Análisis del modelo de Lévy de riesgo con cambio de régimen basado en el declive.

Javier Vázquez Camacho
Asesor: José Luis Pérez Garmendia

Maestría en Probabilidad y Estadística

CIMAT

10 de junio de 2019

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por apoyarme toda la vida y con la decisión de estudiar una carrera en Matemáticas. A mis compañeros y amigos, por acompañarme durante toda la carrera y saber que siempre puedo contar con ellos para cualquier cosa tanto en las buenas como en las malas. A mis profesores, por enseñar de forma tan profesional. A mi asesor de tesis, por ofrecerme la oportunidad de trabajar con él y por la enorme paciencia que me otorgo durante el trabajo. A mis sinodales, por revisar este trabajo. A CIMAT, por ser mi segunda familia durante la carrera. Y a CONACyT, por los apoyos financieros recibidos de su parte.

Por esto y muchas otras cosas más, muchas gracias.

Índice general

Introducción

En teoría de riesgo nos interesa analizar el comportamiento del capital de una compañía aseguradora. Para ello Lundberg en 1903 propuso un proceso de Poisson compuesto con deriva de tasa fija $c > 0$ con capital inicial $u \geq 0$ como modelo. A partir de esta idea, la teoría de riesgo empezó y desde entonces se han implementado nuevos modelos que describen este fenómeno de una manera más efectiva como la propuesta en este trabajo la cual consiste en alternar entre dos procesos de Lévy espectralmente negativos dependiendo de cierto régimen.

En el Capítulo 1 veremos la definición de procesos de Lévy, las propiedades fundamentales que cumplen los procesos de Lévy que nos serán de utilidad y el caso particular con los procesos de Lévy espectralmente negativos. Toda la información de este capítulo se recolectó de [1].

En el Capítulo 2 se obtiene la solución a los problemas de salida de un proceso de Lévy espectralmente negativo, así como la definición de las funciones q-escala, sus propiedades y algunas de sus aplicaciones como el cálculo de medidas resolventes. La información de este capítulo se recaudó de [1] con ayuda de [2].

Finalmente, en el Capítulo 3 definimos un proceso que utilizaremos para modelar el capital de nuestra compañía y damos expresiones explícitas que a una aseguradora le podría importar para la toma de decisiones de su empresa. Además, consideramos varios modelos simples para observar el comportamiento de nuestro proceso así como su posible relación con otros modelos. Los resultados principales mencionados en la Sección 3.1 se obtuvieron de [3] y los de la Sección 3.2 de [4].

Capítulo 1

Preliminares

Debido a la simplicidad de modelar el capital de la compañia mediante un proceso de Poisson compuesto con deriva se ha optado por utilizar una clase de procesos más generales, los cuales son los procesos de Lévy.

Así, en este capítulo enunciaremos tanto la definición de estos procesos como sus varias propiedades y resultados asociados con ellos. La información de este capítulo se puede corroborar con [1].

1.1. Procesos de Lévy

Definición 1.1. *Un proceso $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es llamado* ***proceso de Lévy*** *si satisface que:*

1. *Las trayectorias de X son continuas por la derecha y con límites por la izquierda casi seguramente, conocida como la propiedad* ***càdlàg*** *c.s.*

2. $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$.

3. *Para $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ es igual en distribución a X_{t-s}.*

4. *Para $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ es independiente de $\{X_u : u \leq s\}$.*

Asociamos a cada proceso de Lévy X la filtración canónica $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, donde para toda $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$. Más aún, suponemos que $\mathbb{F}$ satisface que para toda $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t$ es completa con respecto a los conjuntos nulos de $\mathbb{P}$ y es continua por la derecha en el sentido de que $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

Para toda $x \in \mathbb{R}$ denotamos a $\mathbb{P}_x$ como la ley del proceso de Lévy X que inicia en x; es decir, la ley del proceso de Lévy $X + x$ bajo $\mathbb{P}$. De igual manera definimos el operador esperanza asociado $\mathbb{E}_x$.

Debido a la definición de un proceso de Lévy, se puede observar que estos cumplen la propiedad de ser infinitamente divisibles que enunciamos a continuación.

Definición 1.2. *Sea X una variable aleatoria, diremos que X es* ***infinitamente divisible*** *si para toda $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión de variables aleatorias i.i.d. $\left\{Y_k^{(n)} : 1 \leq k \leq n\right\}$ tales que $X \stackrel{d}{=} Y_1^{(n)} + ... + Y_n^{(n)}$.*

Así para un proceso de Lévy X tenemos que, para toda $t \geq 0$, X_t es infinitamente divisible pues para toda $n \in \mathbb{N}$ y $k = 1, ..., n$ nos podemos tomar $Y_k^{(n)} = X_{\frac{kt}{n}} - X_{\frac{(k-1)t}{n}}$.

Una propiedad muy importante de las variables aleatorias infinitamente divisibles es que estas pueden ser caracterizadas por lo que se conoce como exponente característico. En particular, los procesos de Lévy cumplen con lo siguiente.

Definición 1.3. *Un proceso de Lévy X tiene* ***exponente característico*** Ψ *si para toda $t \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$\mathbb{E}\left[e^{i\theta X_t}\right] = e^{-t\Psi(\theta)}. \tag{1.1}$$

Se ha demostrado que la forma de un exponente característico de Lévy tiene una forma explícita, pero para ello primero requerimos de la siguiente definición.

Definición 1.4. *Una medida Π concentrada en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ que satisface que*

$$\int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} (1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty$$

se denomina una ***medida de Lévy****.*

Ahora con la definición de una medida de Lévy podemos enunciar el siguiente teorema que nos da la forma del exponente característico de un Proceso de Lévy.

Teorema 1.5. ***(Fórmula de Lévy-Khintchine).*** *Supongamos que $c \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ y Π es una medida de Lévy. Usando esta tripleta, definimos para toda $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\Psi(\theta) = ic\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}})\Pi(dx). \tag{1.2}$$

Entonces existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en el cual se define un proceso de Lévy con exponente característico Ψ.

Llamamos a la tripleta (c, σ, Π) la **tripleta característica** del proceso de Lévy con exponente característico Ψ. Para entender mejor la forma de un exponente característico (1.1) veamos dos ejemplos bastante conocidos.

Ejemplos de Procesos de Lévy

Proceso de Poisson Compuesto

Sea $N = \{N_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson de tasa λ y $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. e independientes de N con distribución común F. Entonces, definiendo $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ con

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i, \quad t \geq 0,$$

se observa que X es un Proceso de Lévy el cual cumple que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{i\theta X_t}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{i\theta\sum_{i=1}^{N_t}\xi_i}\middle| N_t\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x}F(dx)\right)^{N_t}\right] \\ &= e^{-\lambda t\left(1-\int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x}F(dx)\right)} \\ &= e^{-\lambda t\int_{\mathbb{R}}(1-e^{i\theta x})F(dx)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el exponente característico del Proceso de Poisson Compuesto X esta dado por

$$\Psi(\theta) = \lambda\int_{\mathbb{R}}(1-e^{i\theta x})F(dx). \tag{1.3}$$

Movimiento Browniano Lineal

Sea $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma \geq 0$, entonces definiendo $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ donde

$$X_t = \sigma B_t + \mu t, \quad t \geq 0,$$

observamos que claramente X es un proceso de Lévy, por serlo el Movimiento Browniano. Por otra parte,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{i\theta X_t}\right] &= e^{i\theta\mu t}\mathbb{E}\left[e^{i\theta\sigma B_t}\right] \\ &= e^{i\theta\mu t}e^{-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2 t} \\ &= e^{-t\left(-i\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el exponente característico del Movimiento Browniano Lineal X esta dado por

$$\Psi(\theta) = -i\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2. \tag{1.4}$$

1.2. Descomposición de Lévy-Itô

Debido a la fórmula de Lévy-Khintchine (1.2) observamos que tiene una relación con los exponentes característicos de un Movimiento Browniano Lineal (1.4) y de un Proceso de Poisson Compuesto (1.3). Debido a esa observación podemos ver que existe una descomposición de la siguiente manera.

El exponente característico Ψ de un proceso de Lévy X con tripleta característica (c, σ, Π) puede ser escrito, para toda $\theta \in \mathbb{R}$, de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Psi(\theta) &= \Psi^{(1)}(\theta) + \Psi^{(2)}(\theta) + \Psi^{(3)}(\theta) \\ &= \left\{ic\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right\} \\ &\quad + \left\{\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1))\int_{|x|\geq 1}(1-e^{i\theta x})\frac{\Pi(dx)}{\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1))}\right\} \\ &\quad + \left\{\int_{|x|<1}(1-e^{i\theta x}+i\theta x)\Pi(dx)\right\},\end{aligned}$$

donde los respectivos $\Psi^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, son los respectivos sumandos. Notemos que $\Psi^{(1)}$ corresponde al exponente característico de un movimiento Browniano $X^{(1)} = \left\{X_t^{(1)}\right\}_{t\geq 0}$ por (1.4), donde

$$X_t^{(1)} = \sigma B_t - ct, \quad t \geq 0,$$

y $\Psi^{(2)}$ corresponde al exponente característico de un proceso de Poisson Compuesto $X^{(2)} = \left\{X_t^{(2)}\right\}_{t\geq 0}$ por (1.3), donde

$$X_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i, \quad t \geq 0, \tag{1.5}$$

$\{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson con tasa $\lambda := \Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1))$ y $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución común $F(dx) := \frac{1}{\lambda}\Pi(dx)$ concentrada en $\mathbb{R}\backslash(-1,1)$. Si $\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1)) = 0$ diremos que $X^{(2)}$ es el proceso idénticamente cero.

Por último veremos que $\Psi^{(3)}$ corresponde al proceso $X^{(3)} = \left\{X_t^{(3)}\right\}_{t\geq 0}$, el cual será construido a partir de los siguientes procesos,

$$X_t^{(3,\epsilon)} = \int_{[0,t]} \int_{\epsilon\leq|x|<1} xN(ds \times dx) - t \int_{\epsilon\leq|x|<1} x\Pi(dx), \quad t \geq 0, \tag{1.6}$$

con exponentes característicos

$$\Psi_t^{(3,\epsilon)} = \int_{\epsilon\leq|x|<1} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x)\Pi(dx), \quad t \geq 0,$$

con $\epsilon \in (0, 1)$.

Así por lo discutido anteriormente podemos enunciar la descomposición como el siguiente teorema.

Teorema 1.6. ***(Descomposición de Lévy-Itô).*** *Sean $c \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ y Π una medida de Lévy, entonces existe un espacio de probabilidad en el cual existen tres procesos de Lévy independientes $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ y $X^{(3)}$, tales que $X^{(1)}$ es un Movimiento Browniano, $X^{(2)}$ es un Proceso de Poisson Compuesto y $X^{(3)}$ es una martingala cuadrado integrable con discontinuidades trayectoriales (o saltos) contables casi seguramente para todo intervalo de tiempo finito cuyas magnitudes son menores a la unidad. Tomando $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$ obtenemos que existe un espacio de probabilidad en el cual existe este proceso de Lévy X con tripleta característica (c, σ, Π) y exponente característico*

$$\Psi(\theta) = ic\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}})\Pi(dx), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Medidas Aleatorias Poisson

Debido a la relación observada que hay entre los Procesos de Poisson y los Procesos de Lévy, para entender mejor la construcción de los procesos (1.6) necesitamos varias herramientas de Procesos de Poisson.

Definición 1.7. *Sea $(S, \mathcal{S}, \eta)$ un espacio de medida σ-finito y $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sea $N : \Omega \times \mathcal{S} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de tal manera que la familia $\{N(\cdot, A) : A \in \mathcal{S}\}$ son variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sin pérdida de generalidad, omitiremos la dependencia de N en ω. Entonces, N es llamada una* ***medida aleatoria Poisson*** *en $(S, \mathcal{S}, \eta)$ (o medida aleatoria de Poisson en S con intensidad η) si*

- *para $A_1, ..., A_n$ conjuntos mutuamente disjuntos en $\mathcal{S}$, las variables $N(A_1), ..., N(A_n)$ son independientes,*
- *para toda $A \in \mathcal{S}$, $N(A)$ se distribuye Poisson con parámetro $\eta(A)$ (donde $0 \leq \eta(A) \leq \infty$),*
- *$N(\cdot)$ es una medida $\mathbb{P}$ c.s.*

Si $\eta(A) = 0$, entonces diremos que $N(A) = 0$ c.s. y si $\eta(A) = \infty$ diremos que $N(A) = \infty$ c.s.

Con esta definición enunciamos varios resultados que cumplen las Medidas Aleatorias Poisson a continuación.

Teorema 1.8. *Sea N una medida aleatoria Poisson en $(S, \mathcal{S}, \eta)$ y $f : S \to \mathbb{R}$ una función medible.*

(i) Entonces,

$$X = \int_S f(x)N(dx)$$

converge absolutamente c.s. si y solo si

$$\int_S (1 \wedge |f(x)|)\eta(dx) < \infty.$$

(ii) Cuando lo anterior se cumple, entonces

$$\mathbb{E}\left[e^{i\beta X}\right] = \exp\left\{-\int_S \left(1 - e^{i\beta f(x)}\right)\eta(dx)\right\}$$

para toda $\beta \in \mathbb{R}$.

(iii) Además,

$$\mathbb{E}[X] = \int_S f(x)\eta(dx) \quad \textit{cuando} \quad \int_S |f(x)|\eta(dx) < \infty$$

y

$$Var(X) = \int_S f(x)^2\eta(dx)$$

cuando

$$\int_S f(x)^2\eta(dx) < \infty \quad y \quad \int_S |f(x)|\eta(dx) < \infty.$$

Este teorema es un resultado clásico de Medidas Aleatorias Poisson. No se proporciona la prueba debido a que no es de interés en este trabajo.

En cambio, lo que nos interesa en particular es el caso cuando $(S, \mathcal{S}, \eta) = ([0,\infty)\times\mathbb{R}, \mathcal{B}[0,\infty)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}), dt\times\Pi(dx))$ y las integrales de la forma:

$$\int_{[0,t]}\int_B xN(ds\times dx),$$

para $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. El siguiente lema nos determina la distribución de esta integral.

Lema 1.9. *Sea N una medida aleatoria Poisson en $([0,\infty)\times\mathbb{R}, \mathcal{B}[0,\infty)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}), dt\times\Pi(dx))$, donde Π es una medida concentrada en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es tal que $0<\Pi(B)<\infty$. Entonces,*

$$X_t := \int_{[0,t]}\int_B xN(ds\times dx), \quad t\geq 0,$$

es un Proceso de Poisson Compuesto con tasa de arribos $\Pi(B)$ y distribución de saltos $\frac{\Pi(dx)}{\Pi(B)}\Big|_B$

Demostración. Utilizando que N es una medida aleatoria Poisson y que $\Pi(B)<\infty$, para toda $t>0$, X_t puede ser escrito como una suma finita casi seguramente. Por lo tanto, $X=\{X_t\}_{t\geq 0}$ es càdlàg c.s. Luego, para $0\leq s<t$

$$X_t - X_s = \int_{(s,t]}\int_B xN(du\times dx),$$

el cual es independiente de $\{X_u : u\leq s\}$ por definición de medida aleatoria Poisson en conjuntos disjuntos. Además, como N tiene medida de intensidad $dt\times\Pi(dx)$, se sigue que $X_0=0$ c.s. y que X_t-X_s tiene la misma distribución que X_{t-s}. Por lo tanto, X es un proceso de Lévy y por Teorema 1.8 (*ii*), para toda $\theta\in\mathbb{R}$ y $t\geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[e^{i\theta X_t}\right] = e^{-t\int_B(1-e^{i\theta x})\Pi(dx)} = \exp\left\{-t\Pi(B)\int_B(1-e^{i\theta x})\frac{\Pi(dx)}{\Pi(B)}\right\}.$$

Por (1.3) concluimos que X es un Proceso de Poisson Compuesto con tasa de arribos $\lambda=\Pi(B)$ y distribución de saltos $F(dx)=\frac{\Pi(dx)}{\Pi(B)}\Big|_B$. □

Con este resultado obtenemos que, como $\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1))<\infty$ por definición de Medida de Lévy, podemos escribir a $X_t^{(2)}$ (1.5) como

$$X_t^{(2)} = \int_{[0,t]}\int_{|x|\geq 1} xN(ds\times dx), \quad t\geq 0,$$

donde sabemos que $X_t^{(2)}$ es un Proceso de Poisson Compuesto de tasa $\lambda = \Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1))$ y distribución de saltos $F(dx)=\frac{1}{\lambda}\Pi(dx)\big|_{\mathbb{R}\backslash(-1,1)}$ con $X^{(2)}\equiv 0$ si $\lambda=0$.

Volviendo a los procesos de interés (1.6), nos interesan resultados que demuestren que podemos hacer que converjan a una martingala cuadrado integrable como esta enunciado en el Teorema 1.6. Por lo tanto, se enuncian los siguientes resultados.

Teorema 1.10. *Sea $\phi : [0,\infty) \times \mathbb{R} \times \Omega \to [0,\infty)$ una función aleatoria espacio-temporal medible tal que*

- *$\phi(\cdot, x, \omega)$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}_t$-medible.*
- *$\{\phi(t, \cdot, \omega)\}_{t \geq 0}$ es un proceso continuo por la derecha c.s.*

Entonces, para toda $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,t]} \int_{\mathbb{R}} \phi(s,x) N(ds \times dx)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(s,x) \Pi(dx) ds\right].$$

Debido a la posible aleatoriedad de la función ϕ omitimos la demostración de este resultado por la complejidad. En cambio, cuando ϕ no tiene componente aleatoria, el resultado se regresa al Teorema 1.8 (*iii*). Así, en este caso, podemos definir la siguiente martingala.

Lema 1.11. *Sea N como en el Lema 1.9 y B tal que $\int_B |x| \Pi(dx) < \infty$. Entonces,*

(i) el Proceso de Poisson Compuesto con deriva

$$M_t := \int_{[0,t]} \int_B x N(ds \times dx) - t \int_B x \Pi(dx), \quad t \geq 0,$$

es una $\mathbb{P}$-martingala con respecto a la filtración $\mathbb{F}$.

(ii) Si además, $\int_B x^2 \Pi(dx) < \infty$, entonces es una martingala cuadrado integrable.

Demostración.

(i) Primero notemos que, por definición, el proceso $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$ esta adaptado a la filtración $\mathbb{F}$. Luego, para toda $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[|M_t|\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_{[0,t]} \int_B |x| N(ds \times dx) + t \int_B |x| \Pi(dx)\right] < \infty,$$

por Teorema 1.8 (*iii*) y por hipótesis. Finalmente, utilizando que M es un Proceso de Poisson Compuesto con deriva observemos que para $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[M_t - M_s + M_s | \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[M_{t-s}] + M_s \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{[0,t-s]} \int_B x N(ds \times dx)\right] - (t-s) \int_B x \Pi(dx) + M_s \\
&= M_s,
\end{aligned}$$

por Teorema 1.8 (*iii*).

(ii) Nuevamente, por Teorema 1.8 (*iii*) y nuestra hipótesis,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,t]} \int_B x N(ds \times dx)\right)^2\right] = t \int_B x^2 \Pi(dx) + t^2 \left(\int_B x \Pi(dx)\right)^2.$$

Por otra parte, usando que $\mathbb{E}[M_t]=0$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,t]}\int_B xN(ds\times dx)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(M_t + t\int_B x\Pi(dx)\right)^2\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[M_t^2\right] + t^2\left(\int_B x\Pi(dx)\right)^2.$$

Concluimos que

$$\mathbb{E}\left[M_t^2\right] = t\int_B x^2\Pi(dx) < \infty.$$

□

Debido a que $\Pi(-1,1)$ o $\int_{|x|<1}|x|\Pi(dx)$ pueden ser infinito no podemos aplicar los Lemas 1.9 y 1.11. En cualquiera de estos casos, enunciamos el siguiente Teorema.

Teorema 1.12. *Sea N como en el Lema 1.9 y $\int_{|x|<1} x^2\Pi(dx) < \infty$. Para toda $\epsilon \in (0,1)$ definimos las martingalas*

$$M_t^\epsilon = \int_{[0,t]}\int_{\epsilon\le|x|<1} xN(ds\times dx) - t\int_{\epsilon\le|x|<1} x\Pi(dx), \quad t\ge 0.$$

Entonces existe una martingala $M=\{M_t\}_{t\ge0}$ con las siguientes propiedades:

- *para toda $T>0$, existe un subsucesión decreciente a cero determinista $\left\{\epsilon_n^T\right\}_{n\ge1}$ tales que*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le s\le T}\left(M_s^{\epsilon_n^T} - M_s\right)^2 = 0\right) = 1,$$

- *adaptada a la filtración $\mathbb{F}$,*
- *tiene trayectorias càdlàg c.s.,*
- *tiene, a lo más, un número contable de discontinuidades en $[0,T]$ casi seguramente*
- *tiene incrementos independientes y estacionarios.*

En pocas palabras, existe un proceso de Lévy, el cual es una martingala con un número de saltos contable para el cual, para $T>0$ fija, la sucesión de martingalas $\{M_t^\epsilon\}_{t\le T}$ converge uniformemente en $[0,T]$ con probabilidad uno a lo largo de una subsucesión en ϵ que puede depender de T.

Se omite la prueba de este Teorema debido a la complejidad. Aún así, con este teorema construimos el Proceso de Lévy $X^{(3)}$ como el límite en el sentido anterior de los procesos de Lévy descritos en (1.6), donde diremos que $X^{(3)}$ es el proceso idénticamente cero si $\Pi(-1,1)=0$.

Variación de trayectorias

Una definición que nos será de utilidad a la hora de estudiar el comportamiento de nuestro proceso de Lévy X es el siguiente.

Definición 1.13. *Diremos que una función* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, donde* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$*, es de* ***variación acotada*** *en el intervalo* $[a, b]$ *si*

$$V_a^b(f) = \sup \sum_{i=1}^{p} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \infty,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las particiones del intervalo $[a, b]$ *de la forma* $a = x_0 < x_1 < ... < x_p = b$.

En particular, diremos que un proceso X *es de* ***variación acotada*** *si para toda* $T > 0$ *las trayectorias de* X *son de variación acotada en el intervalo* $[0, T]$ *c.s.*

La razón por la que nos interesa esta definición es para saber si nuestro proceso de Lévy X, el cual utilizaremos para modelar el capital de nuestra compañia, entra inmediatamente al conjunto $(-\infty, 0)$.

Por lo tanto, nos interesa saber cuando un proceso de Lévy X es de variación acotada y para ello utilizamos la descomposición de Lévy-Itô. Notemos que como el Movimiento Browniano no es de variación acotada, entonces necesitaríamos que $\sigma = 0$ para que la parte del Movimiento Browniano no afecte si X es de variación acotada. Como $X^{(2)}$ es un Proceso de Poisson Compuesto, entonces es de variación acotada. Por último vemos que $X^{(3)}$, por el Teorema 1.8 (i), es de variación acotada si y solo si converge absolutamente casi seguramente. En otras palabras, podemos enunciar el siguiente lema.

Lema 1.14. *Un proceso de Lévy con tripleta característica* (c, σ, Π) *tiene* ***trayectorias de variación acotada*** *si y sólo si*

$$\sigma = 0 \quad y \quad \int_{|x|<1} |x|\Pi(dx) < \infty.$$

En este caso, podemos escribir al exponente característico como

$$\Psi(\theta) = -id\theta + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x})\Pi(dx),$$

donde

$$d = -\left(c + \int_{|x|<1} x\Pi(dx)\right) \tag{1.7}$$

y al proceso X como

$$X_t = dt + \int_{[0,t]} \int_{\mathbb{R}} xN(ds \times dx), \quad t \geq 0.$$

A d usualmente se le conoce como la **deriva** del proceso X. Con este coeficiente veamos que podemos observar una propiedad interesante que puede cumplir un proceso de Lévy. Para ello, enunciamos primeramente la siguiente definición.

Definición 1.15. *Para todo Proceso de Lévy X, decimos que el punto $x \in \mathbb{R}$ es **regular** (respectivamente irregular) para un conjunto abierto o cerrado B si*

$$\mathbb{P}_x(\tau^B = 0) = 1(\textit{respectivamente } 0),$$

donde $\tau^B = \text{ínf}\{t > 0 : X_t \in B\}$. En otras palabras, x es regular para B si, iniciando en x, el Proceso de Lévy entra a B inmediatamente.

Con esta definición, un punto que podría ser de interés saber si es regular es el punto 0 para los conjuntos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Con esta cuestión en mente enunciamos el siguiente teorema sin demostrar debido a la complejidad del mismo.

Teorema 1.16. *Para todo Proceso de Lévy X, salvo el Proceso de Poisson Compuesto, el punto 0 es regular para $(0, \infty)$ si y solo si*

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\mathbb{P}(X_t > 0)dt = \infty,$$

y esto último se cumple si y solo si una de las siguientes tres condiciones se cumple:

(i) *X es un proceso de variación no acotada,*

(ii) *X es un proceso de variación acotada y $d > 0$,*

(iii) *X es un proceso de variación acotada, $d = 0$ y*

$$\int_{(0,1)} \frac{x\Pi(dx)}{\int_0^x \Pi(-\infty, -y)dy} = \infty.$$

Donde d esta dado en (1.7) cuando X es de variación acotada.

1.3. Propiedades de Procesos de Lévy

En esta sección nos interesa estudiar propiedades que cumplan las trayectorias de un Proceso de Lévy X. Principalmente mencionamos la propiedad fuerte de Markov, el lema de Dualidad y los momentos de X.

La Propiedad Fuerte de Markov

Recordando que $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ es un Proceso de Markov si para toda $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(X_{t+s} \in B | \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{P}\left(X_{t+s} \in B | \sigma(X_t)\right).$$

Debido a la definición de un Proceso de Lévy, es fácil ver que también es un Proceso de Markov y que además cumple con el siguiente teorema.

Teorema 1.17. ***(Propiedad Fuerte de Markov).*** *Supongamos que τ es un tiempo de paro. Definamos, bajo el evento $\{\tau < \infty\}$, el proceso $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ donde*

$$\tilde{X}_t = X_{\tau+t} - X_\tau, \quad t \geq 0.$$

Entonces, bajo el evento $\{\tau < \infty\}$, el proceso $\tilde{X}$ es independiente de $\mathcal{F}_\tau$ y es igual en distribución a X. En particular, también es un proceso de Lévy.

Dualidad

A continuación observamos otra propiedad importante que cumplen los Procesos de Lévy, denotada por la **propiedad de Dualidad**.

Lema 1.18. ***(Lema de Dualidad).*** *Para toda $t \geq 0$ fija, sea $Z_s = X_{(t-s)^-} - X_t$ para toda $0 \leq s \leq t$ el proceso reverso de X en X_t. Entonces, bajo $\mathbb{P}$ los procesos*

$$\{Z_s\}_{0\leq s\leq t} \quad y \quad \{-X_s\}_{0\leq s\leq t}$$

tienen la misma ley.

Demostración. Notemos que, bajo $\mathbb{P}$, $Z_0 = 0$ c.s. ya que un salto al tiempo t tiene probabilidad cero. Luego, las trayectorias de Z se obtienen de las trayectorias de X al reflejar con respecto al eje vertical en X_t, donde se ajustan para que sus trayectorias sean càdlàg c.s. Debido que los incrementos de X son independientes y estacionarios, entonces los de Z también lo son. Más aún, para $0 \leq s \leq t$, la distribución de Z_s y la de $-X_s$ son idénticas usando que $X_t - X_{(t-s)^-} \stackrel{d}{=} X_s$ por propiedad de Lévy. Por lo tanto, concluimos el resultado. $\square$

Un resultado interesante que se sigue como consecuencia del Lema de Dualidad es el que se presenta a continuación. Para X proceso de Lévy, definimos:

$$\overline{X}_t := \sup_{0\leq s\leq t} X_s, \quad \underline{X}_t := \inf_{0\leq s\leq t} X_s$$

el **supremo** e **ínfimo** respectivamente.

