CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

# La transformada de Gelfand para álgebras de Banach conmutativas.

**T E S I S**

Que para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias**

con Orientación en

**Matemáticas Básicas**

**Presenta**

Julio Alberto Barrera Reyes

**Director de Tesis:**

Dr. Raúl Quiroga Barranco

**Autorización de la versión final**

Guanajuato, Gto., 16 de Julio de 2019

Agradecimientos

Las palabras no son suficientes para expresar todo lo bueno que han hecho por mí.

En primer lugar quiero agradecer a mi familia por estar siempre presente. En particular a mis padres Susana Reyes Vicencio y Andrés Barrera Martínez por el infinito apoyo y amor brindado.

Al Dr. Carlos Alberto Hernández Linares, por todo el afecto y apoyo que me brindo. Su apoyo fue primordial he hizo posible mi ingreso al CIMAT.
Quisiera agradecer a mi director de tesis, el Dr. Raúl Quiroga Barranco, por el tiempo, confianza y paciencia que me ha otorgado, lo cual ha hecho posible la realización de esta tesis.

Agradezco también a mis sinodales, Dr. Fernando Galaz Fontes y Dra. Sofía Ortega Castillo, por dedicar parte de su tiempo a leer este trabajo y por las obervaciones hechas para que éste mejore.

A Melida Carranza Trejo con quien compartí departamento he hizo que me sintiera como en casa.

A mis amigos del CIMAT, con quienes compartí agradables momentos he hicieron más amena mi estancia en esta institución. En particular a Juan Cruz, Rocio Sierra, Tania Córtes por el afecto brindado, y a Delio Jaramillo por su ayuda y sus palabras de aliento hacia mi persona.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca de maestría que me fue otorgada, con la cual me fue mucho más fácil cursar el posgrado. De igual manera, agradezco al Centro de Investigación en Matemáticas A.C. (CIMAT) por todas las facilidades que me ofrecieron y todas las atenciones prestadas en el transcurso del posgrado.

Gracias, muchas gracias a todos.

# Índice general

# Introducción

El análisis funcional es una rama de las matemáticas, para ser más precisos del análisis matemático, cuyo objetivo es el estudio de los espacios vectoriales que cuentan con cierto tipo de estructura y de las funciones lineales que existen entre estos espacios. A lo largo de la historia han existido grandes matemáticos que han realizado grandes aportaciones a esta rama. Israel Gelfand fue un matemático ruso que hizo importantes contribuciones al análisis funcional, tales como: la transformada de Gelfand, el teorema de Gelfand-Mazur y el teorema de Gelfand-Naimark, en la teoría de álgebras de Banach.

Tanto en espacios de Hilbert como en espacios de Banach, el estudiar operadores es algo fundamental, incluyendo ver que se puede decir de su espectro, de su adjunto, etc. El siguiente paso es no sólo estudiar un operador aislado, sino una familia de operadores. Si consideramos un operador normal en un espacio de Hilbert, el álgebra generada por éste resulta ser una $C^*$-álgebra. El objetivo de esta tesis es presentar la teoría de Gelfand para álgebras de Banach conmutativas con identidad, y como caso particular se considerarán las $C^*$-álgebras.

La teoría de Gelfand nos ayuda a clasificar ciertos tipos de álgebras, por ejemplo si consideramos un álgebra de Banach con identidad que además es un álgebra de división entonces ésta tiene que ser $\mathbb{C}$, o para el caso de $C^*$-álgebras conmutativas, considerar la transformada de Gelfand nos lleva a que cada una de éstas es equivalente a un espacio de funciones continuas sobre algún conjunto compacto.

Dividimos la tesis en cuatro capítulos, el contenido de cada uno de ellos se describe a continuación. El primer capítulo introduce conceptos básicos y ejemplos de los espacios de Hilbert, así como algunos resultados importantes de éstos como lo son: el teorema de Pitágoras, la desigualdad de Cauchy- Schwarz y el teorema de representación de Riesz.

Para el segundo capítulo introducimos la noción de espacios de Banach, algunos ejemplos de éstos y al igual que en el primer capítulo algunos conceptos importantes serán los de operadores lineales y el dual de un operador. Un resultado importante en este capítulo será el teorema de Alaoglu que será de gran utilidad para explicar la teoría de Gelfand.

En el tercer capítulo nos adentramos en el mundo de las álgebras de Banach. Se da la definición de qué es un álgebra, para después pasar a la definición de álgebra de Banach y posteriormente definimos a las $*$-álgebras, $*$-álgebras normadas y $C^*$-álgebras, haciendo un poco de énfasis en estas últimas. Otra definición importante que se enuncia en este capítulo es la de elemento invertible de una álgebra de Banach, y se dan algunas propiedades que cada uno de éstos satisface.

En el capítulo final y el centro de esta tesis, se presenta la teoría de Gelfand. Se define la transformada de Gelfand de un álgebra de Banach en general en el espacio de los funcionales lineales multiplicativos asociados. Para un elemento de un álgebra de Banach se define el espectro, el conjunto de solución y el radio espectral de éste, así como algunos resultados importantes que relacionan éstos con las álgebras de Banach. Se presentan algunos resultados importantes de la teoría de Gelfand, como el teorema de Gelfand-Mazur para álgebras de Banach de división con identidad, el teorema de Gelfand para álgebras de Banach conmutativas con identidad y el teorema de Gelfand-Naimark para $C^*$-álgebras conmutativas con identidad. Como resultado del teorema de Gelfand-Naimark se enuncia el teorema espectral para una $C^*$-álgebra generada por un operador normal de un espacio de Hilbert. Una consecuencia importante de la teoría de Gelfand es que da los primeros pasos para el cálculo funcional, pero eso no se desarrollará en este trabajo.

# Capítulo 1

# Espacios de Hilbert

En este capítulo vamos a introducir la noción de un espacio con producto interior para después hablar sobre el concepto de espacio de Hilbert, el cual es una generalización del concepto de espacio euclidiano. La principal característica de estos espacios es que poseen un producto interior a partir del cual podemos definir una norma y consecuentemente una métrica en el espacio.

## 1.1. Principales definiciones y ejemplos

Para poder definir el concepto de espacio de Hilbert necesitamos unas definiciones previas.

***Observación.*** De aquí en adelante $\mathbb{F}$ denotará a $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

**Definición 1.1.1.** *Un producto interior sobre un espacio lineal $H$ es una función $\langle , \rangle : H \times H \mapsto \mathbb{F}$ tal que para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $f, g, h \in H$ satisface:*

1. $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$,
2. $\langle f, \alpha g + \beta h \rangle = \overline{\alpha} \langle f, g \rangle + \overline{\beta} \langle f, h \rangle$,
3. $\langle f, f \rangle \geq 0$ *y* $\langle f, f \rangle = 0$ *si y sólo si* $f = 0$,
4. $\langle f, g \langle = \overline{\langle g, f \rangle}$.

Llamaremos espacio con producto interior a $H$.

**Definición 1.1.2.** *Si $H$ es un espacio con producto interior, entonces definimos*

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$$

*para todo $f$ en $H$.*

**Proposición 1.1.3.** *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz.) Si $f$ y $g$ están en un espacio de producto interior $H$, entonces*

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \; \|g\|.$$

*Demostración.* Si $\alpha$ está en $\mathbb{F}$ y, $f$ y $g$ están en $H$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle f - \alpha\, g, f - \alpha\, g\rangle \\ &= \langle f, f\rangle - \alpha\langle g, f\rangle - \overline{\alpha}\langle f, g\rangle + |\alpha|^2\langle g, g\rangle. \end{aligned}$$

Supogamos que $\langle g, f\rangle = be^{i\theta}$, con $b \geq 0$, y sea $\alpha = e^{-i\theta}t$, con $t$ en $\mathbb{R}$. Entonces la desigualdad anterior se convierte en

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle f, f\rangle - e^{-i\theta}tbe^{i\theta} - e^{i\theta}tbe^{-i\theta} + t^2\langle g, g\rangle \\ &= \langle f, f\rangle - 2bt + t^2\langle g, g\rangle \\ &= c - 2bt + at^2 = p(t), \end{aligned}$$

donde $c = \langle f, f\rangle$ y $a = \langle g, g\rangle$. Entonces $p(t)$ es un polinomio cuadrático en la variable real $t$ y $p(t) \geq 0$ para toda $t$. Esto implica que la ecuación $p(t) = 0$ tiene a lo más una solución real en $t$. De la fórmula cuadrática se sigue entonces que el discriminante no es positivo, esto es, $4b^2 - 4ac \leq 0$. Así

$$0 \geq b^2 - ac = |\langle f, g\rangle|^2 - \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle,$$

lo cual prueba la desigualdad.

□

**Definición 1.1.4.** *Una norma en un espacio lineal $X$ es una función $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ tal que para todos $\alpha \in \mathbb{F}$ y $f, g \in X$ satisface:*

- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$,
- $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$, *y*
- $\|f\| = 0$ *si y sólo si* $f = 0$.

**Proposición 1.1.5.** *Si $H$ es un espacio con producto interior, entonces $\|\cdot\|$ define una norma en $H$.*

*Demostración.* Sean $\alpha$ en $\mathbb{C}$ y, $f$ y $g$ en $H$.

El hecho de que $\|f\| = 0$ si y sólo si $f = 0$ se sigue de 3 de la definición de producto interior.
De las propiedades de producto interior se tiene que

$$\|\lambda f\| = \langle \lambda f, \lambda f\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle \lambda\overline{\lambda} f, f\rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|f\|.$$

Por otro lado, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se sigue que

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle f,g\rangle \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2|\langle f,g\rangle| \\ &\leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\|\|g\| = (\|f\| + \|g\|)^2 .\end{aligned}$$

$\square$

La norma anterior nos define una métrica en $H$ dada por $d(f,g) = \|f-g\|$.

Ahora sí podemos dar la definición de espacio de Hilbert.

**Definición 1.1.6.** *Un espacio de Hilbert $H$ es un espacio con producto interior, el cual es completo con la métrica inducida por la norma, esto es, cualquier sucesión de Cauchy converge en $H$.*

A continuación presentamos algunos ejemplos de espacios con producto interior y espacios de Hilbert.

*Ejemplo* 1.1.7. El espacio vectorial de todas las funciones continuas con valores reales en $[0,1]$ es un espacio con producto interior si $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, pero no es un espacio de Hilbert. Para $n$ en $\mathbb{N}$, y $x$ en $[0,1]$, las funciones:

$$f_n(x) = \begin{cases} (x+\frac{1}{2})^n & si \quad x \in [0,\frac{1}{2}) \\ 1 & si \quad x \in [\frac{1}{2},1] \end{cases},$$

están en $C([0,1])$, pero su límite en $L^2$ es la función caracteríatica en $[\frac{1}{2},1]$ la cual no pertenece a $C([0,1])$, por lo tanto $C([0,1])$ no es de Hilbert.

*Ejemplo* 1.1.8. Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, sea $\mathbb{C}^n = \{x : x = (x_1, ..., x_n), x_i \in \mathbb{C}\}$. $\mathbb{C}^n$ es un espacio lineal complejo si definimos la adición y la multiplicación por escalares definidas término a término, entonces $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$ define un producto interior en $\mathbb{C}^n$ con el cual $\mathbb{C}^n$ es un espacio de Hilbert.

*Ejemplo* 1.1.9. Sea $\ell^2(\mathbb{N})$ el conjunto de todas la sucesiones complejas cuadrado sumables, esto es, todas las sucesiones $\{x_n\}$ de números complejos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Así $\ell^2(\mathbb{N})$ es un espacio lineal complejo con la adición y multiplicación por escalares definidas término a término.

Para $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \ell^2(\mathbb{N})$, $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ define un producto interior con el cual $\ell^2(\mathbb{N})$ es un espacio de Hilbert.

*Ejemplo* 1.1.10. Sea $(X, M, \mu)$ un espacio de medida, donde $M$ es una $\sigma$-álgebra de conjuntos de $X$ y $\mu$ una medida positiva. Sea $L^2(\mu)$ el espacio de todas las funciones (clases de equivalencia de funciones) medibles cuadrado integrables con valores complejos, esto es, el conjunto de las $f \in L^2(\mu)$ tales que $\int_X |f|^2 d\mu < \infty$.

