*

$$gf = g \circ f : X \to Z.$$

Ctg2. *Si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : Z \to W$, entonces*

$$h(gf) = (hg)f : X \to W.$$

Ctg3. *Para cada objeto Y existe un morfismo $1_Y : Y \to Y$ tal que si $f : X \to Y$, entonces $1_Y f = f$, y si $g : Y \to Z$, entonces $g1_Y$.*

Si la clase de objetos es un conjunto, la categoría es llamada ***pequeña****.*

Definición A.2.2
*Sea $\{X^\alpha, f^\beta_\alpha, \Lambda\}$ un sistema dirigido de objetos donde $X^\alpha \in Ob(\mathcal{C})$ y $f^\beta_\alpha \in hom_{\mathcal{C}}(X^\alpha, X^\beta)$ con $\alpha, \beta \in \Lambda$ tal que $\alpha \leq \beta$. Un **objetivo** es $\{X, \phi_\alpha, \Lambda\}$ donde $X \in Ob(\mathcal{C})$ y $\phi_i \in hom_{\mathcal{C}}(X^\alpha, X)$ para cada $\alpha \in \Lambda$ tal que $\phi_\alpha = \phi_\beta \circ f^\beta_\alpha$ siempre que $\alpha \leq \beta$.*

*Un **límite directo (categórico)** del sistema dirigido, denotado por $\lim_{\rightarrow}\{X^\alpha, f^\beta_\alpha, \Lambda\}$, es un objetivo universalmente repelente $\{X, \phi_\alpha, \Lambda\}$ en el sentido que para cada objetivo $\{Y, \psi_\alpha, \Lambda\}$, existe un único morfismo $u : X \to Y$ tal que $u \circ \phi_\alpha = \psi_\alpha$ para cada i.*

Observación: *Esta definición es equivalente al límite directo en conjuntos cuando precisamente utilizamos la categoría de conjuntos como morfismos siendo funciones.*

Definición A.2.3 (1.2; Spanier (1966))
Sea $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un funtor covariante (un funtor contravariante) T desde $\mathcal{C}$ hasta $\mathcal{D}$ consiste de un función de objetos el cuál asigna a cada objeto X de $\mathcal{C}$ un objeto $T(X)$ de $\mathcal{D}$, y una función de morfismos que asigna a cada morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ un morfismo $T(f) : T(X) \to T(Y)$ (o $T(f) : T(Y) \to T(X)$ siendo contravariante) de $\mathcal{D}$ tal que

ft1. $T(1_X) = 1_{T(X)}$.

ft2. $T(gf) = T(g)T(f)$ *(o* $T(gf) = T(f)T(g)$ *si es contravariante).*

Además, se dice que un funtor desde $\mathcal{C}$ hasta $\mathcal{D}$ es covariantemente funtorial para los morfismos de $\mathcal{C}$ si para cada $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ y cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ el siguiente cuadro conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"] & Y \arrow[d, "F"] \\ F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

o es contravariantemente funtorial para los morfismos de $\mathcal{C}$ si para cada $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ y cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ el siguiente cuadro conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"] & Y \arrow[d, "F"] \\ F(X) & F(Y) \arrow[l, "F(f)"] \end{tikzcd} .$$

A.3. Grupos

En la última parte de este apéndice, daremos los conceptos mínimos de teoría de grupos utilizados, particularmente en homotopía y homología de espacios pseudo-coarse.

Definición A.3.1
Sea $(X, \cdot)$ un par ordenado donde X es un conjunto y $\cdot$ una operación binaria. Decimos que $(X, \cdot)$ es un grupo si cumple los siguientes axiomas:

gp1. Sean $a, b, c \in G$, entonces $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

gp2. Existe e elemento de G tal que $e \cdot a = a \cdot e = a$ para cada a elemento de G.

gp3. Para cada $a \in G$, existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Si además $(X, \cdot)$ cumple que

gpA. Para todo a y b en G se cumple que $a \cdot b = b \cdot a$.

le llamaremos grupo conmutativo o grupo abeliano.