Lema 1.19. *Para toda $t \geq 0$ fija, las parejas $\left(\overline{X}_t, \overline{X}_t - X_t\right)$ y $(X_t - \underline{X}_t, -\underline{X}_t)$ tienen la misma distribución bajo $\mathbb{P}$.*

Demostración. Para $0 \leq s \leq t$, sea $Z_s = X_{(t-s)^-} - X_t$ el proceso reverso de X en X_t, notemos que $Z_t = X_{0^-} - X_t = -X_t$ y

$$\overline{Z}_t = \sup_{0\leq s\leq t} Z_s = \sup_{0\leq s\leq t} X_{(t-s)^-} - X_t = \overline{X}_t - X_t.$$

Por lo tanto, $\left(\overline{Z}_t - Z_t, \overline{Z}_t\right) = \left(\overline{X}_t, \overline{X}_t - X_t\right)$. Por otro lado, por el Lema de Dualidad (Lema 1.18),

$$\overline{Z}_t = \sup_{0\leq s\leq t} Z_s \stackrel{d}{=} \sup_{0\leq s\leq t} -X_s = -\inf_{0\leq s\leq t} X_s = -\underline{X}_t.$$

Por lo tanto, $\left(\overline{Z}_t - Z_t, \overline{Z}_t\right) \stackrel{d}{=} (X_t - \underline{X}_t, -\underline{X}_t)$. Concluimos que, $\left(\overline{X}_t, \overline{X}_t - X_t\right) = \left(\overline{Z}_t - Z_t, \overline{Z}_t\right) \stackrel{d}{=} (X_t - \underline{X}_t, -\underline{X}_t)$. $\square$

Momentos exponenciales y Martingalas

Ahora nos interesa estudiar cuando existen los momentos de un proceso de Lévy X. Para ello veamos que existe una relación entre estos y los momentos de la Medida de Lévy Π.

Teorema 1.20. *Sea $\beta \in \mathbb{R}$, entonces $\mathbb{E}\left[e^{\beta X_t}\right] < \infty$ para toda $t \geq 0$ si y solo si $\int_{|x|\geq 1} e^{\beta x}\Pi(dx) < \infty$.*

Demostración. El resultado es obvio cuando $\beta = 0$ por definición de medida de Lévy. Así que, supongamos que $\beta \neq 0$.

i) Supongamos que $\mathbb{E}\left[e^{\beta X_t}\right] < \infty$, para toda $t \geq 0$. Recordando la descomposición de Lévy-Itô de X en $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ y $X^{(3)}$, donde $X^{(2)}$ es un proceso de Poisson compuesto con tasa $\lambda := \Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1))$ y distribución de saltos $F(dx) := \frac{1}{\lambda}\mathbb{1}_{\{|x|\geq 1\}}\Pi(dx)$, y $X^{(1)} + X^{(3)}$ es un proceso de Lévy con medida de Lévy $\mathbb{1}_{\{|x|<1\}}\Pi(dx)$. Como

$$\mathbb{E}\left[e^{\beta X_t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\beta X_t^{(2)}}\right]\mathbb{E}\left[e^{\beta\left(X_t^{(1)}+X_t^{(3)}\right)}\right] < \infty,$$

se sigue que $\mathbb{E}\left[e^{\beta X_t^{(2)}}\right] < \infty$. Por lo tanto, como $X^{(2)}$ es un Proceso de Poisson Compuesto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\beta X_t^{(2)}}\right] &= \sum_{n\geq 0} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x}F(dx)\right)^n \\
&= e^{-\lambda t}\sum_{n\geq 0}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x}F^{*n}(dx) \\
&= e^{-\lambda t}\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x}\left(\mathbb{1}_{\{|x|\geq 1\}}\Pi\right)^{*n}(dx) < \infty, \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

donde F^{*n} corresponde a la n-ésima convolución de F. En particular, el sumando correspondiente a $n = 1$ debe ser finito; es decir,

$$\int_{|x|\geq 1} e^{\beta x}\Pi(dx) < \infty.$$

ii) Ahora, supongamos que $\int_{|x|\geq 1} e^{\beta x}\Pi(dx) < \infty$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\beta > 0$. Por hipótesis, tendremos que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x}\left(\mathbb{1}_{\{|x|\geq 1\}}\Pi\right)^{*n}(dx) = \left(\int_{|x|\geq 1} e^{\beta x}\Pi(dx)\right)^n < \infty.$$

Así, concluimos que $\mathbb{E}\left[e^{\beta X_t^{(2)}}\right] < \infty$ por (1.8). Por otro lado, como $X^{(1)}+X^{(3)}$ es un proceso de Lévy con medida de Lévy $\mathbb{1}_{\{|x|<1\}}\Pi(dx)$, se sigue que su exponente característico es de la forma:

$$\Psi^{(1)}(\theta) + \Psi^{(3)}(\theta) = ic\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{|x|<1}(1 - e^{i\theta x} + i\theta x)\Pi(dx), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Notemos que

$$\int_{|x|<1}(1 - e^{i\theta x} + i\theta x)\Pi(dx) = -\int_{|x|<1}\left(\sum_{n\geq 2}\frac{(i\theta x)^n}{n!}\right)\Pi(dx).$$

Luego, como $x^2 \geq |x|^n$ para toda $n \geq 2$ y $|x| < 1$, entonces

$$\sum_{n\geq 2} \int_{|x|<1} \frac{|\theta x|^n}{n!} \Pi(dx) \leq \sum_{n\geq 2} \frac{|\theta|^n}{n!} \int_{|x|<1} x^2 \Pi(dx) \leq e^{|\theta|} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty.$$

Por lo tanto, por Teorema de Fubini,

$$\int_{|x|<1} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x) \Pi(dx) = -\sum_{n\geq 2} \int_{|x|<1} \left(\frac{(i\theta x)^n}{n!} \right) \Pi(dx).$$

Es decir, el exponente característico puede ser escrito como serie de potencias para toda $\theta \in \mathbb{C}$ y por ende es una función entera. Así, la función $\hat{\mu}_t(\theta) := e^{-t\left(\Psi^{(1)}(\theta)+\Psi^{(3)}(\theta)\right)} = \mathbb{E}\left[e^{i\theta\left(X_t^{(1)}+X_t^{(3)}\right)}\right]$ también es entera. Sea $\mu_t(dx) := \mathbb{P}\left(X_t^{(1)} + X_t^{(3)} \in dx\right)$, entonces como $\hat{\mu}_t$ es entera se sigue que existen todos los momentos de μ_t con $m_n(t) = \int_{\mathbb{R}} x^n \mu_t(dx)$ y $\frac{d^n \hat{\mu}_t(0)}{d\theta^n} = i^n m_n(t)$. Expandiendo a $\hat{\mu}_t$ como serie de potencias alrededor del 0, obtenemos que

$$\hat{\mu}_t(\theta) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} i^n m_n(t) \theta^n, \quad \theta \in \mathbb{C},$$

la cual es convergente para toda $\theta \in \mathbb{C}$.

Ahora, definamos $a_n(t) = \int_{\mathbb{R}} |x|^n \mu_t(dx)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Claramente, $a_{2k}(t) = m_{2k}(t)$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y como $|x| \leq (1 + x^2)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ entonces, $|x|^{2k+1} = x^{2k}|x| \leq x^{2k} + x^{2k+2}$. Así, $a_{2k+1}(t) \leq (m_{2k}(t) + m_{2k+2}(t))$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\beta\left(X_t^{(1)}+X_t^{(3)}\right)}\right] &\leq \mathbb{E}\left[e^{\beta\left|X_t^{(1)}+X_t^{(3)}\right|}\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{\beta|x|} \mu_t(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n\geq 0} \frac{(\beta|x|)^n}{n!} \mu_t(dx) \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{\beta^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} |x|^n \mu_t(dx) \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{\beta^n}{n!} a_n(t) < \infty.
\end{aligned}$$

□

Gracias al Teorema 1.20, tenemos un criterio para poder hacer un **cambio de medida exponencial** utilizando la siguiente definición.

Definición 1.21. *Para toda $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{E}\left[e^{\beta X_t}\right] < \infty$ definimos el* ***exponente de Laplace*** *como*

$$\psi(\beta) = \frac{1}{t} \log\left(\mathbb{E}\left[e^{\beta X_t}\right]\right) = -\Psi(-i\beta). \tag{1.9}$$

Utilizando el exponente de Laplace veamos que podemos obtener una martingala de la siguiente manera.

Proposición 1.22. *Sea X proceso de Lévy con exponente de Laplace ψ y $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} : \mathbb{E}\left[e^{\theta X_t}\right] < \infty\}$. Definimos el proceso $\mathcal{E}(\theta) = \{\mathcal{E}_t(\theta)\}_{t\geq 0}$ para toda $\theta \in \Theta$ como*

$$\mathcal{E}_t(\theta) = e^{\theta X_t - \psi(\theta)t}, \quad t \geq 0. \tag{1.10}$$

Entonces, para toda $\theta \in \Theta$, $\mathcal{E}(\theta)$ es una $\mathbb{P}$-martingala con respecto a $\mathbb{F}$.

Demostración. Utilizando que X es un proceso de Lévy y (1.9), observemos que claramente $\mathcal{E}(\theta)$ es adaptada a la filtración $\mathbb{F}$ con

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t(\theta)\right] = \mathbb{E}\left[e^{\theta X_t - \psi(\theta)t}\right] = 1 < \infty.$$

Además, utilizando que X tiene incrementos independientes y estacionarios, para $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t(\theta)\,|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[e^{\theta X_t - \psi(\theta)t}\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&= e^{\theta X_s - \psi(\theta)t}\mathbb{E}\left[e^{\theta(X_t - X_s)}\right] \\
&= e^{\theta X_s - \psi(\theta)s} = \mathcal{E}_s(\theta).
\end{aligned}$$

□

Como esta martingala tiene media uno podemos realizar el cambio de medida dado por

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\theta}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}_t(\theta), \quad t \geq 0.$$

Observemos que, bajo esta nueva medida, X sigue siendo un Proceso de Lévy.

Teorema 1.23. *Supongamos que X es un proceso de Lévy con tripleta característica (c, σ, Π), y que $\beta \in \mathbb{R}$ es tal que*

$$\int_{|x|\geq 1} e^{\beta x}\Pi(dx) < \infty.$$

Entonces, bajo el cambio de medida $\mathbb{P}^\beta$, el proceso X sigue siendo un proceso de Lévy con tripleta característica (c^*, σ^*, Π^*), donde

$$c^* = c - \beta\sigma^2 + \int_{|x|<1}(1 - e^{\beta x})x\Pi(dx), \ \ \sigma^* = \sigma \ \ y \ \Pi^*(dx) = e^{\beta x}\Pi(dx).$$

Demostración. Supongamos, sin perdida de generalidad, que $\beta > 0$. Notemos que por desigualdad de Hölder, para $\theta \in [0, \beta]$ y $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta X_t}\right] \leq \mathbb{E}\left[e^{\beta X_t}\right]^{\theta/\beta} < \infty.$$

Por lo tanto $\psi(\theta) < \infty$ para toda $\theta \in [0, \beta]$. Esto a su vez implica que $\Psi(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta X_t}] < \infty$ para toda θ tal que $-Im(\theta) \in [0, \beta]$. Por extensión analítica, el exponente característico Ψ de X es finito en la misma región del plano complejo.

Fijando un horizonte de tiempo, $t > 0$, notemos que la densidad $\mathcal{E}_t(\beta)$ es positiva casi seguramente. Por lo tanto, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}^\beta$ son medidas equivalentes en $\mathcal{F}_t$. Para toda $t > 0$, sea A_t el conjunto de trayectorias càdlàg de X en el intervalo

$[0,t]$. Entonces, como $\mathbb{P}(A_t)=1$ para toda $t>0$, se sigue que $\mathbb{P}^\beta(A_t)=1$ para toda $t>0$. Por lo tanto, bajo $\mathbb{P}^\beta$, el proceso X tiene trayectorias càdlàg c.s.

Luego, tomando $0\le u\le s\le t<\infty$ y $\theta\in\mathbb{R}$, sea $\mathbb{E}^\beta$ la esperanza con respecto a $\mathbb{P}^\beta$. Entonces, tenemos que para toda $A\in\mathcal{F}_u$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\beta\left[\mathbb{1}_A e^{i\theta(X_t-X_s)}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A e^{\beta X_t-\psi(\beta)t} e^{i\theta(X_t-X_s)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A e^{\beta X_s+\Psi(-i\beta)t} e^{(i\theta+\beta)(X_t-X_s)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A e^{\beta X_s+\Psi(-i\beta)t}\mathbb{E}\left[e^{(i\theta+\beta)(X_t-X_s)}\middle|\mathcal{F}_s\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A e^{\beta X_s+\Psi(-i\beta)t} e^{-(t-s)\Psi(\theta-i\beta)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A e^{\beta X_u+\Psi(-i\beta)t-(t-s)\Psi(\theta-i\beta)}\mathbb{E}\left[e^{\beta(X_s-X_u)}\middle|\mathcal{F}_u\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A e^{\beta X_u+\Psi(-i\beta)t-(t-s)\Psi(\theta-i\beta)} e^{-(s-u)\Psi(-i\beta)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A e^{\beta X_u-\psi(\beta)u} e^{(\Psi(-i\beta)-\Psi(\theta-i\beta))(t-s)}\right]\\
&= e^{(\Psi(-i\beta)-\Psi(\theta-i\beta))(t-s)}\mathbb{P}^\beta(A),
\end{aligned}$$

donde se utilizó (1.9), la propiedad de martingala del cambio de medida y los incrementos independientes y estacionarios de X bajo $\mathbb{P}$, condicionando primero con respecto a $\mathcal{F}_s$ y luego con respecto a $\mathcal{F}_u$. Por lo tanto, bajo $\mathbb{P}^\beta$, deducimos que X tiene incrementos independientes y estacionarios, con exponente característico dado por

$$\Psi_\beta(\theta):=\Psi(\theta-i\beta)-\Psi(-i\beta),\quad \theta\in\mathbb{R}.$$

Así expresándolo en términos de la tripleta (c,σ,Π) asociado a X bajo $\mathbb{P}$ deducimos fácilmente que

$$\begin{aligned}
\Psi_\beta(\theta) &= i\theta\left(c-\beta\sigma^2+\int_{|x|<1}(1-e^{\beta x})x\Pi(dx)\right)+\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}}(1-e^{i\theta x}+i\theta x\mathbb{1}_{\{|x|<1\}})e^{\beta x}\Pi(dx),\quad \theta\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Concluimos identificando la nueva tripleta (c^*,σ^*,Π^*). □

También nos interesa que ocurre con el cambio de medida en tiempos de paro. Para ello hacemos mención del siguiente resultado.

Corolario 1.24. *Bajo las condiciones del Teorema 1.23, si τ es un tiempo de paro adaptado a la filtración $\mathbb{F}$, entonces bajo $\{\tau<\infty\}$,*

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\beta}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_\tau}=\mathcal{E}_\tau(\beta).$$

Demostración. Por definición, si $A\in\mathcal{F}_\tau$, entonces $A\cap\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$. Por lo tanto, utilizando Propiedad Fuerte de Markov y que $\mathcal{E}(\beta)$ es una martingala,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^\beta\left(A\cap\{\tau\le t\}\right) &= \mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t(\beta)\mathbb{1}_{\{A\cap\{\tau\le t\}\}}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t(\beta)\mathbb{1}_{\{A\cap\{\tau\le t\}\}}|\mathcal{F}_\tau\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathcal{E}_\tau(\beta)\mathbb{1}_{\{A\cap\{\tau\le t\}\}}\right].
\end{aligned}$$

Finalmente, haciendo t tender a infinito por el Teorema de Convergencia Monótona obtenemos nuestro resultado. □

1.4. Procesos de Lévy espectralmente negativos

En este trabajo nos interesa un tipo especial de procesos de Lévy que nos ayudará para modelar el capital de nuestra compañia y esos son los procesos que cumplen lo siguiente.

Definición 1.25. *Si X es un Proceso de Lévy sin saltos positivos; es decir, su medida de Lévy cumple que $\Pi(0,\infty) = 0$, diremos que el proceso es un **Proceso de Lévy espectralmente negativo**.*

En este caso podemos trabajar con su **exponente de Laplace** ψ, el cual cumple que para toda $t \geq 0$ y $\theta \geq 0$

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta X_t}\right] = e^{t\psi(\theta)}.$$

El cual gracias a (1.1) y a la fórmula de Lévy-Khintchine (1.2) ésta toma la siguiente forma:

$$\psi(\theta) = -c\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{(-\infty,0)} (e^{\theta x} - 1 - \theta x \mathbb{1}_{\{x>-1\}})\Pi(dx)$$

donde $c \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ y Π es una medida de Lévy concentrada en $(-\infty, 0)$.

Con esta definición de Proceso de Lévy espectralmente negativo podemos definir los **Procesos de Lévy en Teoría de riesgo**. Suponiendo que modelamos el capital de nuestra compañia X con un proceso de Lévy espectralmente negativo, entonces por la fórmula de Lévy-Khintchine (1.2) tenemos que podemos escribir el exponente de Laplace ψ de X de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\psi(\theta) = &\left\{\int_{(-1,0)} (e^{\theta x} - 1 - \theta x)\Pi(dx)\right\} \\ &- \left\{c\theta + \int_{x\leq -1} (1 - e^{\theta x})\Pi(dx)\right\} + \left\{\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right\}.\end{aligned}$$

Estos términos pueden ser explicados de la siguiente manera:

- El primer término lo podemos entender como el representante de un número contable infinito de reclamos arbitrariamente pequeños, compensados por una deriva positiva correspondiente a la acumulación de primas sobre un número infinito de contratos.
- El segundo término proviene de reclamos grandes que ocurren ocasionalmente y compensados por un ingreso fijo a tasa $c > 0$ (Cramér-Lundberg).
- Y el tercer término se puede ver como una perturbación estocástica del sistema de ingresos de reclamos y primas.

Con el Teorema 1.23, veamos que para el caso particular en el que el Proceso de Lévy X es un proceso de Lévy espectralmente negativo podemos deducir que, bajo el cambio de medida, el nuevo proceso sigue siendo un proceso de Lévy espectralmente negativo.

Corolario 1.26. *Sea X un proceso de Lévy espectralmente negativo. Entonces para $\beta \geq 0$, bajo $\mathbb{P}^\beta$, X sigue siendo un proceso de Lévy espectralmente negativo con exponente de Laplace ψ_β dado por*

$$\psi_\beta(\theta) = \psi(\theta + \beta) - \psi(\beta), \quad \textit{para } \theta \geq -\beta.$$

Demostración. Como X es un proceso de Lévy espectralmente negativo, entonces para $\beta \geq 0$:

$$\int_{|x|\geq 1} e^{\beta x}\Pi(dx) = \int_{x\leq -1} e^{\beta x}\Pi(dx) \leq \int_{x\leq -1} \Pi(dx) \leq \int_{x<0} (1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty.$$

Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 1.23. Para $\theta \geq -\beta$,

$$e^{\psi_\beta(\theta)} = \mathbb{E}^\beta\left[e^{\theta X_1}\right] = \mathbb{E}\left[e^{(\theta+\beta)X_1 - \psi(\beta)}\right] = e^{\psi(\theta+\beta)-\psi(\beta)}.$$

□

Ahora damos algunas propiedades que cumplen los exponentes de Laplace ψ de un proceso de Lévy espectralmente negativo.

Proposición 1.27. *Sea ψ el exponente de Laplace de un proceso de Lévy espectralmente negativo. Entonces, se cumple que en $[0, \infty)$,*

- *ψ es infinitamente diferenciable.*
- *ψ es estrictamente convexa.*
- *$\psi(0) = 0$ y $\psi(\infty) = \infty$.*

Demostración. Usando que para $\theta > 0$,

$$\psi(\theta) = -c\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{(-\infty,-1]} (e^{\theta x} - 1)\Pi(dx) + \int_{(-1,0)} (e^{\theta x} - 1 - \theta x)\Pi(dx),$$

notemos que si $x \leq -1$, entonces $0 < e^{\theta x} < 1$ y así $|e^{\theta x} - 1| < e^\theta$; y si $x \in (-1, 0)$, entonces $x^2 \geq |x|^k$ para $k \geq 2$ y así,

$$|e^{\theta x} - 1 - \theta x| \leq \sum_{k\geq 2} \frac{\theta^k}{k!}|x|^k \leq e^\theta x^2.$$

Por lo tanto, usando el hecho de que Π es una medida de Lévy concluimos que

$$|\psi(\theta)| < |-c|\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + e^\theta \int_{(-\infty,0)} (1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty.$$

Así por teorema de convergencia dominada podemos derivar dentro de la integral para obtener que

$$\psi'(\theta) = -c + \sigma^2\theta + \int_{(-\infty,-1]} x e^{\theta x}\Pi(dx) + \int_{(-1,0)} x(e^{\theta x} - 1)\Pi(dx).$$

Nuevamente, si $x \in (-1, 0)$, entonces $x^2 \geq |x|^k$ para $k \geq 2$ y asi,

$$|x(e^{\theta x} - 1)| \leq \sum_{k\geq 1} \frac{\theta^k}{k!}|x|^{k+1} \leq e^\theta x^2$$

Por otra parte, considerando las funciones $f_n(x) = |x|^n e^{\theta x}$, para $n \in \mathbb{N}$, $x \leq -1$ y $\theta > 0$. Utilizando herramientas de cálculo se demuestra que $f_n(x) \leq (\frac{n}{\theta e})^n$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\psi'(\theta)| &< |-c| + \sigma^2\theta + \frac{1}{\theta e}\int_{(-\infty,-1]} \Pi(dx) + e^{\theta}\int_{(-1,0)} x^2\Pi(dx) \\ &\leq |-c| + \sigma^2\theta + \left(\frac{1}{\theta e} \vee e^{\theta}\right)\int_{(-\infty,0)} (1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el mismo argumento anterior,

$$\psi''(\theta) = \sigma^2 + \int_{(-\infty,-1]} x^2 e^{\theta x}\Pi(dx) + \int_{(-1,0)} x^2 e^{\theta x}\Pi(dx).$$

Notemos que $\psi''(\theta) > 0$, por lo tanto ψ es estrictamente convexa. Análogamente, demostramos que para $n \geq 3$,

$$\frac{d^n\psi}{d\theta^n}(\theta) = \int_{(-\infty,0)} x^n e^{\theta x}\Pi(dx).$$

Así ψ es infinitamente diferenciable. Luego, claramente $\psi(0) = 0$ y usando el hecho de que

$$e^{\psi(\theta)} = \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right] \geq \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\mathbb{1}_{\{X_1>0\}}\right],$$

haciendo $\theta \to \infty$ concluimos que $\psi(\infty) = \infty$. $\square$

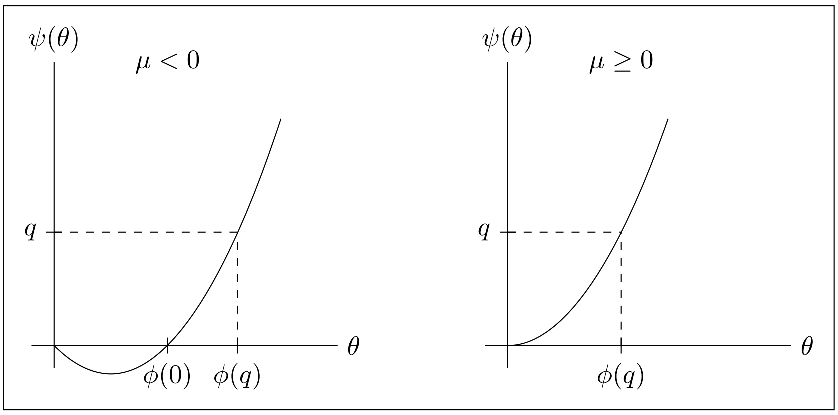
Notemos que por propiedad de transformada de Laplace, podemos expresar a la media de nuestro proceso de Lévy espectralmente negativo como

$$\mu := \mathbb{E}[X_1] = \psi'(0+),$$

la cual cumple que $\mu \in [-\infty, \infty)$. Consideremos la siguiente función:

$$\phi(q) = \sup\{\theta \geq 0 : \psi(\theta) = q\},$$

la raíz mas grande de la ecuación $\psi(\theta) = q$. Notemos que, por la Proposición 1.27 y dependiendo del valor de q y de μ, la siguiente imagen nos muestra los posibles valores de $\phi(q)$:



Así, podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 1.28. *$\phi(q) = 0$ si y solo si $q = 0$ y $\mu \geq 0$.*

Esta función ϕ es muy útil para resolver problemas de salida como se verá a continuación con la siguiente definición.

Definición 1.29. *Para toda $x \in \mathbb{R}$ definimos los **tiempos de pasada** como*

$$\tau_x^+ = \inf\{t > 0 : X_t > x\} \quad y \quad \tau_x^- = \inf\{t > 0 : X_t < x\}.$$

Teorema 1.30. *Para todo proceso de Lévy espectralmente negativo y $x \geq 0$ se cumple que,*

$$\mathbb{E}\left[e^{-q\tau_x^+}\mathbb{1}_{\{\tau_x^+<\infty\}}\right] = e^{-\phi(q)x},$$

donde $q \geq 0$.

Demostración. Sea $q > 0$. Usando que X es espectralmente negativo, sea $x = X_{\tau_x^+}$ en $\{\tau_x^+ < \infty\}$, usando la propiedad fuerte de Markov:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\phi(q)X_t-qt}\middle|\mathcal{F}_{\tau_x^+}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau_x^+\geq t\}}e^{\phi(q)X_t-qt}\middle|\mathcal{F}_{\tau_x^+}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau_x^+<t\}}e^{\phi(q)X_t-qt}\middle|\mathcal{F}_{\tau_x^+}\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau_x^+\geq t\}}e^{\phi(q)X_t-qt} + \mathbb{1}_{\{\tau_x^+<t\}}e^{\phi(q)X_{\tau_x^+}-q\tau_x^+}\mathbb{E}\left[e^{\phi(q)\left(X_t-X_{\tau_x^+}\right)-q\left(t-\tau_x^+\right)}\right] \\
&= e^{\phi(q)X_{t\wedge\tau_x^+}-q\left(t\wedge\tau_x^+\right)},
\end{aligned}$$

donde se utilizó la martingala (1.10) y el hecho de que $\mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t\left(\phi(q)\right)\right] = 1$ para toda $t \geq 0$. Tomando esperanzas obtenemos que

$$\mathbb{E}\left[e^{\phi(q)X_{t\wedge\tau_x^+}-q\left(t\wedge\tau_x^+\right)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\phi(q)X_t-qt}\right] = 1.$$

Notemos que $e^{\phi(q)X_{t\wedge\tau_x^+}-q\left(t\wedge\tau_x^+\right)} < e^{\phi(q)x}$, así por convergencia dominada

$$\mathbb{E}\left[e^{\phi(q)x-q\tau_x^+}\mathbb{1}_{\{\tau_x^+<\infty\}}\right] = 1.$$

□

Como corolario enunciamos el caso $q = 0$.