Con las operaciones suma y multiplicación por escalares definidas término a término $L^2(\mu)$ es un espacio lineal.

Para $f, g \in L^2(\mu)$, $\langle f, g\rangle = \int_X f\ \overline{g}\ d\mu$ define un producto interior con el cual $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert.

La norma y el producto interior en un espacio de Hilbert $H$ satisfacen algunas propiedades importantes como lo son el teorema de Pitágoras y la ley del paralelogramo.

Algunas definiciones importantes cuando hablamos de espacios de Hilbert son las de vector ortogonal y complemento ortogonal.

**Definición 1.1.11.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert. Decimos que dos elementos $x$ e $y$ en $H$ son ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$, y lo denotamos por $x \perp y$.*

**Definición 1.1.12.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert y sean $A$ y $B$ subconjuntos de $H$. Decimos que $A$ y $B$ son ortogonales y se escribe $A \perp B$ si $a \perp b$ para todo $a$ en $A$ y todo $b$ en $B$.*

**Definición 1.1.13.** *Si $M$ es un subconjunto de un espacio de Hilbert $H$, entonces el complemento ortogonal de $M$, denotado por $M^{\perp}$, es el conjunto de vectores en $H$ ortogonales a cada vector en $M$, esto es, el conjunto de los $h$ en $H$ tales que $\langle h, m\rangle = 0$ para todo $m$ en $M$.*

**Proposición 1.1.14.** *(Teorema de Pitágoras.) Si $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ es un subconjunto ortogonal de un espacio con producto interior $H$, entonces*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2 .$$

*Demostración.* Por definición de producto interior y de conjunto ortogonal, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} f_i \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} f_i, \sum_{i=1}^{n} f_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, f_i \rangle + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \langle f_i, f_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, f_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2 .
\end{aligned}$$

□

**Proposición 1.1.15.** *(Ley del paralelogramo.) Si $f$ y $g$ están en un espacio de producto interior $H$, entonces*

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\ \|f\|^2 + 2\ \|g\|^2.$$

*Demostración.* La prueba de esta proposición se obtiene expandiendo el lado izquierdo de la igualdad, usando la definición de norma dada por un producto interior y las propiedades del producto interior. □

***Observación.*** El resultado anterior es muy útil para saber si la norma de un espacio normado $H$ proviene de un producto interior, esto es, si $H$ satisface la ley del paralelogramo, entonces existe un producto interior en $H$ tal que $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ para cada $f$ en $H$ (ver [Mac08]).

## 1.2. Teorema de representación de Riesz

El siguiente resultado establece una relación entre un espacio de Hilbert $H$ y su espacio dual. Dado un elemento en el dual éste posee una única representación como producto interior con elementos de $H$.

**Definición 1.2.1.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{F}$. Una función $\varphi$ de $H$ a $\mathbb{F}$ es un funcional lineal acotado si:*

1. *$\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)$ para $f$ y $g$ en $H$, y $\alpha$ y $\beta$ en $\mathbb{F}$, y*
2. *existe $M > 0$ independiente de $f$ tal que $|\varphi(f)| \leq M\|f\|$ para cada $f$ en $H$.*

**Teorema 1.2.2.** *(Teorema de representación de Riesz)*
*Si $\psi$ es un funcional lineal acotado en $H$, entonces existe un único $g \in H$ tal que*

$$\psi(f) = \langle f, g\rangle$$

*para $f \in H$.*

*Demostración.* Sea $K$ el kernel de $\psi$, esto es, $K = \{f \in H \ : \psi(f) = 0\}$. Como $\psi$ es continuo entonces $K$ es un subespacio cerrado de $H$.

Si $K = H$ entonces $\psi(f) = \langle f, 0\rangle$ para todo $f$ en $H$, y el teorema está probado.

Si $K \neq H$ entonces existe un vector unitario $h$ ortogonal a $K$. Como $h$ no está en $K$, entonces $\psi(h) \neq 0$. Para $f$ en $H$ el vector $f - \dfrac{\psi(f)}{\psi(h)}h$ está en $K$ pues

$$\psi\left(f - \frac{\psi(f)}{\psi(h)}h\right) = \psi(f) - \frac{\psi(f)}{\psi(h)}\psi(h) = 0.$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\psi(f) &= \psi(f)\ \langle h, h\rangle \\
&= \left\langle \psi(f)\ h, \frac{\overline{\psi(h)}}{\overline{\psi(h)}}h \right\rangle \\
&= \frac{1}{\psi(h)}\left\langle \psi(f)h, \overline{\psi(h)}h \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\psi(f)}{\psi(h)}h, \overline{\psi(h)}h \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\psi(f)}{\psi(h)}h - f, \overline{\psi(h)}h \right\rangle + \left\langle f, \overline{\psi(h)}h \right\rangle \\
&= \left\langle f, \overline{\psi(h)}h \right\rangle,
\end{aligned}$$

para $f$ en $H$, y por lo tanto $\psi(f) = \langle f, g\rangle$ para $g = \overline{\psi(h)}h$.

Hemos probado la existencia de $g$, ahora veamos la unicidad.

Supongamos que existen $g_1$ y $g_2$ en $H$ tales que $\langle f, g_1\rangle = \langle f, g_2\rangle$ para $f$ en $H$. Entonces $\langle f, g_1\rangle - \langle f, g_2\rangle = \langle f, g_1 - g_2\rangle = 0$ para todo $f$ en $H$ y por tanto $g_1 = g_2$. Por lo tanto, $\psi(f) = \langle f, g\rangle$ para un único $g$ en $H$.

□

## 1.3. Operadores en espacios de Hilbert

Dados dos espacios de Hilbert podemos hablar de transformaciones lineales entre ellos que preservan su estructura lineal, los operadores lineales.

Decimos que un operador lineal, $\varphi : H_1 \to H_2$, es acotado si existe $M > 0$ tal que

$$\|\varphi(f)\| \leq M \, \|f\|,$$

para todo $f$ en $H_1$.

Al espacio de los operadores lineales y acotados entre dos espacios de Hilbert $H_1$ y $H_2$ lo denotaremos por $B(H_1, H_2)$ y por $B(H_1)$ si $H_1 = H_2$.

**Definición 1.3.1.** *Definimos la norma de un operador lineal acotado $T$ entre espacios de Hilbert por*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}.$$

**Proposición 1.3.2.** *Si $T$ es un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert $H$, entonces existe un único operador lineal acotado $S$ en $H$ tal que*

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, Sg\rangle,$$

*para $f, g \in H$.*

*Demostración.* Sea $g$ en $H$ fijo, consideremos el funcional $\varphi$ definido por $\varphi(f) = \langle Tf, g\rangle$ para $f$ en $H$. Sean $f$ y $h$ en $H$ y $\alpha$ en $\mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha f + h) &= \langle T(\alpha f + h), g\rangle \\
&= \langle T(\alpha f) + Th, g\rangle \\
&= \alpha\langle Tf, g\rangle + \langle Th, g\rangle \\
&= \alpha \, \varphi(f) + \varphi(h),
\end{aligned}$$

así $\varphi$ es lineal.

Además, ya que $T$ es acotado y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\|\varphi(f)\| = |\langle Tf, g\rangle| \leq \|Tf\| \, \|g\| \leq \|T\| \, \|f\| \, \|g\|,$$

así $\varphi$ es acotado.

Por tanto $\varphi$ es un funcional lineal acotado y por el teorema de representación de Riesz existe un único $h$ en $H$ tal que $\varphi(f) = \langle f, h\rangle$ para $f$ en $H$. Definimos $Sg = h$. Así $\langle Tf, g\rangle = \langle f, Sg\rangle$ para $f$ y $g$ en $H$. Sean $h_1$ y $h_2$ en $H$ y $\alpha$ en $\mathbb{C}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\langle f, S(\alpha\ h_1 + h_2)\rangle &= \langle Tf, \alpha\ h_1 + h_2\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle Tf, h_1\rangle + \langle Tf, h_2\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle f, Sh_1\rangle + \langle f, Sh_2\rangle \\
&= \langle f, \alpha\ Sh_1\rangle + \langle f, Sh_2\rangle \\
&= \langle f, \alpha\ Sh_1 + Sh_2\rangle,
\end{aligned}
$$

de donde se tiene que $S(\alpha\ h_1 + h_2) = \alpha\ Sh_1 + Sh_2$ y por tanto $S$ es lineal.

Por otro lado, como $\langle Tf, g\rangle = \langle f, Sg\rangle$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que $\|\langle f, Sg\rangle\| = \|\langle Tf, g\rangle\| \leq \|Tf\|\ \|g\| \leq \|T\|\ \|f\|\ \|g\|$ para $f$ en $H$. Haciendo $f = Sg$ tenemos $\|Sg\|^2 \leq \|T\|\ \|Sg\|\ \|g\|$, así $\|Sg\| \leq \|T\|\ \|g\|$ de donde $\|S\| \leq \|T\|$ y por tanto $S$ es un operador acotado en $H$.

Veamos que $S$ es único. Supongamos que existe $S_0$ operador lineal acotado en $H$ tal que $\langle Tf, g\rangle = \langle f, S_0 g\rangle$ para $f$ y $g$ en $H$. Entonces $\langle f, S_0 g\rangle = \langle f, Sg\rangle$, así $\langle f, Sg - S_0 g\rangle = 0$ para todo $f$ en $H$ lo cual implica que $S(g) - S_0(g) = 0$. Por lo tanto $S = S_0$ y la prueba está completa.

□

## 1.4. El adjunto de un operador

Como consecuencia de la proposición anterior podemos dar la siguiente definición.

**Definición 1.4.1.** *Si $T$ es un operador en un espacio de Hilbert $H$, definimos el operador adjunto de $T$, denotado por $T^*$, como el único operador en $H$ tal que para todo $f, g \in H$ satisface:*

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^* g\rangle$$

Las siguientes dos proposiciones establecen algunas propiedades del mapeo $T \mapsto T^*$.

**Proposición 1.4.2.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, para todos $S, T \in B(H)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se satisface:*

*1) $T^{**} = (T^*)^* = T$,*

*2) $(\alpha\ S + \beta\ T)^* = \overline{\alpha}\ S^* + \overline{\beta}\ T^*$ y $(ST)^* = T^*\ S^*$, y*

*3) $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ para todo $T$ invertible en $B(H)$.*

*Demostración.* 1) Sean $f$ y $g$ en $H$, por definición de operador adjunto tenemos

$$\begin{aligned}\langle f, T^{**}g\rangle &= \langle T^*f, g\rangle \\ &= \overline{\langle g, T^*f\rangle} \\ &= \overline{\langle Tg, f\rangle} \\ &= \langle f, Tg\rangle,\end{aligned}$$

por lo tanto $T^{**} = T$.

2) Sean $S$ y $T$ en $B(H)$, $f$ y $g$ en $H$, y sean $\alpha$ y $\beta$ en $\mathbb{C}$.

Por las propiedades del producto interno tenemos que para $f$ y $g$ en $H$,

$$\begin{aligned}\langle f, (\alpha S + \beta T)^*(g)\rangle &= \langle(\alpha S + \beta T)(f), g\rangle \\ &= \langle \alpha Sf + \beta Tf, g\rangle \\ &= \alpha\ \langle Sf, g\rangle + \beta\ \langle Tf, g\rangle \\ &= \alpha\ \langle f, S^*g\rangle + \beta\ \langle f, T^*g\rangle \\ &= \langle f, \overline{\alpha}S^*g\rangle + \langle f, \overline{\beta}T^*g\rangle \\ &= \langle f, (\overline{\alpha}S^* + \overline{\beta}T^*)(g)\rangle,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\langle f, (ST)^*g\rangle &= \langle STf, g\rangle \\ &= \langle Tf, S^*g\rangle \\ &= \langle f, T^*S^*g\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto de la unicidad del operador adjunto concluimos que

$$(\alpha\ S + \beta\ T)^* = \overline{\alpha}\ S^* + \overline{\beta}\ T^* \text{ y } (ST)^* = T^*\ S^*.$$

3) Como $T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*$, se tiene que $T^*$ es invertible y que $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

□

**Proposición 1.4.3.** *Si $H$ es un espacio de Hilbert y $T$ es un elemento de $B(H)$ entonces $\|T\| = \|T^*\|$ y $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.*

*Demostración.* De la prueba de la proposición 1.3.2 tenemos que $\|T^*\| \leq \|T\|$. Además, como $T^{**} = T$ se tiene que $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$, de donde concluimos que $\|T\| = \|T^*\|$.