Definición A.3.2
Sean X y Y grupos, y $f : X \to Y$ una función, entonces diremos que

- f ***es un homomorfismo*** *si para cada $a, b \in X$ se cumple que $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.*
- f ***es un epimorfismo*** *si es un homomorfismo sobreyectiva.*
- f ***es un monomorfismo*** *si es un homomorfismo inyectivo.*
- f ***es un isomorfismo*** *si es un homomorfismo biyectivo.*
- $Im(f) := \{f(x) : x \in X\}$ *es llamado la **imagen de** f.*
- $Ker(f) := \{x \in X : f(x) = e\}$ *es llamado el **kernel de** f.*

Definición A.3.3
Sea X un grupo y A un subgrupo. Diremos que A es un subgrupo normal de X, denotado por $A \triangleleft X$, si para $x \in X$ y $a \in A$ se cumple que $xax^{-1} = a$.

Proposición A.3.4
Sea $f : X \to Y$ un homomorfismo, entonces $Ker(f) \triangleleft X$.

Definición A.3.5
Sea X un grupo y A un subgrupo normal de X. Entonces,

- *Para cada $x \in X$, $[x] := \{x \cdot a : a \in A\}$.*
- *Denotamos por $X/A := \{[x] : x \in X\}$.*
- *Definimos $+_A$ para cada $x, y \in X$ como $[x] +_A [y] = [x + y]$.*

Proposición A.3.6
Sea X un grupo y A un subgrupo normal de X.

(i) $y \in [x]$ *si, y sólo si $y - x \in A$.*

(ii) $+_A$ *es una operación binaria bien definida.*

(iii) $(X/A, +_A)$ *es un grupo.*

Definición A.3.7
Sea Γ un conjunto de indices y $\{(X_\gamma, +_\gamma)\}$ una colección de grupos indexados por I. Entonces definimos $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ como el conjunto de $x_{\gamma_1} + \cdots + x_{\gamma_n}$ para cada n natural y $x_{\gamma_i} \in X_{\gamma_1}$ para cada $i \in \{1 \cdots, n\}$ y $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_2\} \in \Gamma$.

Definición A.3.8
Sea Λ un conjunto dirigido.

- *Un sistema dirigido de grupos $\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es una familia de grupos indexada por $\Lambda 2$, y para cada $\alpha \leq \beta$, un homomorfismo $\pi_\alpha^\beta : G_\alpha \to G_\beta$ satisfaciendo que $\pi - \alpha^\alpha = 1_{G_\alpha}$ y $\pi_\beta^\gamma \pi_\alpha^\beta = \pi_\alpha^\gamma$ con $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.*
- *El límite directo de un sistema dirigido $\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\}$, escrito como $\lim_{\to}\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\}$, es definido como el grupo cociente de $(\oplus G_\alpha)/R$, dónde R es el subgrupo generado por todos los elementos de la forma $x_\alpha - \pi_\alpha^\beta x_\alpha$.*

Proposición A.3.9
Sea $\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema dirigido de grupos, entonces

(i) *R es un subgrupo normal.*

(ii) $\lim_{\rightarrow}\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\}$ *es un límite categórico.*

Proposición A.3.10

(i) *Sea* $x \in \lim_{\rightarrow}\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\}$*, donde* $\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\}$ *es un sistema dirigido. Muestra que* x *tiene un representante en* $\oplus_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ *el cual es un elemento* x_β *de algún* G_β*.*

(ii) *Suponga que* $x_\alpha \in \oplus_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ *y que* $x_\alpha \in R$*. Muestra que* $\pi_\alpha^\beta x_\alpha = 0$ *para algún* $\beta \geq \alpha$*.*

Sea Λ' un subconjunto de un conjunto dirigido Λ, y suponga que Λ' es también dirigido por el mismo orden. Sea $\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema dirigido, entonces $\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda'\}$ también lo es. Para comparar los límites directos, empecemos por notar que $\oplus_{\alpha\in\Lambda'}G_\alpha$ puede ser identificado con un subgrupo de $\oplus_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$. Sea R como en la Definición A.3.8, y R' el subgrupo de $\oplus_{\alpha\in\Lambda'}G_\alpha$ generado por elementos $x_\alpha - \pi_\alpha^\beta x_\alpha$ con $\alpha, \beta \in \Lambda'$, donde R' es un subgrupo de R, por tanto el homomorfismo inclusión $\oplus_{\alpha\in\Lambda'}G_\alpha \to \oplus_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ induce un homomofismo desde $\oplus_{\alpha\in\Lambda'}G_\alpha/R'$ hasta $\oplus_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha/R$. Esto es denotado por

$$\pi^{A'} : \lim_{\rightarrow}\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda'\} \to \lim_{\rightarrow}\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\}$$