Corolario 1.31.

$$\mathbb{P}(\tau_x^+ < \infty) = e^{-\phi(0)x},$$

el cual es igual a uno si y solo si $\phi(0) = 0$, lo cual ocurre si $\mu \geq 0$.

Definamos $\mathbf{e}_q$ variables aleatorias exponenciales de parámetro q, para $q > 0$, independientes de X. Si $q = 0$, diremos que $\mathbf{e}_0 = \infty$ c.s. Veamos que con estas variables aleatorias podemos enunciar y demostrar varios resultados que se verán a continuación.

Corolario 1.32. *Si X es un proceso de Lévy espectralmente negativo, entonces $\overline{X}_{\mathbf{e}_q}$ se distribuye como una variable aleatoria exponencial de parámetro $\phi(q)$.*

Demostración. Usando que $\overline{X}_t > x$ si y solo si $\tau_x^+ < t$ y el Teorema 1.30 obtenemos que por integración por partes, para $q > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{X}_{\mathbf{e}_q} > x) &= \mathbb{P}(\tau_x^+ < \mathbf{e}_q) \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_x^+ < t) q e^{-qt} dt \\
&= -\left.\mathbb{P}(\tau_x^+ < t) e^{-qt}\right|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}(\tau_x^+ \in dt) \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-q\tau_x^+} \mathbb{1}_{\{\tau_x^+ < \infty\}}\right] \\
&= e^{-\phi(q)x}. \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

Para $q = 0$, por el Corolario 1.31, obtenemos que

$$\mathbb{P}(\overline{X}_\infty > x) = \mathbb{P}(\tau_x^+ < \infty) = e^{-\phi(0)x}.$$

Notemos que si $\phi(0) = 0$ entonces $\overline{X}_\infty = \infty$ c.s. lo cual ocurre si y solo si $\mu \geq 0$. □

Factorización de Wiener-Hopf

El Corolario 1.32 nos da una primera idea de como el supremo de un proceso de Lévy espectralmente negativo se comporta en el infinito. Además, también nos interesa que pasa con el ínfimo. Para observar este fenómeno utilizamos el siguiente resultado sin demostrar debido a que se requieren herramientas de semimartingalas para ello.

Proposición 1.33. *$\overline{X}_{\mathbf{e}_q}$ es independiente de $\overline{X}_{\mathbf{e}_q} - X_{\mathbf{e}_q}$. Además, $-\underline{X}_{\mathbf{e}_q}$ es independiente de $X_{\mathbf{e}_q} - \underline{X}_{\mathbf{e}_q}$.*

Con este resultado podemos enunciar el siguiente Teorema conocido como la **Factorización de Wiener-Hopf para procesos de Lévy espectralmente negativos**.

Teorema 1.34. *Sea X un proceso de Lévy espectralmente negativo, y $\mathbf{e}_q$ variables aleatorias exponenciales independientes de X de parámetro $q > 0$ con $\mathbf{e}_0 = \infty$ c.s. Entonces, para $\theta \in \mathbb{R}$ se cumple lo siguiente:*

- $\mathbb{E}\left[e^{i\theta X_{e_q}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\theta \overline{X}_{e_q}}\right] \mathbb{E}\left[e^{i\theta \underline{X}_{e_q}}\right] = \frac{q}{q+\Psi(\theta)}$.
- $\mathbb{E}\left[e^{i\theta \overline{X}_{e_q}}\right] = \frac{\phi(q)}{\phi(q)-i\theta}$
- $\mathbb{E}\left[e^{i\theta \underline{X}_{e_q}}\right] = \frac{q}{\phi(q)} \frac{\phi(q)-i\theta}{q+\Psi(\theta)}$

Demostración. Notemos que usando que X es un proceso de Lévy y que $\mathbf{e}_q$ es una variable aleatoria exponencial obtenemos que

$$\mathbb{E}\left[e^{i\theta X_{\mathbf{e}_q}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{i\theta X_{\mathbf{e}_q}} \middle| \mathbf{e}_q\right]\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\mathbf{e}_q \Psi(\theta)}\right] = \frac{q}{q+\Psi(\theta)}.$$

Por otro lado, por Corolario 1.32 sabemos que $\overline{X}_{\mathbf{e}_q}$ es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\phi(q)$. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}\left[e^{i\theta\overline{X}_{\mathbf{e}_q}}\right] = \frac{\phi(q)}{\phi(q) - i\theta}.$$

Finalmente, por la Proposición 1.33 y el hecho de que $X_t - \underline{X}_t \overset{d}{=} \overline{X}_t$, por Lema de Dualidad, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{i\theta X_{\mathbf{e}_q}}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{i\theta\left(X_{\mathbf{e}_q} - \underline{X}_{\mathbf{e}_q}\right)} e^{-i\theta\left(-\underline{X}_{\mathbf{e}_q}\right)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\theta\left(X_{\mathbf{e}_q} - \underline{X}_{\mathbf{e}_q}\right)}\right] \mathbb{E}\left[e^{i\theta\underline{X}_{\mathbf{e}_q}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\theta\overline{X}_{\mathbf{e}_q}}\right] \mathbb{E}\left[e^{i\theta\underline{X}_{\mathbf{e}_q}}\right].
\end{aligned}$$

□

En particular, utilizando el exponente de Laplace podemos escribir la Factorización de Wiener-Hopf de la siguiente manera.

Corolario 1.35. *Bajo las hipótesis del Teorema 1.34, para $\beta > 0$ se cumple que*

$$\mathbb{E}\left[e^{\beta\underline{X}_{e_q}}\right] = \frac{q}{\phi(q)} \frac{\phi(q) - \beta}{q - \psi(\beta)} \quad y \quad \mathbb{E}\left[e^{-\beta\overline{X}_{e_q}}\right] = \frac{\phi(q)}{\phi(q) + \beta}$$

Con estos resultados podemos averiguar el comportamiento respectivo del supremo e ínfimo en el infinito.

Corolario 1.36. *Bajo las hipótesis del Teorema 1.34, para $\beta > 0$ se cumple lo siguiente:*

$$\mathbb{E}\left[e^{\beta\underline{X}_\infty} \mathbb{1}_{\{-\underline{X}_\infty < \infty\}}\right] = \begin{cases} 0 & si\ \mu \leq 0, \\ \mu\frac{\beta}{\psi(\beta)} & si\ \mu > 0, \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\beta\overline{X}_\infty} \mathbb{1}_{\{\overline{X}_\infty < \infty\}}\right] = \begin{cases} \frac{\phi(0)}{\beta + \phi(0)} & si\ \mu < 0, \\ 0 & si\ \mu \geq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t\to\infty} X_t = \begin{cases} \infty & si\ \mu > 0, \\ -\infty & si\ \mu < 0, \end{cases}$$

y $\limsup_{t\to\infty} X_t = -\liminf_{t\to\infty} X_t = \infty$ *si* $\mu = 0$.

Demostración. Observemos que

$$\lim_{q\to 0+} \frac{q}{\phi(q)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu < 0, \\ \mu & \text{si } \mu \geq 0, \end{cases}$$

pues, por la Proposición 1.28, si $\mu < 0$ entonces $\phi(0) > 0$ y así obtenemos el primer límite usando que ϕ es una función continua. Si $\mu \geq 0$, entonces $\phi(0) = 0$. En este caso utilizamos el hecho de que $q = \psi(\phi(q))$ y el Teorema de L'Hôpital para obtener el segundo límite.

Por lo tanto, utilizando el Corolario 1.35 haciendo q tender a cero por la derecha y el hecho de que $\beta > 0$ obtenemos que

$$\mathbb{E}\left[e^{\beta \underline{X}_\infty}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\beta \underline{X}_\infty} \mathbb{1}_{\{-\underline{X}_\infty < \infty\}}\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \leq 0, \\ \mu \frac{\beta}{\psi(\beta)} & \text{si } \mu > 0, \end{cases}$$

Haciendo lo mismo para la otra esperanza obtenemos que

$$\mathbb{E}\left[e^{-\beta \overline{X}_\infty}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\beta \overline{X}_\infty} \mathbb{1}_{\{\overline{X}_\infty < \infty\}}\right] = \begin{cases} \frac{\phi(0)}{\beta + \phi(0)} & \text{si } \mu < 0, \\ 0 & \text{si } \mu \geq 0. \end{cases}$$

Luego, como $e^{\beta \underline{X}_\infty} \mathbb{1}_{\{-\underline{X}_\infty < \infty\}} < 1$, por Teorema de Convergencia Dominada obtenemos que

$$\lim_{\beta \to 0+} \mathbb{E}\left[e^{\beta \underline{X}_\infty} \mathbb{1}_{\{-\underline{X}_\infty < \infty\}}\right] = \mathbb{P}\left(-\underline{X}_\infty < \infty\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \leq 0, \\ 1 & \text{si } \mu > 0, \end{cases}$$

Análogamente,

$$\lim_{\beta \to 0+} \mathbb{E}\left[e^{-\beta \overline{X}_\infty} \mathbb{1}_{\{\overline{X}_\infty < \infty\}}\right] = \mathbb{P}\left(\overline{X}_\infty < \infty\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu < 0, \\ 0 & \text{si } \mu \geq 0. \end{cases}$$

Observando para los diferentes valores de μ concluimos nuestro resultado. $\square$

Variación acotada para Procesos de Lévy Espectralmente Negativos

Para un proceso de Lévy espectralmente negativo con variación acotada, tendremos que el exponente de Laplace puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\psi(\lambda) = d\lambda - \int_{(-\infty,0)} (1 - e^{\lambda x})\Pi(dx), \tag{1.12}$$

donde

$$d = -\left(c + \int_{(-1,0)} x\Pi(dx)\right) \tag{1.13}$$

necesariamente tiene que ser estrictamente positivo.

Como nos interesa modelar el capital de una aseguradora utilizando un proceso de Lévy espectralmente negativo es de importancia recordar la Definición 1.15 y averiguar cuando el punto 0 es regular para los conjuntos $(0, \infty)$ y $(-\infty, 0)$. Así utilizando el Teorema 1.16 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.37. *Para todo proceso de Lévy espectralmente negativo X, salvo el proceso de Poisson Compuesto, el punto 0 es regular para $(0, \infty)$. Además, el punto 0 es regular para $(-\infty, 0)$ si y solo si es de variación no acotada.*

Otra propiedad que veremos que será de importancia para el exponente de Laplace ψ es el que se presenta a continuación.

Proposición 1.38. *Para todo proceso de Lévy espectralmente negativo X con exponente de Laplace ψ y variación acotada se cumple que*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} = d,$$

donde d esta dado por (1.13).

Demostración. De (1.12) observemos que por integración por partes,

$$\begin{aligned}
\int_{(-\infty,0)} \left(1 - e^{\lambda x}\right) \Pi(dx) &= \left(1 - e^{\lambda x}\right) \Pi(-\infty, x)\Big|_{-\infty}^{0} + \int_{(-\infty,0)} \lambda e^{\lambda x} \Pi(-\infty, x) dx \\
&= \lambda \int_{(-\infty,0)} e^{\lambda x} \Pi(-\infty, x) dx \\
&= \lambda \int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x} \Pi(-\infty, -x) dx < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por Teorema de Convergencia Dominada, concluimos que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to\infty} d - \int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x} \Pi(-\infty, -x) dx = d.$$

$\square$

Capítulo 2

Problemas de salida para procesos espectralmente negativos

Como observamos en la sección 1.4, se pueden calcular explícitamente identidades asociadas a los procesos de Lévy espectralmente negativos. Debido a ello en el Capítulo 1 enunciamos varios resultados de utilidad para resolver los problemas de salida que son de interés en este capítulo como se presenta en [1].

En particular, enunciamos y demostramos el resultado principal de este capítulo a continuación.

Teorema 2.1. *Existe una familia de funciones* $W^{(q)} : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ *y*

$$Z^{(q)}(x) := 1 + q\int_0^x W^{(q)}(y)dy, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

definidas para toda $q \geq 0$ *(donde* $W^{(0)} = W$*), tales que cumplen lo siguiente:*

(i) Para toda $q \geq 0$, $W^{(q)}(x) = 0$ *para* $x < 0$ *y* $W^{(q)}$ *esta caracterizada en* $[0,\infty)$ *como una función continua y estrictamente creciente cuya transformada de Laplace satisface que:*

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W^{(q)}(x)dx = \frac{1}{\psi(\beta) - q}, \quad \text{para } \beta > \phi(q).$$

(ii) Para toda $x \in \mathbb{R}$ *y* $q \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}\right] = Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\phi(q)}W^{(q)}(x),$$

donde para el caso $q = 0$ *tenemos que,*

$$\mathbb{P}_x\left(\tau_0^- < \infty\right) = \begin{cases} 1 - \mu W(x) & \text{si } \mu > 0, \\ 1 & \text{si } \mu \leq 0. \end{cases}$$

(iii) Para toda $x \leq a$ y $q \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_a^+} \mathbb{1}_{\{\tau_0^- > \tau_a^+\}} \right] = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)} \tag{2.2}$$

y

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^-} \mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \tau_a^+\}} \right] = Z^{(q)}(x) - Z^{(q)}(a) \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}. \tag{2.3}$$

Debido a (2.2), a las funciones $W^{(q)}$ se les conoce como las **funciones q-escala**. Y debido a su relación en (2.3), a las funciones $Z^{(q)}$ las llamaremos las **segundas funciones q-escala**.

Demostración.

(iii) Empezaremos demostrando (2.2) con el caso particular donde $\mu > 0$ y $q = 0$, para luego demostrar el caso $q > 0$ sin restricción en μ y el caso $q = 0$ con $\mu < 0$. Finalmente probaremos el caso $\mu = 0$ y $q = 0$.

Supongamos que $\mu > 0$ y $q = 0$, así $-\underline{X}_\infty$ es finito $\mathbb{P}$-c.s. por Corolario 1.36. Definimos la función

$$W(x) = \mathbb{P}_x \left(\underline{X}_\infty \geq 0 \right), \tag{2.4}$$

la cual cumple que $W(x) = 0$ para $x < 0$ por definición de ínfimo. Veamos que para $x \in [0, a)$ utilizando probabilidad total y la Propiedad Fuerte de Markov obtenemos que

$$\begin{aligned}
W(x) &= \mathbb{P}_x \left(\underline{X}_\infty \geq 0 \right) \\
&= \mathbb{E}_x \left[\mathbb{P}_x \left(\underline{X}_\infty \geq 0 \middle| \mathcal{F}_{\tau_a^+} \right) \right] \\
&= \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{\tau_a^+ < \tau_0^-\}} \mathbb{P}_a \left(\underline{X}_\infty \geq 0 \right) \right] + \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{\tau_a^+ > \tau_0^-\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}} \left(\underline{X}_\infty \geq 0 \right) \right] \\
&= \mathbb{P}_x \left(\tau_a^+ < \tau_0^- \right) \mathbb{P}_a \left(\underline{X}_\infty \geq 0 \right) + \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{\tau_a^+ > \tau_0^-\}} W \left(X_{\tau_0^-} \right) \right] \\
&= \mathbb{P}_x \left(\tau_a^+ < \tau_0^- \right) W(a),
\end{aligned}$$

donde se utilizó que $W\left(X_{\tau_0^-}\right) = 0$, pues $X_{\tau_0^-} < 0$. Concluimos que

$$\mathbb{P}_x \left(\tau_a^+ < \tau_0^- \right) = \frac{W(x)}{W(a)}, \quad x \geq 0,$$

lo cual es lo que se quería demostrar.

Ahora supongamos que $q > 0$, o que $q = 0$ y $\mu < 0$. En cualquiera de estos casos, por la convexidad de ψ, sabemos que $\phi(q) > 0$ y por ende $\psi'_{\phi(q)}(0+) = \psi'(\phi(q)) > 0$, por Corolario 1.26. Por lo tanto, bajo $\mathbb{P}^{\phi(q)}$ por Corolario 1.36, el proceso X tiende a infinito. Así, para $(X, \mathbb{P}^{\phi(q)})$ sabemos que por lo anterior, existe una función 0-escala $W_{\phi(q)}(x) = \mathbb{P}_x^{\phi(q)} \left(\underline{X}_\infty \geq 0 \right)$ que cumple que

$$\mathbb{P}_x^{\phi(q)} \left(\tau_a^+ < \tau_0^- \right) = \frac{W_{\phi(q)}(x)}{W_{\phi(q)}(a)}.$$

Por otra parte, por definición de $\mathbb{P}^{\phi(q)}$, sabemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x^{\phi(q)}\left(\tau_a^+ < \tau_0^-\right) &= \mathbb{E}_x\left[e^{\phi(q)X_{\tau_a^+}-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{\{\tau_a^+<\tau_0^-\}}\right]\\ &= e^{\phi(q)(a-x)}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{\{\tau_a^+<\tau_0^-\}}\right].\end{aligned}$$

Combinando estas últimas dos igualdades concluimos que

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{\{\tau_a^+<\tau_0^-\}}\right] = e^{-\phi(q)(a-x)}\frac{W_{\phi(q)}(x)}{W_{\phi(q)}(a)} = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)},$$

donde definimos $W^{(q)}(x) = e^{\phi(q)x}W_{\phi(q)}(x)$ y observamos que $W^{(q)}$ es idénticamente cero en $(-\infty, 0)$ y no decreciente.

Finalmente consideremos el caso $q = 0$ y $\mu = 0$. Sea $b > a$, definimos $W(x) = \lim_{q\to 0+}\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}$, para $x \leq a$. Así,

$$\begin{aligned}W(x) &= \lim_{q\to 0+}\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}\\ &= \lim_{q\to 0+}\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}\frac{W^{(q)}(a)}{W^{(q)}(b)}\\ &= \lim_{q\to 0+}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{\{\tau_a^+<\tau_0^-\}}\right]\frac{W^{(q)}(a)}{W^{(q)}(b)}\\ &= \mathbb{P}_x\left(\tau_a^+ < \tau_0^-\right)W(a),\end{aligned}$$

donde observamos que W es idénticamente cero en $(-\infty, 0)$ y no decreciente. Con esto concluimos la demostración de (2.2).

(i) Nuevamente, consideramos primero el caso en que $q = 0$ y $\mu > 0$, así X tiende a infinito. Recordando la definición de W dada por (2.4), observemos que podemos tomarnos un re-escalamiento sin modificar el resultado dado por (2.2), así consideramos el siguiente re-escalamiento:

$$W(x) = \frac{1}{\mu}\mathbb{P}_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right).$$

Por el Corolario 1.36,

$$\mathbb{E}\left[e^{\beta\underline{X}_\infty}\right] = \mu\frac{\beta}{\psi(\beta)}$$

para $\beta > 0$. Por otra parte, veamos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{\beta\underline{X}_\infty}\right] &= \int_{(-\infty,0]} e^{\beta x}\mathbb{P}\left(\underline{X}_\infty \in dx\right)\\ &= \int_{[0,\infty)} e^{-\beta x}\mathbb{P}\left(-\underline{X}_\infty \in dx\right)\\ &= \mathbb{P}(-\underline{X}_\infty = 0) + \int_{(0,\infty)} e^{-\beta x}\mathbb{P}\left(-\underline{X}_\infty \in dx\right)\end{aligned}$$

Agregando un uno en forma de la integral de la densidad de una variable aleatoria exponencial de parámetro β e integrando por partes,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\beta \underline{X}_\infty}\right] &= \mathbb{P}(-\underline{X}_\infty = 0)\int_0^\infty \beta e^{-\beta x}dx + e^{-\beta x}\mathbb{P}(-\underline{X}_\infty \in (0,x])|_0^\infty \\
&+ \int_{(0,\infty)} \beta e^{-\beta x}\mathbb{P}(-\underline{X}_\infty \in (0,x])dx \\
&= \int_{(0,\infty)} \beta e^{-\beta x}\mathbb{P}\left(-\underline{X}_\infty \in [0,x]\right)dx \\
&= \beta\int_0^\infty e^{-\beta x}\mathbb{P}\left(-\underline{X}_\infty \le x\right)dx \\
&= \beta\int_0^\infty e^{-\beta x}\mathbb{P}_x\left(\underline{X}_\infty \ge 0\right)dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty e^{-\beta x}W(x)dx = \frac{1}{\psi(\beta)}$$

para toda $\beta > 0 = \phi(0)$.

Para el caso donde $q > 0$ o $q = 0$ y $\mu < 0$. Tomamos, $W^{(q)}(x) = e^{\phi(q)x}W_{\phi(q)}(x)$. Recordando que X tiende a infinito bajo la medida $\mathbb{P}^{\phi(q)}$ y por ende utilizando la conclusión anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\beta x}W^{(q)}(x)dx &= \int_0^\infty e^{-(\beta-\phi(q))x}W_{\phi(q)}(x)dx \\
&= \frac{1}{\psi_{\phi(q)}(\beta-\phi(q))} \\
&= \frac{1}{\psi(\beta)-q},
\end{aligned}$$

para $\beta > \phi(q)$, por Corolario 1.26. Observemos que, como $W^{(q)}$ es una función creciente, podemos trabajar con su medida asociada $W^{(q)}(dx)$ en $[0,\infty)$ que cumple que $W^{(q)}(a,b] := W^{(q)}(b) - W^{(q)}(a)$, y así al igual que con el caso anterior podemos deducir que:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} e^{-\beta x}W^{(q)}(dx) &= W^{(q)}(0) + \int_{(0,\infty)} e^{-\beta x}W^{(q)}(dx) \\
&= W^{(q)}(0)\int_0^\infty \beta e^{-\beta x}dx + e^{-\beta x}W^{(q)}(0,x]\Big|_0^\infty \\
&+ \int_{(0,\infty)} \beta e^{-\beta x}W^{(q)}(0,x]dx \\
&= \int_{(0,\infty)} \beta e^{-\beta x}W^{(q)}[0,x]dx \\
&= \beta\int_0^\infty e^{-\beta x}W^{(q)}(x)dx \\
&= \frac{\beta}{\psi(\beta)-q}, \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

para $\beta > \phi(q)$.

Para el caso donde $q = 0$ y $\mu = 0$, utilizamos el Teorema de continuidad extendida para transformadas de Laplace [5] para deducir que

$$\lim_{q\to 0+} \int_{[0,\infty)} e^{-\beta x} W^{(q)}(dx) = \lim_{q\to 0+} \frac{\beta}{\psi(\beta) - q} = \frac{\beta}{\psi(\beta)}.$$

Entonces, existe una medida W^* tal que, en el sentido de convergencia vaga, $W^*(dx) = \lim_{q\to 0+} W^{(q)}(dx)$ y

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\beta x} W^*(dx) = \frac{\beta}{\psi(\beta)}.$$

Así podemos definir $W = W^*$ y por (2.5)

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W(x)dx = \lim_{q\to 0+} \int_0^\infty e^{-\beta x} W^{(q)}(x)dx = \lim_{q\to 0+} \frac{1}{\psi(\beta) - q} = \frac{1}{\psi(\beta)},$$

para toda $\beta > \phi(0) = 0$.

Finalmente, la demostración de que $W^{(q)}$ es continua y estrictamente monótona la omitimos debido a que va más allá del alcance de este trabajo, pero se puede consultar en [1]. De la demostración del mismo podemos rescatar el hecho de que existe un proceso ϵ con supremo $\bar{\epsilon}$ y una medida de Poisson n tales que

$$\frac{W(x)}{W(a)} = \exp\left\{ - \int_x^a n(\bar{\epsilon} > t)dt \right\}. \tag{2.6}$$

Por lo anterior, tomando a suficientemente grande, obtenemos que W es continua y estrictamente monótona. Además, por criterio de transformada de Laplace, concluimos que W esta caracterizada en $[0,\infty)$. Finalmente, utilizando el hecho de que para $q > 0$,

$$W^{(q)}(x) = e^{\phi(q)x} W_{\phi(q)}(x),$$

las propiedades de ser continua, estrictamente monótona y única se heredan.

(ii) Utilizando la transformada de Laplace de $W^{(q)}$ otorgada por el inciso (i) y el hecho de que $W^{(q)}$ genera una medida, entonces por la Factorización de Wiener-Hopf para $x \geq 0$, podemos deducir que

$$\mathbb{P}\left(-\underline{X}_{\mathbf{e}_q} \in dx \right) = \frac{q}{\phi(q)} W^{(q)}(dx) - qW^{(q)}(x)dx.$$

Este resultado se demuestra a detalle como corolario después de este teorema. Por lo tanto, utilizando un argumento igual a (1.11) y el hecho de que $\underline{X}_t < 0$ si y solo si $\tau_0^- < t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\right] &= \mathbb{P}_x\left(\mathbf{e}_q > \tau_0^-\right)\\
&= \mathbb{P}_x\left(\underline{X}_{\mathbf{e}_q} < 0\right)\\
&= \mathbb{P}\left(-\underline{X}_{\mathbf{e}_q} > x\right)\\
&= 1 - \mathbb{P}\left(-\underline{X}_{\mathbf{e}_q} \leq x\right)\\
&= 1 - \int_0^x \mathbb{P}\left(-\underline{X}_{\mathbf{e}_q} \in dy\right)\\
&= 1 + \int_0^x qW^{(q)}(y)dy - \frac{q}{\phi(q)}W^{(q)}(x)\\
&= Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\phi(q)}W^{(q)}(x).
\end{aligned}$$

Usando que $W^{(q)}(x) = 0$ y $Z^{(q)}(x) = 1$ para toda $x \in (-\infty, 0)$, obtenemos el resultado para toda $x \in \mathbb{R}$. Así concluimos el resultado para $q > 0$. Finalmente, para el caso $q = 0$, observando que $Z^{(0)} = 1$ y recordando que

$$\lim_{q\to 0+} \frac{q}{\phi(q)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu < 0,\\ \mu & \text{si } \mu \geq 0,\end{cases}$$

concluimos nuestro resultado para $q = 0$.

(iii) Por último, demostramos (2.3). Sea $q > 0$, entonces para $x \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_0^-<\tau_a^+\}}\right] = \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\right] - \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_a^+<\tau_0^-\}}\right].$$

Utilizando la Propiedad Fuerte de Markov con τ_a^+ y usando el hecho de que X no tiene saltos hacia arriba por ser proceso de Lévy espectralmente negativo, observemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_a^+<\tau_0^-\}}\right] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_a^+<\tau_0^-\}}\middle|\mathcal{F}_{\tau_a^+}\right]\right]\\
&= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{\{\tau_a^+<\tau_0^-\}}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\left(\tau_0^- - \tau_a^+\right)}\middle|\mathcal{F}_{\tau_a^+}\right]\right]\\
&= \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+}\mathbb{1}_{\{\tau_a^+<\tau_0^-\}}\right]\mathbb{E}_a\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\right].
\end{aligned}$$

Utilizando *(ii)* y (2.2),

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_0^-<\tau_a^+\}}\right]\\
&= Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\phi(q)}W^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}\left(Z^{(q)}(a) - \frac{q}{\phi(q)}W^{(q)}(a)\right)\\
&= Z^{(q)}(x) - Z^{(q)}(a)\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}
\end{aligned}$$

obtenemos nuestro resultado. Para el caso $q = 0$ tomamos límites haciendo q tender a cero por la derecha.

$\square$

Enunciamos y demostramos el resultado visto en la demostración del Teorema 2.1 (ii) como corolario a continuación.