Para la otra igualdad, como $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \ \|T\| = \|T\|^2$, solo nos falta verificar $\|T^*T\| \geq \|T\|^2$. Para $f$ en $H$ tenemos

$$\|Tf\|^2 = \langle Tf, Tf\rangle = \langle T^*Tf, f\rangle \leq \|T^*Tf\| \ \|f\|$$

Tomando el supremo sobre todos los vectores unitarios tenemos que

$$\|T\|^2 = \sup \|Tf\|^2 \leq \sup \|T^*Tf\| \ \|f\| = \|T^*T\|,$$

por lo tanto $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.

$\square$

En un espacio de Hilbert $H$, podemos definir diferentes tipos de operadores.

**Definición 1.4.4.** *Si $T$ es un operador en un espacio de Hilbert $H$, decimos que:*

- *$T$ es normal si $T\ T^* = T^*\ T$,*
- *$T$ es autoadjunto o hermitiano si $T = T^*$,*
- *$T$ es unitario si $T^*\ T = T\ T^* = Id_H$.*

**Definición 1.4.5.** *Si $H$ es un espacio de Hilbert llamamos espacio dual de $H$ al conjunto de todos los funcionales lineales acotados de $H$ en $\mathbb{F}$ y lo denotamos por $H^*$.*

# Capítulo 2

# Espacios de Banach

## 2.1. Definiciones principales

Los espacios de Banach son espacios más generales que los espacios de Hilbert, y éstos al igual que los espacios de Hilbert poseen una norma con la cual son completos, pero esta norma no necesariamente proviene de un producto interior.

Para definir el concepto de espacio de Banach son necesarias las siguientes definiciones.

Si $X$ tiene una norma entonces $d(f, g) = \|f - g\|$ define una métrica en $X$.

**Definición 2.1.1.** *Un espacio normado es un par $(X, \|\cdot\|)$ donde $X$ es un espacio lineal y $\|\cdot\|$ es una norma en $X$.*

Ahora sí definamos el concepto de espacio de Banach.

**Definición 2.1.2.** *Un espacio de Banach es un espacio normado que es completo con respecto a la métrica inducida por la norma.*

Algunos ejemplos de espacios de Banach son:

*Ejemplo* 2.1.3. Sea $X$ un espacio topológico de Hausdorff.
Sea $C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{F} \mid f \text{ es continua y acotada}\}$ con la norma $\|f\| = \sup\{f(x) : x \in X\} < \infty$. Con la suma y multiplicación por escalares definidas puntualmente $C_b(X)$ es un espacio de Banach.

*Ejemplo* 2.1.4. Sea $(X, M, \mu)$ un espacio de medida, donde $M$ es una $\sigma$-álgebra de conjuntos de $X$ y $\mu$ es una medida positiva. Para $1 \leq p < \infty$ sea $L^p(\mu)$ el espacio de todas las funciones (clases de equivalencias de funciones) medibles con valores complejos tales que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$. Con la suma y multiplicación por escalares definidas puntualmente $L^p(\mu)$ es un espacio lineal. Para cada $f \in L^p(\mu)$, $\|f\| = (\int_X |f|^p d\ \mu)^{\frac{1}{p}}$ define una norma con la cual $L^p(\mu)$ es un espacio de Banach.

***Observación.*** Dado que en todo espacio de Hilbert el producto interno define una norma con la cual éste es completo entonces todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach.

## 2.2. Operadores en espacios de Banach

También podemos hablar de operadores lineales entre espacios de Banach. Al espacio de los operadores lineales y acotados entre dos espacios de Banach $X_1$ y $X_2$ lo denotaremos por $B(X_1, X_2)$ y por $B(X_1)$ si $X_1 = X_2$.

Al igual que en los espacios de Hilbert, podemos definir una norma para un operador lineal acotado entre espacios de Banach.

**Definición 2.2.1.** *Definimos la norma para un operador lineal acotado $T$ entre espacios de Banach por*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}.$$

**Proposición 2.2.2.** *Si $X_1$ y $X_2$ son espacios de Banach entonces $B(X_1, X_2)$ es un espacio de Banach.*

*Demostración.* Sea $\{T_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en $B(X_1, X_2)$.
Como $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|$ y $\{T_n\}_n$ es de Cauchy entonces $\{T_n(x)\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $X_2$ para todo $x$ en $X_1$.
Ya que $X_2$ es un espacio de Banach entonces para cada $x$ en $X_1$ existe $\lim_{n\longrightarrow\infty} T_n(x)$ en $X_2$, luego podemos definir $T(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} T_n(x)$ para cada $x$ en $X_1$, y así $T$ es un operador lineal.
Como $\{T_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy entonces es acotada, esto es, existe $M > 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$ para todo $n$ en $\mathbb{N}$. Así

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\|\ \|x\| \leq M\|x\|$$

y

$$\|T(x)\| = \|\lim_{n\longrightarrow\infty} T_n(x)\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|T_n(x)\| \leq M\|x\|,$$

de donde concluimos que $T$ es acotado.
Resta probar que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|T_n - T\| = 0$. Sea $x$ en $X_1$ tal que $\|x\| \leq 1$, y como $\{T_n\}_n$

es una sucesión de Cauchy entonces para todo $\epsilon > 0$ existen $N$ en $\mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq N$ se tiene

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| < \epsilon.$$

Así

$$\|T(x) - T_n(x)\| = \lim_{k \longrightarrow \infty} \|T_k(x) - T_n(x)\| < \epsilon,$$

cuando $\|x\| \leq 1$, entonces $\|T - T_n\| < \epsilon$. Por lo tanto $B(X_1, X_2)$ es un espacio de Banach.

□

***Observación.*** Dado que todo espacio de Hilbert es espacio de Banach entonces el conjunto de operadores acotados entre dos espacios de Hilbert es un espacio de Banach.

**Definición 2.2.3.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Una función $\varphi : X \to \mathbb{F}$ es un funcional lineal acotado si para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $f, g \in X$ se satisface:*

- $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\ \varphi(f) + \beta\ \varphi(g)$, *y*
- *existe $M > 0$ independiente de $f$ tal que $|\varphi(f)| \leq M\ \|f\|$.*

**Proposición 2.2.4.** *Sea $\varphi$ un funcional lineal en un espacio de Banach $X$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

*1) $\varphi$ es acotado,*

*2) $\varphi$ es continuo,*

*3) $\varphi$ es continuo en el cero.*

*Demostración.* 1) implica 2). Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $X$ que converge a $f$, entonces $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} |\varphi(f_n) - \varphi(f)| &= \lim_{n \to \infty} |\varphi(f_n - f)| \\ &\leq \lim_{n \to \infty} M\ \|f_n - f\| = 0, \end{aligned}$$

para algún $M > 0$, pues $\varphi$ es acotado por hipótesis. Lo anterior implica que la sucesión $\{\varphi(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\varphi(f)$. Por lo tanto $\varphi$ es continuo.

2) implica 3). Si $\varphi$ es continuo lo es para cada $f$ en $X$, particularmente para 0.

3) implica 1). Como $\varphi$ es continuo en 0, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\|f\| < \delta$ implica que $|\varphi(f)| < 1$. Así, para cualquier $g$ distinto de cero en $X$ tenemos que

$$|\varphi(g)| = \frac{2\,\|g\|}{\delta}\,\left|\varphi\left(\frac{\delta}{2\,\|g\|}\,g\right)\right| < \frac{2}{\delta}\,\|g\|,$$

y por lo tanto $\varphi$ es acotado.

□

## 2.3. Espacio dual de un espacio de Banach

**Definición 2.3.1.** *Si $X$ es un espacio de Banach llamamos espacio dual de $X$ al conjunto de todos los funcionales lineales acotados en $X$ y lo denotamos por $X^*$.*

**Definición 2.3.2.** *Si $\varphi$ está en $X^*$ definimos la norma de $\varphi$ como*

$$\|\varphi\| = sup\,\left\{\frac{|\varphi(f)|}{\|f\|} : f \neq 0\right\}.$$

**Proposición 2.3.3.** *Si $X$ es un espacio de Banach entonces $X^*$ es también un espacio de Banach.*

*Demostración.* La prueba del resultado anterior es consecuencia de la proposición (2.2.2). □

## 2.4. Redes

El concepto de red es una generalización del concepto de sucesión, tiene los mismos propósitos que las sucesiones pero éste funciona en un espacio topológico arbitrario. En esta sección introduciremos el concepto de red y algunas de las propiedades más importantes de éste.

**Definición 2.4.1.** *Decimos que una relación $\preceq$ en un conjunto $A$ es de orden parcial si se satisface*

1. *$\alpha \preceq \alpha$ para todo $\alpha$ en $A$,*
2. *si $\alpha \preceq \beta$ y $\beta \preceq \alpha$ entonces $\alpha = \beta$, y*
3. *si $\alpha \preceq \beta$ y $\beta \preceq \gamma$ entonces $\alpha \preceq \gamma$.*

*Además diremos que un conjunto $J$ es dirigido con un orden parcial $\preceq$ si para cada par de elementos $\alpha$ y $\beta$ en $J$, existe un elemento $\gamma$ en $J$ tal que $\alpha \preceq \gamma$ y $\beta \preceq \gamma$.*

**Definición 2.4.2.** *Sea $X$ un espacio topológico. Una red en $X$ es una función $f$ de un conjunto dirigido $J$ en $X$. Denotaremos la red por $\{\varphi_n\}_{\alpha\in J}$. Diremos que una red $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ converge a $\varphi$ en $X$ si para cada vecindad $U$ de $\varphi$, existe $\alpha$ en $J$ tal que si $\alpha \preceq \beta$, entonces $\varphi_\beta \in U$.*

A continuación mencionaremos algunos resultados importantes de la teoría de redes, omitiremos las pruebas pues estás no son relevantes en este trabajo, pero se puede consultar información sobre este tema en los siguientes textos: [Dou12], [Mac08] [Mun14], [Wil04].

**Proposición 2.4.3.** *Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos, y sean $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una red que converge a $\varphi$ en $X$ y $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una red que converge a $\psi$ en $Y$, entonces $\{\varphi_\alpha\psi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ converge a $(\varphi,\psi)$ en $X\times Y$.*

**Teorema 2.4.4.** *Sean $X$ un espacio topológico y $A$ un subconjunto de $X$. Entonces un punto $\varphi$ está en la cerradura de $A$ ($\overline{A}$) si y sólo si existe un red de puntos en $A$ que converge a $\varphi$.*

**Teorema 2.4.5.** *Sea $f: X\to Y$ una función entre espacios topológicos. Entonces $f$ es continua si y sólo si, para cada red convergente $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ en $X$ que converge a $\varphi$, entonces la red $\{f(\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ converge a $f(\varphi)$.*

## 2.5. Topologías Débiles

Sean $X$ un conjunto, $Y$ un espacio topológico y $\mathfrak{F}$ una familia de funciones de $X$ a $Y$.