En particular, si A' reduce a sólo un elemento α, $\pi^{\Lambda'}$ se convierte en un homomorfismo

$$\pi^\alpha G_\alpha \to \lim_{\rightarrow}\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\}$$

y se cumple que si $\beta \geq \alpha$, entonces $\pi^\beta \pi_\alpha^\beta = \pi^\alpha$.

Definición A.3.11

Sea Λ *un conjunto dirigido y sea* Λ' *un subconjunto, también dirigido por el orden* Λ*.* Λ' *es llamado cofinal en* Λ *si, para cada* $\alpha \in \Lambda$*, existe* $\beta \in \Lambda'$ *tal que* $\beta \geq \alpha$*.*

Teorema A.3.12

Sea $\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\}$ *un sistema dirigido de objetos en* $\mathcal{C}$ *y* Λ' *cofinal en* Λ*, entonces* $\lim_{\rightarrow}\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\}$ *es isomorfo a* $\lim_{\rightarrow}\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda'\}$*.*

Ahora veremos como construir un homomorfismo entre los límites de ciertas familías.

Definición A.3.13

Sea $\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\}$ *y* $\{H_\alpha, \kappa_\alpha^\beta, \Lambda'\}$ *dos sistemas dirigidos y* ϕ *una función que preserva el orden de* Λ *a* Λ'*. Suponga una familia de homomorfismos* f_α *dadas tal que los diagramas*

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\pi_\alpha^\beta"] & H_{\phi(\alpha)} \arrow[d, "\pi_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)}"] \\ G_\beta \arrow[r, "f_\beta"] & H_{\phi(\beta)} \end{tikzcd}$$

son conmutativos para todo $\beta \geq \alpha$*. Diremos que los* f_α *forman un sistema dirigido de homomorfismos.*

Ahora se verá que los f_α inducen un homomorfismo f desde $\lim_{\rightarrow}\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\}$ hasta $\lim_{\rightarrow}\{H_\alpha, \kappa_\alpha^\beta, \Lambda'\}$. Primero notemos que el sistema dirigido de homomorfismos induce un homomorfismo

$$\oplus_{\alpha\in\Lambda}f_\alpha : \oplus_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha \to \oplus_{\alpha\in\Lambda'}H_\alpha$$

al mandar un elemento $\oplus x_\alpha$ a los elementos $\oplus f_\alpha(x_\alpha)$. Así, $x_\alpha - \pi_\alpha^\beta x_\alpha$ es mandado a $f_\alpha(x_\alpha) - f_\beta(\pi_\alpha^\beta x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha) - \kappa_{\phi(\alpha)^{\phi(\beta)}} f_\alpha(x_\alpha)$. Por lo tanto los elementos de R son llevados a R', así $\oplus f_\alpha$ induce un homomorfismo de los grupos cociente

$$f : \lim_{\rightarrow}\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Lambda\} \to \lim_{\rightarrow}\{H_\alpha, \kappa_\alpha^\beta, \Lambda'\},$$

llamamos al homomorfismo f el límite directo de la familia f_α, y es denorado por $\lim f_\alpha$.

A.4. Simplejos y Complejos de Cadenas

Definición A.4.1 (Spanier (1966))
Un complejo simplicial K consiste de un conjunto $\{v\}$ de vértices y una colección $\{s\}$ de subconjuntos finito no vacío de $\{v\}$ llamados simplices tal que

spj1. Cualquier conjunto que consiste exactamente de un vértice es un simplejo.

spj2. Cualquier subconjunto no vació de un simplejo es un simplejo.

Un simplejo s que contiene exactamente $q+1$ vértices es llamado un q-simplejo. También decimos que que la dimensión de s es q y escribimos dim $s = q$. Si $s' \subset s$, entonces s' es llamado una cara de s y cara propia si $s' \neq s$.