Corolario 2.2. *Para toda $q > 0$ y $x \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\left(-\underline{X}_{e_q} \in dx\right) = \frac{q}{\phi(q)} W^{(q)}(dx) - qW^{(q)}(x)dx.$$

Demostración. Sea $\beta > 0$, demostraremos el resultado calculando sus transformadas de Laplace. Por un lado,

$$\int_0^\infty e^{-\beta x}\mathbb{P}\left(-\underline{X}_{\mathbf{e}_q} \in dx\right) = \mathbb{E}\left[e^{\beta \underline{X}_{\mathbf{e}_q}}\right] = \frac{q}{\phi(q)} \frac{\phi(q) - \beta}{q - \psi(\beta)},$$

por Corolario 1.35. Por otra parte, por inciso (i) del Teorema 2.1 y (2.5),

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\beta x}\left(\frac{q}{\phi(q)} W^{(q)}(dx) - qW^{(q)}(x)dx\right) &= \frac{q}{\phi(q)}\int_0^\infty e^{-\beta x}W^{(q)}(dx) + \frac{q}{q-\psi(\beta)} \\
&= \frac{q}{\phi(q)} \frac{\beta}{\psi(\beta) - q} + \frac{q}{q - \psi(\beta)} \\
&= \frac{q}{q-\psi(\beta)}\left(1 - \frac{\beta}{\phi(q)}\right) \\
&= \frac{q}{\phi(q)} \frac{\phi(q) - \beta}{q - \psi(\beta)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la unicidad de la transformada de Laplace concluimos nuestro resultado. $\square$

2.1. La función q–escala $W^{(q)}$

En esta sección exploramos propiedades de la función $W^{(q)}$, y por consecuencia también de la función $Z^{(q)}$. En particular nos interesará cuando $W^{(q)}$ es diferenciable y los valores de $W^{(q)}(0+)$ y $W^{(q)\prime}(0+)$ cuando este último existe.

Para ver si $W^{(q)}$ es diferenciable usamos el siguiente lema.

Lema 2.3. *Para toda $q \geq 0$, la función $W^{(q)}$ tiene derivadas por la izquierda y por la derecha en $(0, \infty)$, las cuales son iguales si y solo si la medida $n(\bar{\epsilon} \in dx)$ no tiene átomos. En tal caso, diremos que $W^{(q)} \in C^1(0, \infty)$.*

Demostración. Como $W^{(q)}(x) := e^{\phi(q)x}W_{\phi(q)}(x)$, basta demostrar el caso $q = 0$. Por (2.6), sabemos que

$$W(x) = W(a) \exp\left\{-\int_x^a n(\bar{\epsilon} > t)dt\right\},$$

para $a > x$. De aquí se sigue que las primeras derivadas por la izquierda y por la derecha existen y están dadas por

$$W'_{-}(x) = n(\bar{\epsilon} \geq x)W(x) \quad \text{y} \quad W'_{+}(x) = n(\bar{\epsilon} > x)W(x).$$

Como W es continua, W' existe si y solo si $n(\bar{\epsilon} \in dx)$ no tiene átomos. En tal caso es obvio que $W \in C^1(0,\infty)$. $\square$

El siguiente lema nos da otros criterios suficientes para que la función $W^{(q)}$ sea $C^1(0,\infty)$.

Lema 2.4. *Para toda $q \geq 0$, la función de escala $W^{(q)}$ es $C^1(0,\infty)$ si y solo si al menos uno de los siguientes criterios se cumple:*

(i) X no es de variación acotada,

(ii) La función $\overline{\Pi}(x) := \Pi(-\infty,-x)$ es continua; es decir, Π no tiene átomos.

En particular, un resultado más fuerte para que $W^{(q)}$ sea $C^2(0,\infty)$ es el siguiente.

Teorema 2.5. *Supongamos que $\sigma > 0$, entonces para toda $q \geq 0$, $W^{(q)} \in C^2(0,\infty)$.*

Se omiten las demostraciones de estos últimos dos resultados debido a que van más allá del alcance de este trabajo.

Ahora para averiguar el comportamiento de la función $W^{(q)}$ en el cero hacemos referencia al siguiente lema.

Lema 2.6. *Para toda $q \geq 0$ se cumple que,*

$$W^{(q)}(0+) = \begin{cases} 0 & \textit{si } X \textit{ tiene variación no acotada,} \\ \frac{1}{d} & \textit{si } X \textit{ tiene variación acotada,} \end{cases}$$

donde $d > 0$ es la deriva dada por (1.13).

Demostración. Notemos que para $q > 0$, por (2.5),

$$\begin{aligned} W^{(q)}(0+) &= W^{(q)}(0+) + \lim_{\beta\to\infty} \int_{(0,\infty)} e^{-\beta x} W^{(q)}(dx) \\ &= \lim_{\beta\to\infty} \int_{[0,\infty)} e^{-\beta x} W^{(q)}(dx) \\ &= \lim_{\beta\to\infty} \frac{\beta}{\psi(\beta)-q} \\ &= \lim_{\beta\to\infty} \frac{\beta-\phi(q)}{\psi(\beta)-q}, \end{aligned}$$

donde $\displaystyle\lim_{\beta\to\infty} \frac{\phi(q)}{\psi(\beta)-q} = 0$ pues $\psi(\infty) = \infty$. Luego, por Corolario 1.35,

$$\begin{aligned} W^{(q)}(0+) &= \frac{\phi(q)}{q} \lim_{\beta\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{\beta \underline{X}_{\mathbf{e}_q}}\right] \\ &= \frac{\phi(q)}{q} \lim_{\beta\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{\beta \underline{X}_{\mathbf{e}_q}} \mathbb{1}_{\left\{\underline{X}_{\mathbf{e}_q}=0\right\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{\beta \underline{X}_{\mathbf{e}_q}} \mathbb{1}_{\left\{\underline{X}_{\mathbf{e}_q}<0\right\}}\right] \\ &= \frac{\phi(q)}{q} \mathbb{P}\left(\underline{X}_{\mathbf{e}_q} = 0\right). \end{aligned}$$

Notemos que, para toda $q \geq 0$, $\mathbb{P}\left(\underline{X}_{\mathbf{e}_q} = 0\right) = 0$ si y solo si 0 es regular para $(-\infty, 0)$ por Definición 1.15, lo cual ocurre si y solo si X tiene variación no acotada por el Teorema 1.37. Supongamos que X tiene variación acotada, entonces tenemos que, por Proposición 1.38,

$$\begin{aligned} W^{(q)}(0+) &= \lim_{\beta\to\infty} \frac{\beta}{\psi(\beta) - q} \\ &= \lim_{\beta\to\infty} \frac{\beta}{\psi(\beta)} \\ &= \frac{1}{d}. \end{aligned}$$

Por lo anterior, se cumple que $W(0+) = W^{(q)}(0+)$ para toda $q \geq 0$. Por lo tanto, obtenemos nuestro resultado para toda $q \geq 0$. □

Por otra parte, para averiguar el comportamiento de $W^{(q)\prime}(0+)$ necesitamos los siguientes resultados.

Teorema 2.7. *Sea f una función acotada en $(0, \infty)$ tal que $f(0+)$ exista y*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

sea su transformada de Laplace. Entonces,

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0+).$$

Demostración. Haciendo un cambio de variable notemos que

$$\begin{aligned} sF(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) s dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} f\left(\frac{t}{s}\right) dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto, haciendo s tender a infinito, por Teorema de Convergencia Dominada concluimos nuestro resultado. □

Proposición 2.8. *Para todo proceso de Lévy X con exponente característico $\Psi(\theta)$ cumple que*

$$\lim_{|\theta|\to\infty} \frac{\Psi(\theta)}{\theta^2} = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Demostración. Notemos que claramente

$$\lim_{|\theta|\to\infty} \frac{ic\theta + \frac{\sigma^2\theta^2}{2}}{\theta^2} = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Por lo tanto, por la definición de exponente característico dada por (1.2), basta demostrar que

$$\lim_{|\theta|\to\infty} \frac{1}{\theta^2} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}}\right) \Pi(dx) = 0.$$

Usando el hecho de que $|1-\cos(x)| \leq 2(1 \wedge x^2)$, $|x-\sin(x)| \leq 2(|x| \wedge |x|^3)$ y que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, notemos que para $|\theta|$ suficientemente grande

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1-e^{i\theta x}+i\theta x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}}}{\theta^2}\right| &\leq \left|\frac{1-\cos(\theta x)}{\theta^2}\right| + \left|\frac{\theta x - \sin(\theta x)}{\theta^2}\right| \\
&\leq 2\left(\frac{1}{\theta^2} \wedge x^2\right) + 2\left(\left|\frac{x}{\theta}\right| \wedge |\theta||x|^3\right) \\
&\leq 2\left(1 \wedge x^2\right) + 2\left|\frac{x}{\theta}\right| \\
&\leq 4(1 \wedge x^2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por Teorema de Convergencia Dominada, como

$$\lim_{|\theta|\to\infty} \left|\frac{1-e^{i\theta x}+i\theta x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}}}{\theta^2}\right| = 0$$

concluimos nuestro resultado. □

Corolario 2.9. *Para todo proceso de Lévy espectralmente negativo X con exponente de Laplace ψ cumple que*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda^2} = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Finalmente, con estos resultados, podemos enunciar el siguiente lema.

Lema 2.10. *Sea $\lambda = \Pi(-\infty, 0)$, entonces para toda $q \geq 0$ se cumple que*

$$W^{(q)'}(0+) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma^2} & \textit{cuando } \sigma > 0, \\ \frac{\lambda+q}{d^2} & \textit{cuando } \sigma = 0 \textit{ y } \lambda < \infty, \\ \infty & \textit{cuando } \sigma = 0 \textit{ y } \lambda = \infty. \end{cases}$$

Demostración. Por (2.5) tenemos que para $\theta > \phi(q)$,

$$W^{(q)}(0+) + \int_0^\infty e^{-\theta x} W^{(q)'}(x)dx = \frac{\theta}{\psi(\theta) - q}.$$

Por otra parte, por Teorema 2.7 y la igualdad anterior,

$$\begin{aligned}
W^{(q)'}(0+) &= \lim_{\theta\to\infty} \theta \int_0^\infty e^{-\theta x} W^{(q)'}(x)dx \\
&= \lim_{\theta\to\infty} \left(\frac{\theta^2}{\psi(\theta)-q} - \theta W^{(q)}(0+)\right).
\end{aligned}$$

Si X no es de variación acotada, entonces $\sigma > 0$ o $\lambda = \infty$, y $W^{(q)}(0+) = 0$ por Lema 2.6. En este caso, por Corolario 2.9 concluimos que

$$W^{(q)'}(0+) = \lim_{\theta\to\infty} \frac{\theta^2}{\psi(\theta)-q} = \lim_{\theta\to\infty} \frac{\theta^2}{\psi(\theta)} = \frac{2}{\sigma^2},$$

donde el valor anterior es infinito si $\sigma = 0$.

Si X es de variación acotada, entonces $\sigma = 0$ y $W^{(q)}(0+) = \frac{1}{d}$ por Lema 2.6. En este caso, definiendo la Transformada de Laplace de $\Pi(-\infty, -x)$,

$$I(\theta) := \int_{(-\infty,0)} e^{\theta x}\Pi(-\infty, x)dx = \int_0^\infty e^{-\theta x}\Pi(-\infty, -x)dx,$$

veamos que por Proposición 1.38,

$$\begin{aligned} W^{(q)\prime}(0+) &= \lim_{\theta\to\infty}\left(\frac{\theta^2}{\psi(\theta) - q} - \theta W^{(q)}(0+)\right) \\ &= \lim_{\theta\to\infty}\left(\frac{\theta^2}{d\theta - \theta I(\theta) - q} - \frac{\theta}{d}\right) \\ &= \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{\theta I(\theta) + q}{d - I(\theta) - \frac{q}{\theta}}\right) \\ &= \frac{\lambda + q}{d^2}, \end{aligned}$$

donde se cumple que $\lim_{\theta\to\infty} I(\theta) = 0$ y $\lim_{\theta\to\infty}\theta I(\theta) = \Pi(-\infty, 0) = \lambda$ por Teorema 2.7. Si $\lambda = \infty$, entonces $W^{(q)\prime}(0+) = \infty$. □

2.2. Medidas Resolventes

En esta sección damos un ejemplo de como las funciones escala se utilizan para calcular medidas resolventes asociadas a los problemas de salida vistos anteriormente.

Así durante esta sección fijamos $a > 0$ y definimos

$$\tau = \tau_a^+ \wedge \tau_0^-.$$

Para toda $x \in [0, a]$, A Boreliano de $[0, a)$ y B Boreliano de $(-\infty, 0)$ nos interesa calcular

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x\left(X_\tau \in B, X_{\tau^-} \in A\right) \\ &= \mathbb{E}_x\left[\int_{[0,\infty)}\int_{(-\infty,0)} \mathbb{1}_{\{\overline{X}_{t^-}\le a, \underline{X}_{t^-}\ge 0, X_{t^-}\in A\}}\mathbb{1}_{\{y\in B - X_{t^-}\}}N(dt\times dy)\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\Pi(B - X_t)\mathbb{1}_{\{X_t\in A\}}dt\right] \\ &= \int_A \Pi(B-y)U(a,x,dy), \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde se utilizó que N es la medida aleatoria Poisson asociada a los saltos de X y el Teorema 1.10, y donde

$$U(a, x, dy) := \int_0^\infty \mathbb{P}_x\left(X_t \in dy, \tau > t\right)dt.$$

La función anterior es llamada la **medida resolvente** de X que muere al salir de $[0, a]$ iniciando en x. También es llamada la medida **potencial**. Aún más general, podemos trabajar con la medida **q-resolvente**, donde

$$U^{(q)}(a, x, dy) := \int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{P}_x\left(X_t \in dy, \tau > t\right)dt,$$

para toda $q \geq 0$, con la conveniencia de que $U^{(0)} = U$. Si, para toda $x \in [0, a]$, existe una densidad de $U^{(q)}(a, x, dy)$ con respecto a la medida de Lebesgue, entonces la llamaremos la **densidad resolvente** y la denotaremos por $u^{(q)}(a, x, y)$ (con $u^{(0)} = u$).

Teorema 2.11. *Supongamos que, para $q \geq 0$, la medida q-resolvente $U^{(q)}(a, x, dy)$ es de un proceso de Lévy espectralmente negativo que muere al salir de $[0, a]$ donde $x, y \in [0, a]$. Entonces tiene densidad $u^{(q)}(a, x, y)$ dada por*

$$u^{(q)}(a, x, y) = \frac{W^{(q)}(x) W^{(q)}(a - y)}{W^{(q)}(a)} - W^{(q)}(x - y).$$

Demostración. Primero, para toda $x, y \geq 0$ y $q > 0$, definimos

$$\begin{aligned}
R^{(q)}(x, dy) :&= \int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}_x \left(X_t \in dy, \tau_0^- > t \right) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}_x \left(X_t \in dy, \underline{X}_t \geq 0 \right) dt \\
&= \frac{1}{q} \mathbb{P}_x \left(X_{\mathbf{e}_q} \in dy, \underline{X}_{\mathbf{e}_q} \geq 0 \right) \\
&= \frac{1}{q} \mathbb{P} \left(X_{\mathbf{e}_q} \in dy - x, \underline{X}_{\mathbf{e}_q} \geq -x \right),
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{e}_q$ es una variable aleatoria exponencial independiente de X de parámetro $q > 0$. En otras palabras, $R^{(q)}$ es la medida q-resolvente del proceso X que muere al salir de $[0, \infty)$. Usando que $X_{\mathbf{e}_q} - \underline{X}_{\mathbf{e}_q}$ es independiente de $-\underline{X}_{\mathbf{e}_q}$ por Proposición 1.33 obtenemos que

$$\begin{aligned}
R^{(q)}(x, dy) &= \frac{1}{q} \mathbb{P} \left((X_{\mathbf{e}_q} - \underline{X}_{\mathbf{e}_q}) + \underline{X}_{\mathbf{e}_q} \in dy - x, -\underline{X}_{\mathbf{e}_q} \leq x \right) \\
&= \int_{[x-y, x]} \frac{1}{q} \mathbb{P} \left(-\underline{X}_{\mathbf{e}_q} \in dz \right) \mathbb{P} \left(X_{\mathbf{e}_q} - \underline{X}_{\mathbf{e}_q} \in dy - x + z \right).
\end{aligned}$$

Por Lema de Dualidad, $X_{\mathbf{e}_q} - \underline{X}_{\mathbf{e}_q}$ es igual en distribución a $\overline{X}_{\mathbf{e}_q}$ que a su vez es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\phi(q)$ por Corolario 1.32. Además, ya conocemos la ley de $-\underline{X}_{\mathbf{e}_q}$ por Corolario 2.2. Por lo tanto,

$$R^{(q)}(x, dy) = \left\{ \int_{[x, y-x]} \left(\frac{1}{\phi(q)} W^{(q)}(dz) - W^{(q)}(z) dz \right) \phi(q) e^{-\phi(q)(y-x+z)} \right\} dy.$$

Notemos que por integración por partes

$$\begin{aligned}
\int_{[x, y-x]} \phi(q) e^{-\phi(q)(y-x+z)} W^{(q)}(z) dz = &-W^{(q)}(z) e^{-\phi(q)(y-x+z)} |_{x-y}^{x} \\
&+ \int_{[x, y-x]} e^{-\phi(q)(y-x+z)} W^{(q)}(dz).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
R^{(q)}(x,dy) &= \left\{ \int_{[x,y-x]} \left(\frac{1}{\phi(q)} W^{(q)}(dz) - W^{(q)}(z)dz \right) \phi(q) e^{-\phi(q)(y-x+z)} \right\} dy \\
&= \left\{ W^{(q)}(z)\ e^{-\phi(q)(y-x+z)} \Big|_{x-y}^{x} \right\} dy \\
&= \left\{ W^{(q)}(x) e^{-\phi(q)y} - W^{(q)}(x-y) \right\} dy
\end{aligned}
$$

Entonces, existe una densidad $r^{(q)}(x,y)$ para la medida $R^{(q)}(x,dy)$ dada por

$$
r^{(q)}(x,y) = e^{-\phi(q)y} W^{(q)}(x) - W^{(q)}(x-y).
$$

Regresando a $U^{(q)}(a,x,dy)$, utilizando que $t < \tau$ si y sólo si $\underline{X}_t \geq 0$ y $\overline{X}_t \leq a$, notemos que

$$
\begin{aligned}
qU^{(q)}(a,x,dy) &= \int_0^\infty q e^{-qt} \mathbb{P}_x \left(X_t \in dy, \tau > t \right) dt \\
&= \int_0^\infty q e^{-qt} \mathbb{P}_x \left(X_t \in dy, \underline{X}_t \geq 0, \overline{X}_t \leq a \right) dt \\
&= \mathbb{P}_x \left(X_{\mathbf{e}_q} \in dy, \underline{X}_{\mathbf{e}_q} \geq 0, \overline{X}_{\mathbf{e}_q} \leq a \right).
\end{aligned}
$$

Por otra parte, utilizando que $\left\{ \underline{X}_t \geq 0, \overline{X}_t > a \right\} = \left\{ \underline{X}_t \geq 0, X_\tau = a, \tau < t \right\}$ para toda $t \geq 0$ y propiedad fuerte de Markov,

$$
\begin{aligned}
qU^{(q)}(a,x,dy) &= \mathbb{P}_x \left(X_{\mathbf{e}_q} \in dy, \underline{X}_{\mathbf{e}_q} \geq 0, \overline{X}_{\mathbf{e}_q} \leq a \right) \\
&= \mathbb{P}_x \left(X_{\mathbf{e}_q} \in dy, \underline{X}_{\mathbf{e}_q} \geq 0 \right) - \mathbb{P}_x \left(X_{\mathbf{e}_q} \in dy, \underline{X}_{\mathbf{e}_q} \geq 0, \overline{X}_{\mathbf{e}_q} > a \right) \\
&= \mathbb{P}_x \left(X_{\mathbf{e}_q} \in dy, \underline{X}_{\mathbf{e}_q} \geq 0 \right) - \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{X_\tau = a, \tau < \mathbf{e}_q\}} \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\left\{ X_{\mathbf{e}_q} \in dy, \underline{X}_{\mathbf{e}_q} \geq 0 \right\}} \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \right] \\
&= \mathbb{P}_x \left(X_{\mathbf{e}_q} \in dy, \underline{X}_{\mathbf{e}_q} \geq 0 \right) - \mathbb{P}_x \left(X_\tau = a, \tau < \mathbf{e}_q \right) \mathbb{P}_a \left(X_{\mathbf{e}_q} \in dy, \underline{X}_{\mathbf{e}_q} \geq 0 \right),
\end{aligned}
$$

donde ya hemos calculado la primera y tercera probabilidad dadas por $qR^{(q)}(x,dy)$ y $qR^{(q)}(a,dy)$ respectivamente mientras que la segunda probabilidad observemos que por integración por partes y (2.2),

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_x \left(X_\tau = a, \tau < \mathbf{e}_q \right) &= \int_0^\infty \mathbb{P}_x \left(X_\tau = a, \tau < t \right) q e^{-qt} dt \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}_x \left(\tau_a^+ < \tau_0^-, \tau_a^+ < t \right) q e^{-qt} dt \\
&= -e^{-qt}\ \mathbb{P}_x \left(\tau_a^+ < \tau_0^-, \tau_a^+ < t \right) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}_x \left(\tau_a^+ < \tau_0^-, \tau_a^+ \in dt \right) \\
&= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_a^+} \mathbb{1}_{\left\{ \tau_a^+ < \tau_0^- \right\}} \right] \\
&= \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}.
\end{aligned}
$$

Concluimos que

$$
U^{(q)}(a,x,dy) = R^{(q)}(x,dy) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)} R^{(q)}(a,dy)
$$

con densidad

$$\begin{aligned}
u^{(q)}(a,x,y) &= r^{(q)}(x,y) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)} r^{(q)}(a,y) \\
&= e^{-\phi(q)y} W^{(q)}(x) - W^{(q)}(x-y) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)} \left(e^{-\phi(q)y} W^{(q)}(a) - W^{(q)}(a-y) \right) \\
&= \frac{W^{(q)}(x) W^{(q)}(a-y)}{W^{(q)}(a)} - W^{(q)}(x-y).
\end{aligned}$$

Para el caso $q = 0$ aplicamos límite y usando que la expresión anterior es analítica, y por ende continua en q para toda x, a, y, obtenemos el resultado por convergencia monótona para toda $q \geq 0$. □

Notemos que de la prueba anterior podemos rescatar dos resultados de interés.

Corolario 2.12. *Para toda $q \geq 0$, la medida q-resolvente de un proceso de Lévy espectralmente negativo que muere al salir de $[0, \infty)$ tiene densidad dada por*

$$r^{(q)}(x,y) = e^{-\phi(q)y} W^{(q)}(x) - W^{(q)}(x-y),$$

para toda $x, y \geq 0$.

Proposición 2.13. *Sea X un proceso de Lévy espectralmente negativo con exponente de Laplace ψ. Entonces, para toda $y, q \geq 0$,*

$$\lim_{a \to \infty} \frac{W^{(q)}(a-y)}{W^{(q)}(a)} = e^{-\phi(q)y}.$$

Demostración. Utilizando el Teorema 2.11 y el Corolario 2.12 vemos que, por definición de las medidas resolventes, para toda $x, y, q \geq 0$, $\lim_{a \to \infty} u^{(q)}(a,x,y) = r^{(q)}(x,y)$. Así, obtenemos el resultado. □

Ahora definamos la medida q-resolvente de X sin muerte como

$$\Theta^{(q)}(x,dy) = \int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}_x \left(X_t \in dy \right) dt,$$

para toda $x, y \in \mathbb{R}$. Notemos que por la homogeneidad en el espacio de X, $\Theta^{(q)}(x,dy) = \Theta^{(q)}(0, dy - x)$. Si $\Theta^{(q)}(x,dy)$ tiene densidad, entonces la escribiremos de la forma $\theta^{(q)}(y-x)$ para alguna función $\theta^{(q)}$.

Corolario 2.14. *Para $q > 0$, la densidad q-resolvente de un proceso de Lévy espectralmente negativo esta dada por*

$$\theta^{(q)}(z) = \phi'(q) e^{-\phi(q)z} - W^{(q)}(-z),$$

para toda $z \in \mathbb{R}$.

Demostración. Notemos que el proceso no muere en $[0, \infty)$ si iniciamos en un punto x arbitrariamente grande. Por lo tanto, utilizando el Corolario 2.12 con $y = x + z$ y la homogeneidad en el espacio,

$$\theta^{(q)}(z) = \lim_{x \to \infty} r^{(q)}(x, x+z) = \lim_{x \to \infty} e^{-\phi(q)(x+z)} W^{(q)}(x) - W^{(q)}(-z).$$

Por otra parte recordemos que $W^{(q)}(x) = e^{\phi(q)x} W_{\phi(q)}(x)$, donde

$$\int_0^\infty e^{-\theta x} W_{\phi(q)}(x)dx = \frac{1}{\psi_{\phi(q)}(\theta)}.$$

Por lo tanto,

$$\theta^{(q)}(z) = e^{-\phi(q)z} W_{\phi(q)}(\infty) - W^{(q)}(-z).$$

Como $\left(X, \mathbb{P}^{\phi(q)}\right)$ tiende a infinito, entonces $W_{\phi(q)}(\infty) < \infty$. Luego, por integración por partes, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \theta e^{-\theta x} W_{\phi(q)}(x)dx &= -e^{-\theta x} W_{\phi(q)}(x)|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\theta x} W_{\phi(q)}(dx) \\ &= W_{\phi(q)}(0) + \int_0^\infty e^{-\theta x} W_{\phi(q)}(dx).\end{aligned}$$

Por lo tanto, haciendo θ tender a cero observemos que

$$\begin{aligned}W_{\phi(q)}(\infty) &= W_{\phi(q)}(\infty) - W_{\phi(q)}(0) + W_{\phi(q)}(0) \\ &= \int_0^\infty W_{\phi(q)}(dx) + W_{\phi(q)}(0) \\ &= \int_0^\infty \lim_{\theta \to 0+} e^{-\theta x} W_{\phi(q)}(dx) + W_{\phi(q)}(0) \\ &= \lim_{\theta \to 0+} \int_0^\infty e^{-\theta x} W_{\phi(q)}(dx) + W_{\phi(q)}(0) \\ &= \lim_{\theta \to 0+} \int_0^\infty \theta e^{-\theta x} W_{\phi(q)}(x)dx \\ &= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta}{\psi_{\phi(q)}(\theta)} \\ &= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta}{\psi(\theta + \phi(q)) - q} \\ &= \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{\psi'(\theta + \phi(q))} \\ &= \frac{1}{\psi'(\phi(q))} \\ &= \phi'(q),\end{aligned}$$

donde se utilizo que como $\psi(\phi(q)) = q$, entonces $\psi'(\phi(q))\phi'(q) = 1$. Con esto concluimos nuestro resultado. □

Finalmente recordando nuestra probabilidad inicial de interés (2.7) podemos enunciar el siguiente resultado conocido como la medida de Gerber-Shiu para procesos de Lévy espectralmente negativos.