**Definición 2.5.1.** *La topología débil en $X$ inducida por $\mathfrak{F}$ es la topología más débil o más pequeña (i.e., la topología que contiene la colección más pequeña de conjuntos abiertos), $\tau$, en $X$ para la cual cada función $f\in\mathfrak{F}$ es continua.*

Notemos que $\tau$ es la topología generada por los conjuntos

$$\{f^{-1}(U) : f\in\mathfrak{F} \text{ y } U \text{ es abierto en } Y\}.$$

**Definición 2.5.2.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Para cada $f$ en $X$, $\widehat{f}: X^*\to\mathbb{F}$ denota la función en $X^*$ definida por $\widehat{f}(\varphi)=\varphi(f)$ para todo $\varphi$ en $X^*$.*

Consideremos $\Omega = X^*$, el dual de un espacio de Banach $X$ y $Y=\mathbb{F}$. Para $f\in\Omega$, como $\widehat{f}(\varphi)=\varphi(f)$ y $|\widehat{f}(\varphi)| = \|\varphi(f)\| \le \|\varphi\|\|f\|$, se tiene que

$$\|\widehat{f}\| = \sup_{\|\varphi\|\le 1} |\widehat{f}(\varphi)| \le \sup_{\|\varphi\|\le 1} \|\varphi\|\|f\| \le \|f\|,$$

así $\widehat{f}$ es acotado.

**Definición 2.5.3.** *La $w^*$-topología en $X^*$ es la topología débil en $X^*$ inducida por la familia de funciones $\{\widehat{f} : f \in X\}$.*

La siguiente proposición es muy útil cuando trabajamos con topologías débiles.

**Proposición 2.5.4.** *Sea $\{\varphi_\alpha\}$ una red en $X^*$. Entonces $\varphi_\alpha \to \varphi$ en la $w^*$-topología si y sólo si $\varphi_\alpha(f) \to \varphi(f)$ para cada $f$ en $X$.*

La demostración del teorema anterior no es muy relevante en este trabajo, por tal motivo será omitida. Se puede encontrar más información sobre este tema en los siguientes textos: [Dou12] [Mac08].

**Proposición 2.5.5.** *La $w^*$-topología en $X^*$ es Hausdorff.*

*Demostración.* Sean $\varphi_1$ y $\varphi_2$ en $X^*$, tales que $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Entonces, $\widehat{f}(\varphi_1) = \varphi_1(f) \neq \varphi_2(f) = \widehat{f}(\varphi_2)$, para algún $f$ en $X$, así las funciones $\{\widehat{f} : f \in X\}$ separan puntos de $X^*$, y por lo tanto la $w^*$-topología en $X^*$ es Hausdorff. $\square$

## 2.6. Teorema de Alaoglu

**Definición 2.6.1.** *Si $X$ es un espacio de Banach, la bola unitaria en $X$ es el conjunto $\{f \in X : \|f\| \leq 1\}$ y la denotamos por $(X)_1$.*

**Teorema 2.6.2.** *(Alaoglu) La bola unitaria $(X^*)_1$ es compacta en la $w^*$-topología.*

*Demostración.* La idea para probar este resultado es identificar a $(X^*)_1$ con un subconjunto cerrado de un espacio producto, así la compacidad de $(X^*)_1$ se desprenderá del teorema de Tychonoff.
Para cada $f$ en $(X)_1$, $\mathbb{C}_1^f$ denotará una copia del disco unitario cerrado en $\mathbb{C}$ y $P$ al espacio producto $\prod\limits_{f \in (X)_1} \mathbb{C}_1^f$. Por el teorema de Tychonoff $P$ es compacto.
Definimos $\Lambda$ de $(X^*)_1$ a $P$ por $\Lambda(\varphi) = \varphi|_{(X)_1}$. Ya que $\Lambda(\varphi_1) = \Lambda(\varphi_2)$ implica que las restricciones de $\varphi_1$ y $\varphi_2$ a $(X)_1$ son identicas se sigue que $\Lambda$ es inyectiva.
Además, una red $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en $X^*$ converge en la $w^*$-topología a $\varphi$ en $X^*$ si y sólo si $\lim\limits_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(f) = \varphi(f)$ para toda $f$ en $X$ si y sólo si $\lim\limits_{\alpha \in A} \Lambda(\varphi_\alpha)(f) = \Lambda(\varphi)(f)$ para toda $f$ en $(X)_1$. Esta última afirmación es equivalente a $\lim\limits_{\alpha \in A} \Lambda(\varphi_\alpha) = \Lambda(\varphi)$ en la topología de $P$. Por lo tanto $\Lambda$ es un homeomorfismo entre $(X^*)_1$ y el subconjunto $\Lambda[(X^*)_1]$ de $P$.
Para completar la prueba basta ver que $\Lambda[(X^*)_1]$ es cerrado en $P$. Sea $\{\Lambda(\varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una red en $\Lambda[(X^*)_1]$ que converge en la topología producto a $\psi$ en $P$.
Si $f, g$ y $f + g$ están en $(X)_1$, entonces

$$\psi(f+g) = \lim_{\alpha \in A} \Lambda(\varphi_\alpha)(f+g) = \lim_{\alpha \in A} \Lambda(\varphi_\alpha)(f) + \lim_{\alpha \in A} \Lambda(\varphi_\alpha)(g) = \psi(f) + \psi(g).$$

Además si $f$ y $\lambda f$ están en $(X)_1$, entonces

$$\psi(\lambda f) = \lim_{\alpha \in A} \Lambda(\varphi_\alpha)(\lambda f) = \lim_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(\lambda f) = \lambda \lim_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(f) = \lambda \psi(f),$$

y

$$\|\psi(f)\| = \| \lim_{\alpha \in A} \Lambda(\varphi_\alpha)(f)\| = \lim_{\alpha \in A} \|\varphi_\alpha(f)\| \leq \lim_{\alpha \in A} \|\varphi_\alpha\| \|f\| \leq 1.$$

Así $\psi$ es un elemento en $X^*$ tal que $\|\psi\| \leq 1$. Por lo tanto $\psi$ determina un elemento $\tilde{\psi}$ de $(X^*)_1$ por la relación

$$\tilde{\psi}(f) = \|f\| \psi \left( \frac{f}{\|f\|} \right),$$

para $f$ en $X$. Como $\tilde{\psi}(f) = \psi(f)$ para $f$ en $(X)_1$, entonces $\tilde{\psi}$ está en $(X^*)_1$ y $\Lambda(\tilde{\psi}) = \psi$. Entonces $\Lambda[(X^*)_1]$ es un subconjunto cerrado de $P$, y por lo tanto $(X^*)_1$ es compacto en la $w^*$-topología.

$\square$

# Capítulo 3

# Álgebras de Banach

En este capítulo introduciremos el concepto de álgebra de Banach así como sus principales características, en particular para el álgebra de Banach $C(X)$, es decir, el álgebra de todas las funciones continuas con valores complejos en un espacio compacto $X$. Otros conceptos importantes en este capítulo serán los de $C^*$-álgebra que es un tipo particular de álgebra de Banach y el de inverso de un elemento de un álgebra de Banach.

## 3.1. Definiciones y ejemplos principales

Un álgebra sobre $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial $\mathfrak{B}$ sobre $\mathbb{C}$ dotado de dos operaciones con las cuales es un anillo, y además para $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f, g \in \mathfrak{B}$ satisface

$$\alpha(fg) = (\alpha f)g = f(\alpha g).$$

**Definición 3.1.1.** *Sea* $(\mathfrak{B}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach sobre* $\mathbb{C}$. *Decimos que* $\mathfrak{B}$ *es un álgebra de Banach si es un álgebra y satisface la desigualdad submultiplicativa* $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$ *para todo* $f, g \in \mathfrak{B}$.
*Decimos además que* $\mathfrak{B}$ *es conmutativa si* $fg = gf$ *para todo* $f, g \in \mathfrak{B}$. *Además* $\mathfrak{B}$ *es llamada un álgebra con identidad si existe* $1 \in \mathfrak{B}$ *tal que* $f1 = f = 1f$ *para todos* $f \in \mathfrak{B}$ *y* $\|1\| = 1$.

Algunos ejemplos de álgebras de Banach son los siguientes.

*Ejemplo* 3.1.2. El ejemplo más sencillo de un álgebra de Banach conmutativa con identidad sobre $\mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$ mismo con la norma dada por el módulo.

*Ejemplo* 3.1.3. Sea $X$ un espacio compacto y sea $C(X)$ el conjunto de todas las funciones continuas con valores complejos en $X$. Con las operaciones suma, multiplicación por escalares y multiplicación definidas puntualmente $C(X)$ es un álgebra conmutativa con identidad (la función constante $f(x) = 1$ para todo $x \in X$) sobre $\mathbb{C}$. Ya que $X$ es compacto y cada $f \in C(X)$ es continua entonces $|f|$ es acotada. Así $\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| : x \in X\}$ define una norma en $C(X)$ con la cual es un álgebra de Banach.

*Ejemplo* 3.1.4. Sea $C_0(\mathbb{N})$ el espacio de sucesiones de números complejos que convergen a 0, con las operaciones adición, multiplicación por escalares y multiplicación definidas término a término . $C_0(\mathbb{N})$ junto con la norma del supremo es un álgebra de Banach sin identidad.

*Ejemplo* 3.1.5. Si $X$ es un espacio de Banach, entonces $B(X)$, el conjunto de operadores lineales acotados de $X$ en $X$ es un álgebra de Banach con identidad, junto con la composición como multiplicación y la norma de operadores acotados.

El siguiente concepto será de relevancia en el estudio de las álgebras de Banach.

**Definición 3.1.6.** *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra sobre $\mathbb{C}$. Una involución en $\mathfrak{B}$ es un mapeo $* : f \mapsto f^*$ de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f, g \in \mathfrak{B}$ satisface:*

- $(f + g)^* = f^* + g^*$ *y* $(\alpha\ f)^* = \overline{\alpha}\ f^*$,
- $(fg)^* = g^* f^*$ *y* $(f^*)^* = f$.

*$\mathfrak{B}$ es llamada un $*$-álgebra o un álgebra con involución. Un álgebra de Banach $\mathfrak{B}$ con involución es llamada un $*$-álgebra normada si la involución es isométrica, esto es, $\|f^*\| = \|f\|$ para todo $f$ en $\mathfrak{B}$.*

Enseguida presentamos algunos ejemplos de $*$-álgebras y $*$-álgebras normadas.

*Ejemplo* 3.1.7. El ejemplo más sencillo de una $*$-álgebra normada es $\mathbb{C}$ junto con la involución $z \mapsto \overline{z}$, donde $\overline{z}$ es el conjugado complejo de $z$ en $\mathbb{C}$.

*Ejemplo* 3.1.8. Sea $\mathfrak{B}$ el conjunto de todas las funciones continuas con valores complejos en un espacio compacto $X$, tal que $\mathfrak{B}$ contiene a $f$ y a su conjugado complejo $\overline{f}$. Con las operaciones de suma, multiplicación por escalares y multiplicación definidas puntualmente $\mathfrak{B}$ es un álgebra, y $f \mapsto \overline{f}$ define una involución en $\mathfrak{B}$ que la hace un álgebra de Banach con involución.

*Ejemplo* 3.1.9. Sea $H$ un espacio de Hilbert, para $T \in B(H)$, $T^* \in B(H)$ denota el operador adjunto de $T$. $B(H)$ es un álgebra de Banach, y $T \mapsto T^*$ define una involución en $B(H)$ que lo hace un álgebra de Banach con involución.

Dada un álgebra podemos encontrar subconjuntos de ésta que heredan las mismas propiedades, tales como lo son las subálgebras o en particular los ideales por la izquierda, por la derecha o por ambos lados.

**Definición 3.1.10.** *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra. Un ideal por la izquierda de $\mathfrak{B}$ es una subálgebra $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{B}$ tal que $ba \in \mathfrak{M}$ para todo $b \in \mathfrak{B}$ y $a \in \mathfrak{M}$.Un ideal por la derecha de $\mathfrak{B}$ es una subálgebra $\mathfrak{M}$ tal que $ab \in \mathfrak{M}$ para todo $a \in \mathfrak{M}$ y $b \in \mathfrak{B}$. Si $\mathfrak{M}$ es un ideal por la izquierda y por la derecha de $\mathfrak{B}$, decimos que $\mathfrak{M}$ es un ideal bilateral o simplemente un ideal.*

**Definición 3.1.11.** *Un ideal maximal es un ideal propio que no está contenido en otro ideal propio más grande.*

## 3.2. Elementos invertibles de un álgebra de Banach

**Definición 3.2.1.** *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach con identidad. Decimos que un elemento $f$ en $\mathfrak{B}$ es invertible si existe $g \in \mathfrak{B}$ tal que $fg = gf = 1$. Tal elemento es único, lo denotamos por $g = f^{-1}$ y lo llamamos el inverso de $f$.*
*Un elemento $f$ en $\mathfrak{B}$ es invertible por la izquierda si existe $h$ en $\mathfrak{B}$ tal que $hf = 1$, de igual manera decimos que $f$ es invertible por la derecha si existe $k$ en $\mathfrak{B}$ tal que $fk = 1$.*

El siguiente resultado nos ayuda a saber cuando un elemento de un álgebra de Banach es invertible.