Si K es un complejo dimensional, su dimensión, denotado por dim K, es definido igual a -1 si K es vacío, igual a n si K contiene un n-simplejo, pero no $(n+1)$-simplejos, y igual a ∞ si K contiene n-simplejos para todo n natural.

Una función simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ es una función φ desde los vértices de K_1 a los vértices de K_2 tal que para cualquier simplejo $s \in K_1$ su imagen $\varphi(s)$ es un simplejo de K_2.

Definición A.4.2 (Spanier (1966))
Un grupo graduado $C = \{C_q\}$ consiste de un colección de grupos abelianos C_q indexado por los enteros. Los elementos de C_q se dice que tienen grado q. Un homomorfismo de $\tau : C \to C'$ de grado d desde un grupo graduado a otro consiste de una colección $\tau = \{\tau_q : C_q \to C'_{q+d}\}$ de homomorfismos indexados por los enteros.

Un complejo de cadena es un grupo graduado que tiene un homomorfismo de grado -1, que llamaremos diferencial, tal que $\partial_q \partial q+1 = 0$. Los elementos de C_q son llamados q-cadenas del complejo. La mayoría de los complejos de cadena se consideraran no negativos, es decir, $C_q = 0$ para $q < 0$. Un complejo de cadenas libre es un complejo de cadenas en el cual C_q es un grupo libre abeliano para cada q.

Para un complejo de cadenas, el grupo de ciclos $Z(C)$ es un grupo graduado que consiste de la colección $\{Z_q(C) := ker\ \partial_q\}$, y el grupo de fronteras $B(C)$ es un grupo graduado que consiste de $\{B_q(C) := Im\ \partial_{q+1}\}$. El grupo de homología $H(C)$ es un grupo graduado que consiste de $\{H_q(C) := Z_q(C)/B_q(C)\}$.

Una función de cadenas $\tau : C \to C'$ entre complejos de cadenas es un homomorfismo de grado 0 que conmuta con el diferencial, es decir, τ es una colección $\{\tau_q : C_q \to C'_q\}$ tal que el siguiente cuadro conmuta

$$\begin{tikzcd} C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "\tau_q"] & C_{q-1} \arrow[d, "\tau_{q-1}"] \\ C'_q \arrow[r, "\partial'_q"] & C'_{q-1} \end{tikzcd}$$

Es claro que la coleección de complejos de cadenas cuyos morfismos son las funciones de cadenas es una categoría, la cuál llamaremos categoría de complejos de cadenas.

Lema A.4.3
Sea $\tau : C \to C'$ es una función de cadenas. Entonces, $\tau_* : H(C) \to H(C')$ tal que $(\tau_*)_q\{z\} = \{\tau_q(z)\}$ para $z \in Z_q(C)$, es un homomorfismo.

Teorema A.4.4 (Spanier (1966))
Existe un funtor covariante desde la categoría de complejos de cadenas a la categoría de grupos graduados y homomorfismos de grado 0 el cuál asigna a un complejos de cadenas C su grupo de homología $H(C)$ y a un complejo de cadenas τ a su homomorfismo inducido τ_*.

Definición A.4.5
Un q-simplejo orientado es un q-simplejo $s \in K$ junto con una clase de equivalencia de ordenes totales de los vértices de s, dos ordenes son equivalentes si ellos difieren por una permutación par de los vértices.

Si $v_0, \cdots, v_q$ son los vértices de s, entonces $[v_0, \cdots, v_q]$ denota el q-simplejo orientado de K consiste del simplejo s junto con la clase de equivalencia del orden $v_0 < v_1 < \cdots < v_q$ de sus vértices.

Para $q < 0$ no hay q-simplejos orientados. Para cada vértice v de K hay un único 0-simplejo orientado $[v]$, y para cada q-simplejo, con $q \geq 1$, hay exactamente dos q-simplejos orientados.

Definición A.4.6
Sea $C_q(K)$ el grupo abeliano generado por los q-simplejos orientados σ^q con la relación $\sigma_1^q + \sigma_2^q = 0$ si σ_1^q y σ_2^q son diferentes q-simplejos orientados del mismo q-simplejo de K. Si K es vacío, $C_q(K) = 0$ para todo q.