Proposición 2.15. *Para toda $y > 0$ y $z < 0$,*

$$\mathbb{P}_x \left(X_{\tau_0^-} \in dz, X_{\tau_0^- -} \in dy \right) = \Pi(dz - y) \left(e^{-\phi(0)y} W(x) - W(x - y) \right) dy$$

Demostración. Sea $a > 0$, entonces para $x \in [0, a]$, $y \in (0, a]$ y $z \in (-\infty, 0)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\left(X_\tau \in dz, X_{\tau^-} \in dy\right) &= \Pi(dz - y)U(a, x, dy)\\ &= \Pi(dz - y)\left(\frac{W(x)W(a-y)}{W(a)} - W(x-y)\right)dy.\end{aligned}$$

Haciendo a tender a infinito, por la Proposición 2.13, concluimos que

$$\mathbb{P}_x\left(X_{\tau_0^-} \in dz, X_{\tau_0^- -} \in dy\right) = \Pi(dz - y)\left(e^{-\phi(0)y}W(x) - W(x-y)\right)dy.$$

$\square$

Capítulo 3

El modelo de Lévy de riesgo con cambio de régimen basado en el declive

3.1. Preliminares

Regresando a nuestro interés principal, el cual es modelar el capital de una compañia mediante un proceso de Lévy espectralmente negativo, se ha propuesto utilizar el siguiente proceso.

Definición 3.1. *Sea $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ que satisface las condiciones usuales (completa y continua por la derecha). Se define el proceso* ***drawdown*** *o* ***"declive"*** *$Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ de X como:*

$$Y_t = \overline{X}_t - X_t,$$

donde $\overline{X}_t = \sup_{0\leq s\leq t} X_s$.

Este proceso se ha utilizado para medir los declives del valor de un activo desde un punto histórico. Además, es uno de los procesos más utilizados para medir el rendimiento del manejo del capital. Debido a esto se han estudiado como controlar y optimizar los riesgos de un declive.

En particular, un tiempo de paro de interés para este proceso declive es $T_a := \text{ínf}\,\{t \geq 0 : Y_t > a\}$, para una constante $a > 0$; es decir, el primer tiempo cuando el declive sobrepasa el nivel a. Un resultado importante asociado a este tiempo de paro es el de su transformada de Laplace enunciado a continuación.

Teorema 3.2. *Para toda $a > 0$ se cumple que T_a es finito $\mathbb{P}$-c.s. y para toda $q \geq 0$,*

$$\mathbb{E}\left[e^{-qT_a}\right] = Z^{(q)}(a) - q\frac{W^{(q)}(a)^2}{W_+^{(q)\prime}(a)},$$

donde $W_+^{(q)\prime}$ denota la derivada por la derecha.

La demostración de este resultado se encuentra en [6].

Otro resultado que nos será de utilidad más adelante es el siguiente.

Teorema 3.3. *Para toda $a > 0$ y $q \geq 0$ definimos*

$$\lambda(a,q) := \frac{W_+^{(q)\prime}(a)}{W^{(q)}(a)}.$$

La medida q-resolvente de Y que muere al salir de $[0,a]$ cumple que

$$R_a^{(q)}(dy) := \mathbb{E}\left[\int_0^{T_a} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Y_t \in dy\}}dt\right] = \left[\frac{W^{(q)}(dy)}{\lambda(a,q)} - W^{(q)}(y)dy\right], \quad y \in [0,a].$$

La transformada de Laplace de T_a en el evento $\{Y_{T_a} = a\}$ cumple que

$$\Delta^{(q)}(a) := \mathbb{E}\left[e^{-qT_a}\mathbb{1}_{\{Y_{T_a}=a\}}\right] = \frac{\sigma^2}{2}\left[W^{(q)\prime}(a) - \frac{W^{(q)\prime\prime}(a)}{\lambda(a,q)}\right].$$

La demostración de este teorema se encuentra en [7].

Utilizando $\overline{G}_t = \sup\{s \leq t : Y_s = 0\}$, el último tiempo que el proceso X alcanzó su supremo, podemos enunciar el resultado principal y el más importante asociado al proceso declive, conocido como la distribución de la séxtupla $\left(T_a, \overline{G}_{T_a}, \overline{X}_{T_a}, \underline{X}_{T_a}, Y_{T_a^-}, Y_{T_a} - a\right)$, el cual es el que presenta a continuación.

Teorema 3.4. *Sean $X_0 = x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. Definimos los eventos*

$$\begin{aligned} A &= \left\{\underline{X}_{T_a} \geq u, \overline{X}_{T_a} \in dv, Y_{T_a^-} \in dy, Y_{T_a} - a \in dh\right\} \quad y \\ B &= \left\{\underline{X}_{T_a} \geq u, \overline{X}_{T_a} \in dv, Y_{T_a} = a\right\}, \end{aligned}$$

donde u, v, y y h satisfacen:

$$u \leq x, \quad y \in [0,a], \quad v \geq x \vee (u+a) \quad y \quad h \in (0, v-u-a].$$

Entonces, para $q, r \geq 0$ las siguientes identidades se cumplen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\left[e^{-qT_a - r\overline{G}_{T_a}}\mathbb{1}_A\right] &= \frac{W^{(q+r)}((x-u)\wedge a)}{W^{(q+r)}(a)} F_{q+r,q,a}(v - (x \vee (u+a)))R_a^{(q)}(dy)\Pi(y-a-dh) \\ \mathbb{E}_x\left[e^{-qT_a - r\overline{G}_{T_a}}\mathbb{1}_B\right] &= \frac{W^{(q+r)}((x-u)\wedge a)}{W^{(q+r)}(a)} F_{q+r,q,a}(v - (x \vee (u+a)))\Delta^{(q)}(a), \end{aligned}$$

donde $F_{p,q,a}(y) := \lambda(a,q)e^{-\lambda(a,p)y}$.

La demostración de este resultado se omite debido a que va más allá del alcance de este trabajo, pero se puede consultar en [3].

En particular, el resultado que nos será de utilidad más adelante es la distribución de la tripleta $\left(T_a, \overline{X}_{T_a}, Y_{T_a}\right)$ el cual es el siguiente.

Corolario 3.5. *Para $q, x \geq 0$ y $y \geq a$,*

$$\mathbb{E}\left[e^{-qT_a}\mathbb{1}_{\left\{Y_{T_a}\in dy, \overline{X}_{T_a}\in dx\right\}}\right] = \lambda(a,q)e^{-\lambda(a,q)x}dx\ F_{Y_{T_a}}^{(q)}(dy),$$

donde

$$\begin{aligned}
F^{(q)}_{Y_{T_a}}(dy) &:= \mathbb{E}\left[e^{-qT_a}\mathbb{1}_{\{Y_{T_a}\in dy\}}\right] \\
&= \int_0^a \left(\frac{W^{(q)\prime}(z)}{\lambda(a,q)} - W^{(q)}(z)\right)\Pi(z-dy)dz \\
&+ \frac{W^{(q)}(0+)}{\lambda(a,q)}\Pi(-dy) \\
&+ \frac{\sigma^2}{2}\left(W^{(q)\prime}(a) - \frac{W^{(q)\prime\prime}(a)}{\lambda(a,q)}\right)\delta_a(dy),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

y $\delta_a(\cdot)$ es la delta de Dirac concentrada en a.

Más aún, dos resultados que serán de utilidad más adelante los enunciamos a continuación.

Proposición 3.6. *Para $q, x \geq 0$,*

$$\mathbb{E}\left[e^{-q\tau_x^+}\mathbb{1}_{\{\overline{X}_{T_a}>x\}}\right] = e^{-\lambda(a,q)x}$$

La demostración de este resultado se encuentra en [8].

Proposición 3.7. *Para toda $z > a$,*

$$W^{(q)}(z) - \int_{[a,z)} W^{(q)}(z-y)F^{(q)}_{Y_{T_a}}(dy) = \frac{W^{(q)\prime}(z)}{\lambda(a,q)}.$$

Demostración. Utilizando la transformada de Laplace observemos que para $s \geq 0$ y $z > a$,

$$\begin{aligned}
&\int_a^\infty e^{-sz}\left(W^{(q)}(z) - \int_{[a,z)} W^{(q)}(z-y)F^{(q)}_{Y_{T_a}}(dy)\right)dz \\
&= \int_a^\infty e^{-sz}W^{(q)}(z)dz - \int_a^\infty \left(\int_y^\infty e^{-sz}W^{(q)}(z-y)dz\right)F^{(q)}_{Y_{T_a}}(dy) \\
&= \int_a^\infty e^{-sz}W^{(q)}(z)dz + \frac{1}{q-\psi(s)}\int_a^\infty e^{-sy}F^{(q)}_{Y_{T_a}}(dy) \\
&= \int_a^\infty e^{-sz}W^{(q)}(z)dz + \frac{1}{q-\psi(s)}\mathbb{E}\left[e^{-qT_a - sY_{T_a}}\right].
\end{aligned}$$

Por otro lado, por Avram [6],

$$\mathbb{E}\left[e^{-qT_a-sY_{T_a}}\right] = \left(1 - \frac{s}{\lambda(a,q)}\right)\left(1 + (q-\psi(s))\int_0^a e^{-sz}W^{(q)}(z)dz\right) - (q-\psi(s))e^{-as}\frac{W^{(q)}(a)}{\lambda(a,q)}.$$

Sustituyendo obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_a^\infty e^{-sz}\left(W^{(q)}(z)-\int_{[a,z)}W^{(q)}(z-y)F^{(q)}_{Y_{T_a}}(dy)\right)dz\\
&=\int_a^\infty e^{-sz}W^{(q)}(z)dz+\left(1-\frac{s}{\lambda(a,q)}\right)\left(-\int_a^\infty e^{-sz}W^{(q)}(z)dz\right)-e^{-as}\frac{W^{(q)}(a)}{\lambda(a,q)}\\
&=\frac{1}{\lambda(a,q)}\left(\int_a^\infty se^{-sz}W^{(q)}(z)dz-e^{-as}W^{(q)}(a)\right)\\
&=\frac{1}{\lambda(a,q)}\int_a^\infty e^{-sz}W^{(q)\prime}(z)dz,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad fue por integración por partes. Por la unicidad de las transformadas de Laplace concluimos nuestro resultado. □

3.2. Resultados

Utilizando [4] analizaremos un nuevo modelo que consiste en cambiar como "manejamos" el capital dependiendo del declive.

Sea $X=\{X_t\}_{t\geq 0}$ el proceso del capital de la aseguradora en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},\mathbb{P})$ que satisface las condiciones usuales (completa y continua por la derecha) y $Y=\{Y_t\}_{t\geq 0}$ su respectivo proceso declive. Con este proceso declive, definimos un proceso estocástico auxiliar $Q=\{Q_t\}_{t\geq 0}$ que describirá la dinámica de este modelo entre dos regímenes: el régimen "sin riesgo" ($Q_t=1$) y el régimen "con riesgo" ($Q_t=2$). Para ello, utilizamos una constante fija $a>0$ que nos ayudará a decidir cuando cambiar de régimen de la siguiente manera:

$$Q_t=\begin{cases}1 & \text{si } \sup_{\overline{G}_t\leq s\leq t}Y_s<a,\\ 2 & \text{si } \sup_{\overline{G}_t\leq s\leq t}Y_s\geq a,\end{cases}$$

donde $\overline{G}_t=\sup\{s\leq t: Y_s=0\}$ es el último tiempo que X alcanzó su supremo.

Así, dependiendo del régimen, definimos el **modelo de Lévy de riesgo con cambio de régimen basado en el declive** como:

$$dX_t=\begin{cases}dX_t^1 & \text{si } Q_t=1,\\ dX_t^2 & \text{si } Q_t=2,\end{cases}$$

con $X_0=u>0$. Donde, X^1 y X^2 son dos procesos de Lévy espectralmente negativos definidos en nuestro espacio de probabilidad. Para cada proceso de Lévy X^k, $k=1,2$ denotamos a las siguientes expresiones como:

- (c_k,σ_k,Π_k), las tripletas características.
- ψ_k, los exponentes de Laplace.
- ϕ_k, las funciones inversas por la derecha de ψ_k.
- μ_k, las medias.

- $W_k^{(q)}$, las funciones q-escala.
- $Z_k^{(q)}$, las segundas funciones q-escala.

En particular definimos los siguientes tiempos de pasada

$$\tau_x^{k,+} = \text{ínf}\left\{t \geq 0 : X_t^k > x\right\} \quad \text{y} \quad \tau_x^{k,-} = \text{ínf}\left\{t \geq 0 : X_t^k < x\right\},$$

donde $k = 1, 2$ y omitimos el índice cuando nos referimos a los tiempos de pasada del proceso X:

$$\tau_x^+ = \text{ínf}\left\{t \geq 0 : X_t > x\right\} \quad \text{y} \quad \tau_x^- = \text{ínf}\left\{t \geq 0 : X_t < x\right\}.$$

Y, a partir de aquí, definimos

$$\lambda(a, q) := \frac{W_1^{(q)\prime}{}_+(a)}{W_1^{(q)}(a)}, \quad q \geq 0. \tag{3.2}$$

3.2.1. Problema de salida generalizado

Consideremos los siguientes tiempos de paro

$$\mathcal{T}_{x,k}^{+(-)} := \int_0^{\tau_x^{+(-)}} \mathbb{1}_{\{Q_t = k\}} dt,$$

es decir, los tiempos de ocupación en la región k ($k = 1, 2$) hasta los tiempos de pasada $\tau_x^{+(-)}$. En esta sección nos interesa encontrar las siguientes cantidades para $s, q \geq 0$ y $0 < u < b$:

$$\mathbb{E}_u\left[e^{-s\mathcal{T}_{b,1}^+ - q\mathcal{T}_{b,2}^+}\mathbb{1}_{\left\{\tau_b^+ < \tau_0^-\right\}}\right] \quad \text{y} \quad \mathbb{E}_u\left[e^{-s\mathcal{T}_{0,1}^- - q\mathcal{T}_{0,2}^-}\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^- < \tau_b^+\right\}}\right],$$

donde notemos que $\tau_x^{+(-)} = \mathcal{T}_{x,1}^{+(-)} + \mathcal{T}_{x,2}^{+(-)}$.

Definimos las **funciones de escala generalizadas** para $s, q \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$ como

$$\mathbf{W}_a^{(s,q)}(x) := W_1^{(s)}(x \wedge a) e^{\int_a^{x \vee a} C_{s,q}(z) dz}, \tag{3.3}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_a^{(s,q)}(x) := Z_1^{(s)}(x) &- \frac{W_1^{(s)}(x)}{W_1^{(s)}(x \vee a)}\left(Z_1^{(s)}(x \vee a) - Z_1^{(s)}(a) e^{\int_a^{x \vee a} C_{s,q}(z) dz}\right) \\ &- \frac{W_1^{(s)}(x)}{W_1^{(s)}(x \vee a)} \int_a^{x \vee a} e^{\int_y^{x \vee a} C_{s,q}(z) dz} D_{s,q}(y) dy,\end{aligned} \tag{3.4}$$

donde para $z > a$,

$$C_{s,q}(z) := \lambda(a, s)\left(1 - \int_{[a,z)} \frac{W_2^{(q)}(z - y)}{W_2^{(q)}(z)} F_{Y_{T_a}}^{(s)}(dy)\right), \tag{3.5}$$

y

$$D_{s,q}(z) := \lambda(a,s) \int_{[a,\infty)} \left(Z_2^{(q)}(z-y) - Z_2^{(q)}(z) \frac{W_2^{(q)}(z-y)}{W_2^{(q)}(z)} \right) F_{Y_{T_a}}^{(s)}(dy). \quad (3.6)$$

Por simplicidad, en caso de ser necesario, escribiremos $\mathbf{W}_a^{(q)} = \mathbf{W}_a^{(q,q)}$, $\mathbf{Z}_a^{(q)} = \mathbf{Z}_a^{(q,q)}$, $\mathbf{W}_a = \mathbf{W}_a^{(0)}$, $\mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_a^{(0)}$, $C_q = C_{q,q}$ y $D_q = D_{q,q}$.

Ahora, con las funciones de escala generalizadas, enunciamos los problemas de salida generalizados a continuación.

Teorema 3.8. *Para $s, q \geq 0$ y $0 < u < b$,*

$$\mathbb{E}_u \left[e^{-s\mathcal{T}_{b,1}^{+} - q\mathcal{T}_{b,2}^{+}} \mathbb{1}_{\left\{\tau_b^+ < \tau_0^-\right\}} \right] = \frac{\boldsymbol{W}_a^{(s,q)}(u)}{\boldsymbol{W}_a^{(s,q)}(b)}.$$

Demostración. Definamos

$$g(u) := \mathbb{E}_u \left[e^{-s\mathcal{T}_{b,1}^{+} - q\mathcal{T}_{b,2}^{+}} \mathbb{1}_{\left\{\tau_b^+ < \tau_0^-\right\}} \right], \quad 0 < u < b.$$

Primero consideremos el caso $a \leq u < b$. En este caso, $T_a \leq \tau_0^-$ c.s. ya que iniciando con un capital mayor a a primero debe de haber un declive mayor a a antes de tener capital negativo, así

$$g(u) = \mathbb{E}_u \left[e^{-s\mathcal{T}_{b,1}^{+} - q\mathcal{T}_{b,2}^{+}} \mathbb{1}_{\left\{T_a < \tau_b^+ < \tau_0^-\right\}} \right] + \mathbb{E}_u \left[e^{-s\mathcal{T}_{b,1}^{+} - q\mathcal{T}_{b,2}^{+}} \mathbb{1}_{\left\{\tau_b^+ < T_a\right\}} \right]. \quad (3.7)$$

Para la segunda esperanza, utilizando que $\overline{X}_t > x$ si y solo si $\tau_x^+ < t$, el hecho de que si $\tau_b^+ < T_a$ entonces $\mathcal{T}_{b,1}^{+} = \tau_b^+$ y $\mathcal{T}_{b,2}^{+} = 0$ c.s. ya que nunca cambiamos de régimen, y la Proposición 3.6, concluimos que

$$\mathbb{E}_u \left[e^{-s\mathcal{T}_{b,1}^{+} - q\mathcal{T}_{b,2}^{+}} \mathbb{1}_{\left\{\tau_b^+ < T_a\right\}} \right] = \mathbb{E}_u \left[e^{-s\tau_b^+} \mathbb{1}_{\left\{\overline{X}_{T_a} > b\right\}} \right] = e^{-\lambda(a,s)(b-u)}.$$

Para la primera esperanza, definiendo

$$I_1 := \int_{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}}^{\tau_b^+} \mathbb{1}_{\{Q_t = 1\}} dt \quad \text{y} \quad I_2 := \int_{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}}^{\tau_b^+} \mathbb{1}_{\{Q_t = 2\}} dt,$$

notemos que si $T_a < \tau_b^+ < \tau_0^-$, entonces

$$\mathcal{T}_{b,1}^{+} = \int_0^{\tau_b^+} \mathbb{1}_{\{Q_t = 1\}} dt = T_a + I_1 \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_{b,2}^{+} = \int_0^{\tau_b^+} \mathbb{1}_{\{Q_t = 2\}} dt = \tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}} - T_a + I_2.$$

Esto pues,

$$Q_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, T_a) \\ 2 & \text{si } t \in \left[T_a, \tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}\right) \end{cases},$$

ya que $T_a = \text{ínf}\{t \geq 0 : Q_t = 2\}$ e $\text{ínf}\{t \geq T_a : Q_t = 1\} = \text{ínf}\{t \geq T_a : X_t = \overline{X}_{T_a}\} = \tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}$. Notemos que $T_a < \tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}} < \tau_b^+$ c.s. pues hay cambio de régimen antes de llegar al nivel b y además cumple que $\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}} - T_a = \text{ínf}\left\{t \geq 0 : X_{T_a + t} = \overline{X}_{T_a}\right\} = \text{ínf}\left\{t \geq 0 : \tilde{X}_t + X_{T_a} = \overline{X}_{T_a}\right\}$, donde

$\tilde{X}_t = X_{T_a+t} - X_{T_a}$. Así, utilizando la Propiedad Fuerte de Markov con respecto a T_a obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_u\left[e^{-s\mathcal{T}_{b,1}^{+}-q\mathcal{T}_{b,2}^{+}}\mathbb{1}_{\left\{T_a<\tau_b^+<\tau_0^-\right\}}\right]\\
&=\mathbb{E}_u\left[\mathbb{E}_u\left[e^{-s\mathcal{T}_{b,1}^{+}-q\mathcal{T}_{b,2}^{+}}\mathbb{1}_{\left\{T_a<\tau_b^+<\tau_0^-\right\}}\middle|\mathcal{F}_{T_a}\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_u\left[e^{-sT_a}\mathbb{E}_u\left[e^{-sI_1-q\left(\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}-T_a\right)-qI_2}\mathbb{1}_{\left\{T_a<\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}<\tau_b^+<\tau_0^-\right\}}\middle|\mathcal{F}_{T_a}\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_u\left[e^{-sT_a}\mathbb{E}_{X_{T_a}}\left[e^{-sI_1-q\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}-qI_2}\mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}<\tau_0^{2,-}\right\}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_b^+<\tau_0^-\right\}}\right]\right],
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

donde se observa que como $\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}} < \tau_b^+$ y $\tau_0^- \le \tau_0^{2,-}$ c.s., entonces se obtiene que $\mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}<\tau_b^+<\tau_0^-\right\}} = \mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}<\tau_b^+<\tau_0^-\le\tau_0^{2,-}\right\}} = \mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}<\tau_0^{2,-}\right\}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_b^+<\tau_0^-\right\}}$. Utilizando el hecho de que $T_a < \tau_b^+$ si y solo si $\overline{X}_{T_a} \le b$ y como $a \le Y_{T_a} < \overline{X}_{T_a}$ si $\tau_b^+ < \tau_0^-$, entonces por probabilidad total integrando primero con respecto a los valores de $\overline{X}_{T_a}$ y luego con respecto a los valores de Y_{T_a} obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_u\left[e^{-s\mathcal{T}_{b,1}^{+}-q\mathcal{T}_{b,2}^{+}}\mathbb{1}_{\left\{T_a<\tau_b^+<\tau_0^-\right\}}\right]\\
&=\int_u^b\int_{[a,x)}\mathbb{E}_u\left[e^{-sT_a}\mathbb{1}_{\left\{Y_{T_a}\in dy,\overline{X}_{T_a}\in dx\right\}}\right]\mathbb{E}_{x-y}\left[e^{-sI_1-q\tau_x^{2,+}-qI_2}\mathbb{1}_{\left\{\tau_x^{2,+}<\tau_0^{2,-}\right\}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_b^+<\tau_0^-\right\}}\right].
\end{aligned}
$$

Luego, utilizando nuevamente la Propiedad Fuerte de Markov pero ahora con respecto a $\tau_x^{2,+}$ obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{x-y}\left[e^{-sI_1-q\tau_x^{2,+}-qI_2}\mathbb{1}_{\left\{\tau_x^{2,+}<\tau_0^{2,-}\right\}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_b^+<\tau_0^-\right\}}\right]\\
&=\mathbb{E}_{x-y}\left[\mathbb{E}_{x-y}\left[e^{-sI_1-q\tau_x^{2,+}-qI_2}\mathbb{1}_{\left\{\tau_x^{2,+}<\tau_0^{2,-}\right\}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_b^+<\tau_0^-\right\}}\middle|\mathcal{F}_{\tau_x^{2,+}}\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_{x-y}\left[e^{-q\tau_x^{2,+}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_x^{2,+}<\tau_0^{2,-}\right\}}\right]\mathbb{E}_x\left[e^{-s\mathcal{T}_{b,1}^{+}-q\mathcal{T}_{b,2}^{+}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_b^+<\tau_0^-\right\}}\right]\\
&=\mathbb{E}_{x-y}\left[e^{-q\tau_x^{2,+}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_x^{2,+}<\tau_0^{2,-}\right\}}\right]g(x),
\end{aligned}
$$

donde por definición de I_1 y I_2 estas integrales son independientes de $\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}$ e iguales en distribución a $\mathcal{T}_{b,1}^{+}$ y $\mathcal{T}_{b,2}^{+}$ respectivamente por Propiedad Fuerte de Markov. Concluimos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_u\left[e^{-s\mathcal{T}_{b,1}^{+}-q\mathcal{T}_{b,2}^{+}}\mathbb{1}_{\left\{T_a<\tau_b^+<\tau_0^-\right\}}\right]\\
&=\int_u^b\int_{[a,x)}\mathbb{E}_u\left[e^{-sT_a}\mathbb{1}_{\left\{Y_{T_a}\in dy,\overline{X}_{T_a}\in dx\right\}}\right]\mathbb{E}_{x-y}\left[e^{-q\tau_x^{2,+}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_x^{2,+}<\tau_0^{2,-}\right\}}\right]g(x).
\end{aligned}
$$

Finalmente, sustituyendo todo en (3.7), utilizando el Corolario 3.5 y (2.2) concluimos que

$$
\begin{aligned}
g(u)&=\lambda(a,s)\int_u^b g(x)e^{-\lambda(a,s)(x-u)}\left[\int_{[a,x)}\frac{W_2^{(q)}(x-y)}{W_2^{(q)}(x)}F^{(s)}_{Y_{T_a}}(dy)\right]dx+e^{-\lambda(a,s)(b-u)}\\
&=e^{\lambda(a,s)u}\left[\lambda(a,s)\int_u^b g(x)e^{-\lambda(a,s)x}G(x)dx+e^{-\lambda(a,s)b}\right],
\end{aligned}
$$

donde
$$G(x) = \int_{[a,x)} \frac{W_2^{(q)}(x-y)}{W_2^{(q)}(x)} F^{(s)}_{Y_{T_a}}(dy) = 1 - \frac{C_{s,q}(x)}{\lambda(a,s)}.$$
Derivando obtenemos que
$$g'(u) = \lambda(a,s)g(u) - \lambda(a,s)g(u)G(u) = \lambda(a,s)(1-G(u))g(u) = C_{s,q}(u)g(u).$$
La solución a esta ecuación diferencial ordinaria con condición inicial $g(b)=1$ esta dada por
$$g(u) = e^{-\int_u^b C_{s,q}(z)dz}, \quad a \leq u < b. \tag{3.9}$$

Para $u < a < b$, si $\tau_b^+ < \tau_0^-$ entonces $\tau_a^+ < T_a$ y $\tau_a^{1,+} = \tau_a^+ < \tau_b^+ < \tau_0^{1,-}$ c.s.; esto pues primero se debe de alcanzar el nivel a antes de que pueda haber un declive mayor a a, y así no hay cambio de régimen hasta llegar al nivel a concluyendo que
$$\mathcal{T}_{b,1}^+ = \tau_a^+ + \int_{\tau_a^+}^{\tau_b^+} \mathbb{1}_{\{Q_t=1\}}dt \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_{b,2}^+ = \int_{\tau_a^+}^{\tau_b^+} \mathbb{1}_{\{Q_t=2\}}dt.$$
Por lo tanto, por Propiedad Fuerte de Markov con respecto a τ_a^+, (2.2) y (3.9), obtenemos que
$$\begin{aligned}
g(u) &= \mathbb{E}_u\left[e^{-s\mathcal{T}_{b,1}^+ - q\mathcal{T}_{b,2}^+}\mathbb{1}_{\{\tau_b^+<\tau_0^-\}}\right] \\
&= \mathbb{E}_u\left[e^{-s\tau_a^{1,+}}\mathbb{1}_{\{\tau_a^{1,+}<\tau_0^{1,-}\}}\mathbb{E}_u\left[e^{-s\left(\mathcal{T}_{b,1}^+-\tau_a^{1,+}\right)-q\mathcal{T}_{b,2}^+}\mathbb{1}_{\{\tau_b^+<\tau_0^-\}}\Big|\,\mathcal{F}_{\tau_a^+}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_u\left[e^{-s\tau_a^{1,+}}\mathbb{1}_{\{\tau_a^{1,+}<\tau_0^{1,-}\}}\right]\mathbb{E}_a\left[e^{-s\mathcal{T}_{b,1}^+ - q\mathcal{T}_{b,2}^+}\mathbb{1}_{\{\tau_b^+<\tau_0^-\}}\right] \\
&= \mathbb{E}_u\left[e^{-s\tau_a^{1,+}}\mathbb{1}_{\{\tau_a^{1,+}<\tau_0^{1,-}\}}\right]g(a) \\
&= \frac{W_1^{(s)}(u)}{W_1^{(s)}(a)}e^{-\int_a^b C_{s,q}(z)dz}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para $u < b \leq a$, si $\tau_b^+ < \tau_0^-$ entonces $\tau_b^+ < T_a$ c.s., pues nuevamente no puede haber declive mayor a a sin llegar al nivel a primero. Por lo tanto, $\mathcal{T}_{b,1}^+ = \tau_b^+ = \tau_b^{1,+}$, $\mathcal{T}_{b,2}^+ = 0$ y por (2.2),
$$g(u) = \mathbb{E}_u\left[e^{-s\mathcal{T}_{b,1}^+ - q\mathcal{T}_{b,2}^+}\mathbb{1}_{\{\tau_b^+<\tau_0^-\}}\right] = \mathbb{E}_u\left[e^{-s\tau_b^{1,+}}\mathbb{1}_{\{\tau_b^{1,+}<\tau_0^{1,-}\}}\right] = \frac{W_1^{(s)}(u)}{W_1^{(s)}(b)}.$$
Concluimos el resultado unificando los tres casos. □