**Proposición 3.2.2.** *Sean $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach con identidad y $f$ un elemento en $\mathfrak{B}$, si $\|1 - f\| < 1$ entonces $f$ es invertible y*

$$\|f^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|1 - f\|}.$$

*Demostración.* Sea $f$ en $\mathfrak{B}$ y sea $\eta = \|1-f\| < 1$, entonces para $N \geq M$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=0}^{N} (1-f)^n - \sum_{n=0}^{M} (1-f)^n \right\| &= \left\| \sum_{n=M+1}^{N} (1-f)^n \right\| \\
&\leq \sum_{n=M+1}^{N} \|1-f\|^n \\
&= \sum_{n=M+1}^{N} \eta^n \\
&\leq \sum_{n=M+1}^{\infty} \eta^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n - \sum_{n=0}^{M} \eta^n \\
&= \frac{1}{1-\eta} - \frac{1-\eta^{M+1}}{1-\eta} = \frac{\eta^{M+1}}{1-\eta},
\end{aligned}$$

así la sucesión de sumas parciales $\left\{ \sum_{n=0}^{N} (1-f)^n \right\}_{N=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y por tanto convergente. Si $g = \sum_{n=0}^{\infty} (1-f)^n$, entonces

$$\begin{aligned}
fg &= [1-(1-f)] \left( \sum_{n=0}^{\infty} (1-f)^n \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left( [1-(1-f)] \sum_{n=0}^{N} (1-f)^n \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[ \sum_{n=0}^{N} (1-f)^n - (1-f) \sum_{n=0}^{N} (1-f)^n \right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[ \sum_{n=0}^{N} (1-f)^n - \sum_{n=1}^{N+1} (1-f)^n \right] \\
&= \lim_{N\to\infty} (1-(1-f)^{N+1}) = 1,
\end{aligned}$$

ya que $\lim_{N\to\infty} \|(1-f)^N\| = 0$, pues $\left\{ \sum_{n=0}^{N} (1-f)^n \right\}_{N=0}^{\infty}$ es convergente. Análogamente

$gf = 1$, por tanto $f$ es invertible con $f^{-1} = g$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\|g\| &= \lim_{N\to\infty} \|\sum_{n=0}^{N}(1-f)^n\| \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \|1-f\|^n \\
&= \frac{1}{1-\|1-f\|}.
\end{aligned}$$

□

Para un álgebra de Banach $\mathfrak{B}$ denotaremos por $\mathcal{G}$ a la colección de elementos invertibles en $\mathfrak{B}$, por $\mathcal{G}_\ell$ a la colección de elementos invertibles por la izquierda que no son invertibles y por $\mathcal{G}_r$ a la colección de elementos invertibles por la derecha que no son invertibles.

**Proposición 3.2.3.** *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach con identidad, entonces cada uno de los conjuntos $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_\ell$ y $\mathcal{G}_r$ es abierto en $\mathfrak{B}$.*

*Demostración.* Si $f$ está en $\mathcal{G}$ y $\|f-g\| < \dfrac{1}{\|f^{-1}\|}$ entonces $1 > \|f^{-1}\|\ \|f-g\| \geq \|1 - f^{-1}g\|$. Entonces la proposición 3.2.2 implica que $f^{-1}g$ está en $\mathcal{G}$ y por tanto $g = f(f^{-1}g)$ está en $\mathcal{G}$. Entonces $\mathcal{G}$ contiene una bola abierta de radio $\dfrac{1}{\|f^{-1}\|}$ sobre cada elemento de $f$ en $\mathcal{G}$, y por lo tanto $\mathcal{G}$ es abierto en $\mathfrak{B}$.
Ahora, si $f$ está en $\mathcal{G}_\ell$ entonces existe $h$ en $\mathfrak{B}$ tal que $hf = 1$. Si $\|f-g\| < \dfrac{1}{\|h\|}$ entonces $1 > \|h\|\ \|f-g\| \geq \|hf - hg\| = \|1 - hg\|$. La proposición 3.2.2 implica que $k = hg$ es invertible y la identidad $(k^{-1}h)g = 1$ implica que $g$ tiene inverso por la izquierda, i.e., $g$ está en $\mathcal{G}_\ell$, pero $g$ no está en $\mathcal{G}_r$, en caso contrario $g$ sería invertible y $kg^{-1} = h$ implica que $h$ es invertible, además de la unicidad del inverso en $hh^{-1} = hf = 1$ tenemos que $f = h^{-1}$, es decir, $f$ es invertible, lo cual no puede ser por hipótesis. Entonces $\mathcal{G}_\ell$ contiene una bola abierta de radio $\frac{1}{\|h\|}$ sobre $f$, por tanto $\mathcal{G}_\ell$ es abierto en $\mathfrak{B}$. La prueba de que $\mathcal{G}_r$ es abierto es análoga a la anterior.

□

**Corolario 3.2.4.** *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach con identidad, entonces el mapeo $f \mapsto f^{-1}$ definido en $\mathcal{G}$ es continuo.*

*Demostración.* Si $f$ está en $\mathcal{G}$, entonces la desigualdad $\|f-g\| < \dfrac{1}{2\|f^{-1}\|}$ implica que

$$\|1 - f^{-1}g\| = \|f^{-1}(f-g)\| \leq \|f^{-1}\|\ \|f-g\| < \frac{1}{2},$$

entonces por la proposición 3.2.2 $f^{-1}g$ está en $\mathcal{G}$ y

$$\|(f^{-1}g)^{-1}\| = \|g^{-1}f\| \leq \frac{1}{1 - \|1 - f^{-1}g\|} < 2.$$

Entonces

$$\|g^{-1}\| = \|(g^{-1}f)f^{-1}\| \leq \|g^{-1}f\| \ \|f^{-1}\| < 2 \ \|f^{-1}\|.$$

Así la desigualdad

$$\|f^{-1} - g^{-1}\| = \|f^{-1}(f-g)g^{-1}\| \leq \|f^{-1}\| \ \|f-g\| \ \|g^{-1}\| \leq 2 \ \|f-g\| \ \|f^{-1}\|^2,$$

muestra que el mapeo $f \mapsto f^{-1}$ es continuo. □

## 3.3. $C^*$-Álgebras

**Definición 3.3.1.** *Un álgebra de Banach $\mathfrak{B}$ con involución que además satisface la igualdad $\|f^* \ f\| = \|f\|^2$ para todo $f \in \mathfrak{B}$ es llamada una $C^*$-álgebra.*

Los siguientes son ejemplos de $C^*$-álgebras:

*Ejemplo* 3.3.2. Sea $H$ un espacio de Hilbert. De la proposición 1.4.3 se tiene que $B(H)$ el conjunto de los operadores lineales acotados de $H$ en $H$ es una $C^*$-álgebra, donde para cada $T \in B(H)$, $T^*$ es el operador adjunto de $T$.

*Ejemplo* 3.3.3. Sea $X$ un espacio compacto. El espacio de las funciones continuas de $X$ en $\mathbb{C}$, $C(X)$, es una $C^*$-álgebra, donde la operación $*$ está dada por $f^*(x) = \overline{f(x)}$ para todo $f \in C(X)$ y $x \in X$.

Las clases de operadores cuyas definiciones se basan en el adjunto se pueden extender a una $C^*$-álgebra.

**Definición 3.3.4.** *Sea $\mathfrak{B}$ una $C^*$-álgebra y $T$ un elemento de $\mathfrak{B}$.*

- *$T$ se dice autoadjunto si $T^* = T$,*
- *$T$ se dice normal si $T^*T = TT^*$,*
- *$T$ se dice unitario si $T^*T = TT^* = Id$.*

***Observación.*** La condición $\|f^* \ f\| = \|f\|^2$ implica que en toda $C^*$-álgebra la involución preserva la norma, como veremos en la siguiente proposición.

**Proposición 3.3.5.** *Si $\mathfrak{B}$ es una $C^*$-álgebra y $f \in \mathfrak{B}$ entonces*

$$\|f^*\| = \|f\|.$$

*Demostración.* Sea $f$ un elemento de $\mathfrak{B}$. Ya que $\mathfrak{B}$ es una $C^*$-álgebra tenemos

$$\|f\|^2 = \|f^*\ f\| \leq \|f^*\|\ \|f\|,$$

de donde $\|f\| \leq \|f^*\|$.
Ahora, invirtiendo los papeles de $f$ y $f^*$ tenemos

$$\|f^*\| \leq \|f^{**}\| = \|f\|,$$

y por lo tanto $\|f^*\| = \|f\|$. $\square$

De lo proposición anterior podemos concluir que toda $C^*$-álgebra es una $*$-álgebra normada.

# Capítulo 4

# Transformada de Gelfand

El objetivo de este capítulo es desarrollar la teoría de Gelfand para álgebras de Banach conmutativas con identidad, y como caso particular consideraremos las $C^*$-álgebras. Dada un álgebra de Banach conmutativa con identidad estudiaremos el espectro de ésta, esto es, al conjunto de funcionales lineales multiplicativos no nulos que van del álgebra a los complejos.

## 4.1. La transformada de Gelfand en álgebras de Banach

**Definición 4.1.1.** *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach con identidad. Un funcional lineal complejo $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ es multiplicativo si :*

- $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ *para todos $f$ y $g$ en $\mathfrak{B}$, y*
- $\varphi(1) = 1$.

Denotaremos por $M$ al conjunto de todos los funcionales lineales complejos multiplicativos no nulos del álgebra de Banach $\mathfrak{B}$.

Dada un álgebra de Banach $\mathfrak{B}$ enfocaremos parte de nuestra atención al conjunto de funcionales lineales en $M$. Más adelante veremos la relación que tiene $M$ con los ideales maximales en $\mathfrak{B}$.

**Proposición 4.1.2.** *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach con identidad y $\varphi \in M$ entonces $\|\varphi\| = 1$.*

*Demostración.* Sea $\varphi$ en $M$ y sea $K = ker(\varphi)$, esto es, $K = \{f \in \mathfrak{B} : \varphi(f) = 0\}$. Como $\varphi(f - \varphi(f)1) = 0$ para todo $f$ en $\mathfrak{B}$, entonces cada elemento en $\mathfrak{B}$ se puede escribir de la forma $\lambda + f$ para algún $\lambda$ en $\mathbb{C}$ y $f$ en $K$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|\varphi\| &= \sup_{g\neq 0} \frac{|\varphi(g)|}{\|g\|} \\
&= \sup_{f\in K,\lambda\neq 0} \frac{|\varphi(\lambda + f)|}{\|\lambda + f\|} \\
&= \sup_{f\in K,\lambda\neq 0} \frac{|\lambda|}{\|\lambda + f\|} \\
&= \sup_{h\in K} \frac{1}{\|1+h\|} = 1,
\end{aligned}$$

lo anterior pues $\|1 + h\| \geq 1$, pues si $\|1 + h\| < 1$ la proposición 3.2.2 implica que $h$ es invertible, por lo cual $h$ no está en $K$, pues en caso contrario $\varphi(h) = 0$, pero $1 = \varphi(1) = \varphi(hh^{-1}) = \varphi(h)\ \varphi(h^{-1}) = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\|\varphi\| = 1$. □

**Proposición 4.1.3.** *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach entonces $M$ es un subconjunto $w^*$-compacto de $(\mathfrak{B}^*)_1$.*

*Demostración.* Sea $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una red de funcionales lineales multiplicativos en $M$ que convergen en la $w^*$-topología en $(\mathfrak{B}^*)_1$ a $\varphi$ en $(\mathfrak{B}^*)_1$. Por el Teorema de Alaoglu es suficiente probar que $\varphi$ es multiplicativo.
En primer lugar

$$\varphi(1) = \lim_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(1) = \lim_{\alpha\in A} 1 = 1.$$

Por otro lado, siempre que $f$ y $g$ estén en $\mathfrak{B}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(f\ g) &= \lim_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(f\ g) \\
&= \lim_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(f)\ \varphi_\alpha(g) \\
&= \lim_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(f) \lim_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(g) = \varphi(f)\varphi(g).
\end{aligned}$$

Así $\varphi$ está en $M$, por tanto $M$ es cerrado, y como $(\mathfrak{B}^*)_1$ es $w^*$-compacto entonces $M$ es $w^*$-compacto. □

Hemos mostrado que $M$ es un subconjunto $w^*$-compacto de $(\mathfrak{B}^*)_1$ lo cual hace de $C(M)$ un álgebra de Banach. Por tanto podemos definir lo siguiente.