Definimos los homomorfismos $\partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ para $q \geq 1$ definido en los generados por

$$\partial_q[v_0, v_1, \cdots, v_q] = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i [v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_q]$$

donde $[v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_q]$ denota el $(q-1)$-simplejo orientado obtenido por omitir v_i.

Podemos observar que si $\sigma_1^q + \sigma_2^q = 0$ en $C_q(K)$, entonces se verifica que $\partial_q(\sigma_1^q) + \partial_q(\sigma_2^q) = 0$ en $C_{q-1}(K)$, por lo que δ_q se extiende desde $C_q(K)$. Es claro que $\partial_q \partial_{q+1} = 0$. Por lo tanto, $C(K) = \{C_q(K), \partial_q\}$ es un complejo de cadenas libre no negativo el cual llamaremos complejo de cadenas orientado de K. Su grupo de homología, denotado por $H(K)$, es un grupo graduado $\{H_q(K) := H_q(C(K))\}$, el cuál llamaremos el grupo de homología orientado de K. $H_q(K)$ será llamado el q-ésimo grupo de homología orientado de K.

Si $v_0, \cdots, v_q$ son vértices de algún simplejo de K, no necesariamente distintos, definimos $[v_0, \cdots, v_q] \in C_q(K)$ como 0 si los vértices no son distintos y el q-simplejo orientado si son distintos. Observe que con estos elementos y relaciones lo dicho para δ_q sigue siendo valido.

Si $\varphi : K_1 \to K_2$ es una función simplicial, existe una función de cadenas asociada $C(\varphi) : C(K_1) \to C(K_2)$ definido por

$$C(\varphi)([v_0, \cdots, v_q]) = [\varphi(v_0) \cdots, \varphi(v_q)]$$

Lema A.4.7
Sea $\varphi : K_1 \to K_2$ una función simplicial, entonces $C(\varphi)$ es una función de cadenas.

Teorema A.4.8
Existe un funtor covariante C desde la categoría de los complejos simpliciales a la categoría de los complejos de cadena el cual asigna a K su complejo de cadenas orientado $C(K)$.

La composición del funtor C y del funtor de homología es un funtor covariante, llamado funtor de homología orientada, desde la categoría de complejos simpliciales a la categoría de grupos graduados, esto es, a un complejo simplicial K se le asigna el grupo graduado $H(K)$, y a una función simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ se le asigna el homomorfismo $\varphi_* : H(K_1) \to H(K_2)$ de grado cero.

Definición A.4.9
Sean $\tau, \tau' : C \to C'$ funciones de cadenas. Una homotopía de cadenas D desde τ hasta τ', denotado por $D : \tau \simeq \tau'$, es un homomorfismo $D = \{D_q\}$ desde C hasta C' de grado uno tal que para todo q

$$\partial'_{q+1} D_q + D_{q-1} \partial_q = \tau_q - \tau'_q.$$

Lema A.4.10
La composición de funciones de cadenas homotópicas son cadenas homotópicas.

Se sigue que existe una categoría cuyos objetos son complejos de cadena y cuyos morfismos son clases de homotopía de cadenas.

Teorema A.4.11
Si $\tau, \tau' : C \to C'$ son cadenass homotópicas, entonces

$$\tau_* = \tau'_* : H(C) \to H(C').$$

Bibliografía

Babson, E., Barcelo, H., de Longueville, M., and Laubenbacher, R. (2006). Homotopy theory of graphs. *J Algebr Comb*, 24(1):31–44.

Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.

Rieser, A. (2019). Čech closure spaces: A framework for discrete homotopy.

Roe, J. (2003). *Lectures on coarse geometry.* American Mathematical Society, Providence, RI.

Spanier, E. (1966). *Algebraic Topology.* Springer-Verlag, New York, NY.

Čech, E. (1966). *Topological spaces.* Intwescience Publication, New York, NY.

Wallace, A. (1970). *Algebraic Topology, Homology and Cohomology.* W.A. Benjamin, Inc., New York, NY.