Teorema 3.9. *Para $s,q \geq 0$ y $0 < u < b$,*
$$\mathbb{E}_u\left[e^{-s\mathcal{T}_{0,1}^- - q\mathcal{T}_{0,2}^-}\mathbb{1}_{\{\tau_0^-<\tau_b^+\}}\right] = \boldsymbol{Z}_a^{(s,q)}(u) - \boldsymbol{Z}_a^{(s,q)}(b)\frac{\boldsymbol{W}_a^{(s,q)}(u)}{\boldsymbol{W}_a^{(s,q)}(b)}.$$

Demostración. Sea
$$h(u) := \mathbb{E}_u\left[e^{-s\mathcal{T}_{0,1}^- - q\mathcal{T}_{0,2}^-}\mathbb{1}_{\{\tau_0^-<\tau_b^+\}}\right], \quad 0 < u < b.$$

Primero consideremos el caso $a \leq u < b$. En este caso, $T_a \leq \tau_0^-$ c.s., pues primero debe de haber un declive mayor a a antes de arruinarnos, y si $\tau_0^- < \tau_b^+$, definiendo $\tau = \tau_0^- \wedge \tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}$ y

$$J_1 = \int_\tau^{\tau_0^-} \mathbb{1}_{\{Q_t=1\}} dt \quad \text{y} \quad J_2 = \int_\tau^{\tau_0^-} \mathbb{1}_{\{Q_t=2\}} dt,$$

obtenemos que

$$\mathcal{T}_{0,1}^- = \int_0^{\tau_0^-} \mathbb{1}_{\{Q_t=1\}} dt = T_a + J_1 \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_{0,2}^- = \int_0^{\tau_0^-} \mathbb{1}_{\{Q_t=2\}} dt = \tau - T_a + J_2.$$

Esto pues,

$$Q_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, T_a) \\ 2 & \text{si } t \in [T_a, \tau)\,, \end{cases}$$

ya que $T_a = \inf\{t \geq 0 : Q_t = 2\}$ e $\inf\{t \geq T_a : Q_t = 1\} = \inf\{t \geq T_a : X_t = \overline{X}_{T_a}\} = \tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}} < \tau_b^+$. Aplicando la Propiedad Fuerte de Markov con respecto a T_a de igual manera que en (3.8) y separando en los dos casos posibles para τ veamos que

$$\begin{aligned}
h(u) &= \mathbb{E}_u \left[\mathbb{E}_u \left[e^{-s\mathcal{T}_{0,1}^- - q\mathcal{T}_{0,2}^-} \mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \tau_b^+\}} \middle| \mathcal{F}_{T_a} \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_u \left[e^{-sT_a} \mathbb{E}_u \left[e^{-sJ_1 - q(\tau - T_a) - qJ_2} \mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \tau_b^+\}} \middle| \mathcal{F}_{T_a} \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_u \left[e^{-sT_a} \mathbb{E}_{X_{T_a}} \left[e^{-sJ_1 - q\tau - qJ_2} \mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \tau_b^+\}} \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_u \left[e^{-sT_a} \mathbb{E}_{X_{T_a}} \left[e^{-sJ_1 - q\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}} - qJ_2} \mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \tau_b^+\}} \mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}} < \tau_0^-\right\}} \right] \right] \\
&+ \mathbb{E}_u \left[e^{-sT_a} \mathbb{E}_{X_{T_a}} \left[e^{-q\tau_0^-} \mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \tau_b^+\}} \mathbb{1}_{\left\{\tau_0^- < \tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}\right\}} \right] \right].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Calculando la esperanza del primer sumando. Utilizando el hecho de que $T_a < \tau_b^+$ si y solo si $\overline{X}_{T_a} \leq b$ y como $a \leq Y_{T_a} < \overline{X}_{T_a}$ si $\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}} < \tau_0^-$, entonces por probabilidad total integrando primero con respecto a los valores de $\overline{X}_{T_a}$ y luego con respecto a los valores de Y_{T_a} obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_u \left[e^{-sT_a} \mathbb{E}_{X_{T_a}} \left[e^{-sJ_1 - q\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}} - qJ_2} \mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \tau_b^+\}} \mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}} < \tau_0^-\right\}} \right] \right] \\
&= \int_u^b \int_{[a,x)} \mathbb{E}_u \left[e^{-sT_a} \mathbb{1}_{\{Y_{T_a} \in dy, \overline{X}_{T_a} \in dx\}} \right] \mathbb{E}_{x-y} \left[e^{-sJ_1 - q\tau_x^{2,+} - qJ_2} \mathbb{1}_{\{\tau_x^{2,+} < \tau_0^- < \tau_b^+\}} \mathbb{1}_{\{\tau_x^{2,+} < \tau_0^{2,-}\}} \right],
\end{aligned}$$

donde se observa que como $\tau_0^- \leq \tau_0^{2,-}$ c.s., entonces se obtiene que $\mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \tau_b^+\}} \mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}} < \tau_0^-\right\}} = \mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}} < \tau_0^- < \tau_b^+\right\}} \mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}} < \tau_0^{2,-}\right\}}$. Luego, utilizando nuevamente la Propiedad Fuerte de Markov con respecto a $\tau_x^{2,+}$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{x-y}\left[e^{-sJ_1-q\tau_x^{2,+}-qJ_2}\mathbb{1}_{\left\{\tau_x^{2,+}<\tau_0^-<\tau_b^+\right\}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_x^{2,+}<\tau_0^{2,-}\right\}}\right]\\
&=\mathbb{E}_{x-y}\left[\mathbb{E}_{x-y}\left[e^{-sJ_1-q\tau_x^{2,+}-qJ_2}\mathbb{1}_{\left\{\tau_x^{2,+}<\tau_0^-<\tau_b^+\right\}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_x^{2,+}<\tau_0^{2,-}\right\}}\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau_x^{2,+}}\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_{x-y}\left[e^{-q\tau_x^{2,+}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_x^{2,+}<\tau_0^{2,-}\right\}}\right]\mathbb{E}_x\left[e^{-s\mathcal{T}_{0,1}^--q\mathcal{T}_{0,2}^-}\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^-<\tau_b^+\right\}}\right]\\
&=\mathbb{E}_{x-y}\left[e^{-q\tau_x^{2,+}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_x^{2,+}<\tau_0^{2,-}\right\}}\right]h(x),
\end{aligned}
$$

donde por definición de J_1 y J_2 estas integrales son independientes de τ e iguales en distribución a $\mathcal{T}_{0,1}^-$ y $\mathcal{T}_{0,2}^-$ respectivamente por Propiedad Fuerte de Markov. Concluimos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_u\left[e^{-sT_a}\mathbb{E}_{X_{T_a}}\left[e^{-sJ_1-q\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}-qJ_2}\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^-<\tau_b^+\right\}}\mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}<\tau_0^-\right\}}\right]\right]\\
&=\int_u^b\int_{[a,x)}\mathbb{E}_u\left[e^{-sT_a}\mathbb{1}_{\left\{Y_{T_a}\in dy,\overline{X}_{T_a}\in dx\right\}}\right]\mathbb{E}_{x-y}\left[e^{-q\tau_x^{2,+}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_x^{2,+}<\tau_0^{2,-}\right\}}\right]h(x).
\end{aligned}
$$

Para la esperanza del segundo sumando en (3.10), notemos que si $\tau_0^-<\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}$ entonces $\tau_0^{2,-}=\tau_0^-$ c.s., ya que hubo ruina en el régimen con riesgo. En este caso tenemos que X_{T_a} pudo haber tomado valores negativos. En consecuencia, $a\le Y_{T_a}<\infty$ y como $u\le\overline{X}_{T_a}\le b$, por probabilidad total tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_u\left[e^{-sT_a}\mathbb{E}_{X_{T_a}}\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^-<\tau_b^+\right\}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^-<\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}\right\}}\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_u\left[e^{-sT_a}\mathbb{E}_{X_{T_a}}\left[e^{-q\tau_0^{2,-}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^{2,-}<\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}\right\}}\right]\right]\\
&=\int_u^b\int_{[a,\infty)}\mathbb{E}_u\left[e^{-sT_a}\mathbb{1}_{\left\{Y_{T_a}\in dy,\overline{X}_{T_a}\in dx\right\}}\right]\mathbb{E}_{x-y}\left[e^{-q\tau_0^{2,-}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^{2,-}<\tau_x^{2,+}\right\}}\right],
\end{aligned}
$$

donde se observa que como $\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}<\tau_b^+$ c.s., entonces se obtiene que $\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^-<\tau_b^+\right\}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^-<\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}\right\}}=\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^{2,-}<\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}<\tau_b^+\right\}}=\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^{2,-}<\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}\right\}}$. Sustituyendo todo lo anterior en (3.10) obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
h(u)=&\int_u^b\int_{[a,x)}\mathbb{E}_u\left[e^{-sT_a}\mathbb{1}_{\left\{Y_{T_a}\in dy,\overline{X}_{T_a}\in dx\right\}}\right]\mathbb{E}_{x-y}\left[e^{-q\tau_x^{2,+}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_x^{2,+}<\tau_0^{2,-}\right\}}\right]h(x)\\
&+\int_u^b\int_{[a,\infty)}\mathbb{E}_u\left[e^{-sT_a}\mathbb{1}_{\left\{Y_{T_a}\in dy,\overline{X}_{T_a}\in dx\right\}}\right]\mathbb{E}_{x-y}\left[e^{-q\tau_0^{2,-}}\mathbb{1}_{\left\{\tau_0^{2,-}<\tau_x^{2,+}\right\}}\right].
\end{aligned}
$$

Utilizando (2.2), (2.3) y el Corolario 3.5 obtenemos que

$$
\begin{aligned}
h(u)&=\lambda(a,s)\int_u^b h(x)e^{-\lambda(a,s)(x-u)}G(x)dx+\int_u^b e^{-\lambda(a,s)(x-u)}D_{s,q}(x)dx\\
&=e^{\lambda(a,s)u}\left(\lambda(a,s)\int_u^b h(x)e^{-\lambda(a,s)x}G(x)dx+\int_u^b e^{-\lambda(a,s)x}D_{s,q}(x)dx\right),
\end{aligned}
$$

donde

$$G(x) = \int_{[a,x)} \frac{W_2^{(q)}(x-y)}{W_2^{(q)}(x)} F_{Y_{T_a}}^{(s)}(dy) = 1 - \frac{C_{s,q}(x)}{\lambda(a,s)}.$$

Derivando obtenemos que

$$\begin{aligned} h'(u) &= \lambda(a,s)h(u) - \lambda(a,s)h(u)G(u) - D_{s,q}(u) \\ &= \lambda(a,s)(1-G(u))h(u) - D_{s,q}(u) \\ &= C_{s,q}(u)h(u) - D_{s,q}(u). \end{aligned}$$

La solución a esta ecuación diferencial ordinaria con condición inicial $h(b) = 0$ esta dada por

$$h(u) = \int_u^b e^{-\int_u^y C_{s,q}(z)dz} D_{s,q}(y)dy, \quad a \le u < b. \tag{3.11}$$

Para $u < a < b$, tenemos que $\tau_a^+ < \tau_b^+$, así que utilizando probabilidad total sobre τ_a^+ obtenemos que

$$h(u) = \mathbb{E}_u \left[e^{-s\mathcal{T}_{0,1}^- - q\mathcal{T}_{0,2}^-} \mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \tau_a^+\}} \right] + \mathbb{E}_u \left[e^{-s\mathcal{T}_{0,1}^- - q\mathcal{T}_{0,2}^-} \mathbb{1}_{\{\tau_a^+ < \tau_0^- < \tau_b^+\}} \right] \tag{3.12}$$

Para el primer sumando, si $\tau_0^- < \tau_a^+$, entonces $\tau_0^- < T_a$ ya que hubo ruina antes de llegar al nivel a y por ende no pudo haber cambio de régimen y así $\mathcal{T}_{0,1}^- = \tau_0^- = \tau_0^{1,-}$, $\mathcal{T}_{0,2}^- = 0$ y $\tau_a^+ = \tau_a^{1,+}$ c.s. concluyendo que

$$\mathbb{E}_u \left[e^{-s\mathcal{T}_{0,1}^- - q\mathcal{T}_{0,2}^-} \mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \tau_a^+\}} \right] = \mathbb{E}_u \left[e^{-s\tau_0^{1,-}} \mathbb{1}_{\{\tau_0^{1,-} < \tau_a^{1,+}\}} \right].$$

Para el segundo sumando de (3.12), si $\tau_a^+ < \tau_0^-$, entonces $\tau_a^+ = \tau_a^{1,+} < T_a$ ya que no puede haber cambio de régimen sin antes llegar al nivel a y así obtenemos que

$$\mathcal{T}_{0,1}^- = \tau_a^{1,+} + \int_{\tau_a^{1,+}}^{\tau_0^-} \mathbb{1}_{\{Q_t=1\}} dt \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_{0,2}^- = \int_{\tau_a^{1,+}}^{\tau_0^-} \mathbb{1}_{\{Q_t=2\}} dt.$$

Aplicando la Propiedad Fuerte de Markov con respecto a $\tau_a^{1,+}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_u \left[e^{-s\mathcal{T}_{0,1}^- - q\mathcal{T}_{0,2}^-} \mathbb{1}_{\{\tau_a^+ < \tau_0^- < \tau_b^+\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_u \left[\mathbb{E}_u \left[e^{-s\mathcal{T}_{0,1}^- - q\mathcal{T}_{0,2}^-} \mathbb{1}_{\{\tau_a^{1,+} < \tau_0^- < \tau_b^+\}} \middle| \mathcal{F}_{\tau_a^{1,+}} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_u \left[e^{-s\tau_a^{1,+}} \mathbb{1}_{\{\tau_a^{1,+} < \tau_0^{1,-}\}} \mathbb{E}_u \left[e^{-s(\mathcal{T}_{0,1}^- - \tau_a^{1,+}) - q\mathcal{T}_{0,2}^-} \mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \tau_b^+\}} \middle| \mathcal{F}_{\tau_a^{1,+}} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_u \left[e^{-s\tau_a^{1,+}} \mathbb{1}_{\{\tau_a^{1,+} < \tau_0^{1,-}\}} \right] \mathbb{E}_a \left[e^{-s\mathcal{T}_{0,1}^- - q\mathcal{T}_{0,2}^-} \mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \tau_b^+\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_u \left[e^{-s\tau_a^{1,+}} \mathbb{1}_{\{\tau_a^{1,+} < \tau_0^{1,-}\}} \right] h(a), \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo lo anterior en (3.12),

$$h(u) = \mathbb{E}_u \left[e^{-s\tau_0^{1,-}} \mathbb{1}_{\{\tau_0^{1,-} < \tau_a^{1,+}\}} \right] + \mathbb{E}_u \left[e^{-s\tau_a^{1,+}} \mathbb{1}_{\{\tau_a^{1,+} < \tau_0^{1,-}\}} \right] h(a),$$

y por (2.2), (2.3) y (3.11),

$$h(u) = Z_1^{(s)}(u) - Z_1^{(s)}(a) \frac{W_1^{(s)}(u)}{W_1^{(s)}(a)} + \frac{W_1^{(s)}(u)}{W_1^{(s)}(a)} \int_a^b e^{-\int_a^y C_{s,q}(z)dz} D_{s,q}(y)dy.$$

Finalmente, para $u \leq b < a$, si $\tau_0^- < \tau_b^+$ entonces tenemos que $\tau_0^- < T_a$ ya que hubo ruina antes de llegar al nivel a y por ende no pudo haber cambio de régimen y así $\mathcal{T}_{0,1}^- = \tau_0^- = \tau_0^{1,-}$, $\mathcal{T}_{0,2}^- = 0$ y $\tau_b^+ = \tau_b^{1,+}$ c.s.. Por lo tanto, por (2.3)

$$h(u) = \mathbb{E}_u\left[e^{-s\tau_0^{1,-}}\mathbb{1}_{\{\tau_0^{1,-}<\tau_b^{1,+}\}}\right] = Z_1^{(s)}(u) - Z_1^{(s)}(b)\frac{W_1^{(s)}(u)}{W_1^{(s)}(b)}.$$

Unificando los tres casos concluimos nuestro resultado. □

En particular, haciendo $s = q$ en los Teoremas 3.8 y 3.9 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.10. *Para $q \geq 0$ y $0 < u < b$,*

$$\mathbb{E}_u\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{\{\tau_b^+<\tau_0^-\}}\right] = \frac{\boldsymbol{W}_a^{(q)}(u)}{\boldsymbol{W}_a^{(q)}(b)}, \tag{3.13}$$

y

$$\mathbb{E}_u\left[e^{-q\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_0^-<\tau_b^+\}}\right] = \boldsymbol{Z}_a^{(q)}(u) - \boldsymbol{Z}_a^{(q)}(b)\frac{\boldsymbol{W}_a^{(q)}(u)}{\boldsymbol{W}_a^{(q)}(b)}. \tag{3.14}$$

3.2.2. Probabilidad de sobrevivencia

Con los resultados anteriores, una pregunta que llega naturalmente es el de la probabilidad de sobrevivencia el cual enunciamos a continuación.

Corolario 3.11. *Para $u > 0$,*

$$\mathbb{P}_u\left(\tau_0^- = \infty\right) = \frac{\boldsymbol{W}_a(u)}{\boldsymbol{W}_a(\infty)}.$$

Demostración. Tomando $q = 0$ y haciendo b tender a infinito en (3.13), por teorema de convergencia dominada concluimos el resultado. □

Otra cuestión que podría ser de interés es cuando podemos garantizar que $\mathbb{P}_u\left(\tau_0^- = \infty\right) > 0$ para toda $u > 0$; es decir, cuando no tenemos ruina segura. Para ello, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.12. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $\mathbb{E}\left[Y_{T_a}\right] < \infty$ *y* $\mu_2 > 0$.

(ii) $\mathbb{P}_u\left(\tau_0^- = \infty\right) > 0$ *para toda* $u > 0$.

Demostración. Por Corolario 3.11 y las expresiones (3.3) y (3.5) observamos que

$$\mathbb{P}_u\left(\tau_0^- = \infty\right) = \frac{W_1(u)}{W_1(u \vee a)}e^{-\int_{u\vee a}^{\infty} C_0(z)dz}. \tag{3.15}$$

Por lo tanto, $\mathbb{P}_u\left(\tau_0^- = \infty\right) = 0$ para toda $u > 0$ si y solo si

$$I_a := \int_a^\infty \left(1 - \int_{[a,z)} \frac{W_2(z-y)}{W_2(z)} \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right)\right) dz = \infty.$$

Supongamos que se cumple (i), entonces como W_2 es una función creciente tenemos que $W_2(a) \leq W_2(z)$ para toda $z \geq a$ y así

$$I_a \leq \frac{1}{W_2(a)} \int_a^\infty \left(W_2(z) - \int_{[a,z)} W_2(z-y) \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right)\right) dz.$$

Por otra parte, por Teorema 2.1 (i) y Teorema de Tonelli, tenemos que para $s > 0$

$$\begin{aligned}
&\int_a^\infty e^{-sz} \left(W_2(z) - \int_{[a,z)} W_2(z-y) \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right)\right) dz \\
&\leq \int_0^\infty e^{-sz} W_2(z) dz - \int_{[a,\infty)} \left(\int_y^\infty e^{-sz} W_2(z-y) dz\right) \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right) \\
&= \frac{1}{\psi_2(s)} - \int_{[a,\infty)} e^{-sy} \left(\int_0^\infty e^{-sz} W_2(z) dz\right) \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right) \\
&= \frac{1 - \int_{[a,\infty)} e^{-sy} \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right)}{\psi_2(s)}.
\end{aligned}$$

Utilizando L'Hôpital concluimos que

$$\begin{aligned}
I_a &\leq \frac{1}{W_2(a)} \lim_{s \to 0+} \frac{\int_{[a,\infty)} \left(1 - e^{-sy}\right) \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right)}{\psi_2(s)} \\
&= \frac{1}{W_2(a)} \lim_{s \to 0+} \frac{\int_{[a,\infty)} y e^{-sy} \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right)}{\psi_2{}'(s)} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[Y_{T_a}\right]}{W_2(a) \mu_2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si se cumple (i) obtenemos que $I_a < \infty$ y así se cumple (ii).

Ahora, por contrapositiva, supongamos que no se cumple (i); es decir, $\mathbb{E}\left[Y_{T_a}\right] = \infty$ o $\mu_2 \leq 0$. Observemos que para toda $z \geq a$ se cumple que

$$1 = \int_{[a,\infty)} \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right) = \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \geq z\right) + \int_{[a,z)} \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right).$$

Así, por Teorema de Tonelli, tenemos que

$$
\begin{aligned}
I_a &= \int_a^\infty \left(1 - \int_{[a,z)} \frac{W_2(z-y)}{W_2(z)} \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right)\right) dz \\
&= \int_a^\infty \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \geq z\right) dz + \int_a^\infty \int_{[a,z)} \frac{W_2(z) - W_2(z-y)}{W_2(z)} \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right) dz \\
&= \int_a^\infty \left(\int_z^\infty \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right)\right) dz + \int_{[a,\infty)} \left(\int_y^\infty \frac{W_2(z) - W_2(z-y)}{W_2(z)} dz\right) \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right) \\
&= \int_a^\infty \left(\int_a^y dz\right) \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right) + \int_{[a,\infty)} \left(\int_y^\infty \frac{W_2(z) - W_2(z-y)}{W_2(z)} dz\right) \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right) \\
&= \mathbb{E}\left[Y_{T_a}\right] - a + \int_{[a,\infty)} \left(\int_y^\infty \frac{W_2(z) - W_2(z-y)}{W_2(z)} dz\right) \mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right)
\end{aligned}
$$

Utilizando que la doble integral no es negativa por ser W_2 una función creciente veamos que si $\mathbb{E}\left[Y_{T_a}\right] = \infty$, entonces $I_a = \infty$ y así $\mathbb{P}_u\left(\tau_0^- = \infty\right) \equiv 0$. Por otra parte, si $\mu_2 < 0$, entonces tenemos que $\phi_2(0) > 0$ y por Proposición 2.13

$$
\lim_{z\to\infty} \frac{W_2(z-y)}{W_2(z)} = e^{-\phi_2(0)y} < 1,
$$

para toda $y \geq a$. Así, para y suficientemente grande, tenemos que

$$
\int_y^\infty \frac{W_2(z) - W_2(z-y)}{W_2(z)} dz = \int_y^\infty \left(1 - e^{-\phi_2(0)y}\right) dz = \infty.
$$

Y como $\mathbb{E}\left[Y_{T_a}\right] > a$ concluimos que $I_a = \infty$ y así $\mathbb{P}_u\left(\tau_0^- = \infty\right) \equiv 0$. El caso $\mu_2 = 0$ lo omitimos debido a lo técnico que puede llegar a ser su demostración. $\square$

Con este último resultado tenemos un criterio para garantizar cuando no tenemos ruina segura. Notemos que la cantidad $\mathbb{E}\left[Y_{T_a}\right]$ se relaciona con el proceso X^1 y μ_2 con el proceso X^2. El siguiente resultado nos da una relación entre $\mathbb{E}\left[Y_{T_a}\right]$ y Π_1.

Proposición 3.13. *Tenemos que* $\mathbb{E}\left[Y_{T_a}\right] < \infty$ *si y solo si* $\int_{-\infty}^{-1} |y|\Pi_1(dy) < \infty$.

Demostración. Como

$$
\mathbb{E}\left[Y_{T_a}\right] = \mathbb{E}\left[Y_{T_a} \mathbb{1}_{\{Y_{T_a} > a+1\}}\right] + \mathbb{E}\left[Y_{T_a} \mathbb{1}_{\{Y_{T_a} \leq a+1\}}\right],
$$

tenemos que $\mathbb{E}\left[Y_{T_a}\right] < \infty$ si y solo si $\mathbb{E}\left[Y_{T_a} \mathbb{1}_{\{Y_{T_a} > a+1\}}\right] < \infty$. Utilizando (3.1) con $q = 0$ y haciendo un cambio de variable obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y_{T_a}\mathbb{1}_{\{Y_{T_a}>a+1\}}\right] &= \int_{a+1}^{\infty} y\,\mathbb{P}\left(Y_{T_a}\in dy\right) \\
&= \int_0^a \left(\frac{W_1{}'(z)}{\lambda(a,0)} - W_1(z)\right)\left(\int_{a+1}^{\infty} y\;\Pi_1(z-dy)\right)dz \\
&\quad + \frac{W_1(0+)}{\lambda(a,0)}\int_{a+1}^{\infty} y\;\Pi_1(-dy) \\
&= \int_0^a \left(\frac{W_1{}'(z)}{\lambda(a,0)} - W_1(z)\right)\left(\int_{-\infty}^{-z-a-1}(z-y)\Pi_1(dy)\right)dz \\
&\quad + \frac{W_1(0+)}{\lambda(a,0)}\int_{-\infty}^{-a-1}|y|\Pi_1(dy). \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Por Teorema 3.3 tenemos que $\frac{W_1{}'(z)}{\lambda(a,0)} - W_1(z) \geq 0$ por ser la densidad de una medida resolvente. Además, para $z \in (0,a]$ y $y < -a-1 < z-a-1 \leq -1$, tenemos que $0 < |y| < z-y$ y así

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-a-1}|y|\Pi_1(dy) &\leq \int_{-\infty}^{z-a-1}(z-y)\Pi_1(dy) \\
&= z\Pi_1(-\infty, z-a-1) - \int_{-\infty}^{z-a-1} y\Pi_1(dy) \\
&\leq a\Pi_1(-\infty,-1) + \int_{-\infty}^{-1}|y|\Pi_1(dy)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.16) y utilizando que Π_1 es finita en subconjuntos compactos de $(-\infty, 0)$ por ser medida de Lévy obtenemos nuestro resultado. $\square$

3.2.3. Tiempos de ocupación dependientes del régimen

En esta sección nos interesa los tiempos esperados de ocupación dependientes del régimen (descontados) antes de la ruina. Para ello definimos,

$$A_q := \int_0^{\tau_0^-} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=1\}}dt \quad \text{y} \quad B_q := \int_0^{\tau_0^-} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=2\}}dt, \quad q \geq 0.$$

Como el caso $q = 0$ se reduce a $A_0 = \mathcal{T}_{0,1}^-$ y $B_0 = \mathcal{T}_{0,2}^-$, cuyas transformadas de Laplace estan dadas por el Teorema 3.9 haciendo b tender a infinito, solo nos interesará el caso $q > 0$.