**Definición 4.1.4.** *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach. Si $M \neq \emptyset$, entonces la transformada de Gelfand es la función $\Gamma : \mathfrak{B} \to C(M)$ dada por $\Gamma(f) = \widehat{f}|_M$, esto es, $\Gamma(f)(\varphi) = \varphi(f)$ para todo $\varphi \in M$.*

***Observación.*** Para cada $f$ en $\mathfrak{B}$ existe una función $w^*$-continua $\hat{f} : (\mathfrak{B}^*)_1 \to \mathbb{C}$ dada por $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$. Como $M$ está contenido en $(\mathfrak{B}^*)_1$, entonces $\hat{f}|_M$ es también continua, esto es, cada $\Gamma(f)$ es continua con la $w^*$-topología.

**Definición 4.1.5.** *Si $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$ son dos álgebras de Banach, un homomorfismo de álgebras es un mapeo lineal acotado $\phi : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ tal que $\phi(x\ y) = \phi(x)\ \phi(y)$ para todo $x, y \in \mathfrak{B}_1$.*

La siguiente proposición muestra algunas propiedades que satisface la transfomada de Gelfand.

**Proposición 4.1.6.** *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach y $\Gamma$ la transformada de Gelfand en $\mathfrak{B}$, entonces:*

1. *$\Gamma$ es un homomorfismo de álgebras, y*

2. *$\|\Gamma\ f\|_\infty \leq \|f\|$ para todo $f \in \mathfrak{B}$.*

*Demostración.* 1. Sean $f$ y $g$ en $\mathfrak{B}$, entonces

$$\begin{aligned}\Gamma(fg)(\varphi) &= \varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)\\ &= \Gamma(f)(\varphi)\Gamma(g)(\varphi) = [\Gamma(f)\Gamma(g)](\varphi),\end{aligned}$$

y por tanto $\Gamma$ es multiplicativo. Del miso modo, es claro que $\Gamma$ es lineal.

2. Sea $f$ en $\mathfrak{B}$, entonces

$$\begin{aligned}\|\Gamma f\|_\infty &= \|\widehat{f}|_M\|_\infty\\ &\leq \|\widehat{f}\|_\infty\\ &\leq \|f\|.\end{aligned}$$

Lo anterior pues $\|\widehat{f}\|_\infty = \sup\{\|\widehat{f}(\varphi)\| : \varphi \in M\}$ y $\|\hat{f}(\varphi)\| = \|\varphi(f)\| \leq \|\varphi\|\|f\| \leq \|f\|$, para cada $\varphi$ en $M$. □

***Observación.*** De 2 de la proposición anterior se sigue que $\Gamma$ es continua.

Observemos que para un álgebra de Banach $\mathfrak{B}$, si $f$ y $g$ están en $\mathfrak{B}$ entonces $\Gamma(fg - gf)(\varphi) = \varphi(fg) - \varphi(gf) = \varphi(f)\ \varphi(g) - \varphi(g)\ \varphi(f) = 0$. Así en el caso en que $\mathfrak{B}$ no sea conmutativa existen $f$ y $g$ en $\mathfrak{B}$ tales que $fg - gf \neq 0$ pero $\Gamma(fg - gf) = 0$, por lo cual $\Gamma(\mathfrak{B})$ no refleja las propiedades de $\mathfrak{B}$. En caso contrario, cuando $\mathfrak{B}$ es conmutativa, $\Gamma(\mathfrak{B})$ refleja algunas propiedades de $\mathfrak{B}$, como por ejemplo la invertibilidad de un elemento en $\mathfrak{B}$ está ligada a la invertibilidad de un elemento en $\Gamma(\mathfrak{B})$, como veremos más adelante. Así el estudio de la transformada de Gelfand $\Gamma$ de un álgebra de

Banach conmutativa $\mathfrak{B}$ nos proporciona información de los elementos de $\mathfrak{B}$ a través del estudio de los elementos en $\Gamma(\mathfrak{B})$. Por lo cual el estudio de la transformada de Gelfand en un álgebra de Banach conmutativa será de gran importancia de ahora en adelante.

**Definición 4.1.7.** *Sean $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach con identidad y $f$ un elemento de $\mathfrak{B}$. Definimos el espectro de $f$ como el conjunto*

$$\sigma_{\mathfrak{B}}(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : f - \lambda 1 \text{ no es invertible en } \mathfrak{B}\},$$

*y el conjunto resolvente de $f$ como el conjunto*

$$\rho_{\mathfrak{B}}(f) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathfrak{B}}(f).$$

*Además, definimos el radio espectral de $f$ como*

$$r_{\mathfrak{B}}(f) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathfrak{B}}(f)\}.$$

Para simplificar la notación denotaremos a $\sigma_{\mathfrak{B}}(f)$, $\rho_{\mathfrak{B}}(f)$ y $r_{\mathfrak{B}}(f)$ por $\sigma(f)$, $\rho(f)$ y $r(f)$ respectivamente.

**Proposición 4.1.8.** *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach con identidad y $f$ está en $\mathfrak{B}$ entonces $\sigma(f)$ es compacto y $r(f) \leq \|f\|$.*

*Demostración.* Definimos la función $\varphi$ de $\mathbb{C}$ en $\mathfrak{B}$ dada por $\varphi(\lambda) = f - \lambda$, entonces $\varphi$ es continua y $\rho(f) = \varphi^{-1}(\mathcal{G})$ es abierto, ya que $\mathcal{G}$ es abierto. Entonces el conjunto $\sigma(f) = \mathbb{C} \setminus \rho(f)$ es cerrado.
Si $|\lambda| > \|f\|$, entonces

$$1 > \frac{\|f\|}{|\lambda|} = \left\|\frac{f}{\lambda}\right\| = \left\|1 - \left(1 - \frac{f}{\lambda}\right)\right\|,$$

así por la proposición 3.2.2, $1 - \dfrac{f}{\lambda}$ es invertible. Entonces $f - \lambda$ es invertible. Por tanto $\lambda$ está en $\rho(f)$, $\sigma(f)$ está acotado y por lo tanto es compacto, y $r(f) \leq \|f\|$.

□

**Teorema 4.1.9.** *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach con identidad y $f$ un elemento en $\mathfrak{B}$, entonces $\sigma(f)$ es no vacío.*

*Demostración.* Consideremos la función $F : \rho(f) \to \mathfrak{B}$ dada por $F(\lambda) = (f-\lambda)^{-1}$. $F$ es continua por ser composición de funciones continuas, así para $\lambda_0$ en $\rho(f)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\{\frac{F(\lambda)-F(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\right\} &= \lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\{\frac{(f-\lambda_0)^{-1}[(f-\lambda_0)-(f-\lambda)](f-\lambda)^{-1}}{\lambda-\lambda_0}\right\}\\
&= \lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\{\frac{(f-\lambda_0)^{-1}(f-\lambda)^{-1}}{\lambda-\lambda_0}(f-\lambda_0-f+\lambda)\right\}\\
&= \lim_{\lambda\to\lambda_0}(f-\lambda_0)^{-1}(f-\lambda)^{-1}\\
&= (f-\lambda_0)^{-2},
\end{aligned}$$

esto último por la continuidad de $F$, y por tanto $F$ es analítica.
En particular, para $\varphi$ en $\mathfrak{B}^*$, la función $\varphi(F)$ es una función analítica compleja en $\rho(f)$.
Para $|\lambda| > \|f\|$, por la proposición 3.2.2 tenemos que $1 - \dfrac{f}{\lambda}$ es invertible y

$$\left\|\left(1-\frac{f}{\lambda}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\left\|\frac{f}{\lambda}\right\|}.$$

De lo anterior se sigue que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|F(\lambda)\| = \lim_{\lambda\to\infty}\left\|\frac{1}{\lambda}\left(\frac{f}{\lambda}-1\right)^{-1}\right\| \leq \lim_{|\lambda|\to\infty}\frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\left\|\frac{f}{\lambda}\right\|} = 0$$

Por tanto para $\varphi$ en $\mathfrak{B}^*$ tenemos que $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\varphi(F(\lambda)) = 0$.
Ahora, si asumimos que $\sigma(f) = \emptyset$ entonces $\rho(f) = \mathbb{C}$. Así para $\varphi$ en $\mathfrak{B}^*$ se sigue que $\varphi(F)$ es una función entera que se anula en el infinito. Por el teorema de Liouville (ver [SS10]), $\varphi(F)$ es constante, y ya que $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\varphi(F(\lambda)) = 0$ entonces $\varphi(F) = 0$ para cada $\varphi$ en $\mathfrak{B}^*$, lo cual implica que $F = 0$. Esto es una contradicción ya que por definición $F(\lambda)$ es un elemento invertible de $\mathfrak{B}$. Por lo tanto $\sigma(f) \neq \emptyset$. □

El siguiente teorema establece una relación entre el campo de los números complejos y las álgebras de Banach de división, esto es, aquellas álgebras tales que todo elemento diferente de cero es invertible. Básicamente establece que la única álgebra de Banach con identidad que es un álgebra de división es $\mathbb{C}$.

**Teorema 4.1.10.** *(Gelfand - Mazur) Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach con identidad que es un álgebra de división, entonces existe un único isomorfismo isométrico de $\mathfrak{B}$ en $\mathbb{C}$.*

*Demostración.* Sea $f$ en $\mathfrak{B}$ entonces por el teorema 4.1.9 $\sigma(f) \neq \emptyset$. Si $\lambda_f$ está en $\sigma(f)$ entonces $f - \lambda_f 1$ no es invertible en $\mathfrak{B}$. Ya que $\mathfrak{B}$ es un álgebra de división entonces $f - \lambda_f 1 = 0$. Además para $\lambda \neq \lambda_f$ tenemos $f - \lambda 1 = \lambda_f 1 - \lambda 1$ el cual es invertible. Entonces $\sigma(f)$ consiste exactamente de un número complejo $\lambda_f$ para cada $f$ en $\mathfrak{B}$.
Definimos $\psi : \mathbb{C} \to \mathfrak{B}$ dada por $\psi(\lambda) = \lambda 1$.
Para $\lambda_1, \lambda_2$ y $\alpha$ en $\mathbb{C}$, se tiene:

$$\psi(\alpha\lambda_1 + \lambda_2) = (\alpha\lambda_1 + \lambda_2)1 = \alpha(\lambda_1 1) + \lambda_2 1 = \alpha\psi(\lambda_1) + \psi(\lambda_2),$$

y

$$\psi(\lambda_1\lambda_2) = (\lambda_1\lambda_2)1 = (\lambda_1 1)(\lambda_2 1) = \psi(\lambda_1)\psi(\lambda_2).$$