El siguiente teorema nos da una fórmula recursiva para los momentos de A_q.

Teorema 3.14. *Para toda $q > 0$, $k \in \mathbb{N}$ y $u \geq a$, tenemos que*

$$\mathbb{E}_u\left[(A_q)^k\right] = \int_u^{\infty} e^{-\int_u^y C_{kq}(z)dz}\left(\lambda(a,kq)m_{k-1}(y) - m_{k-1}'(y)\right)dy,$$

donde

$$
\begin{aligned}
m_{k-1}(z) = &\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{l=j}^{k}\binom{k-j}{l-j}\frac{(-1)^{l-j}\lambda(a,lq)}{q^{k-j}} \\
&\times\int_z^{\infty}\mathbb{E}_x[(A_q)^j]e^{-\lambda(a,lq)(x-z)}\left[\int_{[a,x)}\frac{W_2^{(jq)}(x-y)}{W_2^{(jq)}(x)}F_{Y_{T_a}}^{(lq)}(dy)\right]dx \\
&+\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{q^k}\left(Z_1^{(jq)}(a)-jq\frac{W_1^{(jq)}(a)}{\lambda(a,jq)}\right) \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Demostración. Sea $w_k(u) := \mathbb{E}_u[(A_q)^k]$. Como $Q_t = 1$ para toda $t \in [0, T_a)$ y el hecho de que la hipótesis $u \geq a$ implica que $T_a \leq \tau_0^-$ c.s., entonces al condicionar sobre $\mathcal{F}_{T_a}$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
w_k(u) &= \mathbb{E}_u\left[\left(\int_0^{T_a}e^{-qt}dt+\int_{T_a}^{\tau_0^-}e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=1\}}dt\right)^k\right] \\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathbb{E}_u\left[\left(\frac{1}{q}\left(1-e^{-qT_a}\right)\right)^{k-j}\left(\int_{T_a}^{\tau_0^-}e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=1\}}dt\right)^j\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\mathbb{E}_u\left[\left(\frac{1}{q}\left(1-e^{-qT_a}\right)\right)^{k-j}\left(\int_{T_a}^{\tau_0^-}e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=1\}}dt\right)^j\right]+\frac{1}{q^k}\mathbb{E}_u\left[(1-e^{-qT_a})^k\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\mathbb{E}_u\left[\frac{1}{q^{k-j}}\left(\sum_{l=j}^{k}\binom{k-j}{l-j}(-1)^{l-j}e^{-(l-j)qT_a}\right)\mathbb{E}\left[\left(\int_{T_a}^{\tau_0^-}e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=1\}}dt\right)^j\middle|\mathcal{F}_{T_a}\right]\right] \\
&+\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{q^k}\mathbb{E}_u\left[e^{-jqT_a}\right] \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, como $Q_t = 2$ para $t \in [T_a, \tau)$, donde $\tau = \tau_0^- \wedge \tau_{\overline{X}_{T_a}}^{2,+}$, entonces

$$
\mathbb{E}\left[\left(\int_{T_a}^{\tau_0^-}e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=1\}}dt\right)^j\middle|\mathcal{F}_{T_a}\right] = e^{-jqT_a}\mathbb{E}_{\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}}\left[\left(\int_{\tau}^{\tau_0^-}e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=1\}}dt\right)^j\right]
$$

Condicionando sobre $\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}$, para $j \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}}\left[\left(\int_{\tau}^{\tau_0^-} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=1\}}dt\right)^j\right] \\
&= \mathbb{E}_{\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}}\left[\mathbb{E}\left[\left(\int_{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}}^{\tau_0^-} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=1\}}dt\right)^j \mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}<\tau_0^-\right\}}\middle|\mathcal{F}_{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_{\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}}\left[e^{-qj\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}}\mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}<\tau_0^{2,-}\right\}}\mathbb{E}_{\overline{X}_{T_a}}\left[\left(\int_0^{\tau_0^-} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=1\}}dt\right)^j\right]\right] \\
&= \frac{W_2^{(jq)}\left(\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}\right)}{W_2^{(jq)}\left(\overline{X}_{T_a}\right)} w_j\left(\overline{X}_{T_a}\right), \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

donde se utilizó (2.2). Sustituyendo en (3.18) y separando el caso $j = k$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
w_k(u) &= \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\mathbb{E}_u\left[\frac{1}{q^{k-j}}\left(\sum_{l=j}^{k}\binom{k-j}{l-j}(-1)^{l-j}e^{-lqT_a}\right)\frac{W_2^{(jq)}\left(\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}\right)}{W_2^{(jq)}\left(\overline{X}_{T_a}\right)}w_j\left(\overline{X}_{T_a}\right)\right] \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{q^k}\mathbb{E}_u[e^{-jqT_a}] \\
&= \mathbb{E}_u\left[e^{-kqT_a}\frac{W_2^{(kq)}\left(\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}\right)}{W_2^{(kq)}\left(\overline{X}_{T_a}\right)}w_k\left(\overline{X}_{T_a}\right)\right] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{l=j}^{k}\binom{k-j}{l-j}\frac{(-1)^{l-j}}{q^{k-j}}\mathbb{E}_u\left[e^{-lqT_a}\frac{W_2^{(jq)}\left(\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}\right)}{W_2^{(jq)}\left(\overline{X}_{T_a}\right)}w_j\left(\overline{X}_{T_a}\right)\right] \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{q^k}\left(Z_1^{(jq)}(a)-jq\frac{W_1^{(jq)}(a)}{\lambda(a,jq)}\right),
\end{aligned}
$$

donde se utilizó el Teorema 3.2 para la transformada de Laplace de T_a. Por lo tanto, por Corolario 3.5 y utilizando probabilidad total, integrando primero sobre los valores de $\overline{X}_{T_a} \geq u$ y luego sobre los valores de $Y_{T_a} \in [a, \overline{X}_{T_a})$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
w_k(u) = &\int_u^\infty \int_{[a,x)} \mathbb{E}_u\left[e^{-kqT_a}\mathbb{1}_{\left\{\overline{X}_{T_a}\in dx, Y_{T_a}\in dy\right\}}\right] \frac{W_2^{(kq)}(x-y)}{W_2^{(kq)}(x)} w_k(x) \\
&+ \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{l=j}^{k}\binom{k-j}{l-j}\frac{(-1)^{l-j}}{q^{k-j}} \\
&\times \int_u^\infty \int_{[a,x)} \mathbb{E}_u\left[e^{-lqT_a}\mathbb{1}_{\left\{\overline{X}_{T_a}\in dx, Y_{T_a}\in dy\right\}}\right] \frac{W_2^{(jq)}(x-y)}{W_2^{(jq)}(x)} w_j(x) \\
&+ \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{q^k}\left(Z_1^{(jq)}(a) - jq\frac{W_1^{(jq)}(a)}{\lambda(a,jq)}\right) \\
&= \int_u^\infty \lambda(a,kq) w_k(x) e^{-\lambda(a,kq)(x-u)}\left[\int_{[a,x)} \frac{W_2^{(kq)}(x-y)}{W_2^{(kq)}(x)} F_{Y_{T_a}}^{(kq)}(dy)\right] dx \\
&+ \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{l=j}^{k}\binom{k-j}{l-j}\frac{(-1)^{l-j}\lambda(a,lq)}{q^{k-j}} \\
&\times \int_u^\infty w_j(x) e^{-\lambda(a,lq)(x-u)}\left[\int_{[a,x)} \frac{W_2^{(jq)}(x-y)}{W_2^{(jq)}(x)} F_{Y_{T_a}}^{(lq)}(dy)\right] dx \\
&+ \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{q^k}\left(Z_1^{(jq)}(a) - jq\frac{W_1^{(jq)}(a)}{\lambda(a,jq)}\right) \\
&= \lambda(a,kq) e^{\lambda(a,kq)u}\int_u^\infty w_k(x) e^{-\lambda(a,kq)x}\left[\int_{[a,x)} \frac{W_2^{(kq)}(x-y)}{W_2^{(kq)}(x)} F_{Y_{T_a}}^{(kq)}(dy)\right] dx + m_{k-1}(u),
\end{aligned}
$$

donde utilizamos la definición de m_{k-1} dada en (3.17). Derivando con respecto a u obtenemos que

$$
\begin{aligned}
w_k'(u) &= \lambda(a,kq)\left[w_k(u) - m_{k-1}(u)\right] - \lambda(a,kq) w_k(u)\left[\int_{[a,u)} \frac{W_2^{(kq)}(u-y)}{W_2^{(kq)}(u)} F_{Y_{T_a}}^{(kq)}(dy)\right] + m_{k-1}'(u) \\
&= \lambda(a,kq)\left[1 - \int_{[a,u)} \frac{W_2^{(kq)}(u-y)}{W_2^{(kq)}(u)} F_{Y_{T_a}}^{(kq)}(dy)\right] w_k(u) - \lambda(a,kq) m_{k-1}(u) + m_{k-1}'(u) \\
&= C_{kq}(u) w_k(u) - \lambda(a,kq) m_{k-1}(u) + m_{k-1}'(u). \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

La solución a esta ecuación diferencial ordinaria con condición inicial $w_k(a)$ esta dada por

$$
w_k(u) = e^{\int_a^u C_{kq}(z)dz}\left[w_k(a) - \int_a^u e^{-\int_a^y C_{kq}(z)dz}\left(\lambda(a,kq) m_{k-1}(y) - m_{k-1}'(y)\right) dy\right], \qquad (3.21)
$$

donde como $W_2^{(kq)}$ es una función creciente y por definición de $F_{Y_{T_a}}^{(kq)}$ (3.1), entonces

$$\begin{aligned}
C_{kq}(z) &= \lambda(a,kq)\left[1-\int_{[a,z)}\frac{W_2^{(kq)}(z-y)}{W_2^{(kq)}(z)}F_{Y_{T_a}}^{(kq)}(dy)\right]\\
&\geq \lambda(a,kq)\left[1-\int_{[a,z)}F_{Y_{T_a}}^{(kq)}(dy)\right]\\
&= \lambda(a,kq)\left(1-\mathbb{E}\left[e^{-kqT_a}\mathbb{1}_{\{Y_{T_a}\in[a,z)\}}\right]\right)\\
&\geq \lambda(a,kq)\left(1-\mathbb{E}\left[e^{-kqT_a}\right]\right) \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

para $q>0$ y $z>a$. Así, obtenemos que $\int_a^\infty C_{kq}(z)dz=\infty$. Por otro lado, como

$$w_k(u)\leq \mathbb{E}_u\left[\left(\int_0^{\tau_0^-}e^{-qt}dt\right)^k\right]\leq q^{-k}$$

haciendo u tender a infinito obtenemos que

$$\lim_{u\to\infty} w_k(u)e^{-\int_a^u C_{kq}(z)dz}=0.$$

Por lo tanto, en la identidad (3.21) vemos que

$$w_k(a)=\int_a^\infty e^{-\int_a^y C_{kq}(z)dz}\left(\lambda(a,kq)m_{k-1}(y)-m'_{k-1}(y)\right)dy.$$

Sustituyendo en (3.21) concluimos que

$$w_k(u)=\int_u^\infty e^{-\int_u^y C_{kq}(z)dz}\left(\lambda(a,kq)m_{k-1}(y)-m'_{k-1}(y)\right)dy.$$

□

Para el caso $0<u<a$ basta con aplicar la propiedad fuerte de Markov con respecto a τ_a^+. Por ende este caso se omite.

De igual manera, podemos calcular los momentos de B_q

Teorema 3.15. *Para toda $q>0$, $k\in\mathbb{N}$ y $u\geq a$, tenemos que*

$$\mathbb{E}_u\left[(B_q)^k\right]=\int_u^\infty e^{-\int_u^y C_{kq}(z)dz}\left(\lambda(a,kq)n_{k-1}(y)-n'_{k-1}(y)\right)dy,$$

donde

$$\begin{aligned}
n_{k-1}(z) &= \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{l=j}^{k}\binom{k-j}{l-j}\frac{(-1)^{l-j}}{q^{k-j}}\int_z^\infty \mathbb{E}_x\left[(B_q)^j\right]e^{-\lambda(a,kq)(x-z)}(\lambda(a,kq)-C_{kq,lq}(x))dx\\
&+\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{q^k}\int_z^\infty e^{-\lambda(a,kq)(x-z)}(\lambda(a,kq)-C_{kq,jq}(x)+D_{kq,jq}(x))dx
\end{aligned} \qquad (3.23)$$

Demostración. Sea $v_k(u):=\mathbb{E}_u\left[(B_q)^k\right]$. Como $Q_t=1$ para toda $t\in[0,T_a)$ y el hecho de que la hipótesis $u\geq a$ implica que $T_a\leq\tau_0^-$ c.s., entonces al condicionar sobre $\mathcal{F}_{T_a}$ y utilizando que $Q_t = 2$ para toda $t \in [T_a, \tau)$, donde $\tau = \tau_0^- \wedge \tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
v_k(u) &= \mathbb{E}_u\left[\left(\int_{T_a}^{\tau_0^-} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=2\}}dt\right)^k\right] \\
&= \mathbb{E}_u\left[\left(\int_{T_a}^{\tau} e^{-qt}dt + \int_{\tau}^{\tau_0^-} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=2\}}dt\right)^k\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\mathbb{E}_u\left[\mathbb{E}\left[\left(\int_{T_a}^{\tau} e^{-qt}dt\right)^{k-j}\left(\int_{\tau}^{\tau_0^-} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=2\}}dt\right)^j\middle|\mathcal{F}_{T_a}\right]\right] \\
&+ \mathbb{E}_u\left[\left(\int_{T_a}^{\tau} e^{-qt}dt\right)^k\right] \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Por otra parte, para $j \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\int_{T_a}^{\tau} e^{-qt}dt\right)^{k-j}\left(\int_{\tau}^{\tau_0^-} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=2\}}dt\right)^j\middle|\mathcal{F}_{T_a}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-q(k-j)T_a}\left(\int_0^{\tau-T_a} e^{-qt}dt\right)^{k-j} e^{-qjT_a}\left(\int_{\tau-T_a}^{\tau_0^- - T_a} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=2\}}dt\right)^j\middle|\mathcal{F}_{T_a}\right] \\
&= e^{-qkT_a}\mathbb{E}_{\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}}\left[\left(\int_0^{\tau} e^{-qt}dt\right)^{k-j}\left(\int_{\tau}^{\tau_0^-} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=2\}}dt\right)^j\right].
\end{aligned}
$$

Luego, condicionando sobre $\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}$ y utilizando el mismo argumento que en (3.19) obtenemos que para $j \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}}\left[\left(\int_0^{\tau} e^{-qt}dt\right)^{k-j}\left(\int_{\tau}^{\tau_0^-} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=2\}}dt\right)^j\right] \\
&= \mathbb{E}_{\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}}\left[\left(\int_0^{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}} e^{-qt}dt\right)^{k-j}\left(\int_{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}}^{\tau_0^-} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=2\}}dt\right)^j\mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}<\tau_0^-\right\}}\right] \\
&= \mathbb{E}_{\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}}\left[\left(\int_0^{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}} e^{-qt}dt\right)^{k-j}\mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}<\tau_0^-\right\}}\mathbb{E}\left[\left(\int_{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}}^{\tau_0^-} e^{-qt}\mathbb{1}_{\{Q_t=2\}}dt\right)^j\middle|\mathcal{F}_{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}}\right]\right] \\
&= \sum_{l=j}^{k}\binom{k-j}{l-j}\frac{(-1)^{l-j}}{q^{k-j}}\mathbb{E}_{\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}}\left[e^{-ql\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}}\mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}<\tau_0^{2,-}\right\}}v_j(\overline{X}_{T_a})\right] \\
&= \sum_{l=j}^{k}\binom{k-j}{l-j}\frac{(-1)^{l-j}}{q^{k-j}}\frac{W_2^{(lq)}(\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a})}{W_2^{(lq)}(\overline{X}_{T_a})}v_j(\overline{X}_{T_a}).
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_u\left[\left(\int_{T_a}^{\tau} e^{-qt}dt\right)^k\right] &= \frac{1}{q^k}\mathbb{E}_u\left[\left(e^{-qT_a}-e^{-q\tau}\right)^k\right]\\
&= \frac{1}{q^k}\mathbb{E}_u\left[e^{-qkT_a}\mathbb{E}\left[\left(1-e^{-q(\tau-T_a)}\right)^k\middle|\mathcal{F}_{T_a}\right]\right]\\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{q^k}\mathbb{E}_u\left[e^{-qkT_a}\mathbb{E}_{\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}}\left[e^{-qj\tau}\right]\right],
\end{aligned}
$$

donde por el Teorema 2.1 tenemos que,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}}\left[e^{-qj\tau}\right] &= \mathbb{E}_{\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}}\left[e^{-qj\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}}\mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}<\tau^{2,-}_0\right\}}\right]+\mathbb{E}_{\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a}}\left[e^{-qj\tau^{2,-}_0}\mathbb{1}_{\left\{\tau^{2,-}_0<\tau^{2,+}_{\overline{X}_{T_a}}\right\}}\right]\\
&= \frac{W_2^{(jq)}(\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a})}{W_2^{(jq)}(\overline{X}_{T_a})}+Z_2^{(jq)}(\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a})-Z_2^{(jq)}(\overline{X}_{T_a})\frac{W_2^{(jq)}(\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a})}{W_2^{(jq)}(\overline{X}_{T_a})}.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo todo lo anterior en (3.24) y separando el caso $j=k$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
v_k(u) &= \mathbb{E}_u\left[e^{-kqT_a}\frac{W_2^{(kq)}(\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a})}{W_2^{(kq)}(\overline{X}_{T_a})}v_k(\overline{X}_{T_a})\right]\\
&+\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{l=j}^{k}\binom{k-j}{l-j}\frac{(-1)^{l-j}}{q^{k-j}}\mathbb{E}_u\left[e^{-kqT_a}\frac{W_2^{(lq)}(\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a})}{W_2^{(lq)}(\overline{X}_{T_a})}v_j(\overline{X}_{T_a})\right]\\
&+\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{q^k}\mathbb{E}_u\left[e^{-qkT_a}\frac{W_2^{(jq)}(\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a})}{W_2^{(jq)}(\overline{X}_{T_a})}\right]\\
&+\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{q^k}\mathbb{E}_u\left[e^{-qkT_a}\left(Z_2^{(jq)}(\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a})-Z_2^{(jq)}(\overline{X}_{T_a})\frac{W_2^{(jq)}(\overline{X}_{T_a}-Y_{T_a})}{W_2^{(jq)}(\overline{X}_{T_a})}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, utilizando probabilidad total para integrar primero sobre los valores de $\overline{X}_{T_a}\geq u$ para luego integrar sobre los valores de $Y_{T_a}\in[a,\overline{X}_{T_a})$ para los primeros tres sumandos y $Y_{T_a}\geq a$ para el cuarto sumando, así por el Corolario 3.5 concluimos que

$$
\begin{aligned}
v_k(u) &= \int_u^\infty\int_{[a,x)}\mathbb{E}_u\left[e^{-kqT_a}\mathbb{1}_{\left\{\overline{X}_{T_a}\in dx,Y_{T_a}\in dy\right\}}\right]\frac{W_2^{(kq)}(x-y)}{W_2^{(kq)}(x)}v_k(x)\\
&+\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{l=j}^{k}\binom{k-j}{l-j}\frac{(-1)^{l-j}}{q^{k-j}}\int_u^\infty\int_{[a,x)}\mathbb{E}_u\left[e^{-kqT_a}\mathbb{1}_{\left\{\overline{X}_{T_a}\in dx,Y_{T_a}\in dy\right\}}\right]\frac{W_2^{(lq)}(x-y)}{W_2^{(lq)}(x)}v_j(x)\\
&+\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{q^k}\int_u^\infty\int_{[a,x)}\mathbb{E}_u\left[e^{-kqT_a}\mathbb{1}_{\left\{\overline{X}_{T_a}\in dx,Y_{T_a}\in dy\right\}}\right]\frac{W_2^{(jq)}(x-y)}{W_2^{(jq)}(x)}\\
&+\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{q^k}\int_u^\infty\int_a^\infty\mathbb{E}_u\left[e^{-kqT_a}\mathbb{1}_{\left\{\overline{X}_{T_a}\in dx,Y_{T_a}\in dy\right\}}\right]\left(Z_2^{(jq)}(x-y)-Z_2^{(jq)}(x)\frac{W_2^{(jq)}(x-y)}{W_2^{(jq)}(x)}\right)\\
&= \int_u^\infty v_k(x)e^{-\lambda(a,kq)(x-u)}(\lambda(a,kq)-C_{kq}(x))dx+n_{k-1}(u),
\end{aligned}
$$

donde utilizamos la definición de n_{k-1} dada en (3.23). De igual manera que en (3.20), derivando con respecto a u obtenemos que

$$v_k'(u) = C_{kq}(u)v_k(u) - \lambda(a,kq)n_{k-1}(u) + n_{k-1}'(u).$$

Concluimos de igual manera que

$$v_k(u) = \int_u^\infty e^{-\int_u^y C_{kq}(z)dz}(\lambda(a,kq)n_{k-1}(y) - n_{k-1}'(y))dy.$$

□

Para el caso $0 < u < a$ basta con aplicar la propiedad fuerte de Markov con respecto a τ_a^+. Por ende este caso se omite.

En particular podemos deducir los tiempos esperados de ocupación en cada régimen antes de la ruina.

Corolario 3.16. *Para toda $q > 0$ y $u \geq a$,*

$$\mathbb{E}_u[A_q] = \left(W_1^{(q)}(a) - \lambda(a,q)\int_0^a W_1^{(q)}(x)dx\right)\int_u^\infty e^{-\int_u^y C_q(z)dz}dy.$$

Demostración. Haciendo $k = 1$ en el Teorema 3.14 y por definición de $Z_1^{(q)}$ (2.1) tenemos que

$$m_0(z) = \frac{1 - Z_1^{(q)}(a)}{q} + \frac{W_1^{(q)}(a)}{\lambda(a,q)} = \frac{W_1^{(q)}(a)}{\lambda(a,q)} - \int_0^a W_1^{(q)}(x)dx.$$

Así, como $m_0'(z) \equiv 0$, concluimos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_u\left[A_q\right] &= \int_u^\infty e^{-\int_u^y C_q(z)dz}\lambda(a,q)m_0(y)dy \\ &= \left(W_1^{(q)}(a) - \lambda(a,q)\int_0^a W_1^{(q)}(x)dx\right)\int_u^\infty e^{-\int_u^y C_q(z)dz}dy \qquad (3.25)\end{aligned}$$

□

Corolario 3.17. *Para toda $q > 0$ y $u \geq a$,*

$$\mathbb{E}_u[B_q] = \frac{1 - \int_u^\infty e^{-\int_u^y C_q(z)dz}D_q(y)dy}{q} - \mathbb{E}_u[A_q]$$

Demostración. Haciendo $k = 1$ en el Teorema 3.15 y por definición de $C_{s,q}$ y $D_{s,q}$ dadas en (3.5) y (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned}n_0(z) &= \frac{e^{\lambda(a,q)z}}{q}\left[\int_z^\infty e^{-\lambda(a,q)x}\left(D_{q,0}(x) - C_{q,0}(x) + C_q(x) - D_q(x)\right)dx\right] \\ &= \frac{e^{\lambda(a,q)z}}{q}\left[\int_z^\infty e^{-\lambda(a,q)x}\left(\lambda(a,q)\mathbb{E}\left[e^{-qT_a}\right] - \lambda(a,q) + C_q(x) - D_q(x)\right)dx\right],\end{aligned}$$

donde, por el Teorema 3.2, tenemos que

$$n_0(z) = \frac{Z_1^{(q)}(a) - 1}{q} - \frac{W_1^{(q)}(a)}{\lambda(a,q)} + \frac{e^{\lambda(a,q)z}}{q}\left[\int_z^\infty e^{-\lambda(a,q)x}\left(C_q(x) - D_q(x)\right)dx\right]$$

con derivada

$$n_0'(z) = \lambda(a,q)\left[n_0(z) - \left(\frac{Z_1^{(q)}(a)-1}{q} - \frac{W_1^{(q)}(a)}{\lambda(a,q)}\right)\right] - \frac{C_q(z)-D_q(z)}{q}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_u[B_q] &= \int_u^\infty e^{-\int_u^y C_q(z)dz}(\lambda(a,q)n_0(y) - n_0'(y))dy \\ &= \int_u^\infty e^{-\int_u^y C_q(z)dz}\left(\lambda(a,q)\frac{Z_1^{(q)}(a)-1}{q} - W_1^{(q)}(a) + \frac{C_q(y)-D_q(y)}{q}\right)dy.\end{aligned}$$

Notemos que si $F(y) = e^{-\int_u^y C_q(z)dz}$, donde sabemos que $F(u) = 1$ y $F(\infty) = 0$ por la observación en (3.22), entonces $F'(y) = -F(y)C_q(y)$ y así por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\begin{aligned}\int_u^\infty e^{-\int_u^y C_q(z)dz}C_q(y)dy &= \int_u^\infty F(y)C_q(y)dy \\ &= -\int_u^\infty F'(y)dy = F(u) - F(\infty) = 1.\end{aligned}$$

Utilizando (3.25) concluimos nuestro resultado. □

3.2.4. Modelo de primas con cambio de régimen

En esta sección definimos el modelo de primas con cambio de régimen de la siguiente manera. Supongamos que X^1 y X^2 son procesos de difusión con saltos que cumplen que $c_1 < c_2$, $\sigma := \sigma_1 = \sigma_2$ y $\Pi := \Pi_1 = \Pi_2$ con $0 < \Pi(-\infty, 0) < \infty$. Entonces, por lo discutido en la Sección 1.2, podemos expresar a X como

$$X_t = u + \mathbf{d}_t t + \sigma B_t - \sum_{i=1}^{N_t} J_i, \quad t \geq 0, \tag{3.26}$$

donde

$$\mathbf{d}_t = \begin{cases} d_1 := c_1 + \int_{(-1,0)} |y|\Pi(dy) & \text{si } Q_t = 1, \\ d_2 := c_2 + \int_{(-1,0)} |y|\Pi(dy) & \text{si } Q_t = 2, \end{cases}$$

$N = \{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson con tasa $\lambda := \Pi(-\infty, 0)$, $J = \{J_i\}_{i\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias positivas i.i.d con función de distribución común $F(dy) = \frac{1}{\lambda}\Pi(-dy)$ y $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano estándar tales que N, J y B son mutuamente independientes. Este modelo esencialmente cambia entre las tasas de prima d_1 y d_2 de acuerdo al cambio de régimen basado en el declive.

Con este modelo en mente, veamos su relación con otros dos modelos de riesgo que se encuentran en la literatura.

Relación con el modelo de impuestos loss-carry-forward: $\sigma = 0$

En este apartado veremos que cuando $\sigma = 0$ el modelo de primas con cambio de régimen (3.26) se reduce al modelo de impuestos loss-carry-forward con tasa de impuesto $\gamma = \frac{d_2 - d_1}{d_1}$ cuando a tiende a cero [9].

Proposición 3.18. *Consideremos el modelo de primas con cambio de régimen y $\sigma = 0$. Entonces, para toda $q \geq 0$ y $0 < u < b$,*

$$\lim_{a\to 0+} \mathbb{E}_u\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{\{\tau_b^+<\tau_0^-\}}\right] = \lim_{a\to 0+}\frac{\boldsymbol{W}_a^{(q)}(u)}{\boldsymbol{W}_a^{(q)}(b)} = \left(\frac{W_2^{(q)}(u)}{W_2^{(q)}(b)}\right)^{\frac{d_2}{d_1}}$$

Demostración. Por definición, haciendo $a \to 0+$ y por los Lemas 2.6 y 2.10 obtenemos que

$$\lim_{a\to 0+} \lambda(a,q) = \frac{q+\lambda}{d_1}.$$

Así,

$$\lim_{a\to 0+} F_{Y_{T_a}}^{(q)}(dy) = \lim_{a\to 0+}\frac{W_1^{(q)}(0+)}{\lambda(a,q)}\Pi_1(-dy) = \frac{\lambda}{q+\lambda}F(dy).$$

Por otro lado, haciendo $a \to 0+$ en la Proposición 3.7 obtenemos que

$$W_2^{(q)}(z) - \frac{\lambda}{q+\lambda}\int_0^z W_2^{(q)}(z-y)F(dy) = \frac{d_2}{q+\lambda}W_2^{(q)\prime}(z), \quad z > a.$$

Sustituyendo observemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0+} C_q(z) &= \lim_{a\to 0+}\lambda(a,q)\left(1 - \int_{[a,z)}\frac{W_2^{(q)}(z-y)}{W_2^{(q)}(z)}F_{Y_{T_a}}^{(q)}(dy)\right)\\
&= \frac{q+\lambda}{d_1 W_2^{(q)}(z)}\left(W_2^{(q)}(z) - \frac{\lambda}{q+\lambda}\int_0^z W_2^{(q)}(z-y)F(dy)\right)\\
&= \frac{d_2}{d_1}\frac{W_2^{(q)\prime}(z)}{W_2^{(q)}(z)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0+}\mathbf{W}_a^{(q)}(x) &= \lim_{a\to 0+}\frac{W_1^{(q)}(x)W_1^{(q)}(a)}{W_1^{(q)}(x\vee a)}e^{\int_a^{x\vee a}C_q(z)dz}\\
&= \frac{1}{d_1}e^{\int_0^x \frac{d_2}{d_1}\frac{W_2^{(q)\prime}(z)}{W_2^{(q)}(z)}dz}\\
&= \frac{1}{d_1}\left(d_2 W_2^{(q)}(x)\right)^{\frac{d_2}{d_1}},
\end{aligned}$$

concluyendo el resultado. □

Relación con el modelo de prima simple: $\sigma > 0$

En el caso en el que $\sigma > 0$ entonces el siguiente resultado nos dice que el modelo de primas con cambio de régimen (3.26) se reduce al modelo de difusión con saltos con tasa de prima simple d_2 cuando a tiende a cero.

Proposición 3.19. *Consideremos el modelo de primas con cambio de régimen y $\sigma > 0$. Entonces, para toda $q \geq 0$ y $0 < u < b$,*

$$\lim_{a\to 0+} \mathbb{E}_u\left[e^{-q\tau_b^+}\mathbb{1}_{\{\tau_b^+<\tau_0^-\}}\right] = \lim_{a\to 0+}\frac{\boldsymbol{W}_a^{(q)}(u)}{\boldsymbol{W}_a^{(q)}(b)} = \frac{W_2^{(q)}(u)}{W_2^{(q)}(b)}.$$

Demostración. Definiendo $\overline{F}^{(q)}_{Y_{T_a}}(y) := \mathbb{E}\left[e^{-qT_a}\mathbb{1}_{\{Y_{T_a}>y\}}\right]$, por Corolario 3.5 y usando que $\frac{W_1^{(q)\prime}(z)}{\lambda(a,q)} - W_1^{(q)}(z) \geq 0$ para $z \in [0,a]$ por ser la densidad de una medida resolvente por Teorema 3.3, veamos que por Teorema de Tonelli

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F}^{(q)}_{Y_{T_a}}(a)}{a} &= \frac{1}{a}\int_a^\infty F^{(q)}_{Y_{T_a}}(dy) \\
&= \frac{1}{a}\int_a^\infty \int_0^a \left(\frac{W_1^{(q)\prime}(z)}{\lambda(a,q)} - W_1^{(q)}(z)\right)\Pi(z-dy)dz \\
&= \frac{\lambda}{a}\int_0^a \left[\left(\frac{W_1^{(q)\prime}(z)}{\lambda(a,q)} - W_1^{(q)}(z)\right)\left(\int_a^\infty F(dy-z)\right)\right]dz \\
&\leq \frac{\lambda}{a}\int_0^a \left(\frac{W_1^{(q)\prime}(z)}{\lambda(a,q)} - W_1^{(q)}(z)\right)dz \\
&\leq \frac{\lambda}{a\lambda(a,q)}\int_0^a W_1^{(q)\prime}(z)dz \\
&= \frac{\lambda W_1^{(q)}(a)^2}{aW_1^{(q)\prime}(a)},
\end{aligned}$$

donde, por Lemas 2.6 y 2.10 sabemos que $W_1^{(q)}(0+) = 0$ y $\lim_{a\to 0+}\frac{W_1^{(q)}(a)}{a} = W_1^{(q)\prime}(0+) = \frac{2}{\sigma^2}$, y así concluimos que

$$\lim_{a\to 0+}\frac{\lambda W_1^{(q)}(a)^2}{aW_1^{(q)\prime}(a)} = 0,$$

y como $\overline{F}^{(q)}_{Y_{T_a}}(a) \geq 0$, entonces

$$\lim_{a\to 0+}\frac{\overline{F}^{(q)}_{Y_{T_a}}(a)}{a} = 0.$$

Por lo tanto, $\overline{F}^{(q)}_{Y_{T_a}}(a) = o(a)$ y así

$$\begin{aligned}
C_q(z) &= \lambda(a,q)\left(1 - \int_{[a,z)}\frac{W_2^{(q)}(z-y)}{W_2^{(q)}(z)}F^{(q)}_{Y_{T_a}}(dy)\right) \\
&= \lambda(a,q)\left(1 - \frac{W_2^{(q)}(z-a)}{W_2^{(q)}(z)}F^{(q)}_{Y_{T_a}}(a) - \int_{(a,z)}\frac{W_2^{(q)}(z-y)}{W_2^{(q)}(z)}F^{(q)}_{Y_{T_a}}(dy)\right) \\
&= \lambda(a,q)\left(1 - \frac{W_2^{(q)}(z-a)}{W_2^{(q)}(z)}F^{(q)}_{Y_{T_a}}(a) + o(a)\right).
\end{aligned}$$

Notemos que por (3.1)

$$\lim_{a\to 0+}F^{(q)}_{Y_{T_a}}(a) = \lim_{a\to 0+}\frac{\sigma^2}{2}\left(W_1^{(q)\prime}(a) - \frac{W_1^{(q)\prime\prime}(a)}{\lambda(a,q)}\right) = 1,$$

pues si $\sigma > 0$ entonces, por definición de $\lambda(a, q)$ (3.2), $\lim_{a\to 0+} \lambda(a, q) = \infty$ por Lemas 2.6 y 2.10, y $W_1^{(q)} \in C^2(0, \infty)$ por Teorema 2.5. Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0+} C_q(z) &= \lim_{a\to 0+} \lambda(a, q) \left(1 - \frac{W_2^{(q)}(z-a)}{W_2^{(q)}(z)} F_{Y_{T_a}}^{(q)}(a) + o(a)\right) \\
&= \lim_{a\to 0+} a\lambda(a, q) \left(\frac{W_2^{(q)}(z) - W_2^{(q)}(z-a) F_{Y_{T_a}}^{(q)}(a)}{aW_2^{(q)}(z)} + \frac{o(a)}{a}\right) \\
&= \frac{W_2^{(q)\prime}(z)}{W_2^{(q)}(z)}
\end{aligned}$$

por definición de derivada y donde

$$\lim_{a\to 0+} a\lambda(a, q) = \lim_{a\to 0+} \frac{aW_1^{(q)\prime}(a)}{W_1^{(q)}(a)} = 1,$$

pues $\lim_{a\to 0+} \frac{W_1^{(q)}(a)}{a} = W_1^{(q)\prime}(0+)$. Por lo tanto, para $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0+} \mathbf{W}_a^{(q)}(x) &= \lim_{a\to 0+} \frac{W_1^{(q)}(x) W_1^{(q)}(a)}{W_1^{(q)}(x \vee a)} e^{\int_a^{x\vee a} C_q(z)dz} \\
&= \lim_{a\to 0+} W_1^{(q)}(a) e^{\int_a^x \frac{W_2^{(q)\prime}(z)}{W_2^{(q)}(z)} dz} \\
&= \lim_{a\to 0+} \frac{W_1^{(q)}(a)}{W_2^{(q)}(a)} W_2^{(q)}(x) \\
&= \lim_{a\to 0+} \frac{W_1^{(q)\prime}(a)}{W_2^{(q)\prime}(a)} W_2^{(q)}(x) \\
&= W_2^{(q)}(x),
\end{aligned}$$

concluyendo el resultado. □

Modelo de Riesgo Poisson Compuesto con Saltos Exponenciales

Observemos que ocurre cuando consideramos que X^k $(k = 1, 2)$ son procesos de Poisson compuestos con deriva y saltos exponenciales; es decir,

$$X_t^k = u + d_k t - \sum_{i=1}^{N_t^k} J_i^k \quad t \geq 0,$$

donde d_k, λ_k y β_k son constantes positivas correspondientes a las tasas de las primas, las tasas de las llegadas de los reclamos (N^k) y las tasas de los montos de los reclamos (J^k) respectivamente. En este caso, tendremos que las transformadas de Laplace cumplen que

$$\psi_k(s) = d_k s - \frac{\lambda_k s}{s + \beta_k}, \quad \text{para } s \geq 0.$$

con $\mu_k = d_k - \frac{\lambda_k}{\beta_k} > 0$ para evitar la ruina segura por el Teorema 3.12. Además supondremos que $d_1 \leq d_2$, $\lambda_1 \geq \lambda_2$, $\beta_1 \leq \beta_2$ y $\mu_1 \leq \mu_2$, esto con el fin de recuperarnos al estar en el régimen con riesgo. Así calculando sus funciones escala con la inversa de la transformada de Laplace utilizando el Teorema 2.1 (i) obtenemos que

$$W_k(x) = \frac{1}{d_k \xi_k}\left(\beta_k - \frac{\lambda_k}{d_k} e^{-\xi_k x}\right), \quad x \geq 0,$$

donde $\xi_k = \beta_k - \frac{\lambda_k}{d_k} > 0$ y $\xi_1 \leq \xi_2$. Luego, como

$$W_k'(x) = \frac{\lambda_k}{d_k^2} e^{-\xi_k x},$$

se sigue que

$$\lambda(a,0) = \frac{\lambda_1 \xi_1 e^{-\xi_1 a}}{d_1 \beta_1 - \lambda_1 e^{-\xi_1 a}}.$$

Por otra parte, por (3.1), se puede obtener que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_{T_a} \in dy) &= \int_0^a \left(\frac{W_1'(z)}{\lambda(a,0)} - W_1(z)\right)\Pi_1(z-dy)dz + \frac{W_1(0+)}{\lambda(a,0)}\Pi_1(-dy) \\
&= \frac{\beta_1 \lambda_1 e^{-\beta_1 y}}{\lambda(a,0) d_1}\left[\int_0^a \left(\frac{\lambda_1}{d_1} e^{-\xi_1 z} - \lambda(a,0)\left(\frac{\beta_1 d_1 - \lambda_1 e^{-\xi_1 z}}{d_1 \xi_1}\right)\right) e^{\beta_1 z} dz + 1\right] dy \\
&= \frac{\beta_1 \lambda_1 e^{-\beta_1 y}}{\lambda(a,0) d_1}\left[\left(\frac{\lambda_1 \xi_1 + \lambda_1 \lambda(a,0)}{d_1(\xi_1 - \beta_1)\xi_1}\right)\left(1 - e^{-(\xi_1 - \beta_1)a}\right) - \frac{\lambda(a,0)}{\xi_1}\left(e^{\beta_1 a} - 1\right) + 1\right] dy \\
&= \frac{\beta_1 e^{-\beta_1 y}\lambda_1}{\lambda(a,0) d_1^2 (\xi_1 - \beta_1)\xi_1}\Big[(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_1 \lambda(a,0))\left(1 - e^{-(\xi_1 - \beta_1)a}\right) \\
&\quad -\lambda(a,0) d_1 (\xi_1 - \beta_1)\left(e^{\beta_1 a} - 1\right) + d_1(\xi_1 - \beta_1)\xi_1\Big] dy \\
&= \frac{\beta_1 e^{-\beta_1 y}}{\lambda_1 \xi_1 e^{-\xi_1 a}(\lambda_1 - \beta_1 d_1)}\Big[\left(\lambda_1 \xi_1 (d_1 \beta_1 - \lambda_1 e^{-\xi_1 a}) + \lambda_1 \xi_1 \lambda_1 e^{-\xi_1 a}\right)\left(1 - e^{-(\xi_1 - \beta_1)a}\right) \\
&\quad -\xi_1 \lambda_1 e^{-\xi_1 a} d_1 (\xi_1 - \beta_1)\left(e^{\beta_1 a} - 1\right) + d_1(\xi_1 - \beta_1)\xi_1 (d_1 \beta_1 - \lambda_1 e^{-\xi_1 a})\Big] dy \\
&= \beta_1 e^{-\beta_1 (y-a)} dy.
\end{aligned}$$

Es decir, $Y_{T_a} - a$ se distribuye exponencial de parámetro β_1. Por otra parte, calculando $C_0(z)$ por (3.5) vemos que

$$\begin{aligned}
C_0(z) &= \lambda(a,0)\left(1 - e^{\beta_1 a}\int_{[a,z)} \frac{d_2 \beta_2 - \lambda_2 e^{-\xi_2 (z-y)}}{d_2 \beta_2 - \lambda_2 e^{-\xi_2 z}} \beta_1 e^{-\beta_1 y} dy\right) \\
&= \lambda(a,0) - \frac{\lambda(a,0) e^{\beta_1 a}}{d_2 \beta_2 - \lambda_2 e^{-\xi_2 z}}\left[d_2 \beta_2 \left(e^{-\beta_1 a} - e^{-\beta_1 z}\right) - \frac{\lambda_2 \beta_1 e^{-\xi_2 z}}{\beta_1 - \xi_2}\left(e^{-(\beta_1 - \xi_2)a} - e^{-(\beta_1 - \xi_2)z}\right)\right] \\
&= \lambda(a,0) - \frac{\lambda(a,0) e^{\beta_1 a}}{d_2 \beta_2 - \lambda_2 e^{-\xi_2 z}}\left[e^{-\beta_1 a}\left(d_2 \beta_2 - \frac{\lambda_2 \beta_1 e^{-\xi_2 (z-a)}}{\beta_1 - \xi_2}\right) - e^{-\beta_1 z}\left(d_2 \beta_2 - \frac{\lambda_2 \beta_1}{\beta_1 - \xi_2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Por otro lado, para $x \geq u \vee a$ y haciendo cambios de variable,

$$
\begin{aligned}
&\int_{u\vee a}^{x} C_0(z)dz \\
&= \lambda(a,0)(x-u\vee a) - \frac{\lambda(a,0)}{\beta_1-\xi_2}\int_{u\vee a}^{x} \frac{d_2\beta_2(\beta_1-\xi_2)-\lambda_2\beta_1 e^{-\xi_2(z-a)}}{d_2\beta_2-\lambda_2 e^{-\xi_2 z}}dz \\
&+ \frac{\lambda(a,0)e^{\beta_1 a}(d_2\beta_2(\beta_1-\xi_2)-\lambda_2\beta_1)}{\beta_1-\xi_2}\int_{u\vee a}^{x}\frac{e^{-\beta_1 z}}{d_2\beta_2-\lambda_2 e^{-\xi_2 z}}dz \\
&= \lambda(a,0)(x-u\vee a) \\
&- \frac{\lambda(a,0)}{(\beta_1-\xi_2)\xi_2}\left[(\beta_1-\xi_2-\beta_1 e^{\xi_2 a})\log\left(\frac{d_2\beta_2 e^{\xi_2 x}-\lambda_2}{d_2\beta_2 e^{\xi_2(u\vee a)}-\lambda_2}\right)+\beta_1\xi_2 e^{\xi_2 a}(x-u\vee a)\right] \\
&+ \frac{\lambda(a,0)e^{\beta_1 a}(d_2\beta_2(\beta_1-\xi_2)-\lambda_2\beta_1)}{\beta_1-\xi_2}\int_{0}^{x-u\vee a}\frac{e^{-\beta_1(z+u\vee a)}}{d_2\beta_2-\lambda_2 e^{-\xi_2(z+u\vee a)}}dz \\
&= \rho_1(x-u\vee a) - \frac{\rho_1}{\xi_2}\log\left(\frac{d_2\beta_2 e^{\xi_2 x}-\lambda_2}{d_2\beta_2 e^{\xi_2(u\vee a)}-\lambda_2}\right)+\rho_2\frac{\beta_1}{\xi_2}\int_{e^{-\xi_2(x-u\vee a)}}^{1}\frac{t^{\frac{\beta_1}{\xi_2}-1}}{1-\frac{\lambda_2}{d_2\beta_2}e^{-\xi_2(u\vee a)}t}dt,
\end{aligned}
$$

donde

$$
\rho_1 = \lambda(a,0)\left(1-\frac{\beta_1 e^{\xi_2 a}}{\beta_1-\xi_2}\right) \quad \text{y} \quad \rho_2 = \frac{\lambda(a,0)e^{-\beta_1(u\vee a-a)}}{\beta_1}\left(1-\frac{\lambda_2\beta_1}{d_2\beta_2(\beta_1-\xi_2)}\right).
$$

Notemos que para x suficientemente grande, tendremos que

$$
\begin{aligned}
\rho_1 x - \frac{\rho_1}{\xi_2}\log\left(d_2\beta_2 e^{\xi_2 x}-\lambda_2\right) &\approx \rho_1\left[x-\frac{\log\left(d_2\beta_2 e^{\xi_2 x}\right)}{\xi_2}\right] \\
&= -\rho_1\left[\frac{\log\left(d_2\beta_2\right)}{\xi_2}\right].
\end{aligned}
$$

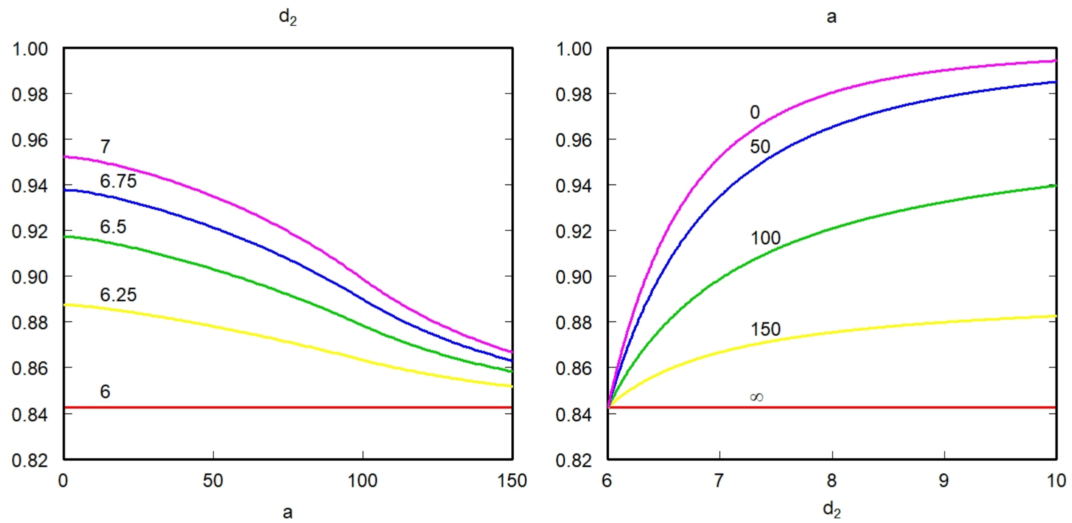
Por lo tanto, por el Corolario 3.11, concluimos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_u(\tau_0^- = \infty) &= \frac{W_1(u)}{W_1(u\vee a)}e^{-\int_{u\vee a}^{\infty}C_0(z)dz} \\
&\approx \frac{\beta_1 d_1-\lambda_1 e^{-\xi_1 u}}{\beta_1 d_1-\lambda_1 e^{-\xi_1(u\vee a)}} \\
&\times \exp\left\{\rho_1\left(u\vee a+\frac{\log(d_2\beta_2)}{\xi_2}\right)-\frac{\rho_1}{\xi_2}\log\left(d_2\beta_2 e^{\xi_2(u\vee a)}-\lambda_2\right)\right. \\
&\left. -\ \rho_2\ {}_2F_1\left(1,\frac{\beta_1}{\xi_2},\frac{\beta_1}{\xi_2}+1;\frac{\lambda_2}{d_2\beta_2}e^{-\xi_2(u\vee a)}\right)\right\} \\
&= \frac{\beta_1 d_1-\lambda_1 e^{-\xi_1 u}}{\beta_1 d_1-\lambda_1 e^{-\xi_1(u\vee a)}}\left(1-\frac{\lambda_2}{d_2\beta_2}e^{-\xi_2(u\vee a)}\right)^{-\frac{\rho_1}{\xi_2}} \\
&\quad \times \exp\left\{-\rho_2\ {}_2F_1\left(1,\frac{\beta_1}{\xi_2},\frac{\beta_1}{\xi_2}+1;\frac{\lambda_2}{d_2\beta_2}e^{-\xi_2(u\vee a)}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

donde ${}_2F_1(a,b,c;z)$ es la serie hipergeométrica gaussiana definida como

$$
{}_2F_1(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt.
$$

A continuación realizamos un análisis numérico de este modelo utilizando sus parámetros. Para ello supongamos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$ y $\beta_1 = \beta_2 = 0.1$ y $d_1 = 6$ están fijos con capital inicial $u = 100$. Así los únicos parámetros que faltan por determinar son la tasa de las primas en el estado con riesgo d_2 y la magnitud mínima del declive para cambiar al régimen con riesgo a. A continuación graficamos las probabilidades de sobrevivencia para diferentes valores de d_2 y a.



Así con este análisis podemos otorgar varias propuestas para garantizar probabilidades de sobrevivencia dadas. Por ejemplo, para las parejas $(12.92, 7)$ y $(100, 12.71)$ de la forma (a, d_2), podemos garantizar un 95 % de probabilidad de sobrevivencia.

Movimiento Browniano Lineal

Ahora consideremos que X^k $(k = 1, 2)$ son Movimientos Brownianos Lineales con exponentes de Laplace $\psi_k(s) = \mu_k s + \frac{1}{2}\sigma_k^2 s^2$ con $\mu_k, \sigma_k > 0$. Calculando sus funciones escala con la inversa de la transformada de Laplace utilizando el Teorema 2.1 (i) obtenemos que

$$W_k(x) = \frac{1 - e^{-2\xi_k x}}{\mu_k},$$

donde $\xi_k = \frac{\mu_k}{\sigma_k^2}$ con derivadas

$$W_k'(x) = \frac{2}{\sigma_k^2} e^{-2\xi_k x} \quad \text{y} \quad W_k''(x) = -\frac{4\xi_k}{\sigma_k^2} e^{-2\xi_k x}.$$

Por lo tanto, se cumple que

$$\lambda(a, 0) = \frac{2\xi_1 e^{-2\xi_1 a}}{1 - e^{-2\xi_1 a}} = \frac{2\xi_1}{e^{2\xi_1 a} - 1}$$

Así, por (3.1), obtenemos que

$$\mathbb{P}\left(Y_{T_a} \in dy\right) = \frac{\sigma_1^2}{2}\left(\frac{2}{\sigma_1^2}e^{-2\xi_1 a} - \frac{-\frac{4\xi_1}{\sigma_1^2}e^{-2\xi_1 a}}{\frac{2\xi_1}{e^{2\xi_1 a}-1}}\right)\delta_a(dy) = \delta_a(dy).$$

Por otra parte, calculando $C_0(z)$ por definición (3.5) tenemos que

$$\begin{aligned}
C_0(z) &= \frac{2\xi_1}{e^{2\xi_1 a}-1}\left(1 - \frac{W_2(z-a)}{W_2(z)}\right) \\
&= \frac{2\xi_1}{e^{2\xi_1 a}-1}\left(1 - \frac{1-e^{-2\xi_2(z-a)}}{1-e^{-2\xi_2 z}}\right) \\
&= \frac{2\xi_1}{e^{2\xi_1 a}-1}\left(\frac{e^{-2\xi_2(z-a)} - e^{-2\xi_2 z}}{1-e^{-2\xi_2 z}}\right) \\
&= 2\xi_1\left(\frac{e^{2\xi_2 a}-1}{e^{2\xi_1 a}-1}\right)\left(\frac{e^{-2\xi_2 z}}{1-e^{-2\xi_2 z}}\right)
\end{aligned}$$

Luego, veamos que

$$\begin{aligned}
\int_{u\vee a}^{\infty} C_0(z)dz &= 2\xi_1\left(\frac{e^{2\xi_2 a}-1}{e^{2\xi_1 a}-1}\right)\left(\frac{\log(1-e^{-2\xi_2 z})}{2\xi_2}\right)\Bigg|_{u\vee a}^{\infty} \\
&= -\frac{\xi_1}{\xi_2}\left(\frac{e^{2\xi_2 a}-1}{e^{2\xi_1 a}-1}\right)\log\left(1-e^{-2\xi_2(u\vee a)}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, definiendo $r = \frac{\xi_1}{\xi_2}\left(\frac{e^{2\xi_2 a}-1}{e^{2\xi_1 a}-1}\right)$ y utilizando (3.15) concluimos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_u\left(\tau_0^- = \infty\right) &= \frac{1-e^{-2\xi_1 u}}{1-e^{-2\xi_1(u\vee a)}}e^{r\log\left(1-e^{-2\xi_2(u\vee a)}\right)} \\
&= \frac{1-e^{-2\xi_1 u}}{1-e^{-2\xi_1(u\vee a)}}\left(1-e^{-2\xi_2(u\vee a)}\right)^r.
\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] Andreas E. Kyprianou. *Fluctuations of Lévy Processes with Applications.* (2012)

[2] Alexey Kuznetsov, Andreas E. Kyprianou, Victor Rivero. *The Theory of Scale Functions for Spectrally Negative Lévy Processes.* (2012)

[3] Aleksandar Mijatovic, Martijn R. Pistorius. *On the drawdown of completely asymmetric Lévy processes.* (2012)

[4] David Landriault, Bin Li, Shu Li. *Analysis of a drawdown-based regime-switching Lévy insurance model.* (2014)

[5] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* (1971)

[6] Avram, Kyprianou, Pistorius. *Exit problems for spectrally negative Lévy processes and applications to (Canadized) Russian options.* (2004)

[7] Pistorius. *On exit and ergodicity of the spectrally one-sided Lévy process reflected at its infimum.* (2004)

[8] David Landriault, Bin Li, Hongzhong Zhang. *On magnitude, asymptotics and duration of drawdowns for Lévy models.* (2014)

[9] Albrecher, Renaud, Zhou. *A Lévy insurance risk process with tax.* (2008)