De esta forma $\psi$ es un homomorfismo lineal de $\mathbb{C}$ en $\mathfrak{B}$.
Además para $\lambda$ en $\mathbb{C}$,

$$\|\psi(\lambda)\| = \|\lambda 1\| = |\lambda|\|1\| = |\lambda|.$$

Así $\psi$ es isométrico y por tanto inyectivo.
Por otro lado, para $f$ en $\mathfrak{B}$, existe $\lambda_f$ en $\mathbb{C}$ tal que $f = \lambda_f 1$. Por lo cual

$$\psi(\lambda_f) = \lambda_f 1 = f,$$

así $\psi$ es sobreyectivo. Y por lo tanto es un isomorfismo isométrico de $\mathbb{C}$ a $\mathfrak{B}$. Así $\mathfrak{B}$ es básicamente $\mathbb{C}$ y ya que el único isomorfismo isométrico de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ es la identidad concluimos que $\psi$ es único. Ya que $\psi : \mathbb{C} \to \mathfrak{B}$ es un isomorfismo isométrico, entonces existe un único isomorfismo isométrico de $\mathfrak{B}$ en $\mathbb{C}$, y por lo tanto se tiene el resultado. $\square$

**Proposición 4.1.11.** *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad, entonces el conjunto $M$ de funcionales lineales multiplicativos no nulos de $\mathfrak{B}$ en $\mathbb{C}$ está en correspondencia uno a uno con el conjunto de ideales maximales en $\mathfrak{B}$.*

*Demostración.* Sea $\varphi$ un funcional lineal multiplicativo no nulo de $\mathfrak{B}$ en $\mathbb{C}$ y sea $K = ker(\varphi) = \{f \in \mathfrak{B} : \varphi(f) = 0\}$. El kernel $K$ de $\varphi$ es un ideal propio y si $f$ no está en $K$ entonces

$$1 = \left(1 - \frac{f}{\varphi(f)}\right) + \frac{f}{\varphi(f)}.$$

Ya que $\left(1 - \frac{f}{\varphi(f)}\right)$ está en $K$, entonces el espacio generado por $f$ y $K$ contiene a la identidad. Por tanto un ideal que contiene tanto a $K$ como a $f$ debe ser todo $\mathfrak{B}$, entonces $K$ es un ideal máximal.
Sea $\mathfrak{M}$ un ideal maximal propio en $\mathfrak{B}$. Ya que cada elemento de $\mathfrak{M}$ no es invertible, entonces por la proposición 3.2.2 $\|1 - f\| \geq 1$ para cada $f$ en $\mathfrak{M}$. Entonces 1 no está

en la cerradura de $\mathfrak{M}$. Además ya que $\mathfrak{M}$ es un ideal entonces $\overline{\mathfrak{M}}$ la cerradura de $\mathfrak{M}$ también lo es, y $\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}} \subsetneq \mathfrak{B}$, por lo cual $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}$, i.e., $\mathfrak{M}$ es cerrado.
El álgebra cociente $\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$ es un álgebra de Banach, y ya que $M$ es maximal y $\mathfrak{B}$ conmutativo, $\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$ es un álgebra de división. Entonces por el teorema 4.1.10 existe un único isomorfismo isométrico $\psi$ de $\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$ en $\mathbb{C}$. Si $\pi$ denota el homomorfismo natural de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$ entonces la composición $\varphi = \psi \circ \pi$ es un funcional lineal multiplicativo distinto de cero en $\mathfrak{B}$. Así $\varphi$ está en $M$ y $\mathfrak{M} = ker(\varphi)$.
Por último veamos que la correspondencia $\varphi \leftrightarrow ker(\varphi)$ es uno a uno. Sean $\varphi_1$ y $\varphi_2$ en $M$ tales que $ker(\varphi_1) = ker(\varphi_2) = \mathfrak{M}$, entonces, para $f$ en $\mathfrak{B}$,

$$\varphi_1(f) - \varphi_2(f) = (f - \varphi_2(f)) - (f - \varphi_1(f)).$$

Si aplicamos $\varphi_2$ a $f - \varphi_2(f)$ y $\varphi_1$ a $f - \varphi_1(f)$ vemos que ambos están en $\mathfrak{M}$. Entonces $ker(\varphi_1) = ker(\varphi_2)$ implica que $\varphi_1 = \varphi_2$ lo cual completa la prueba.

□

**Proposición 4.1.12.** *Sean $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach conmutativa con identidad y $f$ un elemento de $\mathfrak{B}$. $f$ es invertible en $\mathfrak{B}$ si y sólo si $\Gamma(f)$ es invertible en $C(M)$.*

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Supongamos que $f$ es invertible en $\mathfrak{B}$.
Entonces

$$\begin{aligned}[\Gamma(f)\ \Gamma(f^{-1})](\varphi) &= \Gamma(f)(\varphi)\ \Gamma(f^{-1})(\varphi) \\ &= \varphi(f)\ \varphi(f^{-1}) \\ &= \varphi(f\ f^{-1}) = \varphi(1) = 1,\end{aligned}$$

por lo tanto $\Gamma(f^{-1})$ es el inverso de $\Gamma(f)$.
($\Leftarrow$) Probémoslo por contrapositiva.
Si $f$ no es invertible en $\mathfrak{B}$ entonces $M_0 = \{gf : g \in \mathfrak{B}\}$ es un ideal propio en $\mathfrak{B}$, ya que 1 no está en $M_0$ y $\mathfrak{B}$ es conmutativa. El ideal $M_0$ está contenido en un ideal maximal $M_1$. De la proposición anterior tenemos que existe $\varphi$ en $M$ tal que $ker(\varphi) = M_1$. Entonces

$$\Gamma(f)(\varphi) = \varphi(f) = 0,$$

por lo tanto $\Gamma(f)$ no es invertible en $C(M)$. □

Si consideramos un álgebra de Banach conmutativa con identidad $\mathfrak{B}$ podemos sintetizar los resultados anteriores en el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.13.** *(Gelfand) Sean $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach conmutativa con identidad, $M$ su espacio de ideales maximales, y $\Gamma : \mathfrak{B} \to C(M)$ su transformada de Gelfand. Entonces:*

*1)* $M \neq \emptyset$*,*

*2)* $\Gamma$ *es un homomorfismo de álgebras,*

*3)* $\|\Gamma\ f\|_\infty \leq \|f\|$ *para todo* $f \in \mathfrak{B}$*, y*

*4)* $f$ *es invertible en* $\mathfrak{B}$ *si y sólo si* $\Gamma(f)$ *es invertible en* $C(M)$*.*

Como consecuencia del teorema de Gelfand tenemos los siguientes corolarios.

**Corolario 4.1.14.** *Si* $\mathfrak{B}$ *es un álgebra de Banach conmutativa con identidad y* $f$ *está en* $\mathfrak{B}$*, entonces* $\sigma(f) =$ *rango* $\Gamma(f)$ *y* $r(f) = \|\Gamma(f)\|_\infty$*.*

*Demostración.* Si $\lambda$ no está en $\sigma(f)$ entonces $\Gamma(f-\lambda)$ es invertible en $C(M)$, lo cual implica que $[\Gamma(f)-\lambda](\varphi) \neq 0$ para $\varphi$ en $M$. Así $\Gamma(f)(\varphi) \neq \lambda$ para $\varphi$ en $M$.
Ahora, si $\lambda$ no está en el rango de $\Gamma(f)$ entonces $\Gamma(f)-\lambda$ es invertible en $C(M)$ y entonces, por el teorema 4.1.13 $f-\lambda$ es invertible en $\mathfrak{B}$. Así $\lambda$ no está en $\sigma(f)$, y por lo tanto $\sigma(f) =$ rango $\Gamma(f)$ y $r(f) = \|\Gamma(f)\|_\infty$. □

**Corolario 4.1.15.** *Si* $\mathfrak{B}$ *es un álgebra de Banach con identidad,* $f$ *está en* $\mathfrak{B}$*, y* $\varphi$ *es una función entera en* $\mathbb{C}$*, entonces*

$$\sigma(\varphi(f)) = \varphi(\sigma(f)) = \{\varphi(\lambda) : \lambda \in \sigma(f)\}.$$

*Demostración.* Como $\varphi$ es una función entera en $\mathbb{C}$ entonces $\varphi$ tiene una representación en series de Taylor. Sea $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la expansión en series de Taylor para $\varphi$.

Para $N \geq M > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=0}^{N} a_n f^n - \sum_{n=0}^{M} a_n f^n\right\| &= \left\|\sum_{n=M+1}^{N} a_n f^n\right\| \\ &\leq \sum_{n=M+1}^{N} |a_n|\|f^n\| \leq \sum_{n=M+1}^{N} |a_n|\|f^n\|,\end{aligned}$$

este último término converge a cero cuando $N$ y $M$ son muy grandes.

Así $\left\{\sum_{n=1}^{N} a_n f^n\right\}_{N=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto convergente, entonces para $f$ en $\mathfrak{B}$, $\varphi(f)$ denota el elemento $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f^n$ de $\mathfrak{B}$.
Sea $\mathfrak{B}_0$ la subálgebra cerrada de $\mathfrak{B}$ generada por $e$, $f$, y elementos de la forma $(f-\lambda)^{-1}$

para $\lambda$ en $\rho(f)$ y $(\varphi(f)-\mu)^{-1}$ para $\mu$ en $\rho(\varphi(f))$, así $\mathfrak{B}_0$ es conmutativa y, $\sigma_{\mathfrak{B}}(f) = \sigma_{\mathfrak{B}_0}(f)$ y $\sigma_{\mathfrak{B}}(\varphi(f)) = \sigma_{\mathfrak{B}_0}(\varphi(f))$. Entonces podemos asumir que $\mathfrak{B}$ es conmutativa y usar la transformada de Gelfand $\Gamma$.
Observemos que por continuidad

$$\Gamma(\varphi(f)) = \Gamma\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n f^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(a_n f^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(f^n) = \varphi(\Gamma(f)).$$

Entonces por el corolario 4.1.14 tenemos

$$\begin{aligned}\sigma(\varphi(f)) &= \text{rango } \Gamma(\varphi(f)) \\ &= \text{rango } \varphi(\Gamma(f)) \\ &= \varphi(\text{rango } \Gamma(f)) \\ &= \varphi(\sigma(f)).\end{aligned}$$

□

**Teorema 4.1.16.** *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach con identidad y $f$ es un elemento en $\mathfrak{B}$, entonces*

$$r_{\mathfrak{B}}(f) = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

*Demostración.* Si $\mathfrak{B}_0$ denota la subálgebra cerrada de $\mathfrak{B}$ generada por la identidad, $f$, y $\{(f^n-\lambda)^{-1} : \lambda \in \rho_{\mathfrak{B}}(f^n), n \in \mathbb{Z}\}$, entonces $\mathfrak{B}_0$ es conmutativa y $\sigma_{\mathfrak{B}_0}(f^n) = \sigma_{\mathfrak{B}}(f^n)$ para todo entero positivo $n$. Del corolario 4.1.15 tenemos que $\sigma_{\mathfrak{B}_0}(f^n) = \sigma_{\mathfrak{B}_0}(f)^n$ y por tanto

$$r_{\mathfrak{B}}(f)^n = r_{\mathfrak{B}}(f^n) \leq \|f^n\|,$$

así se sigue la siguiente desigualdad

$$r_{\mathfrak{B}}(f) \leq \liminf_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Por otro lado, consideremos la función analítica

$$G(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{\lambda^n},$$

la cual converge a $(f-\lambda)^{-1}$ para $|\lambda| > \|f\|$, pues

$$(f-\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{f}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{\lambda^n}.$$

Para $\varphi$ en $\mathfrak{B}^*$ la función $-\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(\lambda^{-n-1}f^n)$ es analítica para $|\lambda| > r_{\mathfrak{B}}(f)$, ya que es igual a $\varphi((f-\lambda)^{-1})$. La convergencia de series implica que $\lim_{n\to\infty}\varphi(\lambda^{-n-1}f^n) = 0$ para cada $\varphi$ en $\mathfrak{B}^*$. Entonces el teorema de acotamiento uniforme (ver [Con13]) implica la existencia de un número $M_\lambda$ tal que $\|\lambda^{-n-1}f^n\| \leq M_\lambda$ para todo $n$. Entonces

$$\limsup_{n\to\infty}\|f^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} M_\lambda^{\frac{1}{n}}|\lambda^{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty}(M_\lambda|\lambda|)^{\frac{1}{n}}|\lambda| = |\lambda|.$$

Entonces

$$r_{\mathfrak{B}}(f) \geq \limsup_{n\to\infty}\|f^n\|^{\frac{1}{n}} \geq \liminf_{n\to\infty}\|f^n\|^{\frac{1}{n}} \geq r_{\mathfrak{B}}(f).$$

□

## 4.2. La Transformada de Gelfand en $C^*$-álgebras

En la sección pasada hemos dado un resultado para un álgebra de Banach conmutativa con identidad, pero podemos decir un poco más cuando consideramos una $C^*$-álgebra de Banach con identidad. El objetivo de esta sección es enunciar el teorema de Gelfand para $C^*$-álgebras de Banach con identidad, para ello requerimos de las siguientes definiciones y resultados.

**Definición 4.2.1.** *Si $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$ son $*$-álgebras, un $*$-homomorfismo de $\mathfrak{B}_1$ a $\mathfrak{B}_2$ es un homomorfismo $\phi$ tal que $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ para todo $x \in \mathfrak{B}_1$. Decimos que $\phi$ es un $*$-isomorfismo si $\phi$ es un $*$-homomorfismo biyectivo.*

**Definición 4.2.2.** *Si $H$ es un espacio de Hilbert, entonces una subálgebra $\mathfrak{B}$ de $B(H)$ se dice maximal abeliana si es conmutativa y no está propiamente contenida en ninguna subálgebra conmutativa de $B(H)$.*

**Teorema 4.2.3.** *En una $C^*$-álgebra un elemento autoadjunto tiene espectro real.*

*Demostración.* Sea $T$ un elemento autoadjunto de una $C^*$-álgebra $\mathfrak{B}$ y sea $U = \exp iT$. Entonces de la definición de función exponencial y del hecho de que $T$ es autoadjunto, se sigue que

$$U^* = \exp(iT)^* = \exp(-iT).$$

Además

$$UU^* = \exp(iT)\exp(-iT) = \exp(iT - iT) = I = \exp(-iT)\exp(iT) = U^*U,$$

y por tanto $U$ es unitario.
Ya que
$$1 = \|I\| = \|U^*U\| = \|U\|^2,$$
tenemos que
$$\|U\| = \|U^*\| = \|U^{-1}\| = 1,$$
y por lo tanto $\sigma(U)$ está contenido en $\mathbb{T}$.
Por el corolario 4.1.15 $\sigma(U) = exp(i\sigma(T))$, así el espectro de $T$ debe de ser real, pues de lo contrario $\sigma(U)$ no estaría contenido en $\mathbb{T}$. $\square$

El siguiente resultado establece de cierta forma que cada $C^*$-álgebra de Banach conmutativa es $C(X)$ para algunos espacios Hausdorff $X$.

**Teorema 4.2.4.** *(Gelfand-Naimark) Si $\mathfrak{B}$ es un $C^*$-álgebra conmutativa con identidad y $M$ es el espacio de ideales maximales de $\mathfrak{B}$, entonces la transformada de Gelfand es un $*$-isomorfismo isométrico de $\mathfrak{B}$ sobre $C(M)$.*

*Demostración.* Si $\Gamma$ denota la transformada de Gelfand, entonces para probar el teorema debemos mostrar que $\Gamma(T^*) = \Gamma(T)^* = \overline{\Gamma(T)}$, $\|\Gamma(T)\|_\infty = \|T\|$ para $T$ en $\mathfrak{B}$ y que $\Gamma$ es sobreyectiva.
Sea $T$ en $\mathfrak{B}$, entonces $H = \frac{1}{2}(T+T^*)$ y $K = \frac{1}{2i}(T-T^*)$ son operadores autoadjuntos de $\mathfrak{B}$ tales que $T = H + iK$. Entonces por el teorema 4.2.3 $\sigma(H)$ y $\sigma(K)$ están contenidos en $\mathbb{R}$ y por el corolario 4.1.14, las funciones $\Gamma(H)$ y $\Gamma(K)$ son real valuadas. Entonces,
$$\overline{\Gamma(T)} = \overline{\Gamma(H) + i\Gamma(K)} = \Gamma(H) - i\Gamma(K) = \Gamma(T^*),$$
y por lo tanto $\Gamma$ es un $*$-mapeo.
Por otro lado, usando el corolario 4.1.14, el teorema 4.1.16 y el hecho de que $TT^*$ es autoadjunto, tenemos
$$\begin{aligned}\|T\|^2 &= \|T^*T\| = \|(T^*T)^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \|(T^*T)^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|\Gamma(T^*T)\|_\infty \\ &= \|\Gamma(T^*)\Gamma(T)\|_\infty = \||\Gamma(T)|^2\|_\infty \\ &= \|\Gamma(T)\|_\infty^2,\end{aligned}$$
así $\Gamma$ es una isometría y por tanto inyectiva.
Ahora, ya que $\Gamma$ es un $*$-homomorfismo isométrico, entonces $\Gamma(\mathfrak{B})$ es una subálgebra cerrada autoadjunta de $C(M)$. Para $\lambda$ en $\mathbb{C}$, como $\Gamma(\lambda 1) = \lambda$, entonces $\Gamma(\mathfrak{B})$ contiene a las funciones constantes. Además, si $\varphi_1$ y $\varphi_2$ están en $M$ y son distintos, entonces existe $f$ en $\mathfrak{B}$ tal que $\varphi_1(f) \neq \varphi_2(f)$, así $\Gamma(f)(\varphi_1) \neq \Gamma(f)(\varphi_2)$, y por lo tanto $\Gamma(\mathfrak{B})$

separa puntos. Así el hecho de que $\Gamma$ es sobreyectivo se sigue del teorema de Stone Weierstrass (ver [Dou12] ).
Por lo tanto $\Gamma$ es un $*$-isomorfismo isométrico en $C(M)$.

$\square$

## 4.3. El teorema espectral

Si $\mathfrak{B}$ es una $C^*$-álgebra conmutativa y $T$ es un elemento de $\mathfrak{B}$, entonces $T$ es normal, ya que $T^*$ está también en $\mathfrak{B}$ y los operadores en $\mathfrak{B}$ conmutan. Reciprocamente dado un operador normal $T$, el álgebra generada por $T$ resulta ser una $C^*$-álgebra conmutativa.

El siguiente resultado se desprende del teorema de Gelfand-Naimark al considerar a un operador normal $T$ en un espacio de Hilbert y a la $C^*$-álgebra generada por éste.

**Teorema 4.3.1.** *(Teorema espectral) Si $H$ es un espacio de Hilbert y $T$ es un operador normal en $H$, entonces la $C^*$-álgebra $\mathfrak{B}_T$ generada por $T$ es conmutativa. Además, el espacio de ideales maximales de $\mathfrak{B}_T$ es homeomorfo a $\sigma(T)$, y por lo tanto la transformada de Gelfand es un $*$-isomorfismo isométrico de $\mathfrak{B}_T$ en $C(\sigma(T))$.*

*Demostración.* Como $T$ es un operador normal entonces $T$ y $T^*$ conmutan, así $\mathcal{P} = \mathcal{P}(T, T^*)$, la colección de todos los polinomios en $T$ y $T^*$ forman una subálgebra conmutativa autoadjunta, en el sentido de que tal subálgebra es cerrada bajo la operación de tomar adjunto. $\mathcal{P}(T, T^*)$ debe de estar contenida en la $C^*$-álgebra generada por $T$. La cerradura de $\mathcal{P}(T, T^*)$ es una $C^*$-álgebra conmutativa. Veamos que $\overline{\mathcal{P}} = \mathfrak{B}_T$.
Si $T$ en $\mathfrak{B}_T$ entonces $T^*$ está en $\mathfrak{B}_T$, así $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{B}_T$, de donde $\overline{\mathcal{P}} \subseteq \mathfrak{B}_T$, pues $\mathfrak{B}_T$ es cerrada.
Por otro lado, como $\overline{\mathcal{P}}$ es una $C^*$-álgebra y $T$ está en $\mathcal{P}$, entonces $\mathfrak{B}_T \subseteq \overline{\mathcal{P}}$, pues $\mathfrak{B}_T$ es la intersección de todas las $C^*$-álgebras que contienen a $T$. Por tanto $\mathfrak{B}_T = \overline{\mathcal{P}}$.
Para mostrar que el espacio ideal máximo $M$ de $\mathfrak{B}_T$ es homeomorfo a $\sigma(T)$, definimos $\psi$ de $M$ a $\sigma(T)$ dada por $\psi(\varphi) = \Gamma(T)(\varphi)$. Por el corolario 4.1.14 el rango de $\Gamma(T)$ es $\sigma(T)$, así $\psi$ está bien definida y es sobreyectiva.

Si $\varphi_1$ y $\varphi_2$ en $M$ son tales que $\psi(\varphi_1) = \psi(\varphi_2)$ entonces

$$\varphi_1(T) = \Gamma(T)(\varphi_1) = \Gamma(T)(\varphi_2) = \varphi_2(T),$$

y

$$\varphi_1(T^*) = \Gamma(T^*)(\varphi_1) = \overline{\Gamma(T)(\varphi_1)} = \overline{\Gamma(T)(\varphi_2)} = \Gamma(T^*)(\varphi_2) = \varphi_2(T^*),$$

y por lo tanto $\varphi_1$ y $\varphi_2$ coinciden en todos los polinomios en $T$ y $T^*$. Ya que esta colección de operadores es densa en $\mathfrak{B}_T$ se sigue que $\varphi_1 = \varphi_2$ y por lo tanto $\psi$ es inyectiva. Además $\psi$ es continua, pues $\Gamma(T)$ es continua. Ya que $M$ y $\sigma(T)$ son espacios compactos de Hausdorff, entonces $\psi^{-1}$ es continua y por lo tanto $\psi$ es un homeomorfismo. Así $\Gamma$ es un $*$-isomorfismo isométrico de $\mathfrak{B}_T$ en $C(\sigma(T))$, y la prueba está completa.

$\square$

Bajo las hipótesis del resultado anterior, ya que $M$ es homeomorfo a $\sigma(T)$, entonces $C(M)$ es homeomorfo a $C(\sigma(T))$ vía la siguiente identificación $f \mapsto f \circ \psi^{-1}$. Bajo estas identificaciones se tiene que $\Gamma(T) = Id_{\sigma(T)}$.
De esta forma un elemento $z$ en $\sigma(T)$ se corresponde con $T$ en $\mathfrak{B}_T$ y $\overline{z}$ en $\sigma(T)$ se corresponde con $T^*$ en $\mathfrak{B}_T$, entonces un polinomio holomorfo $P(z)$ se corresponde con el polinomio $P(T)$, y el polinomio $P(z, \overline{z})$ se corresponde con el polinomio $P(T, T^*)$, para $z$ y $\overline{z}$ en $\sigma(T)$. Así para $z$ y $\overline{z}$ en $\sigma(T)$ cualquier función continua $f(z, \overline{z})$ se corresponde con la función $f(T, T^*)$.

# Bibliografía


[Con13] John B Conway. *A course in functional analysis*, volume 96. Springer Science & Business Media, 2013.

[Dou12] Ronald G Douglas. *Banach algebra techniques in operator theory*, volume 179. Springer Science & Business Media, 2012.

[EMT04] Yuli Eidelman, Vitali D Milman, and Antonis Tsolomitis. *Functional analysis: an introduction*, volume 66. American Mathematical Soc., 2004.

[Fol16] Gerald B Folland. *A course in abstract harmonic analysis*. Chapman and Hall/CRC, 2016.

[Kan08] Eberhard Kaniuth. *A course in commutative Banach algebras*, volume 246. Springer Science & Business Media, 2008.

[Kut13] Semen Samsonovich Kutateladze. *Fundamentals of functional analysis*, volume 12. Springer Science & Business Media, 2013.

[Mac08] Barbara MacCluer. *Elementary functional analysis*, volume 253. Springer Science & Business Media, 2008.

[Mun14] James Munkres. *Topology*. Pearson Education, 2014.

[Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1991.

[Rud06] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-hill education, 2006.

[SS10] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2. Princeton University Press, 2010.

[Wil04] Stephen Willard. *General topology*. Courier Corporation, 2004.